

Câu 1. (4 điểm)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4 + 5y = 6 \\ x^2y^2 + 5x = 6 \end{cases}$ với $x, y \in \mathbb{R}$.

Câu 2. (4 điểm)

Cho đa thức $P(x; y)$ không phải là đa thức hằng, thỏa mãn: $P(x; y).P(z; t) = P(xz + yt; xt + yz)$, $\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

Chứng minh rằng: $P(x; y)$ chia hết cho ít nhất một trong hai đa thức $Q(x; y) = x + y$, $H(x; y) = x - y$.

Câu 3. (4 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(x + xy + f(y)) = \left(f(x) + \frac{1}{2}\right)\left(f(y) + \frac{1}{2}\right)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Câu 4. (4 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Hai đường phân giác trong và ngoài của $\widehat{ABC}$ lần lượt cắt đường thẳng AC tại B_1 và B_2 ; hai đường phân giác trong và ngoài của $\widehat{ACB}$ lần lượt cắt đường thẳng AB tại C_1 và C_2 . Giả sử đường tròn đường kính B_1B_2 và đường tròn đường kính C_1C_2 cắt nhau tại một điểm P nằm bên trong tam giác ABC . Chứng minh rằng $\widehat{BPC} = 90^\circ$.

Câu 5. (4 điểm)

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 20; u_2 = 30 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n \text{ với } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $(1 + 5.u_n.u_{n+1})$ là một số chính phương.

----- **HẾT** -----