

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



LÝ THUYẾT.

I. SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số;

Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$;

Bước 3. Tìm nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$;

Bước 4. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ và tìm tiệm cận đứng, ngang (nếu có);

Bước 5. Lập bảng biến thiên;

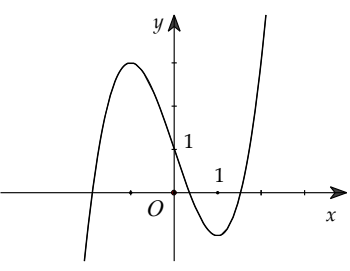
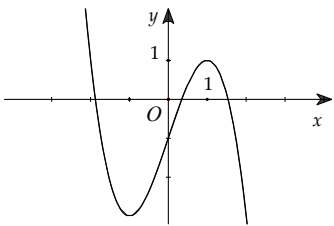
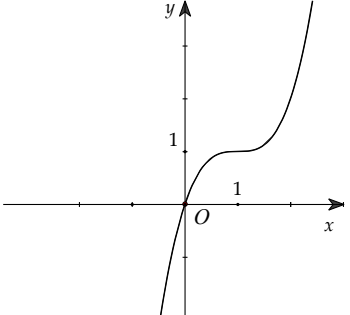
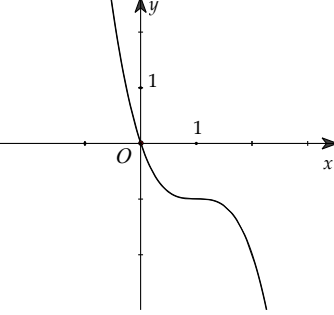
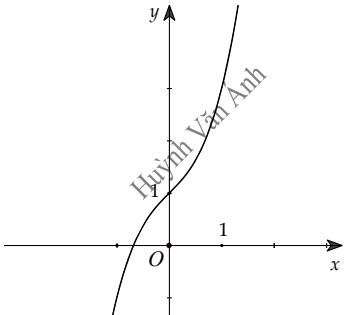
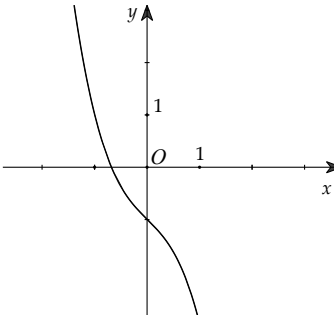
Bước 6. Kết luận tính biến thiên và cực trị (nếu có);

Bước 7. Tìm các điểm đặc biệt của đồ thị (giao với trục Ox , Oy , các điểm đối xứng, ...);

Bước 8. Vẽ đồ thị.

II. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC BA

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		

MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ BÀI TOÁN KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 1: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$

Lời giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$$y' = 3x^2 - 6x. \text{ Xét } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

+ Các giới hạn tại vô cực

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = -\infty.$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$;

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

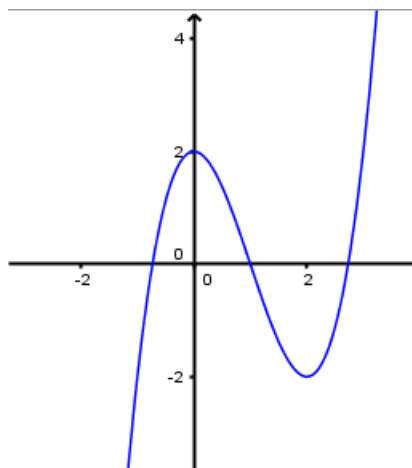
+ Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$; $y_{cd} = y(0) = 2$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$; $y_{ct} = y(2) = -2$

+ Đồ thị

Ta có $x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ đồ thị hàm số qua điểm $A(1; 0)$.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 2$: Đồ thị hàm số cắt Oy tại $B(0; 2)$.



Lưu ý: Đồ thị hàm số nhận điểm $I(1; 0)$ làm tâm đối xứng. Hoành độ điểm I là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ (Điểm uốn)

Câu 2: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

Lời giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$$y' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)^2 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Xét } y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

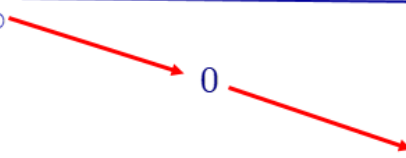
Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị

+ Các giới hạn tại vô cực

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = +\infty.$$

+ Bảng biến thiên:

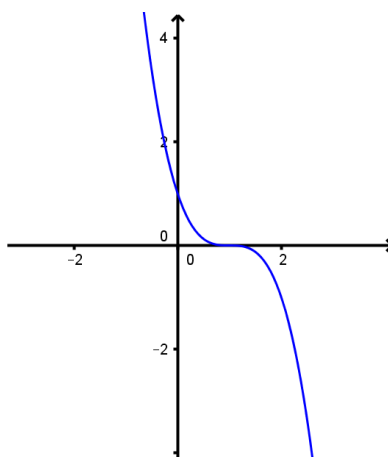
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	
y	$+\infty$				$-\infty$

Đồ thị

Ta có $-x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số qua $A(1;0)$.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số cắt Oy tại $B(0;1)$.

Cho $x = 2 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số qua $C(2;-1)$.



Lưu ý: Đồ thị hàm số nhận điểm $I(1;0)$ làm tâm đối xứng. Hoành độ điểm I là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ (Điểm uốn).

Câu 3: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$

Lời giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$$y' = 3x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Xét } y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Suy ra hàm số luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị

+ Các giới hạn tại vô cực

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

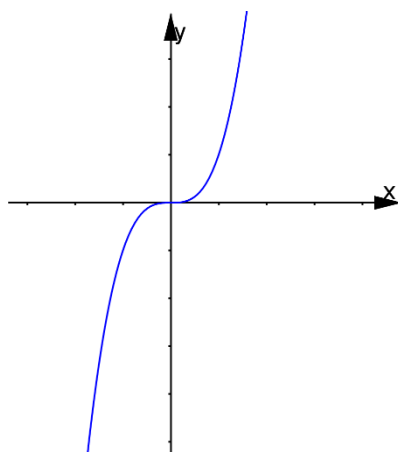
+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$+$
y	$-\infty$	0	$+\infty$

Đồ thị

Ta có $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Vậy đồ thị hàm số qua $O(0;0)$

Cho $x = 1 \Rightarrow y = 1$: Đồ thị hàm số cắt Oy tại $B(1;1)$. Cho $x = -1 \Rightarrow y = -1$: Đồ thị hàm số cắt qua $C(-1;-1)$.



Lưu ý: Đồ thị hàm số nhận điểm $O(0;0)$ làm tâm đối xứng. Hoành độ điểm O là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ (Điểm uốn)

II. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM PHÂN THỨC HỮU TỈ

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$)

$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$

MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ BÀI TOÁN KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 4: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $\frac{x+1}{x-1}$

Lời giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$. Ta thấy y' không xác định khi $x=1$; y' luôn âm với mọi $x \neq 1$

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(1; +\infty)$ và $(-\infty; 1)$.

+ Cực trị:

Hàm số không có cực trị

+ Tiệm cận

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$. Vậy đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$. Vậy đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng

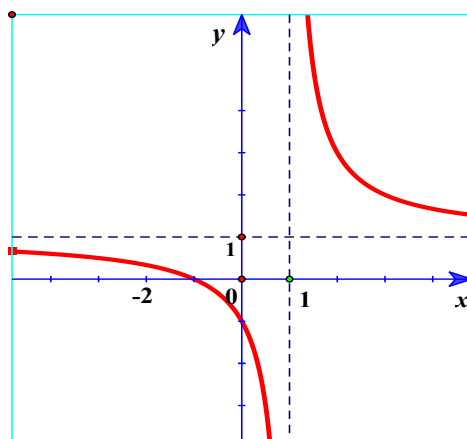
+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		-		-	
y					

Đồ thị của hàm số được vẽ trên bảng biến thiên, với các tiệm cận ngang $y=1$ và tiệm cận đứng $x=1$. Các mũi tên đỏ chỉ hướng của đồ thị khi $x \rightarrow \pm\infty$ và $x \rightarrow 1^\pm$.

Đồ thị

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $A(0; -1)$ và cắt trục hoành tại điểm $B(-1; 0)$ (Hình vẽ)



Lưu ý: Giao điểm $I(1; 1)$ của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị

Câu 5: Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

Ta có $y' = \frac{-3}{(2x-1)^2} < 0$ với mọi $x \neq \frac{1}{2}$

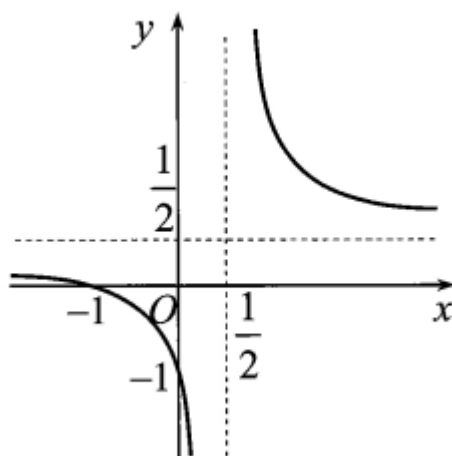
$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{1}{2}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} y = -\infty$. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên của hàm số có dạng:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'			
y	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$

Đồ thị hàm số có dạng:



2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n} \quad (a \neq 0, m \neq 0)$

□ Bước 1: Tìm tập xác định D

□ Bước 2: Tính y' và giải $y' = 0$

□ Bước 3: Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của hàm số

+ Tiệm cận đứng: Tính $\lim_{x \rightarrow \frac{m}{n}^+} y$ và $\lim_{x \rightarrow \frac{m}{n}^-} y$ rồi suy ra tiệm cận đứng là $x = -\frac{m}{n}$

+ Tiệm cận xiên:

- Chia tử cho mẫu để đưa hàm số về dạng $y = px + q + \frac{r}{mx + n}$

- Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (px + q)]$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (px + q)]$ rồi suy ra tiệm cận xiên là $y = px + q$

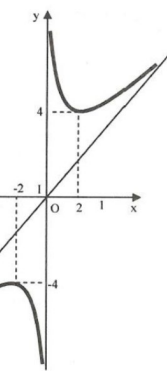
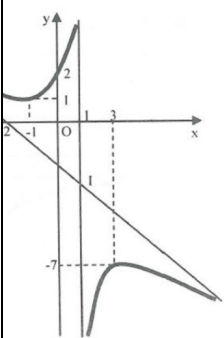
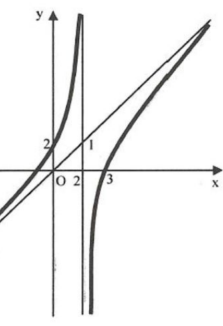
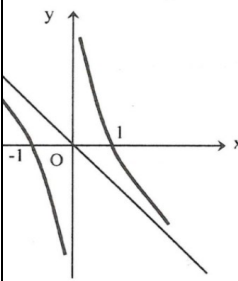
Bước 4: Lập bảng biến thiên

Bước 5: Kết luận các khoảng biến thiên và tâm đối xứng I của hàm số

Bước 6: Lập bảng giá trị

Bước 7: Vẽ đồ thị

Hình dạng đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$

$y' = 0$	a, m cùng dấu	a, m trái dấu
ghiệm phân biệt		
ghệm kép hoặc vô nghiệm		

MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ BÀI TOÁN KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 6: Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau

a) $y = \frac{2x^2 + 5x + 5}{x + 1}$

b) $y = \frac{-x^2 + 2x}{x - 1}$

Lời giải

a) $y = \frac{2x^2 + 5x + 5}{x + 1}$

□ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

□ $y' = \frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

□ $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = -\infty$

$\Rightarrow$ TCD: $x = -1$

□ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (2x + 3)] = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (2x + 3)] = 0$

$\Rightarrow$ TCX: $y = 2x + 3$

□ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-3	5	$+\infty$	$+\infty$	

□ Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$, nghịch biến trên $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$

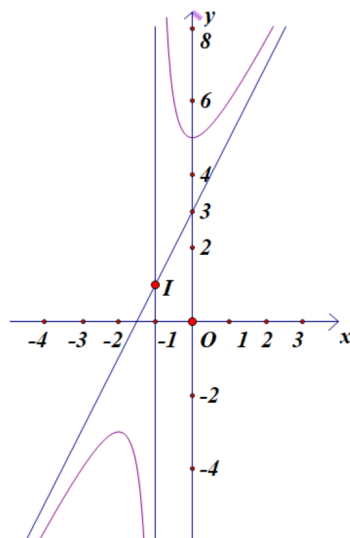
Hàm số đạt cực đại tại điểm $(-2; -3)$ và đạt cực tiểu tại điểm $(0; 5)$.

Hàm số có tâm đối xứng là $I(-1; 1)$

□ Bảng giá trị

x	-3	-2	0	1
y	-4	-3	5	6

□ Đồ thị



b) $y = \frac{-x^2 + 2x}{x - 1}$

☐ $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

☐ $y' = \frac{-x^2 + 2x - 2}{(x - 1)^2}$

$y' = 0 (VN)$

☐ $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$

$\Rightarrow$ TCD: $x = 1$

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (-x + 1)] = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (-x + 1)] = 0$

$\Rightarrow$ TCX: $y = -x + 1$

☐ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$ $	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		$ $	$+\infty$	
		$\searrow$		$\searrow$	
		$-\infty$		$-\infty$	

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

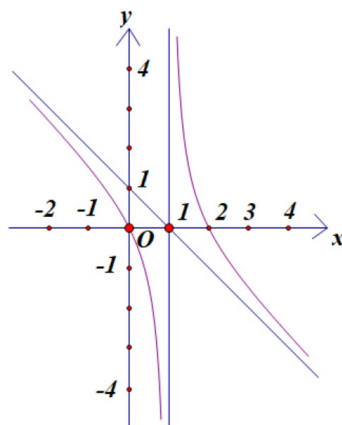
Hàm số có tâm đối xứng là $I(1; 0)$

Huỳnh Văn Anh

Bảng giá trị

x	-1	0	2	3
y	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{3}{2}$

□ Đồ thị



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

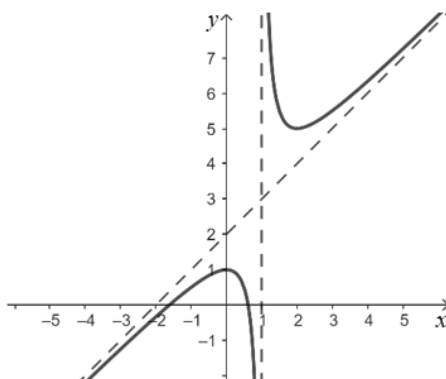
Câu 7: Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau

a) $y = x^3 - 3x^2 + 4$

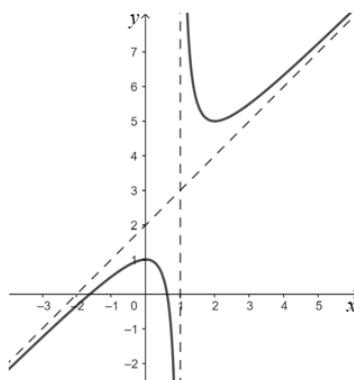
b) $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 7$

Câu 8: Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số $y = \frac{x+2}{x+5}$

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a > 0, m \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi trong các số b, c, m, n có tất cả bao nhiêu số dương?



Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là:



Câu 11: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 + mx - 2}{x - 1}$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt?

Huỳnh Văn Ánh

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



LÝ THUYẾT.

I. SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số;

Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$;

Bước 3. Tìm nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$;

Bước 4. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ và tìm tiệm cận đứng, ngang (nếu có);

Bước 5. Lập bảng biến thiên;

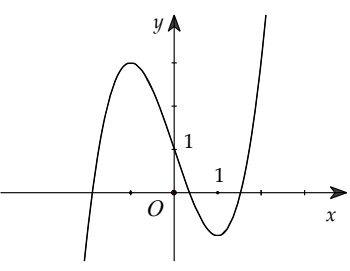
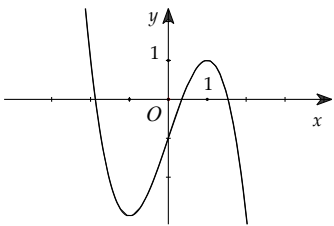
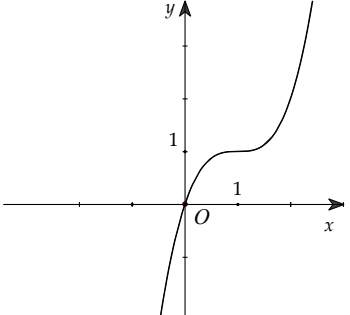
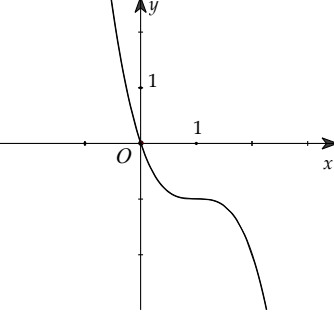
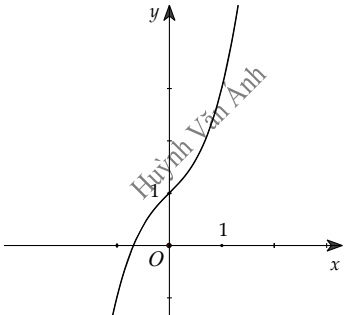
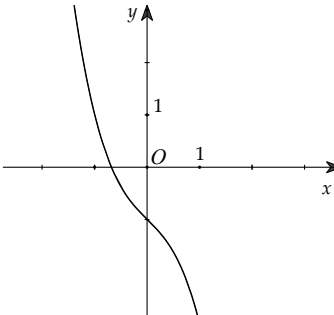
Bước 6. Kết luận tính biến thiên và cực trị (nếu có);

Bước 7. Tìm các điểm đặc biệt của đồ thị (giao với trục Ox , Oy , các điểm đối xứng, ...);

Bước 8. Vẽ đồ thị.

II. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC BA

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$$

TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		

MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ BÀI TOÁN KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 1: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$

Lời giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$$y' = 3x^2 - 6x. \text{ Xét } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

+ Các giới hạn tại vô cực

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3} \right) = -\infty.$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$;

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$

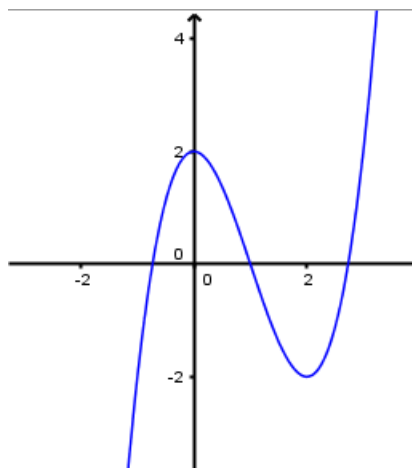
+ Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$; $y_{cd} = y(0) = 2$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$; $y_{ct} = y(2) = -2$

+ Đồ thị

Ta có $x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ đồ thị hàm số qua điểm $A(1; 0)$.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 2$: Đồ thị hàm số cắt Oy tại $B(0; 2)$.



Lưu ý: Đồ thị hàm số nhận điểm $I(1; 0)$ làm tâm đối xứng. Hoành độ điểm I là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ (Điểm uốn)

Câu 2: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$

Lời giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$$y' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)^2 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Xét } y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị

+ Các giới hạn tại vô cực

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = +\infty.$$

+ Bảng biến thiên:

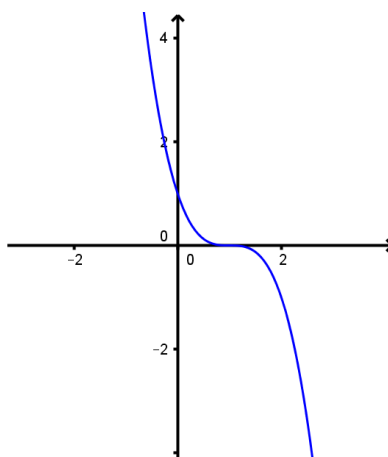
x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		0	
y	$+\infty$	0	$-\infty$

Đồ thị

Ta có $-x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow$ đồ thị hàm số qua $A(1;0)$.

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số cắt Oy tại $B(0;1)$.

Cho $x = 2 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số qua $C(2;-1)$.



Lưu ý: Đồ thị hàm số nhận điểm $I(1;0)$ làm tâm đối xứng. Hoành độ điểm I là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ (Điểm uốn).

Câu 3: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$

Lời giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$$y' = 3x^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Xét } y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Suy ra hàm số luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị

+ Các giới hạn tại vô cực

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

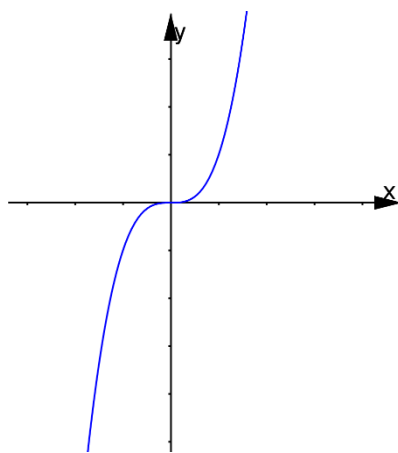
+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$+$
y	$-\infty$	0	$+\infty$

Đồ thị

Ta có $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Vậy đồ thị hàm số qua $O(0;0)$

Cho $x = 1 \Rightarrow y = 1$: Đồ thị hàm số cắt Oy tại $B(1;1)$. Cho $x = -1 \Rightarrow y = -1$: Đồ thị hàm số cắt qua $C(-1;-1)$.



Lưu ý: Đồ thị hàm số nhận điểm $O(0;0)$ làm tâm đối xứng. Hoành độ điểm O là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ (Điểm uốn)

II. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT SỐ HÀM PHÂN THỨC HỮU TỈ

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$)

$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$

MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ BÀI TOÁN KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 4: Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $\frac{x+1}{x-1}$

Lời giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$. Ta thấy y' không xác định khi $x=1$; y' luôn âm với mọi $x \neq 1$

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(1; +\infty)$ và $(-\infty; 1)$.

+ Cực trị:

Hàm số không có cực trị

+ Tiệm cận

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$. Vậy đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$. Vậy đường thẳng $x=1$ là tiệm cận dọc

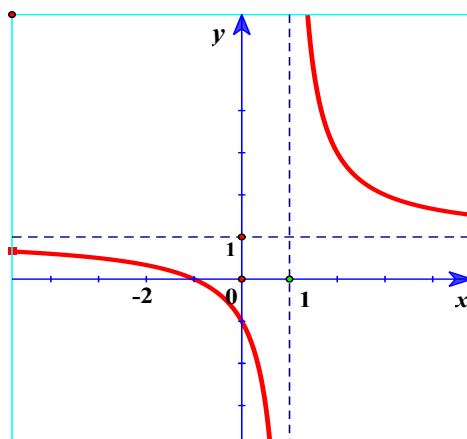
+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		-		-	
y					

Đồ thị của hàm số được vẽ trên bảng biến thiên, với các tiệm cận ngang $y=1$ và tiệm cận dọc $x=1$. Các mũi tên đỏ chỉ hướng của đồ thị khi $x \rightarrow \pm\infty$ và $x \rightarrow 1^\pm$.

Đồ thị

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $A(0; -1)$ và cắt trục hoành tại điểm $B(-1; 0)$ (Hình vẽ)



Lưu ý: Giao điểm $I(1; 1)$ của hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị

Câu 5: Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

Ta có $y' = \frac{-3}{(2x-1)^2} < 0$ với mọi $x \neq \frac{1}{2}$

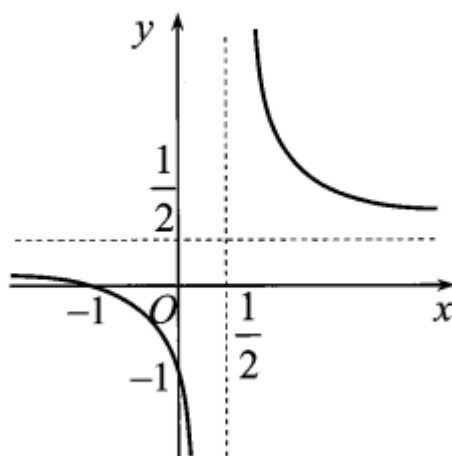
$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{1}{2}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} y = -\infty$. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên của hàm số có dạng:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'			
y	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$

Đồ thị hàm số có dạng:



2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$)

□ Bước 1: Tìm tập xác định D

□ Bước 2: Tính y' và giải $y' = 0$

□ Bước 3: Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của hàm số

+ Tiệm cận đứng: Tính $\lim_{x \rightarrow \frac{m}{n}^+} y$ và $\lim_{x \rightarrow \frac{m}{n}^-} y$ rồi suy ra tiệm cận đứng là $x = -\frac{m}{n}$

+ Tiệm cận xiên:

- Chia tử cho mẫu để đưa hàm số về dạng $y = px + q + \frac{r}{mx + n}$

- Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (px + q)]$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (px + q)]$ rồi suy ra tiệm cận xiên là $y = px + q$

Bước 4: Lập bảng biến thiên

Bước 5: Kết luận các khoảng biến thiên và tâm đối xứng I của hàm số

Bước 6: Lập bảng giá trị

Bước 7: Vẽ đồ thị

Hình dạng đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$

$y' = 0$	a, m cùng dấu	a, m trái dấu
ghiệm phân biệt		
niệm kép hoặc vô nghiệm		

MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ BÀI TOÁN KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 6: Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau

a) $y = \frac{2x^2 + 5x + 5}{x + 1}$

b) $y = \frac{-x^2 + 2x}{x - 1}$

Lời giải

a) $y = \frac{2x^2 + 5x + 5}{x + 1}$

□ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

□ $y' = \frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

□ $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = -\infty$

$\Rightarrow$ TCD: $x = -1$

□ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (2x + 3)] = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (2x + 3)] = 0$

$\Rightarrow$ TCX: $y = 2x + 3$

□ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-3	5	$+\infty$	$+\infty$	

□ Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$, nghịch biến trên $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$

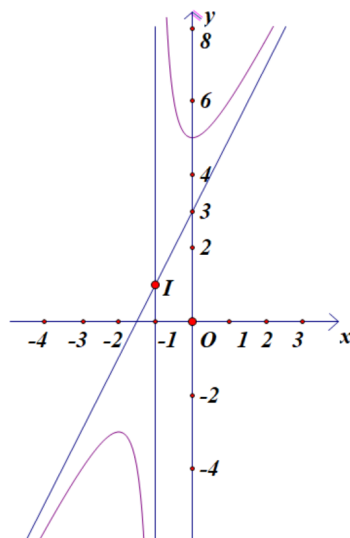
Hàm số đạt cực đại tại điểm $(-2; -3)$ và đạt cực tiểu tại điểm $(0; 5)$.

Hàm số có tâm đối xứng là $I(-1; 1)$

□ Bảng giá trị

x	-3	-2	0	1
y	-4	-3	5	6

□ Đồ thị



b) $y = \frac{-x^2 + 2x}{x - 1}$

☐ $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

☐ $y' = \frac{-x^2 + 2x - 2}{(x - 1)^2}$

$y' = 0 (VN)$

☐ $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$

$\Rightarrow$ TCD: $x = 1$

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (-x + 1)] = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (-x + 1)] = 0$

$\Rightarrow$ TCX: $y = -x + 1$

☐ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$ $	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		$ $	$+\infty$	
		$\searrow$		$\searrow$	
		$-\infty$		$-\infty$	

☐ Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

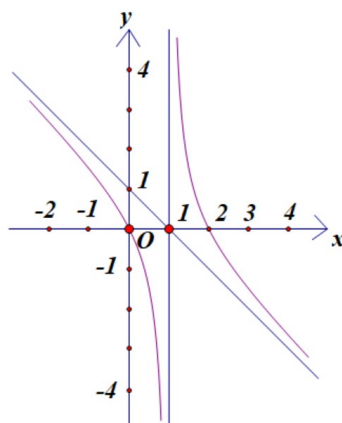
Hàm số có tâm đối xứng là $I(1; 0)$

☐ Bảng giá trị

x	-1	0	2	3
-----	----	---	---	---

y	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{3}{2}$
-----	---------------	---	---	----------------

☐ Đồ thị



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 7: Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau

a) $y = x^3 - 3x^2 + 4$

b) $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 7$

Lời giải

a) $y = x^3 - 3x^2 + 4$

☐ $D = \mathbb{R}$

☐ $y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

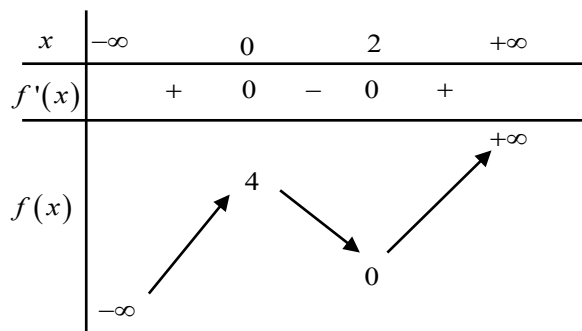
☐ $y'' = 6x - 6$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$. Tâm đối xứng là $I(1; 2)$

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$

☐ Bảng biến thiên:



□ Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$. Hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $(0; 4)$ và đạt cực tiểu tại điểm $(2; 0)$.

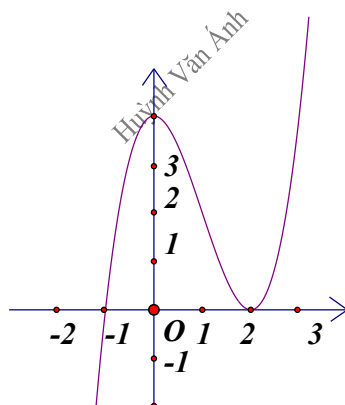
Hàm số có tâm đối xứng là $I(1; 2)$

□ $y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng giá trị

x	-1	0	1	2	3
y	0	4	2	0	4

□ Đồ thị



b) $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 7$

□ $D = \mathbb{R}$

□ $y' = -3x^2 + 6x - 3$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

□ $y'' = -6x + 6$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 6$. Tâm đối xứng là $I(1; 6)$

□ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$

☐ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$+\infty$	6	$-\infty$

☐ Hàm số nghịch biến trên D

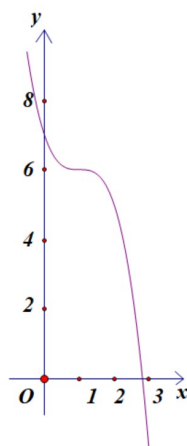
Hàm số không có cực trị

Hàm số có tâm đối xứng là $I(1;6)$

☐ Bảng giá trị

x	-1	0	1	2	3
y	14	7	6	5	-2

☐ Đồ thị



Câu 8: Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số $y = \frac{x+2}{x+5}$

Lời giải

☐ $D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$

☐ $y' = \frac{3}{(x+5)^2} > 0, \forall x \in D$

☐ $\lim_{x \rightarrow -5^+} y = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -5^-} y = +\infty$

$\Rightarrow$ TCD: $x = -5$

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$

$\Rightarrow$ TCN: $y = 1$

☐ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-5	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	1	$+\infty$ $-\infty$	1

□ Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -5)$ và $(-5; +\infty)$

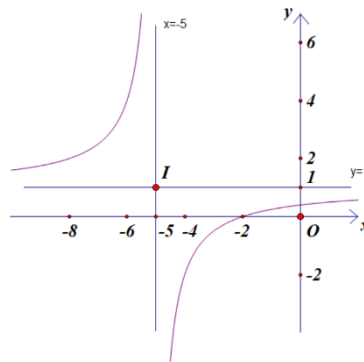
Hàm số không có cực trị

Hàm số có tâm đối xứng là $I(-5; 1)$

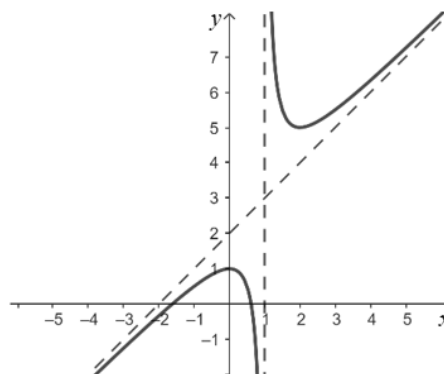
□ Bảng giá trị

x	-7	-6	-4	-3
y	$\frac{5}{2}$	4	-2	$-\frac{1}{2}$

□ Đồ thị



Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a > 0, m \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi trong các số b, c, m, n có tất cả bao nhiêu số dương?



Lời giải

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n} \quad (a > 0, m \neq 0); D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-n}{m} \right\}$$

Tiệm cận xiên $y = x + 2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx} \right) = \frac{a}{m} = 1 \Leftrightarrow a = m > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{ax^2 + bx + c}{mx + n} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(b+n)x + c}{mx + n} \right] = \frac{b+n}{m} = 2$$

$$\Leftrightarrow b + n = 2m$$

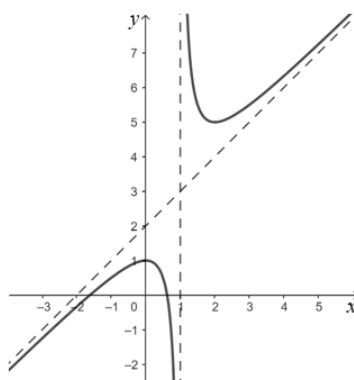
$$\Leftrightarrow b - m = 2m$$

$$\Leftrightarrow b = 3m = 3a > 0$$

$$\text{Tiệm cận đứng } x = \frac{-n}{m} = 1 \Leftrightarrow n = -m = -a < 0$$

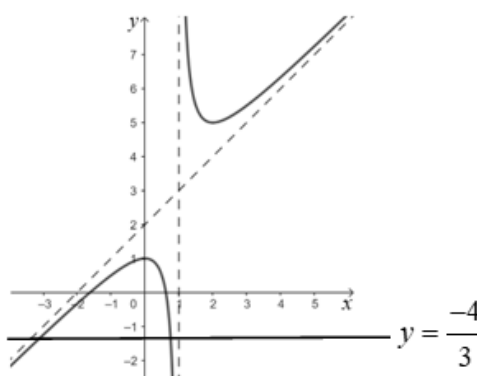
$$\text{Đồ thị hàm số cắt trục tung tại } y_0 = \frac{c}{n} > 0 \Rightarrow c < 0$$

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là:



Lời giải

$$3f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{4}{3}$$



Đường thẳng $y = -\frac{4}{3}$ cắt đồ thị tại 2 điểm.

Câu 11: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 + mx - 2}{x - 1}$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt?

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $y = \frac{-x^2 + mx - 2}{x - 1} \Leftrightarrow g(x) = x^2 - mx + 2 = 0$.
 $\Delta = m^2 - 8$

Đồ thị cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt khi phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8 > 0 \\ 3 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2\sqrt{2} \\ m > 2\sqrt{2} \\ m \neq 3 \end{cases}$$

m nguyên nên có vô số m .

Huỳnh Văn Anh

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

III BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: Câu 24 (101-2023) Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		3		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 -1 $-\infty$

- A. $y = \frac{x+2}{x}$. B. $y = -x^3 + 3x + 1$. C. $y = x^4 - 3x^2$. D. $y = -2x^2 + 1$

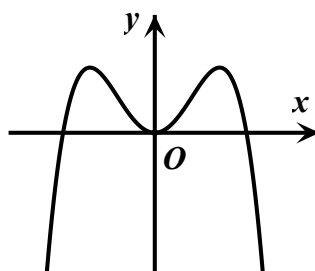
Câu 2: Câu 12 (104-2023) Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	3	$-\infty$	

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 -1 $-\infty$

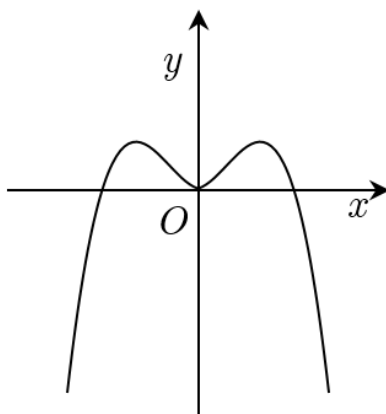
- A. $y = -2x^2 + 1$. B. $y = \frac{x+2}{x}$. C. $y = x^4 - 3x^2$. D. $y = -x^3 + 3x + 1$.

Câu 3: Câu 14 (102-2023) Hàm số nào dưới đây có đồ thị là đường cong trong hình bên?



- A. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$. C. $y = x^3 - 3x^2$. D. $y = -x^4 + 2x^2$.

Câu 4: **Câu 20 (103-2023)** Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?



- A.** $y = -x^4 + 2x^2$. **B.** $y = x^3 - 3x^2$. **C.** $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. **D.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Câu 5: **(MĐ 101-2022)** Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
y'		+	0	-	0	+
y						
			2			$+\infty$
				-2		

- A.** $y = x^4 - 2x^2$. **B.** $y = -x^3 + 3x$. **C.** $y = -x^4 + 2x^2$. **D.** $y = x^3 - 3x$.

Câu 6: **(MĐ 102-2022)** Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

- A.** $y = -x^3 + 3x$. **B.** $y = x^3 - 3x$. **C.** $y = -x^4 + 2x^2$. **D.** $y = x^4 - 2x^2$.

Câu 7: **(MĐ 103-2022)** Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-2	2	$-\infty$	

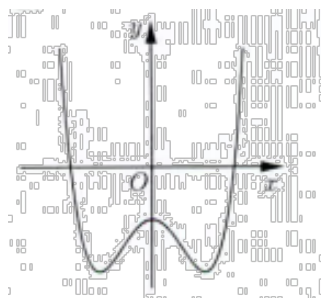
- A.** $y = x^3 - 3x$. **B.** $y = -x^3 + 3x$. **C.** $y = x^2 - 2x$. **D.** $y = -x^2 + 2x$.

Câu 8: (MĐ 104-2022) Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		-2		2		$-\infty$

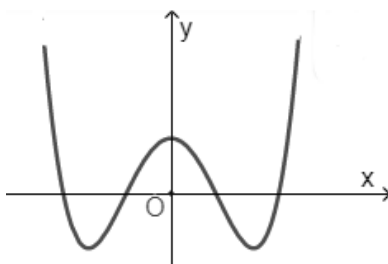
- A.** $y = x^3 - 3x$. **B.** $y = x^2 - 2x$. **C.** $y = -x^3 + 3x$. **D.** $y = -x^2 + 2x$.

Câu 9: (TK 2020-2021) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



- A.** $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 - 1$. **C.** $y = x^3 - 3x^2 - 1$. **D.** $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

Câu 10: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

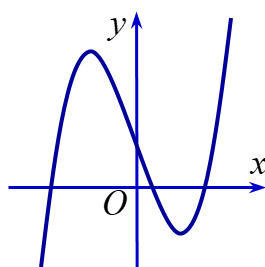


- A.** $y = x^3 - 3x + 1$. **B.** $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$. **C.** $y = -x^3 + 3x + 1$. **D.** $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

Câu 11: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Đồ thị hàm số $y = -x^4 - 2x^2 + 3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

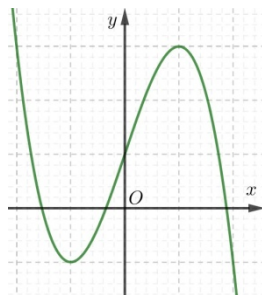
- A.** 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 12: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



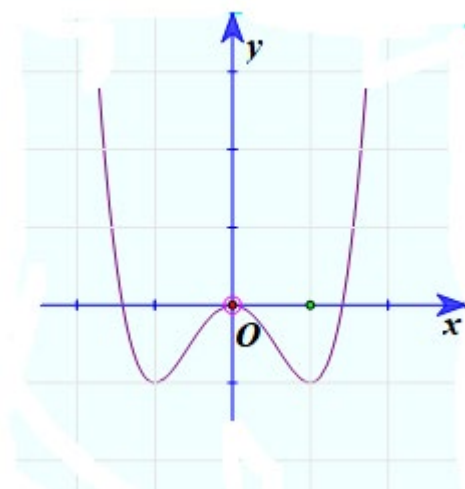
- A.** $y = -x^3 - 2x + \frac{1}{2}$. **B.** $y = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$. **C.** $y = -x^4 + 2x^2 + \frac{1}{2}$. **D.** $y = x^4 + 2x^2 + \frac{1}{2}$.

Câu 13: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



- A. $y = x^3 - 3x + 1$. B. $y = x^4 + 4x^2 + 1$. C. $y = -x^3 + 3x + 1$. D. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Câu 14: (2020-2021 – ĐỢT 1) Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?



- A. $y = \frac{3x+1}{x+2}$. B. $y = x^2 + 2x$. C. $y = 2x^3 - x^2$. D. $y = x^4 - 2x^2$.

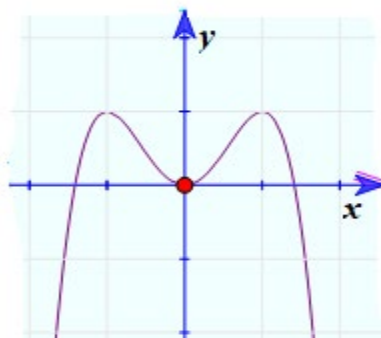
Câu 15: (2020-2021 – ĐỢT 1) Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 2$?

- A. Điểm $M(1;1)$. B. Điểm $P(1;2)$. C. Điểm $Q(1;3)$. D. Điểm $N(1;0)$.

Câu 16: (2020-2021 – ĐỢT 1) Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị của hàm số $y = x^3 + x - 2$?

- A. Điểm $M(1;1)$. B. Điểm $N(1;2)$. C. Điểm $P(1;3)$. D. Điểm $Q(1;0)$.

Câu 17: (2020-2021 – ĐỢT 1) Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình dưới đây?

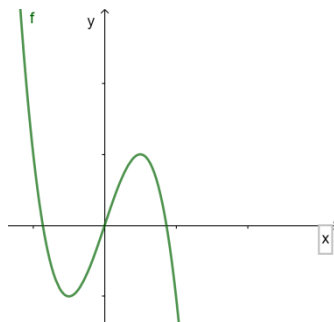


- A. $y = \frac{3x-1}{x+2}$. B. $y = x^2 - 2x$. C. $y = 2x^3 + x^2$. D. $y = -x^4 + 2x^2$.

Câu 18: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 1$?

- A. Điểm $N(1;0)$. B. Điểm $P(1;2)$. C. Điểm $Q(1;3)$. D. Điểm $M(1;1)$.

Câu 19: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Hàm số nào dưới đây có đồ thị đường cong trong hình bên?

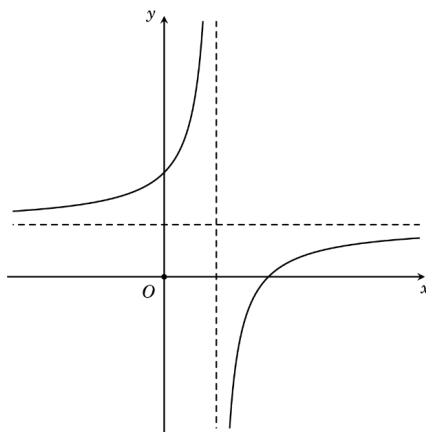


- A. $y = -x^3 + 3x$. B. $y = x^4 - x^2$. C. $y = \frac{2x+1}{x+2}$. D. $y = x^2 + x$.

Câu 20: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị của hàm số $y = x^3 + x - 1$?

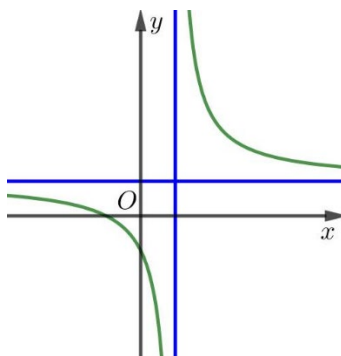
- A. Điểm $Q(1;3)$. B. Điểm $M(1;2)$. C. Điểm $N(1;1)$. D. Điểm $P(1;0)$.

Câu 21: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Biết hàm số $y = \frac{x+a}{x-1}$ (a là số thực cho trước và $a \neq -1$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



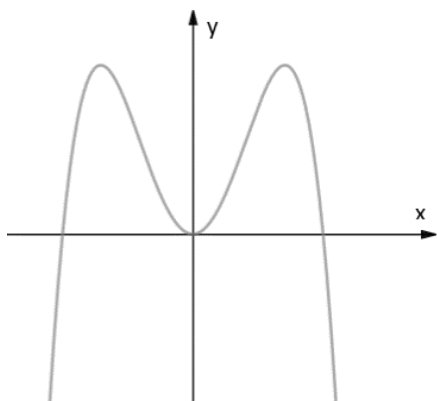
- A. $y' > 0, \forall x \neq 1$. B. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. C. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. D. $y' < 0, \forall x \neq 1$.

Câu 22: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Biết hàm số $y = \frac{x+a}{x-1}$ (a là số thực cho trước, $a \neq -1$) có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



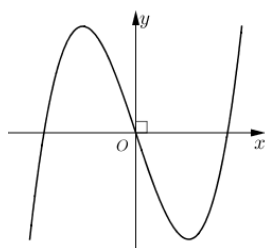
- A. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $y' < 0, \forall x \neq 1$. C. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. D. $y' > 0, \forall x \neq 1$.

Câu 23: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong dưới đây?



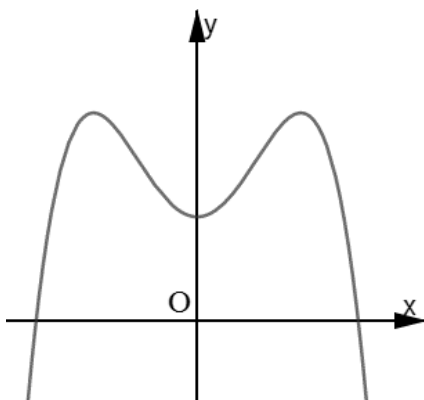
- A. $y = -x^4 + 2x^2$. B. $y = x^4 - 2x^2$. C. $y = x^3 - 3x^2$. D. $y = -x^3 + 3x^2$.

Câu 24: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



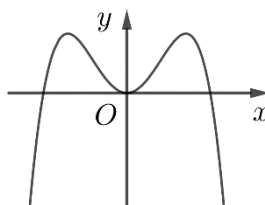
- A. $y = x^3 - 3x$. B. $y = -x^3 + 3x$. C. $y = x^4 - 2x^2$. D. $y = -x^4 + 2x^2$.

Câu 25: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



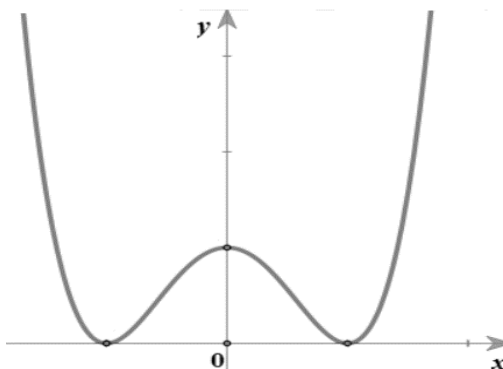
- A. $y = x^3 - 3x^2 + 1$. B. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. C. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Câu 26: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



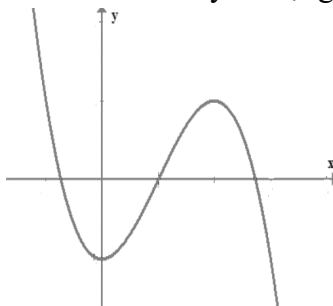
- A. $y = -x^4 + 2x^2$. B. $y = -x^3 + 3x$. C. $y = x^4 - 2x^2$. D. $y = x^3 - 3x$.

Câu 27: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



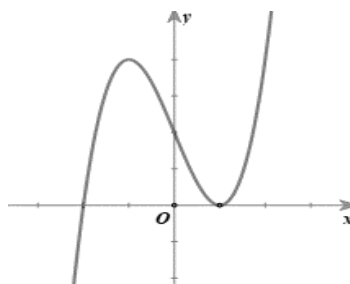
- A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$. B. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. C. $y = x^3 - 3x^2 + 1$. D. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Câu 28: (Mã 101 - 2020 Lần 2) Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình bên



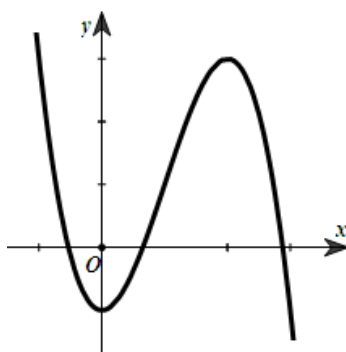
- A. $y = x^4 - 2x^2 - 2$ B. $y = -x^3 + 2x^2 - 2$ C. $y = x^3 - 3x^2 - 2$ D. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$

Câu 29: (Mã 104 2017) Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



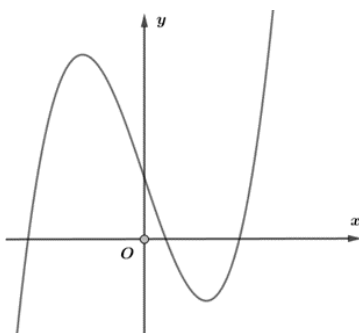
- A. $y = -x^3 + 3x + 2$ B. $y = x^4 - x^2 + 1$ C. $y = x^4 + x^2 + 1$ D. $y = x^3 - 3x + 2$

Câu 30: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



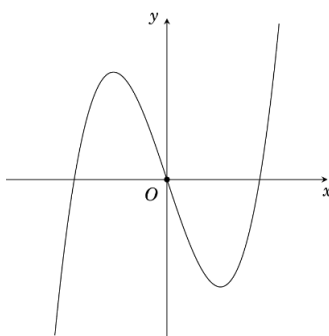
- A. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. B. $y = x^4 - 2x^2 - 1$. C. $y = x^3 - 3x^2 - 1$. D. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

Câu 31: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Đồ thị của hàm số dưới đây có dạng như đường cong bên?



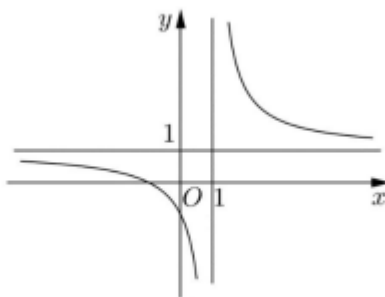
- A. $y = x^3 - 3x + 1$. B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$. C. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. D. $y = -x^3 + 3x + 1$.

Câu 32: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



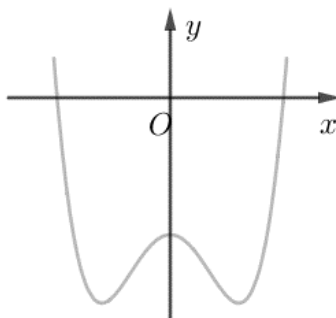
- A. $y = x^4 + 2x^2$. B. $y = -x^3 - 3x$. C. $y = x^3 - 3x$. D. $y = -x^4 + 2x^2$.

Câu 33: (Đề Tham Khảo 2019) Đường con trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



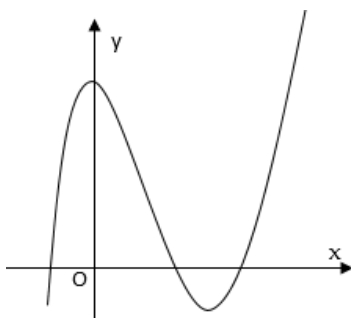
- A. $y = \frac{2x-1}{x-1}$ B. $y = \frac{x+1}{x-1}$ C. $y = x^4 + x^2 + 1$ D. $y = x^3 - 3x - 1$

Câu 34: (Mã 103 2019) Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



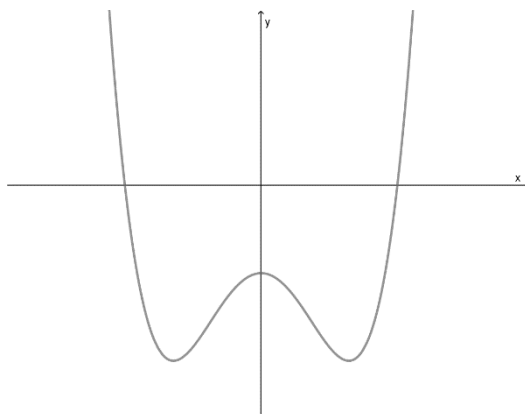
- A. $y = x^3 - 3x^2 - 2$. B. $y = x^4 - 2x^2 - 2$. C. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. D. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$.

Câu 35: (Mã 101 2019) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



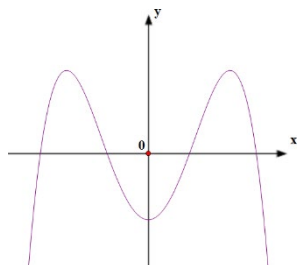
- A. $y = x^3 - 3x^2 + 3$. B. $y = -x^3 + 3x^2 + 3$. C. $y = x^4 - 2x^2 + 3$. D. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

Câu 36: (Mã 102 2018) Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



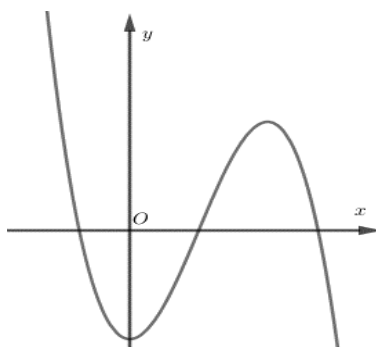
- A. $y = -x^3 + x^2 - 1$ B. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$ C. $y = x^3 - x^2 - 1$ D. $y = x^4 - 2x^2 - 1$

Câu 37: (Mã 101 2018) Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



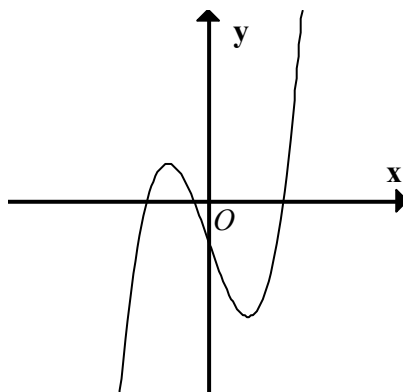
- A. $y = x^3 - 3x^2 - 1$ B. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ C. $y = -x^4 + 3x^2 - 1$ D. $y = x^4 - 3x^2 - 1$

Câu 38: (Mã 104 2018) Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



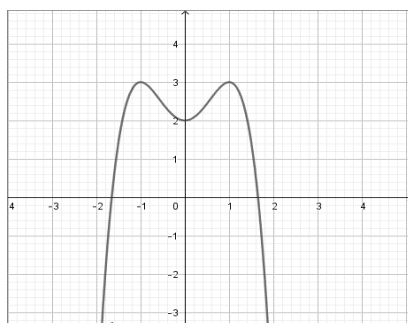
- A. $y = x^4 - x^2 - 2$ B. $y = -x^4 + x^2 - 2$ C. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ D. $y = x^3 - 3x^2 - 2$

Câu 39: (Mã 103 2018) Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



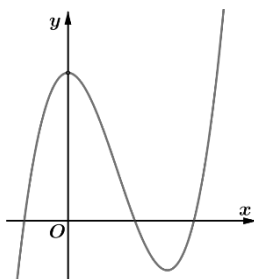
- A. $y = x^3 - 3x - 1$ B. $y = x^4 - 3x^2 - 1$ C. $y = -x^3 - 3x - 1$ D. $y = -x^4 + x^2 - 1$

Câu 40: (Đề Tham Khảo 2018) Đường cong trong hình bên là của đồ thị hàm số nào dưới đây?



- A. $y = x^3 - 3x^2 + 2$ B. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ C. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ D. $y = x^4 - 2x^2 + 2$

Câu 41: (Mã 110 2017) Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ B. $y = x^3 - 3x^2 + 3$ C. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

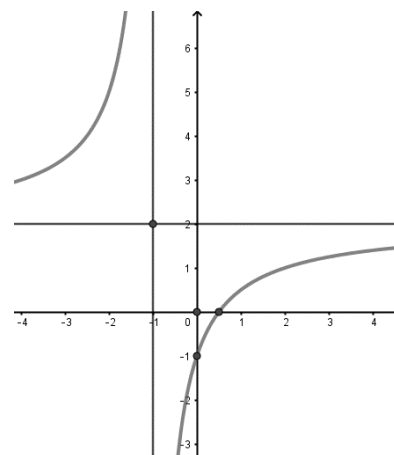
Câu 42: (Đề Tham Khảo 2017) Cho đường cong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = \frac{2x+1}{x-1}$

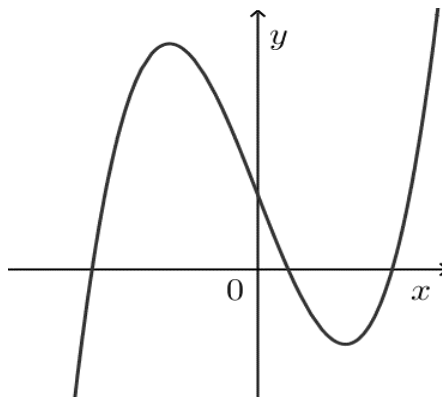
B. $y = \frac{2x+3}{x+1}$

C. $y = \frac{2x-1}{x+1}$

D. $y = \frac{2x-2}{x-1}$

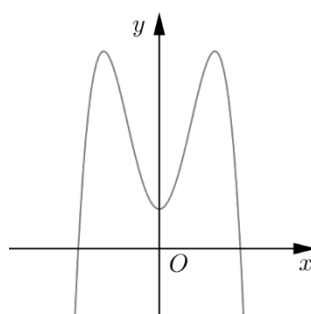


Câu 43: (Đề Minh Họa 2017) Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



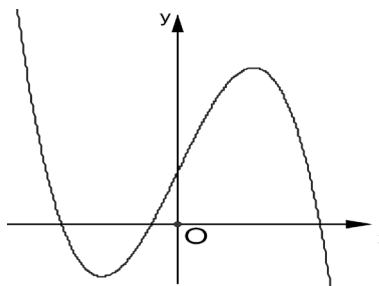
- A.** $y = x^3 - 3x + 1$ **B.** $y = -x^3 + 3x + 1$ **C.** $y = x^4 - x^2 + 1$ **D.** $y = -x^2 + x - 1$

Câu 44: (Mã 104 2019) Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



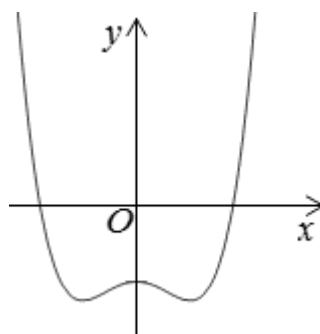
- A.** $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$ **B.** $y = -2x^3 + 3x + 1$ **C.** $y = 2x^3 - 3x + 1$ **D.** $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$

Câu 45: (Mã 102 2019) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên



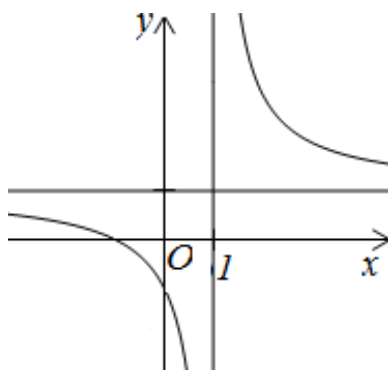
- A.** $y = -x^3 + 3x + 1$. **B.** $y = x^3 - 3x + 1$. **C.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Câu 46: (Mã 123 2017) Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



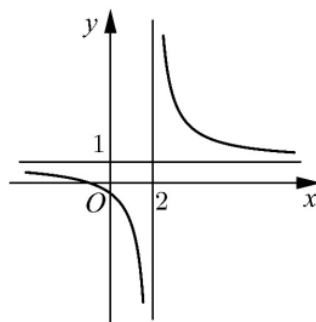
- A.** $y = x^4 - x^2 - 1$ **B.** $y = -x^4 + x^2 - 1$ **C.** $y = x^3 - x^2 - 1$ **D.** $y = -x^3 + x^2 - 1$

Câu 47: (Mã 123 2017) Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



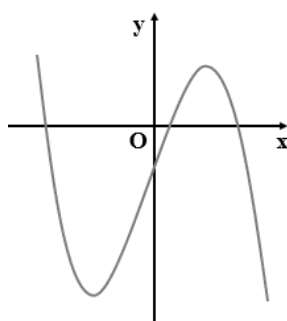
- A. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ B. $y' > 0, \forall x \neq 1$ C. $y' < 0, \forall x \neq 1$ D. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Câu 48: (Mã 105 2017) Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $y' > 0, \forall x \neq 1$ B. $y' < 0, \forall x \neq 1$ C. $y' < 0, \forall x \neq 2$ D. $y' > 0, \forall x \neq 2$

Câu 49: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d$ ($a, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $a > 0, d > 0$. B. $a < 0, d > 0$. C. $a > 0, d < 0$. D. $a < 0, d < 0$.

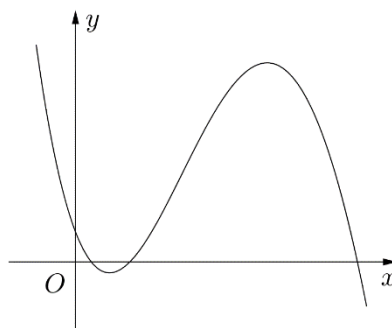
Câu 50: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	1	$+\infty$	$-\infty$
			1

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

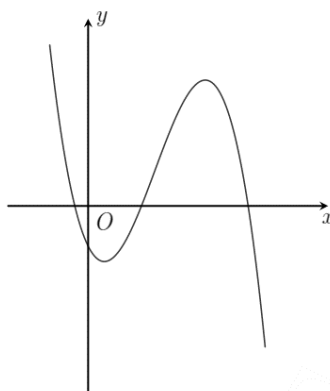
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 51: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



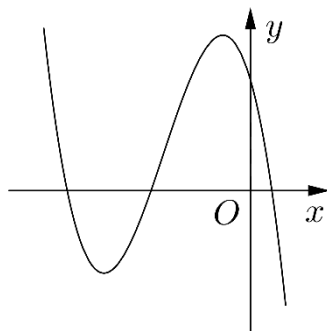
- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 52: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các hệ số a, b, c, d ?



- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

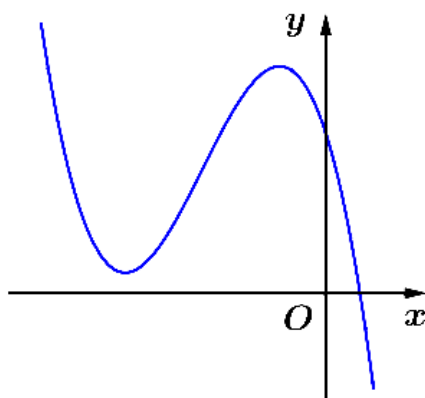
Câu 53: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 54: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 55: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 2$	$\searrow 1$	$\nearrow +\infty$	

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

Câu 56: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			1		-1		$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 57: (Mã 101 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	-5	$+\infty$	

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

Câu 58: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			-1		-5		$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC
CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: **Câu 24 (101-2023)** Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		3		$-\infty$

Diagram showing the curve passing through $(-1, -1)$ and $(1, 3)$.

A. $y = \frac{x+2}{x}$.

B. $y = -x^3 + 3x + 1$.

C. $y = x^4 - 3x^2$.

D. $y = -2x^2 + 1$

Lời giải

Ta có : $y = -x^3 + 3x + 1$ có $y' = -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Vậy $x = \pm 1$ là các điểm cực trị của hàm số.

Câu 2: **Câu 12 (104-2023)** Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	3	$-\infty$	

A. $y = -2x^2 + 1$.

B. $y = \frac{x+2}{x}$.

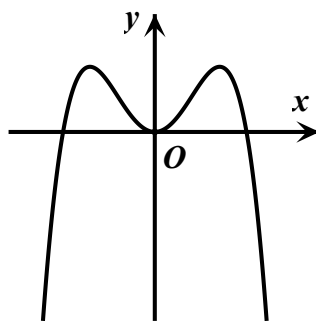
C. $y = x^4 - 3x^2$.

D. $y = -x^3 + 3x + 1$.

Lời giải

Bảng biến thiên trên là đặc trưng của hàm số bậc 3.

Câu 3: **Câu 14 (102-2023)** Hàm số nào dưới đây có đồ thị là đường cong trong hình bên?

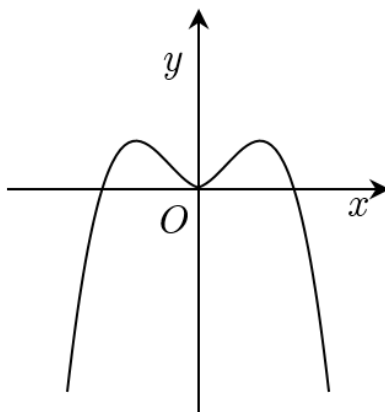


- A. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. B. $y = x^4 - 2x^2 + 1$. C. $y = x^3 - 3x^2$. D. $y = -x^4 + 2x^2$.

Lời giải

Quan sát đồ thị của hàm số thấy đồ thị trên là đồ thị của hàm số trùng phương và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$ suy ra hệ số $a < 0$. Vậy nên chọn đáp án **D**.

Câu 4: **Câu 20 (103-2023)** Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?



- A. $y = -x^4 + 2x^2$. B. $y = x^3 - 3x^2$. C. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Lời giải

Hình vẽ là đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với $a < 0$, $b > 0$, $c = 0$.

Câu 5: **(MĐ 101-2022)** Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$		2		-2	$+\infty$

- A. $y = x^4 - 2x^2$. B. $y = -x^3 + 3x$. C. $y = -x^4 + 2x^2$. D. $y = x^3 - 3x$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số có bảng biến thiên như trên, trong 4 đáp án đã cho phải là hàm bậc ba với $a > 0$.

Do đó ta chọn đáp án **D**.

Câu 6: (MĐ 102-2022) Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

- A. $y = -x^3 + 3x$. B. $y = x^3 - 3x$. C. $y = -x^4 + 2x^2$. D. $y = x^4 - 2x^2$.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên $\Rightarrow y = f(x)$ là hàm bậc 3 có hệ số $a > 0$, nên **Chọn B**

Câu 7: (MĐ 103-2022) Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		-2		2		$-\infty$

- A. $y = x^3 - 3x$. B. $y = -x^3 + 3x$. C. $y = x^2 - 2x$. D. $y = -x^2 + 2x$.

Lời giải

Chọn B

Bảng biến đã cho là của hàm số $y = -x^3 + 3x$.

Câu 8: (MĐ 104-2022) Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

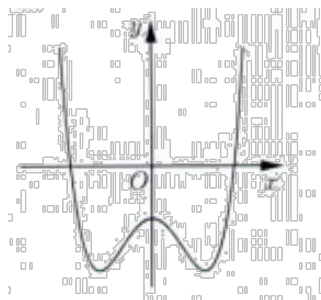
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		-2		2		$-\infty$

- A. $y = x^3 - 3x$. B. $y = x^2 - 2x$. C. $y = -x^3 + 3x$. D. $y = -x^2 + 2x$.

Lời giải

Chọn C

Câu 9: (TK 2020-2021) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

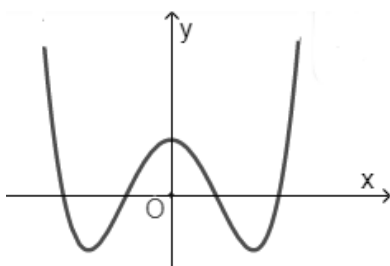


- A. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. B. $y = x^4 - 2x^2 - 1$. C. $y = x^3 - 3x^2 - 1$. D. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

Lời giải

Đây chính là dạng của đồ thị hàm trùng phương có hệ số cao nhất dương, có ba điểm cực trị và cắt trục tung tại điểm có tung độ âm. Khi đó chỉ có $y = x^4 - 2x^2 - 1$ là thỏa mãn.

Câu 10: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



- A. $y = x^3 - 3x + 1$. B. $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$. C. $y = -x^3 + 3x + 1$. D. $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

Lời giải

Đường cong đề bài ra là đồ thị của hàm bậc 4 trùng phương có hệ số $a > 0$, và $ab < 0$. Do đó đây là đồ thị của hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

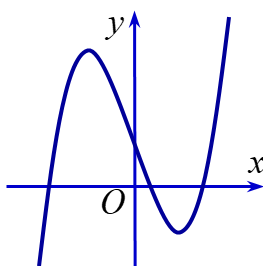
Câu 11: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Đồ thị hàm số $y = -x^4 - 2x^2 + 3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = -x^4 - 2x^2 + 3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3.

Câu 12: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



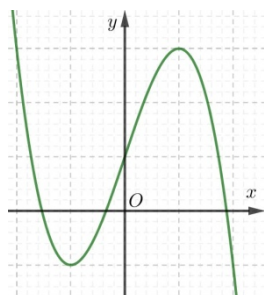
- A. $y = -x^3 - 2x + \frac{1}{2}$. B. $y = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$. C. $y = -x^4 + 2x^2 + \frac{1}{2}$. D. $y = x^4 + 2x^2 + \frac{1}{2}$.

Lời giải

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Dựa trên hình dạng đường cong đã cho và các phương án, ta suy ra đường cong trên là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$.

Câu 13: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

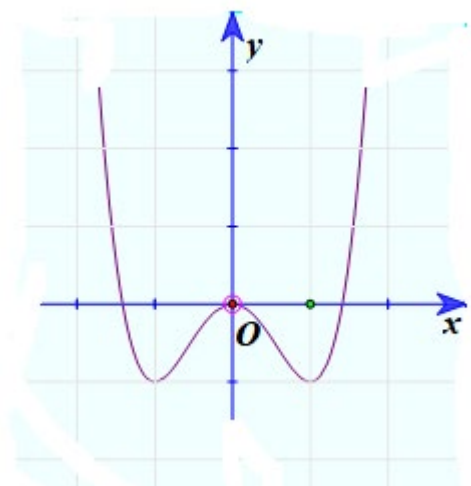


- A. $y = x^3 - 3x + 1$. B. $y = x^4 + 4x^2 + 1$. C. $y = -x^3 + 3x + 1$. D. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Lời giải

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị nên đây là đồ thị hàm bậc 3, mặt khác $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ nên $a < 0$.

Câu 14: (2020-2021 – ĐỢT 1) Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?



- A. $y = \frac{3x+1}{x+2}$. B. $y = x^2 + 2x$. C. $y = 2x^3 - x^2$. D. $y = x^4 - 2x^2$.

Lời giải

Đường cong đã cho có 3 điểm cực trị nên loại các phương án A, B, C. Do đó chọn phương án D.

Câu 15: (2020-2021 – ĐỢT 1) Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 2$?

- A. Điểm $M(1;1)$. B. Điểm $P(1;2)$. C. Điểm $Q(1;3)$. D. Điểm $N(1;0)$.

Lời giải

Thay $x=1$ vào $y = x^3 - x + 2$ ta được $y = 1^3 - 1 + 2 = 2$.

Vậy điểm $P(1;2)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho.

Câu 16: (2020-2021 – ĐỢT 1) Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị của hàm số $y = x^3 + x - 2$?

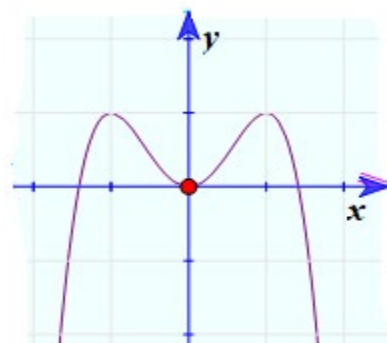
- A. Điểm $M(1;1)$. B. Điểm $N(1;2)$. C. Điểm $P(1;3)$. **D. Điểm $Q(1;0)$.**

Lời giải

Với $x = 1$, ta có: $y = 1^3 + 1 - 2 = 0$

Do đó điểm $Q(1;0)$ thuộc đồ thị hàm số

Câu 17: (2020-2021 – ĐỢT 1) Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình dưới đây?



- A. $y = \frac{3x-1}{x+2}$. B. $y = x^2 - 2x$. C. $y = 2x^3 + x^2$. **D. $y = -x^4 + 2x^2$.**

Lời giải

Đường cong đã cho không phải là đồ thị của hàm phân thức, cũng không phải là đồ thị của hàm đa thức bậc hai, bậc ba. Do đó chỉ có phương án D là đúng.

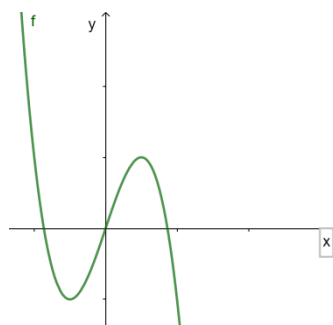
Câu 18: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 1$?

- A. Điểm $N(1;0)$. B. Điểm $P(1;2)$. C. Điểm $Q(1;3)$. **D. Điểm $M(1;1)$.**

Lời giải

Thay tọa độ các điểm vào hàm số ta thấy tọa độ điểm $M(1;1)$ thỏa mãn.

Câu 19: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Hàm số nào dưới đây có đồ thị đường cong trong hình bên?



- A. $y = -x^3 + 3x$.** B. $y = x^4 - x^2$. C. $y = \frac{2x+1}{x+2}$. D. $y = x^2 + x$.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy có 2 cực trị và nhìn vào các phương án thì chỉ có đồ thị hàm bậc 3 có 2 cực trị nên đáp án là **A**

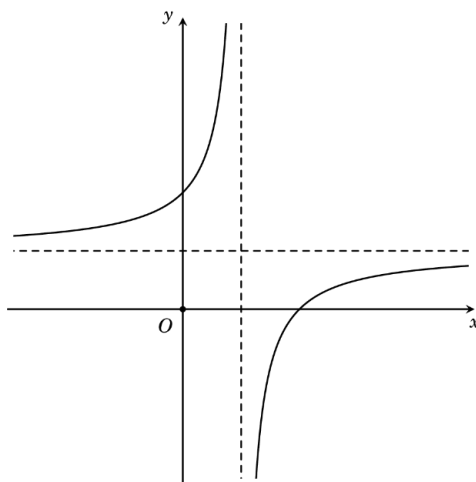
Câu 20: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Điểm nào dưới đây thuộc đồ thị của hàm số $y = x^3 + x - 1$?

- A. Điểm $Q(1;3)$. B. Điểm $M(1;2)$. C. Điểm $N(1;1)$. D. Điểm $P(1;0)$.

Lời giải

Thay $x=1$ vào hàm số ta được $y=1^3+1-1=1$. Khi đó điểm $N(1;1)$ thuộc đồ thị hàm số.

- Câu 21:** (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Biết hàm số $y=\frac{x+a}{x-1}$ (a là số thực cho trước và $a \neq -1$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



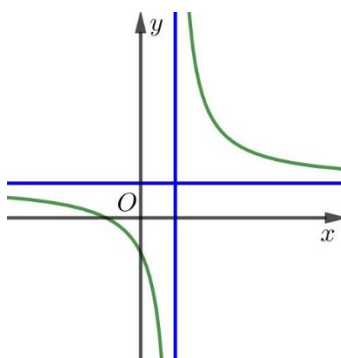
- A. $y' > 0, \forall x \neq 1$. B. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. C. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. D. $y' < 0, \forall x \neq 1$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y=\frac{x+a}{x-1}$ nhận $x=1$ làm tiệm cận đứng.

Nhìn đồ thị hàm số, hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định nên $y' > 0, \forall x \neq 1$.

- Câu 22:** (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Biết hàm số $y=\frac{x+a}{x-1}$ (a là số thực cho trước, $a \neq -1$) có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



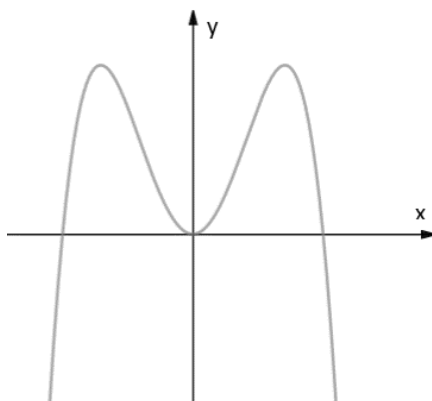
- A. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $y' < 0, \forall x \neq 1$. C. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. D. $y' > 0, \forall x \neq 1$.

Lời giải

Ta có TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ và $y' = \frac{-1-a}{(x-1)^2} \neq 0, \forall x \neq 1$.

Vì đồ thị hàm số là đường cong đi xuống (tính từ trái sang phải) trên từng khoảng xác định nên hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng xác định. Vậy $y' < 0, \forall x \neq 1$.

Câu 23: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong dưới đây?



- A.** $y = -x^4 + 2x^2$. **B.** $y = x^4 - 2x^2$. **C.** $y = x^3 - 3x^2$. **D.** $y = -x^3 + 3x^2$.

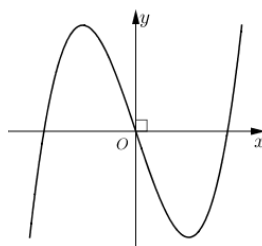
Lời giải

Chọn A

Từ hình dạng của đồ thị ta loại phương án C và **D**.

Nhận thấy $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$ suy ra hệ số của x^4 âm nên chọn phương án **A**.

Câu 24: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



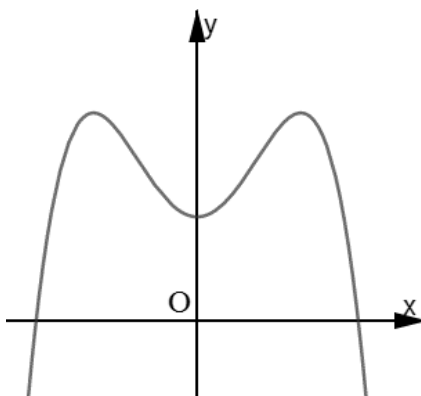
- A.** $y = x^3 - 3x$. **B.** $y = -x^3 + 3x$. **C.** $y = x^4 - 2x^2$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2$.

Lời giải

Chọn A

Đường cong có dạng của đồ thị hàm số bậc 3 với hệ số $a > 0$ nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 25: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



- A.** $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. **C.** $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. **D.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

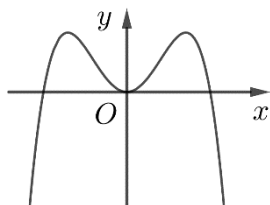
Lời giải

Chọn C

Từ hình có đây là hình dạng của đồ thị hàm bậc 4.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow a < 0$$

Câu 26: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



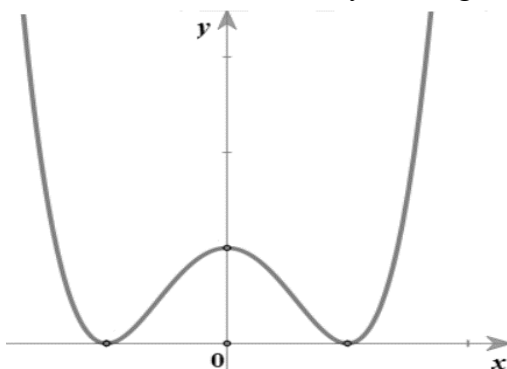
- A.** $y = -x^4 + 2x^2$. **B.** $y = -x^3 + 3x$. **C.** $y = x^4 - 2x^2$. **D.** $y = x^3 - 3x$.

Lời giải

Chọn A

Đường cong trong hình là đồ thị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có hệ số $a < 0$.

Câu 27: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



- A.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. **C.** $y = x^3 - 3x^2 + 1$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

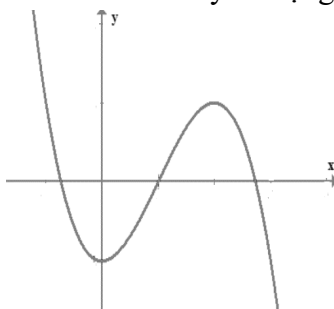
Lời giải

Chọn A

Dựa vào hình vẽ, ta thấy đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên loại các đáp án B và C.

Mặt khác, ta thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 2x^2 + 1) = +\infty$ nên chọn đáp án A.

Câu 28: (Mã 101 - 2020 Lần 2) Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên



- A.** $y = x^4 - 2x^2 - 2$ **B.** $y = -x^3 + 2x^2 - 2$ **C.** $y = x^3 - 3x^2 - 2$ **D.** $y = -x^4 + 2x^2 - 2$

Lời giải

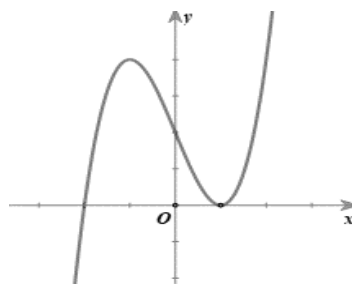
Chọn B

Qua đồ thị là hàm bậc 3 nên loại A, **D.**

Bên phải ngoài cùng của đồ thị đi xuống nên hệ số $a < 0$

$\Rightarrow$ loại đáp án C

Câu 29: (Mã 104 2017) Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



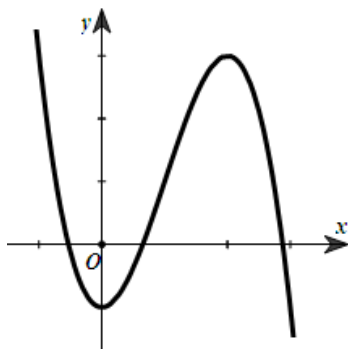
- A. $y = -x^3 + 3x + 2$ B. $y = x^4 - x^2 + 1$ C. $y = x^4 + x^2 + 1$ D. $y = x^3 - 3x + 2$

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hình vẽ là đồ thị hàm số bậc ba có hệ số $a > 0$ nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ thỏa mãn điều kiện trên.

Câu 30: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



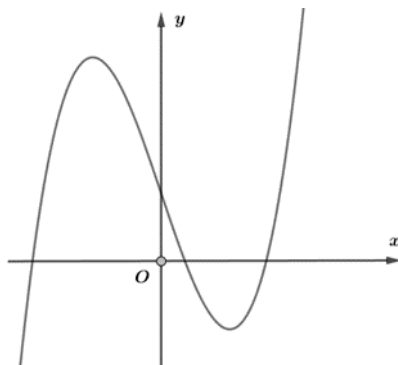
- A. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. B. $y = x^4 - 2x^2 - 1$. C. $y = x^3 - 3x^2 - 1$. D. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị có dạng đồ thị của hàm số bậc 3 có hệ số $a < 0$ nên đáp án D đúng.

Câu 31: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Đồ thị của hàm số dưới đây có dạng như đường cong bên?

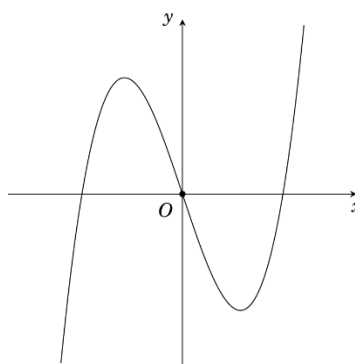


- A.** $y = x^3 - 3x + 1$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$. **C.** $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. **D.** $y = -x^3 + 3x + 1$.

Lời giải

Chọn A

Câu 32: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



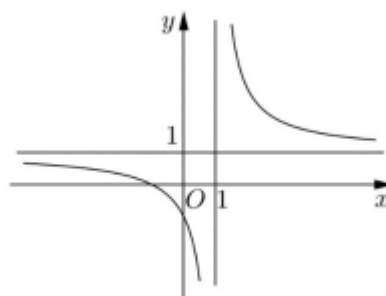
- A.** $y = x^4 + 2x^2$. **B.** $y = -x^3 - 3x$. **C.** $y = x^3 - 3x$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2$.

Lời giải

Chọn C

Đây là đồ thị của hàm số bậc ba với hệ số $a > 0$ nên **Chọn C**

Câu 33: (Đề Tham Khảo 2019) Đường con trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



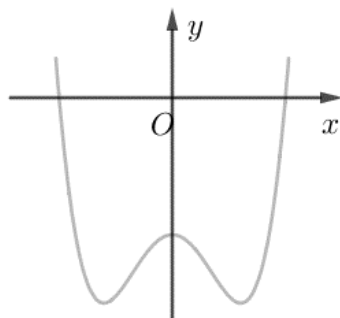
- A.** $y = \frac{2x-1}{x-1}$ **B.** $y = \frac{x+1}{x-1}$ **C.** $y = x^4 + x^2 + 1$ **D.** $y = x^3 - 3x - 1$

Lời giải

Chọn B

Vì từ đồ thị ta suy ra đồ thị của hàm phân thức có tiệm cận đứng và ngang $x = 1; y = 1$

Câu 34: (Mã 103 2019) Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



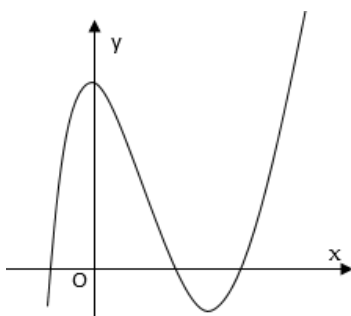
- A. $y = x^3 - 3x^2 - 2$. B. $y = x^4 - 2x^2 - 2$. C. $y = -x^3 + 3x^2 - 2$. D. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$.

Lời giải

Chọn B

Quan sát đồ thị ta thấy đây là đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a > 0$).

Câu 35: (Mã 101 2019) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



- A. $y = x^3 - 3x^2 + 3$. B. $y = -x^3 + 3x^2 + 3$. C. $y = x^4 - 2x^2 + 3$. D. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

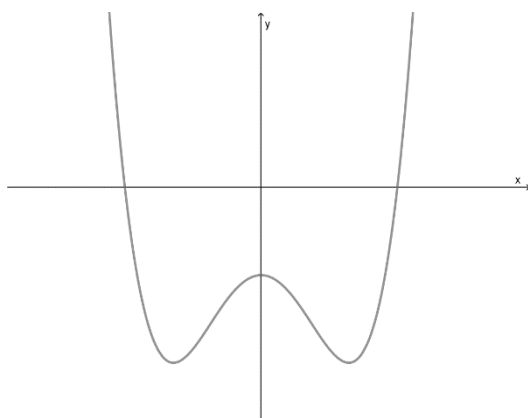
Lời giải

Chọn A

Dạng hàm bậc ba nên loại C

Từ đồ thị ta có $a > 0$. Do đó loại B, D.

Câu 36: (Mã 102 2018) Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A. $y = -x^3 + x^2 - 1$ B. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$ C. $y = x^3 - x^2 - 1$ D. $y = x^4 - 2x^2 - 1$

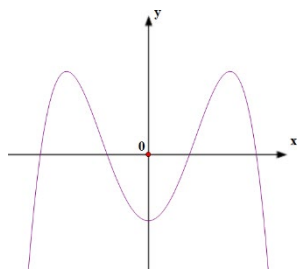
Lời giải

Chọn D

Dựa vào hình vẽ suy ra hàm số đã cho có 3 cực trị $\rightarrow$ loại C, D.

Mặt khác nhánh bên tay phải của đồ thị hàm số đi lên suy ra hệ số $a > 0 \rightarrow$ **Chọn D**

Câu 37: (Mã 101 2018) Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A.** $y = x^3 - 3x^2 - 1$ **B.** $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ **C.** $y = -x^4 + 3x^2 - 1$ **D.** $y = x^4 - 3x^2 - 1$

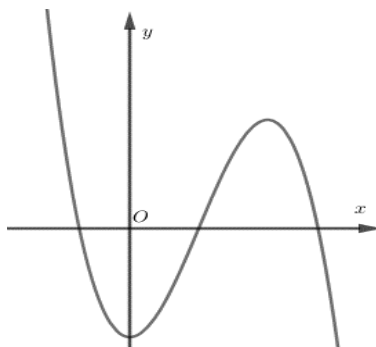
Lời giải

Chọn C

+ Nhìn đồ thị khẳng định đồ thị hàm trùng phương loại **A, B**

+ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -\infty$ nên **Chọn C**

Câu 38: (Mã 104 2018) Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A.** $y = x^4 - x^2 - 2$ **B.** $y = -x^4 + x^2 - 2$ **C.** $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ **D.** $y = x^3 - 3x^2 - 2$

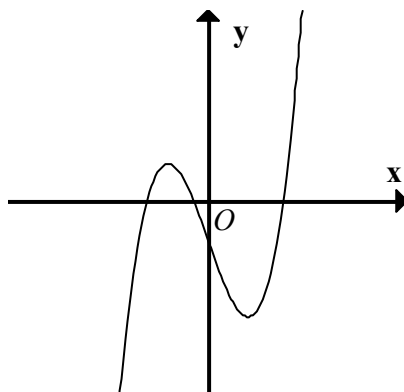
Lời giải

Chọn C

Dựa trên hình dáng đồ thị, ta loại $y = x^3 - 3x^2 - 2$ và $y = x^4 - x^2 - 2$ Mặt khác từ đồ thị, ta thấy

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ nên loại $y = -x^4 + x^2 - 2$

Câu 39: (Mã 103 2018) Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



- A.** $y = x^3 - 3x - 1$ **B.** $y = x^4 - 3x^2 - 1$ **C.** $y = -x^3 - 3x - 1$ **D.** $y = -x^4 + x^2 - 1$

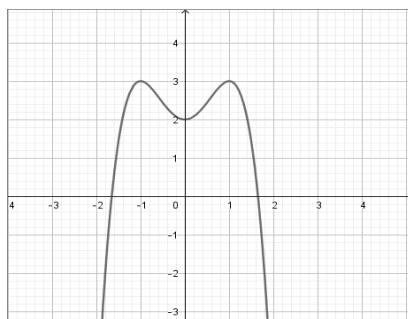
Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số là đồ thị của hàm số bậc ba nên loại A và B.

Đồ thị hàm số bậc ba có hệ số $a > 0$ nên D đúng.

Câu 40: (Đề Tham Khảo 2018) Đường cong trong hình bên là của đồ thị hàm số nào dưới đây?



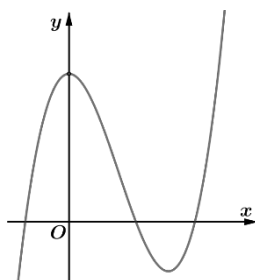
- A. $y = x^3 - 3x^2 + 2$ B. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ C. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ D. $y = x^4 - 2x^2 + 2$

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số trên là đồ thị hàm trùng phương có 3 cực trị và có $a < 0$

Câu 41: (Mã 110 2017) Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ B. $y = x^3 - 3x^2 + 3$ C. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

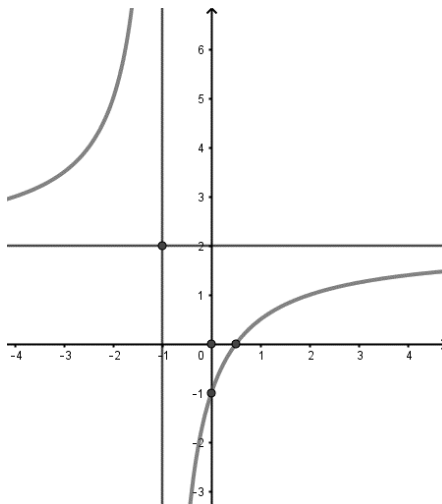
Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta thấy đây là hình ảnh đồ thị của hàm số bậc ba nên loại đáp án B và C; Mặt khác dựa vào đồ thị ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên hệ số của x^3 dương nên ta chọn đáp án

$$y = x^3 - 3x^2 + 3$$

Câu 42: (Đề Tham Khảo 2017) Cho đường cong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?



A. $y = \frac{2x+1}{x-1}$

B. $y = \frac{2x+3}{x+1}$

C. $y = \frac{2x-1}{x+1}$

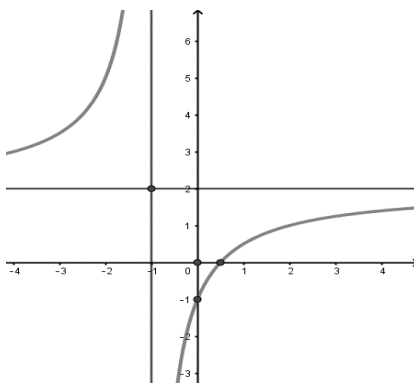
D. $y = \frac{2x-2}{x-1}$

Lời giải

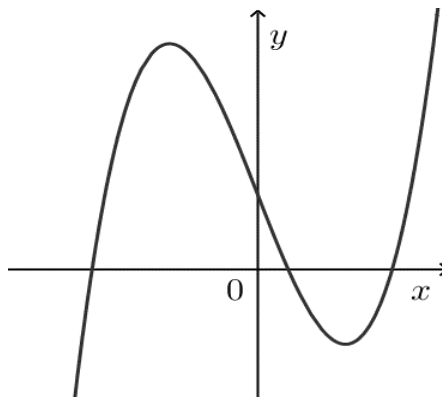
Chọn C

Dựa vào đồ thị suy ra tiệm cận đứng $x = -1$ loại C, D

Đồ thị hàm số giao với trục hoành có hoành độ dương suy ra **chọn B**



Câu 43: (Đề Minh Họa 2017) Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



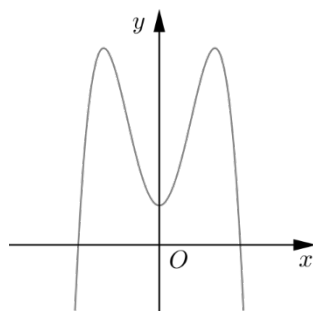
- A.** $y = x^3 - 3x + 1$ **B.** $y = -x^3 + 3x + 1$ **C.** $y = x^4 - x^2 + 1$ **D.** $y = -x^2 + x - 1$

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị : $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ và đây là đồ thị hàm bậc ba nên ta chọn phương án $y = x^3 - 3x + 1$.

Câu 44: (Mã 104 2019) Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



- A.** $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$ **B.** $y = -2x^3 + 3x + 1$ **C.** $y = 2x^3 - 3x + 1$ **D.** $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$

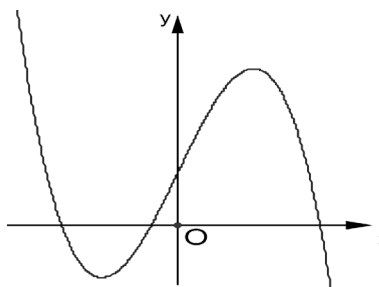
Lời giải

Chọn D

Dạng đồ thị hình bên là đồ thị hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có hệ số $a < 0$.

Do đó, chỉ có đồ thị ở đáp án B là thỏa mãn.

Câu 45: (Mã 102 2019) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên



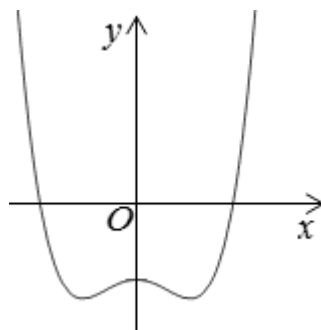
- A.** $y = -x^3 + 3x + 1$. **B.** $y = x^3 - 3x + 1$. **C.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

Lời giải

Chọn A

Trong bốn hàm số đã cho thì chỉ có hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ (hàm số đa thức bậc ba với hệ số $a < 0$) có dạng đồ thị như đường cong trong hình.

Câu 46: (Mã 123 2017) Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



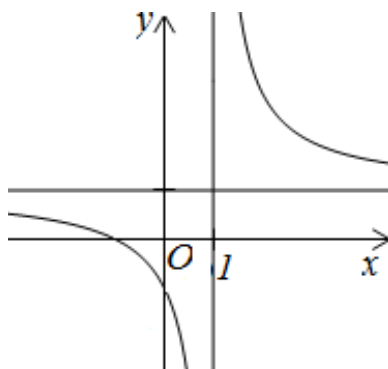
- A. $y = x^4 - x^2 - 1$ B. $y = -x^4 + x^2 - 1$ C. $y = x^3 - x^2 - 1$ D. $y = -x^3 + x^2 - 1$

Lời giải

Chọn A

Đây là hình dáng của đồ thị hàm bậc bốn trùng phương có hệ số $a > 0$

Câu 47: (Mã 123 2017) Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

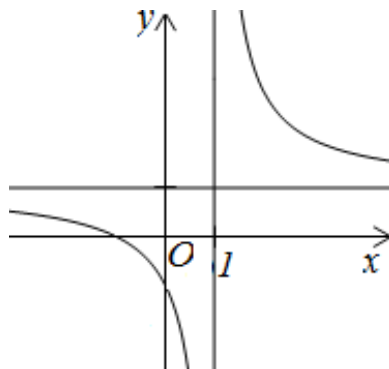


- A. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ B. $y' > 0, \forall x \neq 1$ C. $y' < 0, \forall x \neq 1$ D. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Lời giải

Chọn C

Ta có :



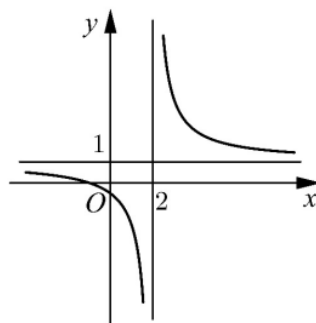
Dựa vào hình dáng của đồ thị ta được:

+ Điều kiện $x \neq 1$

+ Đây là đồ thị của hàm nghịch biến

Từ đó ta được $y' < 0, \forall x \neq 1$.

Câu 48: (Mã 105 2017) Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $y' > 0, \forall x \neq 1$

B. $y' < 0, \forall x \neq 1$

C. $y' < 0, \forall x \neq 2$

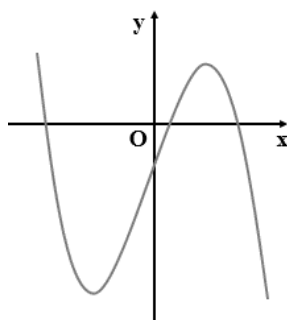
D. $y' > 0, \forall x \neq 2$

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta nhận thấy tiệm cận đứng bằng 2, Hàm số nghịch biến vậy **chọn B**

Câu 49: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d$ ($a; d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a > 0, d > 0$.

B. $a < 0, d > 0$.

C. $a > 0, d < 0$.

D. $a < 0, d < 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} = -\infty \Rightarrow$ đồ thị nhánh ngoài cùng của hàm số hướng đi xuống nên hệ số $a < 0$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung $Oy: x = 0$ là điểm nằm bên dưới trục hoành nên khi $x = 0 \Rightarrow y = d < 0$.

Câu 50: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	1	$+\infty$	$-\infty$
			1

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{c}{b}$ và đường tiệm cận

ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{b}$.

Từ bảng biến thiên ta có:
$$\begin{cases} -\frac{c}{b} = 2 \\ \frac{a}{b} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = -\frac{c}{2} \quad (1)$$

Mặt khác: $f'(x) = \frac{ac-b}{(bx+c)^2}$.

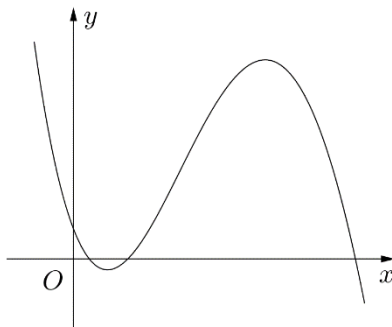
Vì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ nên

$$f'(x) = \frac{ac-b}{(bx+c)^2} > 0 \Leftrightarrow ac-b > 0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2), ta được: $-\frac{c^2}{2} + \frac{c}{2} > 0 \Leftrightarrow -c^2 + c > 0 \Leftrightarrow 0 < c < 1$.

Suy ra c là số dương và a, b là số âm.

Câu 51: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow a < 0$.

Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai điểm cực trị của hàm số suy ra x_1, x_2 nghiệm phương trình $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ nên theo định lý Viet:

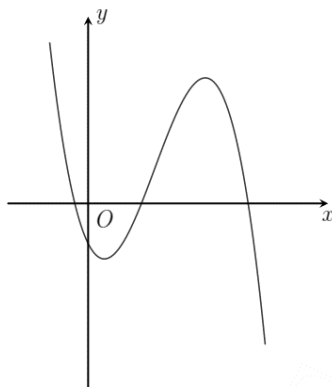
$$+) \text{ Tổng hai nghiệm } x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0.$$

$$+) \text{ Tích hai nghiệm } x_1 x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c < 0.$$

Lại có đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Vậy có 2 số dương trong các số a, b, c, d .

Câu 52: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các hệ số a, b, c, d ?



A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

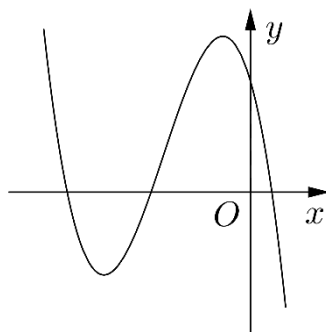
Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow a < 0$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm cùng phía của trục tung nên $ac > 0 \Rightarrow c < 0$

Đồ thị hàm số có điểm uốn nằm bên phải trục tung nên $ab < 0 \Rightarrow b > 0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung ở dưới trục hoành $\Rightarrow d < 0$

Câu 53: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Lời giải

Chọn C

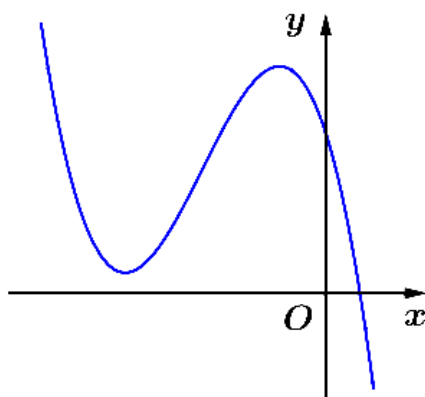
Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Dựa vào đồ thị ta thấy $a < 0$

$$\text{Hàm số có 2 cực trị âm nên } \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 9ac > 0 \\ -\frac{2b}{3a} < 0 \\ \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0; d)$ nên $d > 0$.

Vậy có đúng một số dương trong các số a, b, c, d

Câu 54: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Dựa vào đồ thị ta thấy $a < 0$

$$\text{Hàm số có 2 cực trị âm nên } \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 9ac > 0 \\ -\frac{2b}{3a} < 0 \\ \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0; d)$ nên $d > 0$

Vậy có đúng 1 số dương trong các số a, b, c, d .

Câu 55: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			2		1	
	$-\infty$					$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Từ dạng điệu sự biến thiên hàm số ta có $a > 0$.

Khi $x = 0$ thì $y = d = 1 > 0$.

Mặt khác $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Từ bảng biến thiên ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$.

Từ đó suy ra $c = 0; \frac{-2b}{3a} = -2 \Rightarrow b = 3a > 0$.

Vậy có 3 số dương là a, b, d .

Câu 56: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			1		-1	
	$-\infty$					$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$.
- $f(0) = -1 \Rightarrow d = -1 < 0$.
- $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2b}{3a} = -2 \\ \frac{c}{3a} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3a > 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Có 2 số dương là a, b

Câu 57: (Mã 101 – 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	3	-5	$+\infty$	

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

- A.** 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên, ta có

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(4) = -5 \\ f'(0) = 0 \\ f'(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ 64a + 16b + 4c + d = -5 \\ c = 0 \\ 48a + 8b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = 0 \\ d = 3 \end{cases}$$

Vậy trong các số a, b, c, d có 2 số dương.

Câu 58: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

$-\infty$ $\nearrow$ -1 $\searrow$ -5 $\nearrow$ $+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

A. 4.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị $A(0; -1), B(4; -5)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(4) = -5 \\ f'(0) = 0 \\ f'(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -1 \\ 64a + 16b + 4c + d = -5 \\ c = 0 \\ 48a + 8b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{8} \\ b = -\frac{3}{4} \\ c = 0 \\ d = -1 \end{cases}. \text{ Trong các số } a, b, c, d \text{ có 1 số dương.}$$

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



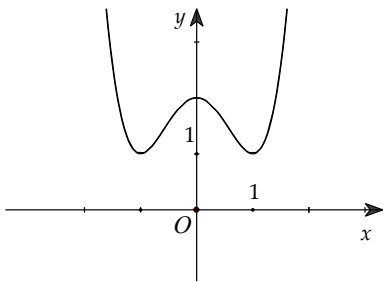
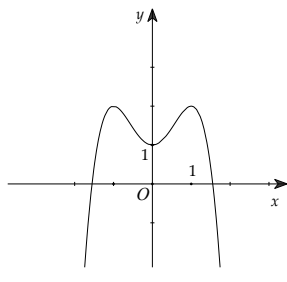
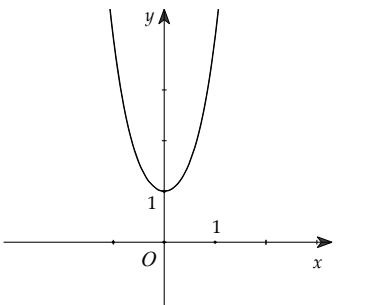
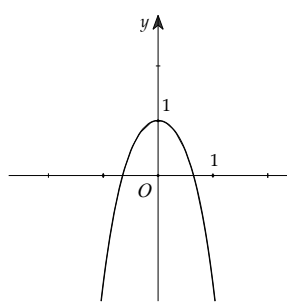
HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG. NHẬN DẠNG HÀM SỐ THƯỜNG GẶP THÔNG QUA ĐỒ THỊ

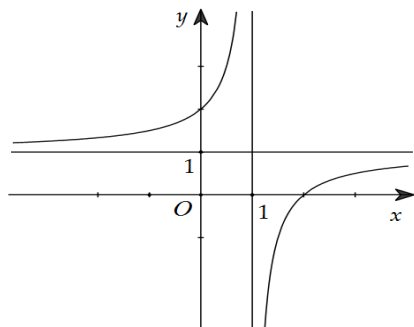
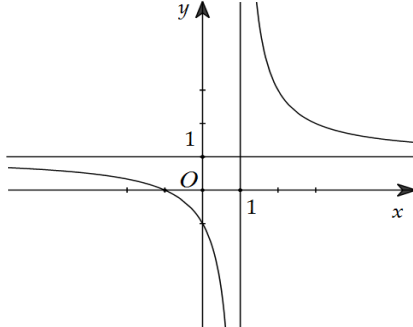
A. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		

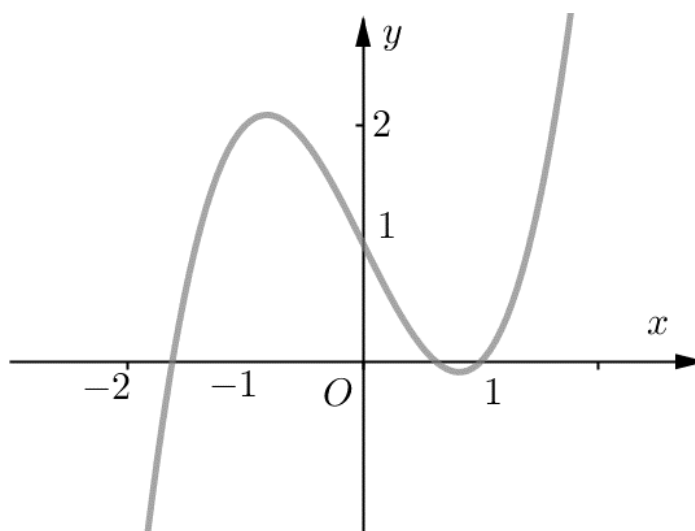
B. Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm.		

C. Hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad-bc \neq 0$)

$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$
	

Câu 1: Hình vẽ sau đây là đồ thị của một trong bốn hàm số cho ở các đáp án A, B, C, D . Hỏi đó là hàm số nào?



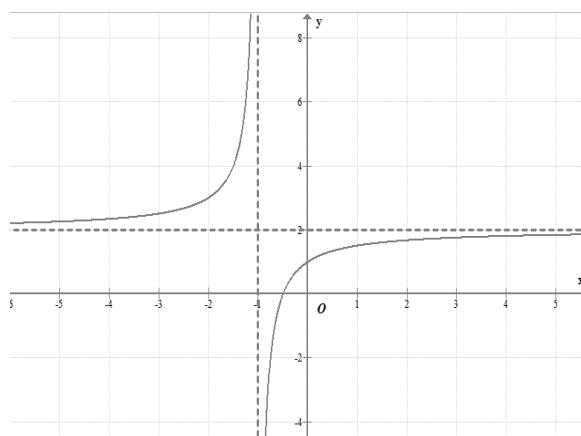
A. $y = x^3 + 2x + 1$.

B. $y = x^3 - 2x^2 + 1$.

C. $y = x^3 - 2x + 1$.

D. $y = -x^3 + 2x + 1$.

Câu 2: Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào



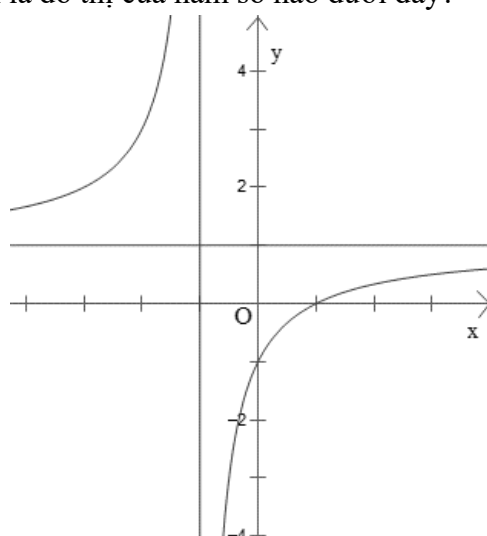
A. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x-3}{x+1}$.

D. $y = \frac{2x+5}{x+1}$.

Câu 3: Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



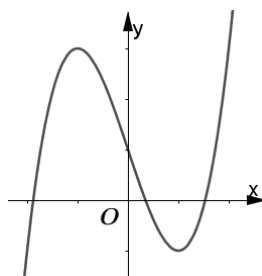
A. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

B. $y = \frac{-2x+1}{2x+2}$.

C. $y = x^4 - 3x^2$.

D. $y = x^3 - 3x^2$.

Câu 4: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



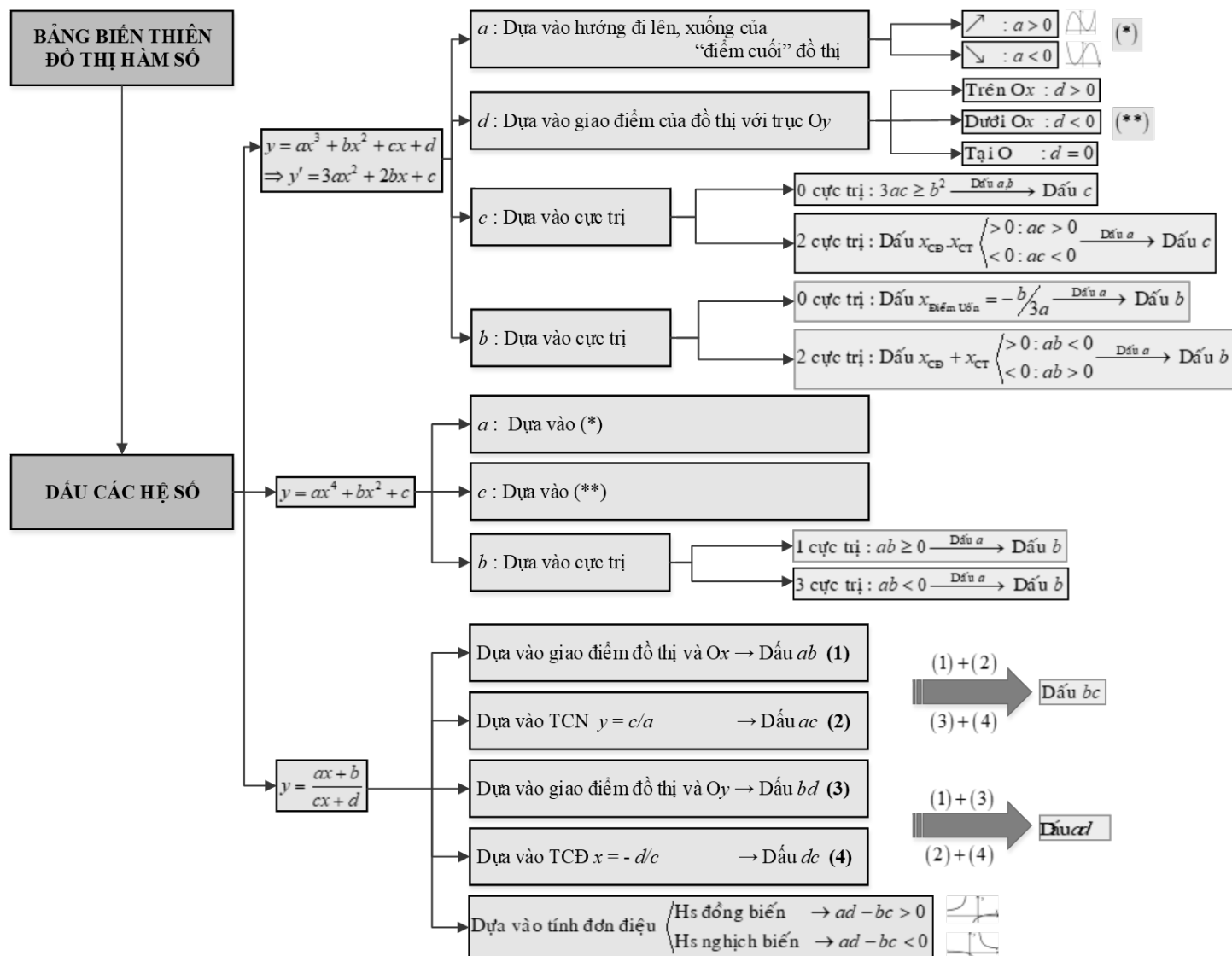
A. $y = -x^3 + 3x + 1$.

B. $y = x^4 - x^2 + 1$.

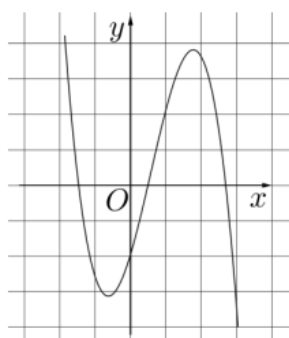
C. $y = -x^2 + x - 1$.

D. $y = x^3 - 3x + 1$.

DẠNG 2. XÉT DẤU CỦA CÁC HỆ SỐ HÀM SỐ THÔNG QUA ĐỒ THỊ



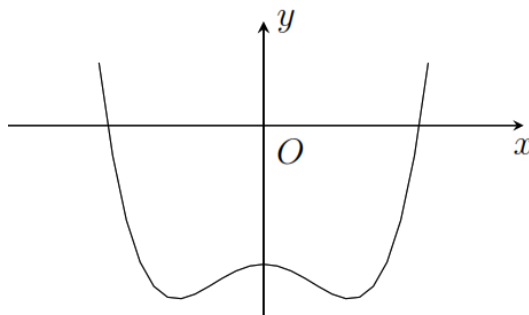
Câu 5: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A.** $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$
C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$

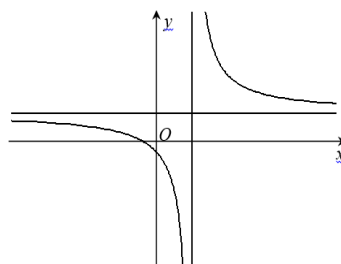
- B.** $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.
D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

Câu 6: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



- A.** $a > 0, b < 0, c > 0$ **B.** $a > 0, b < 0, c < 0$ **C.** $a > 0, b > 0, c < 0$ **D.** $a < 0, b > 0, c < 0$

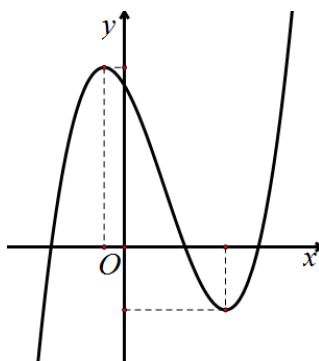
Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như sau.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

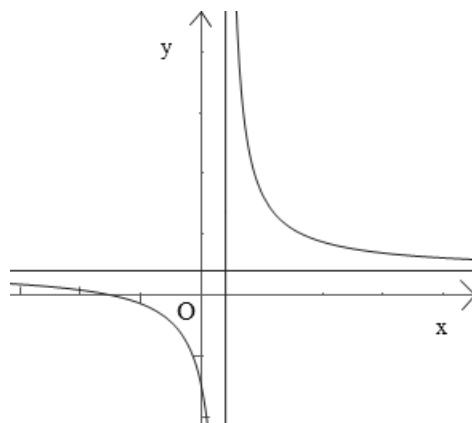
- A.** $ac > 0; bd > 0$ **B.** $ab < 0; cd < 0$ **C.** $bc > 0; ad < 0$ **D.** $ad > 0; bd < 0$

Câu 8: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Chọn khẳng định đúng về dấu của a, b, c, d ?



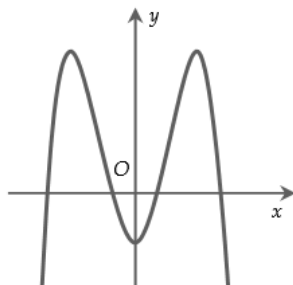
- A.** $a > 0, b > 0, d > 0, c > 0$ **B.** $a > 0, c > 0 > b, d < 0$
C. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ **D.** $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}$, $d < 0$ có đồ thị như hình trên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $a > 1, b > 0, c < 1$. **B.** $a > 1, b < 0, c > 1$. **C.** $a < 1, b > 0, c < 1$. **D.** $a > 1, b > 0, c > 1$.

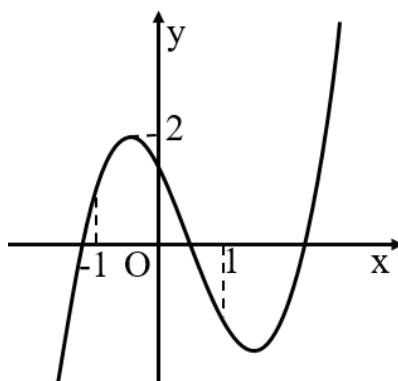
Câu 10: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c < 0$. **B.** $a < 0, b < 0, c > 0$. **C.** $a < 0, b > 0, c > 0$. **D.** $a < 0, b < 0, c < 0$.

Câu 11: Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào là đúng?

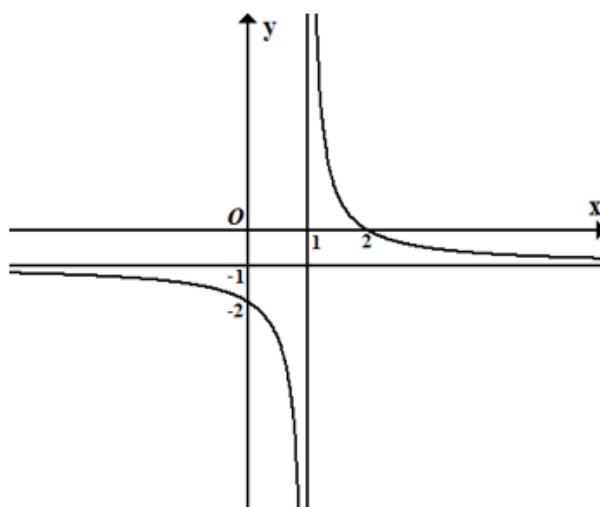
A. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.

B. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

C. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

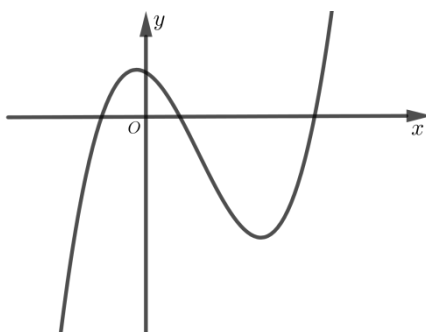
D. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên dưới, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T = a + 2b + 3c$?



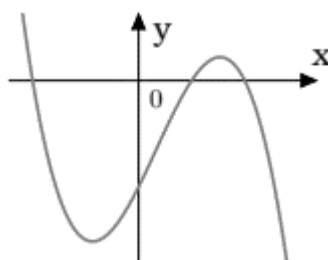
- A. $T = -8$. B. $T = 2$. C. $T = 6$. D. $T = 0$.

Câu 13: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?



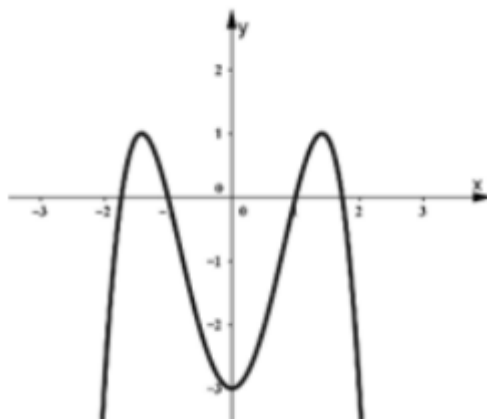
- A. $ab < 0, bc > 0, cd < 0$ B. $ab < 0, bc < 0, cd > 0$
C. $ab > 0, bc > 0, cd < 0$ D. $ab > 0, bc > 0, cd > 0$

Câu 14: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



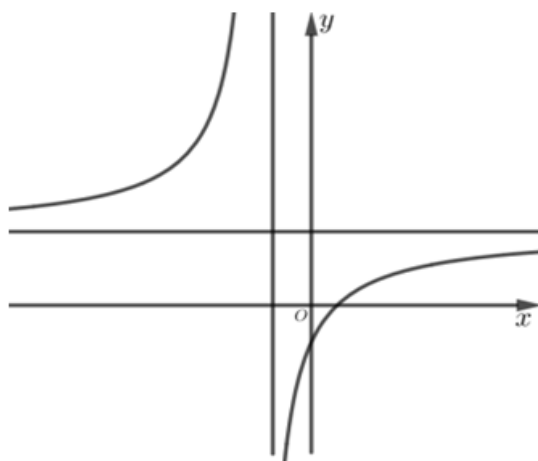
- A. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$ B. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$
C. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$ D. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$

Câu 15: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



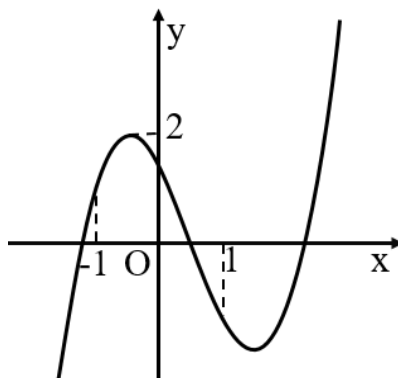
- A. $a > 0, b < 0, c < 0$. B. $a < 0, b < 0, c < 0$.
C. $a < 0, b > 0, c < 0$. D. $a > 0, b < 0, c > 0$

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như trong hình bên dưới. Biết rằng a là số thực dương, hỏi trong các số b, c, d có tất cả bao nhiêu số dương?



- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

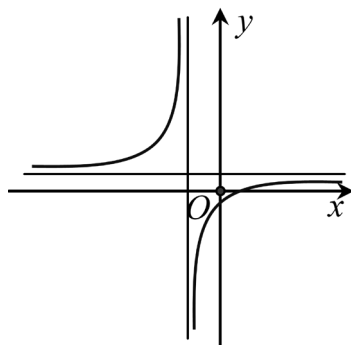
Câu 17: Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào là đúng?

- A. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$. B. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
C. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$. D. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



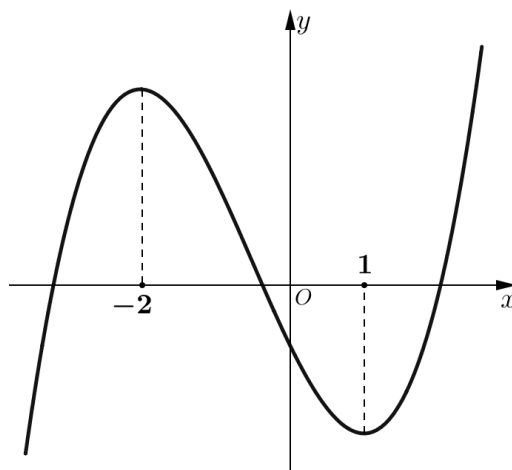
A. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc > 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc < 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc < 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc > 0 \end{cases}$

Câu 19: Cho đường cong $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

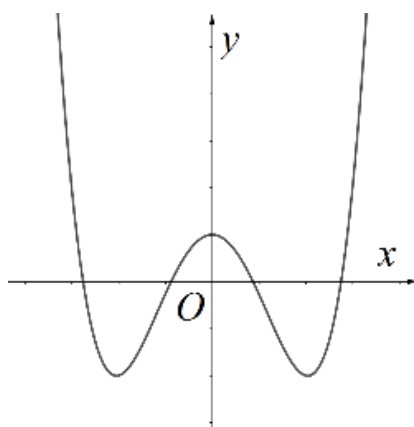
A. $a > 0, b < 0, c < 0, d < 0$.

B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

C. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

D. $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

Câu 20: Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



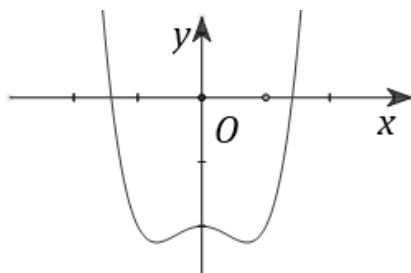
A. $a > 0, b > 0, c < 0$.

B. $a < 0, b > 0, c < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c > 0$.

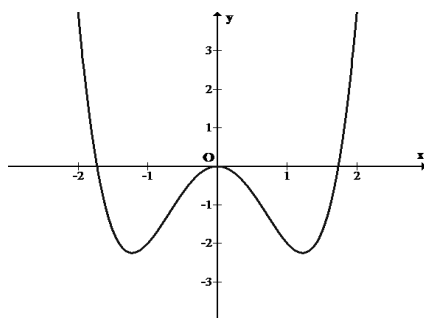
D. $a > 0, b < 0, c < 0$.

Câu 21: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm kết luận đúng



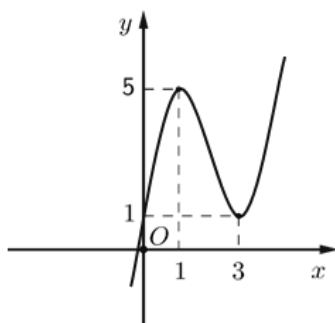
- A. $a + b > 0$. B. $bc > 0$. C. $ab > 0$. D. $ac > 0$.

Câu 22: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên. Hãy chọn mệnh đề đúng.



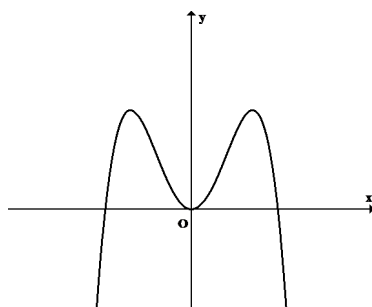
- A. $a < 0, b < 0, c = 0$. B. $a < 0, b > 0, c = 0$.
C. $a > 0, b < 0, c = 0$. D. $a > 0, b < 0, c > 0$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ ở bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



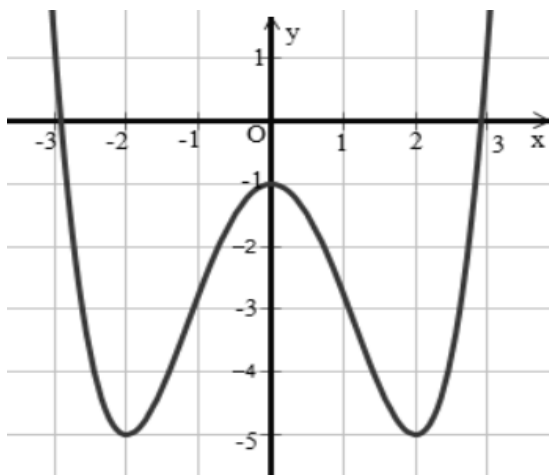
- A. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$. B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$. D. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

Câu 24: Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?



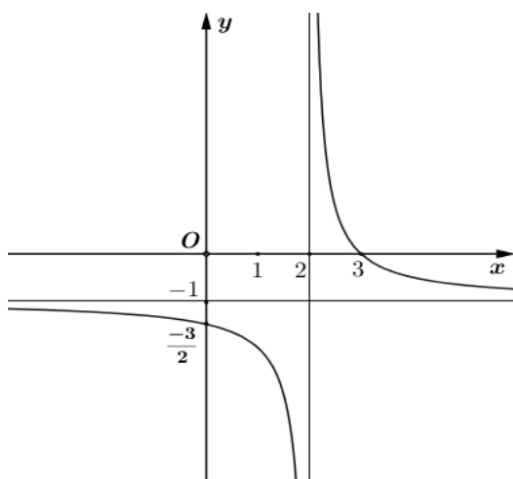
- A. $a < 0, b > 0, c > 0$. B. $a > 0, b < 0, c > 0$.
C. $a < 0, b > 0, c = 0$. D. $a > 0, b < 0, c < 0$.

Câu 25: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?



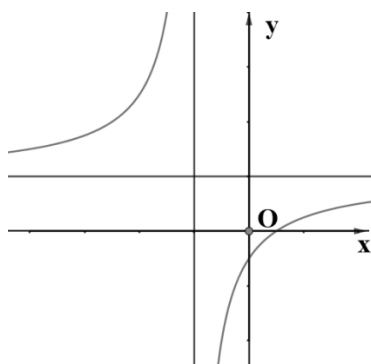
- A.** $a > 0, b < 0, c < 0$. **B.** $a > 0, b > 0, c < 0$. **C.** $a > 0, b < 0, c > 0$. **D.** $a < 0, b > 0, c < 0$.

Câu 26: Cho hàm số $y = \frac{ax+3}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính giá trị của $a - 2c$.



- A.** $a - 2c = 3$. **B.** $a - 2c = -3$. **C.** $a - 2c = -1$. **D.** $a - 2c = -2$.

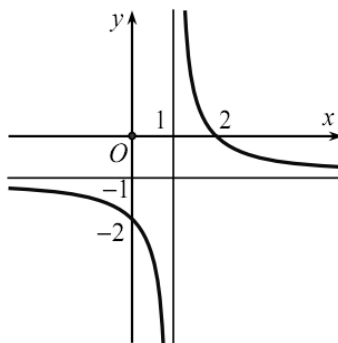
Câu 27: Hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A.** $ad > 0$ và $bd > 0$. **B.** $ad > 0$ và $ab < 0$. **C.** $bd < 0$ và $ab > 0$. **D.** $ad < 0$ và $ab < 0$.

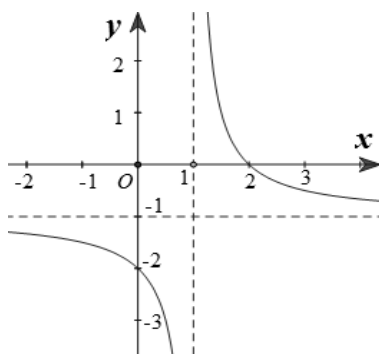
Câu 28: Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $b < a < 0$. **B.** $a < b < 0$. **C.** $b > a$ và $a < 0$. **D.** $a < 0 < b$.

Câu 29: Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$.



Khi đó tổng $a+b+c$ bằng

- A.** -1 . **B.** 1 . **C.** 2 . **D.** 0 .

Câu 30: Cho hàm số $f(x) = \frac{2-ax}{bx-c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$+$		$+$
y	3 $\nearrow$ $+\infty$		$-\infty$ $\nearrow$ 3

Tổng các số $(a+b+c)^2$ thuộc khoảng nào sau đây

- A.** $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $\left(0; \frac{4}{9}\right)$. **D.** $\left(\frac{4}{9}; 1\right)$.

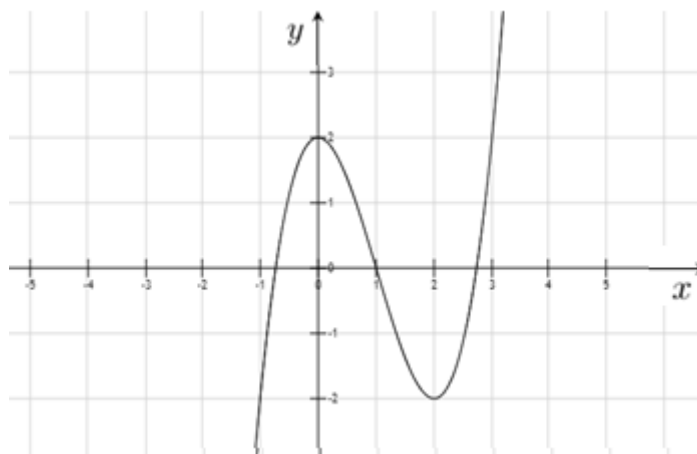
- Câu 31:** Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $c \neq 0$). Biết rằng đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(-1; 7)$ và giao điểm hai tiệm cận là $(-2; 3)$. Giá trị biểu thức $\frac{2a+3b+4c+d}{7c}$ bằng
- A. 7. B. 4. C. 6. D. -5.

- Câu 32:** Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx+c}$ (a, b, c là các tham số) có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		+		+	
y			$+\infty$		1
	1			$-\infty$	

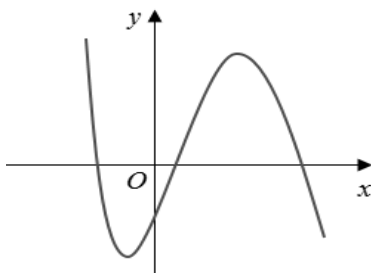
Xét các phát biểu sau: (1): $c > 1$; (2): $a + b < 0$; (3): $a + b + c = 0$; (4): $a > 0$. Số phát biểu đúng là?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 33:** Ta xác định được các số a, b, c để đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $(1; 0)$ và có điểm cực trị $(-2; 0)$. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.
- A. 25. B. -1. C. 7. D. 14.
- Câu 34:** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $S = a + b$?



- A. $S = -2$. B. $S = 0$. C. $S = 1$. D. $S = -1$.

Câu 35: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

B. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

Câu 36: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+1}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		+	
y		$+\infty$	$-\infty$

Tập các giá trị b là tập nghiệm của bất phương trình nào dưới đây?

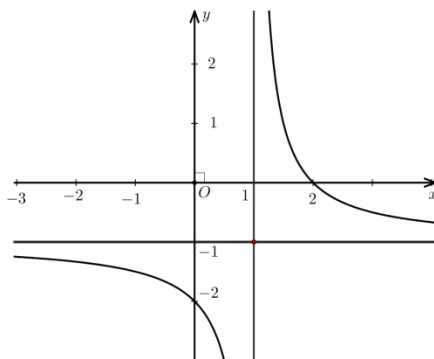
A. $b^3 - 8 \leq 0$.

B. $-b^2 + 4 > 0$.

C. $b^2 - 3b + 2 < 0$.

D. $b^3 - 8 < 0$.

Câu 37: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình dưới đây. Tính giá trị biểu thức $T = \frac{a-2b+3d}{c}$.



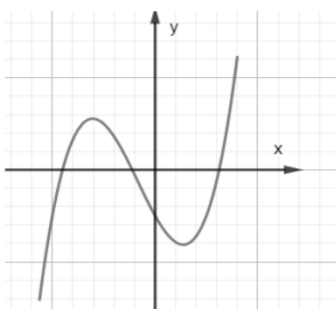
A. $T = 6$.

B. $T = 0$.

C. $T = -8$.

D. $T = 2$.

Câu 38: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Trong các số a, b, c và d có bao nhiêu số dương?



A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 39: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-6}{bx-c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	1		1

Trong các số a, b, c có bao nhiêu số âm?

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

DẠNG 2. ĐỒ THỊ HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Dạng 1

Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |f(x)|$.

$$\text{Ta có: } y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{ khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{ khi } f(x) < 0 \end{cases}$$

* Cách vẽ (C') từ (C) :

☐ Giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị $y = f(x)$.

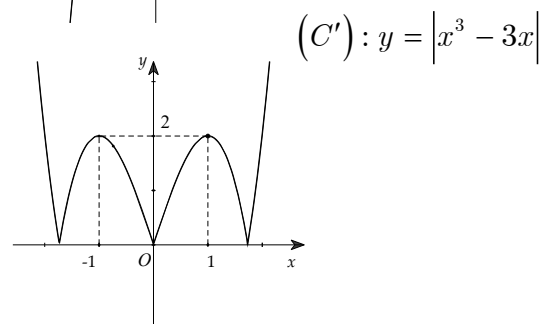
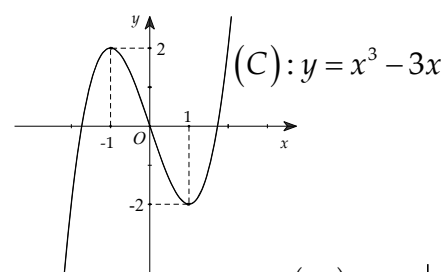
☐ Bỏ phần đồ thị phía dưới Ox của , lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox .

Ví dụ: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = |x^3 - 3x|$.

Biến đổi (C) :

☐ Bỏ phần đồ thị của (C) dưới Ox , giữ nguyên (C) phía trên Ox .

☐ Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox .



Dạng 2

Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = f(|x|)$.

$$\text{Ta có: } y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

và $y = f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị (C') nhận Oy làm trục đối xứng.

*** Cách vẽ (C') từ (C) :**

□ Giữ nguyên phần đồ thị bên phải Oy của đồ thị $(C): y = f(x)$.

□ Bỏ phần đồ thị bên trái Oy của (C) , lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy .

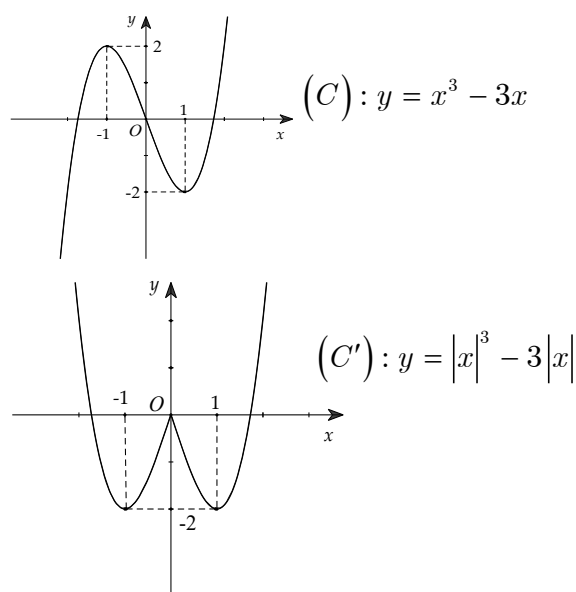
Ví dụ: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị

$$(C'): y = |x|^3 - 3|x|.$$

Biến đổi (C) :

□ Bỏ phần đồ thị của (C) bên trái Oy , giữ nguyên (C) bên phải Oy .

□ Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy .



Chú ý với dạng: $y = |f(|x|)|$ ta lần lượt biến đổi 2 đồ thị $y = f(|x|)$ và $y = |f(x)|$

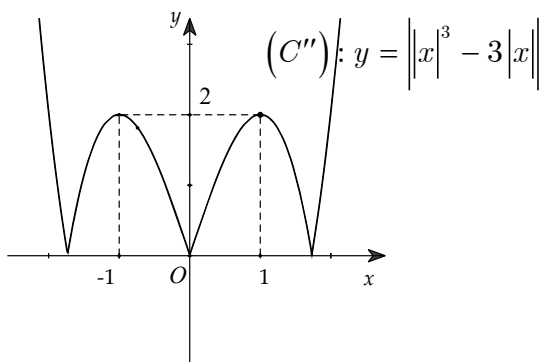
Ví dụ: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$

suy ra đồ thị $y = |x|^3 - 3|x|$. Biến đổi (C)

để được đồ thị $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$. Biến đổi

$(C'): y = |x|^3 - 3|x|$ ta được đồ thị

$$(C''): y = ||x|^3 - 3|x||.$$



Dạng 3

Từ đồ thị $(C): y = u(x).v(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |u(x)|.v(x)$.

$$\text{Ta có: } y = |u(x)|.v(x) = \begin{cases} u(x).v(x) = f(x) & \text{khi } u(x) \geq 0 \\ -u(x).v(x) = f(x) & \text{khi } u(x) < 0 \end{cases}$$

*** Cách vẽ (C') từ (C) :**

☐ Giữ nguyên phần đồ thị trên miền $u(x) \geq 0$ của đồ thị $(C): y = f(x)$.

☐ Bỏ phần đồ thị trên miền $u(x) < 0$ của (C) , lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox .

Ví dụ

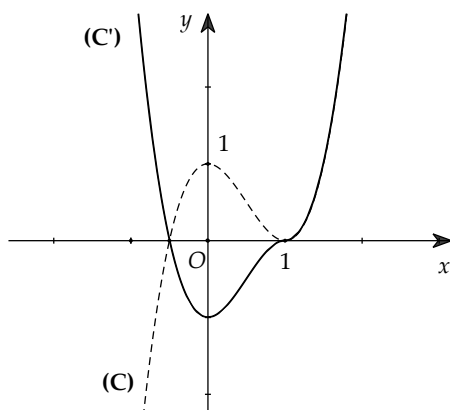
a) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ suy ra đồ thị $(C'): y = |x-1|(2x^2 - x - 1)$

$$y = |x-1|(2x^2 - x - 1) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 1 \\ -f(x) & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

Đồ thị :

☐ Giữ nguyên với $x \geq 1$.

☐ Bỏ với $x < 1$. Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox .



Nhận xét: Trong quá trình thực hiện phép suy đồ thị nên lấy đối xứng các điểm đặc biệt của : giao điểm với Ox , Oy , CĐ, CT...

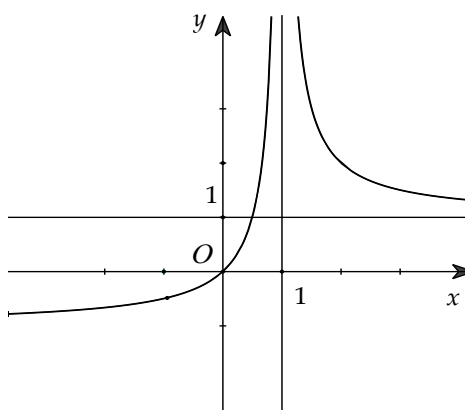
Ví dụ

b) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = \frac{x}{x-1}$ suy ra đồ thị $(C'): y = \frac{x}{|x-1|}$

$$y = \frac{x}{|x-1|} = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{khi } x \in (1; +\infty) \\ -\frac{x}{x-1} & \text{khi } x \in (-\infty; 1) \end{cases} \text{ . Đồ thị :}$$

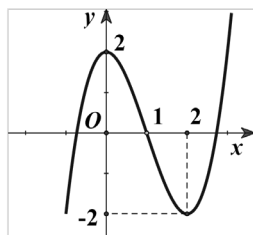
☐ Bỏ phần đồ thị của (C) với $x < 1$, giữ nguyên (C) với $x > 1$.

☐ Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox .

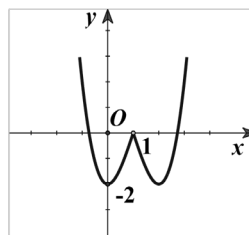


Nhận xét: Đối với hàm phân thức thì nên lấy đối xứng các đường tiệm cận để thực hiện phép suy đồ thị một cách tương đối chính xác.

Câu 40: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

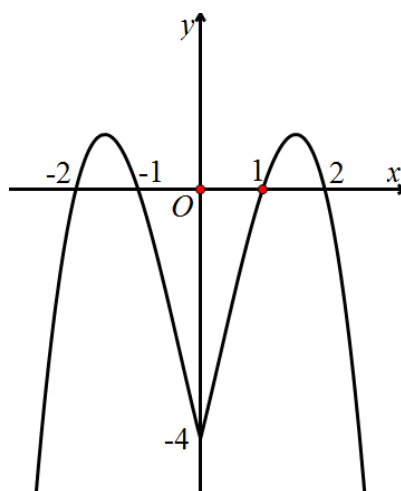
A. $y = |x^3 - 3x^2 + 2|$.

B. $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$

C. $y = |x-1|(x^2 - 2x - 2)$.

D. $y = (x-1)|x^2 - 2x - 2|$.

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như hình vẽ.



Chọn kết luận **đúng** trong các kết luận sau:

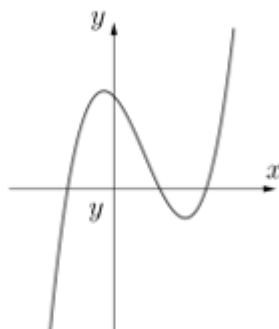
A. $f(x) = -x^3 + x^2 + 4x - 4$

B. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

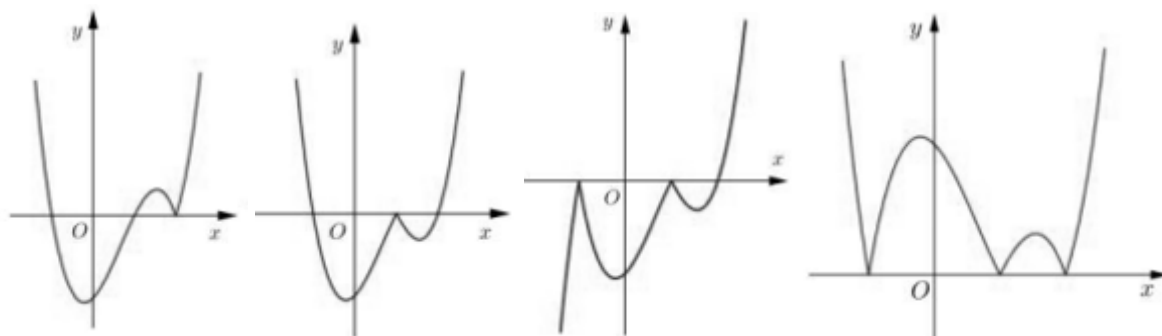
C. $f(x) = -x^3 - x^2 + 4x - 4$

D. $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.

Câu 42: Cho hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$ có đồ thị như hình vẽ



Một trong bốn hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y = (x-2)|x^2-1|$. Hỏi đó là hình nào?



Hình 1 Hình 2 Hình 3 Hình 4

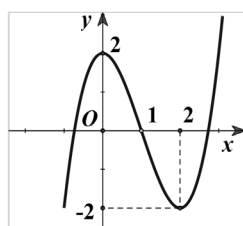
A. Hình 2.

B. Hình 4.

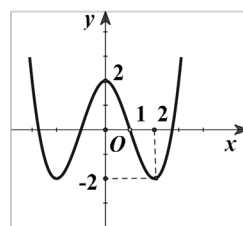
C. Hình 3.

D. Hình 1.

Câu 43: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

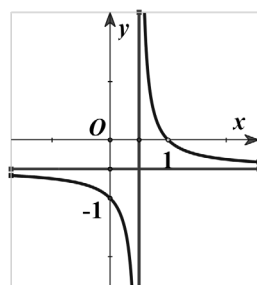
A. $y = |x^3 - 3x^2 + 2|$.

B. $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$

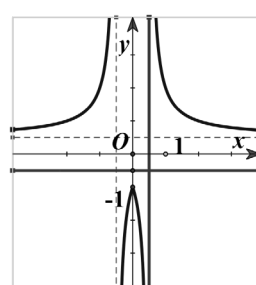
C. $y = |x-1|(x^2 - 2x - 2)$.

D. $y = (x-1)|x^2 - 2x - 2|$.

Câu 44: Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

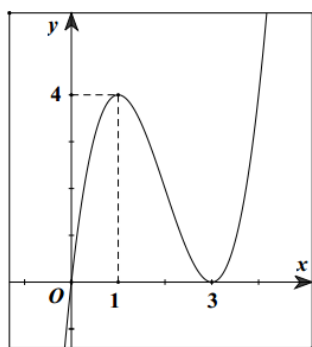
A. $y = \frac{-x+1}{2x-1}$

B. $y = \frac{|x|+1}{2|x|-1}$

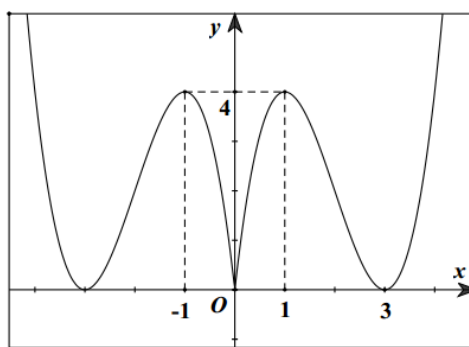
C. $y = \frac{-x+1}{2x-1}$

D. $y = \frac{-x+1}{2x-1}$

Câu 45: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị như Hình 1. Khi đó đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

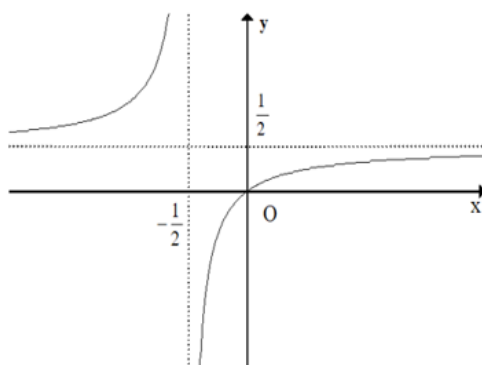
A. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$.

B. $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$.

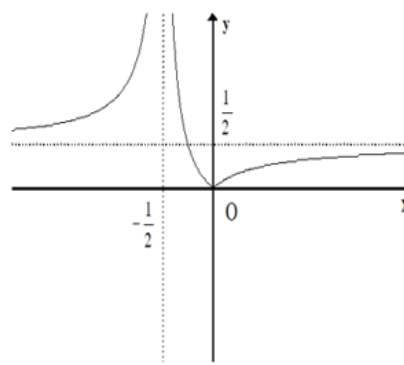
C. $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$.

D. $y = |x|^3 + 6|x|^2 + 9|x|$.

Câu 46: Cho hàm số $y = \frac{x}{2x+1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong các đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1



Hình 2

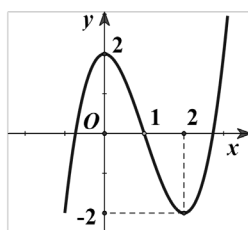
A. $y = \left| \frac{x}{2x+1} \right|$.

B. $y = \frac{|x|}{2|x|+1}$.

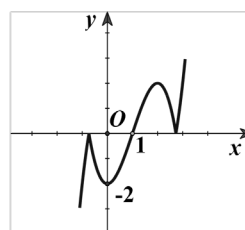
C. $y = \frac{x}{2|x|+1}$.

D. $y = \left| \frac{|x|}{2|x|+1} \right|$.

Câu 47: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

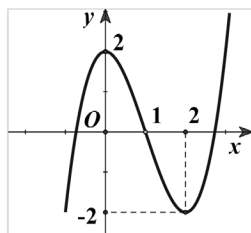
A. $y = |x^3 - 3x^2 + 2|$.

B. $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$.

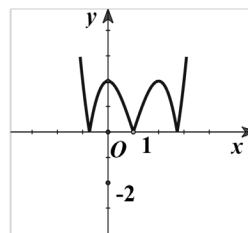
C. $y = |x-1|(x^2 - 2x - 2)$.

D. $y = (x-1)|x^2 - 2x - 2|$.

Câu 48: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

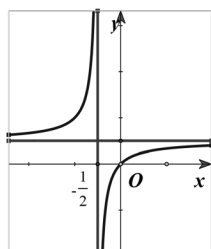
A. $y = |x^3 - 3x^2 + 2|$.

B. $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$

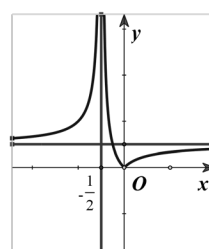
C. $y = |x-1|(x^2 - 2x - 2)$.

D. $y = (x-1)|x^2 - 2x - 2|$.

Câu 49: Cho hàm số $y = \frac{x}{2x+1}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

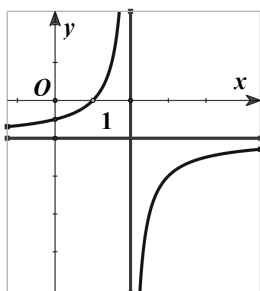
A. $y = \frac{x}{2|x|+1}$

B. $y = \frac{|x|}{2|x|+1}$

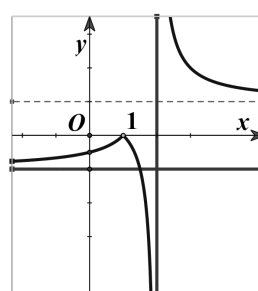
C. $y = \left| \frac{x}{2x+1} \right|$

D. $y = \left| \frac{|x|}{2|x|+1} \right|$

Câu 50: Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{x-2}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

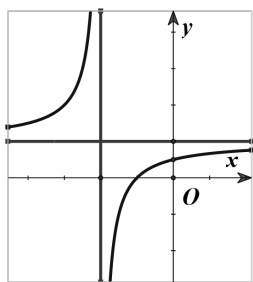
A. $y = \left| \frac{-x+1}{x-2} \right|$.

B. $y = \frac{|x|+1}{|x|-2}$.

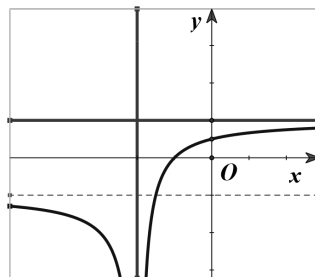
C. $y = \frac{|-x+1|}{x-2}$

D. $y = \frac{-x+1}{|x-2|}$

Câu 51: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

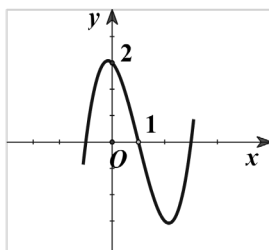
A. $y = \left| \frac{x+1}{x+2} \right|$.

B. $y = \frac{|x|+1}{|x|+2}$.

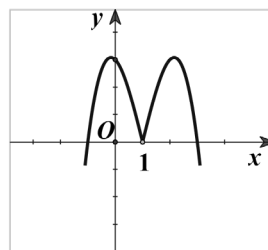
C. $y = \frac{|x+1|}{x+2}$.

D. $y = \frac{x+1}{|x+2|}$.

Câu 52: Cho hàm số $y = (x-1)(x^2 - 2x - 3)$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = \left| (x-1)(x^2 - 2x - 3) \right|$.

B. $y = |x-1|(x^2 - 2x - 3)$.

C. $y = -|x-1|(x^2 - 2x - 3)$

D. $y = (x-1)|x^2 - 2x - 3|$

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

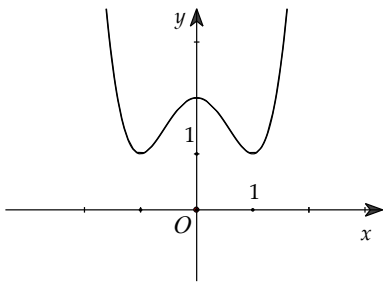
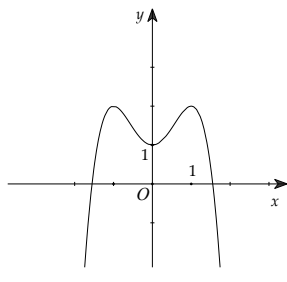
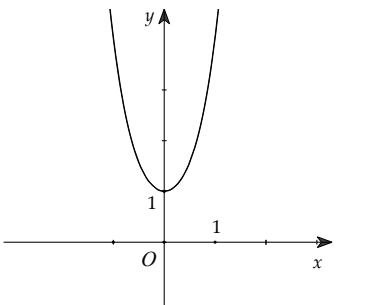
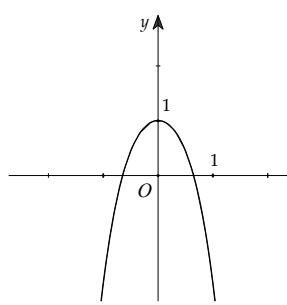
III BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG. NHẬN DẠNG HÀM SỐ THƯỜNG GẶP THÔNG QUA ĐỒ THỊ

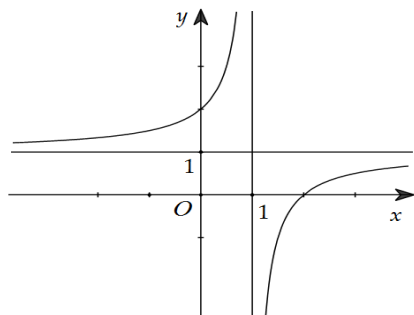
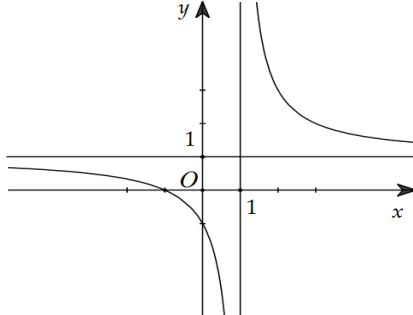
A. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		

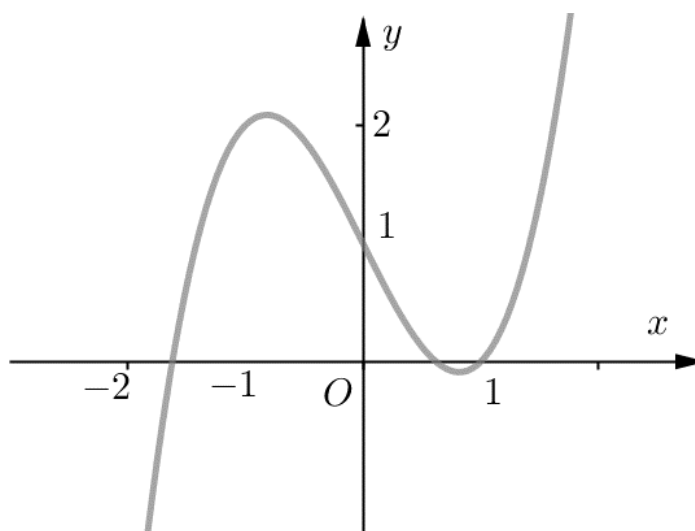
B. Hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

TRƯỜNG HỢP	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt ($ab < 0$)		
Phương trình $y' = 0$ có 1 nghiệm.		

C. Hàm số nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$
	

Câu 1: (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019) Hình vẽ sau đây là đồ thị của một trong bốn hàm số cho ở các đáp án A, B, C, D . Hỏi đó là hàm số nào?



A. $y = x^3 + 2x + 1$.

B. $y = x^3 - 2x^2 + 1$.

C. $y = x^3 - 2x + 1$.

D. $y = -x^3 + 2x + 1$.

Lời giải

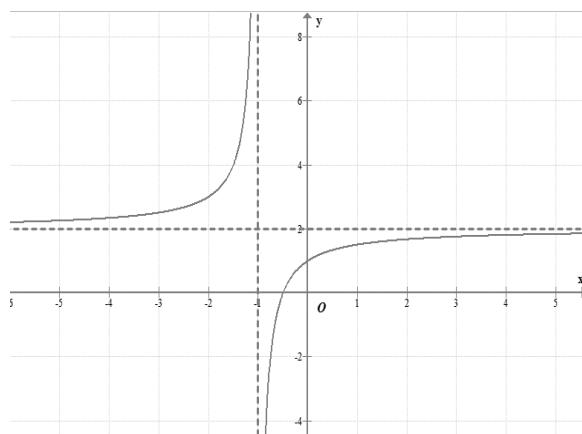
Dựa vào đồ thị, ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, loại phương án D .

Xét phương án A có $y' = 3x^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, hàm số không có cực trị, loại phương án A .

Xét phương án B có $y' = 3x^2 - 6x$ và y' đổi dấu khi đi qua các điểm $x = 0, x = 2$ nên hàm số đạt cực trị tại $x = 0$ và $x = 2$, loại phương án B .

Vậy phương án đúng là C .

Câu 2: (Sở Cần Thơ - 2019) Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào



A. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x-3}{x+1}$.

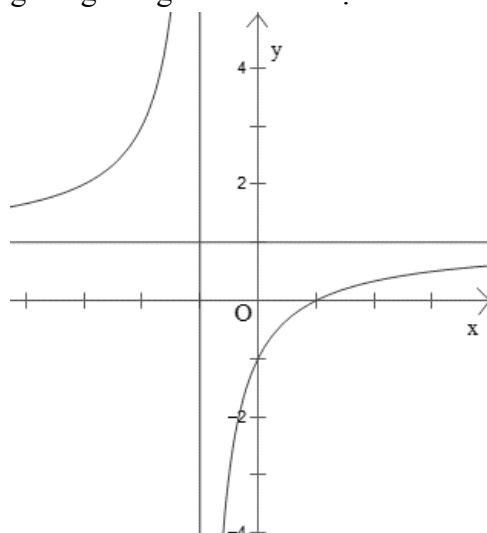
D. $y = \frac{2x+5}{x+1}$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0;1)$ nên chọn phương án **B**.

Câu 3: (SGD Nam Định) Đường cong trong hình là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

B. $y = \frac{-2x+1}{2x+2}$.

C. $y = x^4 - 3x^2$.

D. $y = x^3 - 3x^2$.

Lời giải

Chọn A

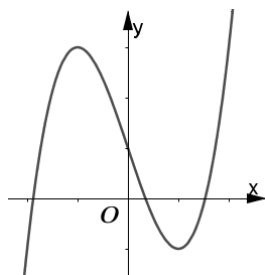
Hình vẽ trên là đồ thị của hàm số dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0; ad - bc \neq 0$) $\Rightarrow$ Loại phương án C, D

Ta thấy: Đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x = -1$ và đường tiệm cận ngang là $y = 1$

Phương án B: Đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x = -2 \Rightarrow$ loại B

$\Rightarrow$ A đúng.

Câu 4: (Sở Gia Lai 2019) Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



- A.** $y = -x^3 + 3x + 1$. **B.** $y = x^4 - x^2 + 1$. **C.** $y = -x^2 + x - 1$. **D.** $y = x^3 - 3x + 1$.

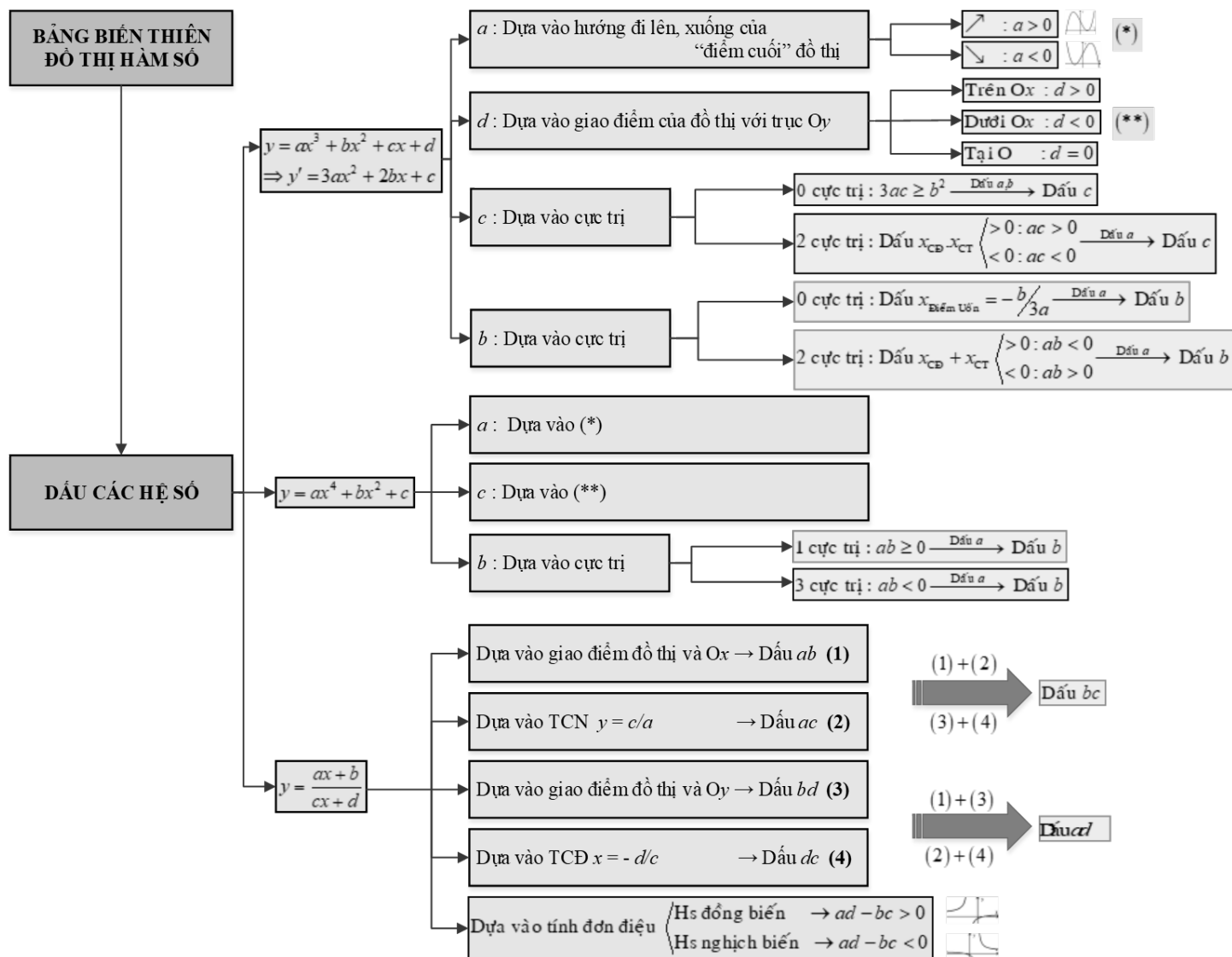
Lời giải

Chọn D

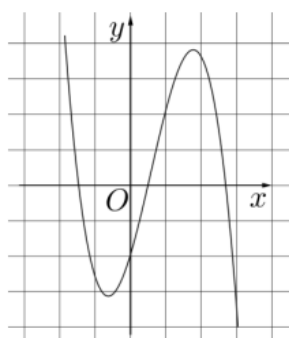
Đồ thị đã cho có hình dạng của đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nên loại phương án **B** và **C**

Dựa vào đồ thị, ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow a > 0$ nên loại phương án **A**

DẠNG 2. XÉT DẤU CỦA CÁC HỆ SỐ HÀM SỐ THÔNG QUA ĐỒ THỊ



Câu 5: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$

B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$

C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$

D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$

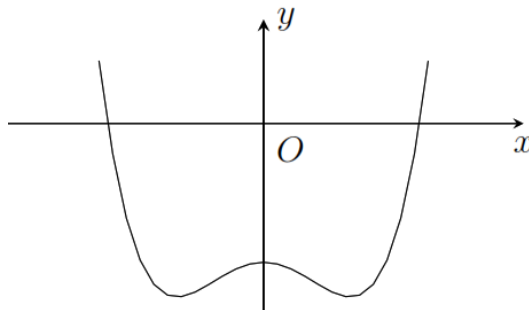
Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a < 0 \Rightarrow$ loại phương án C

$y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 trái dấu (do hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm hai phía với Oy) $\Rightarrow 3a \cdot c < 0 \Rightarrow c > 0 \Rightarrow$ loại phương án **D.** Do $(C) \cap Oy = D(0; d) \Rightarrow d < 0$.

Câu 6: (THPT Nguyễn Khuyến 2019) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



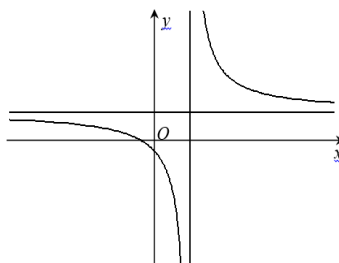
- A.** $a > 0, b < 0, c > 0$ **B.** $a > 0, b < 0, c < 0$ **C.** $a > 0, b > 0, c < 0$ **D.** $a < 0, b > 0, c < 0$

Lời giải

Chọn B

Ta có đồ thị có hình dạng như trên với hàm bậc bốn trùng phương có hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại nên $a > 0, b < 0$. Giá trị cực đại nhỏ hơn 0 nên $c < 0$.

Câu 7: (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019) Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như sau.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $ac > 0; bd > 0$ **B.** $ab < 0; cd < 0$ **C.** $bc > 0; ad < 0$ **D.** $ad > 0; bd < 0$

Lời giải

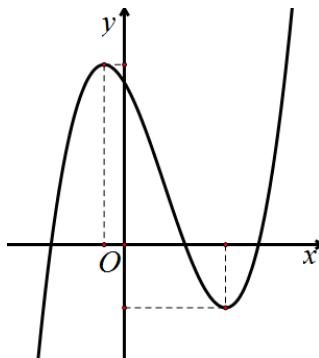
Theo đồ thị:

Tiệm cận ngang: $y = \frac{a}{c} > 0$ (1)

Tiệm cận đứng: $x = -\frac{d}{c} > 0 \Rightarrow \frac{d}{c} < 0$ (2)

$y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{b}{a} > 0$ (3)

Câu 8: (THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Chọn khẳng định đúng về dấu của a, b, c, d ?



A. $a > 0, b > 0, d > 0, c > 0$

B. $a > 0, c > 0 > b, d < 0$

C. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$

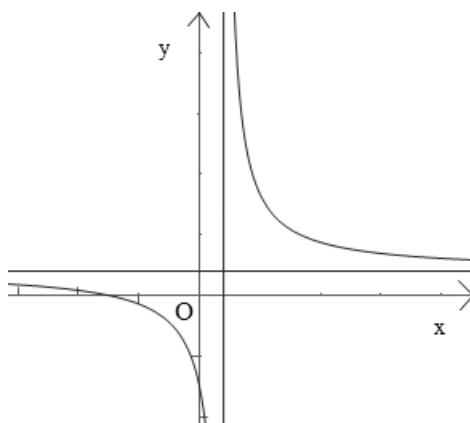
D. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có $a > 0$, đồ thị cắt Oy tại 1 điểm có tung độ dương nên $d > 0$, đồ thị có 2 cực trị trái dấu nên $x_1 \cdot x_2 < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow c < 0$. Vậy đáp án D

Câu 9: (Toán Học Tuổi Trẻ 2019) Cho hàm số $y = \frac{(a-1)x+b}{(c-1)x+d}$, $d < 0$ có đồ thị như hình trên. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $a > 1, b > 0, c < 1$.

B. $a > 1, b < 0, c > 1$.

C. $a < 1, b > 0, c < 1$.

D. $a > 1, b > 0, c > 1$.

Lời giải

Theo bài ra, đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -\frac{d}{c-1}$.

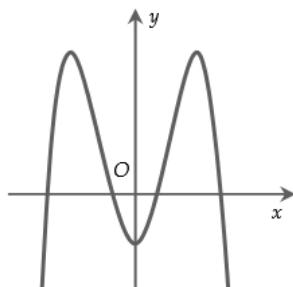
Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là: $y = \frac{a-1}{c-1}$.

Nhìn đồ thị ta thấy: $x = -\frac{d}{c-1} > 0$ mà $d < 0 \Rightarrow c-1 > 0 \Rightarrow c > 1$.

$y = \frac{a-1}{c-1} > 0 \Rightarrow a-1 > 0 \Rightarrow a > 1$.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $\frac{b}{d} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 10: (Sở Ninh Bình 2019) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b > 0, c < 0$. **B.** $a < 0, b < 0, c > 0$. **C.** $a < 0, b > 0, c > 0$. **D.** $a < 0, b < 0, c < 0$.

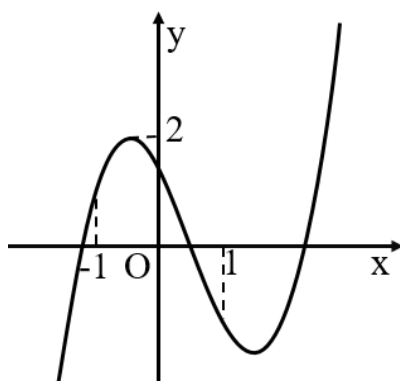
Lời giải

Đồ thị cắt trục tung tại điểm $(0; c)$, từ đồ thị suy ra $c < 0$

Mặt khác đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt, hay $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b) = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Suy ra a, b trái dấu.

Mà $a < 0 \Rightarrow b > 0$

Câu 11: (Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019) Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào là đúng?

A. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.

B. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

C. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

D. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Lời giải

+ Dựa vào hình dạng đồ thị ta khẳng định được $a > 0$.

+ Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0; d)$. Dựa vào đồ thị suy ra $d > 0$.

+ Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) trái dấu nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trái dấu. Vì thế $3a \cdot c < 0$, nên suy ra $c < 0$.

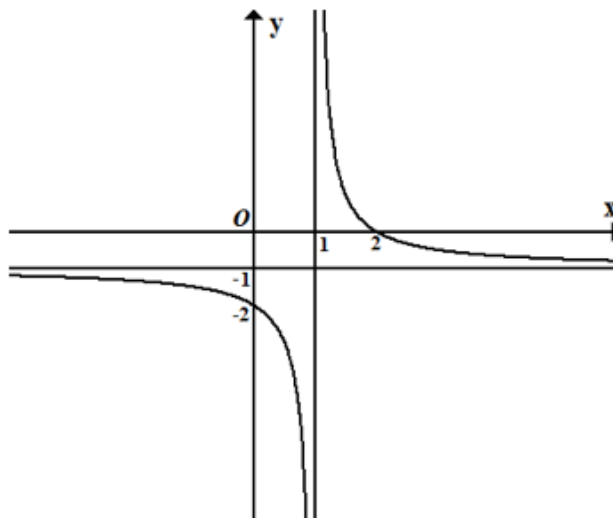
+ Mặt khác từ đồ thị ta thấy $\begin{cases} x_1 > -1 \\ x_2 > 1 \end{cases}$ nên $x_1 + x_2 > 0$.

Mà $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a}$ nên suy ra $-\frac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$.

Vậy $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Câu 12: (THPT Ba Đình 2019) Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên dưới, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Tính giá trị của biểu thức $T = a + 2b + 3c$?



A. $T = -8$.

B. $T = 2$.

C. $T = 6$.

D. $T = 0$.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta suy ra

☐ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -1$.

☐ Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(2; 0)$, $B(0; -2)$.

Từ biểu thức hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ (vì đồ thị hàm số là đồ thị hàm nhất biến nên $ac - b \neq 0$), ta

suy ra

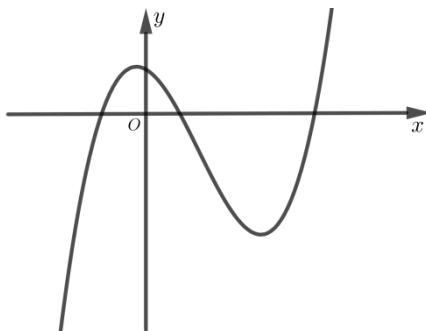
☐ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -c$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = a$.

☐ Đồ thị hàm số đi qua $A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$, $B\left(0; \frac{b}{c}\right)$.

Đối chiếu lại, ta suy ra $c = -1$, $a = -1$, $b = 2$.

Vậy $T = a + 2b + 3c = (-1) + 2 \cdot 2 + 3(-1) = 0$.

Câu 13: (THPT Việt Đức Hà Nội 2019) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **đúng**?



A. $ab < 0, bc > 0, cd < 0$

B. $ab < 0, bc < 0, cd > 0$

C. $ab > 0, bc > 0, cd < 0$

D. $ab > 0, bc > 0, cd > 0$

Lời giải

Chọn A

Từ dáng điệu của đồ thị ta có ngay được:

$$\oplus \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty \Rightarrow a > 0.$$

$\oplus$ Đồ thị hàm số cắt trục tung tại một điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

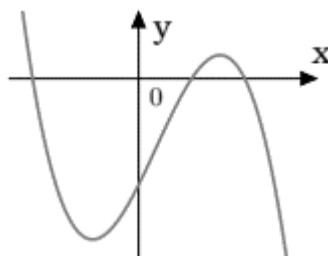
Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Mặt khác dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu và tổng hai nghiệm

$$\text{này luôn dương nên } \begin{cases} ac < 0 \\ -\frac{2b}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c < 0 \\ b < 0 \end{cases} \text{ (do } a > 0 \text{)}$$

Do đó: $ab < 0, bc > 0, cd < 0$.

Câu 14: (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới. Khẳng định nào sau đây đúng ?



A. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$

B. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$

C. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$

D. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$

Lời giải

Chọn D

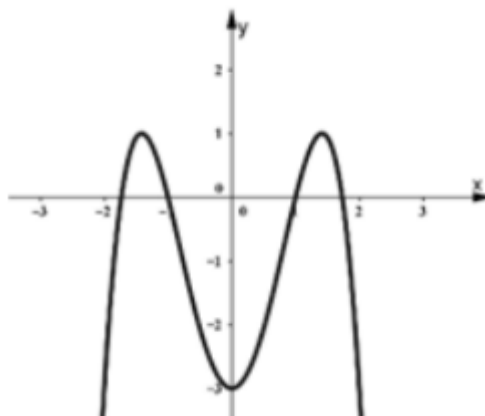
- Dựa vào hình dáng của đồ thị suy ra hệ số $a < 0$.

- Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm nên $d < 0$.

- Ta thấy đồ thị như hình vẽ có hai điểm cực trị, hoành độ các điểm cực trị trái dấu suy ra phương trình $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 trái dấu kéo theo $3a \cdot c < 0 \Rightarrow c > 0$.

- Mặt khác $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{3a} > 0 \Rightarrow b > 0$.

Câu 15: (THPT Chuyên Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



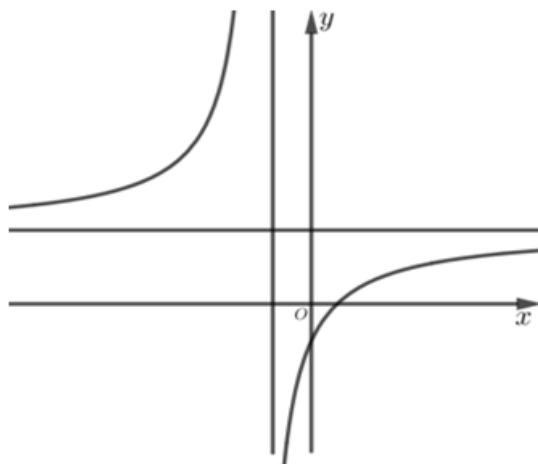
- A. $a > 0, b < 0, c < 0$. B. $a < 0, b < 0, c < 0$.
 C. $a < 0, b > 0, c < 0$. D. $a > 0, b < 0, c > 0$

Lời giải

Chọn C

- Dựa vào hình dạng đồ thị suy ra $a < 0$
- Hàm số có 3 điểm cực trị nên $ab < 0 \Rightarrow b > 0$
- Giao điểm với trục tung nằm dưới trục hoành nên $c < 0$.

Câu 16: (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như trong hình bên dưới. Biết rằng a là số thực dương, hỏi trong các số b, c, d có tất cả bao nhiêu số dương?



- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Nhìn vào đồ thị ta thấy

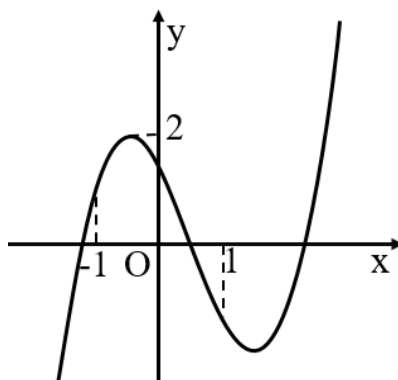
- tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$ nằm trên trục hoành nên $c > 0$ (vì $a > 0$)

- tiệm cận đứng $x = \frac{-d}{c}$ nằm bên trái trục tung nên $\frac{-d}{c} < 0$. Suy ra $d > 0$ (vì $c > 0$)
- giao điểm của đồ thị và trục tung nằm bên dưới trục hoành nên $\frac{b}{d} < 0$.

Suy ra $b < 0$ (vì $d > 0$)

Vậy $c > 0, d > 0$

Câu 17: (Cụm liên trường Hải Phòng 2019) Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào là đúng?

- A.** $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$. **B.** $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.
C. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$. **D.** $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Lời giải

Chọn D

+ Dựa vào hình dạng đồ thị ta khẳng định được $a > 0$.

+ Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0; d)$. Dựa vào đồ thị suy ra $d > 0$.

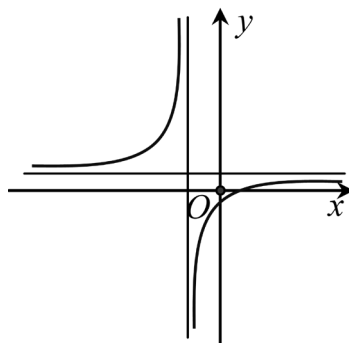
+ Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) trái dấu nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trái dấu. Vì thế $3a \cdot c < 0$, nên suy ra $c < 0$.

+ Mặt khác từ đồ thị ta thấy $\begin{cases} x_1 > -1 \\ x_2 > 1 \end{cases}$ nên $x_1 + x_2 > 0$.

Mà $x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a}$ nên suy ra $\frac{-2b}{3a} > 0 \Rightarrow b < 0$.

Vậy $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Câu 18: (Chuyên Nguyễn Huệ 2019) Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?



A. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc > 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} ad < 0 \\ bc < 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc < 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} ad > 0 \\ bc > 0 \end{cases}$

Lời giải

Chọn C

Nhận xét từ đồ thị:

+ Giao với trục hoành tại $x_0 = -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow a$ và b trái dấu (1).

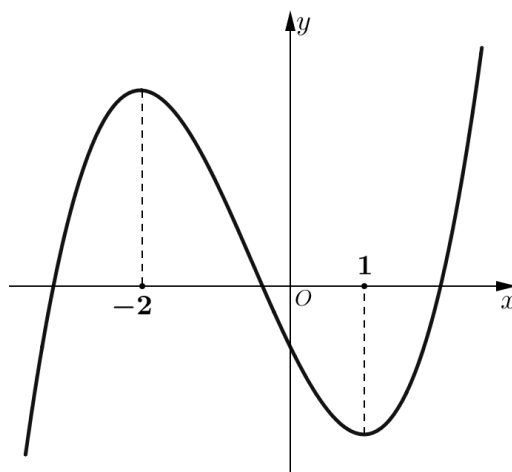
+ Giao với trục tung tại $y_0 = \frac{b}{d} < 0 \Rightarrow b$ và d trái dấu (2).

+ Tiệm cận đứng: $x = -\frac{d}{c} < 0 \Rightarrow d$ và c cùng dấu (3).

Từ (1) và (2) suy ra: a và d cùng dấu hay $ad > 0$.

Từ (2) và (3) suy ra: b và c trái dấu hay $bc < 0$.

Câu 19: Cho đường cong $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a > 0, b < 0, c < 0, d < 0$.

B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

C. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

D. $a > 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị ta có $x=0 \Rightarrow y=d < 0$, từ dạng đồ thị suy ra $a > 0$.

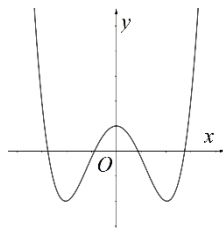
Mặt khác $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ từ đồ thị ta có phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu suy ra $ac < 0$ mà $a > 0$ suy ra $c < 0$.

Hơn nữa phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} = -1$ suy ra

$$3a = 2b \Rightarrow b > 0.$$

Vậy chọn đáp án **D**.

Câu 20: (Gia Lai 2019) Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a > 0, b > 0, c < 0$.

B. $a < 0, b > 0, c < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c > 0$.

D. $a > 0, b < 0, c < 0$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị:

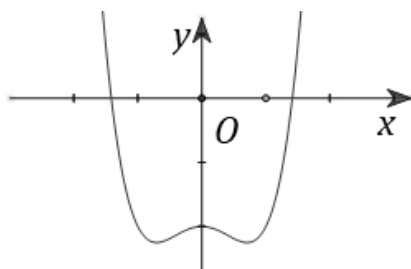
$$+ \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty \Rightarrow \boxed{a > 0}.$$

$$+ \text{Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị} \Rightarrow ab < 0 \Rightarrow \boxed{b < 0}.$$

$$+ \text{Giao điểm của đồ thị hàm số và trục tung có tung độ dương} \Rightarrow \boxed{c > 0}.$$

Vậy $a > 0, b < 0, c > 0$.

Câu 21: (THPT Thăng Long 2019) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm kết luận đúng



A. $a + b > 0$.

B. $bc > 0$.

C. $ab > 0$.

D. $ac > 0$.

Lời giải

Chọn B

Từ hình vẽ ta thấy:

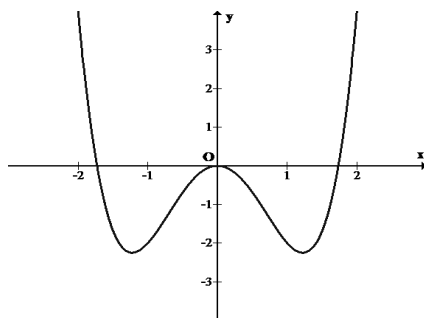
Đồ thị hàm số có bề lõm hướng lên $\Rightarrow a > 0$.

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow c < 0$.

Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị $\Rightarrow ab < 0 \Rightarrow b < 0$.

Vậy chỉ có $bc > 0$.

Câu 22: (THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh 2019) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Hãy chọn mệnh đề đúng.



- A.** $a < 0, b < 0, c = 0$. **B.** $a < 0, b > 0, c = 0$.
C. $a > 0, b < 0, c = 0$. **D.** $a > 0, b < 0, c > 0$.

Lời giải

Chọn C

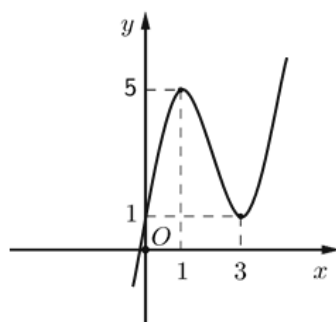
Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số ta nhận thấy :

Hệ số $a > 0$

Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow c = 0$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Rightarrow a.b < 0 \Rightarrow b < 0$

Câu 23: (Chuyên Long An 2019) Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ ở bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



- A.** $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$. **B.** $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.
C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$. **D.** $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

Lời giải

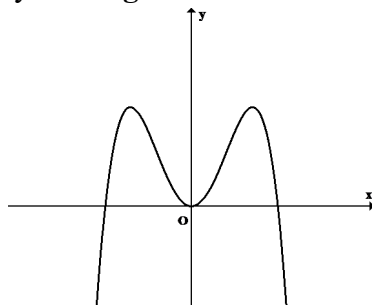
Chọn C

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0;1)$, $B(1;5)$ và $C(3;1)$ và đạt cực trị tại các điểm B và C .

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Ta có

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 5 \\ f'(1) = 0 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ a + b + c + d = 5 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 27a + 6b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 9 \\ d = 1 \end{cases}.$$

Câu 24: (THPT Trần Phú 2019) Cho hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?



A. $a < 0, b > 0, c > 0$.

B. $a > 0, b < 0, c > 0$.

C. $a < 0, b > 0, c = 0$.

D. $a > 0, b < 0, c < 0$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số ta nhận thấy :

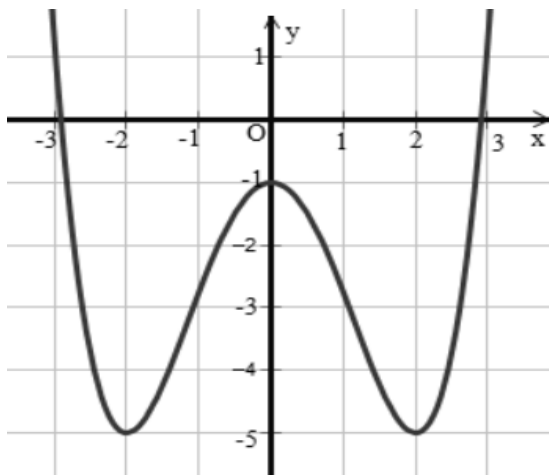
Hệ số $a < 0$.

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Rightarrow a.b < 0 \Rightarrow b > 0$.

Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow c = 0$.

Vậy $a < 0, b > 0, c = 0$.

Câu 25: (THPT Cộng Hiền 2019) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a > 0, b < 0, c < 0$.

B. $a > 0, b > 0, c < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0$.

Lời giải

Chọn A

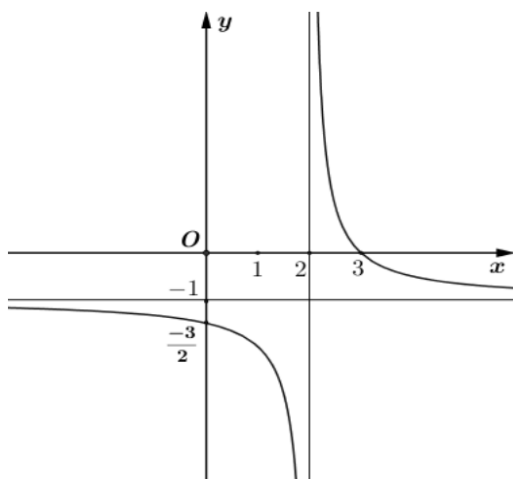
Nhìn vào đồ thị ta có:

Khi $x \in (2; +\infty)$ hàm số đồng biến $\Rightarrow a > 0$.

Hàm số có 3 điểm cực trị nên $a.b < 0$ mà $a > 0 \Rightarrow b < 0$.

$y(0) = -1 = c \Rightarrow c < 0$.

Câu 26: (SGD Điện Biên - 2019) Cho hàm số $y = \frac{ax+3}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính giá trị của $a-2c$.



A. $a-2c=3$.

B. $a-2c=-3$.

C. $a-2c=-1$.

D. $a-2c=-2$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số có TCN $y=-1 \Leftrightarrow \frac{a}{1}=-1 \Leftrightarrow a=-1$.

Mặt khác Đồ thị hàm số có TCD $x=2$ nên $2+c=0 \Leftrightarrow c=-2$.

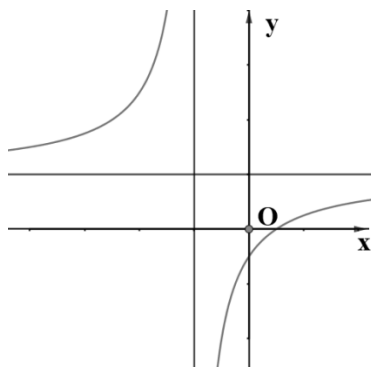
$\Rightarrow a-2c=-1-2.(-2)=3$.

Dựa vào đồ thị ta thấy các điểm $(3;0)$ và $(0;-\frac{3}{2})$ thuộc vào đồ thị hàm số đã cho nên ta được

$$\text{hệ phương trình } \begin{cases} 0 = \frac{a.3+3}{3+c} \\ -\frac{3}{2} = \frac{a.0+3}{0+c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+3=0 \\ -3c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=-2 \end{cases}$$

$\Rightarrow a-2c=-1-2.(-2)=3$.

Câu 27: Hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.



Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $ad > 0$ và $bd > 0$. **B.** $ad > 0$ và $ab < 0$. **C.** $bd < 0$ và $ab > 0$. **D.** $ad < 0$ và $ab < 0$.

Lời giải

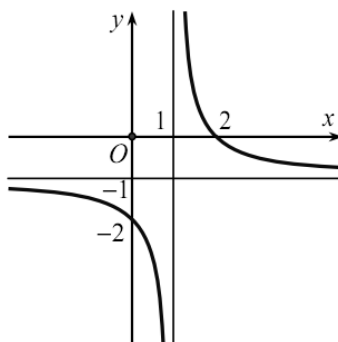
Chọn B

Đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm có hoành độ $x = -\frac{b}{a}$, giao với Oy tại điểm có tung độ $y = \frac{b}{d}$.

$$\text{Dựa vào hình vẽ ta có } \begin{cases} -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{b}{d} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} < 0 \\ \frac{b}{d} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab < 0 \\ bd < 0 \end{cases} \Rightarrow ad > 0.$$

Trong các phương án chỉ có phương án B thỏa mãn.

Câu 28: Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $b < a < 0$. **B.** $a < b < 0$. **C.** $b > a$ và $a < 0$. **D.** $a < 0 < b$.

Lời giải

Chọn A

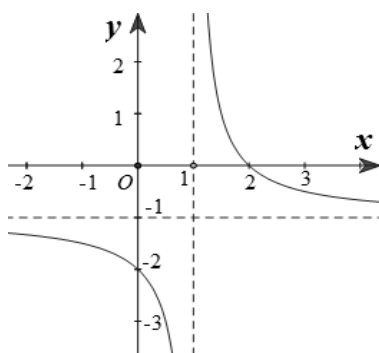
Ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -1$ suy ra $a = -1$.

Do đồ thị hàm số đi qua điểm $(2;0)$ nên $2a - b = 0 \Leftrightarrow -2 - b = 0 \Leftrightarrow b = -2$.

Vậy $b < a < 0$.

Câu 29: (Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020) Đồ thị trong hình bên dưới là của hàm số

$$y = \frac{ax+b}{x+c} \text{ (với } a, b, c \in \mathbb{R} \text{)}.$$



Khi đó tổng $a+b+c$ bằng

- A.** -1 . **B.** 1 . **C.** 2 . **D.** 0 .

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đường tiệm cận ngang $y = a$, đường tiệm cận đứng $x = -c$ và cắt Oy tại điểm $\left(0; \frac{b}{c}\right)$.

Từ đồ thị hàm số ta có đường tiệm cận ngang $y = -1$, đường tiệm cận đứng $x = 1$ và cắt Oy tại điểm $(0; -2)$.

$$\text{Từ đó suy ra: } \begin{cases} a = -1 \\ -c = 1 \\ \frac{b}{c} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = -1 \\ b = -2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ c = -1 \\ b = 2 \end{cases}. \text{ Vậy } a + b + c = -1 - 1 + 2 = 0.$$

Câu 30: (Chuyên Lương Văn Tỵ - Ninh Bình - 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{2-ax}{bx-c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+		+
y	3	$+\infty$	3

Tổng các số $(a+b+c)^2$ thuộc khoảng nào sau đây

- A.** $(1; 2)$. **B.** $(2; 3)$. **C.** $\left(0; \frac{4}{9}\right)$. **D.** $\left(\frac{4}{9}; 1\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-ax}{bx-c} = \frac{-a}{b}$, theo giả thiết suy ra $\frac{-a}{b} = 3 \Leftrightarrow a = -3b$

Hàm số không xác định tại $x = 1 \Rightarrow b - c = 0 \Leftrightarrow b = c$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định nên $f'(x) = \frac{ac-2b}{(bx-c)^2} > 0$ với mọi x khác 1

Suy ra $ac - 2b > 0 \Leftrightarrow -3b^2 - 2b > 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < b < 0 \Leftrightarrow 0 < -b < \frac{2}{3}$

Lại có $a + b + c = -3b + b + b = -b$. Suy ra $(a + b + c)^2 = b^2 \in \left(0; \frac{4}{9}\right)$

Vậy tổng $a + b + c$ thuộc khoảng $\left(0; \frac{4}{9}\right)$.

- Câu 31:** (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $c \neq 0$). Biết rằng đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(-1; 7)$ và giao điểm hai tiệm cận là $(-2; 3)$. Giá trị biểu thức $\frac{2a+3b+4c+d}{7c}$ bằng
- A. 7. B. 4. C. 6. D. -5.

Lời giải

Chọn C

+ Ta có đồ thị hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đường tiệm cận ngang là $y = \frac{a}{c}$, đường tiệm cận đứng là $x = \frac{-d}{c}$.

Theo bài ra, ta có:
$$\begin{cases} \frac{a}{c} = 3 \\ \frac{-d}{c} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3c \\ d = 2c \end{cases}.$$

+ Điểm $(-1; 7)$ thuộc đồ thị hàm số $f(x)$ nên $\frac{-a+b}{-c+d} = 7 \Leftrightarrow \frac{-3c+b}{-c+2c} = 7 \Leftrightarrow b = 10c$.

Vậy $\frac{2a+3b+4c+d}{7c} = \frac{2.(3c)+3.(10c)+4c+2c}{7c} = 6$.

- Câu 32:** (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020) Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx+c}$ (a, b, c là các tham số) có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	2		$+\infty$
y'	+		+	
y	1	$+\infty$		1

Xét các phát biểu sau: (1): $c > 1$; (2): $a+b < 0$; (3): $a+b+c = 0$; (4): $a > 0$. Số phát biểu đúng là?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} -\frac{c}{b} = 2 \\ \frac{a}{b} = 1 \\ ac - b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2b \\ a = b \\ ac - b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2b \\ a = b \\ -2b^2 - b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < c < 1 \\ -\frac{1}{2} < a < 0 \\ -\frac{1}{2} < b < 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$$

Dựa vào hệ trên ta có các phát biểu (1),(4) là sai, (2),(3) đúng.

- Câu 33:** (Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020) Ta xác định được các số a, b, c để đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $(1;0)$ và có điểm cực trị $(-2;0)$. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.
- A.** 25. **B.** -1. **C.** 7. **D.** 14.

Lời giải

Chọn A

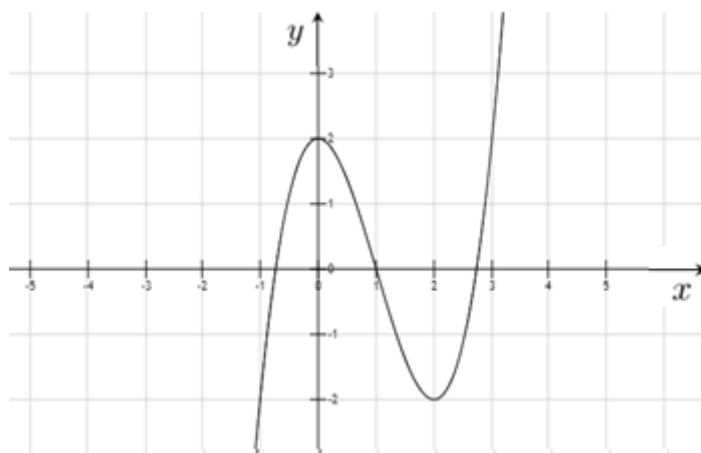
Ta có $y = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow y' = 3x^2 + 2ax + b$.

$$\text{Theo đề, ta có hệ phương trình } \begin{cases} y(1) = 0 \\ y(-2) = 0 \\ y'(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1^3 + a.1^2 + b.1 + c \\ 0 = (-2)^3 + a.(-2)^2 + b.(-2) + c \\ 0 = 3.(-2)^2 + 2a.(-2) + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a - 2b + c = 8 \\ -4a + b = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases}.$$

Vậy $T = a^2 + b^2 + c^2 = 3^2 + 0^2 + (-4)^2 = 25$.

- Câu 34:** (Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $S = a + b$?



- A.** $S = -2$. **B.** $S = 0$. **C.** $S = 1$. **D.** $S = -1$.

Lời giải

Chọn A

Vì đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $y = 2$ nên $d = 2$.

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Hàm số đạt cực trị tại $x = 0$ và $x = 2$ nên

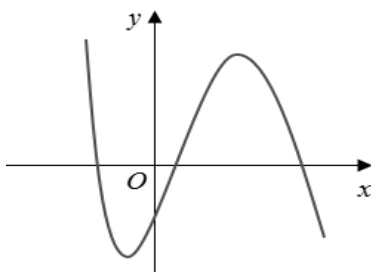
$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = -3a \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Từ đồ thị ta nhận thấy } y(2) = -2 \Leftrightarrow 8a + 4b + d = -2 \Leftrightarrow 8a + 4b = -4 \Leftrightarrow 2a + b = -1 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta tìm được $a = 1, b = -3$.

Vậy $S = -2$.

Câu 35: (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

B. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

C. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

D. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c, \quad y'' = 6ax + 2b$$

Từ đồ thị ta thấy:

☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$. Ta suy ra $a < 0$.

☐ $y(0) < 0 \Rightarrow d < 0$ loại **C**.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị với hoành độ x_1, x_2 trái dấu và $x_1 + x_2 > 0$. Ta suy ra phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu và $x_1 + x_2 > 0$.

Ta suy ra $x_1 x_2 = \frac{c}{3a} < 0, \Rightarrow c > 0$ loại **B**.

Hơn nữa, $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{3a} > 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow b > 0$. Loại **A**.

Câu 36: (Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020) Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+1}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		+	+
y	2	$+\infty$	2

Tập các giá trị b là tập nghiệm của bất phương trình nào dưới đây?

- A.** $b^3 - 8 \leq 0$. **B.** $-b^2 + 4 > 0$. **C.** $b^2 - 3b + 2 < 0$. **D.** $b^3 - 8 < 0$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+1}$ có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{1}{c}$ và đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{c}$.

Nhìn vào bảng biến thiên, ta thấy $-\frac{1}{c} = -1 \Rightarrow c = 1$ và $\frac{a}{c} = 2 \Rightarrow a = 2$ (vì $c = 1$).

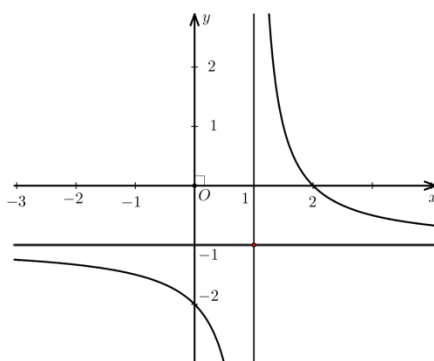
Ta có $y' = \frac{a-bc}{(cx+1)^2}$.

Vì hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$ nên

$$y' = \frac{a-bc}{(bx+c)^2} > 0 \Leftrightarrow a-bc > 0 \Leftrightarrow 2-b > 0 \Leftrightarrow b < 2 \Leftrightarrow b^3 < 8 \Leftrightarrow b^3 - 8 < 0.$$

Vậy tập các giá trị b là tập nghiệm của bất phương trình $b^3 - 8 < 0$.

Câu 37: (Tiên Du - Bắc Ninh - 2020) Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (với a, b, c, d là số thực) có đồ thị như hình dưới đây. Tính giá trị biểu thức $T = \frac{a-2b+3d}{c}$.



- A.** $T = 6$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = -8$. **D.** $T = 2$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta có

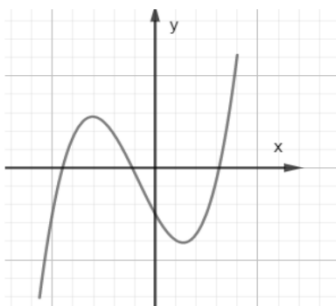
$$\text{TCD: } x = 1 \Rightarrow \frac{-d}{c} = 1 \Rightarrow \frac{d}{c} = -1 \Rightarrow d = -c$$

$$\text{TCN: } y = -1 \Rightarrow \frac{a}{c} = -1 \Rightarrow a = -c$$

$$\text{Đồ thị cắt trục hoành tại điểm: } x = 2 \Rightarrow \frac{-b}{a} = 2 \Rightarrow \frac{-b}{-c} = 2 \Rightarrow \frac{b}{c} = 2 \Rightarrow b = 2c$$

$$\text{Vậy } T = \frac{a - 2b + 3d}{c} = \frac{-c - 4c - 3c}{c} = -8$$

Câu 38: (Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Trong các số a, b, c và d có bao nhiêu số dương?



A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Từ hình dạng đồ thị hàm số ta có $a > 0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow d < 0$

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu $\Rightarrow y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ca < 0$

Mà $a > 0$ nên $c < 0$

Ta lại có: $y'' = 6ax + 2b$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$$

Từ đồ thị hàm số ta thấy tâm đối xứng có hoành độ âm. Do đó $-\frac{b}{3a} < 0$

Mà $a > 0$ nên $b > 0$

Vậy trong các số a, b, c và d có 2 số dương là a và b

Câu 39: (Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-6}{bx-c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$1 \rightarrow -\infty$		$+\infty \rightarrow 1$

Trong các số a, b, c có bao nhiêu số âm?

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên của hàm số, ta thấy đồ thị có hai đường tiệm cận, trong đó tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{c}{b} = -2 \\ \frac{a}{b} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc < 0 \\ ab > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0, c < 0, a > 0 \quad (1) \\ b < 0, c > 0, a < 0 \quad (2) \end{cases}$$

Lại có hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định $f'(x) = \frac{-ac+6b}{(bx-c)^2} < 0 \Rightarrow ac > 6b$.

Ta thấy (1) không thể xảy ra do nếu $b > 0$ thì $ac > 6b > 0$; và (2) có thể xảy ra do nếu $c > 0, a < 0$ thì $6b < ac < 0$.

Vậy trong các số a, b, c có hai số âm.

DẠNG 2. ĐỒ THỊ HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI (BIẾN ĐỔI ĐỒ THỊ)

Dạng 1

Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |f(x)|$.

$$\text{Ta có: } y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{ khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{ khi } f(x) < 0 \end{cases}$$

*** Cách vẽ (C') từ (C) :**

☐ Giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị $(C): y = f(x)$.

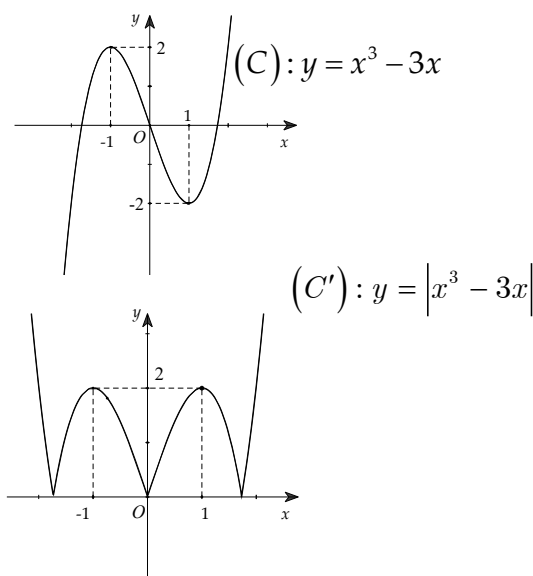
☐ Bỏ phần đồ thị phía dưới Ox của (C) , lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox .

Ví dụ: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị $y = |x^3 - 3x|$.

Biến đổi (C) :

☐ Bỏ phần đồ thị của (C) dưới Ox , giữ nguyên (C) phía trên Ox .

☐ Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox .



Dạng 2

Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = f(|x|)$.

$$\text{Ta có: } y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{ khi } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{ khi } x < 0 \end{cases}$$

và $y = f(|x|)$ là hàm chẵn nên đồ thị (C') nhận Oy làm trục đối xứng.

*** Cách vẽ (C') từ (C) :**

☐ Giữ nguyên phần đồ thị bên phải Oy của đồ thị $(C): y = f(x)$.

☐ Bỏ phần đồ thị bên trái Oy của (C) , lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy .

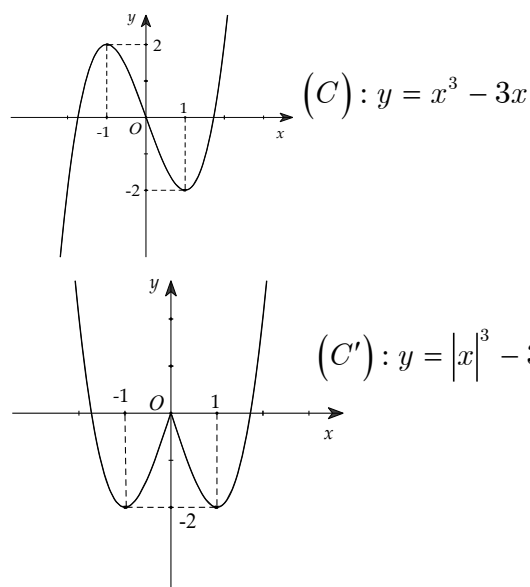
Ví dụ: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$ suy ra đồ thị

$$(C'): y = |x|^3 - 3|x|.$$

Biến đổi (C) :

☐ Bỏ phần đồ thị của (C) bên trái Oy , giữ nguyên (C) bên phải Oy .

☐ Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy .



Chú ý với dạng: $y = |f(|x|)|$ ta lần lượt biến đổi 2 đồ thị $y = f(|x|)$ và $y = |f(x)|$

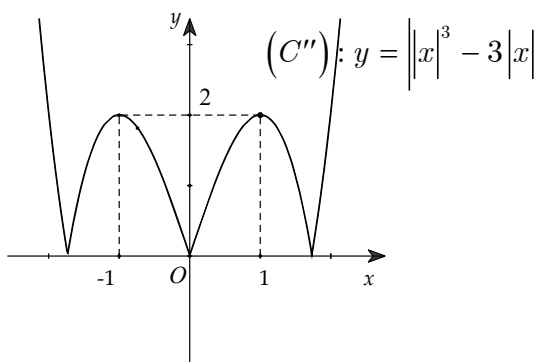
Ví dụ: Từ đồ thị $(C): y = f(x) = x^3 - 3x$

suy ra đồ thị $y = |x|^3 - 3|x|$. Biến đổi (C)

để được đồ thị $(C'): y = |x|^3 - 3|x|$. Biến đổi

$(C'): y = |x|^3 - 3|x|$ ta được đồ thị

$(C''): y = ||x|^3 - 3|x||$.



Dạng 3

Từ đồ thị $(C): y = u(x).v(x)$ suy ra đồ thị $(C'): y = |u(x)|.v(x)$.

$$\text{Ta có: } y = |u(x)|.v(x) = \begin{cases} u(x).v(x) = f(x) & \text{khi } u(x) \geq 0 \\ -u(x).v(x) = f(x) & \text{khi } u(x) < 0 \end{cases}$$

*** Cách vẽ (C') từ (C) :**

☐ Giữ nguyên phần đồ thị trên miền $u(x) \geq 0$ của đồ thị $(C): y = f(x)$.

☐ Bỏ phần đồ thị trên miền $u(x) < 0$ của (C) , lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox .

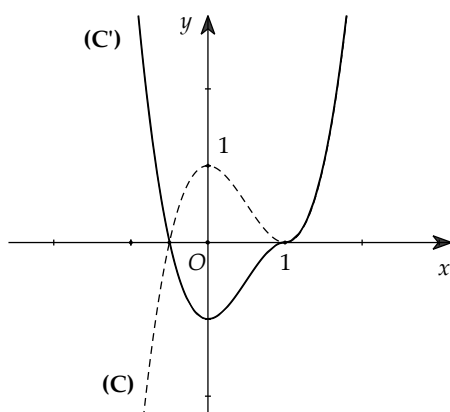
Ví dụ

a) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ suy ra đồ thị $(C'): y = |x - 1|(2x^2 - x - 1)$

$$y = |x - 1|(2x^2 - x - 1) = \begin{cases} f(x) & \text{khi } x \geq 1 \\ -f(x) & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

Đồ thị (C') :

- ☐ Giữ nguyên (C) với $x \geq 1$.
- ☐ Bỏ (C) với $x < 1$. Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox .



Nhận xét: Trong quá trình thực hiện phép suy đồ thị nên lấy đối xứng các điểm đặc biệt của (C) : giao điểm với Ox , Oy , CĐ, CT...

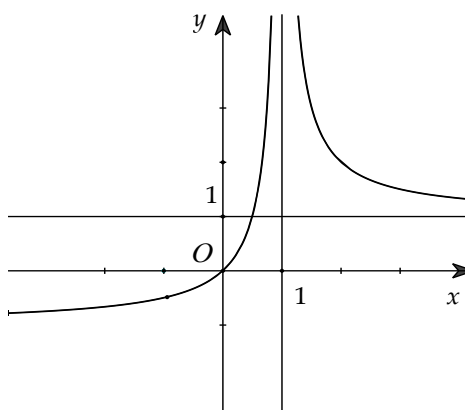
Ví dụ

b) Từ đồ thị $(C): y = f(x) = \frac{x}{x-1}$ suy ra đồ thị

$$(C'): y = \frac{x}{|x-1|} = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{khi } x \in (1; +\infty) \\ -\frac{x}{x-1} & \text{khi } x \in (-\infty; 1) \end{cases} . \text{Đồ thị}$$

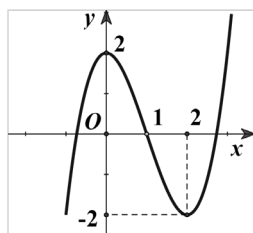
(C') :

- ☐ Bỏ phần đồ thị của (C) với $x < 1$, giữ nguyên (C) với $x > 1$.
- ☐ Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox .

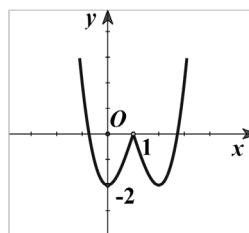


Nhận xét: Đối với hàm phân thức thì nên lấy đối xứng các đường tiệm cận để thực hiện phép suy đồ thị một cách tương đối chính xác.

Câu 40: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = |x^3 - 3x^2 + 2|$.

B. $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$

C. $y = |x-1|(x^2 - 2x - 2)$.

D. $y = (x-1)|x^2 - 2x - 2|$.

Hướng dẫn

Ta có: $y = x^3 - 3x^2 + 2 = (x-1)(x^2 - 2x - 2)$

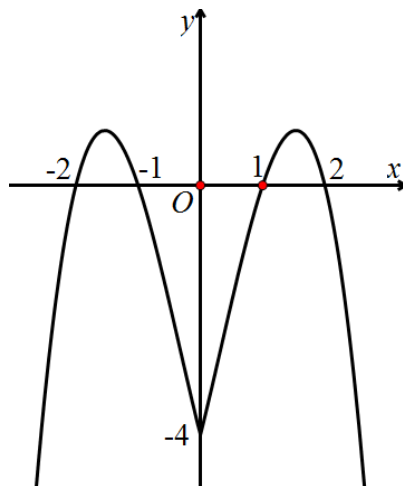
Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy

Toàn bộ đồ thị ứng với $x \geq 1$ được giữ nguyên.

Phần đồ thị ứng với $x < 1$ lấy đối xứng qua trục hoành.

$\Rightarrow$ Chọn đáp án **C**.

Câu 41: (THPT Việt Đức Hà Nội 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như hình vẽ.



Chọn kết luận **đúng** trong các kết luận sau:

A. $f(x) = -x^3 + x^2 + 4x - 4$

B. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

C. $f(x) = -x^3 - x^2 + 4x - 4$

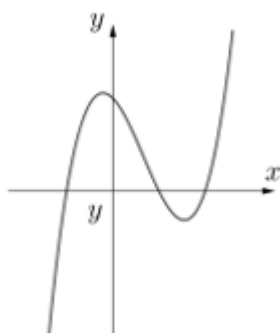
D. $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.

Lời giải

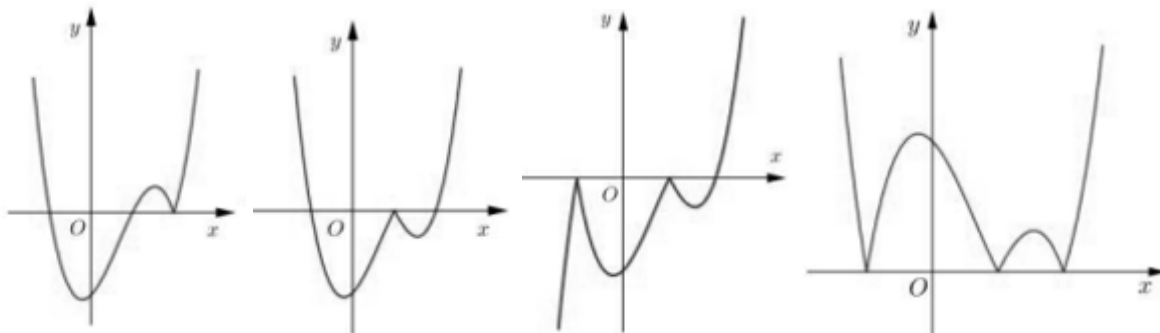
Chọn A

Do đồ thị giao với trục Oy tại điểm có tung độ bằng -4 và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$.

Câu 42: (Chu Văn An - Hà Nội - 2019) Cho hàm số $y = (x-2)|x^2-1|$ có đồ thị như hình vẽ



Một trong bốn hình dưới đây là đồ thị của hàm số $y = (x-2)|x^2-1|$. Hỏi đó là hình nào?



Hình 1 Hình 2 Hình 3 Hình 4

A. Hình 2.

B. Hình 4.

C. Hình 3.

D. Hình 1.

Lời giải

Chọn C

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = (x-2)(x^2-1)$.

$$\text{Ta có } y = (x-2)|x^2-1| = \begin{cases} (x-2)(x^2-1) & \text{khi } x \leq -1 \text{ hay } x \geq 1 \\ -(x-2)(x^2-1) & \text{khi } -1 < x < 1 \end{cases}.$$

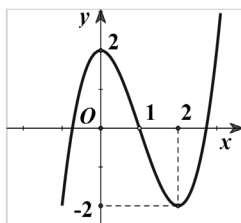
Cách vẽ đồ thị như sau:

+ Giữ nguyên phần đồ (C) ứng với $x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ ta được (C_1) .

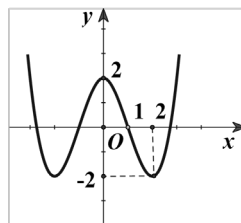
+ Lấy đối xứng phần (C) ứng với $x \in (-1; 1)$ qua trục hoành ta được (C_2) .

Khi đó đồ thị hàm số $y = (x-2)|x^2-1|$ gồm (C_1) và (C_2) .

Câu 43: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = |x^3 - 3x^2 + 2|$.

B. $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$

C. $y = |x-1|(x^2 - 2x - 2)$.

D. $y = (x-1)|x^2 - 2x - 2|$.

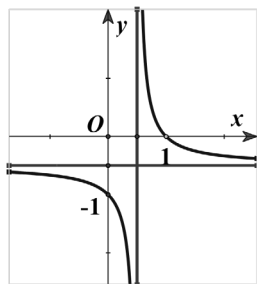
Hướng dẫn

Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy

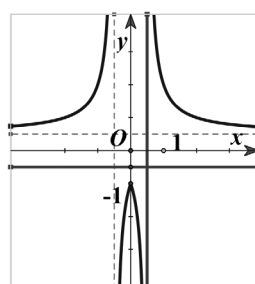
Toàn bộ đồ thị phía “phải” Oy sau đó lấy đối xứng sang trái.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án B.**

Câu 44: Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x-1}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = \frac{-x+1}{|2x-1|}$

B. $y = \frac{|x|+1}{2|x|-1}$

C. $y = \frac{-x+1}{2x-1}$

D. $y = \frac{-x+1}{|2x-1|}$

Hướng dẫn

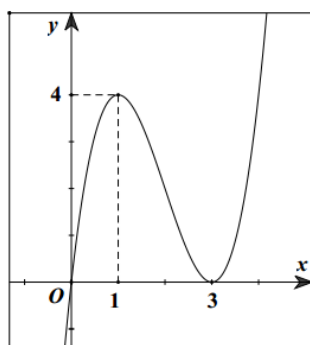
Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy

Toàn bộ đồ thị phía bên phải Oy được giữ nguyên

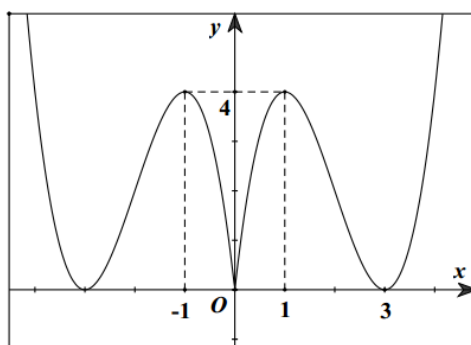
Sau đó, được lấy đối xứng sang trái.

Chọn đáp án B.

Câu 45: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có đồ thị như Hình 1. Khi đó đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x$.

B. $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$.

C. $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x|$.

D. $y = |x|^3 + 6|x|^2 + 9|x|$.

Lời giải

Chọn C

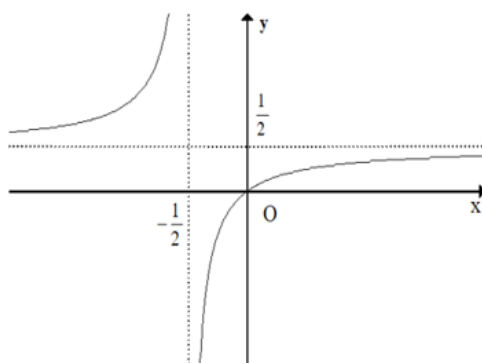
+/- Loại đáp án A vì: $y = -x^3 + 6x^2 - 9x = -(x^3 - 6x^2 + 9x)$

+/- Loại đáp án B, vì đồ thị của hàm số $y = |x^3 - 6x^2 + 9x|$ giữ lại phần đồ thị phía trên trục hoành và chỉ lấy đối xứng phần dưới trục hoành của đồ thị Hình 1.

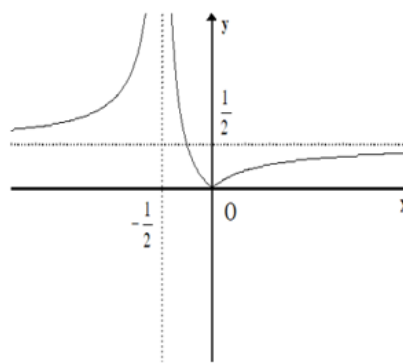
+/- Loại đáp án D vì hệ số của x^2 khác -6.

+/- Đồ thị ở đáp án C là đồ thị của hàm số dạng $y = f(|x|)$. Chọn đáp án C

Câu 46: (Cụm liên trường Hải Phòng -2019) Cho hàm số $y = \frac{x}{2x+1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong các đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = \left| \frac{x}{2x+1} \right|$.

B. $y = \frac{|x|}{2|x|+1}$

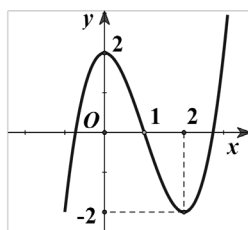
C. $y = \frac{x}{2|x|+1}$

D. $y = \left| \frac{|x|}{2|x|+1} \right|$

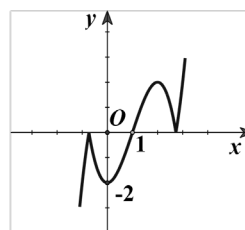
Lời giải

Chọn A

Câu 47: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = |x^3 - 3x^2 + 2|$.

B. $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$

C. $y = |x-1|(x^2 - 2x - 2)$.

D. $y = (x-1)|x^2 - 2x - 2|$.

Hướng dẫn

Ta có: $y = x^3 - 3x^2 + 2 = (x-1)(x^2 - 2x - 2)$

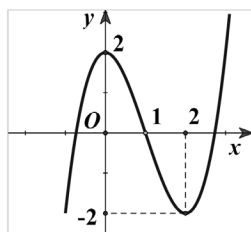
Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy

Toàn bộ đồ thị ứng với $\begin{cases} x \geq 1 + \sqrt{3} \\ x \leq 1 - \sqrt{3} \end{cases}$ được giữ nguyên.

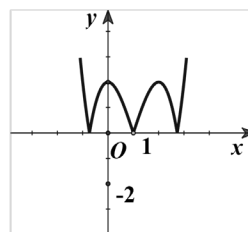
Phần đồ thị ứng với $1 - \sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$ lấy đối xứng qua trục hoành.

$\Rightarrow$ **Chọn đáp án D.**

Câu 48: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = |x^3 - 3x^2 + 2|$.

B. $y = |x|^3 - 3x^2 + 2$

C. $y = |x-1|(x^2 - 2x - 2)$.

D. $y = (x-1)|x^2 - 2x - 2|$.

Hướng dẫn

Ta có: $y = x^3 - 3x^2 + 2 = (x-1)(x^2 - 2x - 2)$

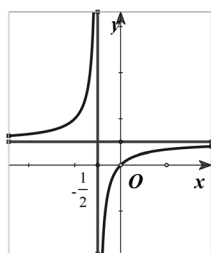
Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy

Toàn bộ đồ thị nằm phía trên Ox được giữ nguyên.

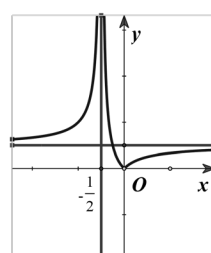
Phần đồ thị phía dưới Ox được lấy đối xứng qua Ox .

$\Rightarrow$ Chọn đáp án **A.**

Câu 49: Cho hàm số $y = \frac{x}{2x+1}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = \frac{x}{2|x|+1}$

B. $y = \frac{|x|}{2|x|+1}$

C. $y = \left| \frac{x}{2x+1} \right|$

D. $y = \left| \frac{|x|}{2|x|+1} \right|$

Hướng dẫn

Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy

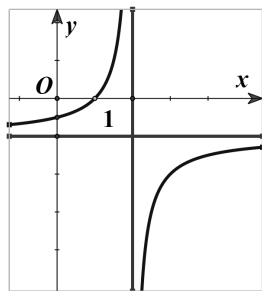
Toàn bộ đồ thị phía trên Ox giữ nguyên

Toàn bộ phần phía dưới Ox được lấy đối xứng lên trên

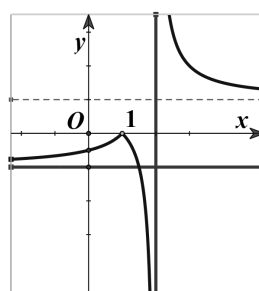
$\Rightarrow$ dạng $|f(x)|$.

Chọn đáp án **C.**

Câu 50: Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{x-2}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = \frac{-x+1}{|x-2|}$

B. $y = \frac{|x|+1}{|x|-2}$

C. $y = \frac{-x+1}{x-2}$

D. $y = \frac{-x+1}{|x-2|}$

Hướng dẫn

Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy

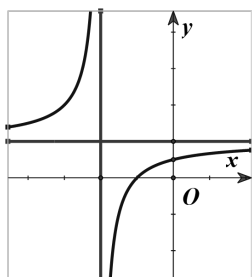
Toàn bộ đồ thị phía bên trái đường thẳng $x=1$ được giữ nguyên

Toàn bộ đồ thị phía bên phải đường thẳng $x=1$ lấy đối xứng qua Ox

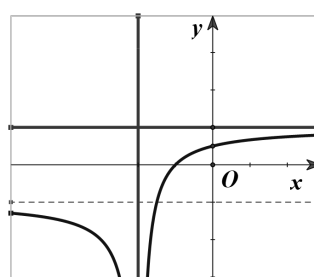
Chọn đáp án C.

Chú ý: $y = \frac{-x+1}{x-2} = \begin{cases} \frac{-x+1}{x-2}, & x \leq 1 \\ -\frac{-x+1}{x-2}, & x > 1 \end{cases}$

Câu 51: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = \frac{|x+1|}{|x+2|}$

B. $y = \frac{|x|+1}{|x|+2}$

C. $y = \frac{|x+1|}{x+2}$

D. $y = \frac{x+1}{|x+2|}$

Hướng dẫn

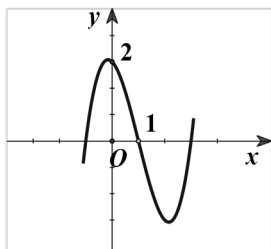
Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy

Toàn bộ đồ thị phía bên phải đường thẳng $x=-2$ được giữ nguyên

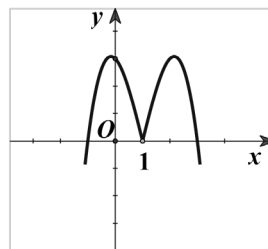
Toàn bộ đồ thị phía bên trái đường thẳng $x=-2$ lấy đối xứng qua Ox

Chọn đáp án D.

Câu 52: Cho hàm số $y = (x-1)(x^2 - 2x - 3)$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = |(x-1)(x^2 - 2x - 3)|$.

B. $y = |x-1|(x^2 - 2x - 3)$.

C. $y = -|x-1|(x^2 - 2x - 3)$

D. $y = (x-1)|x^2 - 2x - 3|$

Hướng dẫn

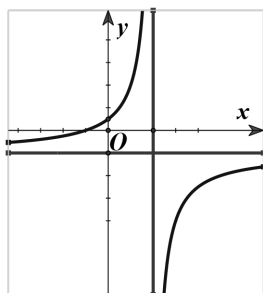
Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy

Toàn bộ đồ thị nằm bên trái (ứng với $x \leq 1$) đường thẳng $x=1$ được giữ nguyên

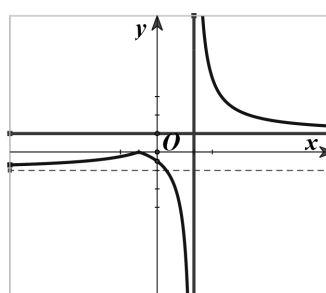
Toàn bộ đồ thị nằm bên phải (ứng với $x > 1$) đường thẳng $x=1$ được lấy đối xứng qua Ox .

$\Rightarrow$ Chọn đáp án **C**.

Câu 53: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{-x+2}$ có đồ thị như hình 1. Đồ thị hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y = \left| \frac{x+1}{x+2} \right|$.

B. $y = \frac{|x+1|}{x-2}$.

C. $y = \frac{|x+1|}{-x+2}$.

D. $y = \frac{x+1}{|x+2|}$.

Hướng dẫn

Từ đồ thị ban đầu (hình 1) sang đồ thị thứ 2 (hình 2) ta thấy

Toàn bộ đồ thị phía bên trái đường thẳng $x=-1$ (ứng với $x \leq -1$) được giữ nguyên

Toàn bộ đồ thị phía bên phải đường thẳng $x=-1$ (ứng với $x > -1$) được lấy đối xứng qua trục Ox .

Chọn đáp án **B**.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

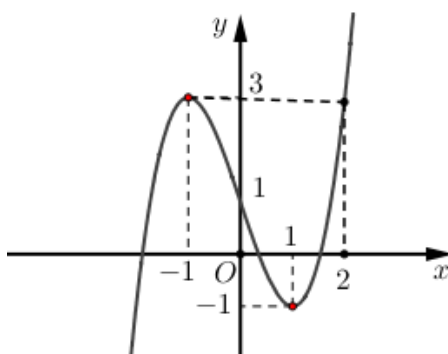
BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

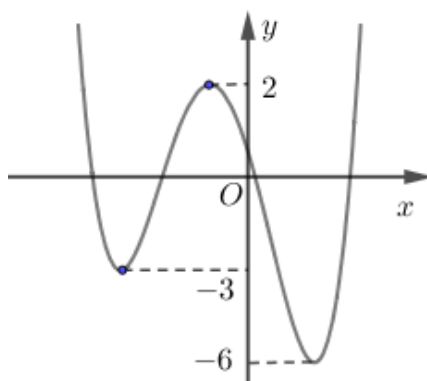
Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau?

- a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2;3)$
- b) Hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$
- c) Đồ thị trên là của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.
- d) Hàm số $y = f(x^2 - 2x + 1) + 2024$ có 2 điểm cực đại.

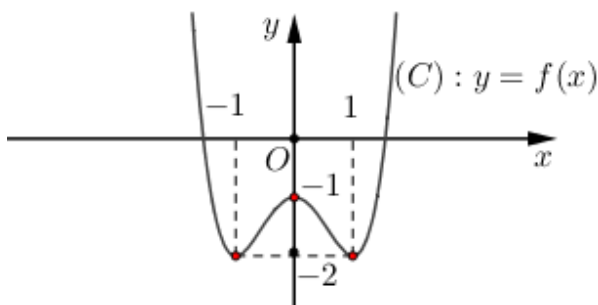
Câu 2: Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ.



Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau?

- a) Hàm số có 3 điểm cực trị.
- b) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -6.
- c) Xét hàm số $p(x)$ thỏa $p'(x) = f(x) + 3$. Khi đó hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.
- d) Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-12; 12]$ để hàm số $g(x) = |2f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị là 13.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau?

- a) Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.
- b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- c) Trong các số a, b, c có 2 số dương.
- d) Phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ có 6 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$.

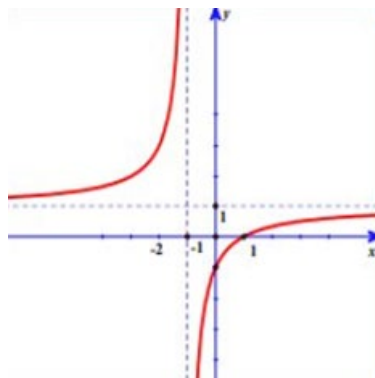
Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

- a) Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 2$.
- b) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định
- c) Tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) với trục tung có hệ số góc $k = -1$.
- d) có hai giá trị của m để đường thẳng $\Delta: y = -2x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$ (đvdt).

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) Hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$
- b) Khi $m = 1$ hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$
- c) Khi $m = 2$ hàm số đạt GTLN trên đoạn $[-1; 0]$ bằng $\frac{1}{2}$
- d) Hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 2]$ tại một điểm $x_0 \in (0; 2)$ khi $0 < m < 1$

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{ax-1}{x+b}$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Chọn đáp án đúng?



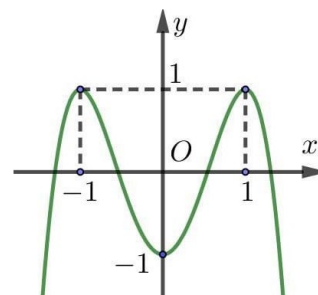
Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $(1;0)$.
- b. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $y = 1$.
- c. $a + b = 1$.
- d. (C) cắt đường thẳng $y = x + m$ tại hai điểm phân biệt khi $\begin{cases} m < p \\ m > q \end{cases}$. Khi đó $p + q = 4$

Câu 7: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Đồ thị hàm số chỉ có một điểm cực đại.
- b) Hàm số đã cho $y = f(x)$ là một hàm trùng phương.
- c) Tổng các hệ số của hàm số bằng 1.
- d) Phương trình $f(f(x)) = 0$ có 15 nghiệm thực phân biệt.



Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{x}{x-2}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.
- b) Bảng biến thiên của hàm số là

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	1		1

$\swarrow$ $-\infty$ $\searrow$ 1

- c) Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là hai điểm phân biệt.
- d) Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng 16.

Câu 9: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- b) Hàm số có một điểm cực trị.
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$.
- d) Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$ tại 2 điểm phân biệt khi $m \geq 0$.

Câu 10: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- b) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
- c) Đồ thị cắt trục tung tại điểm $A(0; 2)$ và cắt trục hoành tại điểm $B(-1; 0)$.
- d) Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = mx + 2$ tại ba điểm phân biệt khi $m > \frac{-9}{4}$.

Câu 11: Cho hàm số $y = x^3 + mx + 1$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

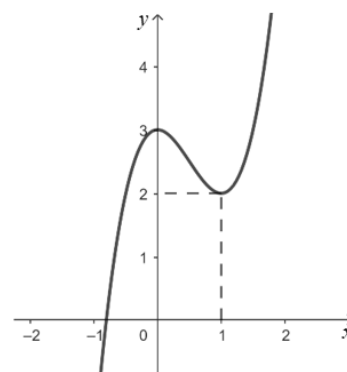
- a) Khi $m = 1$ hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- b) Khi $m = -3$ hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.
- c) Đồ thị cắt trục tung tại điểm $A(0; 2)$.
- d) Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ khi $m = -12$.

Câu 12: Một cốc chứa 50 gam dung dịch NaOH (natri hydroxide) với nồng độ 8%. Một bình chứa dung dịch NaOH khác với nồng độ 20% được trộn vào cốc. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Sau khi trộn khối lượng NaOH có trong dung dịch là $4 + 0,2x$ (gam).
- b) Nồng độ NaOH sau khi trộn $x(g)$ NaOH từ bình chứa là: $C(x) = \frac{4 + 0,2x}{50}$ ($x > 0$)
- c) Hàm số $C(x)$ không có cực trị.
- d) Nồng độ NaOH giảm theo x nhưng luôn lớn hơn 200 mg/ml

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.

- a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
- b) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- c) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- d) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.



Câu 14: Xét đường thẳng $d: y = 4 - 2x$ và đường cong $(C): y = \frac{2x+4}{x+1}$.

- a) Đường thẳng d là tiếp tuyến của đường cong (C) .
- b) (C) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ dương.
- c) (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.
- d) Đường thẳng d cắt đường cong (C) tại hai điểm phân biệt.

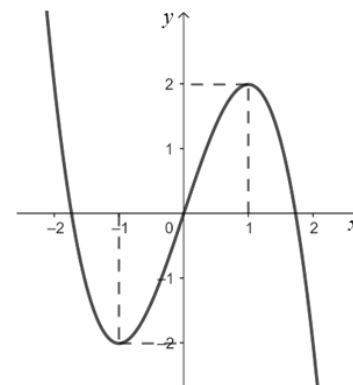
Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	0	
$f(x)$	$-\infty$	-2	3	-2	$-\infty$

- a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
- c) Phương trình $f(x) + 3 = 0$ vô nghiệm.
- d) Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.

- a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.
- b) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.
- c) Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{1}{2024}$ là 3.
- d) Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = 2024$ tại 3 điểm phân biệt.



Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2024}{x-1}$ có đồ thị (C) .

- a) (C) có đường tiệm cận đứng là $x = 1$.
- b) (C) có đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$.
- c) (C) có 2 trục đối xứng.
- d) Trên (C) có đúng 4 điểm có tọa độ nguyên.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

c) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

d) Hàm số đạt giá trị lớn nhất là $y = 2$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$.

a) Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 4.

b) Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là 2.

c) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

d) Hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ đồng biến trên khoảng $(\sqrt{2}; +\infty)$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3m^2x + 2024$ có đồ thị (C) .

a) (C) luôn có hai điểm cực trị.

b) Khi m thay đổi, (C) luôn có tâm đối xứng cố định.

c) Khi m thay đổi, (C) luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm.

d) Khi (C) có 2 cực trị, đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C) có dạng $y = ax + b$. Đặt $S = a + b$ thì $S \leq 2024$.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x$ có đồ thị (C) .

a) Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là 6.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = 3x^2 + 3$.

c) Hàm số đã cho có đúng 2 cực trị.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$.

Câu 22: Cho hàm số $y = \frac{1-2x}{x+1}$ có đồ thị (C) .

a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -1$.

b) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 1$.

c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $(-2; -1)$.

d) $\forall M \in (C)$ tích khoảng cách từ M đến các đường tiệm cận luôn bằng 3.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)^{2025}(x-3)^{2024}, \forall x \in \mathbb{R}$.

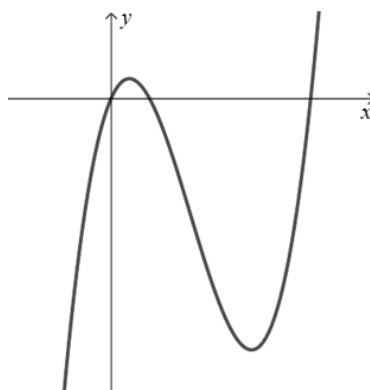
a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.

c) Biết $f(0) = 0$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

d) Hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 24: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên.



a) Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu.

b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số âm.

c) Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

d) Trong các hệ số a, b, c, d có 2 hệ số dương.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

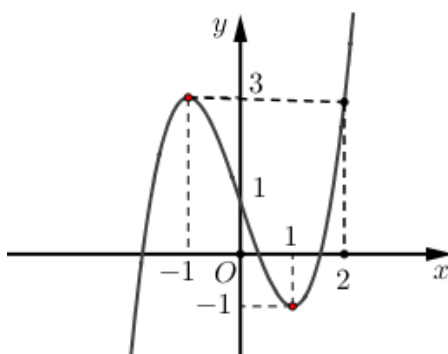
BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau?

- a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2;3)$
- b) Hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$
- c) Đồ thị trên là của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.
- d) Hàm số $y = f(x^2 - 2x + 1) + 2024$ có 2 điểm cực đại.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Dựa vào hình vẽ, đồ thị hàm số đi qua điểm $(2;3)$.

b) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$

c). Hàm số có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Đồ thị hàm số qua các điểm $(-1;3); (0;1); (1;-1)$ và $(2;3)$ nên ta có hệ:

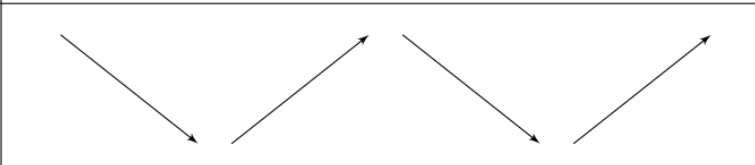
$$\begin{cases} -a+b-c+d=3 \\ d=1 \\ a+b+c+d=-1 \\ 8a+4b+2c+d=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-3 \\ d=1 \end{cases} \Rightarrow y=x^3-3x+1.$$

d). $y = f(x^2 - 2x + 1) + 2024$

Ta có $y' = (2x - 2)f'(x^2 - 2x + 1)$.

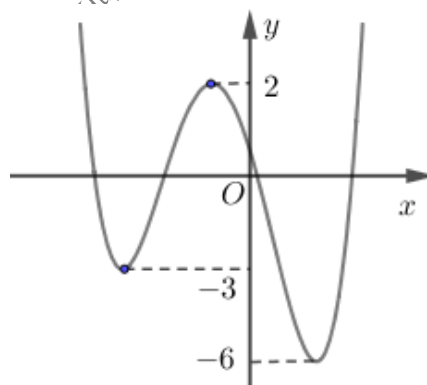
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = -1 \\ x^2 - 2x + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Do đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$			
y'		-	0	+	0	-	0	+
y								

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $y = f(x^2 - 2x + 1) + 2024$ có 1 điểm cực đại.

Câu 2: Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ.



Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau?

- Hàm số có 3 điểm cực trị.
- Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -6.
- Xét hàm số $p(x)$ thỏa $p'(x) = f(x) + 3$. Khi đó hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.
- Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-12; 12]$ để hàm số $g(x) = |2f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị là 13.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

- Hàm số có 3 điểm cực trị.

b) Hàm số không có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất bằng -6 .

c) Xét $p'(x) = f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -3$. Phương trình có 1 nghiệm kép và 2 nghiệm đơn nên hàm số có 2 điểm cực trị.

d) Đặt $h(x) = 2f(x-1) + m \Rightarrow g(x) = |h(x)|$.

Số điểm cực trị của $g(x)$ = số điểm cực trị của $y = h(x)$ + số giao điểm của $y = h(x)$ với trục Ox khác với điểm cực trị của $y = h(x)$.

Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị. Suy ra hàm số $y = h(x)$ cũng có 3 điểm cực trị.

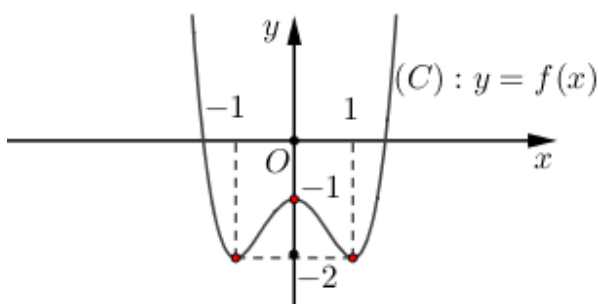
Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x-1) = -\frac{m}{2}$ có 2 nghiệm phân biệt khác điểm cực trị của $h(x)$.

Đồ thị hàm số $y = f(x-1)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang bên phải 1 đơn vị.

Dựa vào đồ thị, ta được: $-\frac{m}{2} \geq 2$ hoặc $-6 < -\frac{m}{2} \leq -3$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ 6 \leq m < 12 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}; m \in [-12; 12]} \text{có 15 giá trị } m \text{ nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau?

a) Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

c) Trong các số a, b, c có 2 số dương.

d) Phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ có 6 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị.

b) Trên khoảng $(-1; 0)$ hàm số đồng biến và trên khoảng $(0; 1)$ hàm số nghịch biến.

c) Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$

+ Đồ thị (C) cắt trục tung tại $y_0 = c < 0$.

+ Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Rightarrow a.b < 0$, nên $b < 0$

d) Đặt $t = \sin x$. Do $x \in [-\pi; 2\pi]$ nên $t \in [-1; 1]$.

Khi đó ta có phương trình $2f(t) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -\frac{3}{2}$.

Dựa vào BBT ta thấy phương trình $f(t) = -\frac{3}{2}$ có 2 nghiệm $t = a \in (-1; 0)$ và $t = b \in (0; 1)$

Trường hợp 1: $t = a \in (-1; 0)$

với giá trị $t \in (-1; 0)$ thì phương trình có 4 nghiệm $-\pi < x_1 < x_2 < 0 < \pi < x_3 < x_4 < 2\pi$.

Trường hợp 2: $t = b \in (0; 1)$

với mỗi giá trị $t \in (0; 1)$ thì phương trình có 2 nghiệm $0 < x_5 < x_6 < \pi$.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

a) Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 2$.

b) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định

c) Tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) với trục tung có hệ số góc $k = -1$.

d) có hai giá trị của m để đường thẳng $\Delta: y = -2x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\sqrt{3}$ (đvdt).

Lời giải

a) đúng	b) Sai	c) Sai	d) đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) (C) có hai đường tiệm cận là $x = -1; y = 2$

b) Ta có $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$, nên hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

c) giao của (C) với trục tung là $A(0; 1)$, suy ra tiếp tuyến với (C) tại A có hệ số góc $y'(0) = 1$.

d) Ta có $-2x + m = \frac{2x+1}{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + (m-4)x + m-1 = 0(1) \\ x \neq -1 \end{cases}$.

Phương trình (1) có $\Delta = m^2 + 8 > 0$ với mọi m .

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} d(O, \Delta) \cdot AB \Leftrightarrow |m| |x_1 - x_2| = 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow m^2 \left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \right] = 12 \Leftrightarrow m^2 (m^2 + 8) = 48.$$

$$\Rightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) Hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

b) Khi $m = 1$ hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$

c) Khi $m = 2$ hàm số đạt GTLN trên đoạn $[-1; 0]$ bằng $\frac{1}{2}$

d) Hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 2]$ tại một điểm $x_0 \in (0; 2)$ khi

$$0 < m < 1$$

Lời giải

a) Sai	b) đúng	c) đúng	d) đúng
---------------	----------------	----------------	----------------

a) Sai

Vì tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

b) Đúng

khi $m = 1$ hàm số trở thành $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

ta có: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = -\infty$

Vậy Khi $m = 1$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = -1$

c) Đúng

Ta có: khi $m = 2$ thì hàm số trở thành $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 2} = x + \frac{1}{x + 2}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$y' = \left(x + \frac{1}{x + 2}\right)' = 1 - \frac{1}{(x + 2)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ vì $x \in [-1; 0]$

$y(0) = \frac{1}{2}, y(-1) = 0$

Do đó: hàm số đạt GTLN trên $[-1; 0]$ bằng $\frac{1}{2}$

d) Đúng

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Hàm số liên tục trên $[0; 2] \Leftrightarrow \begin{cases} -m < 0 \\ -m > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \end{cases}$

Ta có $y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2} = \frac{(x+m)^2 - 1}{(x+m)^2}$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -m-1 \\ x_2 = -m+1 \end{cases}$.

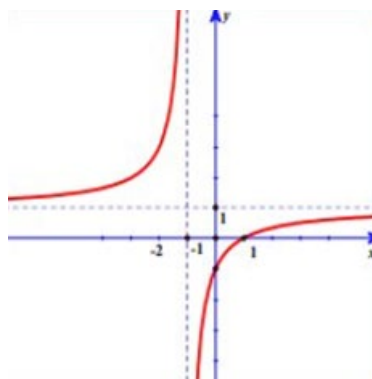
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1	$-m$	0	x_2	2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y		$\mathcal{CD}$			$+\infty$		CT	$+\infty$
	$-\infty$							$-\infty$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 \in (0; 2)$ nên $0 < -m+1 < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

So với điều kiện hàm số liên tục trên đoạn $[0; 2]$. Ta có $0 < m < 1$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{ax-1}{x+b}$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên. Chọn đáp án đúng?



Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $(1; 0)$.
- b. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $y = 1$.
- c. $a + b = 1$.
- d. (C) cắt đường thẳng $y = x + m$ tại hai điểm phân biệt khi $\begin{cases} m < p \\ m > q \end{cases}$. Khi đó $p + q = 4$

Lời giải

a) đúng	b) Sai	c) sai	d) đúng
---------	--------	--------	---------

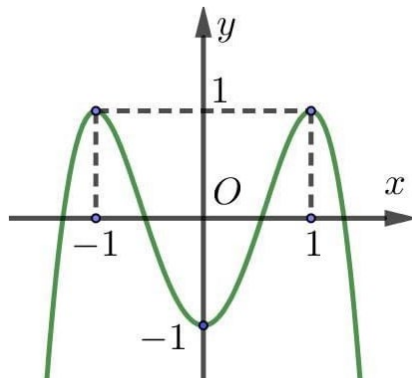
- a. Từ đồ thị ta có đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm $(1; 0)$.
- b. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $y = 1$.
- c. Đồ thị hàm số $y = \frac{ax-1}{x+b}$ có đường tiệm cận đứng là $x = -b$ và đường tiệm cận ngang là $y = a$.

Theo đồ thị, ta có $\begin{cases} -b = -1 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$.

d. Xét PT hoành độ giao điểm $\frac{x-1}{x+1} = x+m \Leftrightarrow x^2 + mx + m+1 = 0 (*)$, ($x \neq -1$).

PT (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 - 2\sqrt{2} \\ m > 2 + 2\sqrt{2} \end{cases} (**)$

Câu 7: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Đồ thị hàm số chỉ có một điểm cực đại.
- b) Hàm số đã cho $y = f(x)$ là một hàm trùng phương.
- c) Tổng các hệ số của hàm số bằng 1.
- d) Phương trình $f(f(x)) = 0$ có 15 nghiệm thực phân biệt.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

a) Đồ thị hàm số có hai điểm cực đại là $(-1; 1), (1; 1)$.

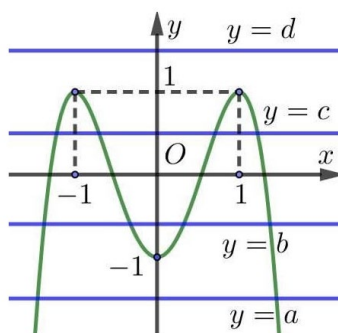
b) Hình đã cho là một đồ thị hàm bậc bốn đối xứng qua trục Oy nên hàm số $y = f(x)$ là một hàm trùng phương có dạng $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0; a, b, c \in \mathbb{R}$)

c) Ta có: $f(1) = a \cdot 1^4 + b \cdot 1^2 + c = a + b + c = 1$

Do đó tổng các hằng số của hàm số bằng 1.

d) Phương trình $f(f(x)) = 0$ có 10 nghiệm thực phân biệt.

Dựa vào đồ thị ta có:



$$f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, & a < -1 \\ f(x) = b, & -1 < b < 0 \\ f(x) = c, & 0 < c < 1 \\ f(x) = d, & d > 1 \end{cases}$$

Phương trình $f(x) = a$ có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x) = b$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x) = c$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x) = d$ vô nghiệm (vì đường thẳng $y = d$ không có điểm chung với đồ thị hàm số $f(x)$).

Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm.

a) Sai: Đồ thị hàm số chỉ có một điểm cực đại.

b) Đúng: Hàm số đã cho $y = f(x)$ là một hàm trùng phương.

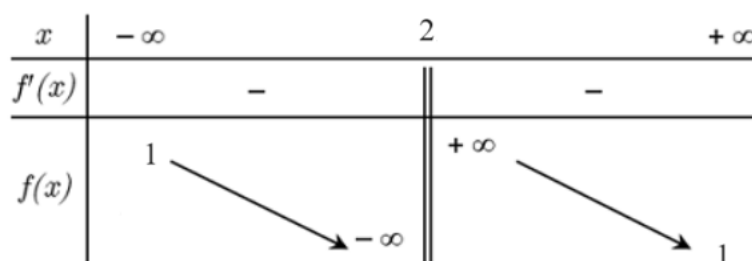
c) Đúng: Tổng các hằng số của hàm số bằng 1.

d) Sai: Phương trình $f(f(x)) = 0$ có 15 nghiệm thực phân biệt.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{x}{x-2}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b) Bảng biến thiên của hàm số là



c) Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là hai điểm phân biệt.

d) Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng 16.

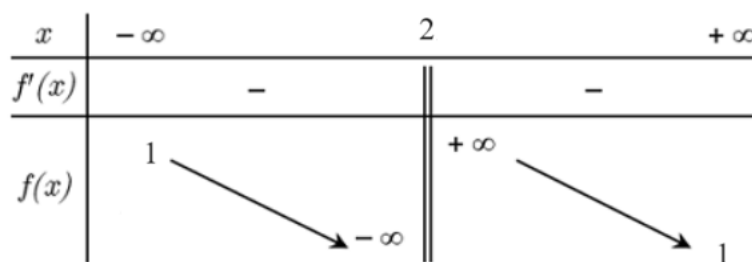
Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
--------	---------	--------	--------

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Hàm số xác định khi $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

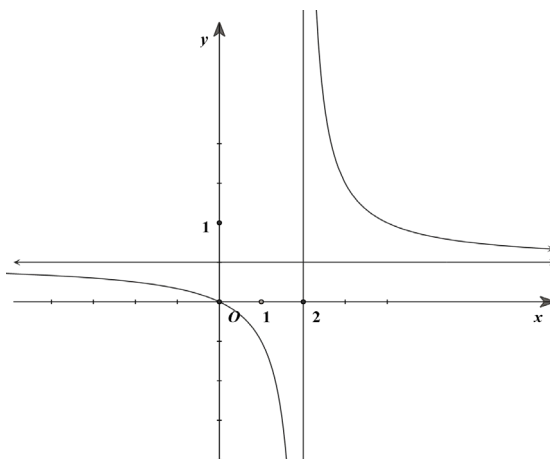
b) Bảng biến thiên của hàm số là



c) Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là gốc tọa độ.

Ta có: $f(0) = \frac{0}{0-2} = 0 \Rightarrow$ Đồ thị cắt trục tung tại một điểm duy nhất là gốc tọa độ.

d) Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng 4.



Hàm số $y = \frac{x}{x-2}$ có đồ thị (C) như hình vẽ.

Gọi $A\left(a; \frac{a}{a-2}\right)$ và $B\left(b; \frac{b}{b-2}\right)$ là hai điểm thuộc hai nhánh của (C) ($a < 2 < b$).

$$\Rightarrow \overline{AB} = \left(b-a; \frac{b}{b-2} - \frac{a}{a-2}\right) = \left(b-a; \frac{b-a}{(b-2)(2-a)}\right)$$

Áp dụng BĐT Côsi cho hai số dương $(b-2)$ và $(2-a)$ ta có: $(b-2)(2-a) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.

$$\Rightarrow AB^2 = (b-a)^2 + \frac{(b-a)^2}{[(b-2)(2-a)]^2} \geq (b-a)^2 + \frac{64}{(b-a)^2} \geq 16$$

$$\Rightarrow AB \geq 4.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} b-2 = 2-a \\ (b-a)^2 = \frac{64}{(b-a)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - \sqrt{2} \\ b = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy $AB_{\min} = 4$.

a) Sai: Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b) Đúng: Bảng biến thiên của hàm số là

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$ $	$-$
$f(x)$	1	$+\infty$	1

c) Sai: Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là hai điểm phân biệt.

d) Sai: Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng 16.

Câu 9: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

b) Hàm số có một điểm cực trị.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$.

d) Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$ tại 2 điểm phân biệt khi $m \geq 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

a) Đúng: $y' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)^2 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

b) Sai: Hàm số không có cực trị

c) Sai: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-1 + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -\infty$.

d) Sai: Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$ tại 2 điểm phân biệt khi $m > 0$.

Câu 10: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

b) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

c) Đồ thị cắt trục tung tại điểm $A(0; 2)$ và cắt trục hoành tại điểm $B(-1; 0)$.

d) Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = mx + 2$ tại ba điểm phân biệt khi $m > \frac{-9}{4}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
--------	---------	--------	--------

a) Sai: Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

$$y' = 3x^2 - 6x. \text{ Xét } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến

Trên khoảng $(0; 2)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến

b) Đúng: Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			2		-2	
	$-\infty$					$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

c) Sai:

$$\text{Ta có } x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{đồ thị hàm số qua điểm } B(1; 0).$$

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 2$: Đồ thị hàm số cắt Oy tại $A(0; 2)$.

d) Sai: Ta có: $x^3 - 3x^2 + 2 = mx + 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - mx = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3x - m) = 0$

$$\text{Đồ thị hàm số cắt đường thẳng } y = mx + 2 \text{ tại ba điểm phân biệt khi } \begin{cases} 9 + 4m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Câu 11: Cho hàm số $y = x^3 + mx + 1$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Khi $m = 1$ hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

b) Khi $m = -3$ hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

c) Đồ thị cắt trục tung tại điểm $A(0; 2)$.

d) Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ khi $m = -12$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Đúng: Khi $m = 1$ thì $y' = 3x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

b) Sai: Khi $m = -3$ thì $y' = 3x^2 - 3$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

BBT:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			3		-1		$+\infty$
	$-\infty$						

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

c) Sai: Đồ thị luôn cắt trục tung tại điểm $A(0; 1)$.

d) Đúng: Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ khi $\begin{cases} y'(-2) = 0 \\ y''(-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 + m = 0 \\ -12 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -12$.

Câu 12: Một cốc chứa 50 gam dung dịch NaOH (natri hydroxide) với nồng độ 8%. Một bình chứa dung dịch NaOH khác với nồng độ 20% được trộn vào cốc. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Sau khi trộn khối lượng NaOH có trong dung dịch là $4 + 0,2x$ (gam).

b) Nồng độ NaOH sau khi trộn x (g) NaOH từ bình chứa là: $C(x) = \frac{4 + 0,2x}{50}$ ($x > 0$)

c) Hàm số $C(x)$ không có cực trị.

d) Nồng độ NaOH giảm theo x nhưng luôn lớn hơn 200 mg/ml

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Sau khi trộn khối lượng NaOH có trong dung dịch là $4 + 0,2x$ (gam).

Trong 50 gam dung dịch NaOH 8% có $m_{NaOH 8\%} = 50.8\% = 4$ (gam).

Trong x gam dung dịch NaOH 20% có $m_{NaOH 20\%} = x.20\% = 0,2x$ (gam).

Do đó sau khi trộn khối lượng NaOH có trong dung dịch là $m_{NaOH} = 4 + 0,2x$ (gam).

b) Nồng độ NaOH sau khi trộn x (g) NaOH từ bình chứa là: $C(x) = \frac{4 + 0,2x}{50 + x}$ ($x > 0$)

Khối lượng dung dịch sau khi trộn là: $m_{dd} = 50 + x$ (gam)

Nồng độ NaOH sau khi trộn x (g) NaOH từ bình chứa là: $C(x) = \frac{m_{NaOH}}{m_{dd}} = \frac{4 + 0,2x}{50 + x}$ ($x > 0$)

c) Hàm số $C(x)$ không có cực trị.

d) Nồng độ NaOH tăng theo x nhưng luôn nhỏ hơn 200 mg/ml.

$$\text{Vì } C'(x) = \frac{6}{(50 + x)^2} > 0 \forall x > 0$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + 0,2x}{50 + x} = 0,2$$

Nên nồng độ NaOH tăng theo x nhưng luôn nhỏ hơn 0,2 g/ml hay 200 mg/ml.

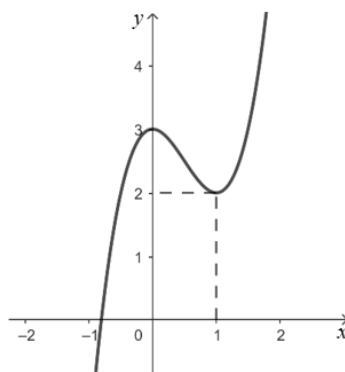
a) Đúng: Sau khi trộn khối lượng NaOH có trong dung dịch là $4 + 0,2x$ (gam).

a) Sai: Nồng độ NaOH sau khi trộn x (g) NaOH từ bình chứa là: $C(x) = \frac{4 + 0,2x}{50}$ ($x > 0$)

c) Đúng: Hàm số $C(x)$ không có cực trị.

d) Sai: Nồng độ NaOH tăng theo x nhưng luôn lớn hơn 200 mg/ml

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

b) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

c) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

d) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. ✓

b) Hàm số $f(x)$ không đạt cực tiểu tại $x = 0$. ✗

c) Hàm số $f(x)$ không đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$. ✗

d) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$. ✓

Câu 14: Xét đường thẳng $d: y = 4 - 2x$ và đường cong $(C): y = \frac{2x+4}{x+1}$.

a) Đường thẳng d là tiếp tuyến của đường cong (C) .

b) (C) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ dương.

c) (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.

d) Đường thẳng d cắt đường cong (C) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

Điều kiện: $x \neq -1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và đường cong:

$$\frac{2x+4}{x+1} = 4-2x \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy đường thẳng có 1 điểm chung với (C) .

Với $x = 0 \Rightarrow y = 4$ suy ra (C) cắt trục tung tại điểm $(0; 4)$.

Với $y = 0 \Rightarrow x = -2$ suy ra (C) cắt trục hoành tại điểm $(-2; 0)$.

a) Đường thẳng d là tiếp tuyến của đường cong (C) . ✓

b) (C) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ dương. ✗

c) (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ dương. ✓

d) Đường thẳng d cắt đường cong (C) tại hai điểm phân biệt. ✗

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	0	
$f(x)$	$-\infty$	-2	3	-2	$-\infty$

a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

c) Phương trình $f(x) + 3 = 0$ vô nghiệm.

d) Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

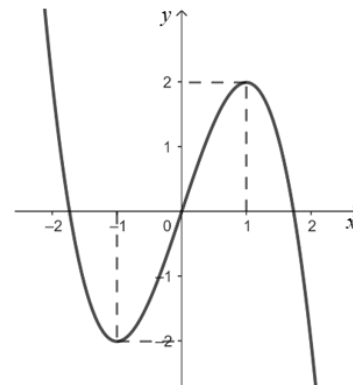
a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$, suy ra nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$. ✓

b) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$, suy ra không đồng biến khoảng $(-2; +\infty)$. ✗

c) Do $f(x) \geq -2, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình $f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -3$ vô nghiệm. ✓

d) Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị. ✓

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



- a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.
- b) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.
- c) Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{1}{2024}$ là 3.
- d) Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = 2024$ tại 3 điểm phân biệt.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

- a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$. ✗
- b) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$. ✓
- c) Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra phương trình $f(x) = \frac{1}{2024}$ có đúng 3 nghiệm phân biệt. ✓
- d) Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = 2024$ tại 1 điểm. ✗

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2024}{x - 1}$ có đồ thị (C) .

- a) (C) có đường tiệm cận đứng là $x = 1$.
- b) (C) có đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$.
- c) (C) có 2 trục đối xứng.
- d) Trên (C) có đúng 4 điểm có tọa độ nguyên.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2024}{x - 1} = x - 1 + \frac{2023}{x - 1}; D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

- a) (C) có đường tiệm cận đứng là $x = 1$. ✓
- b) (C) có đường tiệm cận xiên là $y = x - 1$. ✗
- c) (C) có 2 trục đối xứng là 2 đường phân giác của các góc tạo bởi 2 đường tiệm cận. ✓
- d) $M(x; y) \in (C)$ có tọa độ nguyên khi $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ 2023 : (x - 1) \end{cases}$ 2023 có 4 ước số nên có 4 điểm. ✓

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	$-\infty$	4	$-\infty$	

a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

c) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

d) Hàm số đạt giá trị lớn nhất là $y = 2$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
--------	---------	--------	--------

a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$. ✗

b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(0; 1)$. ✓

c) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -1$. ✗

d) Hàm số không có giá trị lớn nhất. ✗

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$.

a) Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 4.

b) Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là 2.

c) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

d) Hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ đồng biến trên khoảng $(\sqrt{2}; +\infty)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$$

Bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$	-4	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$g(x) = f(x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 - 1) = 2x(x^2 - 1) \left[(x^2 - 1) - 1 \right] \left[(x^2 - 1) + 4 \right]^3$$

$$= 2x(x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 + 3)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu suy ra

a) Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 4. ✗

b) Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là 2. ✓

c) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$. ✓

d) Hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ đồng biến trên khoảng $(\sqrt{2}; +\infty)$. ✓

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3m^2x + 2024$ có đồ thị (C) .

a) (C) luôn có hai điểm cực trị.

b) Khi m thay đổi, (C) luôn có tâm đối xứng cố định.

c) Khi m thay đổi, (C) luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm.

d) Khi (C) có 2 cực trị, đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C) có dạng $y = ax + b$. Đặt $S = a + b$ thì $S \leq 2024$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

$$(C): y = f(x) = x^3 - 3m^2x + 2024; D = \mathbb{R}$$

$$y' = 3x^2 - 3m^2$$

$$y'' = 6x; y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2024$$

$$y = \frac{1}{3}x \cdot y' + (-2m^2 + 2024)$$

Tại các điểm cực trị, $y' = 0$ nên đường thẳng đi qua các điểm cực trị của hàm số có phương trình

$$y = -2m^2x + 2024$$

$$\Rightarrow a = -2m^2; b = 2024$$

$$\Rightarrow S = a + b = -2m^2 + 2024 < 2024$$

Lưu ý khi $m = 0$ thì hàm số không có cực trị.

a) (C) luôn có hai điểm cực trị. ✗

b) Khi m thay đổi, (C) luôn có tâm đối xứng cố định. ✓

c) Khi m thay đổi, (C) luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm. ✓ (hàm số bậc ba luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm)

d) Khi (C) có 2 cực trị, đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C) có dạng $y = ax + b$. Đặt $S = a + b$ thì $S \leq 2024$. ✗ (dấu “=” không xảy ra)

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x$ có đồ thị (C) .

a) Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là 6.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = 3x^2 + 3$.

c) Hàm số đã cho có đúng 2 cực trị.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

$y' = 3x^2 + 3$, suy ra hàm số không có cực trị vì $y' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4

$$\Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow x_0^3 + 3x_0 = 4 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow f'(x_0) = 6$$

a) Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là 6. ✓

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = 3x^2 + 3$. ✓

c) Hàm số đã cho có đúng 2 cực trị. ✗

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$. ✗

Câu 22: Cho hàm số $y = \frac{1-2x}{x+1}$ có đồ thị (C) .

a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -1$.

b) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 1$.

c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $(-2; -1)$.

d) $\forall M \in (C)$ tích khoảng cách từ M đến các đường tiệm cận luôn bằng 3.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

$$y = \frac{1-2x}{x+1} = -2 + \frac{3}{x+1}$$

Tiệm cận đứng: $x = -1$.

Tiệm cận ngang: $y = -2$.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $(-1; -2)$

$$M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow M\left(x_0; -2 + \frac{3}{x_0+1}\right)$$

Khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng: $d_1 = |x_0 + 1|$.

$$\text{Khoảng cách từ } M \text{ đến tiệm cận ngang: } d_2 = |y_0 + 2| = \left| -2 + \frac{3}{x_0+1} + 2 \right| = \frac{3}{|x_0+1|}.$$

$$d_1 \cdot d_2 = 3.$$

a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -1$. ✓

b) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 1$. ✗

c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $(-2; -1)$. ✗

d) $\forall M \in (C)$ tích khoảng cách từ M đến các đường tiệm cận luôn bằng 3. ✓

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)^{2025}(x-3)^{2024}, \forall x \in \mathbb{R}$.

a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.

c) Biết $f(0) = 0$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

d) Hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ có 3 điểm cực trị.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	0	$\nearrow +\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm, nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm.

$$g(x) = f(x^2 - 1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g'(x) &= 2x \cdot f'(x^2 - 1) = 2x(x^2 - 1) \left[(x^2 - 1) + 1 \right]^{2025} \left[(x^2 - 1) - 3 \right]^{2024} \\ &= 2x^{4051} (x^2 - 1) [x^2 - 4]^{2024} \end{aligned}$$

Phương trình $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm bội lẻ và 2 nghiệm bội chẵn nên có 3 cực trị.

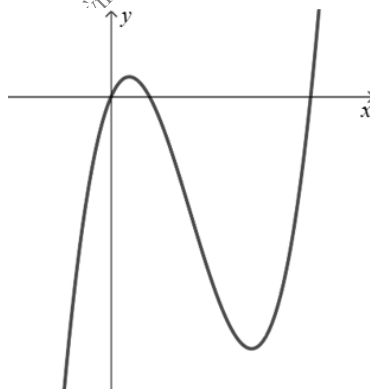
a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$. ✓

b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$. ✗

c) Biết $f(0) = 0$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt. ✗

d) Hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ có 3 điểm cực trị. ✓

Câu 24: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên.



a) Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu.

b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số âm.

c) Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

d) Trong các hệ số a, b, c, d có 2 hệ số dương.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

“Nhánh bên phải” hướng lên $\Rightarrow a > 0$

Đồ thị qua gốc tọa độ $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = d = 0$.

Gọi x_1, x_2 là hoành độ các cực trị

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a} > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < 0 \Rightarrow b < 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c > 0$$

- a) Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu. ✗
- b) Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số âm. ✓
- c) Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt. ✓
- d) Trong các hệ số a, b, c, d có 2 hệ số dương. ✓

CHƯƠNG

I

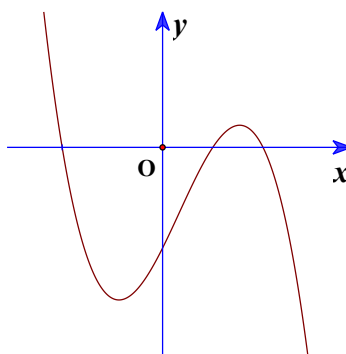
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



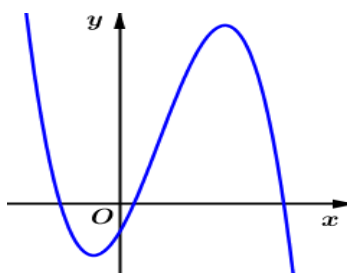
HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

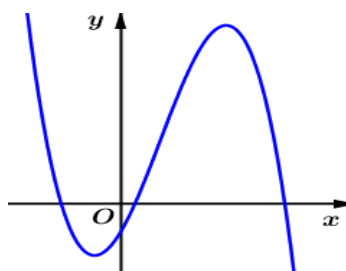


Trong các số a, b, c và d có bao nhiêu số dương?

Câu 2: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các giá trị a, b, c, d có bao nhiêu giá trị âm?



Câu 3: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các giá trị a, b, c, d có bao nhiêu giá trị âm?

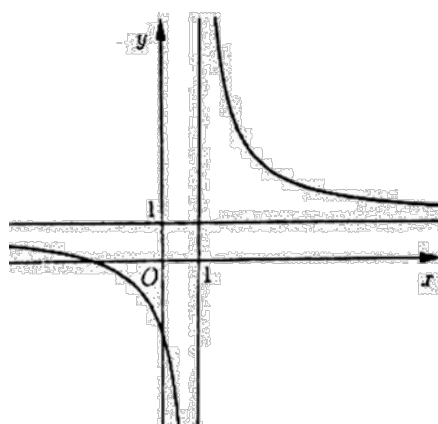


Câu 4: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	1	$+\infty$	

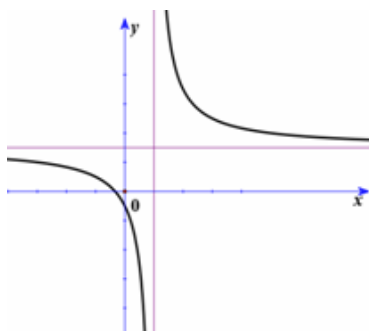
Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{x-c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ.



Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó $d < 0$. Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?



Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-2}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	2	$+\infty$	2

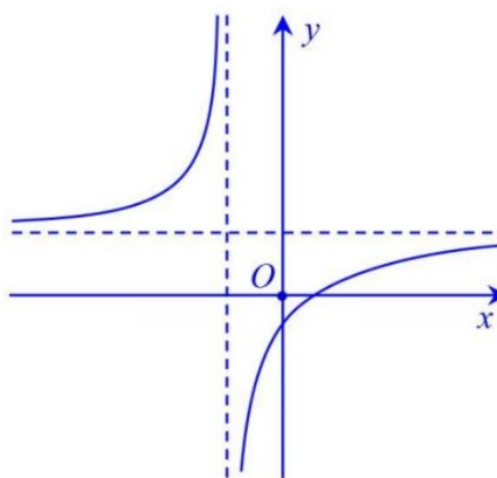
Trong các số a, b, c có bao nhiêu số dương?

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-4}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	1	$+\infty$	1

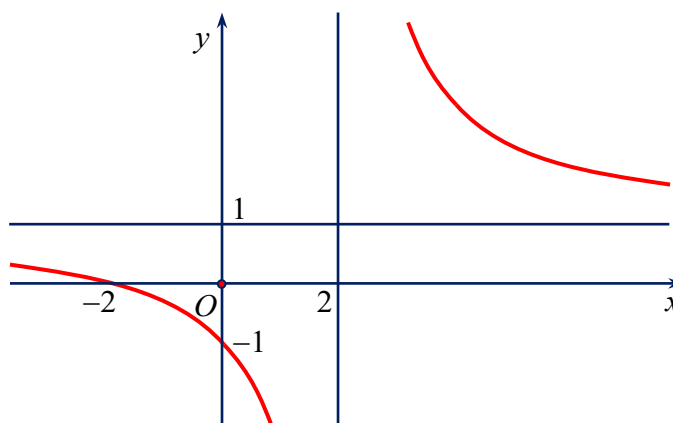
Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx-2}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



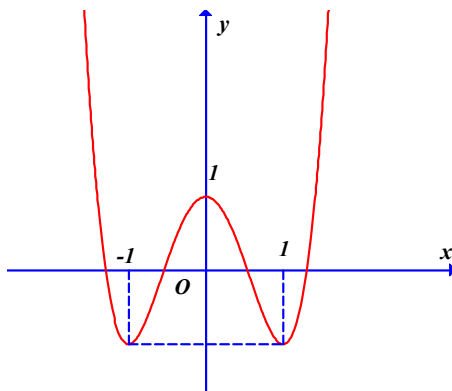
Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

Câu 10: Đường cong ở hình bên là đồ thị hàm số $y = \frac{ax+2}{cx+b}$ với a, b, c là các số thực.



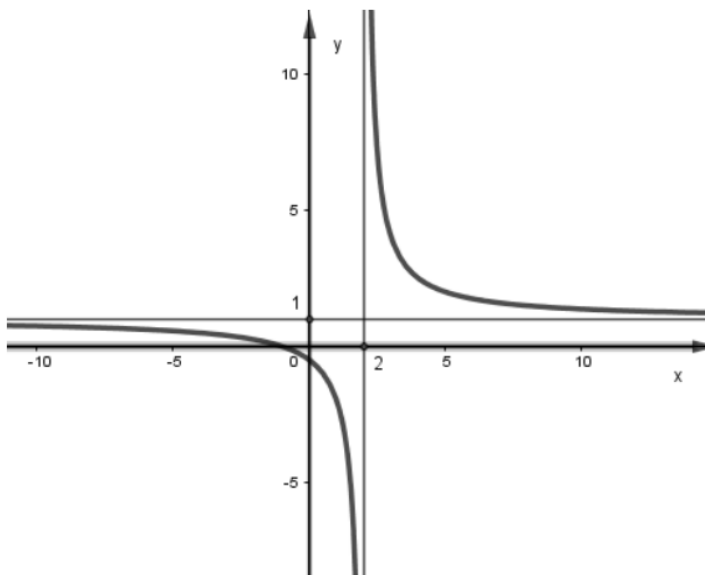
Giá trị của biểu thức $P = a + b + c$ là

Câu 11: Biết rằng hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới.

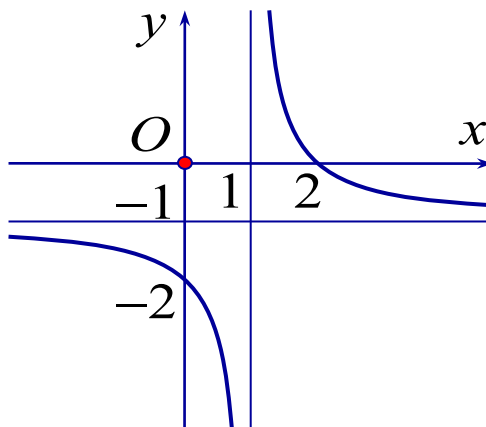


Tính giá trị $f(a+b+c)$.

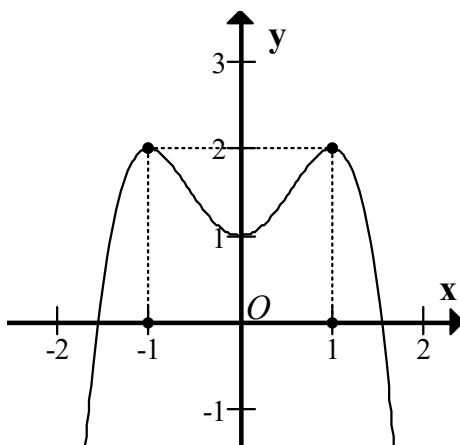
Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $T = a+b$.



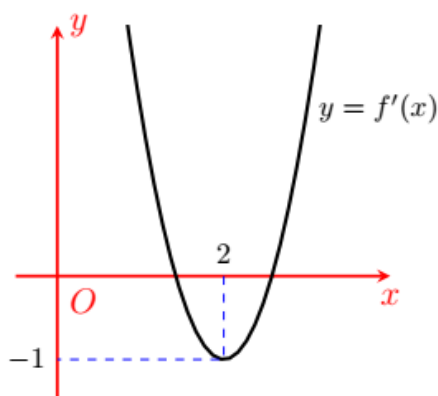
Câu 13: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ, với a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a - 3b + 2c$.



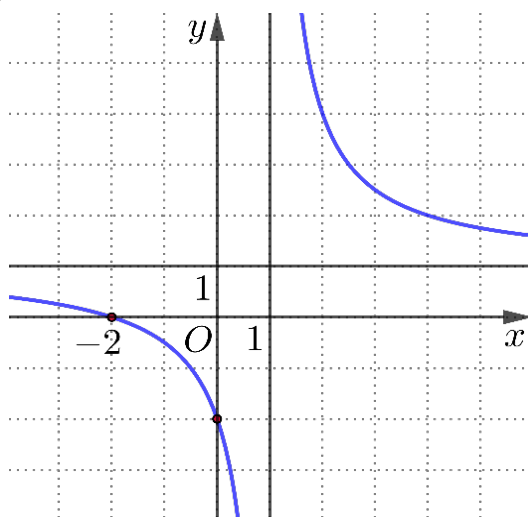
Câu 14: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình dưới. Tính $f(4a + 2b + c)$.



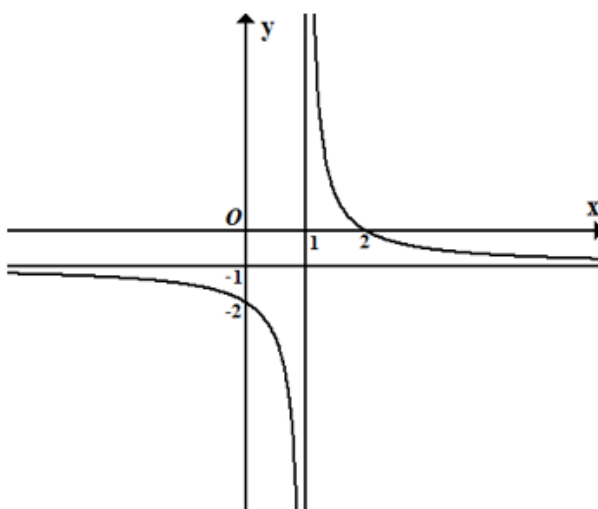
Câu 15: Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Tìm $T = a + b$.



Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ là có đồ thị như hình vẽ sau. Giá trị $T = a + 2b + 3c$ bằng



Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên dưới, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T = a + 2b + 3c$?

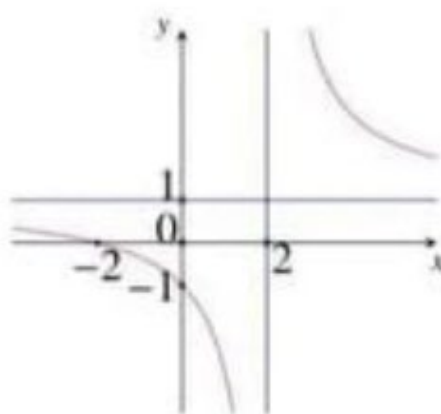


Câu 18: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên dưới đây. Tính $S = a^2 + b^2 + c^2$.

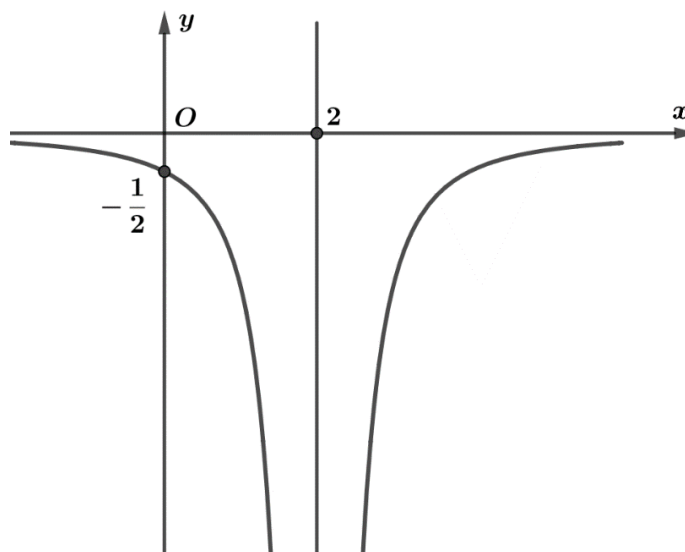
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		4	$3a - b$		4		$+\infty$

Vậy $S = a^2 + b^2 + c^2 = 30$.

Câu 19: Cho hàm số $y = \frac{x-a}{bx+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$

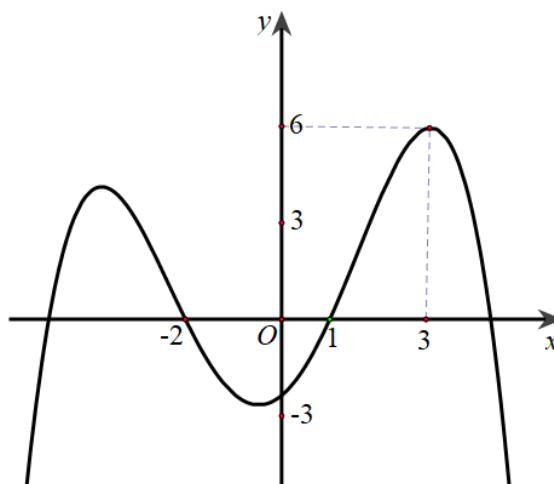


Câu 20: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như trong hình vẽ sau:

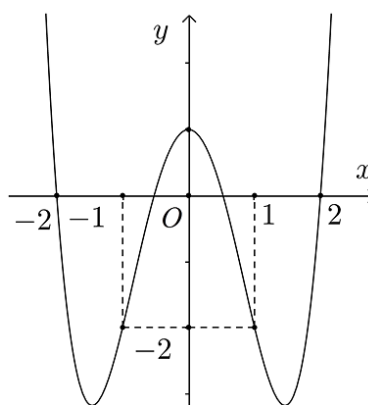


Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0;2)$. Giá trị $f(3)$ bằng

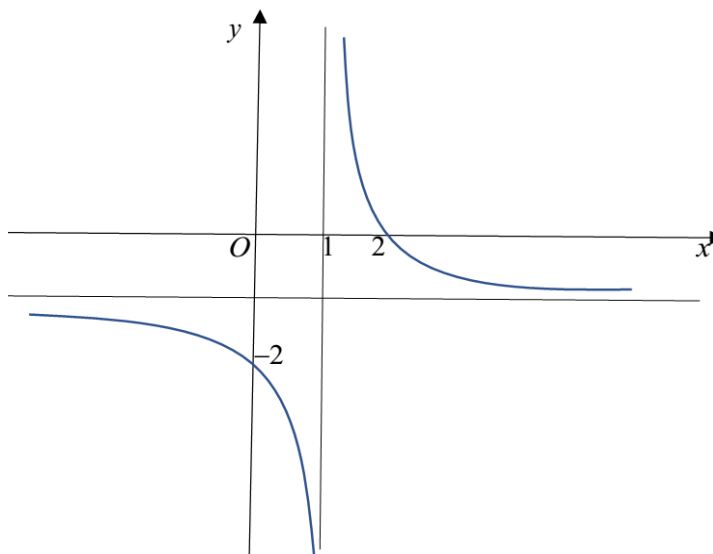
Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $T = 103.f(a^2 + a + 1) + 234.f(af(b) + bf(a))$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Gọi m là số cặp số $(a; b)$ mà tại đó biểu thức T đạt giá trị lớn nhất, gọi giá trị lớn nhất của T là M . Giá trị biểu thức $\frac{M}{m}$ bằng



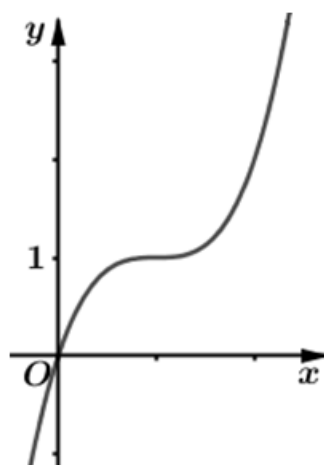
Câu 22: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Tính $f(a+b+c)$.



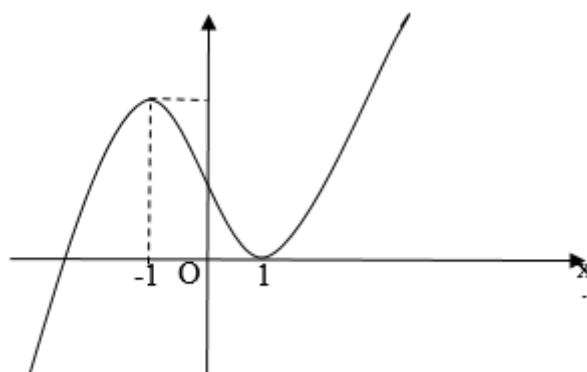
Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$, có đồ thị là hình vẽ với a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a - 3b + 2c$.



Câu 24: Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + c^2 + b + 1$ bằng?



Câu 25: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hình dạng như hình bên. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2a^2 + cd + a - c + 2020$



CHƯƠNG

I

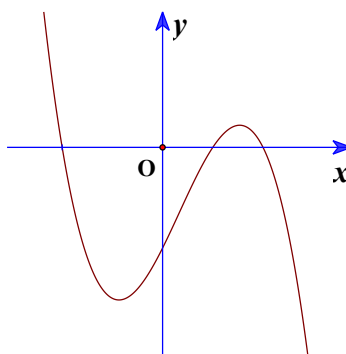
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Trong các số a, b, c và d có bao nhiêu số dương?

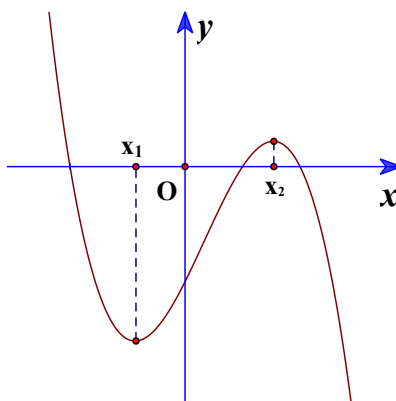
Lời giải

ĐS: 2

Đồ thị có dạng như hình, dễ thấy $a < 0$.

Ta có với $x = 0$ thì $y = d \Rightarrow d < 0$.

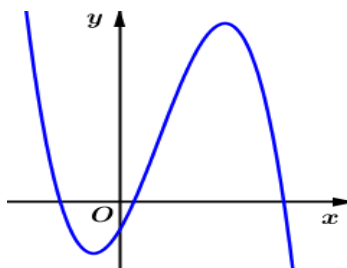
Gọi x_1, x_2 là cực trị của hàm số. Giả sử $x_1 < x_2$



$$\text{Để thấy } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{3a} > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b > 0 \\ c > 0 \end{cases}.$$

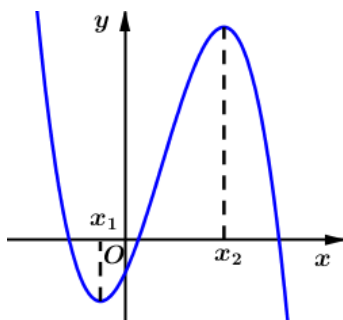
Vậy trong các số a, b, c và d có 2 số dương.

Câu 2: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các giá trị a, b, c, d có bao nhiêu giá trị âm?



Lời giải

ĐS: 2



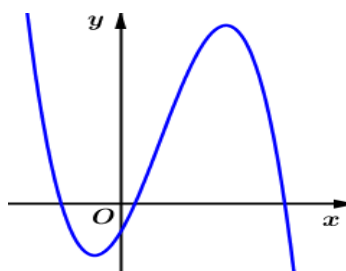
Qua đồ thị ta thấy: đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ giao với trục Oy tại điểm $D(0; d)$ nằm phía dưới trục Ox nên $d < 0$, và hình dạng của đồ thị hàm số ứng với trường hợp $a < 0$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x_1 < 0$, đạt cực đại tại $x_2 > 0$ và $x_1 + x_2 > 0$. x_1, x_2 là hai nghiệm của

$$\text{phương trình } 3ax^2 + 2bx + c = 0. \text{ Khi đó: } \begin{cases} S = x_1 + x_2 > 0 \\ P = x_1 x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-2b}{3a} > 0 \\ \frac{c}{3a} < 0 \end{cases} \text{ mà } a < 0 \text{ nên: } \begin{cases} b > 0 \\ c > 0 \end{cases}.$$

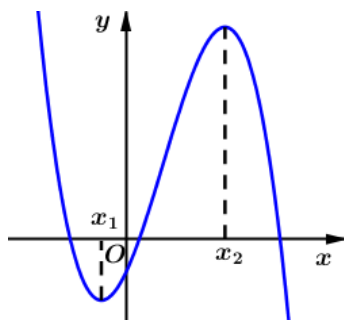
Vậy có 2 giá trị âm trong các giá trị a, b, c, d là $\begin{cases} a < 0 \\ d < 0 \end{cases}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Trong các giá trị a, b, c, d có bao nhiêu giá trị âm?



Lời giải

ĐS: 2



Qua đồ thị ta thấy: đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ giao với trục Oy tại điểm $D(0; d)$ nằm phía dưới trục Ox nên $d < 0$, và hình dạng của đồ thị hàm số ứng với trường hợp $a < 0$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x_1 < 0$, đạt cực đại tại $x_2 > 0$ và $x_1 + x_2 > 0$. x_1, x_2 là hai nghiệm của

phương trình $3ax^2 + 2bx + c = 0$. Khi đó:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 > 0 \\ P = x_1 x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-2b}{3a} > 0 \\ \frac{c}{3a} < 0 \end{cases} \text{ mà } a < 0 \text{ nên: } \begin{cases} b > 0 \\ c > 0 \end{cases}.$$

Vậy có 2 giá trị âm trong các giá trị a, b, c, d là $\begin{cases} a < 0 \\ d < 0 \end{cases}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	1	$+\infty$	

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

Lời giải

ĐS: 3

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$

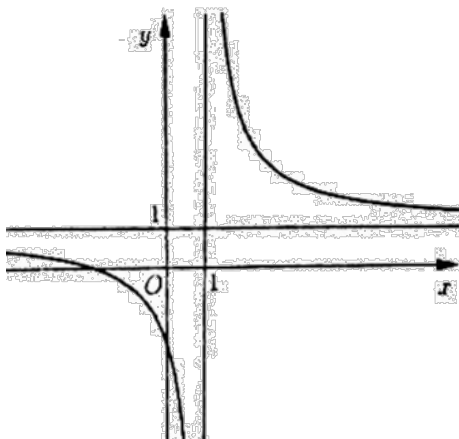
$$f(0) = d = 1 > 0 \Rightarrow d > 0.$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{ vì } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 0 \Rightarrow c = 0.$$

$$x_{cd} + x_{ct} = -2 + 0 = -2 < 0 \Rightarrow \frac{-2b}{3a} < 0 \Rightarrow b > 0.$$

Vậy có ba số dương.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{x-c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ.



Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

Lời giải

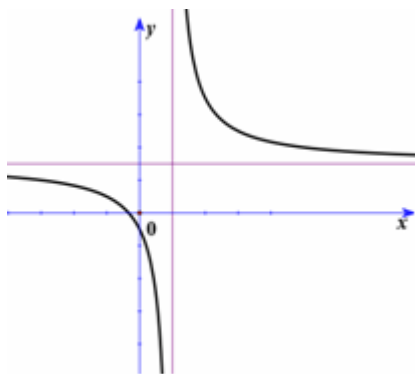
ĐS: 3

Từ hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{x-c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) và đồ thị của hàm số, ta có tiệm cận đứng $x=1 \Rightarrow c=1$,

tiệm cận ngang $y=1 \Rightarrow a=1$ và $f(0) = -\frac{b}{c} < 0 \Rightarrow \frac{b}{c} > 0 \Rightarrow b > 0$.

Vậy $a, b, c > 0$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó $d < 0$. Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?



Lời giải

ĐS: 3

Ta có đường tiệm cận ngang của hàm số là $y = \frac{a}{c} > 0 \Rightarrow a, c$ cùng dấu.

Đường tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c} > 0$. Do $d < 0 \Rightarrow c > 0 \Rightarrow a > 0$.

Đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ âm suy ra $-\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$

Vậy có 3 số dương.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-2}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	2	$+\infty$	2

Trong các số a, b, c có bao nhiêu số dương?

Lời giải

ĐS: 2

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định nên $f'(x) > 0 \Rightarrow a.c + 2.b > 0$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax-2}{bx+c} = \frac{a}{b} = 2 \Rightarrow a = 2b$.

Tiệm cận đứng của hàm số là $x = 3$ nên $\frac{-c}{b} = 3$ hay $c = -3b$.

Từ đây ta có $2b(-3b) + 2b > 0 \Leftrightarrow 2b(-3b+1) > 0 \Leftrightarrow 0 < b < \frac{1}{3}$.

Vì b, c trái dấu nên $c < 0$, a, b cùng dấu nên $a > 0$.

Vậy a, b là hai số dương.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-4}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

Lời giải

ĐS: 0

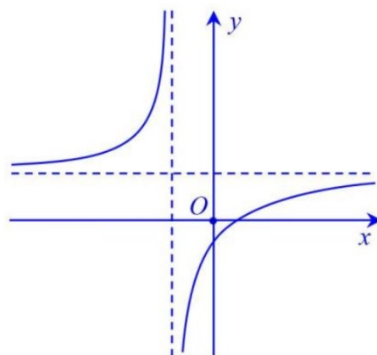
Tiệm cận đứng: $x = -2 < 0 \Rightarrow -\frac{c}{b} = -2 \Rightarrow c = 2b$.

Tiệm cận ngang: $y = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$.

$f'(x) = \frac{ac+4b}{(bx+c)^2} < 0 \Rightarrow ac+4b < 0 \Rightarrow 2b^2+4b < 0 \Rightarrow b \in (-2; 0)$.

Vậy $b < 0$. Do đó $a < 0, c < 0$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx-2}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

Lời giải

ĐS: 1

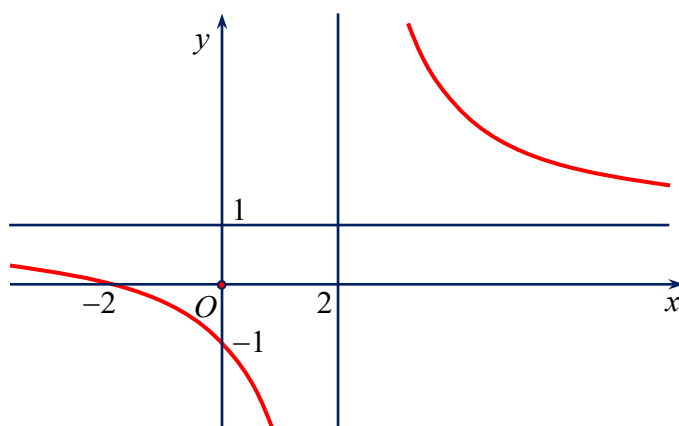
Dựa vào đồ thị ta có TCD $x = \frac{2}{c} < 0 \Rightarrow c < 0$

TCN $y = \frac{a}{c} > 0$ mà $c < 0 \Rightarrow a < 0$

Đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $-\frac{b}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} < 0$ mà $a < 0 \Rightarrow b > 0$.

Vậy trong các số a, b và c có 1 số dương.

Câu 10: Đường cong ở hình bên là đồ thị hàm số $y = \frac{ax+2}{cx+b}$ với a, b, c là các số thực.



Giá trị của biểu thức $P = a + b + c$ là

Lời giải

ĐS: 0

Đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại điểm có tọa độ $(-2; 0)$ nên ta có:

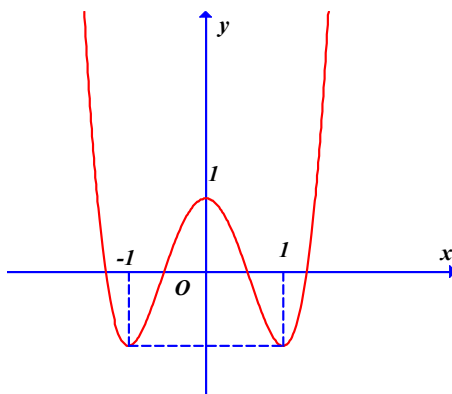
$$\frac{-2a+2}{-2c+b} = 0 \Rightarrow a = 1. \text{ Vậy loại A}$$

Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 1 \Rightarrow \frac{a}{c} = 1 \Rightarrow c = a = 1$. Vậy loại D

Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 2 \Rightarrow -\frac{b}{c} = 2 \Rightarrow b = -2c = -2$.

$$P = a + b + c = 1 + (-2) + 1 = 0$$

Câu 11: Biết rằng hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới.



Tính giá trị $f(a + b + c)$.

Lời giải

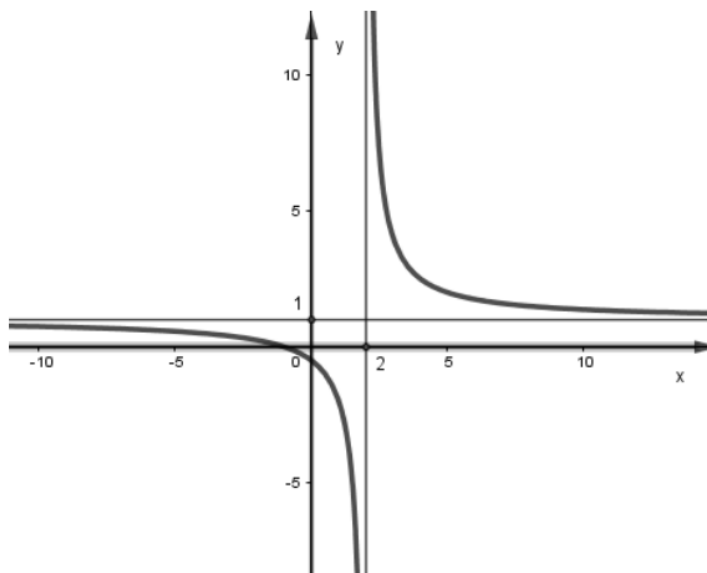
ĐS: $f(a + b + c) = -1$

Ta có $y' = 4ax^3 + 2bx$.

Từ đồ thị, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} f(0) = c = 1 \\ f'(\pm 1) = 2a + b = 0 \\ f(\pm 1) = a + b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = 2 \\ b = -4 \end{cases}.$$

Suy ra $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1 \Rightarrow f(a + b + c) = f(-1) = -1$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có đồ thị như hình vẽ. Tính $T = a + b$.



Lời giải

ĐS: $T = 2$

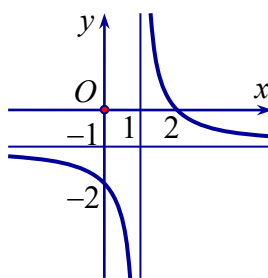
$$y' = \frac{-2a-b}{(bx-2)^2}.$$

Dựa vào đồ thị hàm số $\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Rightarrow -2a-b < 0$ (*).

Đồ thị có hai đường tiệm cận: $x = 2$ và $y = 1$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \frac{a}{b} = 1 \\ \frac{2}{b} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \text{ Thỏa mãn (*). Vậy } T = 2.$$

Câu 13: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình vẽ, với a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a - 3b + 2c$.



Lời giải

ĐS: $T = -9$

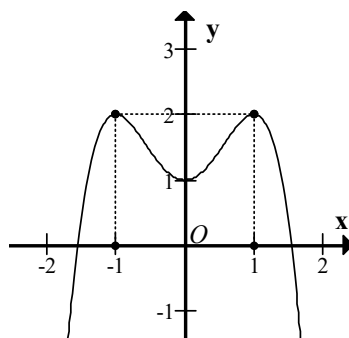
Tiệm cận ngang $y = -1 \Rightarrow a = -1$.

Tiệm cận đứng $x = 1 \Rightarrow c = -1$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; -2) \Rightarrow -2 = \frac{b}{c} \Rightarrow b = 2$.

Vậy $T = a - 3b + 2c = -1 - 3.2 + 2.(-1) = -9$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình dưới. Tính $f(4a + 2b + c)$.



Lời giải

ĐS: $f(4a + 2b + c) = 2$

Do đồ thị nhận các điểm $(0;1), (-1;2), (1;2)$ làm cực trị nên ta có

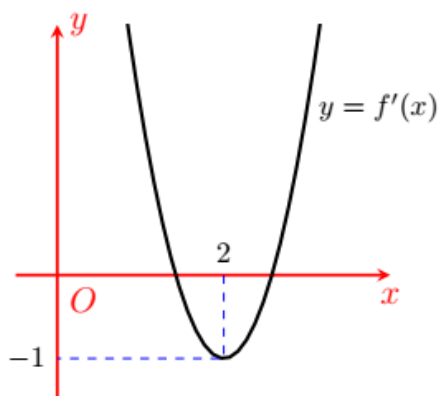
$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow 4a + 2b + c = 1$$

Vậy $f(4a + 2b + c) = f(1) = 2$.

Cách 2: Do hàm số đạt cực đại tại $x = 1 \Leftrightarrow 4a + 2b = 0$ và đồ thị đi qua điểm $(0;1) \Rightarrow c = 1$

$$\Rightarrow 4a + 2b + c = 1 \Rightarrow f(4a + 2b + c) = 2.$$

Câu 15: Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Tìm $T = a + b$.



Lời giải

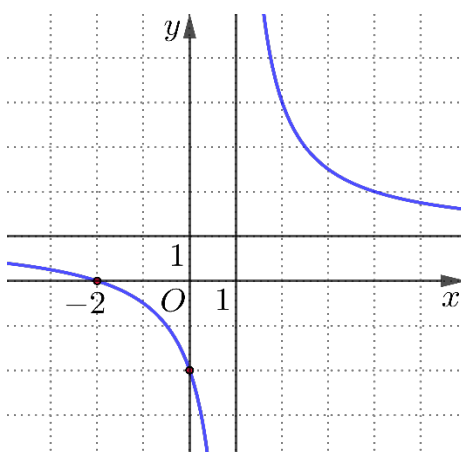
ĐS: $T = a + b = -6 + 11 = 5$

Xét hàm số $y' = 3x^2 + 2ax + b$ có đồ thị là Parabol đi qua điểm $(2; -1)$ và có trục đối xứng là

$$x = 2 \text{ nên ta có } \begin{cases} -\frac{2a}{6} = 2 \\ 12 + 4a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 11 \end{cases}.$$

Vậy $T = 5$.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ là có đồ thị như hình vẽ sau. Giá trị $T = a + 2b + 3c$ bằng



Lời giải

ĐS: $T = a + 2b + 3c = 1 + 4 - 3 = 2$

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 1 \Rightarrow c = -1$.

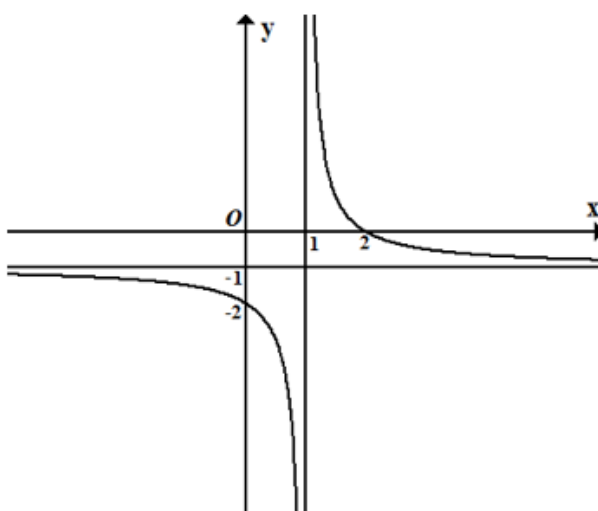
Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 1 \Rightarrow a = 1$.

Khi đó hàm số trở thành $y = \frac{x+b}{x-1}$

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-2; 0) \Rightarrow \frac{-2+b}{-2-1} = 0 \Leftrightarrow b = 2$.

Vậy $a + 2b + 3c = 1 + 4 - 3 = 2$.

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên dưới, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $T = a + 2b + 3c$?



Lời giải

ĐS: $T = 0$

Từ đồ thị hàm số, ta suy ra

⊙ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -1$.

⊙ Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(2;0)$, $B(0;-2)$.

Từ biểu thức hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$, ta suy ra

⊙ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -c$, tiệm cận ngang là đường thẳng $y = a$.

⊙ Đồ thị hàm số đi qua $A\left(-\frac{b}{a};0\right)$, $B\left(0;\frac{b}{c}\right)$.

Đổi chiếu lại, ta suy ra $c = -1$, $a = -1$, $b = 2$.

Vậy $T = a + 2b + 3c = (-1) + 2.2 + 3(-1) = 0$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên dưới đây. Tính $S = a^2 + b^2 + c^2$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			$3a - b$			4	$+\infty$

Lời giải

ĐS: $S = a^2 + b^2 + c^2 = 30$

+) Hàm số đã cho là hàm trùng phương có hình dạng bảng biến thiên như trên.

Suy ra: $\begin{cases} a > 0 \\ a.b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 0, b < 0$.

+) $y' = 4ax^3 + 2bx$

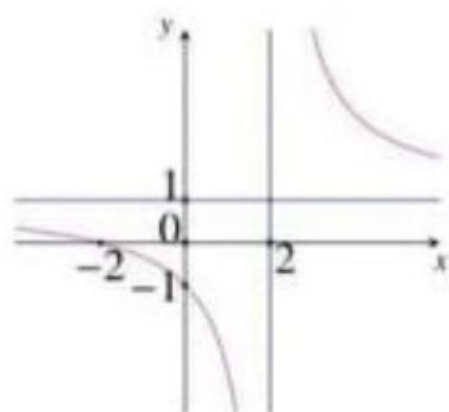
+) Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow 4ax^3 + 2bx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{-b}{2a}} \end{cases}$

+) Dựa vào bảng biến thiên, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(0) = 3a - b \\ \sqrt{\frac{-b}{2a}} = 1 \\ f(1) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3a - b \\ 2a + b = 0 \\ a + b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases}$$

Vậy $S = a^2 + b^2 + c^2 = 30$.

Câu 19: Cho hàm số $y = \frac{x-a}{bx+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$



Lời giải

ĐS: $P = -3$

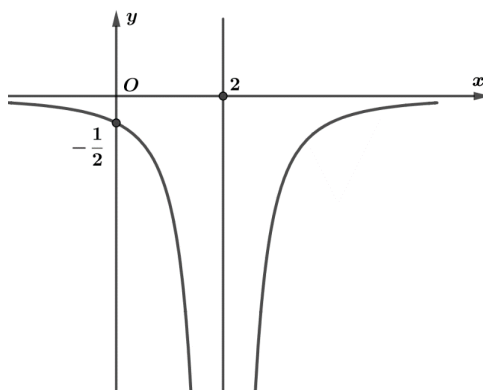
Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1 \Rightarrow \frac{1}{b} = 1 \Rightarrow b = 1$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 2 \Rightarrow -\frac{c}{b} = 2 \Rightarrow c = -2b = -2$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-2; 0) \Rightarrow a = -2$.

Vậy $P = a + b + c = -3$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như trong hình vẽ sau:



Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0; 2)$. Giá trị $f(3)$ bằng

Lời giải

ĐS: $f(3) = 5$

Ta có đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua điểm $A(0; 2)$ nên $b = 2d$ (1)

Ta có $f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Dựa vào đồ thị của đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có $-\frac{d}{c} = 2 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}d$ (2)

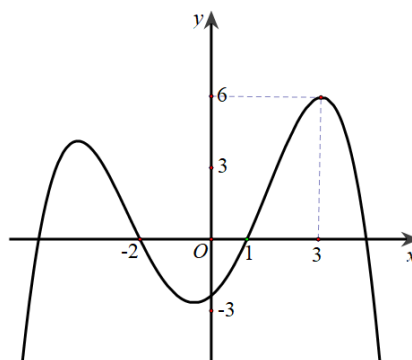
Mặt khác $f'(0) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{ad-bc}{d^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(ad-bc) = -d^2$ (3)

Thay (1), (2) vào (3) ta có $2ad + 3d^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = -\frac{3}{2}d \end{cases}$

Nếu $d = 0 \Rightarrow a = b = c = d = 0$

Nếu $a = -\frac{3}{2}d$ thì $f(x) = \frac{\frac{-3}{2}dx + 2d}{\frac{-1}{2}dx + d} = \frac{-3x+4}{-x+2} \Rightarrow f(3) = 5$.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $T = 103.f(a^2 + a + 1) + 234.f(af(b) + bf(a))$ với $a, b \in \mathbb{R}$. Gọi m là số cặp số $(a; b)$ mà tại đó biểu thức T đạt giá trị lớn nhất, gọi giá trị lớn nhất của T là M . Giá trị biểu thức $\frac{M}{m}$ bằng



Lời giải

ĐS: $\frac{1011}{4}$.

Từ đồ thị ta có: $\max_{\mathbb{R}} f(x) = f(3) = 6$.

Suy ra: $f(a^2 + a + 1) \leq 6 \forall a \in \mathbb{R}$; dấu “=” xảy ra khi $a^2 + a + 1 = 3 \Leftrightarrow a = 1; a = -2$.

$f(af(b) + bf(a)) \leq 6, \forall a, b \in \mathbb{R}$, dấu “=” xảy ra khi $af(b) + bf(a) = 3$.

Do đó, $T \leq 103.6 + 234.6 = 2022$, dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} af(b) + bf(a) = 3 \\ a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$.

Với $a = 1$ thì $1.f(b) + bf(1) = 3 \Leftrightarrow f(b) = 3$. Dựa vào đồ thị suy ra $f(b) = 3$ có 4 nghiệm b

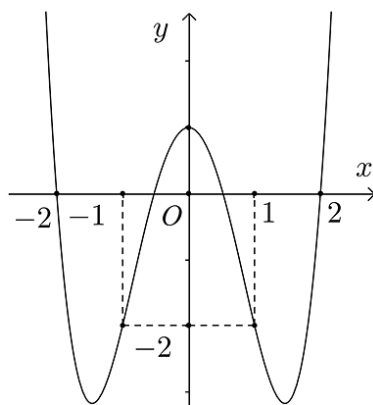
phân biệt.

Với $a = -2$ thì $-2.f(b) + bf(-2) = 3 \Leftrightarrow f(b) = -\frac{3}{2}$. Dựa vào đồ thị suy ra $f(b) = -\frac{3}{2}$ có 4 nghiệm b phân biệt.

Do đó có 8 cặp $(a; b)$ thỏa mãn $T_{\max} = 2022$.

$$\text{Vậy } \frac{M}{m} = \frac{2022}{8} = \frac{1011}{4}.$$

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Tính $f(a+b+c)$.



Lời giải

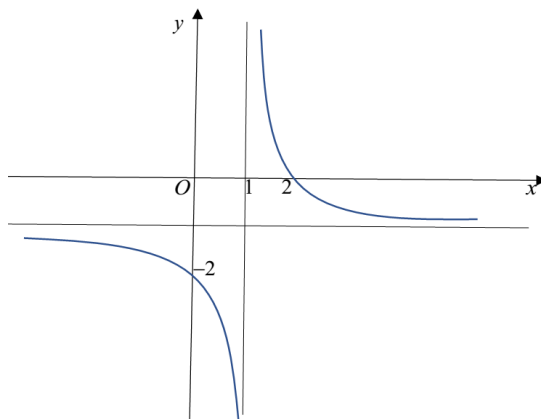
ĐS: $f(a+b+c) = f(-2) = 0$

Vì đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0;1)$, $B(1;-2)$, $C(2;0)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = -2 \\ 16a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -3 \\ 16a + 4b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{11}{12} \\ b = -\frac{47}{12} \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{11}{12}x^4 - \frac{47}{12}x^2 + 1$$

$$\Rightarrow f(a+b+c) = f(-2) = 0.$$

Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$, có đồ thị là hình vẽ với a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a - 3b + 2c$.



Lời giải

ĐS: $T = a - 3b + 2c = -1 - 6 - 2 = -9$

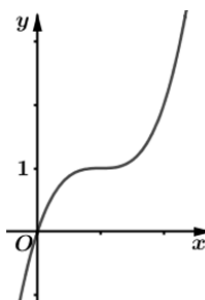
Tiệm cận đứng $x = -c = 1 \Rightarrow c = -1$.

Tiệm cận ngang $y = a = -1$.

Giao điểm trục Oy là $y = \frac{b}{c} = -2 \Rightarrow b = 2$.

$T = a - 3b + 2c = -1 - 6 - 2 = -9$

Câu 24: Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + c^2 + b + 1$ bằng?



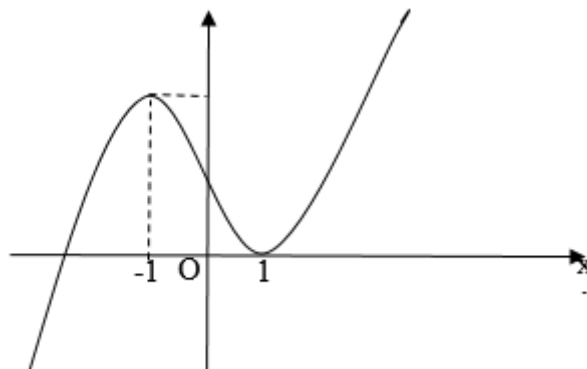
Lời giải

ĐS: $\frac{5}{8}$.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Dựa vào đồ thị ta suy ra $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta'_{y'} = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ ac \geq \frac{b^2}{3} \end{cases}$.

Đánh giá $P = a^2 + c^2 + b + 1 \geq 2ac + b + 1 \geq \frac{2b^2}{3} + b + 1 \geq \frac{5}{8}$.

Câu 25: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hình dạng như hình bên. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2a^2 + cd + a - c + 2020$



Lời giải

ĐS: 2021

TXĐ: $\mathbb{R}$

Ta có: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Từ đồ thị hàm số ta thấy hàm số đạt cực trị tại $x = 1; x = -1$ do đó ta có:

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y'(-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -3a \\ b = 0 \end{cases}$$

Mặt khác đồ thị hàm số đi qua điểm $(1; 0)$ nên

$$a + b + c + d = 0 \Rightarrow a + 0 + (-3a) + d = 0 \Rightarrow d = 2a$$

$$P = 2a^2 + (-3a) \cdot (2a) + a + 3a + 2020 = -4a^2 + 4a + 2020$$

$$= -4\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + 2021 \leq 2021$$

Vậy $P_{\max} = 2021$ khi $a = \frac{1}{2}; b = 0; c = -\frac{3}{2}; d = 1$.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

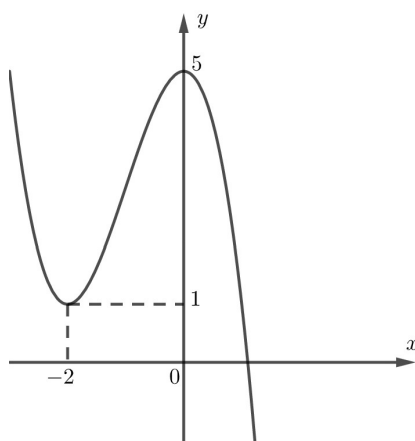
BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC
CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

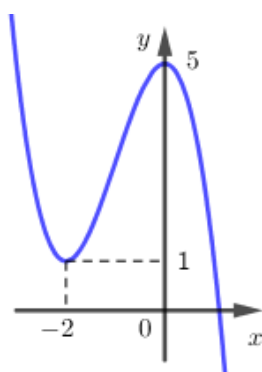
Câu 1: **Câu 7 (101-2023)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 2$ là

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 2: **Câu 11 (104-2023)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 2$ là

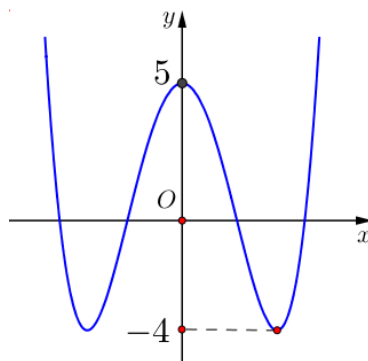


- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 3: **Câu 22 (102-2023)** Số điểm giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ và trục hoành là

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

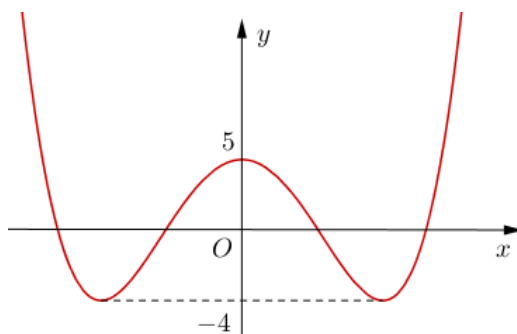
Câu 4: **Câu 33 (102-2023)** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , phương trình $2f(x) = m$ có 4 nghiệm thực phân biệt?

- A. 4. B. 16. C. 17. D. 8.

Câu 5: **Câu 33 (103-2023)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi giá trị của m , phương trình $2f(x) = m$ có 4 nghiệm thực phân biệt?



- A. 4. B. 17. C. 16. D. 8.

Câu 6: **Câu 35 (104-2023)** Biết đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{-x+5}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 . Giá trị $x_1 + x_2$ bằng

- A. 2. B. 3. C. -1. D. 1.

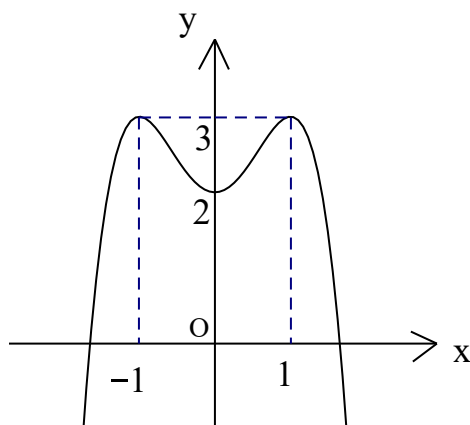
Câu 7: **Câu 32 (101-2023)** Biết đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{-x+5}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 . Giá trị $x_1 + x_2$ bằng

- A. -1. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 8: **Câu 25 (103-2023)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ và trục hoành là

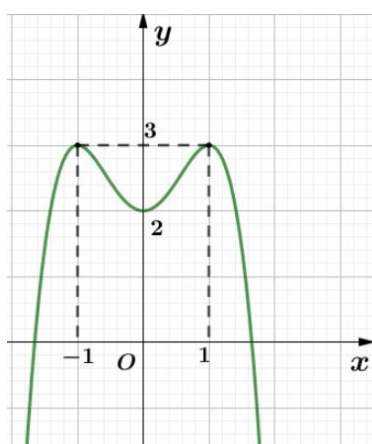
- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 9: **(MĐ 101-2022)** Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f(x) = 1$ là



- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 10: (MĐ 102-2022) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là



- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

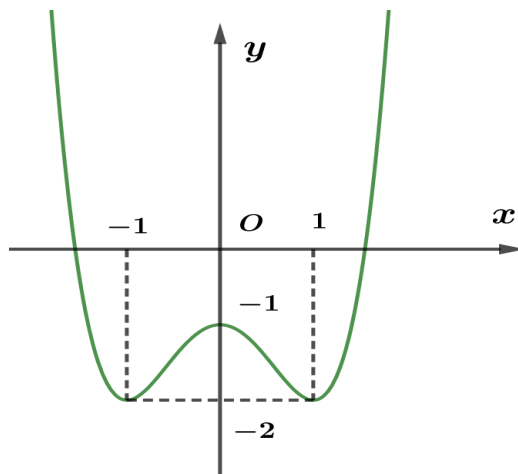
Câu 11: (MĐ 103-2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$						
			-1		3		$-\infty$

Số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và đường thẳng $y = 1$ là

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 12: (MĐ 103-2022) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2; 5]$ của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt?



A. 1.

B. 6.

C. 7.

D. 5.

Câu 13: (MĐ 104-2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		-1	3	$-\infty$

Số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và đường thẳng $y = 1$ là

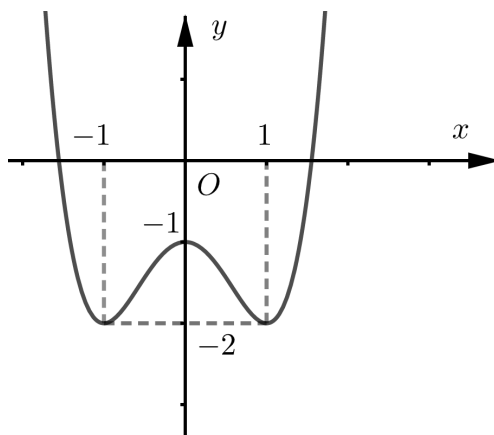
A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Câu 14: (MĐ 104-2022) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2; 5]$ của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt?



- A. 7. B. 6. C. 5. D. 1.

Câu 15: (TK 2020-2021) Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 0. B. 1. C. 2. D. -2.

Câu 16: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng.

A. 0. B. 3. C. 1 D. -3.

Câu 17: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Đồ thị hàm số $y = -x^4 - 2x^2 + 3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

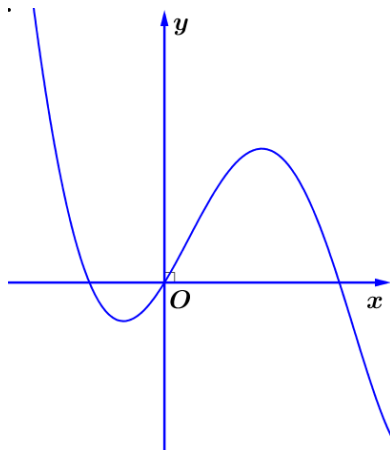
Câu 18: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - 1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 3. B. 1. C. -1. D. 0.

Câu 19: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Đồ thị của hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 - 5$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. -5. B. 0. C. -1. D. 2.

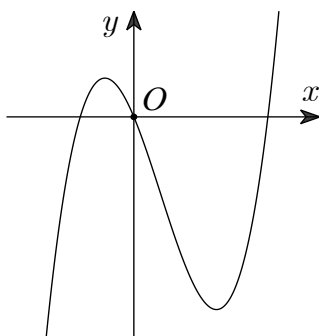
Câu 20: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là

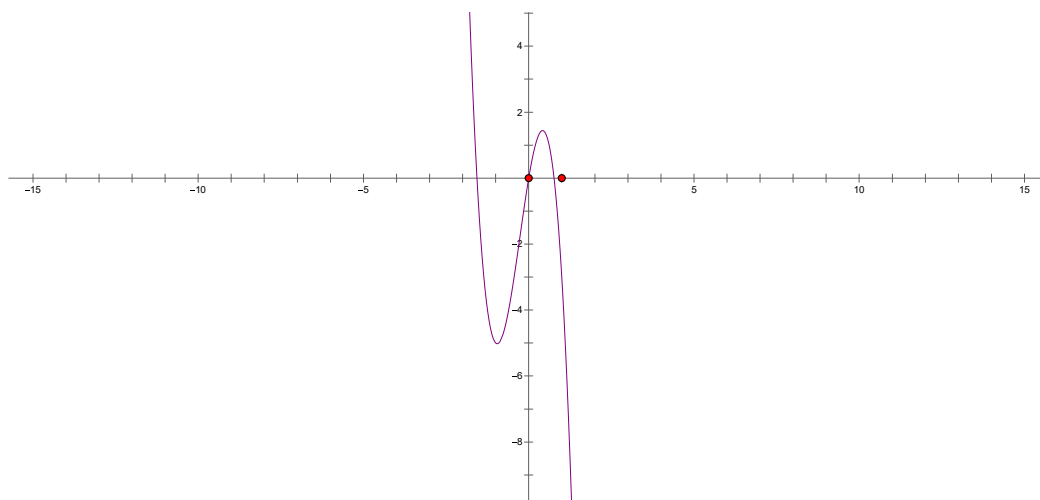
- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 21: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ là



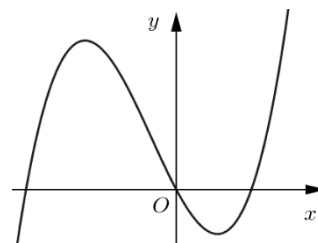
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 22: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $f(x) = a.x^4 + bx^3 + cx^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là



- A. 4 B. 2 C. 3 D. 1

Câu 23: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2f(x) - 3 = 0$



- A. 2. B. 3.
C. 1. D. 4.

Câu 24: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

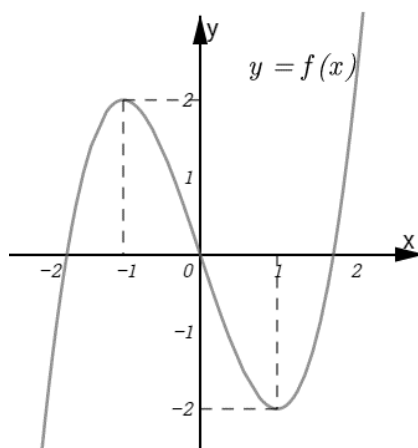
x	$-\infty$	2	3	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		1		0		$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 2 = 0$ là

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 25: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

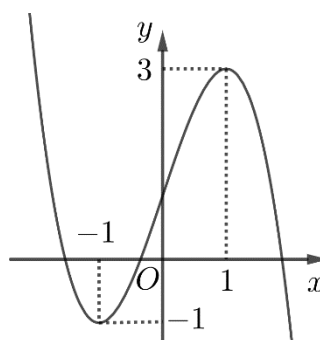
Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = -1$ là:



- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 26: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

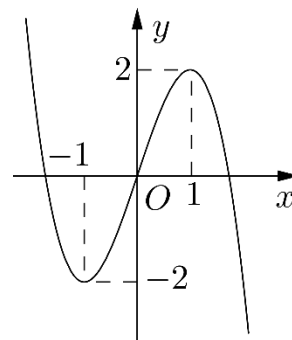
Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là



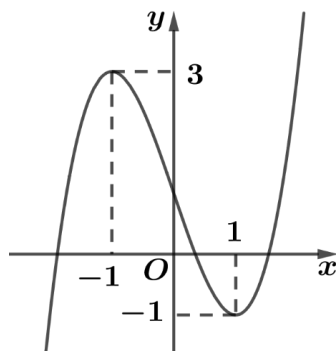
- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 27: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là

- A. 1. B. 0.
C. 2. D. 3.



Câu 28: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 2$ là:

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

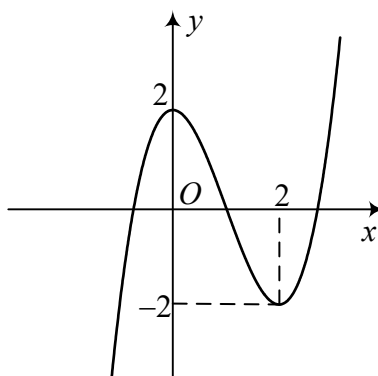
Câu 29: (Mã 101 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$			↗ 3	↘		↗ 3	↘		
			$-\infty$		-1		$-\infty$		

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

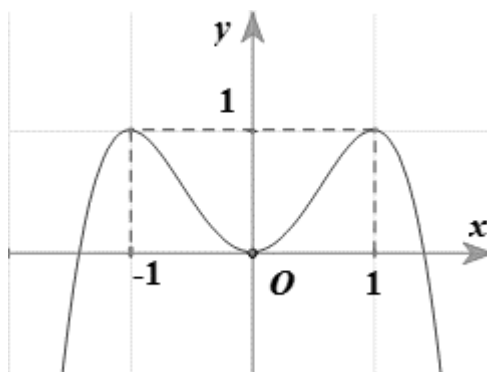
- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Câu 30: (Mã 101 2018) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là



- A. 2 B. 0 C. 1 D. 3

Câu 31: (Mã 102 2018) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên.



Số nghiệm của phương trình $4f(x) - 3 = 0$ là

- A. 2 B. 0 C. 4 D. 3

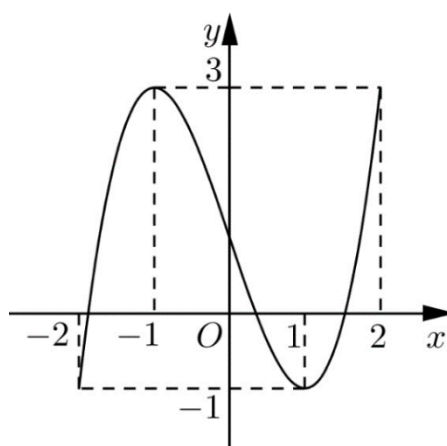
Câu 32: (Mã 103 2019) Cho hàm số $f(x)$ bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	0		0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		-1		2		$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 33: (Mã 103 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ trên đoạn $[-2; 2]$ là



- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.

Câu 34: (Mã 102 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	2	-1	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ là

- A. 3. B. 4. C. 0. D. 2.

Câu 35: (Mã 104 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

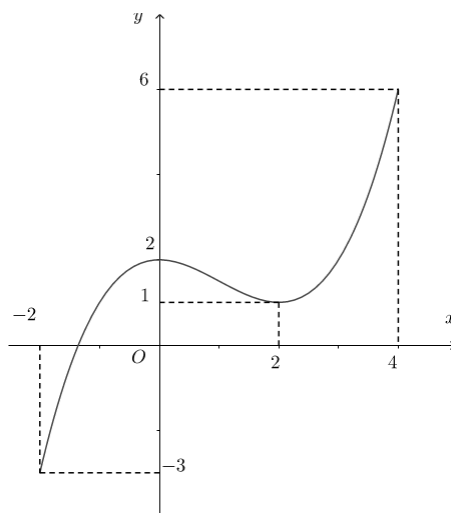
x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

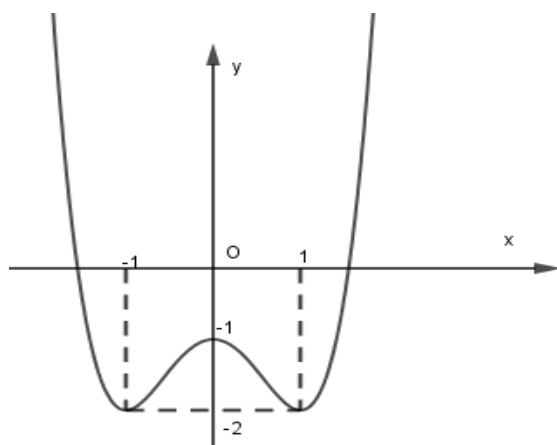
Câu 36: (Mã 104 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ trên đoạn $[-2; 4]$ là



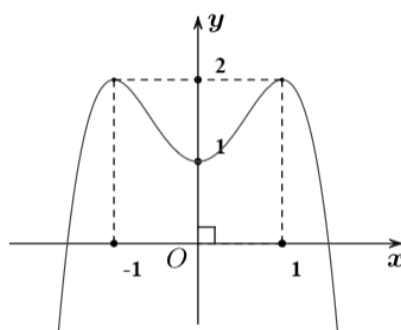
- A. 2 B. 1 C. 0 D. 3

Câu 37: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = -\frac{3}{2}$ là



- A. 4 B. 1 C. 3 D. 2

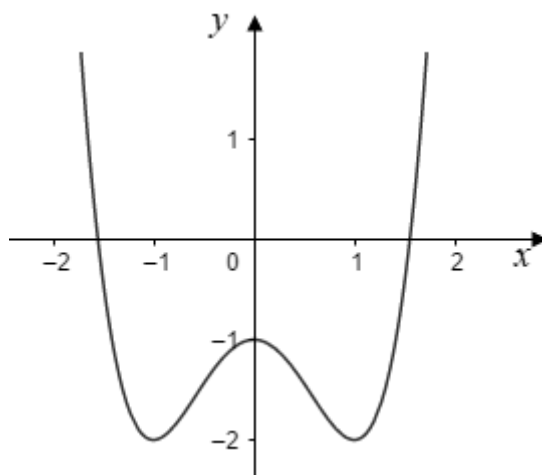
Câu 38: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ là



- A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

Lời giải

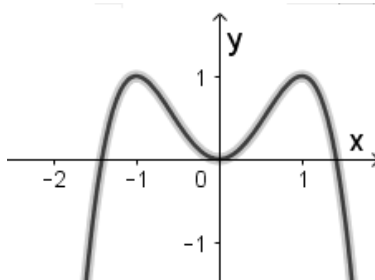
Câu 39: (Mã 101 – 2020 Lần 2) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm của phương trình $f(x) = -\frac{1}{2}$ là

- A. 3. B. 4. C. 2. D. $x = 1$.

Câu 40: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ là



- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 41: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ và trục hoành là

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 42: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ và đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 3x$ là

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

Câu 43: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$ là

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 44: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2$ và đồ thị hàm số $y = x^2 + 5x$ là

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 45: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x$ và đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2$ là

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 46: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 7x$ với trục hoành là

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 47: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x$ với trục hoành là

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 48: (Mã 101 - 2020 Lần 2) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 6x$ với trục hoành là

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Câu 49: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 5x$ với trục hoành là:

- A. 3 B. 2 C. 0 D. 1

- Câu 50: (Mã 105 2017)** Cho hàm số $y = (x-2)(x^2+1)$ có đồ thị (C) . Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. (C) cắt trục hoành tại một điểm. B. (C) cắt trục hoành tại ba điểm.
 C. (C) cắt trục hoành tại hai điểm. D. (C) không cắt trục hoành.
- Câu 51: (Đề Minh Họa 2017)** Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0
- A. $y_0 = 4$ B. $y_0 = 0$ C. $y_0 = 2$ D. $y_0 = -1$
- Câu 52: (Đề Tham Khảo 2017)** Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) . Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.
- A. 2 B. 3 C. 1 D. 0
- Câu 53: (Mã 123 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao $AB = BC$
- A. $m \in \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$ B. $m \in (-2; +\infty)$
 C. $m \in \mathbb{R}$ D. $m \in (-\infty; 0) \cup [4; +\infty)$
- Câu 54: (Mã 101 2019) (Mã đề 001)** Cho hai hàm số $y = \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1}$ và $y = |x+2| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là
- A. $[2; +\infty)$. B. $(-\infty; 2)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(-\infty; 2]$.
- Câu 55: (Mã 103 2019)** Cho hai hàm số $y = \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3}$ và $y = |x+2| - x - m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là
- A. $(-2; +\infty)$. B. $(-\infty; -2]$. C. $[-2; +\infty)$. D. $(-\infty; -2)$.
- Câu 56: (Mã 102 2019)** Cho hai hàm số $y = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+3}{x+4}$ và $y = |x+1| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt là
- A. $(-\infty; 3]$. B. $(-\infty; 3)$. C. $[3; +\infty)$. D. $(3; +\infty)$.
- Câu 57: (Mã 104 2019)** Cho hai hàm số $y = \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}$ và $y = |x+1| - x - m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là
- A. $(-\infty; -3)$. B. $[-3; +\infty)$. C. $(-\infty; -3]$. D. $(-3; +\infty)$.

Câu 58: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			-1			$+\infty$	

The graph shows a function f(x) with a local minimum at x = -1 (y = -2) and a local maximum at x = 0 (y = -1). The function approaches positive infinity as x goes to negative or positive infinity. Arrows indicate the direction of the curve between the critical points and towards the ends of the x-axis.

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ là

- A. 4. B. 6. C. 3. D. 8.

Câu 59: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

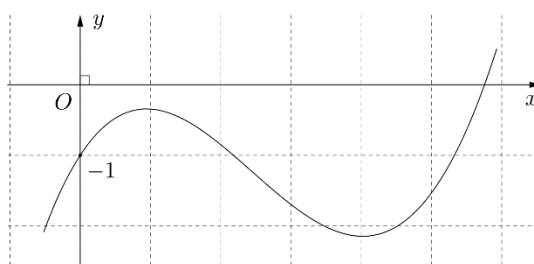
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			2		2			

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x) = 1$ là

- A. 7. B. 4. C. 5. D. 6.

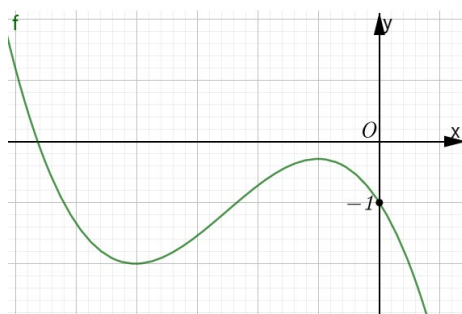
Câu 60: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x^3 f(x)) + 1 = 0$ là



- A. 8. B. 5. C. 6. D. 4.

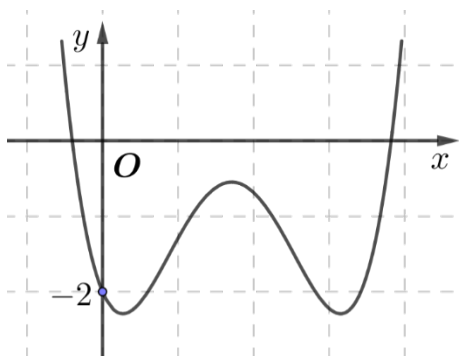
Câu 61: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x^3 f(x)) + 1 = 0$ là

- A. 6. B. 4. C. 5. D. 8.

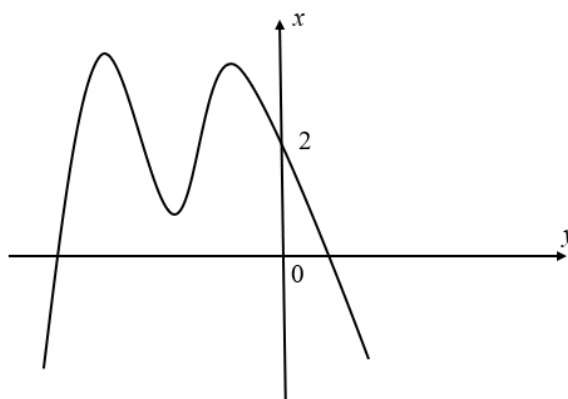
Câu 62: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x^2 f(x)) + 2 = 0$ là

- A. 8. B. 12. C. 6. D. 9.

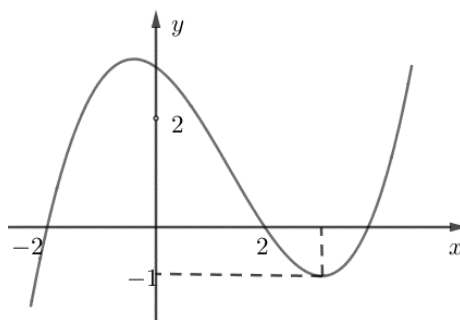
Câu 63: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f(x^2 f(x)) = 2$ là:

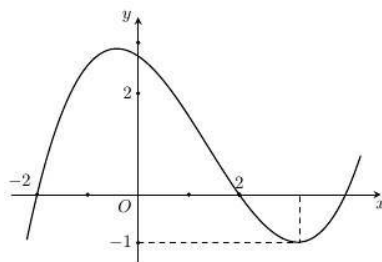
- A. 6. B. 12. C. 8. D. 9.

Câu 64: (Mã 103 2019) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{3}{2}$ là



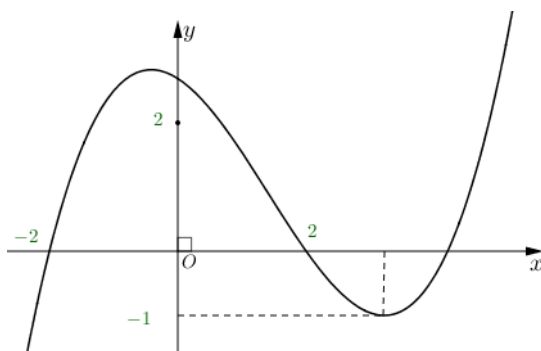
- A. 7. B. 3. C. 8. D. 4.

Câu 65: (Mã 104 2019) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left| f(x^3 - 3x) \right| = \frac{2}{3}$ là



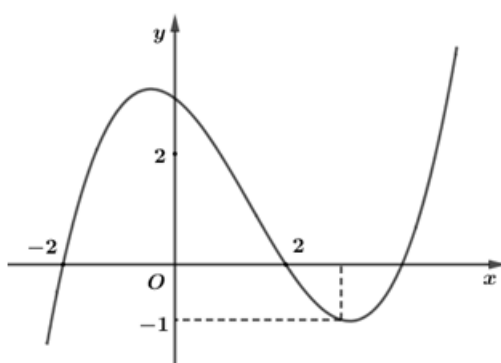
- A. 10 B. 3 C. 9 D. 6

Câu 66: (Mã 101 2019) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left| f(x^3 - 3x) \right| = \frac{4}{3}$ là



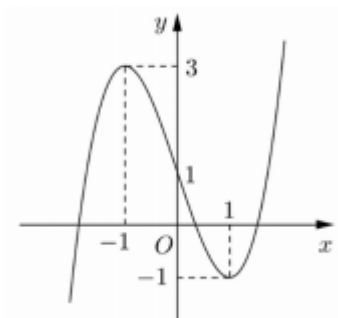
- A. 7. B. 4. C. 3. D. 8.

Câu 67: (Mã 102 2019) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left| f(x^3 - 3x) \right| = \frac{1}{2}$



- A. 6. B. 10. C. 12. D. 3.

Câu 68: (Đề Tham Khảo 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là



- A. $(-1; 3)$ B. $[-1; 1)$ C. $[-1; 3)$ D. $(-1; 1)$

Câu 69: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	-2	2	-3	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 25. B. 30. C. 29. D. 24.

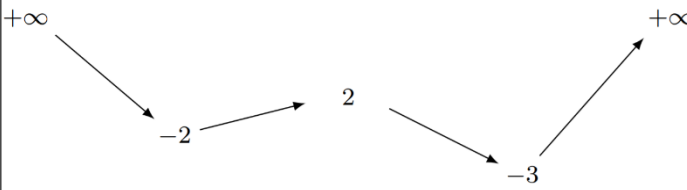
Câu 70: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-2	2	-3	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 15. B. 12. C. 14. D. 13.

Câu 71: (Mã 101 – 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-4		-2		0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$						

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $5f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$

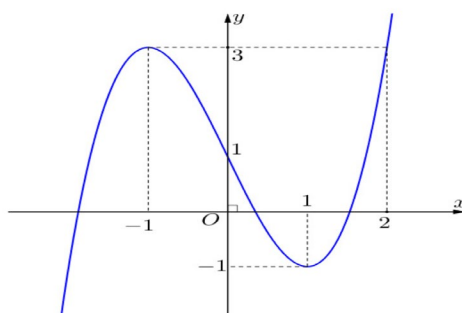
- A. 24. B. 21. C. 25. D. 20.

Câu 72: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$?

- A. 16. B. 19. C. 20. D. 17.

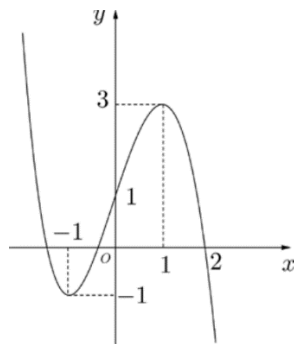
Câu 73: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 1$ là

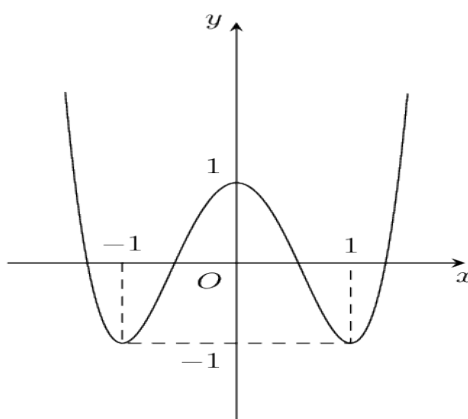
- A. 9. B. 3. C. 6 D. 7.

Câu 74: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 1$ là



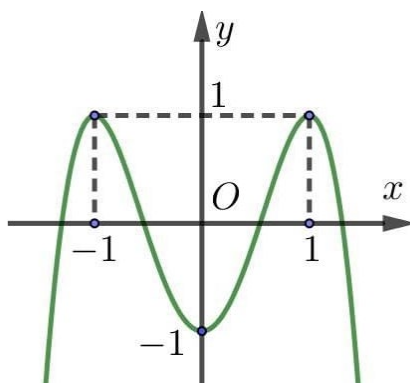
- A. 9. B. 7. C. 3. D. 6.

Câu 75: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 0$ là:



- A. 4. B. 10. C. 12. D. 8.

Câu 76: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 0$ là



- A. 12. B. 10. C. 8. D. 4.

Câu 77: Câu 50 (101-2023) Cho hàm số $f(x) = x^4 - 32x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3; 2)$ của phương trình $f(x^2 + 2x + 3) = m$ bằng -4 ?

- A. 145. B. 142. C. 144. D. 143.

Câu 78: Câu 50 (102-2023) Cho hàm số $f(x) = x^4 - 18x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-4; 1)$ của phương trình $f(x^2 + 4x + 5) = m$ bằng -8 ?

- A. 63. B. 65. C. 62. D. 64.

Câu 79: Câu 49 (103-2023) Cho hàm số $f(x) = x^4 - 32x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-4; 1)$ của phương trình $f(x^2 + 4x + 5) = m$ bằng -8 ?

- A. 81. B. 82. C. 80. D. 79.

Câu 80: Câu 50 (104-2023) Cho hàm số $f(x) = x^4 - 18x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3; 2)$ của phương trình $f(x^2 + 2x + 3) = m$ bằng -4 ?

- A. 24. B. 23. C. 26. D. 25.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

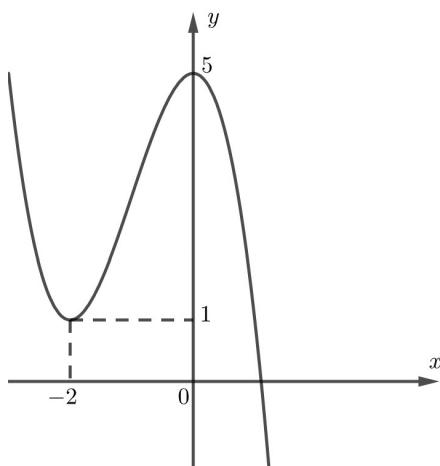
BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC
CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: **Câu 7 (101-2023)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 2$ là

A. 1.

B. 0.

C. 2.

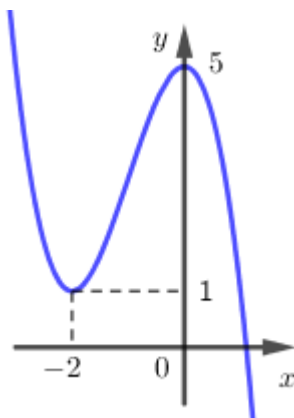
D. 3.

Lời giải

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đồ thị.

Do số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 2$ là 3 nên số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 2$ là 3.

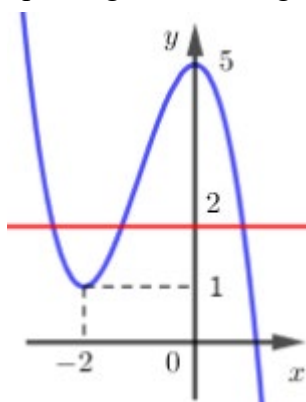
Câu 2: **Câu 11 (104-2023)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 2$ là



- A. 0. B. 1. C. 2. **D. 3.**

Lời giải

Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 2$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đồ thị đường thẳng $y = 2$. Do đó phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt.



Câu 3: **Câu 22 (102-2023)** Số điểm giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ và trục hoành là

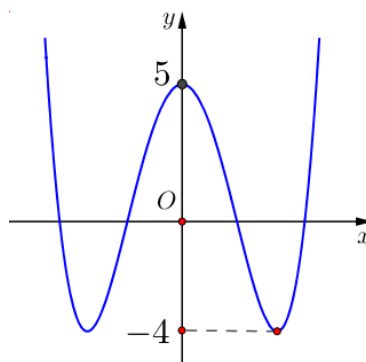
- A. 3. **B. 2.** C. 1. D. 0.

Lời giải

Xét phương trình: $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Số điểm giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là 2.

Câu 4: **Câu 33 (102-2023)** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho với mỗi m , phương trình $2f(x) = m$ có 4 nghiệm thực phân biệt?

- A. 4. B. 16. **C. 17.** D. 8.

Lời giải

Ta có $2f(x) = m \Leftrightarrow f(x) = \frac{m}{2}$.

Dựa vào đồ thị, phương trình trên có 4 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi

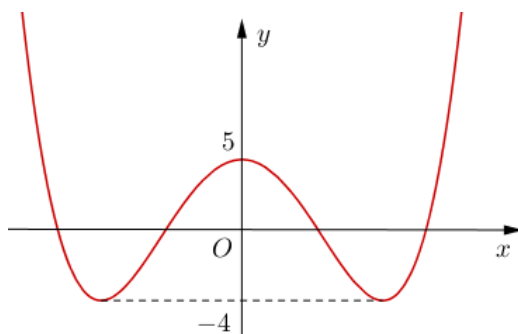
$$-4 < \frac{m}{2} < 5 \Leftrightarrow -8 < m < 10.$$

Suy ra, các giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$$-7; -6; \dots; -1; 0; 1; \dots; 9.$$

Có tất cả 17 số m thỏa mãn.

Câu 5: **Câu 33 (103-2023)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi giá trị của m , phương trình $2f(x) = m$ có 4 nghiệm thực phân biệt?



A. 4.

B. 17.

C. 16.

D. 8.

Lời giải

Xét phương trình $2f(x) = m \Leftrightarrow f(x) = \frac{m}{2}$.

Phương trình $2f(x) = m$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-4 < \frac{m}{2} < 5 \Leftrightarrow -8 < m < 10$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-7; -6; \dots; 7; 8; 9\}$.

Vậy có 17 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2f(x) = m$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

Câu 6: **Câu 35 (104-2023)** Biết đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{-x+5}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 . Giá trị $x_1 + x_2$ bằng

A. 2.

B. 3.

C. -1.

D. 1.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{-x+5}{x-2} = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$. Vậy $x_1 + x_2 = 2$

- Câu 7: Câu 32 (101-2023)** Biết đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{-x+5}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 . Giá trị $x_1 + x_2$ bằng
- A. -1. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là:

$$x - 1 = \frac{-x+5}{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ (x-1)(x-2) + x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x^2 - 3x + 2 + x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Suy ra $x_1 + x_2 = -1 + 3 = 2$.

- Câu 8: Câu 25 (103-2023)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ và trục hoành là
- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

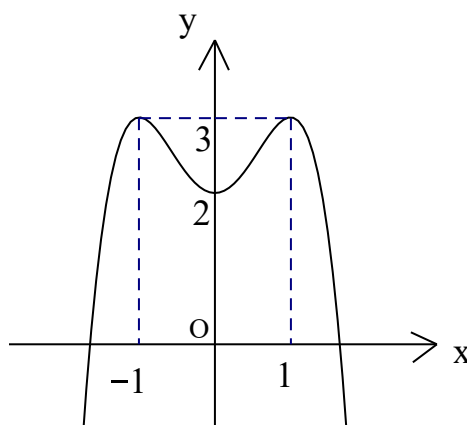
Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ và trục hoành, ta có

$$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ cắt trục hoành tại 2 điểm.

- Câu 9: (MĐ 101-2022)** Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f(x) = 1$ là

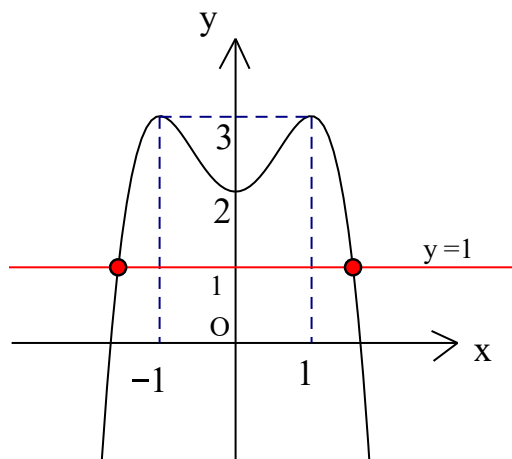


- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Lời giải

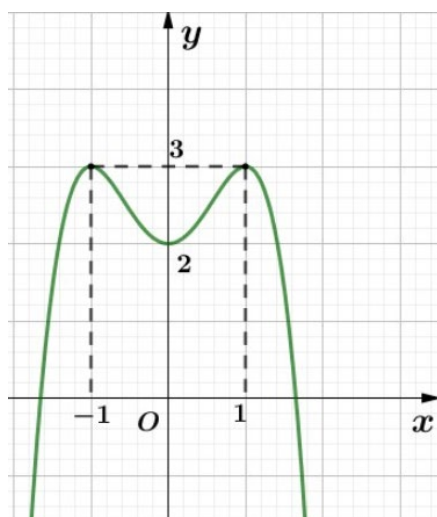
Chọn B

Ta có số nghiệm của phương trình $f(x) = 1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 1$.



Từ hình vẽ, ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 1$ có hai giao điểm nên phương trình $f(x) = 1$ có 2 nghiệm.

Câu 10: (MĐ 102-2022) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là



A. 4.

B. 3.

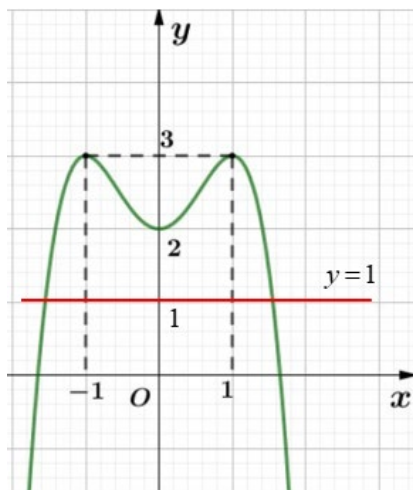
C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có số nghiệm của phương trình $f(x) = 1$ bằng số giao điểm của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng (d): $y = 1$.



Theo đồ thị ta có, đường thẳng (d) cắt (C) tại 2 điểm nên phương trình $f(x)=1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 11: (MĐ 103-2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-1	3	$-\infty$	

Số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và đường thẳng $y = 1$ là

A. 1.

B. 0.

C. 2.

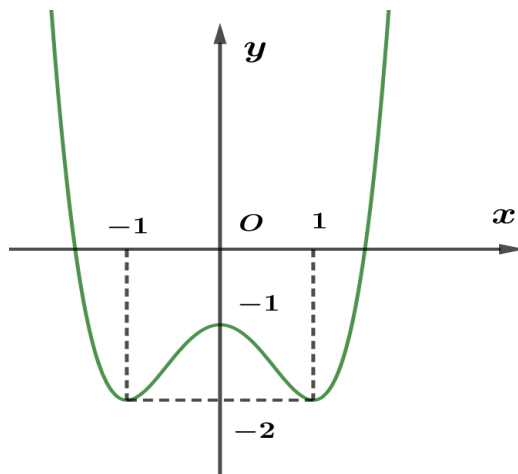
D. 3.

Lời giải

Chọn D

Nhìn bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại 3 điểm phân biệt.

Câu 12: (MĐ 103-2022) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2; 5]$ của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt?



A. 1.

B. 6.

C. 7.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường

thẳng $d : y = m \left(d \equiv Ox \right)$

Dựa vào đồ thị ta có phương trình $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} m = -2 \\ m > -1. \end{cases}$

Mặt khác $m \in [-2; 5] \Rightarrow m \in \{-2; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Suy ra có 7 giá trị thỏa mãn yêu cầu.

Câu 13: (MĐ 104-2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		3		$-\infty$

Số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và đường thẳng $y = 1$ là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

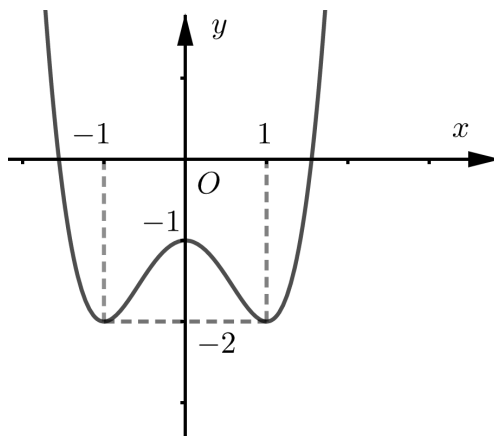
D. 0.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và đường thẳng $y = 1$ là 3.

Câu 14: (MĐ 104-2022) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2; 5]$ của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt?



A. 7.

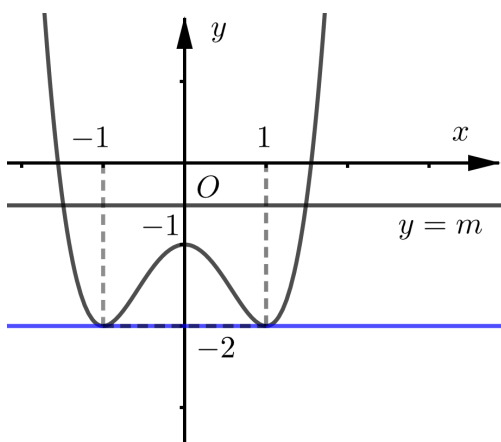
B. 6.

C. 5.

D. 1.

Lời giải

Chọn A



Số nghiệm của phương trình $f(x) = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$. Dựa vào đồ thị, phương trình $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $m = -2$ hoặc $m > -1$. Do $m \in \mathbb{Z} \cap [-2; 5]$ nên $m \in \{-2; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Câu 15: (TK 2020-2021) Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. -2.

Lời giải

Để tìm tọa độ của giao điểm với trục tung, ta cho $x = 0 \Rightarrow y = -2$.

Câu 16: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng.

A. 0.

B. 3.

C. 1

D. -3

Lời giải

Trục tung có phương trình: $x = 0$.

Thay $x = 0$ vào phương trình $y = -x^4 + 4x^2 - 3$ ta có: $y = -3$.

Vậy đồ thị của hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 .

Câu 17: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Đồ thị hàm số $y = -x^4 - 2x^2 + 3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = -x^4 - 2x^2 + 3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3.

Câu 18: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - 1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

- A. 3. B. 1. C. -1. D. 0.

Lời giải

Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - 1$ cắt trục tung tại điểm có hoành độ $x = 0$ nên tung độ bằng

$$y(0) = -0^3 + 2 \cdot 0^2 - 1 = -1.$$

Câu 19: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Đồ thị của hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 - 5$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

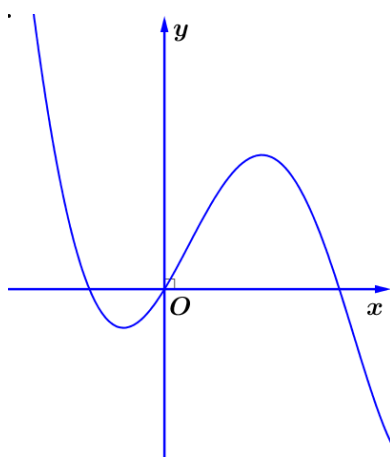
- A. -5. B. 0. C. -1. D. 2.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là giao điểm của đồ thị hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 - 5$ và trục tung, ta có:

$$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 5 = -5.$$

Câu 20: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải

$$\text{Ta có } 3f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{4}{3}.$$

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = x(4ax^2 + 3bx + 2c)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4ax^2 + 3bx + 2c = 0(1) \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ suy ra:

+) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx) = +\infty \Rightarrow a < 0$

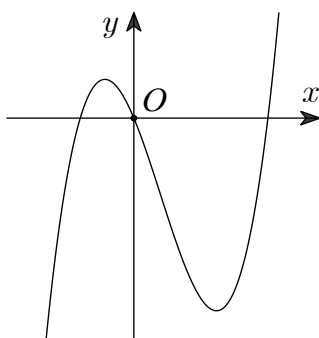
+) Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ âm, dương, bằng 0 nên phương trình (1) sẽ có hai nghiệm $x_1 < 0 < x_2$. Khi đó ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(x_1)$	0	$f(x_2)$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y = -\frac{4}{3}$ tại hai điểm phân biệt.

Do đó phương trình $3f(x) + 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 21: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ là



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + cx$. Dựa vào đồ thị ta thấy $a > 0$.

Lại có $f(0) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Giả sử hoành độ giao điểm của $f'(x)$ với trục hoành lần lượt là $x_1, 0, x_2$ với $x_1 < 0 < x_2$.

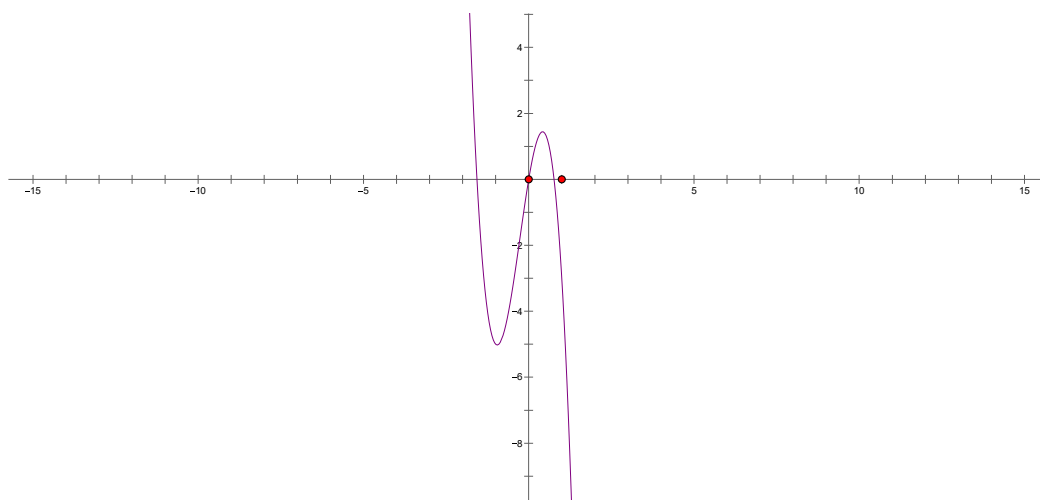
Ta lập được bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$			
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$							$+\infty$

Ta có $3f(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{4}{3}$ (1)

Dựa vào bảng biến thiên ở trên thì phương trình (1) có 2 nghiệm.

Câu 22: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2, a, b, c \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là



A. 4

B. 2

C. 3

D. 1

Lời giải

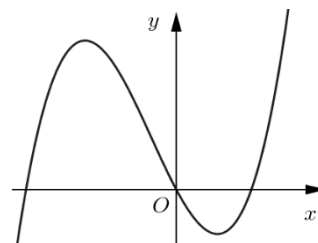
Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	m	0	n	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$								

Ta có phương trình $2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -3/2$

Từ bảng biến thiên ta suy ra đường thẳng $y = -3/2$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt.

Câu 23: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2f(x) - 3 = 0$



A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Ta có: $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}$ do đó số nghiệm phương trình đã cho là số giao điểm của đồ thị hàm

số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{3}{2}$.

Với $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 \Rightarrow f(0) = 0$.

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1; x = 0; x = x_2$. Ta lập được bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$		0		$+\infty$	

Diagram showing the function $f(x)$ starting from $+\infty$ at $-\infty$, decreasing to a local minimum $f(x_1)$, increasing to a local maximum 0 at $x=0$, decreasing to a local minimum $f(x_2)$, and then increasing to $+\infty$ at $+\infty$. A horizontal line $y = 3/2$ is drawn, intersecting the curve at two points.

Từ bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = \frac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hai điểm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt.

Câu 24: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		1		0		$+\infty$

Diagram showing the function $f(x)$ starting from $-\infty$ at $-\infty$, increasing to a local maximum 1 at $x=2$, decreasing to a local minimum 0 at $x=3$, and then increasing to $+\infty$ at $+\infty$.

Số nghiệm của phương trình $3f(x) - 2 = 0$ là

A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

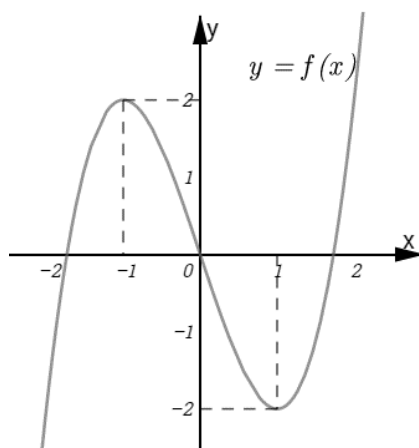
Ta có $3f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{3}$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		$y = \frac{2}{3}$				
	$-\infty$	1	0	$+\infty$		

Căn cứ vào bảng biến thiên thì phương trình $3f(x) - 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{3}$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 25: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = -1$ là:



A. 3.

B. 1.

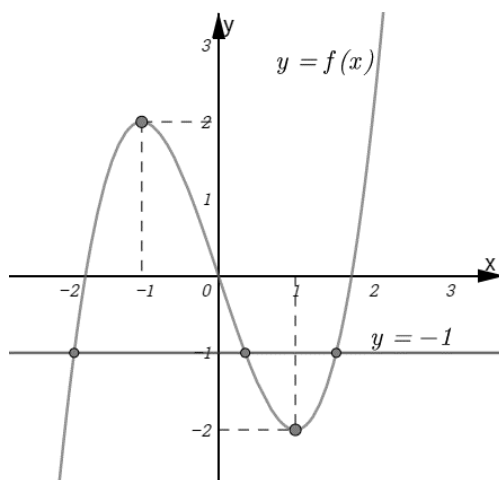
C. 0.

D. 2.

Lời giải

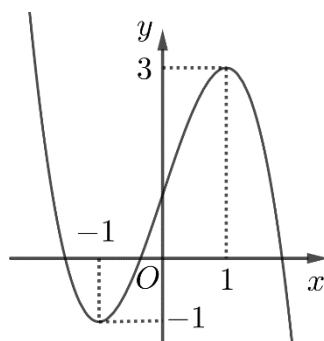
Chọn A

Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = -1$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -1$.



Từ hình vẽ suy ra 3 nghiệm.

Câu 26: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là



A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = 1$ có 3 nghiệm.

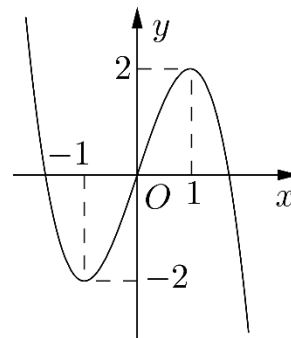
Câu 27: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

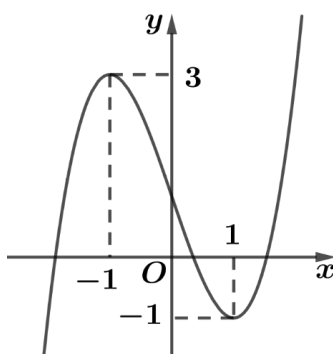


Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số ta có số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là 3.

Câu 28: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 2$ là:

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = 2$. Dựa vào đồ thị ta có phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Câu 29: (Mã 101 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			3		3			
	$-\infty$			-1			$-\infty$	

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Lời giải

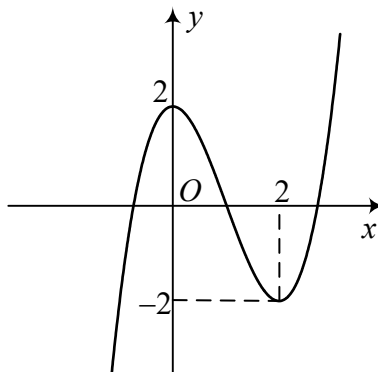
Chọn C

Ta có $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên của $f(x)$ ta có số giao điểm của đồ thị

Câu 30: (Mã 101 2018) Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$). Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là



- A. 2 B. 0 C. 1 D. 3

Lời giải

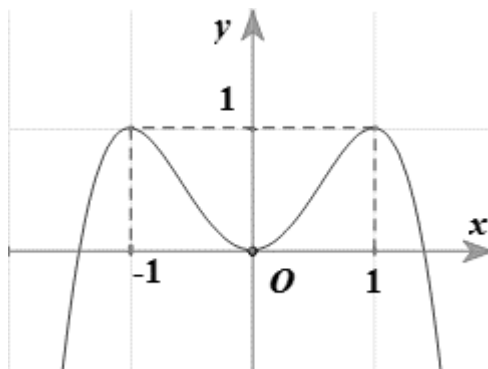
Chọn D

Ta có: $3f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{4}{3}$ (*)

(*) là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{4}{3}$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy (*) có 3 nghiệm.

Câu 31: (Mã 102 2018) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên.



Số nghiệm của phương trình $4f(x) - 3 = 0$ là

A. 2

B. 0

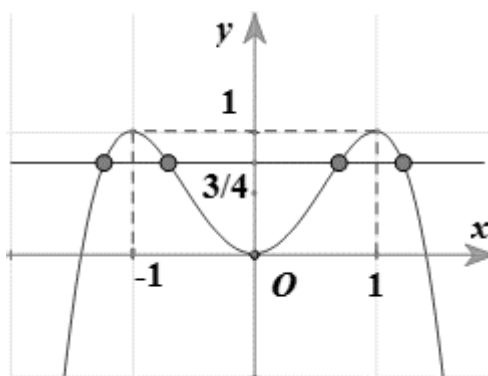
C. 4

D. 3

Lời giải

Chọn C

Ta có $4f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{4}$



Đường thẳng $y = \frac{3}{4}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 4 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 32: (Mã 103 2019) Cho hàm số $f(x)$ bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-1	2	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}$ (1).

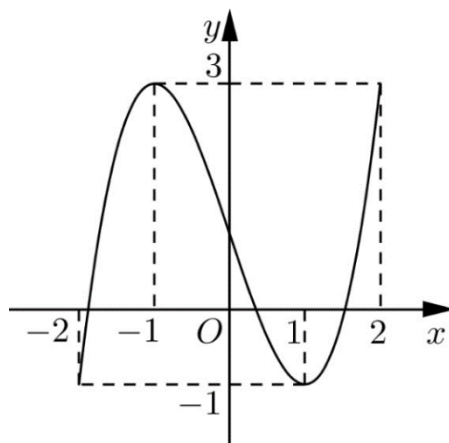
Số nghiệm thực của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng

$$y = \frac{3}{2}.$$

Từ bảng biến thiên đã cho của hàm số $f(x)$, ta thấy đường thẳng $y = \frac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Do đó phương trình (1) có ba nghiệm thực phân biệt.

Câu 33: (Mã 103 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ trên đoạn $[-2; 2]$ là



A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3f(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{4}{3}$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy đường thẳng $y = \frac{4}{3}$ cắt $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 34: (Mã 102 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	2	-1	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ là

A. 3.

B. 4.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	2	-1	$+\infty$

$y=3/2$

Xét phương trình $3f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{3}$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ và đường thẳng

$d: y = \frac{3}{2}$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt.

Câu 35: (Mã 104 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

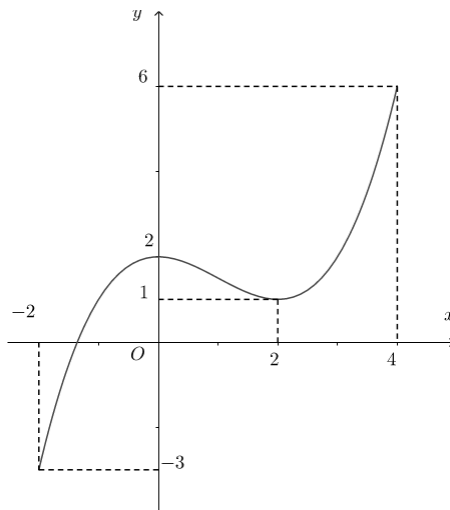
$y = -\frac{3}{2}$

Ta có $2f(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{2}$.

Nhìn bảng biến thiên ta thấy phương trình này có 3 nghiệm.

Câu 36: (Mã 104 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.

Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 5 = 0$ trên đoạn $[-2; 4]$ là



A. 2

B. 1

C. 0

D. 3

Lời giải

Chọn D

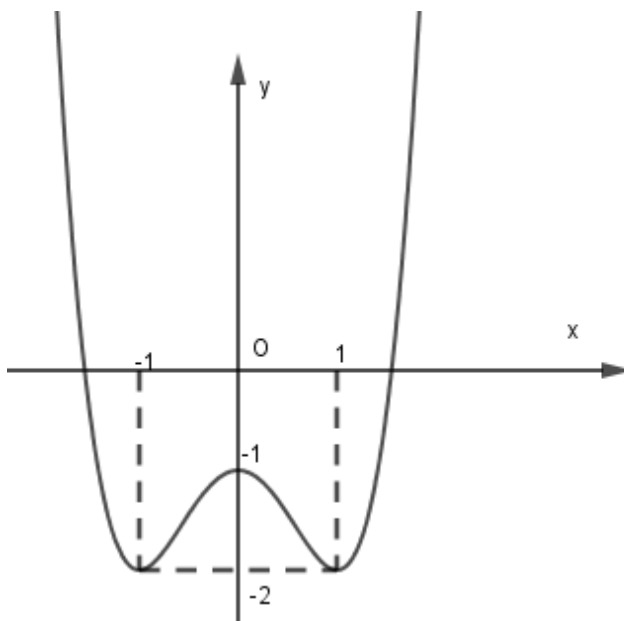
Ta có $3f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{3}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y = \frac{5}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại ba điểm phân biệt thuộc đoạn $[-2; 4]$.

Do đó phương trình $3f(x) - 5 = 0$ có ba nghiệm thực.

Câu 37: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực của

phương trình $f(x) = -\frac{3}{2}$ là



A. 4

B. 1

C. 3

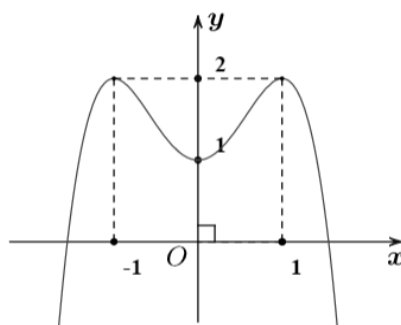
D. 2

Lời giải

Từ đồ thị ta $f(x) = -\frac{3}{2}$ có 4 nghiệm phân biệt

Câu 38: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ là



A. 2.

B. 4.

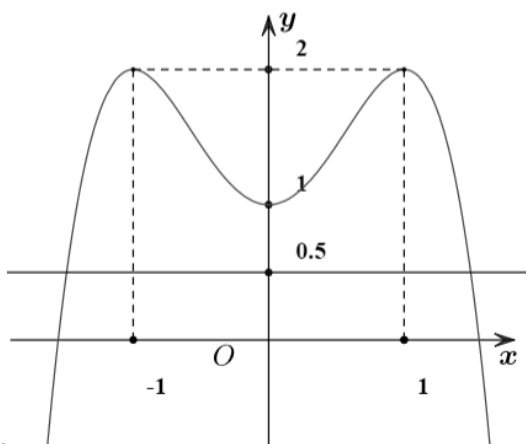
C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

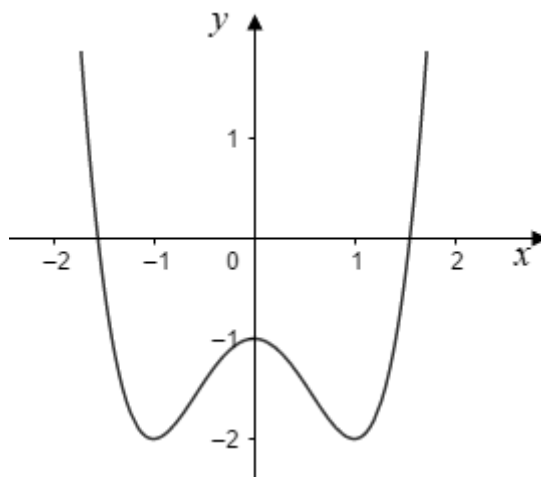
Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ với đường thẳng $y = \frac{1}{2}$



Dựa vào hình trên ta thấy đồ thị hàm số $f(x)$ với đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ có 2 giao điểm.

Vậy phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ có hai nghiệm.

Câu 39: (Mã 101 – 2020 Lần 2) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm của phương trình $f(x) = -\frac{1}{2}$ là

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. $x = 1$.

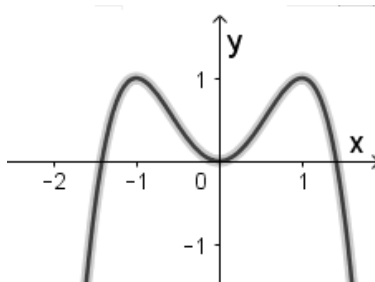
Lời giải

Số nghiệm của phương trình $f(x) = -\frac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy: đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$ cắt nhau tại 2 điểm.

Nên phương trình $f(x) = -\frac{1}{2}$ có 2 nghiệm.

Câu 40: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ là



A. 4.

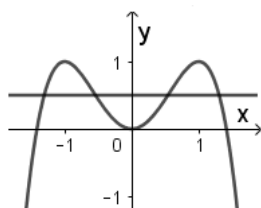
B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn A



Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ và có đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Ta thấy đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số tại 4 điểm nên phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ có 4 nghiệm.

Câu 41: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ và trục hoành là
A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $\mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1); y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$y'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$y(x)$			3		$+\infty$	
	$-\infty$			-1		

Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Câu 42: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ và đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 3x$ là
A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$$x^3 + 3x^2 = 3x^2 + 3x \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}.$$

Hai đồ thị đã cho cắt nhau tại 3 điểm.

Câu 43: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$ là
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2$ và đồ thị hàm số $y = -x^2 + 5x$ chính là số nghiệm thực

$$\text{của phương trình } x^3 - x^2 = -x^2 + 5x \Leftrightarrow x^3 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}.$$

- Câu 44:** (Mã 103 - 2020 Lần 1) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2$ và đồ thị hàm số $y = x^2 + 5x$
- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Lời giải

Chọn A

- Câu 45:** Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 + x^2 = x^2 + 5x \Leftrightarrow x^3 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}.$

Vậy số giao điểm của 2 đồ thị là 3.

- Câu 46:** (Mã 104 - 2020 Lần 1) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x$ và đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2$ là
- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x^3 - x^2 = -x^2 + 3x \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}.$

- Câu 47:** (Mã 102 - 2020 Lần 2) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 7x$ với trục hoành là
- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành là: $-x^3 + 7x = 0$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{7} \end{cases}.$$

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 7x$ với trục hoành bằng 3.

- Câu 48:** (Mã 103 - 2020 Lần 2) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x$ với trục hoành là
- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm $-x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(-x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}.$

Vậy có 3 giao điểm.

Câu 49: (Mã 101 – 2020 Lần 2) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 6x$ với trục hoành là

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 6x$ với trục hoành là nghiệm của phương trình

$$-x^3 + 6x = 0 \quad (*) \Leftrightarrow -x(x^2 - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{6} \end{cases}.$$

Phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt, do đó đồ thị hàm số $y = -x^3 + 6x$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Câu 50: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 5x$ với trục hoành là:

- A. 3 B. 2 C. 0 D. 1

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } -x^3 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \\ x = 0 \end{cases}$$

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 5x$ với trục hoành là 3

Câu 51: (Mã 105 2017) Cho hàm số $y = (x-2)(x^2+1)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. (C) cắt trục hoành tại một điểm. B. (C) cắt trục hoành tại ba điểm.
C. (C) cắt trục hoành tại hai điểm. D. (C) không cắt trục hoành.

Lời giải

Chọn A

Dễ thấy phương trình $(x-2)(x^2+1) = 0$ có 1 nghiệm $x = 2 \Rightarrow (C)$ cắt trục hoành tại một điểm.

Câu 52: (Đề Minh Họa 2017) Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0

- A. $y_0 = 4$ B. $y_0 = 0$ C. $y_0 = 2$ D. $y_0 = -1$

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $-2x + 2 = x^3 + x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2$.

Câu 53: (Đề Tham Khảo 2017) Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) . Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

A. 2

B. 3

C. 1

D. 0

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành: $x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

Vậy số giao điểm của (C) và trục hoành là 3.

Câu 54: (Mã 123 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = mx - m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ tại ba điểm A, B, C phân biệt sao $AB = BC$

A. $m \in \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$

B. $m \in (-2; +\infty)$

C. $m \in \mathbb{R}$

D. $m \in (-\infty; 0) \cup [4; +\infty)$

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$$x^3 - 3x^2 + x + 2 = mx - m + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x - mx + m + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - m - 1 = 0 \end{cases} \text{ Để đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại ba điểm}$$

phân biệt thì phương trình $x^2 - 2x - m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1. Hay

$$\begin{cases} 1 + m + 1 > 0 \\ 1 - 2 - m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2. \text{ Với } m > -2 \text{ thì phương trình (1) có ba nghiệm phân}$$

biệt là $1, x_1, x_2$ (x_1, x_2 là nghiệm của $x^2 - 2x - m - 1 = 0$). Mà $\frac{x_1 + x_2}{2} = 1$ suy ra điểm có

hoành độ $x=1$ luôn là trung điểm của hai điểm còn lại. Nên luôn có 3 điểm A, B, C thỏa mãn $AB = BC$ Vậy $m > -2$.

Câu 55: (Mã 101 2019) (Mã đề 001) Cho hai hàm số $y = \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1}$ và $y = |x+2| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $[2; +\infty)$.

B. $(-\infty; 2)$.

C. $(2; +\infty)$.

D. $(-\infty; 2]$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét phương trình } \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} = |x+2| - x + m$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} - |x+2| + x = m \quad (1)$$

Hàm số

$$p(x) = \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} - |x+2| + x = \begin{cases} \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} - 2 & \text{khi } x \geq -2 \\ \frac{x-3}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + 2x + 2 & \text{khi } x < -2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } p'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in (-2; +\infty) \setminus \{-1; 0; 1; 2\} \\ \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + 2 > 0, \forall x < -2 \end{cases}$$

nên hàm số $y = p(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$.

Mặt khác ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$:

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$		+	+	+	+	+	+
$g(x)$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	2

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có 4 nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = p(x)$ tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m \geq 2$.

- Câu 56:** (Mã 103 2019) Cho hai hàm số $y = \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3}$ và $y = |x+2| - x - m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $(C_1), (C_2)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là
- A. $(-2; +\infty)$. B. $(-\infty; -2]$. C. $[-2; +\infty)$. D. $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} = |x+2| - x - m \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} - |x+2| + x = -m \quad (1)$$

$$\text{Xét } f(x) = \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} - |x+2| + x, x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-3; -2; -1; 0\}$$

Ta có $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} - 2, x \in (-2; +\infty) \cup D = D_1 \\ \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} + 2x + 2, x \in (-\infty; -2) \cup D = D_2 \end{cases}$

Có $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2}, \forall x \in D_1 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + 2, \forall x \in D_2 \end{cases}$

Dễ thấy $f'(x) > 0, \forall x \in D_1 \cup D_2$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	-2	1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	+	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	2

Hai đồ thị cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 4 nghiệm phân biệt, từ bảng biến thiên ta có: $-m \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -2$.

- Câu 57:** (Mã 102 2019) Cho hai hàm số $y = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+3}{x+4}$ và $y = |x+1| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt là
- A. $(-\infty; 3]$. B. $(-\infty; 3)$. C. $[3; +\infty)$. D. $(3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x \neq -1; x \neq -2; x \neq -3$ và $x \neq -4$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+3}{x+4} = |x+1| - x + m$$

$$\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{x+2}\right) + \left(1 - \frac{1}{x+3}\right) + \left(1 - \frac{1}{x+4}\right) = |x+1| - x + m$$

$$\Leftrightarrow x - |x+1| + 4 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4}\right) = m$$

Đặt tập $D_1 = (-1; +\infty)$ và $D_2 = (-\infty; -4) \cup (-4; -3) \cup (-3; -2) \cup (-2; -1)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} \right) = m, & \text{khi } x \in D_1 \\ 2x+5 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} \right) = m, & \text{khi } x \in D_2 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } f(x) = \begin{cases} 3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} \right), & \text{khi } x \in D_1 \\ 2x+5 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} \right), & \text{khi } x \in D_2 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} \right) > 0, & \text{khi } x \in D_1 \\ 2 + \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{1}{(x+4)^2} \right) > 0, & \text{khi } x \in D_2 \end{cases}.$$

Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{nên ta có bảng biến thiên}$$

x	$-\infty$		-4		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+		+		+		+		+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	3

Do đó để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $m \geq 3 \Rightarrow m \in [3; +\infty)$.

- Câu 58:** (Mã 104 2019) Cho hai hàm số $y = \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}$ và $y = |x+1| - x - m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là
- A. $(-\infty; -3)$. B. $[-3; +\infty)$. C. $(-\infty; -3]$. D. $(-3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ

$$\frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} = |x+1| - x - m \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} - |x+1| + x = -m \quad (1)$$

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của

$$F(x) = \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} - |x+1| + x = \begin{cases} \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} - 1, & x > -1 \\ \frac{x-2}{x-1} + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} + 2x + 1, & x < -1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}, & x \in (-1; +\infty) \setminus \{0; 1\} \\ \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + 2, & x \in (-\infty; -1) \setminus \{-2\} \end{cases}$$

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 3$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} F(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -2^-} F(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -1^+} F(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow -1^-} F(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = +\infty$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$
$F'(x)$	+	+	+	+	+	
$F(x)$	3 $\nearrow$ $+\infty$	$+\infty$ $\nearrow$ $+\infty$	$+\infty$ $\nearrow$ $+\infty$	$+\infty$ $\nearrow$ $+\infty$	$+\infty$ $\nearrow$ $+\infty$	$+\infty$
		$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	

Để phương trình có 4 nghiệm thì $-m \leq 3 \Leftrightarrow m \geq -3$.

Câu 59: (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$			-1		$+\infty$	
		$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x) + 3 = 0$ là

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 8.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sin x$. Do $x \in [-\pi; 2\pi]$ nên $t \in [-1; 1]$.

Khi đó ta có phương trình $2f(t) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -\frac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t) = -\frac{3}{2}$ có 2 nghiệm $t = a \in (-1; 0)$ và $t = b \in (0; 1)$.

Trường hợp 1: $t = a \in (-1; 0)$

Ứng với mỗi giá trị $t \in (-1; 0)$ thì phương trình có 4 nghiệm $-\pi < x_1 < x_2 < 0 < \pi < x_3 < x_4 < 2\pi$.

Trường hợp 2: $t = b \in (0; 1)$

Ứng với mỗi giá trị $t \in (0; 1)$ thì phương trình có 4 nghiệm $0 < x_5 < x_6 < \pi$.

Hiển nhiên cả 6 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; 2\pi]$

Câu 60: (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$			2		2		0		
	$-\infty$								$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x) = 1$ là

A. 7.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sin x$, $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$

Khi đó phương trình $f(\sin x) = 1$ trở thành $f(t) = 1, \forall t \in [-1; 1]$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = 1$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(t) = 1 \Rightarrow \begin{cases} t = a \in (-1; 0) \\ t = b \in (0; 1) \end{cases}$.

Trường hợp 1: $t = a \in (-1; 0)$

Ứng với mỗi giá trị $t \in (-1; 0)$ thì phương trình $\sin x = t$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$\pi < x_1 < x_2 < 2\pi.$$

Trường hợp 2: $t = b \in (0; 1)$

Ứng với mỗi giá trị $t \in (0; 1)$ thì phương trình có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn

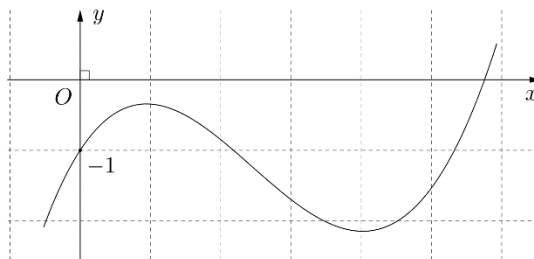
$$0 < x_3 < x_4 < \pi; 2\pi < x_5 < \frac{5\pi}{2};$$

Hiển nhiên cả 5 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Câu 61: (Mã 101 - 2020 Lần 1) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x^3 f(x)) + 1 = 0$ là



A. 8.

B. 5.

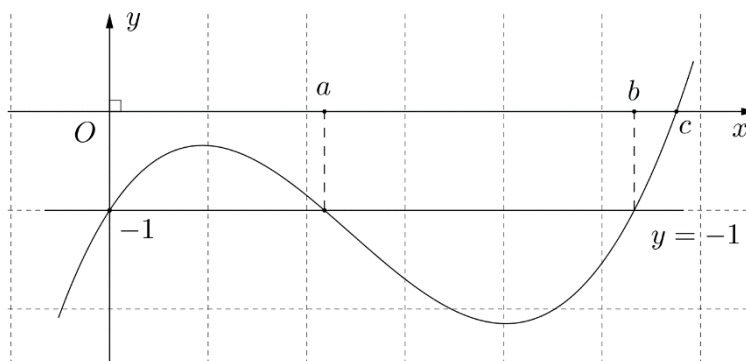
C. 6.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$f(x^3 f(x)) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x^3 f(x)) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 f(x) = 0 \\ x^3 f(x) = a > 0 \\ x^3 f(x) = b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = \frac{a}{x^3} \text{ (do } x \neq 0) \\ f(x) = \frac{b}{x^3} \text{ (do } x \neq 0) \end{cases}$$



☐ $f(x) = 0$ có một nghiệm dương $x = c$.

☐ Xét phương trình $f(x) = \frac{k}{x^3}$ với $x \neq 0, k > 0$.

Đặt $g(x) = f(x) - \frac{k}{x^3}$.

$g'(x) = f'(x) + \frac{3k}{x^4}$.

☐ Với $x > c$, nhìn hình ta thấy $f'(x) > 0 \Rightarrow g'(x) = f'(x) + \frac{3k}{x^4} > 0$

$\Rightarrow g(x) = 0$ có tối đa một nghiệm.

Mặt khác $\begin{cases} g(c) < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$ và $g(x)$ liên tục trên $(c; +\infty)$

$\Rightarrow g(x) = 0$ có duy nhất nghiệm trên $(c; +\infty)$.

□ Với $0 < x < c$ thì $f(x) < 0 < \frac{k}{x^3} \Rightarrow g(x) = 0$ vô nghiệm.

□ Với $x < 0$, nhìn hình ta ta thấy $f'(x) > 0 \Rightarrow g'(x) = f'(x) + \frac{3k}{x^4} > 0$

$\Rightarrow g(x) = 0$ có tối đa một nghiệm.

Mặt khác $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) > 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$ và $g(x)$ liên tục trên $(-\infty; 0)$.

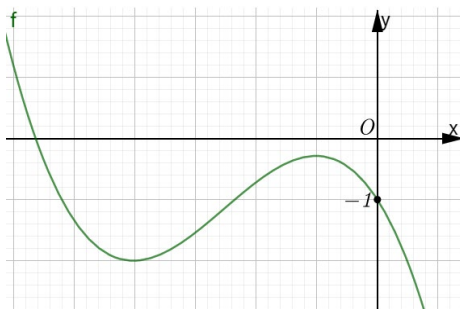
$\Rightarrow g(x) = 0$ có duy nhất nghiệm trên $(-\infty; 0)$.

Tóm lại $g(x) = 0$ có đúng hai nghiệm trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Suy ra hai phương trình $f(x) = \frac{a}{x^3}$, $f(x) = \frac{b}{x^3}$ có 4 nghiệm phân biệt khác 0 và khác c .

Vậy phương trình $f(x^3 f(x)) + 1 = 0$ có đúng 6 nghiệm.

Câu 62: (Mã 102 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x^3 f(x)) + 1 = 0$ là

A. 6.

B. 4.

C. 5.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Dựa vào đồ thị, ta thấy } f(x^3 f(x)) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x^3 f(x)) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 f(x) = a \in (-6; -5) & (1) \\ x^3 f(x) = b \in (-3; -2) & (2) \\ x^3 f(x) = 0 & (3) \end{cases}$$

$$+ \text{ Phương trình (3) tương đương } \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = x_1, (-6 < x_1 < a < -5) \end{cases}$$

+ Các hàm số $g(x) = \frac{a}{x^3}$ và $h(x) = \frac{b}{x^3}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$, và nhận xét rằng

$x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (1) nên:

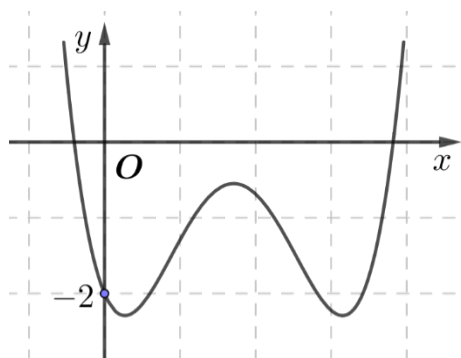
$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = h(x) \end{cases}.$$

+ Trên khoảng $(-\infty; 0)$, ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = +\infty \end{cases}$ nên các phương trình $f(x) = g(x)$ và $f(x) = h(x)$ có nghiệm duy nhất.

+ Trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty \end{cases}$ nên các phương trình $f(x) = g(x)$ và $f(x) = h(x)$ có nghiệm duy nhất.

Do đó, phương trình $f(x^3 f(x)) + 1 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Câu 63: (Mã 103 - 2020 Lần 1) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(x^2 f(x)) + 2 = 0$ là

A. 8.

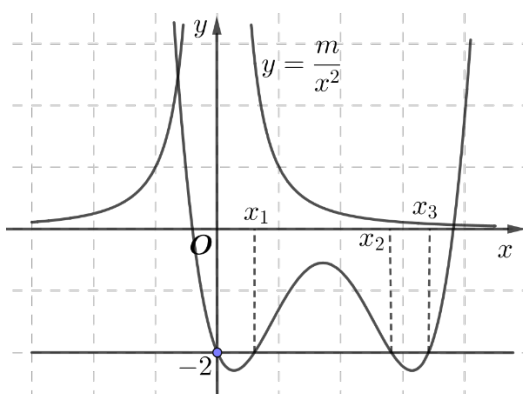
B. 12.

C. 6.

D. 9.

Lời giải

Chọn D



$$f(x^2 f(x)) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 f(x) = 0 \\ x^2 f(x) = a(1) \\ x^2 f(x) = b(2) \\ x^2 f(x) = c(3) \end{cases} \text{ với } 0 < a < b < c.$$

Xét phương trình $f(x) = \frac{m}{x^2} (1) \quad (m > 0).$

Gọi α, β là hoành độ giao điểm của $(C): y = f(x)$ và Ox ; $\alpha < 0 < \beta$.

$$(1) \Leftrightarrow f(x) - \frac{m}{x^2} = 0. \text{ Đặt } g(x) = f(x) - \frac{m}{x^2}$$

$$\text{Đạo hàm } g'(x) = f'(x) + \frac{2m}{x^3}.$$

$$\text{Trường hợp 1: } x < \alpha; f'(x) < 0; \frac{2m}{x^3} < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty, g(\alpha) = -\frac{m}{\alpha^2} < 0$. Phương trình $g(x) = 0$ có một nghiệm thuộc $(-\infty; \alpha)$.

Trường hợp 2: $\alpha < x < \beta$

$$f(x) < 0, \frac{m}{x^2} > 0 \text{ suy ra } g(x) < 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

$$\text{Trường hợp 3: } x > \beta; f'(x) > 0; \frac{2m}{x^3} > 0 \Rightarrow g'(x) > 0$$

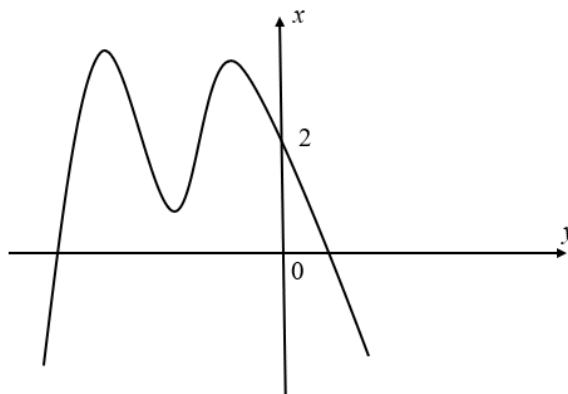
Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty, g(\beta) = -\frac{m}{\beta^2} < 0$. Phương trình $g(x) = 0$ có một nghiệm thuộc $(\beta; +\infty)$.

Vậy phương trình $f(x) = \frac{m}{x^2}$ có hai nghiệm $\forall m > 0$.

Ta có: $x^2 f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee f(x) = 0$: có ba nghiệm.

Vậy phương trình (1) có 9 nghiệm.

Câu 64: (Mã 104 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f(x^2 f(x)) = 2$ là:

A. 6.

B. 12.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } f(x^2 f(x)) = 2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 f(x) = 0 \\ x^2 f(x) = a < 0 \\ x^2 f(x) = b < 0 \\ x^2 f(x) = c < 0 \end{cases}.$$

Xét phương trình: $x^2 f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$ mà $f(x) = 0$ có hai nghiệm $\Rightarrow x^2 \cdot f(x) = 0$ có ba nghiệm.

Xét phương trình: $x^2 f(x) = a < 0$

Do $x^2 \geq 0$; $x = 0$ không là nghiệm của phương trình $\Rightarrow f(x) = \frac{a}{x^2} < 0$

$$\text{Xét } g(x) = \frac{a}{x^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{-2a}{x^3}$$

Bảng biến thiên:

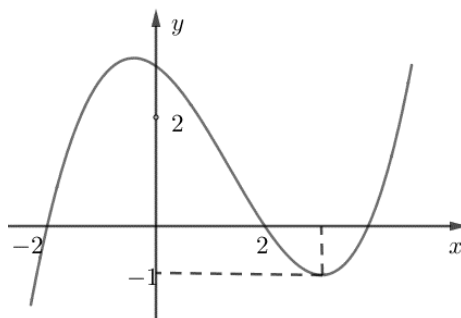
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		—	+
$g(x)$	0		0

Từ bảng biến thiên với $f(x) < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{a}{x^2}$ có 2 nghiệm.

Tương tự: $x^2 f(x) = b$ và $x^2 f(x) = c$ ($b, c < 0$) mỗi phương trình cũng có hai nghiệm.

Vậy số nghiệm của phương trình $f(x^2 f(x)) = 2$ là 9 nghiệm.

Câu 65: (Mã 103 2019) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{3}{2}$ là



A. 7.

B. 3.

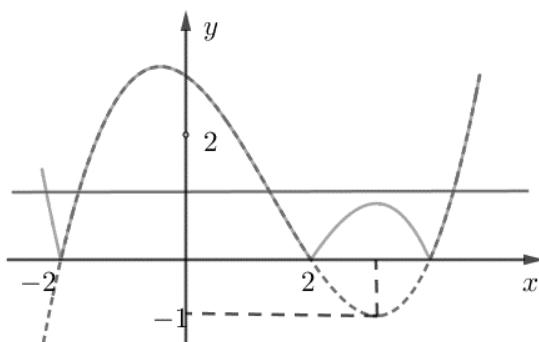
C. 8.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = x^3 - 3x$ ta có phương trình $|f(t)| = \frac{3}{2}$ (*).



Từ đồ thị hàm số $y = |f(t)|$ và đường thẳng $y = \frac{3}{2}$ ta suy ra phương trình (*) có 4 nghiệm

$$t_1 < -2 < t_2 < 0 < t_3 < 2 < t_4$$

Xét hàm $t = x^3 - 3x$. Ta có $t' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
t'		+	-	+	
t	$-\infty$	2	0	-2	$+\infty$

Với $t_1 < -2$ phương trình: $t_1 = x^3 - 3x$ cho ta 1 nghiệm.

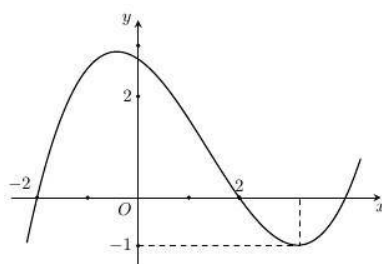
Với $-2 < t_2 < 0$ phương trình: $t_2 = x^3 - 3x$ cho ta 3 nghiệm.

Với $0 < t_3 < 2$ phương trình: $t_3 = x^3 - 3x$ cho ta 3 nghiệm.

Với $2 < t_4$ phương trình: $t_4 = x^3 - 3x$ cho ta 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có tất cả 8 nghiệm. **Chọn C**

Câu 66: (Mã 104 2019) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{2}{3}$ là



A. 10

B. 3

C. 9

D. 6

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = g(x) = x^3 - 3x$ (1)

Ta có $g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có với $t \in (-2; 2)$ cho ta 3 giá trị x thỏa mãn (1)

$t \in \{-2; 2\}$ cho ta 2 giá trị x thỏa mãn (1)

$t \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ cho ta 1 giá trị x thỏa mãn (1).

Phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{2}{3}$ (2) trở thành

$$|f(t)| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = \frac{2}{3} \\ f(t) = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

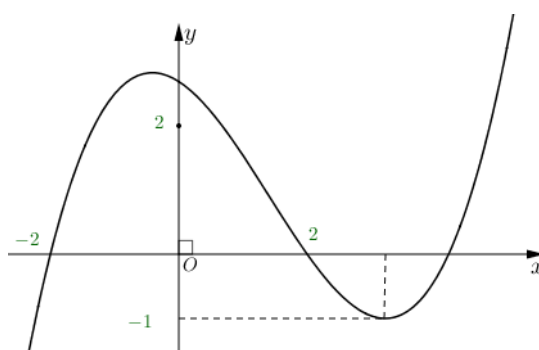
Dựa vào đồ thị ta có:

+ Phương trình $f(t) = \frac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $-2 < t_1 < t_2 < 2 < t_3 \Rightarrow$ có 7 nghiệm của phương trình (2).

+ Phương trình $f(t) = -\frac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $t_4 < -2 < 2 < t_5 < t_6 \Rightarrow$ có 3 nghiệm của phương trình (2).

Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm.

Câu 67: (Mã 101 2019) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{4}{3}$ là



A. 7.

B. 4.

C. 3.

D. 8.

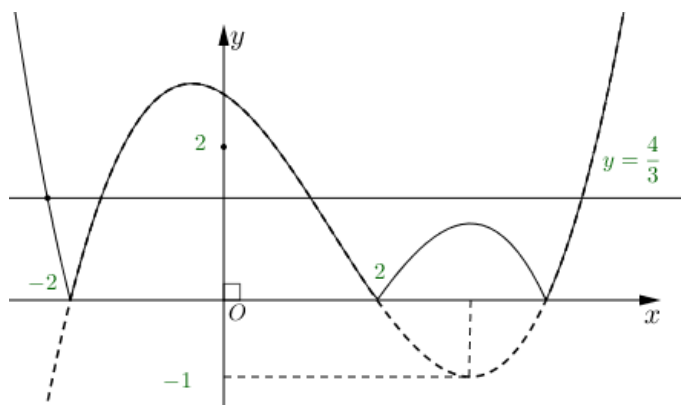
Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x^3 - 3x \Rightarrow t' = 3x^2 - 3$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

Khi đó $|f(t)| = \frac{4}{3}$ (1)



Dựa vào đồ thị hàm số $|f(t)|$ ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $t_1 < -2$, $-2 < t_2 < 0$, $0 < t_3 < 2$, $t_4 > 2$.

Mỗi nghiệm t của phương trình (1), ta thay vào phương trình $t = x^3 - 3x$ để tìm nghiệm x .

Khi đó

+ $t_1 < -2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.

+ $-2 < t_2 < 0 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.

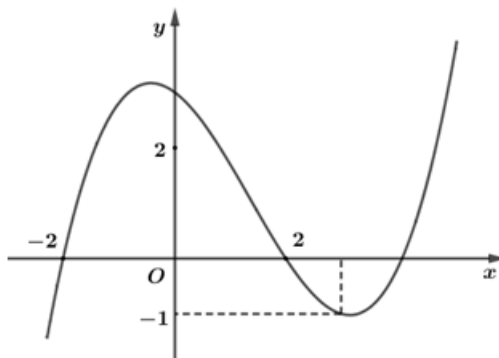
+ $0 < t_3 < 2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.

+ $t_4 > 2 \Rightarrow$ phương trình $t = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{4}{3}$ có 8 nghiệm.

Câu 68: (Mã 102 2019) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của

phương trình $|f(x^3 - 3x)| = \frac{1}{2}$



A. 6.

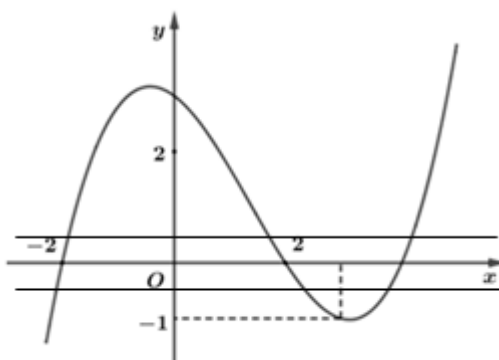
B. 10.

C. 12.

D. 3.

Lời giải

Chọn B



$$\text{Ta có } |f(x^3 - 3x)| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x^3 - 3x) = \frac{1}{2} & (1) \\ f(x^3 - 3x) = -\frac{1}{2} & (2) \end{cases}$$

$$+) (1) \Leftrightarrow f(x^3 - 3x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = \alpha_1 (-2 < \alpha_1 < 0) \\ x^3 - 3x = \alpha_2 (0 < \alpha_2 < 2) \\ x^3 - 3x = \alpha_3 (\alpha_3 > 2) \end{cases}$$

$$+) (2) \Leftrightarrow f(x^3 - 3x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x = \alpha_4 (x_4 < -2) \\ x^3 - 3x = \alpha_5 (\alpha_5 > 2) \\ x^3 - 3x = \alpha_6 (\alpha_6 > 2) \end{cases}$$

Xét hàm số $y = x^3 - 3x$, $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 3x^2 - 3$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

Phương trình: $x^3 - 3x = \alpha_1$ có 3 nghiệm.

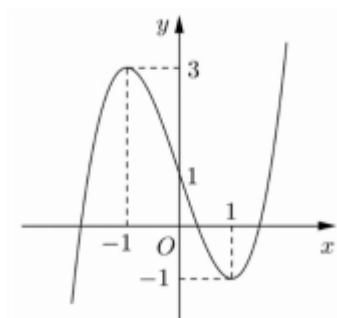
Phương trình: $x^3 - 3x = \alpha_2$ có 3 nghiệm.

Mỗi phương trình $x^3 - 3x = \alpha_3, x^3 - 3x = \alpha_4, x^3 - 3x = \alpha_5, x^3 - 3x = \alpha_6$ đều có một nghiệm

Từ đó suy ra phương trình $|f(x^2 - 3x)| = \frac{1}{2}$ có 10 nghiệm.

Câu 69: (Đề Tham Khảo 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.

Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là



A. $(-1; 3)$

B. $[-1; 1)$

C. $[-1; 3)$

D. $(-1; 1)$

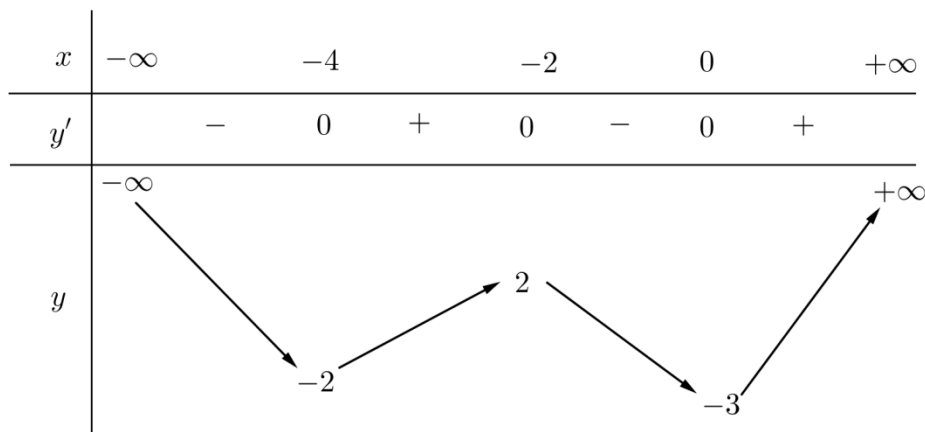
Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sin x \Rightarrow \forall x \in (0; \pi) \Rightarrow t \in (0; 1]$

Vậy phương trình trở thành $f(t) = m$. Dựa vào đồ thị hàm số suy ra $m \in [-1; 1)$.

Câu 70: (Mã 102 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$?

A. 25.

B. 30.

C. 29.

D. 24.

Lời giải

Chọn B

Ta đặt: $g(x) = f(x^2 - 4x)$.

$$g'(x) = (2x - 4)f'(x^2 - 4x)$$

$$= 2(x - 2)(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 2)(x^2 - 4x) \text{ (dựa vào bảng biến thiên)}$$

$$= 2(x - 2)^3(x^2 - 4x + 2)x(x - 4).$$

Mặt khác:

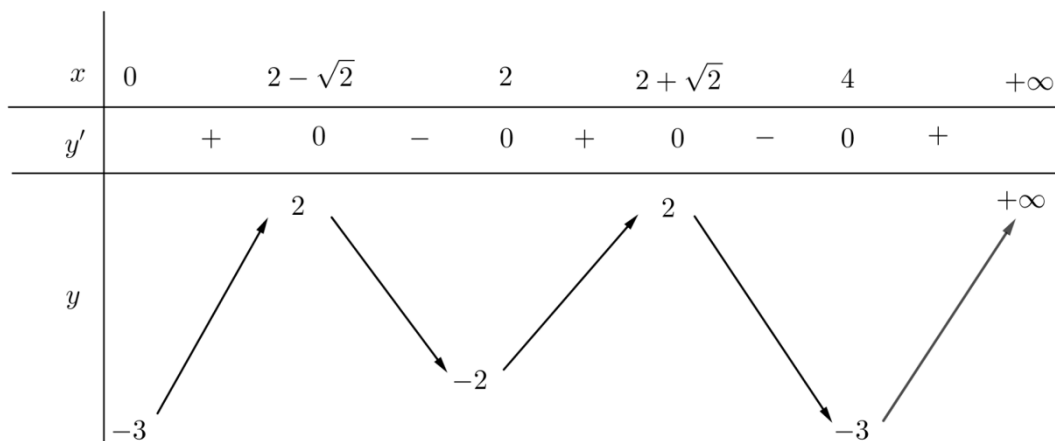
$$g(0) = f(0) = -3;$$

$$g(2 - \sqrt{2}) = g(2 + \sqrt{2}) = f(-2) = 2;$$

$$g(2) = f(-4) = -2;$$

$$g(4) = f(0) = -3.$$

Ta có bảng biến thiên:

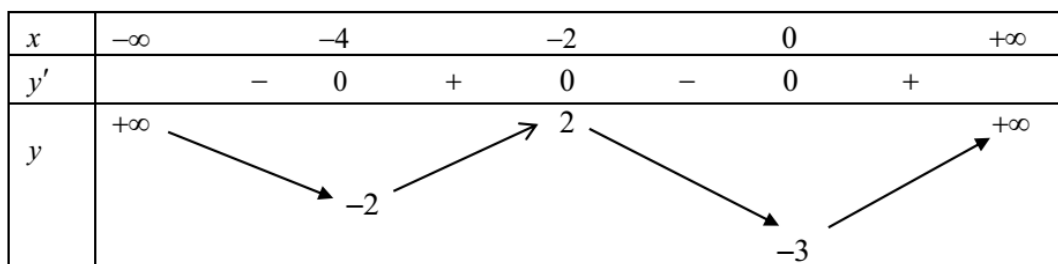


Từ bảng biến thiên ta được: yêu cầu bài toán tương đương $-3 < \frac{m}{6} \leq 2$

$$\Leftrightarrow -18 < m \leq 12.$$

Vậy có tất cả 30 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 71: (Mã 103 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$?

A. 15.

B. 12.

C. 14.

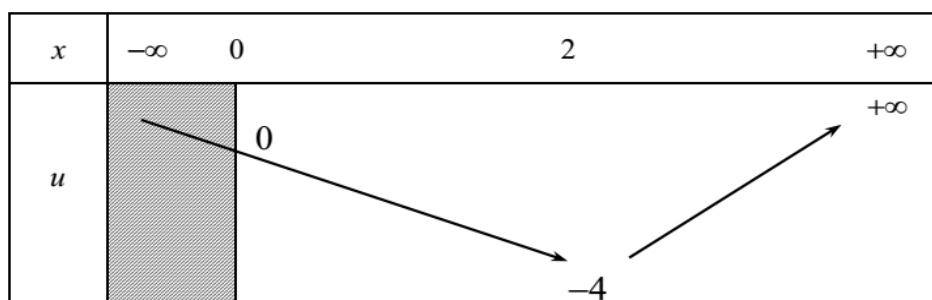
D. 13.

Lời giải

Chọn A

Đặt $u = x^2 - 4x$ (1)

Ta có BBT sau:



Ta thấy:

+ Với $u < -4$, phương trình (1) vô nghiệm.

+ Với $u = -4$, phương trình (1) có một nghiệm $x = 2 > 0$.

+ Với $-4 < u < 0$, phương trình (1) có hai nghiệm $x > 0$.

+ Với $u \geq 0$, phương trình (1) có một nghiệm $x > 0$

Khi đó $3f(x^2 - 4x) = m \Rightarrow f(u) = \frac{m}{3}$ (2), ta thấy:

+ Nếu $\frac{m}{3} = -3 \Leftrightarrow m = -9$, phương trình (2) có một nghiệm $u = 0$ nên phương trình đã cho có một nghiệm $x > 0$.

+ Nếu $-3 < \frac{m}{3} < -2 \Leftrightarrow -9 < m < -6$, phương trình (2) có một nghiệm $u > 0$ và một nghiệm $u \in (-2; 0)$ nên phương trình đã cho có ba nghiệm $x > 0$.

+ Nếu $\frac{m}{3} = -2 \Leftrightarrow m = -6$, phương trình (2) có một nghiệm $u = -4$, một nghiệm $u \in (-2; 0)$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có bốn nghiệm $x > 0$.

+ Nếu $-2 < \frac{m}{3} < 2 \Leftrightarrow -6 < m < 6$, phương trình (2) có một nghiệm $u < -4$, hai nghiệm $u \in (-4; 0)$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có năm nghiệm $x > 0$.

+ Nếu $\frac{m}{3} = 2 \Leftrightarrow m = 6$, phương trình (2) có một nghiệm $u < -4$, một nghiệm $u = -2$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có ba nghiệm $x > 0$.

+ Nếu $\frac{m}{3} > 2 \Leftrightarrow m > 6$, phương trình (2) có một nghiệm $u < -4$ và một nghiệm $u > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm $x > 0$.

Vậy $-9 < m \leq 6 \Rightarrow$ có 15 giá trị m nguyên thỏa ycbt.

Câu 72: (Mã 101 – 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$							

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $5f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$

A. 24.

B. 21.

C. 25.

D. 20.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = x^2 - 4x$. Ta có $t' = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Bảng biến thiên

x	0	2	$+\infty$
t'		- 0 +	
t	0	$\searrow$ -4	$\nearrow$ $+\infty$

Với $t = x^2 - 4x$.

x	0	2	$+\infty$
t	0	$\searrow$ -2	$\searrow$ -4
		$\nearrow$ -2	$\nearrow$ 0
			$\nearrow$ $+\infty$
$f(t)$	-3	$\nearrow$ 2	$\searrow$ -2
		$\nearrow$ 2	$\searrow$ -3
			$\nearrow$ $+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $-3 < \frac{m}{5} \leq 2 \Leftrightarrow -15 < m \leq 10$. Vì m nguyên nên $m \in \{-14; -13; \dots; 10\}$.

Do đó có 25 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 73: (Mã 104 - 2020 Lần 2) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$?

A. 16.

B. 19.

C. 20.

D. 17.

Lời giải

Chọn C

Ta có $4f(x^2 - 4x) = m \Leftrightarrow f(x^2 - 4x) = \frac{m}{4}$

Đặt $t = x^2 - 4x \Rightarrow t' = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Vì $x \in (0; +\infty) \Rightarrow t \geq -4$

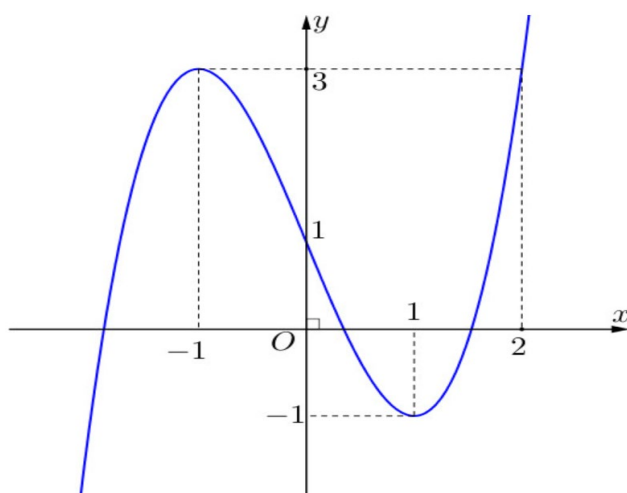
Ta có $f(t) = \frac{m}{4}$

Phương trình đã cho có ít nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$

$$\Rightarrow -3 < \frac{m}{4} \leq 2 \Leftrightarrow -12 < m \leq 8 \text{ mà } m \text{ nguyên nên } m \in \{-11; -10; \dots; 0; 1; \dots; 8\}$$

Vậy có 20 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 74: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình



bên.

Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 1$ là

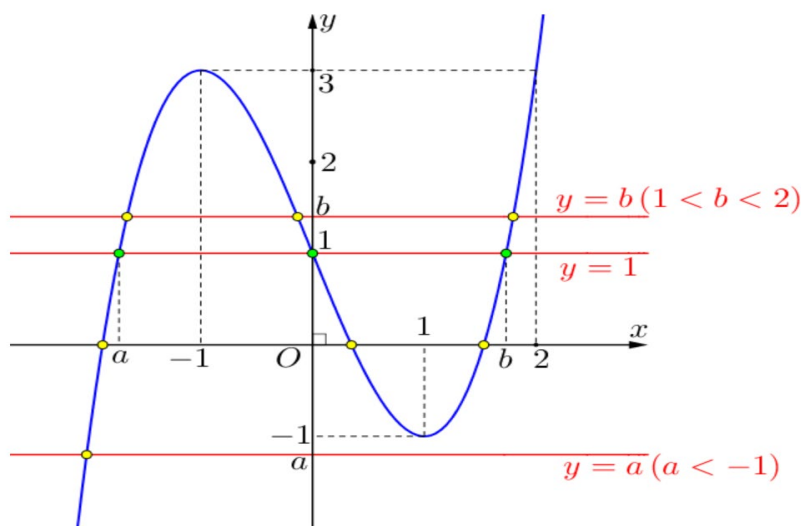
A. 9.

B. 3.

C. 6

D. 7!

Lời giải



Căn cứ vào đồ thị hàm số đã cho ta thấy:

$$f(f(x)) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \ (a < -1) \\ f(x) = 0 \\ f(x) = b \ (1 < b < 2) \end{cases}.$$

Căn cứ vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có:

+ Với $a < -1$, phương trình $f(x) = a$ có 1 nghiệm.

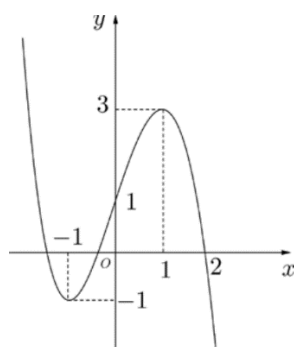
+ Phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

+ Với $1 < b < 2$, phương trình $f(x) = b$ có ba nghiệm thực phân biệt.

Các nghiệm của các phương trình $f(x) = a$; $f(x) = 0$; $f(x) = b$ là các nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm thực phân biệt.

Câu 75: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 1$ là



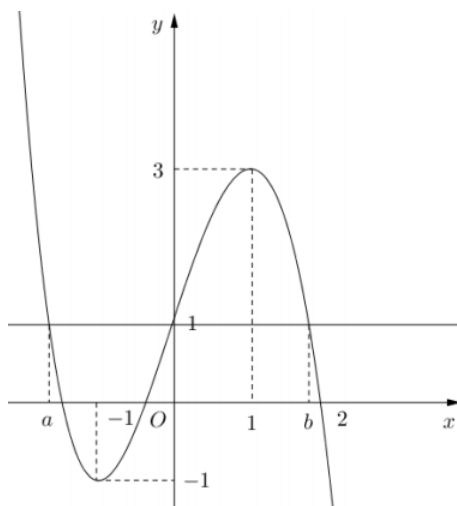
A. 9.

B. 7.

C. 3.

D. 6.

Lời giải



Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có: $f(f(x)) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \ (a < -1) \\ f(x) = 1 \\ f(x) = b \ (1 < b < 2) \end{cases}.$

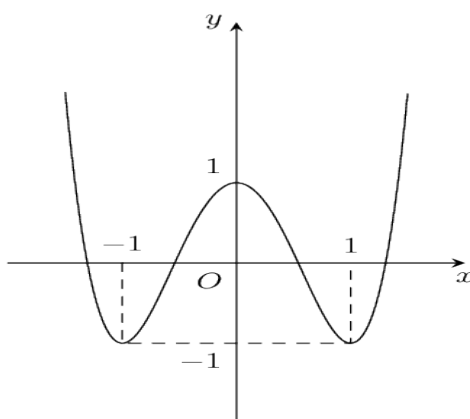
Phương trình $f(x) = a \ (a < -1)$ có 1 nghiệm thực.

Phương trình $f(x) = 1$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

Phương trình $f(x) = b \ (1 < b < 2)$ có 3 nghiệm thực phân biệt.

Các nghiệm trên phân biệt nên phương trình $f(f(x))=1$ có 7 nghiệm thực phân biệt.

Câu 76: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x))=0$ là:



A. 4.

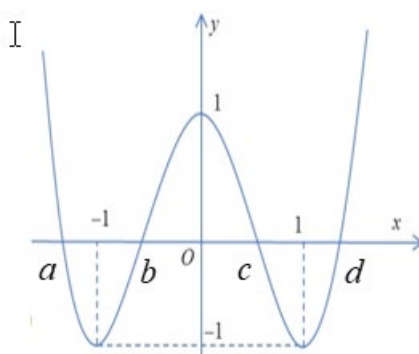
B. 10.

C. 12.

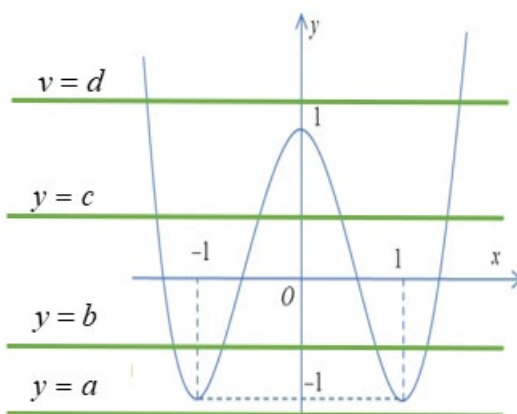
D. 8.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có:



$$f(f(x))=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=a, & a < -1 \\ f(x)=b, & -1 < b < 0 \\ f(x)=c, & 0 < c < 1 \\ f(x)=d, & 1 < d \end{cases}$$



Phương trình $f(x) = a$ vô nghiệm (vì đường thẳng $y = a$ không có điểm chung với đồ thị hàm số $f(x)$).

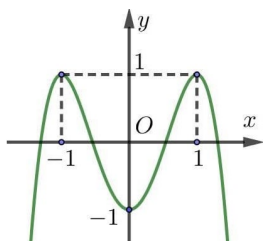
Phương trình $f(x) = b$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x) = c$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x) = d$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm.

Câu 77: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x)) = 0$ là



A. 12.

B. 10.

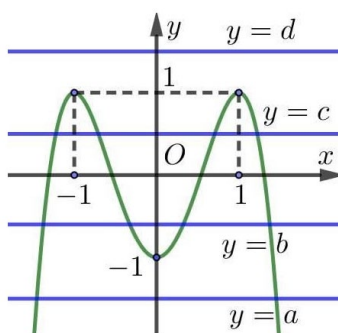
C. 8.

D. 4.

Lời giải

$$\text{Ta có } f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, & a < -1 \\ f(x) = b, & -1 < b < 0 \\ f(x) = c, & 0 < c < 1 \\ f(x) = d, & d > 1 \end{cases}$$

Từ giả thiết ta có:



Vậy số nghiệm của phương trình $f(f(x)) = 0$ là $2 + 4 + 4 + 0 = 10$ nghiệm.

Câu 78: Câu 50 (101-2023) Cho hàm số $f(x) = x^4 - 32x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3; 2)$ của phương trình $f(x^2 + 2x + 3) = m$ bằng -4 ?

A. 145.

B. 142.

C. 144.

D. 143.

Lời giải

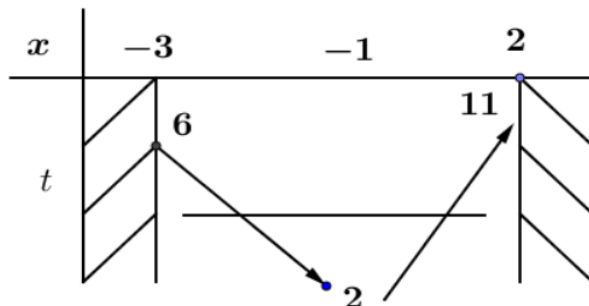
Phương trình $x^2 + 2x + 3 = a$ ($a \in \mathbb{R}$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì ta có: $x_1 + x_2 = -2$

Phương trình $f(x^2 + 2x + 3) = m(1)$ có tổng nghiệm bằng -4

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm xảy ra ở trường hợp: 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 (2)

(do khi đó: $(x_1 + x_2) + (x_3 + x_4) = -2 + (-2) = -4$)

Đặt $x^2 + 2x + 3 = t$



Điều kiện (2) $\Leftrightarrow$ Tìm m để phương trình $f(t) = m$ có 2 nghiệm $2 < t < 6$ (2)

Xét $f(t) = t^4 - 32t^2 + 4$

$$\Rightarrow f'(t) = 4t^3 - 64t \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \pm 4 \end{cases}$$

t	2	4	6
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	-108	-252	148

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -252 < m < -108 \Rightarrow 143$ số.

Câu 79: **Câu 50 (102-2023)** Cho hàm số $f(x) = x^4 - 18x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-4; 1)$ của phương trình $f(x^2 + 4x + 5) = m$ bằng -8 ?

A. 63.

B. 65.

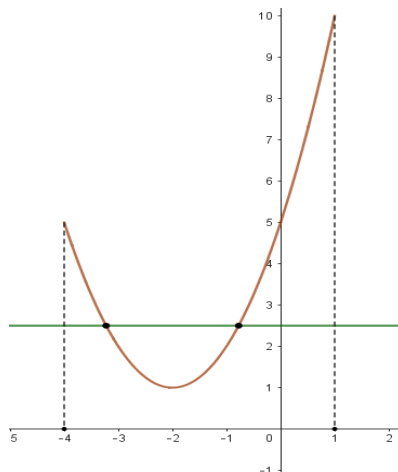
C. 62.

D. 64.

Lời giải

Đặt $t = x^2 + 4x + 5$, vì $x \in (-4; 1) \Rightarrow t \in (1; 10)$.

Nhận xét: với $1 < t < 5$ ta suy ra có 2 giá trị x có tổng bằng -4 (vì $x_1 + x_2 = -4$).



Yêu cầu bài toán tương đương $f(t) = m$ có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(1; 10)$

x	1	3	10
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	-13	-77	8204

Nhận xét: $f(1) = f(\sqrt{17})$ và phương trình $f(t) = m$ có tối đa 2 nghiệm $t \in (1; 10)$.

TH1: Nếu $f(t) = m$ chỉ có 1 nghiệm $t \in (1; 10)$ thì tổng các nghiệm của phương trình $x^2 + 4x + 5 = t_0$ sẽ là -4 .

TH2: Nếu $f(t) = m$ có 2 nghiệm phân biệt $t_1; t_2 \in (1; 10) \Rightarrow t_1; t_2 \in (1; \sqrt{17})$

Khi đó mỗi phương trình $\begin{cases} x^2 + 4x + 5 = t_1 \\ x^2 + 4x + 5 = t_2 \end{cases}$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-4; 1)$. Từ đó suy ra tổng các nghiệm là -8 .

Vậy $m \in (-77; -13)$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-76; \dots; -14\} \Rightarrow$ có 63 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 80: Câu 49 (103-2023) Cho hàm số $f(x) = x^4 - 32x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-4; 1)$ của phương trình $f(x^2 + 4x + 5) = m$ bằng -8 ?

A. 81.

B. 82.

C. 80.

D. 79.

Lời giải

Đặt $t = x^2 + 4x + 5$, với $x \in (-4; 1) \Rightarrow x^2 + 4x + 5 - t = 0$ (*).

Ta có: $t' = 2x + 4$.

$t' = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Bảng biến thiên:

x	-4	-2	1
t'	-	0	+
t	5	1	10

Do đó, với $t < 1$, phương trình (*) vô nghiệm.

Với $t = 1$ hoặc $5 \leq t < 10$, phương trình (*) có nghiệm duy nhất.

Với $1 < t < 5$, phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 + x_2 = -4$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(t) = m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(1; 5)$.

Xét hàm số $f(t) = t^4 - 32t^2 + 4$ với $t \in (1; 5)$.

$$f'(t) = 4t^3 - 64t.$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ (Do } t \in (1; 5) \text{)}.$$

Bảng biến thiên:

x	1	4	5
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	-27	-252	-171

Dựa vào bảng biến thiên, ta có yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -252 < m < -171$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-251; -250; \dots; -172\}$.

Vậy có 80 giá trị cần tìm.

Câu 81: Câu 50 (104-2023) Cho hàm số $f(x) = x^4 - 18x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3; 2)$ của phương trình $f(x^2 + 2x + 3) = m$ bằng -4

A. 24.

B. 23.

C. 26.

D. 25.

Lời giải

$$f(x) = x^4 - 18x^2 + 4, \text{ TXĐ } D = \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 4x^3 - 36x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 36x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \end{cases}$$

Đặt $g(x) = f(x^2 + 2x + 3)$, TXĐ $D = \mathbb{R}$.

$$g'(x) = (2x + 2)f'(x^2 + 2x + 3)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ f'(x^2 + 2x + 3) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x + 3 = 0 \\ x^2 + 2x + 3 = 3 \\ x^2 + 2x + 3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	x_1	-2	x_2	-1	x_3	0	x_4	2	$+\infty$
$f'(x)$			-	0	+	0	-	0	+		
$f(x)$	$-\infty$	652		-77		-52		-77		12467	

$$g(-1) = f(2) = -52$$

$$g(-2) = f(3) = -77; \quad g(0) = f(3) = -77; \quad g(-3) = f(6) = 652; \quad g(2) = f(11) = 12467$$

Ta thấy hàm số $g(x)$ nhận đường thẳng $x = -1$ làm trục đối xứng.

Do đó tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3; 2)$ của phương trình $f(x^2 + 2x + 3) = m$ bằng -4 khi nó có bốn nghiệm phân biệt.

Yêu cầu bài toán tương đương với $-77 < m < -52$.

Kết luận: Vậy có 24 giá trị m nguyên thỏa mãn đề bài.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

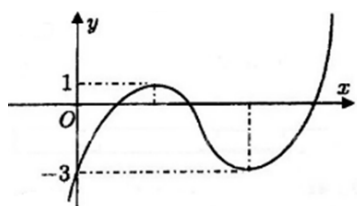
BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ THÔNG QUA ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN

Nghiệm của phương trình $af'(x) + b = 0$ là số giao điểm của đường thẳng $y = \frac{-b}{a}$ với đồ thị hàm số $y = f(x)$

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.

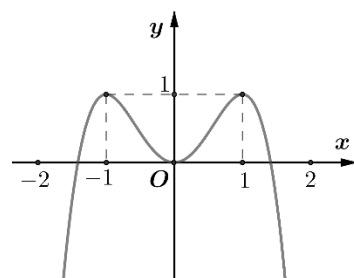


Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 2$ là

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 6.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $1 - 2.f(x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- A. 4 B. 3
C. Vô nghiệm D. 2



Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau đây.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		3		$-\infty$

Hỏi phương trình $2.f(x) - 5 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

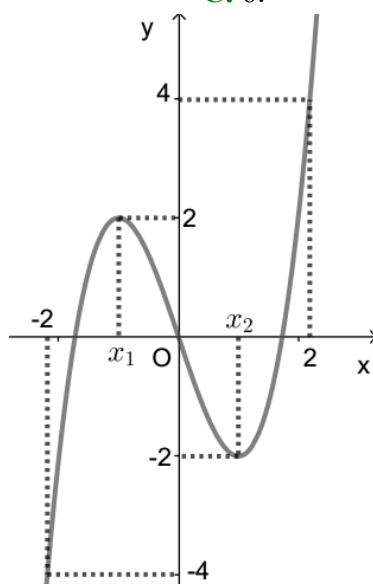
x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			4		-2		$+\infty$
	$-\infty$						

Số nghiệm của phương trình $f(x) - 3 = 0$ là

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 1$ trên đoạn $[-2; 2]$.

- A. 3. B. 5. C. 6. D. 4.



DẠNG 2. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ THÔNG QUA HÀM SỐ CHO TRƯỚC

Cho hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

Bước 1. Giải phương trình $f(x) = g(x)$.

Bước 2. Tìm

- Số giao điểm?
- Hoành độ giao điểm?
- Tung độ giao điểm?

Câu 6: Gọi P là số giao điểm của hai đồ thị $y = x^3 - x^2 + 1$ và $y = x^2 + 1$. Tìm P .

- A. $P = 0$. B. $P = 2$. C. $P = 1$. D. $P = 3$.

Câu 7: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2$ có đồ thị (C) . Số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y = 2$ là

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 4.

- Câu 8:** Biết rằng đường thẳng $y = 4x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x + 1$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0 .
- A. $y_0 = 10$. B. $y_0 = 13$. C. $y_0 = 11$. D. $y_0 = 12$.
- Câu 9:** Đồ thị của hàm số $y = -x^4 - 3x^2 + 1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bao nhiêu
- A. -3. B. 0. C. 1. D. -1.
- Câu 10:** Số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = 1 - x$ là
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0
- Câu 11:** đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ và đồ thị hàm số $y = -2x^2 + 7$ có bao nhiêu điểm chung?
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 12:** Cho hàm số $y = -2x^3 + 5x$ có đồ thị (C) Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.
- Câu 13:** Cho hàm số $y = (x-3)(x^2 + 2)$ có đồ thị (C) . Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. (C) cắt trục hoành tại hai điểm. B. (C) cắt trục hoành tại một điểm.
C. (C) không cắt trục hoành. D. (C) cắt trục hoành tại ba điểm.
- Câu 14:** Biết rằng đường thẳng $y = x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + x + 4$ tại điểm duy nhất, kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0 .
- A. $y_0 = 1$. B. $y_0 = 3$. C. $y_0 = -2$. D. $y_0 = 4$.
- Câu 15:** đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?
- A. $y = \frac{x-1}{x-3}$. B. $y = \frac{x+1}{x+4}$. C. $y = \frac{x-1}{x+2}$. D. $y = \frac{2x-1}{x+5}$.
- Câu 16:** Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \frac{2x+4}{x-1}$. Khi đó hoành độ x_I của trung điểm I của đoạn MN bằng bao nhiêu?
- A. $x_I = 2$. B. $x_I = 1$. C. $x_I = -5$. D. $x_I = -\frac{5}{2}$.
- Câu 17:** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-3}$ có đồ thị (C) và các đường thẳng $d_1: y = 2x$, $d_2: y = 2x - 2$, $d_3: y = 3x + 3$, $d_4: y = -x + 3$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng trong bốn đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 đi qua giao điểm của (C) và trục hoành.
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 18:** Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^4 - 4} + 5$ và đường thẳng $y = x$
- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

DẠNG 3. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC 3

Bài toán tổng quát: Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = px + q$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tại 3 điểm phân biệt thỏa điều kiện K ?

Phương pháp giải:

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $ax^3 + bx^2 + cx + d = px + q$

Đưa về phương trình bậc ba và nhằm nghiệm đặc biệt $x = x_0$ để chia Hoocner được:

$$(x - x_0) \cdot (ax^2 + b'x + c') = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ g(x) = ax^2 + b'x + c' = 0 \end{cases}$$

Bước 2. Để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác

$$x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{g(x)} > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases} \cdot \text{Giải hệ này, tìm được giá trị } m \in D_1.$$

Bước 3. Gọi $A(x_0; px_0 + q)$, $B(x_1; px_1 + q)$, $C(x_2; px_2 + q)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của $g(x) = 0$.

Theo Viét, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b'}{a}$ và $x_1 x_2 = \frac{c'}{a}$

Bước 4. Biến đổi điều kiện K về dạng tổng và tích của x_1, x_2

Thế vào sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến là m . Giải chúng sẽ tìm được giá trị $m \in D_2$.

Kết luận: $m \in D_1 \cap D_2$.

Một số công thức tính nhanh “thường gặp” liên quan đến cấp số

□ **Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.**

Điều kiện cần:

Giả sử x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Khi đó: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, đồng nhất hệ số ta được $x_2 = -\frac{b}{3a}$

Thế $x_2 = -\frac{b}{3a}$ vào phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ta được điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số.

Điều kiện đủ:

Thử các điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số để phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

□ **Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân.**

Điều kiện cần:

Giả sử x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Khi đó: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, đồng nhất hệ số ta được $x_2 = \sqrt[3]{-\frac{d}{a}}$

Thế $x_2 = \sqrt[3]{-\frac{d}{a}}$ vào phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ta được điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số.

Điều kiện đủ:

Thử các điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số để phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 19: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C) cắt đường thẳng $d: y = m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 .

- A. $m > -2$. B. $m = -2$. C. $m > -3$. D. $m = -3$.

Câu 21: Đường thẳng Δ có phương trình $y = 2x + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ trong đó $x_B < x_A$. Tìm $x_B + y_B$?

- A. $x_B + y_B = -5$ B. $x_B + y_B = -2$ C. $x_B + y_B = 4$ D. $x_B + y_B = 7$

Câu 22: Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 - m^3$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d: y = m^2x + 2m^3$. Biết rằng m_1, m_2 ($m_1 > m_2$) là hai giá trị thực của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83$. Phát biểu nào sau đây là **đúng** về quan hệ giữa hai giá trị m_1, m_2 ?

- A. $m_1 + m_2 = 0$. B. $m_1^2 + 2m_2 > 4$. C. $m_2^2 + 2m_1 > 4$. D. $m_1 - m_2 = 0$.

Câu 23: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt.

- A. $m \in (-\infty; -4)$. B. $m \in (-4; 0)$.
C. $m \in (0; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

Câu 24: Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + (m^2 - 2)x + 2m^2 + 4$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 8 là

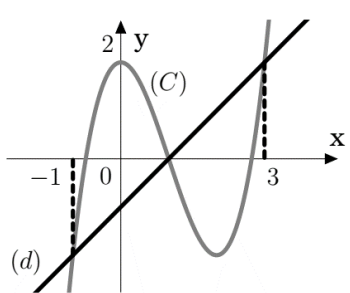
- A. $m = \pm 2$. B. $m = \pm 1$. C. $m = \pm\sqrt{3}$. D. $m = \pm\sqrt{2}$.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 + 3x^2 - 2 = m$ có ba nghiệm phân biệt.

- A. $m \in (2; +\infty]$. B. $m \in (-\infty; -2]$. C. $m \in (-2; 2)$. D. $m \in [-2; 2]$.

Câu 26: Đường thẳng Δ có phương trình $y = 2x + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ trong đó $x_B < x_A$. Tìm $x_B + y_B$?

- A. $x_B + y_B = -5$ B. $x_B + y_B = -2$ C. $x_B + y_B = 4$ D. $x_B + y_B = 7$

- Câu 27:** Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3 - 3x^2 = 2m + 1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng
- A. $-\frac{1}{2}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. $-\frac{5}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 28:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5$ tại 3 điểm phân biệt.
- A. $\begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$.
- Câu 29:** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ, đường thẳng d có phương trình $y = x - 1$. Biết phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm $x_1 < x_2 < x_3$. Giá trị của $x_1 x_3$ bằng
- 
- A. -3 . B. $-\frac{7}{3}$. C. -2 . D. $-\frac{5}{2}$.
- Câu 30:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2019]$ để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 3$ và đường thẳng $y = 3x + 1$ có duy nhất một điểm chung?
- A. 1. B. 2019. C. 4038. D. 2018.
- Câu 31:** Phương trình $x^3 - 6mx + 5 = 5m^2$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng khi
- A. $m = 0$. B. $m = -1 \vee m = 1$. C. $m = 1$. D. $m \in \emptyset$.
- Câu 32:** Tính tổng tất cả các giá trị của m biết đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ và đường thẳng $y = x + 4$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt $A(0; 4)$, B , C sao cho diện tích tam giác IBC bằng $8\sqrt{2}$ với $I(1; 3)$.
- A. 3. B. 8. C. 1. D. 5.
- Câu 33:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2019]$ để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 3$ và đường thẳng $y = 3x + 1$ có duy nhất một điểm chung?
- A. 1. B. 2019. C. 4038. D. 2018.
- Câu 34:** Đường thẳng d có phương trình $y = x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ tại 3 điểm phân biệt $A(0; 4)$, B và C sao cho diện tích của tam giác MBC bằng 4, với $M(1; 3)$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
- A. $m = 3$. B. $m = 2$ hoặc $m = 3$.
C. $m = -2$ hoặc $m = -3$. D. $m = -2$ hoặc $m = 3$.

- Câu 35:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5$ tại ba điểm phân biệt.
- A. $\begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$.
- Câu 36:** Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3 - 3x^2 = 2m + 1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng
- A. $-\frac{1}{2}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. $-\frac{5}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 37:** Giá trị lớn nhất của m để đường thẳng $(d): y = x - m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2(m-2)x^2 + (8-5m)x + m - 5$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 20$ là
- A. 3. B. 1. C. 0. D. $-\frac{3}{2}$.
- Câu 38:** Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y = -2x^3 - 3m^2x^2 + (m^3 + 2m)x + 2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân?
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.
- Câu 39:** Tìm m để đồ thị (C) của $y = x^3 - 3x^2 + 4$ và đường thẳng $y = mx + m$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt $A(-1;0)$, B , C sao cho ΔOBC có diện tích bằng 64.
- A. $m = 14$. B. $m = 15$. C. $m = 16$. D. $m = 17$.
- Câu 40:** Cho hàm số $y = x^3 - 8x^2 + 8x$ có đồ thị (C) và hàm số $y = x^2 + (8-a)x - b$ có đồ thị (P) . Biết đồ thị hàm số (C) cắt (P) tại ba điểm có hoành độ nằm trong $[-1;5]$. Khi a đạt giá trị nhỏ nhất thì tích ab bằng
- A. -729. B. 375. C. 225. D. -384.
- Câu 41:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = -mx + m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + mx^2 + m$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $-1 < x_1 + x_2 + x_3 < 3$?
- A. 6. B. 5. C. 2. D. 3.
- Câu 42:** Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ (C_m). Tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = x + 4$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B , C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ với điểm $K(1;3)$ là:
- A. $m = \frac{1+\sqrt{137}}{2}$. B. $m = \frac{\pm 1 + \sqrt{137}}{2}$. C. $m = \frac{1 \pm \sqrt{137}}{2}$. D. $m = \frac{1 - \sqrt{137}}{2}$.
- Câu 43:** Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của T bằng
- A. 1. B. 5. C. 0. D. 3.

- Câu 44:** Cho đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 . Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} + \frac{1}{f'(x_3)}$.
- A.** $P = 3 + 2b + c$. **B.** $P = 0$. **C.** $P = b + c + d$. **D.** $P = \frac{1}{2b} + \frac{1}{c}$.
- Câu 45:** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị đi qua điểm $A(1;1), B(2;4), C(3;9)$. Các đường thẳng AB, AC, BC lại cắt đồ thị lần lượt tại các điểm M, N, P (M khác A và B , N khác A và C , P khác B và C). Biết rằng tổng các hoành độ của M, N, P bằng 5, giá trị của $f(0)$ là
- A.** -6 . **B.** -18 . **C.** 18 . **D.** 6 .
- Câu 46:** Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d: y = m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5$.
- A.** $m \geq -3$. **B.** $m \geq -2$ **C.** $m > -3$. **D.** $m > -2$.
- Câu 47:** Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2m + 1$ và trục Ox có đúng hai điểm chung phân biệt. Tính tổng T của các phần tử thuộc tập S
- A.** $T = -10$. **B.** $T = 10$. **C.** $T = -12$. **D.** $T = 12$.

Huỳnh Văn Anh

DẠNG 4. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ NHẤT BIẾN

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C) . Tìm tham số m để đường thẳng $d: y = \alpha x + \beta$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn điều kiện K ?

Phương pháp giải

□ **Bước 1.**

Lập phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C) : $\frac{ax+b}{cx+d} = \alpha x + \beta$

$$\Leftrightarrow g(x) = \alpha cx^2 + (\beta c + \alpha d - a)x + \beta d - b = 0, \forall x \neq -\frac{d}{c}.$$

- Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có nghiệm nghiệm phân biệt $\neq -\frac{d}{c}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c\alpha \neq 0; \Delta > 0 \\ g\left(-\frac{d}{c}\right) \neq 0 \end{cases}. \text{ Giải hệ này, ta sẽ tìm được } m \in D_1 \text{ (i)}$$

-Gọi $A(x_1; \alpha x_1 + \beta), B(x_2; \alpha x_2 + \beta)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của $g(x) = 0$ Theo Viét:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta c + \alpha d - a}{c\alpha}; P = x_1 x_2 = \frac{\beta d - b}{\alpha c} \text{ (ii)}$$

□ **Bước 2.**

-Biến đổi điều kiện K cho trước về dạng có chứa tổng và tích của x_1, x_2 (iii)

-Thế (ii) vào (iii) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là m . Giải nó sẽ tìm được $m \in D_2$ (*)

-Từ (i), (*) $\Rightarrow m \in (D_1 \cap D_2)$ và kết luận giá trị m cần tìm.

Một số công thức tính nhanh “thường gặp” liên quan đến tương giao giữa đường thẳng

$$y = kx + p \text{ và đồ thị hàm số } y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Giả sử $d: y = kx + p$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ tại 2 điểm phân biệt M, N .

Với $kx + p = \frac{ax+b}{cx+d}$ cho ta phương trình có dạng: $Ax^2 + Bx + C = 0$ thỏa điều kiện $cx + d \neq 0$, có

$$\Delta = B^2 - 4AC. \text{ Khi đó:}$$

$$1). M(x_1; kx_1 + p), N(x_2; kx_2 + p) \Rightarrow \overline{MN} = (x_2 - x_1; k(x_2 - x_1)) \Rightarrow MN = \sqrt{(k^2 + 1)} \frac{\Delta}{A^2}$$

Chú ý: khi $\min MN$ thì tồn tại $\min \Delta, k = \text{const}$

$$2). OM^2 + ON^2 = (k^2 + 1)(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 + x_2)2kp + 2p^2$$

$$3). \overline{OM} \cdot \overline{ON} = (x_1 \cdot x_2)(1 + k^2) + (x_1 + x_2)kp + p^2$$

$$4). OM = ON \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(1 + k^2) + 2kp = 0$$

- Câu 48:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ của tham số m để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt?
- A. 4036. B. 4040. C. 4038. D. 4034.
- Câu 49:** Đường thẳng $y = x + 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi
- A. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$. B. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$. D. $-3 < m < 1$.
- Câu 50:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị của hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.
- A. $m \in (-\infty; +\infty)$. B. $m \in (-1; +\infty)$. C. $m \in (-2; 4)$. D. $m \in (-\infty; -2)$.
- Câu 51:** Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng
- A. $4\sqrt{2}$. B. 4. C. $2\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.
- Câu 52:** Cho hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ (C) và đường thẳng $d: y = -x + m$. Gọi S là tập các số thực m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB (O là gốc tọa độ) có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2\sqrt{2}$. Tổng các phần tử của S bằng
- A. 4. B. 3. C. 0. D. 8.
- Câu 53:** Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{1-x}$ (C) và đường thẳng $d: y = x + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt
- A. $m > -1$. B. $-5 < m < -1$.
C. $m < -5$. D. $m < -5$ hoặc $m > -1$.
- Câu 54:** Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x - m$, với m là tham số thực. Biết rằng đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho điểm $G(2; -2)$ là trọng tâm của tam giác OAB (O là gốc tọa độ). Giá trị của m bằng
- A. 6. B. 3. C. -9. D. 5.
- Câu 55:** Cho hàm số $y = \frac{3x-2m}{mx+1}$ với m là tham số. Biết rằng với mọi $m \neq 0$, đồ thị hàm số luôn cắt đường thẳng $d: y = 3x - 3m$ tại hai điểm phân biệt A, B . Tích tất cả các giá trị của m tìm được để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích ΔOAB bằng 2 lần diện tích ΔOCD bằng
- A. $-\frac{4}{9}$. B. -4. C. -1. D. 0.

- Câu 56:** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đường thẳng $y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trọng tâm tam giác OAB (O là gốc tọa độ) thuộc đường thẳng $x - 2y - 2 = 0$?
- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.
- Câu 57:** Giả sử $m = -\frac{b}{a}$, $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $(a, b) = 1$ là giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y - 2 = 0$, với O là gốc tọa độ. Tính $a + 2b$.
- A. 2. B. 5. C. 11. D. 21.
- Câu 58:** Cho hàm số $y = \frac{3x+2}{x+2}$, (C) và đường thẳng $d: y = ax + 2b - 4$. Đường thẳng d cắt tại A, B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O , khi đó $T = a + b$ bằng
- A. $T = 2$. B. $T = \frac{5}{2}$. C. $T = 4$. D. $T = \frac{7}{2}$.
- Câu 59:** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm ΔOAB thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y - 2 = 0$, với O là gốc tọa độ.
- A. $m = -\frac{11}{5}$. B. $m = -\frac{1}{5}$. C. $m = 0$. D. $m = -2$.
- Câu 60:** Cho hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm tập hợp tất cả các giá trị $a \in \mathbb{R}$ để qua điểm $M(0; a)$ có thể kẻ được đường thẳng cắt (C) tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua điểm M .
- A. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. B. $(3; +\infty)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.
- Câu 61:** Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $MN \leq 10$.
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.
- Câu 62:** Cho là đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Tìm k để đường thẳng $d: y = kx + 2k + 1$ cắt tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A đến trục hoành bằng khoảng cách từ B đến trục hoành.
- A. 1. B. $\frac{2}{5}$. C. -3. D. -2.
- Câu 63:** Tìm điều kiện của m để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.
- A. $(-\infty; 0] \cup [16; +\infty)$ B. $(16; +\infty)$ C. $(-\infty; 0)$ D. $(-\infty; 0) \cup (16; +\infty)$

- Câu 64:** Gọi $M(a; b)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d: y = 2x + 6$ nhỏ nhất. Tính $(4a+5)^2 + (2b-7)^2$.
A. 162. **B.** 2. **C.** 18. **D.** 0.
- Câu 65:** Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x}{1-x}$ cắt đường thẳng $y = x - m$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60° ?
A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0
- Câu 66:** Để đường thẳng $d: y = x - m + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất thì giá trị của m thuộc khoảng nào?
A. $m \in (-4; -2)$ **B.** $m \in (2; 4)$ **C.** $m \in (-2; 0)$ **D.** $m \in (0; 2)$
- Câu 67:** Biết rằng đường thẳng $y = 2x + 2m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị của tham số m . Tìm hoành độ trung điểm của AB ?
A. $m+1$ **B.** $-m-1$ **C.** $-2m-2$ **D.** $-2m+1$
- Câu 68:** Gọi (H) là đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$. Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (H) có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất, với $x_0 < 0$ khi đó $x_0 + y_0$ bằng
A. -1. **B.** -2. **C.** 3. **D.** 0.
- Câu 69:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB \leq 2\sqrt{2}$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng
A. -6. **B.** -27. **C.** 9. **D.** 0.
- Câu 70:** Cho hàm số $y = \frac{2x-m^2}{x+1}$ có đồ thị (C_m) , trong đó m là tham số thực. Đường thẳng $d: y = m - x$ cắt (C_m) tại hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ với $x_A < x_B$; đường thẳng $d': y = 2 - m - x$ cắt (C_m) tại hai điểm $C(x_C; y_C), D(x_D; y_D)$ với $x_C < x_D$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $x_A \cdot x_D = -3$. Số phần tử của tập S là
A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

DẠNG 5. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG

. **Bài toán tổng quát:** Tìm m để đường thẳng $d: y = \alpha$ cắt đồ thị $(C): y = f(x; m) = ax^4 + bx^2 + c$ tại n điểm phân biệt thỏa mãn điều kiện K cho trước?

✎ **Phương pháp giải:**

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $ax^4 + bx^2 + c - \alpha = 0$

Đặt $t = x^2 \geq 0$ thì $(1) \Leftrightarrow at^2 + bt + c - \alpha = 0$

Tùy vào số giao điểm n mà ta biện luận để tìm giá trị $m \in D_1$. Cụ thể:

• Để $d \cap (C) = n = 4$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có 2 nghiệm } t_1, t_2 \text{ thỏa điều kiện: } 0 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$$

• Để $d \cap (C) = n = 3$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm } t_1, t_2 \text{ thỏa điều kiện: } 0 = t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} c - \alpha = 0 \\ \frac{b}{a} < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$$

• Để $d \cap (C) = n = 2$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có 2 nghiệm trái dấu hoặc có nghiệm kép dương} \Leftrightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ \Delta = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$$

• Để $d \cap (C) = n = 1$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có đúng 1 nghiệm

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm kép } = 0 \text{ hoặc } \begin{cases} t_1 < 0 \\ t_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ c - \alpha = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} c - \alpha = 0 \\ \frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$$

Bước 2. Biến đổi điều kiện K về dạng có chứa tổng và tích của t_1, t_2

Thế biểu thức tổng, tích vào sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là m . Giải chúng ta sẽ tìm được $m \in D_2$.

Kết luận: $m \in D_1 \cap D_2$.

□ **Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.**

Ta có: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1), đặt $t = x^2 \geq 0$, thì có: $at^2 + bt + c = 0$ (2)

$$\text{Để (1) có 4 nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt dương, tức là: } \begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \end{cases}$$

Khi đó (1) có 4 nghiệm phân biệt lần lượt là $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$ lập thành cấp số cộng khi và chỉ

$$\text{khi: } \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} - (-\sqrt{t_1}) \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1. \text{ Theo định lý Vi - et } t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} \text{ suy ra}$$

$$t_1 = -\frac{b}{10a}; t_2 = -\frac{9b}{10a}, \text{ kết hợp } t_1 \cdot t_2 = \frac{c}{a} \text{ nên có: } 9ab^2 = 100a^2c$$

Tóm lại: Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp

$$\text{số cộng, thì điều kiện cần và đủ là: } \begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ 9ab^2 = 100a^2c \end{cases}$$

Câu 71: Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 4x^2 + 3 + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là

- A. $(-1; 3)$. B. $(-3; 1)$. C. $(2; 4)$. D. $(-3; 0)$.

Câu 72: Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2mx^2 + (2m - 1) = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt là

- A. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$. B. $(1; +\infty)$. C. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 73: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$. Tìm số thực dương m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O , trong đó O là gốc tọa độ.

- A. $m = 2$. B. $m = \frac{3}{2}$. C. $m = 3$. D. $m = 1$.

Câu 74: Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi

- A. $-\frac{1}{4} < m < 0$. B. $0 < m < \frac{1}{4}$. C. $m > 0$. D. $m > -\frac{1}{4}$

Câu 75: Một đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ là $0, 1, m, n$. Tính $S = m^2 + n^2$.

- A. $S = 1$. B. $S = 0$. C. $S = 3$. D. $S = 2$.

Câu 76: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^3 + (m - 2)x^2 + 8x + 4$ cắt trục hoành tại đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1.

- A. 8. B. 7. C. 5. D. 3.

Câu 77: Cho hàm số $f(x) = -4x^4 + 8x^2 - 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

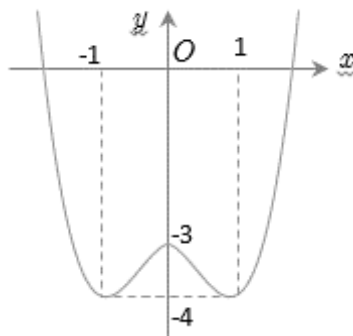
Câu 78: Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y = -3$ tại bốn điểm phân biệt, trong đó có một điểm có hoành độ lớn hơn 2 còn ba điểm kia có hoành độ nhỏ hơn 1, là khoảng $(a; b)$. Khi đó, $15ab$ nhận giá trị nào sau đây?

- A. -63. B. 63. C. 95. D. -95.

Câu 79: Đường thẳng $y = m^2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 - 10$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông (O là gốc tọa độ). Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $m^2 \in (5; 7)$. B. $m^2 \in (3; 5)$. C. $m^2 \in (1; 3)$. D. $m^2 \in (0; 1)$.

Câu 80: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = 2m - 4$ có 2 nghiệm phân biệt.



- A. $\begin{cases} m < 0 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$. B. $m \leq \frac{1}{2}$. C. $0 < m < \frac{1}{2}$. D. $\begin{cases} m = 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 81: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 + 3 + 2m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

- A. $-2 \leq m \leq -\frac{3}{2}$. B. $-\frac{3}{2} < m < 2$. C. $-2 < m < -\frac{3}{2}$. D. $3 < m < 4$.

Câu 82: Tất cả các giá trị thực của tham số m , để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(2 - m)x^2 + m^2 - 2m - 2$ không cắt trục hoành.

- A. $m \geq \sqrt{3} + 1$. B. $m < 3$. C. $m > \sqrt{3} + 1$. D. $m > 3$.

Câu 83: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = (m + 1)x^4 - 2(2m - 3)x^2 + 6m + 5$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có các hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$.

- A. $m \in \left(-1; -\frac{5}{6}\right)$. B. $m \in (-3; -1)$. C. $m \in (-3; 1)$. D. $m \in (-4; -1)$.

Câu 84: Cho hàm số $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$ có đồ thị là (C_m) . Tìm m để đường thẳng $d: y = -1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

- A. $-\frac{1}{3} < m < 1$ và $m \neq 0$ B. $-\frac{1}{2} < m < 1$ và $m \neq 0$
C. $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$ và $m \neq 0$ D. $-\frac{1}{3} < m < \frac{1}{2}$ và $m \neq 0$

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

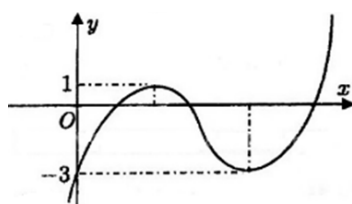


HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ THÔNG QUA ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN

Nghiệm của phương trình $af(x) + b = 0$ là số giao điểm của đường thẳng $y = \frac{-b}{a}$ với đồ thị hàm số $y = f(x)$

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 2$ là

A. 3.

B. 2.

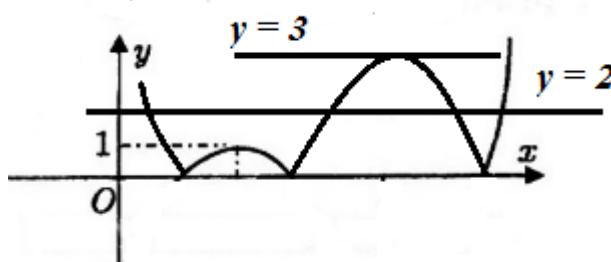
C. 4.

D. 6.

Lời giải

*Đồ thị $y = |f(x)|$

- Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị của $y = f(x)$ nằm phía trên Ox
- Bước 2: Lấy đối xứng phần đồ thị của $y = f(x)$ nằm phía dưới Ox qua trục hoành.
- Bước 3: Xóa phần đồ thị của $y = f(x)$ nằm phía dưới trục hoành



Số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 2$ cũng chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và đường thẳng $y = 2$. Dựa vào hình vẽ trên, ta thấy có 4 giao điểm.

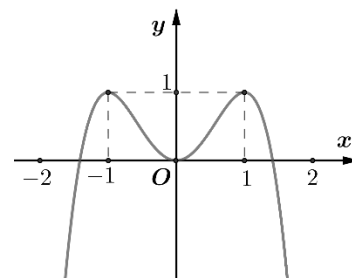
***Cách giải khác:**

$$|f(x)| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ f(x) = -2 \end{cases}, \text{ dựa vào đồ thị suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm}$$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ.

Phương trình $1 - 2.f(x) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

- A.** 4 **B.** 3
C. Vô nghiệm **D.** 2



Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét phương trình: } 1 - 2.f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \text{ (C)} \\ y = \frac{1}{2} \text{ (d)} \end{cases}$$

Số giao điểm của đường thẳng (d) và đường cong (C) ứng với số nghiệm của phương trình (1). Theo hình vẽ ta có 4 giao điểm $\Rightarrow$ phương trình (1) sẽ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau đây.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$		3		$-\infty$

Hỏi phương trình $2.f(x) - 5 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

$$\text{Phương trình } 2.f(x) - 5 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{5}{2} (*)$$

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{5}{2}$. Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy 2 đồ thị $y = f(x)$ và $y = \frac{5}{2}$ có 3 điểm chung.

Vậy phương trình $2.f(x) - 5 = 0$ có 3 nghiệm thực.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			4		-2		$+\infty$
	$-\infty$						

Số nghiệm của phương trình $f(x) - 3 = 0$ là

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 3$, theo bảng biến thiên ta có phương trình có 3 nghiệm.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên.

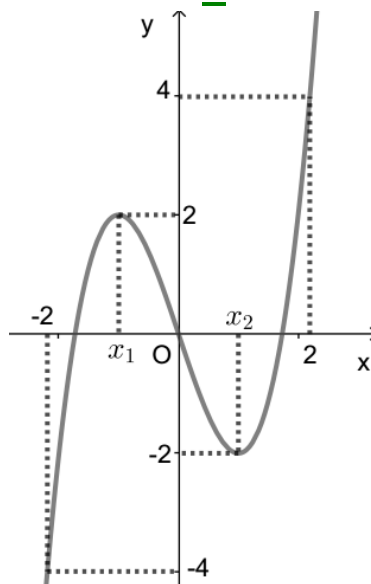
Tìm số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 1$ trên đoạn $[-2; 2]$.

A. 3.

B. 5.

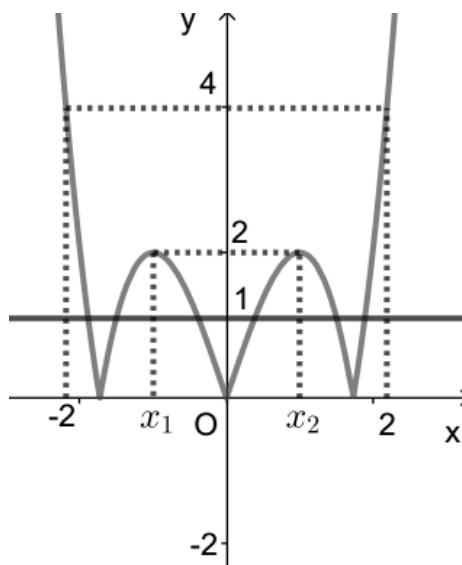
C. 6.

D. 4.



Lời giải

Ta có số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ với đường thẳng $y = 1$.



Từ hình vẽ ta thấy đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ tại 6 điểm. Vậy số nghiệm của phương trình $|f(x)| = 1$ là 6.

DẠNG 2. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ THÔNG QUA HÀM SỐ CHO TRƯỚC

Cho hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

Bước 1. Giải phương trình $f(x) = g(x)$.

Bước 2. Tìm

- Số giao điểm?
- Hoành độ giao điểm?
- Tung độ giao điểm?

Câu 6: Gọi P là số giao điểm của hai đồ thị $y = x^3 - x^2 + 1$ và $y = x^2 + 1$. Tìm P .

- A.** $P = 0$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = 1$. **D.** $P = 3$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $y = x^3 - x^2 + 1$ và $y = x^2 + 1$:

$$x^3 - x^2 + 1 = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 1$.

Với $x = 2 \Rightarrow y = 5$.

Nên hai đồ thị trên có hai giao điểm là $(0;1)$ và $(2;5)$.

Vậy $P = 2$.

Câu 7: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2$ có đồ thị (C) . Số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y = 2$ là

- A.** 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y = 2$ là số nghiệm của phương trình sau:

$$x^4 - 3x^2 = 2 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ x^2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm có 2 nghiệm nên số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng là 2.

Câu 8: Biết rằng đường thẳng $y = 4x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x + 1$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0 .

- A.** $y_0 = 10$. **B.** $y_0 = 13$. **C.** $y_0 = 11$. **D.** $y_0 = 12$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3 + 2x + 1 = 4x + 5 \Leftrightarrow x^3 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
 Với $x = 2 \Rightarrow y = 13$. Vậy $y_0 = 13$

Câu 9: Đồ thị của hàm số $y = -x^4 - 3x^2 + 1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bao nhiêu

- A.** -3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Trục tung có phương trình: $x = 0$. Thay $x = 0$ vào $y = -x^4 - 3x^2 + 1$ được: $y = 1$.

Câu 10: Số giao điểm của đường cong $y = x^3 - 2x^2 + 2x + 1$ và đường thẳng $y = 1 - x$ là

- A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 0

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$x^3 - 2x^2 + 2x + 1 = 1 - x$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Câu 11: đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ và đồ thị hàm số $y = -2x^2 + 7$ có bao nhiêu điểm chung?

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Pthdgd:

$$x^4 - 3x^2 + 1 = -2x^2 + 7 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ x^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}.$$

Do pt có 2 nghiệm nên đồ thị hai hàm số có 2 điểm chung.

Câu 12: Cho hàm số $y = -2x^3 + 5x$ có đồ thị (C) Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Pthd của (C) và trục hoành là:

$$-2x^3 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \text{ có 3 giao điểm.}$$

Chú ý: Ở bài toán này hoàn toàn có thể giải trực tiếp bằng Casio với phương trình $-2x^3 + 5x = 0$, nhưng chắc chắn thao tác bấm máy sẽ chậm hơn việc tính tay. Vì vậy, Casio là điều không cần thiết với câu hỏi này.

Câu 13: Cho hàm số $y = (x-3)(x^2+2)$ có đồ thị (C) . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** (C) cắt trục hoành tại hai điểm. **B.** (C) cắt trục hoành tại một điểm.
C. (C) không cắt trục hoành. **D.** (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

Lời giải

Chọn B

Pthd của (C) và trục hoành là:

$$(x-3)(x^2+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \text{ nghĩa là } (C) \text{ cắt trục hoành tại một điểm}$$

Câu 14: Biết rằng đường thẳng $y = x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - x^2 + x + 4$ tại điểm duy nhất, kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0 .

- A.** $y_0 = 1$. **B.** $y_0 = 3$. **C.** $y_0 = -2$. **D.** $y_0 = 4$.

Lời giải

Chọn A

Pthdgd:

$$x + 2 = x^3 - x^2 + x + 4 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y_0 = 1.$$

Câu 15: đồ thị hàm số nào sau đây cắt trục tung tại điểm có tung độ âm?

- A.** $y = \frac{x-1}{x-3}$. **B.** $y = \frac{x+1}{x+4}$. **C.** $y = \frac{x-1}{x+2}$. **D.** $y = \frac{2x-1}{x+5}$.

Lời giải

Chọn C

Trục tung có phương trình $x = 0$, ta thay $x = 0$ lần lượt vào các phương án thì chỉ có phương án C cho ta $y = -\frac{1}{2} < 0$.

Câu 16: Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ và đường cong $y = \frac{2x+4}{x-1}$. Khi đó hoành độ x_I của trung điểm I của đoạn MN bằng bao nhiêu?

- A.** $x_I = 2$. **B.** $x_I = 1$. **C.** $x_I = -5$. **D.** $x_I = -\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Pthdgd $\frac{2x+4}{x-1} = x+1 (x \neq 1) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = 0$

Khi đó $x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = 1$.

Chú ý: có thể giải, tìm được $x_M = 1 + \sqrt{6}, x_N = 1 - \sqrt{6} \Rightarrow x_I = 1$

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-3}$ có đồ thị (C) và các đường thẳng $d_1: y = 2x$, $d_2: y = 2x - 2$, $d_3: y = 3x + 3$, $d_4: y = -x + 3$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng trong bốn đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 đi qua giao điểm của (C) và trục hoành.

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có (C) cắt trục hoành $(y=0)$ tại điểm $M(-1;0)$.

Trong các đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 chỉ có $M \in d_3$, có nghĩa là có 1 đường thẳng đi qua $M(-1;0)$.

Câu 18: Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^4 - 4} + 5$ và đường thẳng $y = x$

- A.** 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Cách 1: Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x \Leftrightarrow \sqrt{x^4 - 4} = x - 5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x^4 - 4 = (x - 5)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x^4 - x^2 + 10x - 29 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Do $x \geq 5$ nên $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) > 0$ và $10x - 29 > 0$. Vì vậy $(*)$ vô nghiệm

Như vậy phương trình $\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x$ vô nghiệm hay đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^4 - 4} + 5$ và đường thẳng $y = x$ không có giao điểm nào.

Cách 2:

Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x$. Ta có điều kiện xác định $\begin{cases} x \geq \sqrt{2} \\ x \leq -\sqrt{2} \end{cases}$

Với điều kiện trên ta có $\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x \Leftrightarrow \sqrt{x^4 - 4} + 5 - x = 0$

Xét hàm số $h(x) = \sqrt{x^4 - 4} + 5 - x$. Ta có $h'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 - 4}} - 1$;

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = \sqrt{x^4 - 4}$$

Với $x \geq \sqrt{2}$ ta có $2x^3 > \sqrt{x^4 - 4}$. Với $x \leq -\sqrt{2}$ ta có $2x^3 < \sqrt{x^4 - 4}$

Ta có Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$h'(x)$		-		+
$h(x)$	$+\infty$			$+\infty$

$5 + \sqrt{2}$ $5 - \sqrt{2}$

Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x$ là số giao điểm của đồ thị

$y = h(x) = \sqrt{x^4 - 4} + 5 - x$ và trục hoành $y = 0$. Dựa vào BBT ta thấy phương trình

$\sqrt{x^4 - 4} + 5 = x$ vô nghiệm hay đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^4 - 4} + 5$ và đường thẳng $y = x$ không có giao điểm nào.

DẠNG 3. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC 3

Bài toán tổng quát: Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = px + q$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tại 3 điểm phân biệt thỏa điều kiện K ?

Phương pháp giải:

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $ax^3 + bx^2 + cx + d = px + q$

Đưa về phương trình bậc ba và nhẩm nghiệm đặc biệt $x = x_0$ để chia Hoocner được:

$$(x - x_0) \cdot (ax^2 + b'x + c') = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ g(x) = ax^2 + b'x + c' = 0 \end{cases}$$

Bước 2. Để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác

$$x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{g(x)} > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases} \cdot \text{Giải hệ này, tìm được giá trị } m \in D_1.$$

Bước 3. Gọi $A(x_0; px_0 + q)$, $B(x_1; px_1 + q)$, $C(x_2; px_2 + q)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của $g(x) = 0$.

Theo Viét, ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b'}{a}$ và $x_1 x_2 = \frac{c'}{a}$

Bước 4. Biến đổi điều kiện K về dạng tổng và tích của x_1, x_2

Thế vào sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến là m . Giải chúng sẽ tìm được giá trị $m \in D_2$.

Kết luận: $m \in D_1 \cap D_2$.

Một số công thức tính nhanh “thường gặp” liên quan đến cấp số

□ **Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.**

Điều kiện cần:

Giả sử x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Khi đó: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, đồng nhất hệ số ta được $x_2 = -\frac{b}{3a}$

Thế $x_2 = -\frac{b}{3a}$ vào phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ta được điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số.

Điều kiện đủ:

Thử các điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số để phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

□ **Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số nhân.**

Điều kiện cần:

Giả sử x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Khi đó: $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, đồng nhất hệ số ta được $x_2 = \sqrt[3]{-\frac{d}{a}}$

Thế $x_2 = \sqrt[3]{-\frac{d}{a}}$ vào phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ta được điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số.

Điều kiện đủ:

Thử các điều kiện ràng buộc về tham số hoặc giá trị của tham số để phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 19: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3mx^2 + 2m = 0$ (*)

Phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có ba nghiệm lập thành cấp số cộng $\longrightarrow$ phương trình có một nghiệm $x_0 = -\frac{b}{3a}$.

Suy ra phương trình (*) có một nghiệm $x = m$

Thay $x = m$ vào phương trình (*), ta được $m^3 - 3m.m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow -2m^3 + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = 0 \end{cases}$.

Thử lại:

● Với $m = 1$, ta được $x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{3} \end{cases}$.

Do đó $m = 1$ thỏa mãn.

● Với $m = -1$, ta được $x^3 + 3x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{3} \\ x = -1 \\ x = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$.

Do đó $m = -1$ thỏa mãn.

● Với $m = 0$, ta được $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Do đó $m = 0$ không thỏa mãn.

Vậy $m = \pm 1$ là hai giá trị cần tìm.

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ (C) cắt đường thẳng $d: y = m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt x_1, x_2, x_3 .

- A.** $m > -2$. **B.** $m = -2$. **C.** $m > -3$. **D.** $m = -3$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$$x^3 - 3x^2 + 2 = m(x-1) \quad (1)$$

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - mx + 2 + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - m - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ f(x) = x^2 - 2x - m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ f(x) = x^2 - 2x - m - 2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (1) luôn có nghiệm $x=1$, vậy để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt thì phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 + m + 2 > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3.$$

Vậy $m > -3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21: Đường thẳng Δ có phương trình $y = 2x + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ trong đó $x_B < x_A$. Tìm $x_B + y_B$?

- A.** $x_B + y_B = -5$ **B.** $x_B + y_B = -2$ **C.** $x_B + y_B = 4$ **D.** $x_B + y_B = 7$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và $y = x^3 - x + 3$:

$$x^3 - x + 3 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = -3 \\ x = 1 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A(1;3); B(-2;-3) \Rightarrow x_B + y_B = -5$$

Câu 22: Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 - m^3$ có đồ thị (C_m) và đường thẳng $d: y = m^2x + 2m^3$. Biết rằng m_1, m_2 ($m_1 > m_2$) là hai giá trị thực của m để đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83$. Phát biểu nào sau đây là **đúng** về quan hệ giữa hai giá trị m_1, m_2 ?

- A.** $m_1 + m_2 = 0$. **B.** $m_1^2 + 2m_2 > 4$. **C.** $m_2^2 + 2m_1 > 4$. **D.** $m_1 - m_2 = 0$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m)

$$\begin{aligned} x^3 + 3mx^2 - m^3 &= m^2x + 2m^3 \\ \Leftrightarrow x^3 + 3mx^2 - m^2x - 3m^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^3 - m^2x) + (3mx^2 - 3m^3) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - m^2) + 3m(x^2 - m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 3m)(x^2 - m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3m \\ x = m \\ x = -m \end{cases}$$

Đề đường thẳng d cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2, x_3 \Leftrightarrow m \neq 0$.

$$\text{Khi đó, } x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 83 \Leftrightarrow m^4 + (-m)^4 + (-3m)^4 = 83$$

$$\Leftrightarrow 83m^4 = 83 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Vậy $m_1 = 1, m_2 = -1$ hay $m_1 + m_2 = 0$.

Câu 23: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt.

A. $m \in (-\infty; -4)$. **B.** $m \in (-4; 0)$.

C. $m \in (0; +\infty)$. **D.** $m \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y = x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y			0				$+\infty$
	$-\infty$				-4		

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt khi $-4 < m < 0$

Câu 24: Tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + (m^2 - 2)x + 2m^2 + 4$ cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 8 là

A. $m = \pm 2$. **B.** $m = \pm 1$. **C.** $m = \pm \sqrt{3}$. **D.** $m = \pm \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với trục tung là $B(0; 2m^2 + 4)$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị đã cho với trục hoành là:

$$x^3 + (m^2 - 2)x + 2m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 2x + m^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ (x - 1)^2 + m^2 + 1 = 0 \text{ (vn)} \end{cases}$$

Giao điểm của đồ thị đã cho với trục hoành là $A(-2;0)$.

Diện tích tam giác ABC là: $S = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}.2.(2m^2 + 4) = 8 \Rightarrow m = \pm\sqrt{2}$.

- Câu 25:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^3 + 3x^2 - 2 = m$ có ba nghiệm phân biệt.
A. $m \in (2; +\infty]$. **B.** $m \in (-\infty; -2]$. **C.** $m \in (-2; 2)$. **D.** $m \in [-2; 2]$.

Lời giải

Xét hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$, $y' = 3x^2 + 6x$.

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $x^3 + 3x^2 - 2 = m$ (*) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào bảng biến thiên suy ra PT có 3 nghiệm phân biệt khi $-2 < m < 2$.

- Câu 26:** Đường thẳng Δ có phương trình $y = 2x + 1$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - x + 3$ tại hai điểm A và B với tọa độ được kí hiệu lần lượt là $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ trong đó $x_B < x_A$. Tìm $x_B + y_B$?
A. $x_B + y_B = -5$ **B.** $x_B + y_B = -2$ **C.** $x_B + y_B = 4$ **D.** $x_B + y_B = 7$

Lời giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình: $x^3 - x + 3 = 2x + 1$

Giải phương trình ta được $\begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Vì $x_B < x_A$ Vậy $x_B = 1; y_B = 3 \Rightarrow x_B + y_B = 4$

- Câu 27:** Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3 - 3x^2 = 2m + 1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng
A. $-\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** $-\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Xét hàm số: $y = 2x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 6x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$		0		-1	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của hai đồ thị:

$$\begin{cases} (C): y = 2x^3 - 3x^2 \\ d: y = 2m + 1 \end{cases}$$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 = -1 \\ 2m+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ -1; -\frac{1}{2} \right\}.$$

Vậy tổng các phần tử của S bằng $-1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$.

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5$ tại 3 điểm phân biệt.

A. $\begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm chung là: $x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5 = -x + 5$

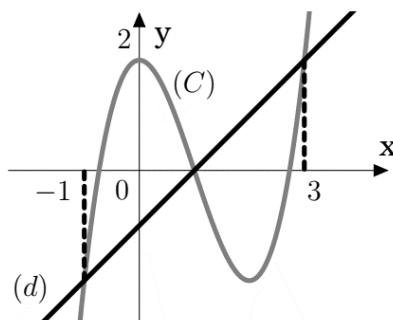
$$\Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (3m-2)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2mx + 3m-2 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Đường thẳng $y = -x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5$ tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 3m + 2 > 0 \\ 3m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \\ m \neq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$$

Câu 29: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ, đường thẳng d có phương trình $y = x - 1$. Biết phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm $x_1 < x_2 < x_3$. Giá trị của $x_1 x_3$ bằng

A. -3 . **B.** $-\frac{7}{3}$. **C.** -2 . **D.** $-\frac{5}{2}$.



Lời giải

$$+ \text{Ta có: } f(x) = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$f(x)$ là hàm bậc ba nên $f(x) - (x - 1) = a(x + 1)(x - 1)(x - 3)$

$$\Rightarrow f(x) = a(x + 1)(x - 1)(x - 3) + x - 1; f(0) = 2 \Leftrightarrow a = 1.$$

$$\Rightarrow f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 3) + x - 1.$$

$$+ f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 = x_2 \\ (x + 1)(x - 3) + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}.$$

x_1, x_3 là các nghiệm của (2) nên ta có $x_1 x_3 = -2$.

thẳng $y = \frac{5}{2}$ nên từ đồ thị ta có phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 30: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2019]$ để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 3$ và đường thẳng $y = 3x + 1$ có duy nhất một điểm chung?

A. 1.

B. 2019.

C. 4038.

D. 2018.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 3mx + 3 = 3x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 3mx \Leftrightarrow 3m = \frac{x^3 - 3x + 2}{x}.$$

$$\text{Xét hàm } f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x} = x^2 - 3 + \frac{2}{x}; f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$			0	
			-	+
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$
			$-\infty$	

Khi đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m < 0$. Mà m nguyên và $m \in [-2018; 2019]$ nên có 2018 giá trị thỏa mãn.

Câu 31: Phương trình $x^3 - 6mx + 5 = 5m^2$ có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng khi

A. $m = 0$.

B. $m = -1 \vee m = 1$.

C. $m = 1$.

D. $m \in \emptyset$.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương: $x^3 - 6mx + 5 - 5m^2 = 0$.

Đặt $y = f(x) = x^3 - 6mx + 5 - 5m^2$ có $f'(x) = 3x^2 - 6m$; $f''(x) = 6x$.

PT đã cho có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow f'(x) = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } f(x_1) \cdot f(x_2) < 0.$$

3 nghiệm đó lập thành cấp số cộng nên $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$.

Suy ra, x_2 là hoành độ của tâm đối xứng hay là nghiệm của $f''(x) = 0$.

$$\text{Cho } f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Với $x = 0$ ta có: $5 - 5m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

Thử lại:

• Với $m = 1$ thì ta có $x^3 - 6x + 5 = 5 \Leftrightarrow x(x^2 - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{6} \end{cases}$

• Với $m = -1$ thì ta có: $x^3 + 6x + 5 = 5 \Leftrightarrow x(x^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Câu 32: Tính tổng tất cả các giá trị của m biết đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ và đường thẳng $y = x + 4$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B , C sao cho diện tích tam giác IBC bằng $8\sqrt{2}$ với $I(1;3)$.

A. 3.

B. 8.

C. 1.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

+) Gọi đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ là (C_m) và đồ thị hàm số $y = x + 4$ là (d) .

+) Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (d) là

$$x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4 \Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (m+2)x = 0(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \end{cases}$$

+) Gọi $g(x) = x^2 + 2mx + m + 2$.

+) (d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g > 0 \\ g(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \\ m \neq -2 \end{cases} \quad (a)$$

+) $x = 0$ là hoành độ điểm A , hoành độ điểm B , C là hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình $g(x) = 0$

+) $BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + [(x_2 + 4) - (x_1 + 4)]^2 = 2(x_2 - x_1)^2$ Viết phương trình đường thẳng (d) dưới dạng $x - y + 4 = 0$, ta có

$$d(I, (d)) = \frac{|1 - 3 + 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

$$+) S_{IBC} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} BC \cdot d(I, (d)) = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{4} BC^2 \cdot [d(I, (d))]^2 = 128$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} 8(m^2 - m - 2) \cdot 2 = 128$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 34 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1 + \sqrt{137}}{2} \\ m = \frac{1 - \sqrt{137}}{2} \end{cases}$$

+) Vậy tổng tất cả các giá trị m là 1.

Câu 33: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2019]$ để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 3$ và đường thẳng $y = 3x + 1$ có duy nhất một điểm chung?

- A. 1. B. 2019. C. 4038. D. 2018.

Lời giải

Chọn D

+ Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3mx + 3 = 3x + 1 \Leftrightarrow 3mx = x^3 - 3x + 2 \quad (1)$

+ Dễ thấy $x = 0$ không thỏa.

$$+ (1) \Leftrightarrow 3m = x^2 - 3 + \frac{2}{x} = f(x).$$

$$+ f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$

+ Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 3$ và đường thẳng $y = 3x + 1$ có duy nhất một điểm chung $\Leftrightarrow 3m < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

+ Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-2018; 2019]$ nên có 2018 giá trị.

Câu 34: Đường thẳng d có phương trình $y = x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ tại 3 điểm phân biệt $A(0; 4)$, B và C sao cho diện tích của tam giác MBC bằng 4, với $M(1; 3)$. Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- A. $m = 3$. B. $m = 2$ hoặc $m = 3$.
C. $m = -2$ hoặc $m = -3$. D. $m = -2$ hoặc $m = 3$

Lời giải

Chọn A

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của phương trình

$$x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4 \Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (m+2)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2mx + (m+2) = 0 (*) \end{cases}$$

Đường thẳng d cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt khi phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\text{khác } 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \\ m \neq -2 \end{cases}$$

Giả sử $B(x_1; x_1 + 4)$; $C(x_2; x_2 + 4)$ với $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình khi đó

$$BC = \sqrt{2(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2} = \sqrt{8m^2 - 8m - 16}.$$

$$S_{MBC} = \frac{1}{2} BC \cdot d(M, d) = \frac{1}{2} BC \cdot \frac{|1 - 3 + 4|}{\sqrt{2}} = 4 \Rightarrow BC = 4\sqrt{2}.$$

Ta có $m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 3 \end{cases}$.

Đổi chiều điều kiện ta có $m = 3$.

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -x + 5$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5$ tại ba điểm phân biệt.

A. $\begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^3 + 2mx^2 + 3(m-1)x + 5 = -x + 5$

$\Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (3m-2)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2mx + 3m-2 = 0 \quad (1) \end{cases}$.

Yêu cầu bài toán tương đương phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khác 0.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0^2 + 2m \cdot 0 + 3m-2 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - 3m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m > 2 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{2}{3} \\ m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$.

Câu 36: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2x^3 - 3x^2 = 2m + 1$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

A. $-\frac{1}{2}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. $-\frac{5}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số: $y = 2x^3 - 3x^2 \Rightarrow y' = 6x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		+	0	-	0	+		
$f(x)$		$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của hai đồ thị:

$\begin{cases} (C): y = 2x^3 - 3x^2 \\ d: y = 2m + 1 \end{cases}$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 = -1 \\ 2m+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{ -1; -\frac{1}{2} \right\}$.

Vậy tổng các phân tử của S bằng $-1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$.

Câu 37: Giá trị lớn nhất của m để đường thẳng $(d): y = x - m + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2(m-2)x^2 + (8-5m)x + m - 5$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 20$ là

- A.** 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình

$$x^3 + 2(m-2)x^2 + (8-5m)x + m - 5 = x - m + 1$$

$$\Leftrightarrow (x-2)[x^2 + (2m-2)x - m + 3] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 2 \\ x^2 + (2m-2)x - m + 3 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm

$$\text{phân biệt } x_1; x_2 \text{ khác } 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m-1)^2 + (m-3) > 0 \\ 4 + (2m-2) \cdot 2 - m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \\ m \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó, } \begin{cases} x_1 + x_2 = -(2m-2) \\ x_1 x_2 = -m + 3 \end{cases}$$

$$\text{Theo giả thiết } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 20 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + x_3^2 = 20$$

$$\Leftrightarrow (2m-2)^2 + 2(m-3) + 4 = 20 \Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 3.

Câu 38: Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y = -2x^3 - 3m^2x^2 + (m^3 + 2m)x + 2$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân?

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành là nghiệm của phương trình

$$-2x^3 - 3m^2x^2 + (m^3 + 2m)x + 2 = 0. (*)$$

Giả sử đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ x_1, x_2, x_3 .

Khi đó ta có

$$y = -2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = -2x^3 + 2(x_1+x_2+x_3)x^2 - 2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x + 2x_1x_2x_3.$$

Đồng nhất thức ta được

$$\begin{cases} 2(x_1 + x_2 + x_3) = -3m^2 \\ -2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = m^3 + 2m \\ 2x_1x_2x_3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{3m^2}{2} & (1) \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -\frac{m^3 + 2m}{2} & (2) \\ x_1x_2x_3 = 1 & (3) \end{cases}$$

Vì x_1, x_2, x_3 lập thành cấp số nhân nên $x_1x_3 = x_2^2$. (4)

Từ (2) và (3): $x_2 = 1$. Thay vào phương trình (*) rút ra được $\begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$.

Với $m = 0 \Rightarrow$ phương trình (*): $-2x^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Với $m = 1 \Rightarrow$ phương trình (*): $-2x^3 - 3x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Với $m = 2 \Rightarrow$ phương trình (*): $x^3 + 6x^2 - 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-7 - \sqrt{45}}{2} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \frac{-7 + \sqrt{45}}{2} \end{cases}$.

Vậy có 2 giá trị m thỏa mãn.

Câu 39: Tìm m để đồ thị (C) của $y = x^3 - 3x^2 + 4$ và đường thẳng $y = mx + m$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt $A(-1;0)$, B , C sao cho ΔOBC có diện tích bằng 64.

A. $m = 14$.

B. $m = 15$.

C. $m = 16$.

D. $m = 17$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} d(O, BC) &= \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}} \\ BC &= \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(m^2 + 1)(x_B - x_C)^2} \\ &= \sqrt{(m^2 + 1)[(x_B + x_C)^2 - 4x_Bx_C]} = \sqrt{(m^2 + 1)4m} \\ \Rightarrow S_{\Delta OBC} &= \frac{1}{2} d(O, BC).BC = m\sqrt{m} = 64 \Leftrightarrow m = 16. \end{aligned}$$

Cách 2:

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = mx + m \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 4x + 4 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ (x-2)^2 = m(*) \end{cases}$$

Đề d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 9 \end{cases}$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{m} \Rightarrow B(2 - \sqrt{m}; 3m - m\sqrt{m}) \\ x = 2 + \sqrt{m} \Rightarrow C(2 + \sqrt{m}; 3m + m\sqrt{m}) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OB} = (2 - \sqrt{m}; 3m - m\sqrt{m}), \overrightarrow{OC} = (2 + \sqrt{m}; 3m + m\sqrt{m})$$

$$\Rightarrow S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}| = m\sqrt{m} = 64 \Rightarrow m = 16.$$

Câu 40: Cho hàm số $y = x^3 - 8x^2 + 8x$ có đồ thị (C) và hàm số $y = x^2 + (8-a)x - b$ có đồ thị (P) . Biết đồ thị hàm số (C) cắt (P) tại ba điểm có hoành độ nằm trong $[-1; 5]$. Khi a đạt giá trị nhỏ nhất thì tích ab bằng

A. -729 .

B. 375 .

C. 225 .

D. -384 .

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3 - 8x^2 + 8x = x^2 + (8-a)x - b \Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + ax + b = 0$.

$$\text{Gọi } m, n, p \text{ là 3 nghiệm của phương trình ta có } \begin{cases} m+n+p=9 \\ mn+np+pm=a \\ mnp=-b \end{cases}$$

Do (C) cắt (P) tại ba điểm có hoành độ nằm trong $[-1; 5]$ nên

$$\begin{cases} (m+1)(n+1)(p+1) \geq 0 \\ (5-m)(5-n)(5-p) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mnp + (mn+np+pm) + (m+n+p) + 1 \geq 0 \\ -mnp + 5(mn+np+pm) - 25(m+n+p) + 125 \geq 0 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế của hệ phương trình trên ta có $6(mn+np+pm) - 24(m+n+p) - 124 \geq 0 \Leftrightarrow mn+np+pm \geq 15 \Rightarrow a \geq 15$.

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} mnp \geq -25 \\ mnp \leq -25 \end{cases} \Leftrightarrow mnp = -25 \Rightarrow b = 25$$

Vậy tích $ab = 375$.

Cách 2: Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3 - 8x^2 + 8x = x^2 + (8-a)x - b \Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + ax + b = 0$.

Khi đó phương trình có 3 nghiệm nằm trong $[-1; 5]$.

Đặt $f(x) = x^3 - 9x^2 + ax + b$ suy ra $f'(x) = 3x^2 - 18x + a$. Để phương trình có 3 nghiệm nằm trong $[-1; 5]$ thì $f'(x) = 3x^2 - 18x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-1; 5] \Leftrightarrow a = -3x^2 + 18x$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[-1; 5]$.

Xét hàm số $g(x) = -3x^2 + 18x$ suy ra $g'(x) = -6x + 18$, ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Bảng biến thiên của $y = g(x)$

x	-1	3	5
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	21	27	15

Từ BBT ta có $15 \leq a < 27$ suy ra giá trị nhỏ nhất của a bằng 15 khi $x = 5$, khi đó $b = 25$.
 Vậy tích $ab = 375$.

- Câu 41:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $y = -mx + m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + mx^2 + m$ tại 3 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $-1 < x_1 + x_2 + x_3 < 3$?.
- A.** 6. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

$$(d)y = -mx + m, (C)y = x^3 + mx^2 + m.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) : $x^3 + mx^2 + mx = 0$ (1).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + mx + m = 0 \end{cases} (2)$$

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (2), $x_3 = 0$.

(1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm x_1, x_2 phân biệt và khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0, \Delta = m^2 - 4m \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty).$$

(1) có 3 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa $-1 < x_1 + x_2 + x_3 < 3$, với $x_1 + x_2 = -m$, $x_3 = 0$.

$$\Leftrightarrow -1 < -m < 3$$

$$\Leftrightarrow -3 < m < 1, \text{ mà } m \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty), m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow m \in \{-2; -1\}. \text{ Vậy có 2 giá trị } m.$$

- Câu 42:** Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ (C_m). Tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = x + 4$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B , C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ với điểm $K(1;3)$ là:

A. $m = \frac{1+\sqrt{137}}{2}$. **B.** $m = \frac{\pm 1+\sqrt{137}}{2}$. **C.** $m = \frac{1\pm\sqrt{137}}{2}$. **D.** $m = \frac{1-\sqrt{137}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (d) là:

$$x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2mx^2 + (m+2)x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot [x^2 + 2mx + (m+2)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4 \\ x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

(d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (1) có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 0^2 + 2m \cdot 0 + m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -1 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -1 \\ m \neq -2 \end{cases}$$

Khi đó, (2) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 tương ứng cũng là hoành độ của B và C .

$$\Rightarrow B(x_1; x_1 + 4) \text{ và } C(x_2; x_2 + 4).$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{KB} = (x_1 - 1; x_2 + 1) \text{ và } \overrightarrow{KC} = (x_2 - 1; x_2 + 1).$$

$$\Rightarrow S_{\Delta KBC} = \frac{|(x_1 - 1)(x_2 + 1) - (x_2 - 1)(x_1 + 1)|}{2} = |x_1 - x_2|.$$

$$\text{Theo đề bài: } S_{\Delta KBC} = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 128 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 128$$

$$\Leftrightarrow (-2m)^2 - 4(m + 2) = 128 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{137}}{2}.$$

$$\text{Vậy tất cả các giá trị } m \text{ thỏa đề là } m = \frac{1 \pm \sqrt{137}}{2}.$$

Câu 43: Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của T bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

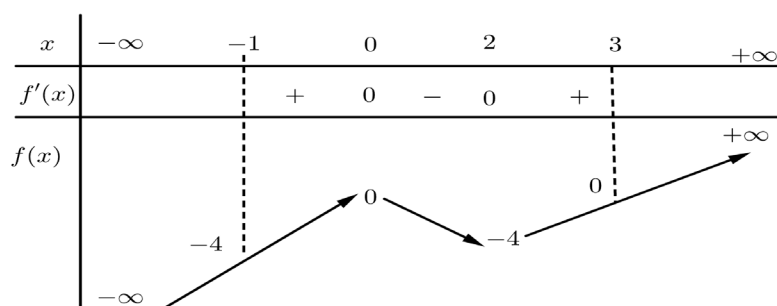
$$\text{Cách 1: Ta có } x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = m^3 - 3m^2 \Leftrightarrow f(x) = f(m)$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = x^3 - 3x^2.$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$f(x) = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}.$$



Dựa vào bảng biến thiên, suy ra có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4 < f(m) < 0 \quad \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

Suy ra $T = \{1\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của T bằng 1.

Cách 2: Ta có $x^3 - 3x^2 - m^3 + 3m^2 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - m^3) - 3(x^2 - m^2) = 0$

$$\Leftrightarrow (x - m)[x^2 + (m - 3)x + m^2 - 3m] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x^2 + (m - 3)x + m^2 - 3m = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt, khác m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m - 3)^2 - 4(m^2 - 3m) > 0 \\ m^2 + (m - 3)m + m^2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m - 3)(-3m - 3) > 0 \\ 3m^2 - 6m \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \neq 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow m = 1.$$

Suy ra $T = \{1\}$. Vậy tổng tất cả các phần tử của T bằng 1.

Câu 44: Cho đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ

$$x_1, x_2, x_3. \text{ Tính giá trị của biểu thức } P = \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} + \frac{1}{f'(x_3)}.$$

A. $P = 3 + 2b + c$. **B.** $P = 0$. **C.** $P = b + c + d$. **D.** $P = \frac{1}{2b} + \frac{1}{c}$.

Lời giải

Chọn B

Vì x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm của phương trình bậc ba $f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Ta có $f'(x) = (x - x_1)(x - x_2) + (x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3)$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} f'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \\ f'(x_2) = (x_2 - x_3)(x_2 - x_1) \\ f'(x_3) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } P &= \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{1}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} + \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \\ &= \frac{(x_2 - x_3) - (x_1 - x_3) + (x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} = 0. \end{aligned}$$

Câu 45: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị đi qua điểm $A(1;1), B(2;4), C(3;9)$. Các đường thẳng AB, AC, BC lại cắt đồ thị lần lượt tại các điểm M, N, P (M khác A và B , N khác A và C , P khác B và C). Biết rằng tổng các hoành độ của M, N, P bằng 5, giá trị của $f(0)$ là

A. -6. **B.** -18. **C.** 18. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thuyết bài toán ta giả sử $f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + x^2$ ($a \neq 0$)

Ta có: $AB: y = 3x - 2$, $AC: y = 4x - 3$, $BC: y = 5x - 6$.

Khi đó:

Hoành độ của M là nghiệm của phương trình: $a(x_M - 1)(x_M - 2)(x_M - 3) + x_M^2 = 3x_M - 2$

$$\Leftrightarrow a(x_M - 1)(x_M - 2)(x_M - 3) + (x_M - 1)(x_M - 2) = 0 \Leftrightarrow a(x_M - 3) + 1 = 0 \Leftrightarrow x_M = 3 - \frac{1}{a}.$$

Hoành độ của N là nghiệm của phương trình: $a(x_N - 1)(x_N - 2)(x_N - 3) + x_N^2 = 4x_N - 3$

$$\Leftrightarrow a(x_N - 1)(x_N - 2)(x_N - 3) + (x_N - 1)(x_N - 3) = 0 \Leftrightarrow a(x_N - 2) + 1 = 0 \Leftrightarrow x_N = 2 - \frac{1}{a}.$$

Hoành độ của P là nghiệm của phương trình: $a(x_P - 1)(x_P - 2)(x_P - 3) + x_P^2 = 5x_P - 6$

$$\Leftrightarrow a(x_P - 1)(x_P - 2)(x_P - 3) + (x_P - 2)(x_P - 3) = 0 \Leftrightarrow a(x_P - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow x_P = 1 - \frac{1}{a}.$$

Từ giả thuyết ta có: $x_M + x_N + x_P = 5 \Leftrightarrow 6 - \frac{3}{a} = 5 \Leftrightarrow a = 3$.

Do đó: $f(x) = 3(x-1)(x-2)(x-3) + x^2$

$$f(0) = -18.$$

Câu 46: Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d: y = m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5$.

A. $m \geq -3$.

B. $m \geq -2$

C. $m > -3$.

D. $m > -2$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 3x^2 + 2 = m(x-1) \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - mx + m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2x - m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ g(x) = x^2 - 2x - (m+2) = 0 (*) \end{cases}.$$

Để hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt

$$\text{khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2 + (m+2) > 0 \\ 1 - 2 - m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3.$$

Gọi x_2, x_3 là hai nghiệm phương trình (*).

$$\text{Theo định lý Viét ta có } \begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 \cdot x_3 = -(m+2) \end{cases}.$$

$$\text{Theo bài ta có } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5 \Leftrightarrow 1 + x_2^2 + x_3^2 > 5 \Leftrightarrow x_2^2 + x_3^2 > 4$$

$$\Leftrightarrow (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 > 4 \Leftrightarrow 4 + 2(m+2) > 4 \Leftrightarrow m > -2.$$

So sánh với điều kiện ở trên suy ra $m > -2$.

Kết luận: $m > -2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 47: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2m + 1$ và trục

Ox có đúng hai điểm chung phân biệt. Tính tổng T của các phần tử thuộc tập S

- A.** $T = -10$. **B.** $T = 10$. **C.** $T = -12$. **D.** $T = 12$.

Lời giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2m + 1$ và trục Ox là nghiệm của phương trình : $x^3 + 3x^2 - 9x + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow -x^3 - 3x^2 + 9x = 2m + 1$.

Xét hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = -3x^2 - 6x + 9, f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-27	5	$-\infty$	

Đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2m + 1$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = 2m + 1$ cắt đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x$ tại hai điểm phân biệt.

$$\text{Từ bảng biến thiên suy ra : } \begin{cases} 2m + 1 = 5 \\ 2m + 1 = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -14 \end{cases} \Rightarrow S = \{-14; 2\}.$$

Tổng của các phần tử thuộc tập S là : $T = -14 + 2 = -12$.

DẠNG 4. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI ĐỒ THỊ HÀM SỐ NHẤT BIẾN

Bài toán tổng quát

Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị (C) . Tìm tham số m để đường thẳng $d : y = \alpha x + \beta$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn điều kiện K?

Phương pháp giải

□ **Bước 1.**

Lập phương trình hoành độ giao điểm giữa d và (C) : $\frac{ax+b}{cx+d} = \alpha x + \beta$

$$\Leftrightarrow g(x) = \alpha cx^2 + (\beta c + \alpha d - a)x + \beta d - b = 0, \forall x \neq -\frac{d}{c}.$$

- Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có nghiệm nghiệm phân biệt $\neq -\frac{d}{c}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c\alpha \neq 0; \Delta > 0 \\ g\left(-\frac{d}{c}\right) \neq 0 \end{cases}. \text{ Giải hệ này, ta sẽ tìm được } m \in D_1 \text{ (i)}$$

-Gọi $A(x_1; \alpha x_1 + \beta)$, $B(x_2; \alpha y_2 + \beta)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của $g(x) = 0$ Theo Viét:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta c + \alpha d - a}{c\alpha}; P = x_1 x_2 = \frac{\beta d - b}{\alpha c} \quad (ii)$$

□ **Bước 2.**

-Biến đổi điều kiện K cho trước về dạng có chứa tổng và tích của x_1, x_2 (iii)

-Thế (ii) vào (iii) sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là m. Giải nó sẽ tìm được $m \in D_2$ (*)

-Từ (i), (*) $\Rightarrow m \in (D_1 \cap D_2)$ và kết luận giá trị m cần tìm.

Một số công thức tính nhanh “thường gặp” liên quan đến tương giao giữa đường thẳng

$$y = kx + p \text{ và đồ thị hàm số } y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Giả sử $d: y = kx + p$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ tại 2 điểm phân biệt M, N .

Với $kx + p = \frac{ax + b}{cx + d}$ cho ta phương trình có dạng: $Ax^2 + Bx + C = 0$ thỏa điều kiện $cx + d \neq 0$, có

$$\Delta = B^2 - 4AC. \text{ Khi đó:}$$

$$1). M(x_1; kx_1 + p), N(x_2; kx_2 + p) \Rightarrow \overline{MN} = (x_2 - x_1; k(x_2 - x_1)) \Rightarrow MN = \sqrt{(k^2 + 1)} \frac{\Delta}{A^2}$$

Chú ý: khi $\min MN$ thì tồn tại $\min \Delta, k = \text{const}$

$$2). OM^2 + ON^2 = (k^2 + 1)(x_1^2 + x_2^2) + (x_1 + x_2)2kp + 2p^2$$

$$3). \overline{OM} \cdot \overline{ON} = (x_1 \cdot x_2)(1 + k^2) + (x_1 + x_2)kp + p^2$$

$$4). OM = ON \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(1 + k^2) + 2kp = 0$$

Câu 48: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ của tham số m để đường thẳng

$y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 3}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt?

A. 4036.

B. 4040.

C. 4038.

D. 4034.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = x + m$ và đường cong $y = \frac{2x - 3}{x - 1}$

$$x + m = \frac{2x - 3}{x - 1} \Leftrightarrow (x + m)(x - 1) = 2x - 3 \quad (x \neq 1).$$

$$\Leftrightarrow x^2 + mx - x - m = 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + (m - 3)x - m + 3 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Ta có } \Delta = (m - 3)^2 - 4(-m + 3) = m^2 - 6m + 9 + 4m - 12 = m^2 - 2m - 3.$$

Để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 3}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt thì phương trình

(*) có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 1^2 + (m-3) \cdot 1 - m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 3 > 0 \\ 1 \neq 0 \quad (lđ) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}.$$

Theo giả thiết: $-2020 \leq m \leq 2020$ và $\begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$ nên $\begin{cases} -2020 \leq m < -1 \\ 3 < m \leq 2020 \end{cases}$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $-2020 \leq m < -1$, suy ra có $\frac{-2 - (-2020)}{1} + 1 = 2019$ giá trị nguyên m .

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $3 < m \leq 2020$, suy ra có $\frac{2020 - 4}{1} + 1 = 2017$ giá trị nguyên m .

Tóm lại có tất cả $2019 + 2017 = 4036$ giá trị nguyên của tham số m .

Câu 49: Đường thẳng $y = x + 2m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi

A. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$ **D.** $-3 < m < 1$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho

$$\frac{x-3}{x+1} = x + 2m \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2m)(x+1) = x-3 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + 2mx + 2m + 3 = 0 \quad (*).$$

Để đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có hai nghiệm phân biệt. Khi đó m phải thỏa mãn $\Delta'_{(*)} > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$.

Vậy tập hợp các giá trị của tham số m là $\begin{cases} m < -1 \\ m > 3 \end{cases}$.

Câu 50: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = 2x + m$ cắt đồ thị của hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

A. $m \in (-\infty; +\infty)$. **B.** $m \in (-1; +\infty)$. **C.** $m \in (-2; 4)$. **D.** $m \in (-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{x+3}{x+1} = 2x + m \quad (*),$ với điều kiện xác định $x \neq -1$.

Biến đổi về thành: $2x^2 + (m+1)x + m - 3 = 0 \quad (**).$

Theo yêu cầu đề bài, phương trình cần có hai nghiệm phân biệt khác -1 , tức là:

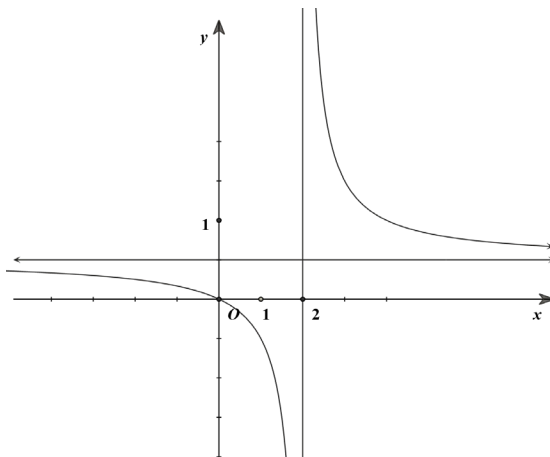
$$\begin{cases} \Delta = (m+1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (m-3) > 0 \\ 2 \cdot (-1)^2 + (m+1) \cdot (-1) + m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 25 > 0 \\ -2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; +\infty).$$

Câu 51: Gọi A và B là hai điểm thuộc hai nhánh khác nhau của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x-2}$. Khi đó độ dài đoạn AB ngắn nhất bằng

A. $4\sqrt{2}$. **B.** 4 . **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Hàm số $y = \frac{x}{x-2}$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Gọi $A\left(a; \frac{a}{a-2}\right)$ và $B\left(b; \frac{b}{b-2}\right)$ là hai điểm thuộc hai nhánh của (C) ($a < 2 < b$).

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = \left(b-a; \frac{b}{b-2} - \frac{a}{a-2}\right) = \left(b-a; \frac{b-a}{(b-2)(2-a)}\right).$$

$$\text{Áp dụng BĐT Côsi ta có: } (b-2)(2-a) \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

$$\text{Suy ra: } AB^2 = (b-a)^2 + \frac{(b-a)^2}{[(b-2)(2-a)]^2} \geq (b-a)^2 + \frac{64}{(b-a)^2} \geq 16$$

$$\Rightarrow AB \geq 4. \text{ Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } a = 2 - \sqrt{2} \text{ và } b = 2 + \sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } AB_{\min} = 4.$$

Câu 52: Cho hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ (C) và đường thẳng $d: y = -x + m$. Gọi S là tập các số thực m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB (O là gốc tọa độ) có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $2\sqrt{2}$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 4.

B. 3.

C. 0.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét phương trình } \frac{x}{x-1} = -x + m, \quad .$$

$$\text{Phương trình tương đương } x^2 - mx + m = 0 \quad (1).$$

Đồ thị (C) và đường thẳng d cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x \neq 1$ điều kiện cần và đủ là $m < 0 \vee m > 4$.

$$\text{Khi đó hai giao điểm là } A(x_1; -x_1 + m); B(x_2; -x_2 + m).$$

$$\text{Ta có } OA = \sqrt{m^2 - 2m}; OB = \sqrt{m^2 - 2m}; AB = \sqrt{2(m^2 - 4m)}; d(O, d) = \frac{|m|}{\sqrt{2}}.$$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(O, d) = \frac{1}{2} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2(m^2 - 4m)} = \frac{OA \cdot OB \cdot AB}{4R}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{2} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{2}} \sqrt{2(m^2 - 4m)} = \frac{(m^2 - 2m) \cdot \sqrt{2(m^2 - 4m)}}{4 \cdot 2\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m = 4|m| \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (l)} \\ m = 6 \text{ (n)} \\ m = -2 \text{ (n)} \end{cases}$$

Vậy tổng các phần tử của S bằng 4.

- Câu 53:** Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{1-x}$ (C) và đường thẳng $d: y = x + m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt
- A.** $m > -1$. **B.** $-5 < m < -1$. **C.** $m < -5$. **D.** $m < -5$ hoặc $m > -1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = \frac{2x-1}{1-x}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Lập phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-1}{1-x} = x + m \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = x+m-x^2-mx \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (m+1)x - (m+1) = 0 \text{ (*)} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt $x \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 1^2 + (m+1) - (m+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 6m + 5 > 0 \\ 1 \neq 0 \text{ (t/m)} \end{cases} \Leftrightarrow m < -5 \text{ hoặc } m > -1.$$

- Câu 54:** Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = x - m$, với m là tham số thực. Biết rằng đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho điểm $G(2; -2)$ là trọng tâm của tam giác OAB (O là gốc tọa độ). Giá trị của m bằng

- A.** 6. **B.** 3. **C.** -9. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \frac{x+3}{x+1}$ có $y' = \frac{-2}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in D$ và đường thẳng $d: y = x - m$ có hệ số $a = 1 > 0$

nên d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ với mọi giá trị của tham số m .

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $\frac{x+3}{x+1} = x - m$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx - m - 3 = 0 \quad (x \neq -1).$$

Suy ra x_A, x_B là 2 nghiệm của phương trình $x^2 - mx - m - 3 = 0$.

Theo định lý Viet, ta có $x_A + x_B = m$.

Mặt khác, $G(2; -2)$ là trọng tâm của tam giác OAB nên $x_A + x_B + x_O = 3x_G$

$$\Leftrightarrow x_A + x_B = 6$$

$$\Leftrightarrow m = 6.$$

Vậy $m = 6$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 55: Cho hàm số $y = \frac{3x-2m}{mx+1}$ với m là tham số. Biết rằng với mọi $m \neq 0$, đồ thị hàm số luôn cắt đường thẳng $d: y = 3x - 3m$ tại hai điểm phân biệt A, B . Tích tất cả các giá trị của m tìm được để đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại C, D sao cho diện tích $\triangle OAB$ bằng 2 lần diện tích $\triangle OCD$ bằng

A. $-\frac{4}{9}.$

B. $-4.$

C. $-1.$

D. $0.$

Lời giải

Chọn A

Với $m \neq 0$, xét phương trình $\frac{3x-2m}{mx+1} = 3x-3m \Leftrightarrow 3x^2 - 3mx - 1 = 0.$

Gọi tọa độ các giao điểm của d với đồ thị hàm số đã cho là: $A(x_1; 3x_1 - 3m), B(x_2; 3x_2 - 3m).$

Tọa độ các điểm C, D là $C(m; 0)$ và $D(0; -3m).$

Gọi $h = d_{(O,d)}$ thì h là chiều cao của các tam giác OAB và OCD .

Theo giả thiết: $S_{\triangle OAB} = 2S_{\triangle OCD} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.h = 2 \cdot \frac{1}{2}CD.h \Leftrightarrow AB = 2CD \Leftrightarrow AB^2 = 4CD^2$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 + [3(x_1 - x_2)]^2 = 4[m^2 + (-3m)^2]$$

$$\Leftrightarrow 10(x_1 - x_2)^2 = 40m^2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4m^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 + \frac{4}{3} = 4m^2 \Leftrightarrow m^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow m = \pm \frac{2}{3}.$$

Vậy tích các giá trị của m là $-\frac{4}{9}.$

Câu 56: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để đường thẳng $y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trọng tâm tam giác OAB (O là gốc tọa độ) thuộc đường thẳng $x - 2y - 2 = 0$?

A. $2.$

B. $1.$

C. $0.$

D. $3.$

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $-3x + m = \frac{2x+1}{x-1}$

Với điều kiện $x \neq 1, \Rightarrow 3x^2 - (m+1)x + m+1 = 0$

Đường thẳng $y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 1, điều kiện:

$$\begin{cases} (m+1)^2 - 12(m+1) > 0 \\ 3 \cdot 1^2 - (m+1) \cdot 1 + m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 10m - 11 > 0 \\ 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 11 \end{cases}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $A(x_1; -3x_1 + m)$, $B(x_2; -3x_2 + m)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt phương trình. Theo Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = \frac{m+1}{3}$.

Gọi M là trung điểm AB , ta có: $M\left(\frac{m+1}{6}; \frac{m-1}{2}\right)$. Giả sử $G(x; y)$ là trọng tâm tam giác OAB

$$\text{, ta có } \overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \cdot \frac{m+1}{6} \\ y = \frac{2}{3} \cdot \frac{m-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m+1}{9} \\ y = \frac{m-1}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } G\left(\frac{m+1}{9}; \frac{m-1}{3}\right).$$

Mặt khác, điểm G thuộc đường thẳng $x - 2y - 2 = 0$ nên ta có: $\frac{m+1}{9} - 2 \cdot \frac{m-1}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{11}{5}$. Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 57: Giả sử $m = -\frac{b}{a}$, $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $(a, b) = 1$ là giá trị thực của tham số m để đường thẳng

$d: y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y - 2 = 0$, với O là gốc tọa độ. Tính $a + 2b$.

A. 2.

B. 5.

C. 11.

D. 21.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x-1} = -3x + m$, $x \neq 1$.

$$\Rightarrow 3x^2 - (m+1)x + m + 1 = 0 \quad (*).$$

Để (C) cắt d tại hai điểm phân biệt thì (*) phải có hai nghiệm phân biệt khác 1. Suy ra

$$\begin{cases} (m+1)^2 - 12(m+1) > 0 \\ 3 \cdot 1^2 - (m+1) \cdot 1 + (m+1) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+1 < 0 \\ m+1 > 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 11 \end{cases}.$$

Khi đó $A(x_1; -3x_1 + m)$, $B(x_2; -3x_2 + m)$, với x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình (*) đồng thời thỏa mãn $x_1 + x_2 = \frac{m+1}{3}$.

Gọi G là trọng tâm của ΔOAB , ta có $G\left(\frac{m+1}{9}; \frac{m-1}{3}\right)$.

Mà $G \in \Delta$ nên $\frac{m+1}{9} - 2 \cdot \frac{m-1}{3} - 2 = 0 \Rightarrow m = -\frac{11}{5}$. Suy ra $\begin{cases} a = 11 \\ b = 5 \end{cases}$.

Vậy $a + 2b = 21$.

Câu 58: Cho hàm số $y = \frac{3x+2}{x+2}$, (C) và đường thẳng $d: y = ax + 2b - 4$. Đường thẳng d cắt tại A, B đối xứng nhau qua gốc tọa độ O, khi đó $T = a + b$ bằng

- A. $T = 2$. B. $T = \frac{5}{2}$. C. $T = 4$. D. $T = \frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ: $\frac{3x+2}{x+2} = ax+2b-4; x \neq -2$.

$$\Leftrightarrow ax^2 + (2a+2b-7)x - 10 = 0 (*).$$

Đường thẳng d cắt tại hai điểm phân biệt A, B khi phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ (2a+2b-7)^2 - 4a(4b-10) > 0 (2*) \\ 4 \neq 0 \end{cases}$$

Gọi $A(x_1; ax_1+2b-4); B(x_2; ax_2+2b-4)$.

Do A, B đối xứng nhau qua gốc O nên $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ 4b-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=0 \\ b=2 \end{cases}$

Theo Viét của phương trình ta có $x_1+x_2 = \frac{7-2a-2b}{a}$.

$$\Rightarrow \frac{7-2a-2b}{a} = 0 \Leftrightarrow 7-2a-2b=0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}.$$

Thay $\begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 2 \end{cases}$ vào điều kiện thấy thỏa mãn.

$$\text{Vậy } a+b = \frac{7}{2}.$$

Câu 59: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm ΔOAB thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y - 2 = 0$, với O là gốc tọa độ.

- A. $m = -\frac{11}{5}$. B. $m = -\frac{1}{5}$. C. $m = 0$. D. $m = -2$.

Lời giải

Chọn A

Hoành độ hai điểm A, B là nghiệm của phương trình $-3x + m = \frac{2x+1}{x-1}$

$$\Leftrightarrow (-3x+m)(x-1) = 2x+1.$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - (m+1)x + m+1 = 0 (*).$$

$$\text{Điều kiện: } \Delta > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 4.3(m+1) > 0 \Leftrightarrow (m+1)(m-11) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 11 \end{cases}.$$

Khi đó phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_A, x_B thỏa mãn $x_A + x_B = \frac{m+1}{3}$.

Gọi $A(x_A; -3x_A + m)$, $B(x_B; -3x_B + m)$ thì trọng tâm của tam giác OAB là $G\left(\frac{x_A + x_B}{3}; \frac{-3(x_A + x_B) + 2m}{3}\right)$ hay $G\left(\frac{m+1}{9}; \frac{m-1}{3}\right)$.
 $G \in \Delta \Leftrightarrow \frac{m+1}{9} - 2 \cdot \frac{m-1}{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{11}{5}$.

- Câu 60:** Cho hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ có đồ thị là (C) . Tìm tập hợp tất cả các giá trị $a \in \mathbb{R}$ để qua điểm $M(0; a)$ có thể kẻ được đường thẳng cắt (C) tại hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua điểm M .
A. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. **B.** $(3; +\infty)$. **C.** $(-\infty; 0)$. **D.** $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng có hệ số góc k đi qua điểm $M(0; a)$ có dạng $y = kx + a$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y = kx + a$ là:

$$\frac{2x}{x-1} = kx + a \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x = kx^2 - kx + ax - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ kx^2 + (a - k - 2)x - a = 0 (*) \end{cases}$$

Ta cần tìm điều kiện của a để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khác 1 và thỏa mãn $\frac{x_1 + x_2}{2} = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$.

$$\text{Điều kiện này tương đương với } \begin{cases} k \neq 0 \\ (a - k - 2)^2 + 4ka > 0 \\ k \cdot 1^2 + (a - k - 2) \cdot 1 - a \neq 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ (a - k - 2)^2 + 4ka > 0 \\ -2 \neq 0 \\ \frac{k + 2 - a}{k} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k = a - 2 \\ 4(a - 2)a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 \neq 0 \\ k = a - 2 \\ a \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty) \end{cases} \Rightarrow a \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty).$$

- Câu 61:** Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N sao cho $MN \leq 10$.
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định của hàm số: $x \neq -1$.

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } \frac{2x-1}{x+1} = x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (m-1)x + m+1 = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt M, N khi và chỉ khi phương trình $x^2 + (m-1)x + m+1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 3 > 0 \\ 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 - 2\sqrt{3} \\ m > 3 + 2\sqrt{3} \end{cases} \quad (*)$$

Gọi $M(x_1; x_1 + m)$, $N(x_2; x_2 + m)$ là tọa độ giao điểm đường thẳng $y = x + m$ và đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

$$\text{Theo bài cho } MN \leq 10 \Leftrightarrow \sqrt{2(x_2 - x_1)^2} \leq 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 50$$

$$\text{Áp dụng định lí Viét cho phương trình } x^2 + (m-1)x + m+1 = 0 \text{ ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - m \\ x_1 \cdot x_2 = m + 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } MN \leq 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 50 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 53 \leq 0 \Leftrightarrow 3 - \sqrt{62} \leq m \leq 3 + \sqrt{62}$$

$$\text{Kết hợp với (*) thì } m \in (3 - \sqrt{62}; 3 - 2\sqrt{3}) \cup (3 + 2\sqrt{3}; 3 + \sqrt{62}).$$

Các số nguyên dương m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = \{7, 8, 9, 10\}$.

Câu 62: Cho là đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Tìm k để đường thẳng $d: y = kx + 2k + 1$ cắt tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A đến trục hoành bằng khoảng cách từ B đến trục hoành.

- A.** 1. **B.** $\frac{2}{5}$ **C.** -3. **D.** -2.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{2x+1}{x+1} = kx + 2k + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ kx^2 + (3k-1)x + 2k = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ycbt tương đương có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $|kx_1 + 2k + 1| = |kx_2 + 2k + 1|$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = k^2 - 6k + 1 > 0 \\ k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k^2 - 6k + 1 > 0 \\ 1 - 3k + 4k + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow k = -3.$$

Câu 63: Tìm điều kiện của m để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt.

- A.** $(-\infty; 0] \cup [16; +\infty)$ **B.** $(16; +\infty)$ **C.** $(-\infty; 0)$ **D.** $(-\infty; 0) \cup (16; +\infty)$

Lời giải

Chọn D

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình: $\frac{x-3}{x+1} = mx + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = (mx + 1)(x + 1) \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + mx + 4 = 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \quad (*)$$

Để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt thì phương trình

$$(*) \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } -1 \text{ hay } \begin{cases} \Delta > 0 \\ m(-1)^2 + m(-1) + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16m > 0 \\ 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (16; +\infty).$$

Câu 64: Gọi $M(a; b)$ là điểm trên đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x}$ sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $d: y = 2x + 6$ nhỏ nhất. Tính $(4a+5)^2 + (2b-7)^2$.

A. 162.

B. 2.

C. 18.

D. 0.

Lời giải

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng d là: $\frac{x-2}{x} = 2x + 6$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \quad (x \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Suy ra đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt $M_1(-2; 2), M_2\left(-\frac{1}{2}; 5\right)$.

Ta có $d(M; d) \geq 0, \forall M \Rightarrow \min d(M; d) = 0$ khi $M \in d$.

$$\text{Mà } M \in (C) \Rightarrow M = d \cap (C) \Rightarrow \begin{cases} M(-2; 2) \\ M\left(-\frac{1}{2}; 5\right) \end{cases}$$

$$\text{Với } M(-2; 2) \Rightarrow a = -2, b = 2 \Rightarrow (4a+5)^2 + (2b-7)^2 = 18.$$

$$\text{Với } M\left(-\frac{1}{2}; 5\right) \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = 5 \Rightarrow (4a+5)^2 + (2b-7)^2 = 18.$$

Câu 65: Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x}{1-x}$ cắt đường thẳng $y = x - m$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60° ?

A. 2

B. 1

C. 3

D. 0

Lời giải

$$\text{Xét phương trình hoành độ giao điểm } \frac{x}{1-x} = x - m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - mx + m = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Để có hai điểm phân biệt A, B thì phương trình phải có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\begin{cases} 1 - m + m \neq 0 \\ m^2 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases}$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$$

Giả sử $A(x_1; x_1 - m), B(x_2; x_2 - m)$, suy ra: $\overrightarrow{OA}(x_1; x_1 - m), \overrightarrow{OB}(x_2; x_2 - m)$

Theo giả thiết góc giữa hai đường thẳng OA và OB bằng 60° suy ra:

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) &= \cos 60^\circ \Leftrightarrow \frac{|x_1x_2 + (x_1 - m)(x_2 - m)|}{\sqrt{x_1^2 + (x_1 - m)^2} \sqrt{x_2^2 + (x_2 - m)^2}} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{|2x_1x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2|}{\sqrt{x_1^2x_2^2 + (x_1x_2 - mx_2)^2 + x_1^2(x_1x_2 - m)^2 + [(x_1 - m)(x_2 - m)]^2}} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{|2m - m^2 + m^2|}{\sqrt{m^2 + (m - mx_2)^2 + (m - mx_1)^2 + [x_1x_2 - m(x_1 + x_2) + m^2]^2}} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{|2m|}{\sqrt{m^2 + (m - mx_2)^2 + (m - mx_1)^2 + [m - m^2 + m^2]^2}} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{2 + (1 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2}} = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2 + (1 - x_2)^2 + (1 - x_1)^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) = 12 \\ &\Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

- Câu 66:** Để đường thẳng $d: y = x - m + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất thì giá trị của m thuộc khoảng nào?
- A.** $m \in (-4; -2)$ **B.** $m \in (2; 4)$ **C.** $m \in (-2; 0)$ **D.** $m \in (0; 2)$

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$$\frac{2x}{x-1} = x - m + 2 \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + m - 2 = 0 \quad (*)$$

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt:

$\Leftrightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\Leftrightarrow \Delta = (m+1)^2 - 4(m-2) = (m-1)^2 + 8 > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m+1 \\ x_1x_2 = m-2 \end{cases}$

Khi đó $A(x_1; x_1 - m + 2), B(x_2; x_2 - m + 2)$.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2 - m + 2 - x_1 + m - 2)^2} = \sqrt{2(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{2} \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \sqrt{2} \sqrt{(m-1)^2 + 8} \geq 4. \end{aligned}$$

$$AB \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow AB = 4 \Leftrightarrow m = 1.$$

- Câu 67:** Biết rằng đường thẳng $y = 2x + 2m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị của tham số m . Tìm hoành độ trung điểm của AB ?
- A.** $m + 1$ **B.** $-m - 1$ **C.** $-2m - 2$ **D.** $-2m + 1$

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là:

$$\frac{x^2 + 3}{x + 1} = 2x + 2m \Leftrightarrow x^2 + 2(1 + m)x + 2m - 3 = 0 \quad (1), (x \neq -1).$$

Đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (1 + m)^2 - (2m - 3) > 0 \\ (-1)^2 + 2(1 + m) \cdot (-1) + 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4 > 0, \forall m \\ -4 \neq 0 \end{cases}.$$

Khi đó, gọi $A(x_1; 2x_1 + 2m); B(x_2; 2x_2 + 2m)$

Hoành độ trung điểm của AB là $x_I = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{2 + 2m}{2} = -m - 1$.

- Câu 68:** Gọi (H) là đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 3}{x + 1}$. Điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (H) có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất, với $x_0 < 0$ khi đó $x_0 + y_0$ bằng
- A.** -1 . **B.** -2 . **C.** 3 . **D.** 0 .

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Dễ thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $d_1: x = -1$ và tiệm cận ngang $d_2: y = 2$.

$$\text{Do } M \in (H) \Rightarrow M \left(x_0; \frac{2x_0 + 3}{x_0 + 1} \right).$$

$$\text{Xét } d(M, d_1) + d(M, d_2) = |x_0 + 1| + \left| \frac{2x_0 + 3}{x_0 + 1} - 2 \right| = |x_0 + 1| + \left| \frac{1}{x_0 + 1} \right| \geq 2.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } |x_0 + 1| = \left| \frac{1}{x_0 + 1} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{cases}.$$

Theo đề bài, ta có $x_0 < 0$ nên nhận $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 1$.

Vậy $x_0 + y_0 = -1$.

- Câu 69:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{-2x + 1}{x + 1}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $AB \leq 2\sqrt{2}$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng
- A.** -6 . **B.** -27 . **C.** 9 . **D.** 0 .

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{-2x+1}{x+1} = -x+m$

Điều kiện: $x \neq -1$.

Phương trình $\Rightarrow \frac{-2x+1}{x+1} = -x+m$

$$\Leftrightarrow -2x+1 = (-x+m)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + (m+1)x + m - 1 = 0.$$

Để đường thẳng $d: y = -x+m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{-2x+1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B thì

$$\text{phương trình có 2 nghiệm phân biệt khác } -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ -3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 + 6m - 3 > 0.$$

$$\Leftrightarrow m \in (-\infty; -3 - 2\sqrt{3}) \cup (-3 + 2\sqrt{3}; +\infty).$$

Gọi $A(x_A; -x_A + m), B(x_B; -x_B + m)$ là tọa độ giao điểm:

Theo đề ta có:

$$AB \leq 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (x_B - x_A)^2} \leq 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(x_B - x_A)^2 = 8 \Leftrightarrow x_B^2 - 2x_A x_B + x_A^2 - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B - 4 \leq 0.$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 4(1-m) - 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 6m - 7 < 0 \Leftrightarrow m \in (-7; 1)$$

Từ và ta có $m \in (-7; -3 - 2\sqrt{2}) \cup (-3 + 2\sqrt{2}; 1)$.

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-6; 0\}$

Chọn A

Câu 70: Cho hàm số $y = \frac{2x-m^2}{x+1}$ có đồ thị (C_m) , trong đó m là tham số thực. Đường thẳng $d: y = m - x$ cắt (C_m) tại hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ với $x_A < x_B$; đường thẳng $d': y = 2 - m - x$ cắt (C_m) tại hai điểm $C(x_C; y_C), D(x_D; y_D)$ với $x_C < x_D$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để $x_A x_D = -3$. Số phần tử của tập S là

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Hoành độ điểm A và B là nghiệm phương trình: $2x - m^2 = (x+1)(m-x)$

$$\Leftrightarrow x^2 + (3-m)x - m^2 - m = 0 \text{ suy ra } x_A x_B = -m^2 - m; x_A + x_B = m - 3$$

Hoành độ điểm C và D là nghiệm phương trình: $2x - m^2 = (x+1)(2-m-x)$

$$\Leftrightarrow x^2 + (m+1)x - m^2 + m - 2 = 0 \text{ suy ra } x_C x_D = -m^2 + m - 2; x_C + x_D = -m - 1$$

Mặt khác x_A và x_D là nghiệm của phương trình: $x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -3 \\ x_D = 1 \end{cases}$. Suy ra

$$m^2 + 6m + 9 = 5m^2 - 2m + 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}.$$

DẠNG 5. BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG

. **Bài toán tổng quát:** Tìm m để đường thẳng $d: y = \alpha$ cắt đồ thị $(C): y = f(x; m) = ax^4 + bx^2 + c$ tại n điểm phân biệt thỏa mãn điều kiện K cho trước?

✎ **Phương pháp giải:**

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là: $ax^4 + bx^2 + c - \alpha = 0$

Đặt $t = x^2 \geq 0$ thì $(1) \Leftrightarrow at^2 + bt + c - \alpha = 0$

Tùy vào số giao điểm n mà ta biện luận để tìm giá trị $m \in D_1$. Cụ thể:

• Để $d \cap (C) = n = 4$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có 2 nghiệm } t_1, t_2 \text{ thỏa điều kiện: } 0 < t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$$

• Để $d \cap (C) = n = 3$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm } t_1, t_2 \text{ thỏa điều kiện: } 0 = t_1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} c - \alpha = 0 \\ \frac{b}{a} < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$$

• Để $d \cap (C) = n = 2$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có 2 nghiệm trái dấu hoặc có nghiệm kép dương} \Leftrightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ \Delta = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$$

• Để $d \cap (C) = n = 1$ điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có đúng 1 nghiệm

$$\Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm kép } = 0 \text{ hoặc } \begin{cases} t_1 < 0 \\ t_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ c - \alpha = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} c - \alpha = 0 \\ \frac{b}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in D_1.$$

Bước 2. Biến đổi điều kiện K về dạng có chứa tổng và tích của t_1, t_2

Thế biểu thức tổng, tích vào sẽ thu được phương trình hoặc bất phương trình với biến số là m . Giải chúng ta sẽ tìm được $m \in D_2$.

Kết luận: $m \in D_1 \cap D_2$.

□ **Tìm điều kiện để đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.**

Ta có: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (1), đặt $t = x^2 \geq 0$, thì có: $at^2 + bt + c = 0$ (2)

$$\text{Để (1) có 4 nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt dương, tức là: } \begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \end{cases}$$

Khi đó (1) có 4 nghiệm phân biệt lần lượt là $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$ lập thành cấp số cộng khi và chỉ

$$\text{khi: } \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} - (-\sqrt{t_1}) \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1. \text{ Theo định lý Vi - et } t_1 + t_2 = -\frac{b}{a} \text{ suy ra}$$

$$t_1 = -\frac{b}{10a}; t_2 = -\frac{9b}{10a}, \text{ kết hợp } t_1 \cdot t_2 = \frac{c}{a} \text{ nên có: } 9ab^2 = 100a^2c$$

Tóm lại: Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp

$$\text{số cộng, thì điều kiện cần và đủ là: } \begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ 9ab^2 = 100a^2c \end{cases}$$

Câu 71: Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 4x^2 + 3 + m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt là

- A.** $(-1; 3)$. **B.** $(-3; 1)$. **C.** $(2; 4)$. **D.** $(-3; 0)$.

Lời giải

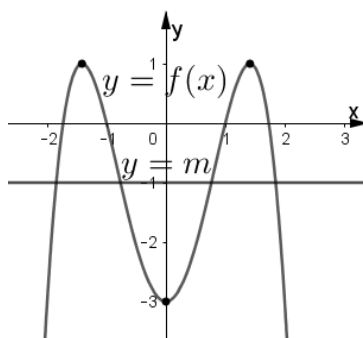
Chọn B

Ta có: $x^4 - 4x^2 + 3 + m = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 4x^2 - 3 = m$.

Xét hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 3$, khi đó:

$$y' = -4x^3 + 8x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = 0 \end{cases}.$$

Suy ra $y_{CD} = 1; y_{CT} = -3$.



Vậy để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thì: $-3 < m < 1 \Rightarrow m \in (-3; 1)$.

Câu 72: Tập tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2mx^2 + (2m - 1) = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt là

- A.** $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình: $x^4 - 2mx^2 + (2m - 1) = 0$.

Đặt $x^2 = t (t \geq 0)$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2mt + (2m - 1) = 0 (*)$.

Để phương trình ban đầu có bốn nghiệm thực phân biệt thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 1 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m \neq 1 \\ m > 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases} \text{ hay } m \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}.$$

Câu 73: Cho hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$. Tìm số thực dương m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O , trong đó O là gốc tọa độ.

- A.** $m = 2$. **B.** $m = \frac{3}{2}$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:

$$x^4 - 3x^2 - 2 = m \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 2 - m = 0 \quad (1).$$

Vì $m > 0 \Leftrightarrow -2 - m < 0$ hay phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn:

$$x^2 = \frac{3 + \sqrt{4m + 17}}{2} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{4m + 17}}{2}} \text{ và } x_2 = -\sqrt{\frac{3 + \sqrt{4m + 17}}{2}}.$$

Khi đó: $A(x_1; m)$, $B(x_2; m)$.

Ta có tam giác OAB vuông tại O , trong đó O là gốc tọa độ $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + m^2 = 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{3 + \sqrt{4m + 17}}{2} = m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 3 \geq 0 \\ 4m^4 - 12m^2 - 4m - 8 = 0 \end{cases} \xleftarrow[m^2 - 3 \geq 0]{m > 0} m = 2.$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 74: Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2$ tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi

- A.** $-\frac{1}{4} < m < 0$. **B.** $0 < m < \frac{1}{4}$. **C.** $m > 0$. **D.** $m > -\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = x^4 - x^2$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 2x.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+
y	$+\infty$				0			$+\infty$
			$-\frac{1}{4}$			$-\frac{1}{4}$		

Dựa vào bảng biến thiên đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2$ tại 4 điểm phân biệt
 $\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < m < 0$.

Câu 75: Một đường thẳng cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ tại 4 điểm phân biệt có hoành độ là 0, 1, m , n .
 Tính $S = m^2 + n^2$.

A. $S = 1$.

B. $S = 0$.

C. $S = 3$.

D. $S = 2$.

Lời giải

Chọn C

Tọa độ các giao điểm lần lượt là $A(0;0), B(1;-1), C(m; m^4 - 2m^2), D(n; n^4 - 2n^2)$.

Đường thẳng qua các điểm A, B, C, D có phương trình: $y = -x$.

$$\text{Xét phương trình hoành độ giao điểm: } x^4 - 2x^2 = -x \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x^2 + x - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Vậy m, n là các nghiệm của phương trình $(*)$.

$$\text{Khi đó: } S = m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2mn = 3.$$

Câu 76: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^3 + (m-2)x^2 + 8x + 4$ cắt trục hoành tại đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1.

A. 8.

B. 7.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm } x^4 - 4x^3 + (m-2)x^2 + 8x + 4 = 0$$

Đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^3 + (m-2)x^2 + 8x + 4$ cắt trục hoành tại đúng hai điểm có hoành độ lớn hơn 1 $\Leftrightarrow$ có đúng hai nghiệm lớn hơn 1.

$$(*) \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 8x + 4 = (2-m)x^2$$

$$\Leftrightarrow 2-m = x^2 - 4x + \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2}$$

Đây là phương trình hoành độ giao điểm của $(C): y = x^2 - 4x + \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2} (x > 1)$ với đường thẳng $y = 2-m$ song song với trục hoành.

$$\text{Xét hàm số } y = x^2 - 4x + \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2} (x > 1).$$

$$y' = 2x - 4 - \frac{8}{x^2} - \frac{8}{x^3} = \frac{2x^4 - 4x^3 - 8x - 8}{x^2}.$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{3} \text{ (loại)} \\ x = 1 + \sqrt{3} \text{ (nhận)} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	1	$1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
y'	-	0	+
y	9		$+\infty$

$y = 2 - m$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, ycbt $\Leftrightarrow 0 < 2 - m < 9 \Leftrightarrow -7 < m < 2$.

Vì m nguyên nên $m \in \{-6, -5, \dots, 1\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của m thỏa bài toán.

Câu 77: Cho hàm số $f(x) = -4x^4 + 8x^2 - 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = -16x^3 + 16x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'		0	-	0	
y		3	-1	3	

Phương trình $f(x) = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f(x) = -4x^4 + 8x^2 - 1$ (C) và đường thẳng $y = m$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm

$$\text{phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m < -1 \end{cases}.$$

Vậy có 1 giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x) = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

Câu 78: Cho hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + m$. Tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y = -3$ tại bốn điểm phân biệt, trong đó có một điểm có hoành độ lớn hơn 2 còn ba điểm kia có hoành độ nhỏ hơn 1, là khoảng $(a; b)$. Khi đó, $15ab$ nhận giá trị nào sau đây?

A. -63.

B. 63.

C. 95.

D. -95.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^4 + 2mx^2 + m = -3$. Đặt $x^2 = t$, $t \geq 0$. Khi đó phương trình trở thành $t^2 + 2mt + m + 3 = 0$ (1) và đặt $f(t) = t^2 + 2mt + m + 3$.

Để đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = -3$ tại 4 điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn $0 < t_1 < t_2$ và khi đó hoành độ bốn giao điểm là $-\sqrt{t_2} < -\sqrt{t_1} < \sqrt{t_1} < \sqrt{t_2}$.

Do đó, từ điều kiện của bài toán suy ra $\begin{cases} \sqrt{t_2} > 2 \\ \sqrt{t_1} < 1 \end{cases}$ hay $0 < t_1 < 1 < 4 < t_2$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} f(0) > 0 \\ f(1) < 0 \\ f(4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 > 0 \\ 3m+4 < 0 \\ 9m+19 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < -\frac{19}{9}$.

Vậy $a = -3$, $b = -\frac{19}{9}$ nên $15ab = 95$.

Câu 79: Đường thẳng $y = m^2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 - 10$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông (O là gốc tọa độ). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m^2 \in (5; 7)$. **B.** $m^2 \in (3; 5)$. **C.** $m^2 \in (1; 3)$. **D.** $m^2 \in (0; 1)$.

Lời giải

$$y' = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$-\frac{41}{4}$	-10	$-\frac{41}{4}$	$+\infty$				

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đường thẳng $y = m^2 \geq 0$ luôn phía trên trục hoành. Nên nó luôn cắt đồ thị hàm số tại hai điểm phân biệt A, B .

Gọi $A(\sqrt{a}; m^2)$ và $B(-\sqrt{a}; m^2)$ là giao điểm của hai đồ thị đã cho, với $a > 0$

Ta có

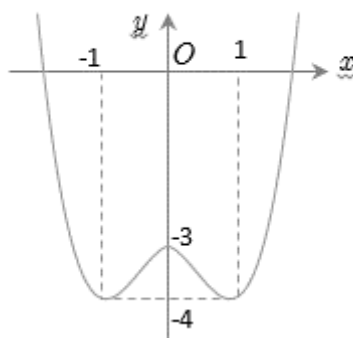
○ $A \in (C) \Leftrightarrow a^2 - a - 10 = m^2$ (1)

○ Tam giác OAB cân tại O nên tam giác OAB vuông tại $O \Leftrightarrow \overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0 \Leftrightarrow m^4 = a$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\Leftrightarrow m^8 - m^4 - m^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow t^4 - t^2 - t - 10 = 0$, với $t = m^2 > 0$.

$\Leftrightarrow (t-2)(t^3 + 2t^2 + 3t + 5) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2 \in (1; 3)$.

Câu 80: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Với giá trị nào của m thì phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = 2m - 4$ có 2 nghiệm phân biệt.



A. $\begin{cases} m < 0 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$

B. $m \leq \frac{1}{2}$

C. $0 < m < \frac{1}{2}$

D. $\begin{cases} m = 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy, phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 = 2m - 4$ có hai nghiệm phân biệt khi

$$\begin{cases} 2m - 4 = -4 \\ 2m - 4 > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 81: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $-x^4 + 2x^2 + 3 + 2m = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

A. $-2 \leq m \leq -\frac{3}{2}$

B. $-\frac{3}{2} < m < 2$

C. $-2 < m < -\frac{3}{2}$

D. $3 < m < 4$

Lời giải

- Ta có: $-x^4 + 2x^2 + 3 + 2m = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 3 = 2m$.

- Lập bảng biến thiên của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		-3		$+\infty$	
		-4		-4		

- Số nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ và đường thẳng $y = 2m$.

- Từ BBT ta thấy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$-4 < 2m < -3 \Leftrightarrow -2 < m < -\frac{3}{2}.$$

Câu 82: Tất cả các giá trị thực của tham số m , để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(2-m)x^2 + m^2 - 2m - 2$ không cắt trục hoành.

A. $m \geq \sqrt{3} + 1$

B. $m < 3$

C. $m > \sqrt{3} + 1$

D. $m > 3$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^4 - 2(2-m)x^2 + m^2 - 2m - 2 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2 \geq 0$. Phương trình (1) trở thành $t^2 - 2(2-m)t + m^2 - 2m - 2 = 0$ (2)

Đồ thị hàm số không cắt trục hoành $\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm hoặc có nghiệm âm

$$\text{Hay } \begin{cases} \Delta' = -2m + 6 < 0 \\ \Delta' = -2m + 6 \geq 0 \\ 2 - m < 0 \\ m^2 - 2m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m \leq 3 \\ m > 2 \\ m > 1 + \sqrt{3} \\ m < 1 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ 1 + \sqrt{3} < m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1 + \sqrt{3}.$$

Câu 83: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = (m+1)x^4 - 2(2m-3)x^2 + 6m+5$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có các hoành độ x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$.

A. $m \in \left(-1; -\frac{5}{6}\right)$. **B.** $m \in (-3; -1)$. **C.** $m \in (-3; 1)$. **D.** $m \in (-4; -1)$.

Lời giải

C1: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là

$$(m+1)x^4 - 2(2m-3)x^2 + 6m+5 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = x^2 \geq 0$ pt trở thành $(m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5 = 0 \quad (2)$

$$g(t) = (m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5$$

Để pt có 4 nghiệm phân biệt thì pt phải có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\text{Hay } \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ (2m-3)^2 - (m+1)(6m+5) > 0 \\ \frac{6m+5}{m+1} > 0 \\ \frac{2m-3}{m+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ \frac{-23-\sqrt{561}}{4} < m < \frac{-23+\sqrt{561}}{4} \\ m < -1 \vee m > -\frac{5}{6} \\ m < -1 \vee m > \frac{3}{2} \end{cases} \quad (*)$$

Để pt có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$

thì pt phải có 2 nghiệm thỏa $0 < t_1 < 1 < t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 - 1 < 0 \\ t_2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6m+5}{m+1} - \frac{2(2m-3)}{m+1} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{3m+12}{m+1} < 0 \Leftrightarrow -4 < m < -1$$

Kết hợp với ta có $m \in (-4; -1)$ thỏa yêu cầu bài toán.

C2:

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là

$$(m+1)x^4 - 2(2m-3)x^2 + 6m+5 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = x^2 \geq 0$ pt trở thành $(m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m+5 = 0 \quad (2)$

Để pt có 4 nghiệm thỏa mãn $x_1 < x_2 < x_3 < 1 < x_4$

thì pt phải có 2 nghiệm thỏa $0 < t_1 < 1 < t_2$

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow m = \frac{-t^2 - 6t - 5}{t^2 - 4t + 6}$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{-t^2 - 6t - 5}{t^2 - 4t + 6}$, với $t \in (0; +\infty)$

Ta có $f(t)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và có

$$f'(t) = \frac{10t^2 - 2t - 56}{(t^2 - 4t + 6)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1 - \sqrt{561}}{10} < 0 \\ t = \frac{1 + \sqrt{561}}{10} > 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	0	1	$\frac{1 + \sqrt{561}}{10}$	$+\infty$
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		$-\frac{5}{6}$	-4	-1

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $f(t) = \frac{-t^2 - 6t - 5}{t^2 - 4t + 6}$ tại hai giao điểm có hoành độ thỏa $0 < t_1 < 1 < t_2$ khi $-4 < m < -1$.

Câu 84: Cho hàm số $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$ có đồ thị là (C_m) . Tìm m để đường thẳng $d: y = -1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

A. $-\frac{1}{3} < m < 1$ và $m \neq 0$ **B.** $-\frac{1}{2} < m < 1$ và $m \neq 0$

C. $-\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}$ và $m \neq 0$

D. $-\frac{1}{3} < m < \frac{1}{2}$ và $m \neq 0$

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng d là $x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m = -1$

$$\Leftrightarrow x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m + 1 = 0$$

Đặt $t = x^2$, ($t \geq 0$), phương trình trở thành $t^2 - (3m + 2)t + 3m + 1 = 0$ (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3m + 1 \end{cases}$$

Đường thẳng $d: y = -1$ cắt đồ thị (C_m) tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < t_2 < 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m+1 \neq 1 \\ 0 < 3m+1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{1}{3} < m < 1 \end{cases}$$

CHƯƠNG

I

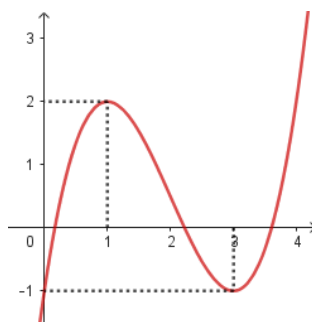
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

TỔNG HỢP



HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ là đa thức bậc 3 có đồ thị hàm số như hình vẽ.

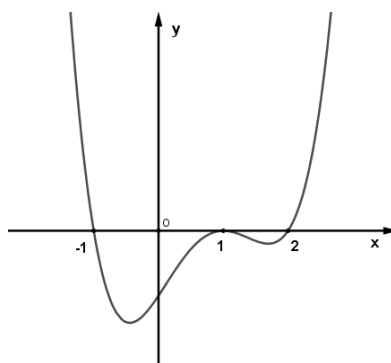


- a. GTNN của hàm số $y = f(x) + m$ trên đoạn $[1, 3]$ với $m = 0$ bằng -1
- b. GTLN của hàm số $y = f(x) + m$ ($m > 0$) trên đoạn $[1, 3]$ bằng $2 - m$
- c. GTLN của hàm số $y = |f(x + 2m) + 1|$ ($m > 0$) trên đoạn $[1 - 2m, 3 - 2m]$ bằng 3
- d. Hàm số $g(x) = f(2x^3 + 2x - 1) + m$ đạt GTLN trên đoạn $[0; 1]$ bằng 2020 khi $m = 2022$

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + m - 1$.

- a. Đạo hàm của hàm số $f(x)$ là $f'(x) = 3x^2 + 6x + m$.
- b. Hàm số đồng biến trên $(0; 2)$
- c. $\max_{[0; 2]} g(x) \geq 9$.
- d. Để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = |x^3 + 3x^2 + m - 1|$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $m = -9$.

Câu 3: Cho $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ:



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

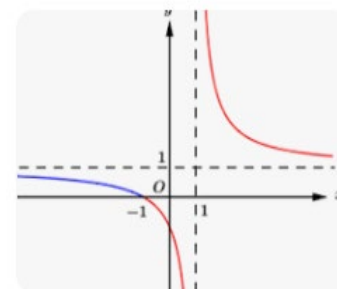
- a. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng $f(2)$.
- b. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng $f(1)$.
- c. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) - x^3$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng $f(-1) + 1$.
- d. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng $f(1) - \frac{2}{3}$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$	$-\infty$	2	-4	$+\infty$

- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(3; +\infty)$.
- b) Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.
- c) Hàm số đã cho là $y = \frac{4}{9}x^3 - 2x^2 + 2$.
- d) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x^2 + 2) + 4$ với trục hoành là 4.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



- a) Hàm số đã cho đồng biến trên $(1; +\infty)$.
- b) Hàm số có 2 điểm cực trị.
- c) Đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có tọa độ $(-1; 0)$.
- d) Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2f(x) - 3}{f(x) + 1}$ có phương trình là $y = -1$.

Câu 6: Giả sử một hạt chuyển động trên 1 trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3; t \geq 0$.

- Hàm vận tốc là $v(t) = 3t^2 - 12; t \geq 0$.
- Hạt chuyển động lên trên khi $t > 2$ (giây) và chuyển động xuống dưới khi $0 \leq t < 2$ (giây).
- Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 3$ là 6 mét.
- Hạt tăng tốc khi $t > 0$ và giảm tốc khi $t < 0$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x+3m}$ với m là tham số.

- Đồ thị hàm số có trục đối xứng.
- Khi $m = 1$, hàm số đồng biến trên $(-\infty; -5)$.
- Có 2 giá trị m sao cho hai đường tiệm cận cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình vuông.
- Tổng các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $(6; +\infty)$ bằng -3 .

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$, có đồ thị (C) .

- Đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ.
- Tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng 2 cắt trục tung tại điểm có hoành độ dương.
- Có ba giá trị nguyên của m sao cho phương trình $2|x|^3 - 2|x| - m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.
- Hàm số $y = f(x^2 + 1)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ với m là tham số.

- Đồ thị hàm số có tâm đối xứng.
- Khi $m = 1$, hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.
- Hàm số có 1 điểm cực trị khi m dương.
- Có duy nhất một giá trị m để ba điểm cực trị của hàm số trên tạo thành một tam giác vuông cân.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-2	0	-2	$+\infty$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.
- Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định bằng -1 .
- Hàm số có 2 tiệm cận đứng.

Câu 11: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 2$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = 4x^3 - 4x$.
- c) Tổng các nghiệm của phương trình $y' = 0$ là 3.
- d) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{mx - 5m - 4}{x + m}$ (m là tham số thực). Xét tính đúng sai các mệnh đề sau

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.
- b) Đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{m^2 + 5m + 4}{(x + m)^2}$.
- c) Có đúng 2 số nguyên m để hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng của tập xác định.
- d) Hàm số đã cho có tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[0; 1]$ bằng -15 khi và chỉ khi $m = \frac{1}{3}$.

Câu 13: Người ta muốn xây một cái bể hình hộp đứng có thể tích $V = 18(m^3)$, biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và bể không có nắp. Bể có chiều cao $h(m)$, chiều rộng đáy bể là $x(m)$. Xét tính đúng sai các mệnh đề sau

- a) Chiều dài đáy bể là $3x(m)$
- b) Biểu thức liên hệ giữa chiều cao và chiều rộng của bể là $h = \frac{18}{3x^2}$.
- c) Diện tích cần xây cái bể đó là $S(x) = 3x^2 - \frac{48}{x}$.
- d) Để nguyên vật liệu xây dựng là ít nhất thì chiều cao bể cần xây là khi chiều cao $h = 2(m)$ (biết nguyên vật liệu xây dựng các mặt là như nhau).

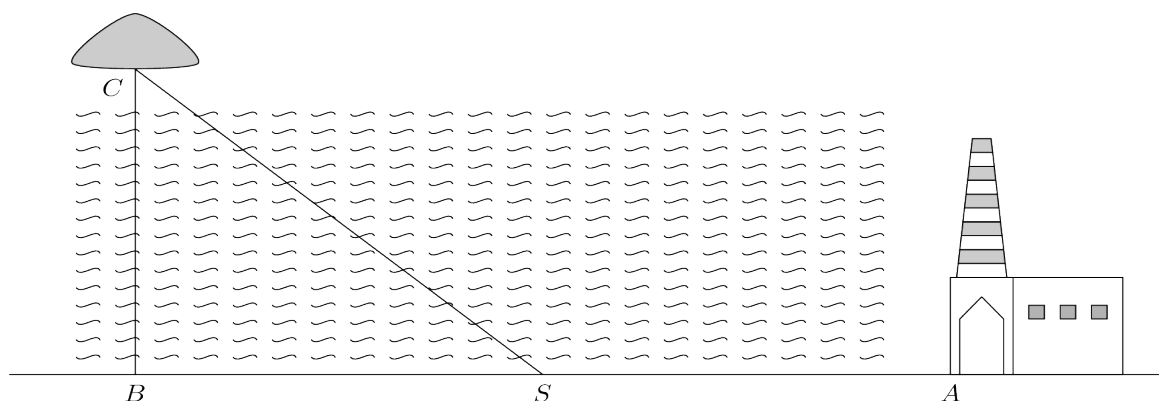
Câu 14: Cho hàm số $f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 3}{x - 1}$ có đồ thị (C) .

- a) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = -1$.
- b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $(-\infty; 1)$ bằng -1 .
- c) Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị nằm khác phía so với trục hoành.
- d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$ có đồ thị (C).

- Điểm $A(0; -2)$ thuộc đồ thị (C).
- Đồ thị (C) có tất cả 3 đường tiệm cận (đứng và ngang).
- Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.
- Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số tạo thành một đa giác có diện tích bằng 8.

Câu 16: Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A (nằm tại bờ biển là đường thẳng AB) đến một hòn đảo C , khoảng cách ngắn nhất từ đảo về bờ biển là đoạn BC dài 1 km, khoảng cách từ B đến A là 4 km được minh họa bằng hình vẽ dưới đây. Để kéo đường dây điện ra ngoài đảo, người ta đặt một trụ điện ở vị trí S trên bờ biển (như hình vẽ). Biết rằng mỗi km dây điện đặt dưới nước chi phí mất 5000 USD, còn đặt dưới đất chi phí mất 3000 USD.



- Khoảng cách từ hòn đảo C đến nhà máy điện A khoảng 4,1 km.
- Nếu trụ điện đặt tại trung điểm của AB thì tổng chi phí lắp đặt là 20000 USD.
- Nếu đặt $AS = x$ (với $0 < x < 4$) thì chi phí lắp đặt dây điện dưới nước là $5000\sqrt{x^2 - 8x + 17}$ USD.
- Tổng chi phí ít nhất để lắp đặt dây điện là 20 000 USD.

CHƯƠNG

I

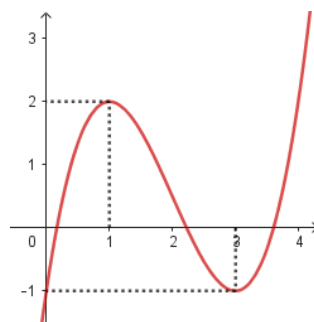
ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

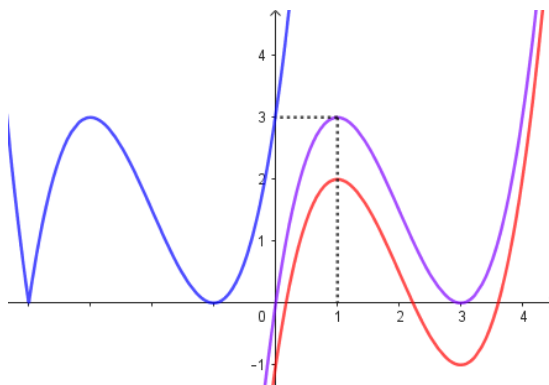
Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ là đa thức bậc 3 có đồ thị hàm số như hình vẽ.



- a. GTNN của hàm số $y = f(x) + m$ trên đoạn $[1, 3]$ với $m = 0$ bằng -1
- b. GTLN của hàm số $y = f(x) + m$ ($m > 0$) trên đoạn $[1, 3]$ bằng $2 - m$
- c. GTLN của hàm số $y = |f(x + 2m) + 1|$ ($m > 0$) trên đoạn $[1 - 2m, 3 - 2m]$ bằng 3
- d. Hàm số $g(x) = f(2x^3 + 2x - 1) + m$ đạt GTLN trên đoạn $[0; 1]$ bằng 2020 khi $m = 2022$

Lời giải

- a. **Đúng:** Với $m = 0$ khi đó hàm số $y = f(x) + m = f(x)$, dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta thấy $\min_{[1;3]} f(x) = -1$.
- b. **Sai:** Dịch chuyển đồ thị hàm số $f(x)$ lên trên theo trục Oy một đoạn $|m|$ đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = f(x) + m$. Khi đó $\max_{[1;3]} (f(x) + m) = 2 + m$.
- c. **Đúng:** Ta có đồ thị hàm số $y = |f(x + 2m) + 1|$ ($m > 0$) được biểu diễn như sau:



Do đó GTLN của hàm số $y = |f(x + 2m) + 1|$ ($m > 0$) trên đoạn $[1 - 2m, 3 - 2m]$ bằng 3.

d. Sai: Đặt $u = 2x^3 + 2x - 2 \Rightarrow u' = 6x^2 + 2 > 0$ với $\forall x$

Đặt $u = 2x^3 + 2x - 2 \Rightarrow u' = 6x^2 + 2 > 0$ với $\forall x \Rightarrow x \in [0; 1] \Leftrightarrow u \in [-2; 2]$

Xét $g(x) = f(u) + m$ với $u \in [-2; 2] \Rightarrow g'(x) = u' \cdot f'(u)$

Xét $g'(x) = 0 \Leftrightarrow u' \cdot f'(u) = 0 \Leftrightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 2$

BBT:

u	-2	1	2
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗ $2 + m$ ↘		

$\Rightarrow 2 + m = 2020 \Leftrightarrow m = 2018$.

Câu 2: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + m - 1$.

a. Đạo hàm của hàm số $f(x)$ là $f'(x) = 3x^2 + 6x + m$.

b. Hàm số đồng biến trên $(0; 2)$

c. $\max_{[0; 2]} g(x) \geq 9$.

d. Để giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = |x^3 + 3x^2 + m - 1|$ trên đoạn $[0; 2]$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $m = -9$.

Lời giải

Ta có:

a. Sai: $f(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x + m$

b. Đúng Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $(0; 2)$

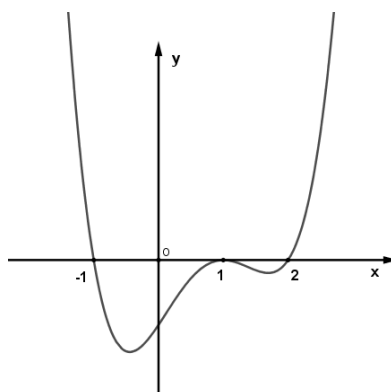
c. Sai Ta có $\max_{[0;2]} g(x) = \max\{|m-1|; |m+19|\}$

$$\geq \frac{|m-1| + |m+19|}{2} \geq \frac{|1-m+m+19|}{2} = 10$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

d. Đúng $\begin{cases} |m-1| = |m+19| \\ (1-m)(m+19) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m = -9 \text{ (thỏa mãn).}$

Câu 3: Cho $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ:



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng $f(2)$.

b. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng $f(1)$.

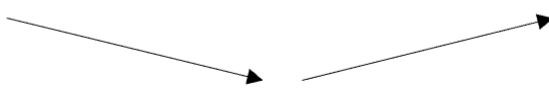
c. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) - x^3$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng $f(-1) + 1$.

d. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng $f(1) - \frac{2}{3}$.

Lời giải

a. Sai: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) \leq 0, \forall x \in [-1; 2]$ nên $\max_{[-1;2]} f(x) = f(-1)$.

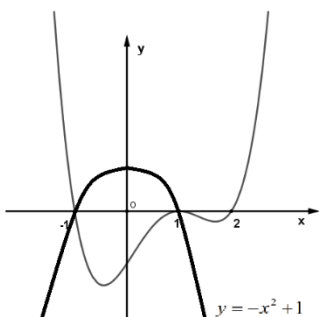
b. Sai: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta có BBT của hàm số $y = f(x)$ trên $[1; 3]$ như sau:

x	1	2	3
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Dựa vào BBT ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng $f(2)$.

c. Đúng: $y' = f'(x) - 3x^2 \leq 0, \forall x \in [-1;2]$ nên $\max_{[-1;2]} y = y(-1) = f(-1) + 1$.

d. Đúng:



$$g'(x) = f'(x) + x^2 - 1$$

$$* \quad g'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 1 - x^2 (*)$$

Dựa vào đồ thị trên (*) xảy ra: $\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$. Ta có bảng biến thiên:

x	-1	1	2	
$g'(x)$	0	-	0	+
$g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x^3 - x$	$f(-1) + \frac{2}{3}$	$f(1) - \frac{2}{3}$	$f(2) + \frac{2}{3}$	

$\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;2]$ bằng $f(1) - \frac{2}{3}$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f(x)$	$-\infty$	2	-4	$+\infty$

a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(3; +\infty)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị. Trần_Tuấn_Anh

c) Hàm số đã cho là $y = \frac{4}{9}x^3 - 2x^2 + 2$.

d) Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x^2 + 2) + 4$ với trục hoành là 4.

Lời giải

a) Đúng: Dựa vào bảng biến thiên.

b) Sai: Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị.

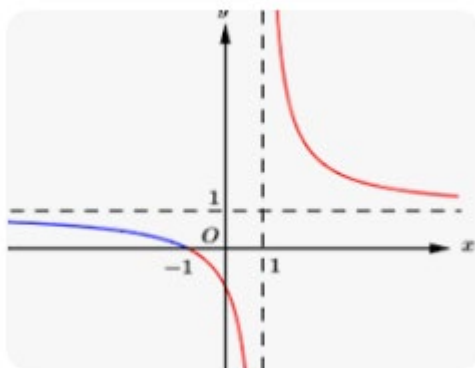
c) Đúng: Ta có với $y = \frac{4}{9}x^3 - 2x^2 + 2$ suy ra $y(0) = 2; y(3) = -4$

$$y' = \frac{4}{3}x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

d) Sai: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x^2 + 2) + 4$ với trục hoành là 2.

Xét phương trình $f(x^2 + 2) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x^2 + 2) = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2 = a < 0 (VN) \\ x^2 + 2 = 3 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow x = \pm 1$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



a) Hàm số đã cho đồng biến trên $(1; +\infty)$.

b) Hàm số có 2 điểm cực trị.

c) Đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm có tọa độ $(-1; 0)$.

d) Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x) = \frac{2f(x) - 3}{f(x) + 1}$ có phương trình là $y = -1$.

Lời giải

a) Sai: Dựa vào đồ thị ta có hàm số nghịch biến trên từng khoảng của tập xác định.

b) Sai: Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có điểm cực trị.

c) Đúng:

d) Sai:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2f(x)-3}{f(x)+1} = \frac{2 \cdot 1 - 3}{1+1} = \frac{-1}{2}$$

$\Rightarrow$ đường thẳng $y = \frac{-1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$.

Câu 6: Giả sử một hạt chuyển động trên 1 trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3; t \geq 0$.

a) Hàm vận tốc là $v(t) = 3t^2 - 12; t \geq 0$.

b) Hạt chuyển động lên trên khi $t > 2$ (giây) và chuyển động xuống dưới khi $0 \leq t < 2$ (giây).

c) Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 3$ là 6 mét.

d) Hạt tăng tốc khi $t > 0$ và giảm tốc khi $t < 0$.

Lời giải

a) Đúng: $v(t) = y' = 3t^2 - 12$.

b) Đúng: Hạt chuyển động lên trên khi $v(t) > 0 \Rightarrow 3t^2 - 12 > 0 \Rightarrow t > 2 (t \geq 0)$ (giây) và chuyển động xuống dưới khi $v(t) < 0 \Rightarrow 3t^2 - 12 < 0 \Rightarrow 0 \leq t < 2$ (giây).

c) Sai: Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 3$ là

$$|s(3) - s(0)| = |y(3) - y(0)| = 9m$$

d) Sai: Hạt tăng tốc khi $v'(t) > 0 \Rightarrow 6t > 0 \Rightarrow t > 0$ và giảm tốc khi $v'(t) < 0 \Rightarrow 6t < 0 \Rightarrow t < 0$ (vô lý).

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x+3m}$ với m là tham số.

a) Đồ thị hàm số có trục đối xứng.

b) Khi $m = 1$, hàm số đồng biến trên $(-\infty; -5)$.

c) Có 2 giá trị m sao cho hai đường tiệm cận cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình vuông.

d) Tổng các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $(6; +\infty)$ bằng -3 .

Lời giải

a) Sai.

b) Đúng: Khi $m = 1$, ta có hàm số: $y = \frac{x+1}{x+3}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Ta có $y' = \frac{2}{(x+3)^2} > 0, \forall x \in D$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(-\infty; -3)$, $(-3; +\infty)$.

c) Sai: Tiệm cận ngang: $y = 1$, tiệm cận đứng: $x = -3m$ với $3m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}$.

Hai đường tiệm cận cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình vuông

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3m = 1 \\ -3m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{3} \\ m = \frac{1}{3} \end{cases}. \text{ So với điều kiện, chọn } m = -\frac{1}{3}.$$

d) Đúng: Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3m\}$.

Ta có $y' = \frac{3m-1}{(x+3m)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên $(6; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0, \forall x \in (6; +\infty) \\ -3m \notin (6; +\infty) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m-1 < 0 \\ -3m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{3} \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < \frac{1}{3}.$$

Các giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m \in \left[-2; \frac{1}{3}\right)$, mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0\}$.

Vậy tổng các giá trị m bằng -3 .

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$, có đồ thị (C) .

a) Đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ.

b) Tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng 2 cắt trục tung tại điểm có hoành độ dương.

c) Có ba giá trị nguyên của m sao cho phương trình $2|x|^3 - 2|x| - m = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

d) Hàm số $y = f(x^2 + 1)$ có 3 điểm cực trị.

Lời giải

a) Đúng.

b) Sai: Ta có: $y' = 3x^2 - 3$.

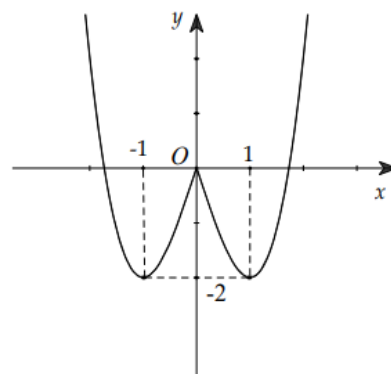
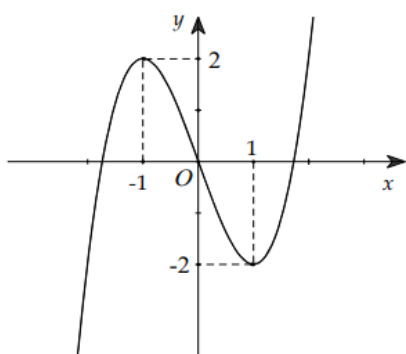
$$x_0 = 2, y_0 = 2, y'(x_0) = y'(2) = 9.$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 2 là: $y = 9x - 16$, tiếp tuyến này cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -16 .

c) Đúng:

$$2|x|^3 - 2|x| - m = 0 \Leftrightarrow |x|^3 - |x| = \frac{m}{2}.$$

Bỏ phần đồ thị của (C) nằm bên trái Oy , giữ nguyên phần đồ thị (C) còn lại. Lấy đối xứng phần đồ thị (C) được giữ lại qua Oy .



Dựa vào đồ thị, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -2 < \frac{m}{2} < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 0$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1\}$.

d) Sai:

Ta có: $y' = 2xf'(x^2 + 1) = 2x[3(x^2 + 1)^2 - 3] = 6x(x^2 + 1 - 1)(x^2 + 1 + 1) = 6x^3(x^2 + 2)$.

Do đó hàm số $y = f(x^2 + 1)$ có 1 điểm cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ với m là tham số.

a) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng.

b) Khi $m = 1$, hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

c) Hàm số có 1 điểm cực trị khi m dương.

d) Có duy nhất một giá trị m để ba điểm cực trị của hàm số trên tạo thành một tam giác vuông cân.

Lời giải

a) Sai.

b) Đúng: Khi $m = 1$, ta có hàm số: $y = x^4 - 4x^2 + 1$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 8x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}.$$

Hàm số đồng biến trên $(-\sqrt{2}; 0)$ và $(\sqrt{2}; +\infty)$, do đó đồng biến trên $(2; +\infty)$.

c) Sai: Hàm số có một cực trị khi $\begin{cases} ab > 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(m+1) > 0 \\ -2(m+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1$.

d) Đúng: Đồ thị số có ba điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > -1$.

Khi đó, ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0; m^2)$, $B(\sqrt{m+1}; -2m-1)$,
 $C(-\sqrt{m+1}; -2m-1)$.

Nhận thấy $AB^2 = AC^2 = m+1 + (m+1)^4$, $BC^2 = 4(m+1)$, do đó tam giác ABC luôn cân tại A .

Tam giác ABC vuông cân khi và chỉ tam giác ABC vuông cân tại A

$$\Leftrightarrow 2AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow 2[m+1 + (m+1)^4] = 4(m+1)$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^4 = m+1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 & (L) \\ m = 0 & (t/m) \end{cases}.$$

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-2	0	-2	$+\infty$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
- b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.
- c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định bằng -1 .
- d) Hàm số có 2 tiệm cận đứng.

Lời giải

- a) Đúng: Dựa vào BBT, suy ra hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- b) Đúng: Dựa vào BBT, suy ra hàm số đồng biến trên: $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
- c) Sai: Dựa vào BBT, suy ra giá trị nhỏ nhất trên tập xác định $\mathbb{R}$ của hàm số là -2 .
- d) Sai: Dựa vào BBT, hàm số không có tiệm cận đứng.

Câu 11: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 2$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = 4x^3 - 4x$.
- c) Tổng các nghiệm của phương trình $y' = 0$ là 3.
- d) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Lời giải

- a) Sai: hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- b) Đúng: hàm số đã cho có đạo hàm là $y' = 4x^3 - 4x$.

c) Sai: $y' = 4x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$. Nên tổng các nghiệm của phương trình $y' = 0$ là 0.

d) Đúng: Ta có BBT

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		-3		-2		-3		$+\infty$

Suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$

$\Rightarrow$ Hàm số cũng nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{mx - 5m - 4}{x + m}$ (m là tham số thực). Xét tính đúng sai các mệnh đề sau

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

b) Đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{m^2 + 5m + 4}{(x + m)^2}$.

c) Có đúng 2 số nguyên m để hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng của tập xác định.

d) Hàm số đã cho có tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[0; 1]$ bằng -15 khi và chỉ khi $m = \frac{1}{3}$.

Lời giải

a) Đúng: Điều kiện: $x \neq -m$. Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

b) Đúng: Đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{m^2 + 5m + 4}{(x + m)^2}$.

c) Đúng: Để hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định

$$\Leftrightarrow m^2 + 5m + 4 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < -1. \text{ Suy ra Các giá trị nguyên của } m \text{ là } -3, -2.$$

d) Sai: Hàm số đã cho đơn điệu trên từng khoảng của tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Suy ra để hàm số đã cho có tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[0; 1]$ bằng -15

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m \notin [0; 1] \\ f(0) + f(1) = \frac{-5m-4}{m} + \frac{-4m+4}{m+1} = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m \notin [0; 1] \\ 6m^2 + 10m - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Câu 13: Người ta muốn xây một cái bể hình hộp đứng có thể tích $V = 18(m^3)$, biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp 3 lần chiều rộng và bể không có nắp. Bể có chiều cao $h(m)$, chiều rộng đáy bể là $x(m)$. Xét tính đúng sai các mệnh đề sau

a) Chiều dài đáy bể là $3x(m)$

b) Biểu thức liên hệ giữa chiều cao và chiều rộng của bể là $h = \frac{18}{3x^2}$.

c) Diện tích cần xây cái bể đó là $S(x) = 3x^2 - \frac{48}{x}$.

d) Để nguyên vật liệu xây dựng là ít nhất thì chiều cao bể cần xây là khi chiều cao $h = 2(m)$ (biết nguyên vật liệu xây dựng các mặt là như nhau).

Lời giải

a) Đúng: Chiều rộng đáy bể là $x(m)$, ($x > 0$) thì chiều dài đáy bể là $3x(m)$.

b) Đúng: Bể hình hộp đứng thể tích $V = 18(m^3) = x \cdot 3x \cdot h \Rightarrow h = \frac{18}{3x^2}$.

c) Sai: Diện tích cần xây cái bể đó là: $S(x) = 3x^2 + 2 \cdot \frac{18}{3x^2} \cdot x + 2 \cdot \frac{18}{3x^2} \cdot 3x = 3x^2 + \frac{48}{x}$.

d) Sai: Ta có $S'(x) = 6x - \frac{48}{x^2} = \frac{6x^3 - 48}{x^2}$, suy ra $S'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^3 - 48 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

♦ Bảng biến thiên:

x	0	2	$+\infty$		
$S'(x)$		-	0	+	
$S(x)$	$+\infty$		36		$+\infty$

♦ Dựa vào bảng biến thiên, nguyên vật liệu xây dựng ít nhất bằng $36(m^2)$, khi chiều rộng đáy bể là $x = 2(m)$ và chiều cao $h = \frac{3}{2}(m)$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 3}{x - 1}$ có đồ thị (C) .

a) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = -1$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $(-\infty; 1)$ bằng -1 .

c) Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị nằm khác phía so với trục hoành.

d) Đường tiệm cận xiên của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

Lời giải

a) Sai. Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.

b) Sai. Ta có $f'(x) = \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
			3	-1	
				$\nearrow$	$\searrow$
					$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $(-\infty; 1)$ bằng 3.

c) Đúng. Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(0; 3)$ và $(2; -1)$ nằm khác phía so với trục hoành.

d) Đúng. Gọi $y = ax + b$ là đường tiệm cận xiên của hàm số.

Ta có $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$.

$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x] = 2$.

Vậy đường tiệm cận xiên của hàm số là $y = -x + 2$.

Đường tiệm cận xiên cắt trục tung tại điểm $A(0; 2)$ và trục hoành tại $B(2; 0)$.

Ta có OA vuông góc với OB và $OA = OB = 2$ nên tam giác OAB vuông cân tại O .

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$ có đồ thị (C) .

a) Điểm $A(0; -2)$ thuộc đồ thị (C) .

b) Đồ thị (C) có tất cả 3 đường tiệm cận (đứng và ngang).

c) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

d) Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số tạo thành một đa giác có diện tích bằng 8.

Lời giải

a) Sai. Tập xác định của hàm số $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. Vì $x = 0 \notin D$ nên điểm $A(0; -2)$ không thuộc đồ thị (C)

b) Sai. Ta có $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ nên đồ thị nhận $x = -2$ là tiệm cận đứng.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ nên đồ thị nhận $x = 2$ là tiệm cận đứng.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ nên đồ thị nhận $y = 1$ là tiệm cận ngang.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ nên đồ thị nhận $y = -1$ là tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị có 4 đường tiệm cận.

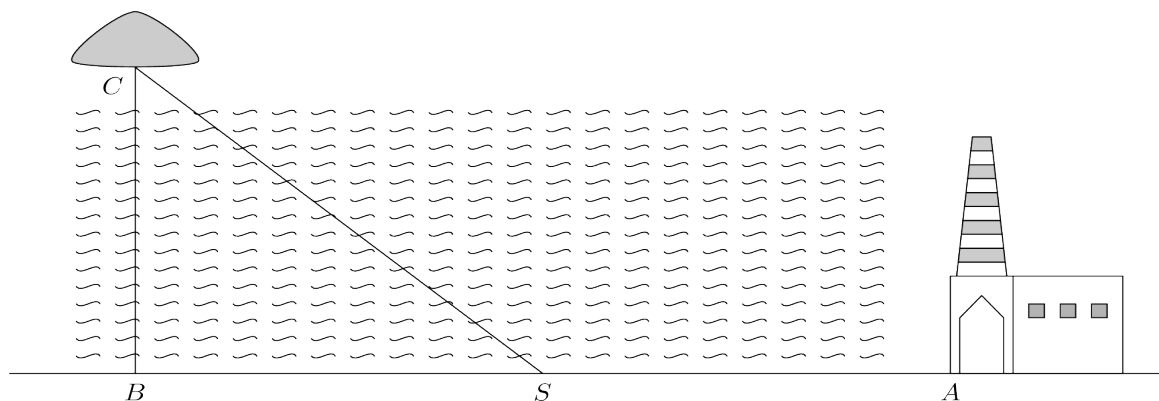
c) Đúng. Ta có $f'(x) = \frac{-4}{(x^2 - 4) \cdot \sqrt{x^2 - 4}}$.

Ta có $f'(x) < 0 \forall x \in (-\infty; -2)$ và $x \in (2; +\infty)$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

d) Đúng. Vì đồ thị hàm số nhận $x = -2$, $x = 2$ là tiệm cận đứng và nhận $y = -1$, $y = 1$ là tiệm cận ngang nên tạo thành hình chữ nhật có chiều dài là 4 và chiều rộng là 2. Do đó có diện tích là 8.

Trần_Tuấn_Angh

Câu 16: Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A (nằm tại bờ biển là đường thẳng AB) đến một hòn đảo C , khoảng cách ngắn nhất từ đảo về bờ biển là đoạn BC dài 1 km, khoảng cách từ B đến A là 4 km được minh họa bằng hình vẽ dưới đây. Để kéo đường dây điện ra ngoài đảo, người ta đặt một trụ điện ở vị trí S trên bờ biển (như hình vẽ). Biết rằng mỗi km dây điện đặt dưới nước chỉ phí mất 5000 USD, còn đặt dưới đất chỉ phí mất 3000 USD.



- Khoảng cách từ hòn đảo C đến nhà máy điện A khoảng 4,1 km.
- Nếu trụ điện đặt tại trung điểm của AB thì tổng chi phí lắp đặt là 20000 USD.
- Nếu đặt $AS = x$ (với $0 < x < 4$) thì chi phí lắp đặt dây điện dưới nước là $5000\sqrt{x^2 - 8x + 17}$ USD.
- Tổng chi phí ít nhất để lắp đặt dây điện là 20 000 USD.

Lời giải

a) Đúng. Ta có $AC = \sqrt{BC^2 + BA^2} = \sqrt{17} \approx 4,1$ km.

b) Sai. Vì trụ đặt tại trung điểm AB nên $BS = AS = 2$ km.

Ta có $CS = \sqrt{BC^2 + BS^2} = \sqrt{5}$.

Do đó, tổng chi phí lắp đặt là $5000 \cdot \sqrt{5} + 3000 \cdot 2 \approx 17180.34$ USD.

c) Đúng. Đặt $AS = x$ với $0 < x < 4$, khi đó $BS = 4 - x$ và $CS = \sqrt{BC^2 + BS^2} = \sqrt{1 + (4 - x)^2}$.

Chi phí lắp đặt dây điện từ A đến S là $P_1 = 3000x$. Liêm-29/05/24

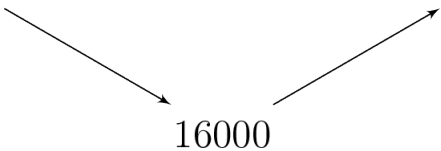
Chi phí lắp đặt dây điện từ C đến S là $P_2 = 5000\sqrt{1 + (4 - x)^2}$.

d) Sai. Tổng chi phí lắp đặt dây điện là $P = P_1 + P_2 = 3000x + 5000\sqrt{1 + (4 - x)^2}$.

Xét hàm $f(x) = 3000x + 5000\sqrt{1 + (4 - x)^2}$ trên khoảng $(0, 4)$.

Ta có $f'(x) = 3000 - \frac{5000(4 - x)}{\sqrt{x^2 - 8x + 17}}$, khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5(4 - x) = 3\sqrt{x^2 - 8x + 17} \Leftrightarrow x = \frac{13}{4}$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

x	0	$\frac{13}{4}$	4
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$			

Vậy tổng chi phí thấp nhất lắp đặt dây điện là 16000 USD.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

DẠNG 1. BIỆN LUẬN THEO THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN K (HÀM SỐ KHÁC)

- Câu 1:** Cho hai hàm số $y = \frac{x^2-1}{x} + \frac{x^2-2x}{x-1} + \frac{x^2-4x+3}{x-2} + \frac{x^2-6x+8}{x-3}$ và $y = |x+2| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tính tổng tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-15; 20)$ của tham số m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại nhiều hơn hai điểm phân biệt.
- Câu 2:** Cho hai hàm số $y = \frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x} + \frac{x+2}{x+1}$ và $y = e^x + 2020 + 3m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $(-2019; 2020)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 3 điểm phân biệt?
- Câu 3:** Cho hai hàm số $y = \frac{x}{x^2-1} + \frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x-2}{x^2-4x+3}$ và $y = x - |x+1| + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Số các giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-20; 20)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại năm điểm phân biệt là
- Câu 4:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Số phần tử của tập S là
- Câu 5:** Có bao nhiêu cặp số thực $(a; b)$ để bất phương trình $(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$
- Câu 6:** Trong số các cặp số thực $(a; b)$ để bất phương trình $(x-1)(x-a)(x^2+x+b) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$, tích ab nhỏ nhất bằng
- Câu 7:** Cho hàm số $f(x) = (x-1).(x-2)...(x-2020)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để phương trình $f'(x) = m.f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt?

Câu 8: Cho phương trình $4\cos^3 x - 12\cos^2 x - 33\cos x = 4m + 3\sqrt{3\cos^2 x + 9\cos x + m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất thuộc $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Câu 9: Cho hai hàm số $y = \ln\left|\frac{x-2}{x}\right|$ và $y = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x} + 4m - 2020$, Tổng tất các các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại một điểm duy nhất là

Câu 10: Cho hai hàm số $y = (x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)$; $y = -12x^4 - 22x^3 - x^2 + 10x + 3$ có đồ thị lần lượt là (C_1) , (C_2) . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2020; 2020]$ để (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt?

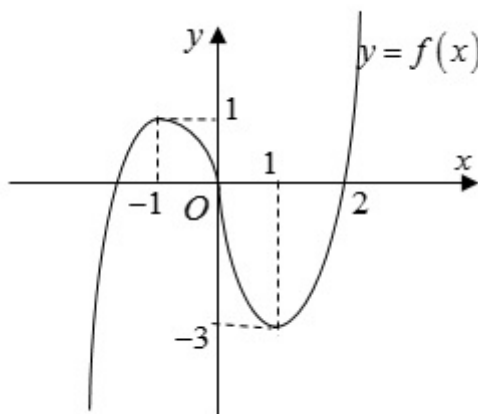
Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{(x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m}{x - 3}$ (C) và đường thẳng (d): $y = 2x$ (m là tham số thực).

Số giá trị nguyên của $m \in [-15; 15]$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt là

Câu 12: Cho hai hàm số $y = x^6 + 6x^4 + 6x^2 + 1$ và $y = x^3\sqrt{m-15x}(m+3-15x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của tập hợp S bằng

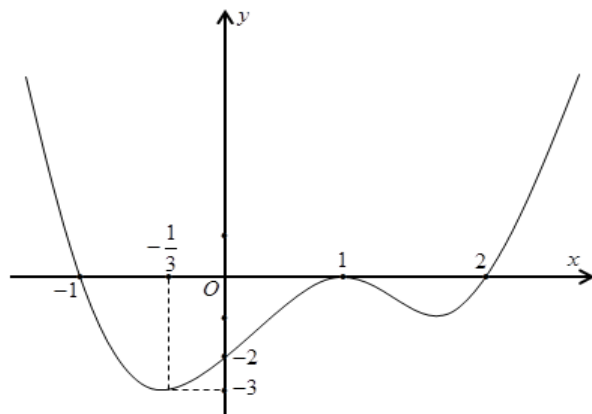
DẠNG 2. TƯƠNG GIAO HÀM HỢP, HÀM ẨN

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



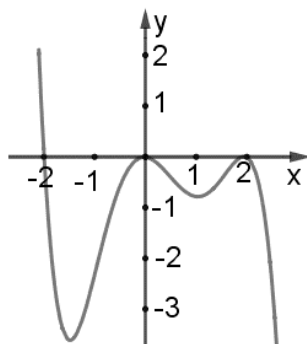
Số nghiệm của phương trình $f(2 + f(e^x)) = 1$ là

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.

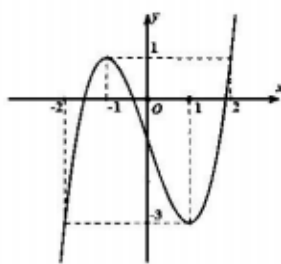


Đặt $g(x) = f(f'(x) - 1)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$. Số phần tử của tập S là

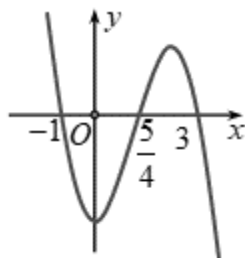
Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(f(x))$. Hỏi phương trình $g'(x) = 0$ có mấy nghiệm thực phân biệt?



Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f(f(x) - 1) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

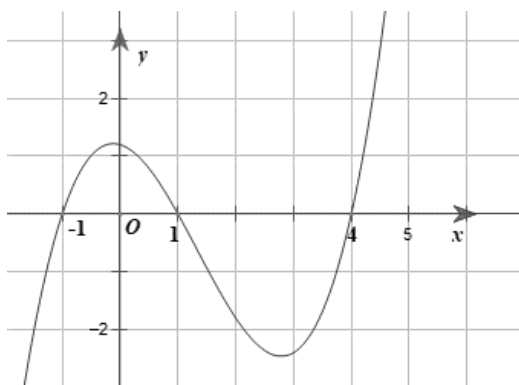


Câu 17: Cho hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$,. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



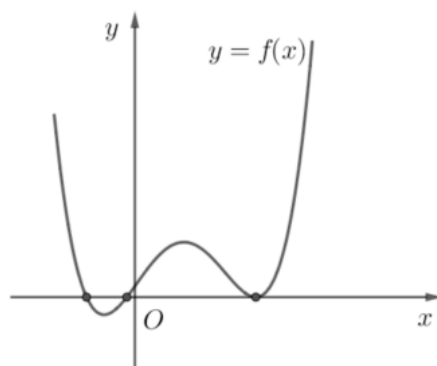
Tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ có số phần tử là

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$, trong đó $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ như hình vẽ dưới.



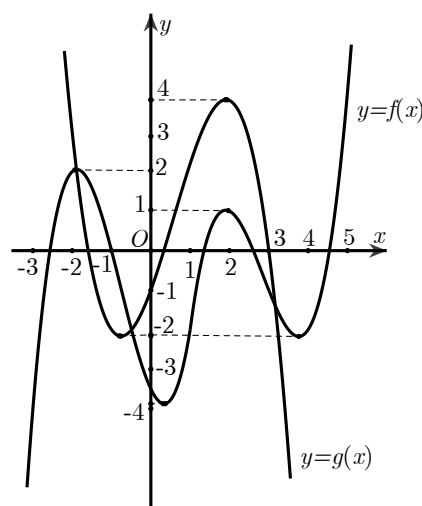
Tập nghiệm của phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$ có tất cả bao nhiêu phần tử.

Câu 19: Cho $f(x)$ là một hàm đa thức bậc bốn có đồ thị như hình dưới đây.



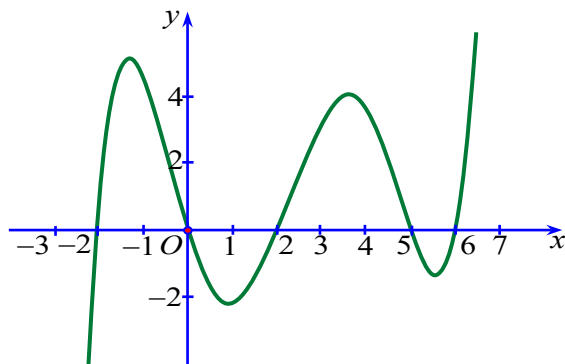
Tập nghiệm của phương trình $[f'(x)]^2 = f(x) \cdot f''(x)$ có số phần tử là

Câu 20: Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đồ thị như hình sau:



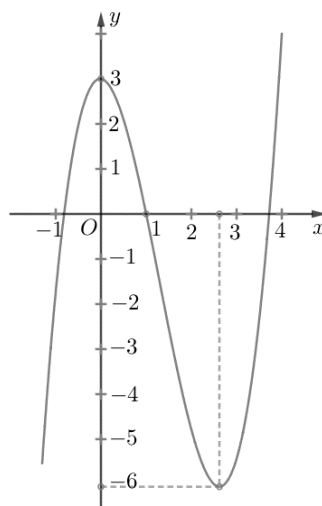
Khi đó tổng số nghiệm của hai phương trình $f(g(x)) = 0$ và $g(f(x)) = 0$ là

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:

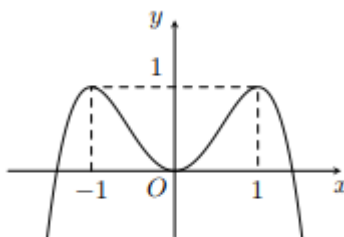


Số nghiệm thuộc đoạn $[-2; 6]$ của phương trình $f(x) = f(0)$ là

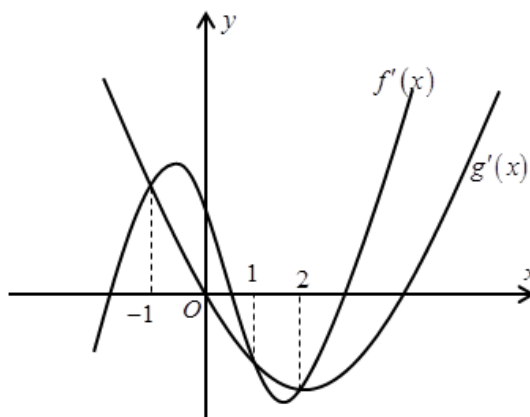
Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x) = f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



Câu 23: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ bên đây, trong đó a, b, c, d, e là các hệ số thực. Số nghiệm của phương trình $f(\sqrt{f(x)}) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ là

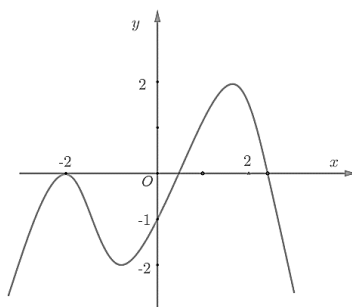


Câu 24: Cho các hàm số $f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$ và $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(n, n, p, q, r, a, b, c, d \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $f(0) = g(0)$. Các hàm số $f'(x)$, $g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây

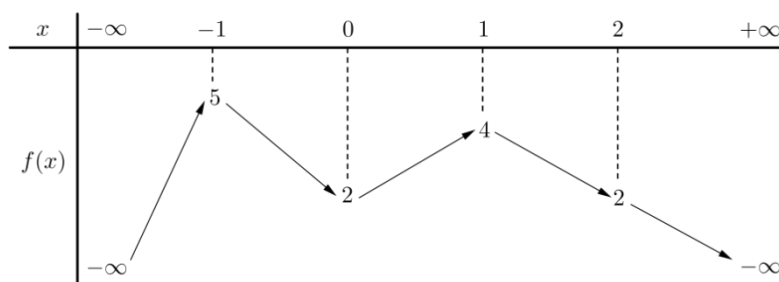


Tập nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ có số phần tử là

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp nghiệm của phương trình $f(f(x)) + 1 = 0$ có bao nhiêu phần tử?

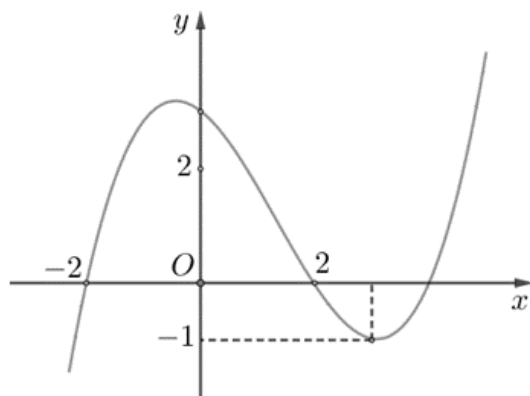


Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên



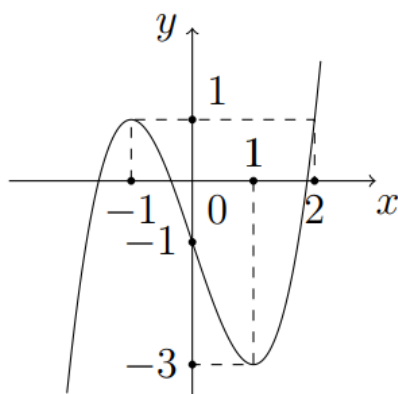
Phương trình $f(\sqrt{2x - x^2}) = 3$ có bao nhiêu nghiệm?

Câu 27: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

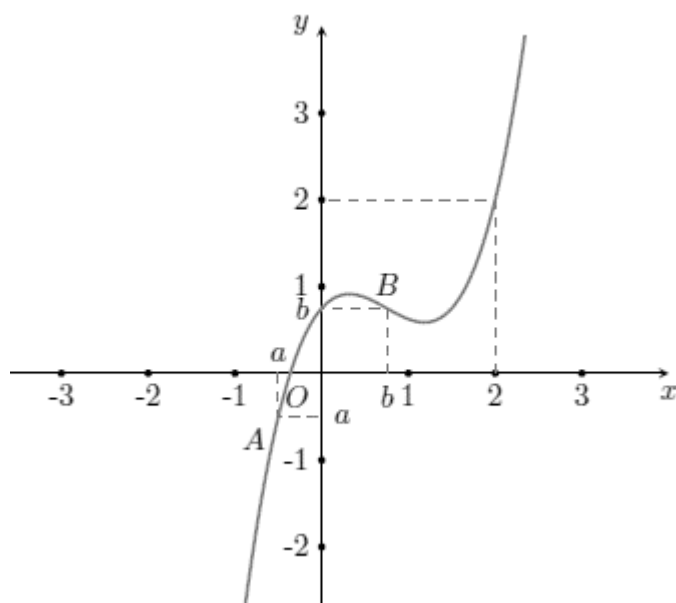


Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = 1$ là

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f[f(\cos x) - 1] = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$?



Câu 29: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ:



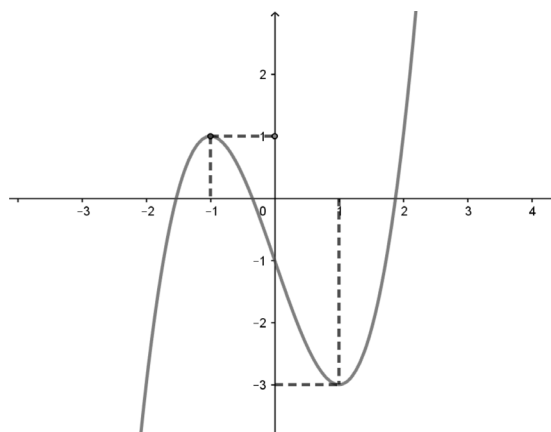
Số nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; 3\pi\right)$ của phương trình $f(\cos x + 1) = \cos x + 1$ là

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y		2		0		2	
	$-\infty$						$-\infty$

Số nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; \ln 2)$ của phương trình $2019f(1-e^x) - 2021 = 0$ là

Câu 31: Cho $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc 3 và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f(f(\cos x) - 1) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 3\pi]$?



Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	5	-3	$+\infty$	

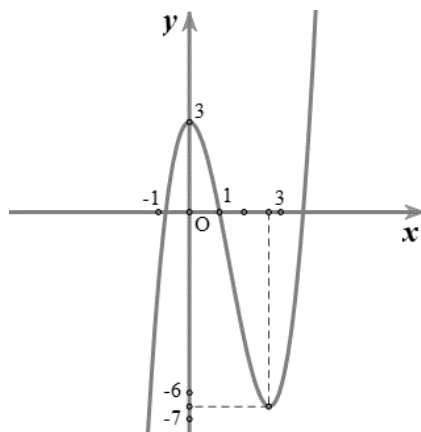
Phương trình $|f(3x+1) - 2| = 5$ có bao nhiêu nghiệm?

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$							$+\infty$
								</

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ của phương trình $3f\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}\right) - 7 = 0$ là:

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Đặt $g(x) = f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.

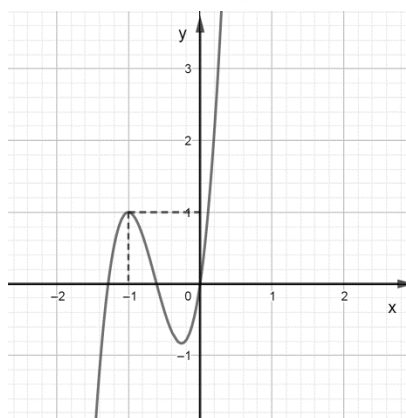


Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

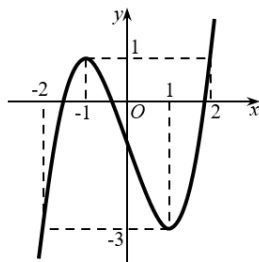
x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	2	-2	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(2\sin x + 1) = 1$ là

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f\left(f\left(\sqrt{f(x)}\right) + f(x) + 2\sqrt{f(x)}\right) - f(1) = 0$ là



Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x) - 1) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



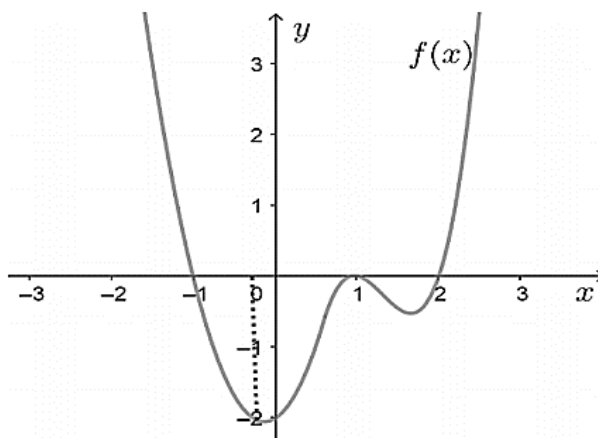
Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$			2020	$-\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $\nwarrow$
 -2020

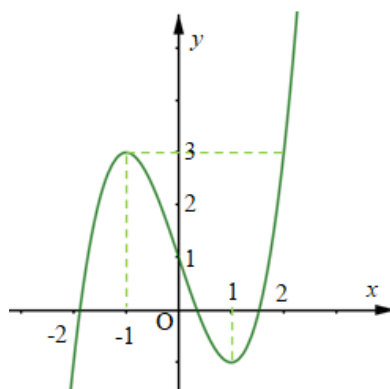
Số nghiệm của phương trình $|f(x + 2019) - 2020| = 2021$ là

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



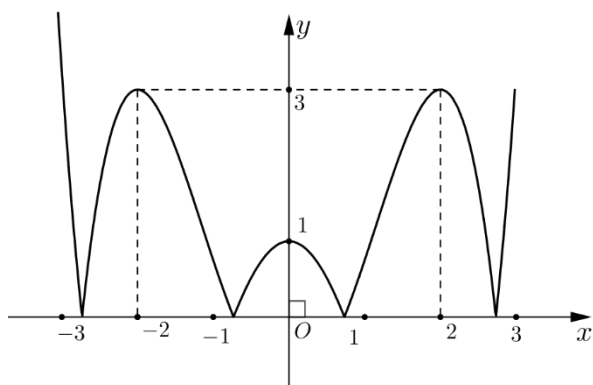
Đặt $g(x) = f(f(x) - 1)$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{7\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(f(\cos x)) = 0$ là

Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[2017\pi; 2020\pi]$ của phương trình $3f(2\cos x) = 8$.



CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

DẠNG 1. BIỆN LUẬN THEO THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN K (HÀM SỐ KHÁC)

Câu 1: Cho hai hàm số $y = \frac{x^2-1}{x} + \frac{x^2-2x}{x-1} + \frac{x^2-4x+3}{x-2} + \frac{x^2-6x+8}{x-3}$ và $y = |x+2| - x + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Tính tổng tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-15; 20)$ của tham số m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại nhiều hơn hai điểm phân biệt.

Lời giải

ĐS: 85

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x^2-1}{x} + \frac{x^2-2x}{x-1} + \frac{x^2-4x+3}{x-2} + \frac{x^2-6x+8}{x-3} = |x+2| - x + m$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x} + \frac{x^2-2x}{x-1} + \frac{x^2-4x+3}{x-2} + \frac{x^2-6x+8}{x-3} - |x+2| + x = m \quad (1).$$

Đặt $g(x) = \frac{x^2-1}{x} + \frac{x^2-2x}{x-1} + \frac{x^2-4x+3}{x-2} + \frac{x^2-6x+8}{x-3} - |x+2| + x$.

Ta có $g'(x) = 4 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-3)^2} + \frac{|x-2| - (x-2)}{|x-2|} > 0$ với mọi x thuộc các

khoảng sau $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$ và $(3; +\infty)$ nên hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
$g'(x)$	+	+	+	+	+	+
$g(x)$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại năm điểm phân biệt nên (C_1) và (C_2) luôn cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt với mọi giá trị của m . Kết hợp điều kiện m nguyên thuộc $(-15; 20)$ nên $m \in \{-14; -13; \dots; 18; 19\}$. Khi đó tổng tất cả các giá trị m là $S = 15 + 16 + 17 + 18 + 19 = 85$.

Câu 2: Cho hai hàm số $y = \frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x} + \frac{x+2}{x+1}$ và $y = e^x + 2020 + 3m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Có bao nhiêu số nguyên m thuộc $(-2019; 2020)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 3 điểm phân biệt?

Lời giải

ĐS: 2692

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x} + \frac{x+2}{x+1} = e^x + 2020 + 3m$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x} + \frac{x+2}{x+1} - e^x - 2020 = 3m \quad (1).$$

Đặt $g(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{x+1}{x} + \frac{x+2}{x+1} - e^x - 2020$.

Ta có $g'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} - e^x < 0$ với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty; -1)$,

$(-1; 0)$, $(0; 1)$ và $(1; +\infty)$ nên hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2017$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

Bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+		+		+
$g(x)$	-2017 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có ba nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y = 3m$ cắt đồ thị hàm số $y = g(x)$

tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi $3m \geq -2017 \Leftrightarrow m \geq -\frac{2017}{3} \approx -672,3$.

Do m nguyên thuộc $(-2019; 2020)$ nên $m \in \{-672; -671; \dots; 2019\}$. Vậy có tất cả 2692 giá trị m thỏa mãn.

Câu 3: Cho hai hàm số $y = \frac{x}{x^2-1} + \frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x-2}{x^2-4x+3}$ và $y = x - |x+1| + m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Số các giá trị m nguyên thuộc khoảng $(-20; 20)$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại năm điểm phân biệt là

Lời giải

ĐS: 21

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\frac{x}{x^2-1} + \frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x-2}{x^2-4x+3} = x - |x+1| + m$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x^2-1} + \frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x-2}{x^2-4x+3} - x + |x+1| = m \quad (1).$$

Đặt $g(x) = \frac{x}{x^2-1} + \frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x-2}{x^2-4x+3} - x + |x+1|$.

Ta có $g'(x) = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} + \frac{-x^2+2x-2}{(x^2-2x)^2} + \frac{-x^2+4x-5}{(x^2-4x+3)^2} - 1 + \frac{x+1}{|x+1|}$

$$= \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} + \frac{-(x-1)^2-1}{(x^2-2x)^2} + \frac{-(x-2)^2-1}{(x^2-4x+3)^2} + \frac{x+1-|x+1|}{|x+1|} < 0$$

với mọi x thuộc các khoảng sau $(-\infty; -1), (-1; 0), (0; 1), (1; 2), (2; 3)$ và $(3; +\infty)$ nên hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Mặt khác ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$.

Bảng biến thiên hàm số $y = g(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$g'(x)$	-	-	-	-	-	-	-
$g(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘ 1

Do đó để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng năm điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có năm nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại năm điểm phân biệt khi $m \leq 1$, do m nguyên thuộc $(-20; 20)$ nên $m \in \{-19; -18; \dots; 0; 1\}$. Vậy có tất cả 21 giá trị m thỏa mãn.

Câu 4: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình

$$m^2 x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x \geq 0 \text{ nghiệm đúng với mọi } x \in \mathbb{R}. \text{ Số phần tử của tập } S \text{ là}$$

Lời giải

ĐS: 1

Đặt $f(x) = m^2 x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x$

Ta có $f(x) = m^2 x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x = x[m^2 x^3 - (m+2)x^2 + x + (m^2-1)]$. Giả sử $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x) = m^2 x^3 - (m+2)x^2 + x + (m^2-1) = 0$ thì hàm số $f(x) = m^2 x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x = 0$, nghĩa là $m^2 x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x \geq 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó, để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g(x) = m^2 x^3 - (m+2)x^2 + x + (m^2-1) = 0$ phải có nghiệm $x = 0$, suy ra $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Điều kiện đủ:

Với $m=1, f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 3x + 1)$ khi đó $f(1) = -1 < 0$ không thỏa mãn điều kiện $m^2x^4 - (m+2)x^3 + x^2 + (m^2-1)x \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. (loại)

Với $m=1, f(x) = x^4 - x^3 + x^2 = x^2(x^2 - x + 1) \geq 0, x \in \mathbb{R}$.

Vậy $S = \{-1\}$.

Câu 5: Có bao nhiêu cặp số thực $(a; b)$ để bất phương trình $(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

Lời giải

ĐS: 0

Đặt $f(x) = (x-1)(x+2)(ax^2+bx+2)$

Giả sử $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x) = (x+2)(ax^2+bx+2) = 0$ thì hàm số $f(x) = (x-1)(x+2)(ax^2+bx+2)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=1$, nghĩa là $(x-1)(x+2)(ax^2+bx+2) \geq 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó, để yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g(x) = (x+2)(ax^2+bx+2) = 0$ có nghiệm $x=1$ suy ra $a+b+2=0$ (1)

Lí luận tương tự có $h(x) = (x-1)(ax^2+bx+2) = 0$ cũng phải nhận $x=-2$ là nghiệm, suy ra $4a-2b+2=0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} a+b+2=0 \\ 4a-2b+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$

Điều kiện đủ:

Với $\begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$ có $f(x) = (x-1)(x+2)(-x^2-x+2) = -(x-1)^2(x+2)^2 \leq 0, x \in \mathbb{R}$.

Vậy không tồn tại cặp số thực $(a; b)$ nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6: Trong số các cặp số thực $(a; b)$ để bất phương trình $(x-1)(x-a)(x^2+x+b) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$, tích ab nhỏ nhất bằng

Lời giải

ĐS: 0,25

Đặt $f(x) = (x-1)(x-a)(x^2+x+b)$ và $g(x) = (x-a)(x^2+x+b)$

Giả sử $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x) = (x-a)(x^2+x+b) = 0$ thì hàm số $f(x) = (x-1)(x-a)(x^2+x+b)$ sẽ đổi dấu khi qua điểm $x=1$, nghĩa là $(x-1)(x-a)(x^2+x+b) \geq 0$ không có nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó yêu cầu bài toán được thỏa mãn thì một điều kiện cần là $g(x) = (x-a)(x^2+x+b) = 0$ có

nghiệm $x=1$ suy ra hoặc $\begin{cases} a=1 \\ x^2+x+b \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$ hoặc là phương trình $x^2+x+b=0$ có hai nghiệm $x=1$ và $x=a$

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} a=1 \\ x^2+x+b \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 1 > 0 \\ \Delta = 1-4b \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Trường hợp 2: phương trình $x^2+x+b=0$ có hai nghiệm $x=1$ và $x=a$

Ta thay $x=1$ vào phương trình $x^2+x+b=0$ có $1^2+1+b=0 \Rightarrow b=-2$. Với $b=-2$ có phương

$$\text{trình } x^2+x+b=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Vì $x=a$ cũng là nghiệm của phương trình nên $a=-2$.

$$\text{Trong trường hợp 1: } \begin{cases} a=1 \\ b \geq \frac{1}{4} \Rightarrow ab \geq \frac{1}{4} \end{cases} \text{ suy ra tích } ab \text{ nhỏ nhất khi } ab = \frac{1}{4}$$

Và với $a=1, b=\frac{1}{4}$, tích $ab=\frac{1}{4}$ thì bất phương trình đã cho tương đương với

$$(x-1)(x-1)\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ thỏa mãn với mọi } x \in \mathbb{R} \text{ (nhận)}$$

Trong trường hợp 2: Tích $ab=4 > \frac{1}{4}$

Vậy tích ab nhỏ nhất khi $ab=\frac{1}{4}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)=(x-1).(x-2)...(x-2020)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để phương trình $f'(x)=m.f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt?

Lời giải

ĐS: 4040

Ta có nhận xét: khi $f(x)=0$ thì phương trình $f'(x)=m.f(x)$ vô nghiệm.

$$\text{Do đó: } f'(x)=m.f(x) \Leftrightarrow m=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

$$\text{Xét hàm số } g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\dots+\frac{1}{x-2020}.$$

$$\text{Ta có } g'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{-1}{(x-2)^2}+\frac{-1}{(x-3)^2}+\dots+\frac{-1}{(x-2020)^2}<0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2; 3; \dots; 2020\}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	...	2020	$+\infty$
$g'(x)$	-		-		...		-
$g(x)$	0	$\searrow$ $-\infty$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$	...	$+\infty$ $\searrow$ 0	

Dựa vào BBT, phương trình $f'(x) = m \cdot f(x)$ có 2020 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > 0$ hoặc $m < 0$.

Kết hợp với điều kiện m là số nguyên thuộc $[-2020; 2020]$ nên $m \in \{n \in \mathbb{Z} \mid -2020 \leq n \leq 2020, n \neq 0\}$.

Vậy có tất cả 4040 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8: Cho phương trình $4\cos^3 x - 12\cos^2 x - 33\cos x = 4m + 3\sqrt{3\cos^2 x + 9\cos x + m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất thuộc $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Lời giải

ĐS: 15

Đặt $t = \cos x$ với $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$, với mỗi $t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ chỉ có một $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$

Ta có $4t^3 - 12t^2 - 33t = 4m + 3\sqrt{3t^2 + 9t + m}$ (1)

Bài toán trở thành tìm m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

$$\begin{aligned} \text{Đặt } u = \sqrt{3t^2 + 9t + m} &\Rightarrow \begin{cases} 4t^3 - 12t^2 - 33t = 4m + 3u \\ u^3 = 3t^2 + 9t + m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t^3 = 12t^2 + 33t + 4m + 3u \\ 4u^3 = 12t^2 + 36t + 4m \end{cases} \\ \Rightarrow 4t^3 - 4u^3 = 3u - 3t &\Leftrightarrow (t-u)(4t^2 + 4ut + 4u^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow u = t, (4t^2 + 4ut + 4u^2 + 3 > 0) \end{aligned}$$

Ta tìm m để phương trình $m = t^3 - 3t^2 - 9t$ có nghiệm duy nhất $t \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

$$\text{Xét } g(t) = t^3 - 3t^2 - 9t \Rightarrow g'(t) = 3t^2 - 6t - 9 \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (l)} \\ t = 3 \text{ (l)} \end{cases}$$

Vậy $g(1) \leq m \leq g\left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -11 \leq m \leq \frac{29}{8}$ vậy có 15 giá trị nguyên của m .

Câu 9: Cho hai hàm số $y = \ln\left|\frac{x-2}{x}\right|$ và $y = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x} + 4m - 2020$, Tổng tất các các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hai hàm số cắt nhau tại một điểm duy nhất là

Lời giải

ĐS: 506

+ Phương trình hoành độ điểm chung của hai đồ thị hàm số là

$$\ln\left|\frac{x-2}{x}\right| = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x} + 4m - 2020 \Leftrightarrow \ln\left|\frac{x-2}{x}\right| - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} = 4m - 2020 \quad (*)$$

Đồ thị của hai hàm số đã cho cắt nhau tại một điểm duy nhất khi và chỉ khi (*) có duy nhất một nghiệm.

+ Xét hàm số $y = \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} = \begin{cases} g_1(x) = \ln(x-2) - \ln x - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} & \text{khi } x > 2 \\ g_2(x) = \ln(2-x) - \ln x - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} & \text{khi } 0 < x < 2 \\ g_3(x) = \ln(2-x) - \ln(-x) - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} g_1'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } x > 2 \\ g_2'(x) = \frac{-1}{2-x} - \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } 0 < x < 2, \text{ do vậy } y=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases} \\ g_3'(x) = \frac{-1}{2-x} - \frac{1}{x} + \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{4(x^2-1)}{x^2(x-2)^2} & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

bảng biến thiên hàm số như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
y'	+	0	-	-	0	+
y	0	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	0

+ Qua bảng biến thiên này ta có (*) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 4m-2020=4 \\ 4m-2020=\ln 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=506 \in \mathbb{Z} \\ m=\frac{2020+\ln 3}{4} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

+ Từ đây yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi $m=506$.

Câu 10: Cho hai hàm số $y = (x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|)$; $y = -12x^4 - 22x^3 - x^2 + 10x + 3$ có đồ thị lần lượt là (C_1) , (C_2) . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2020; 2020]$ để (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt?

Lời giải

ĐS: 2021

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2) :

$$(x+1)(2x+1)(3x+1)(m+2|x|) = -12x^4 - 22x^3 - x^2 + 10x + 3 \quad (1)$$

Để đồ thị (C_1) cắt (C_2) tại 3 điểm phân biệt thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Với $x \in \left\{ -1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3} \right\}$: Không là nghiệm của phương trình (1).

Với $x \notin \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$ ta có:

$$(1) \Leftrightarrow m = \frac{-12x^4 - 22x^3 - x^2 + 10x + 3}{(x+1)(2x+1)(3x+1)} - 2|x| \Leftrightarrow m = -2x - 2|x| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3x+1}.$$

Xét hàm số $f(x) = -2x - 2|x| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3x+1}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\}$.

Suy ra: $f'(x) = -2 - \frac{2x}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(3x+1)^2}.$

Ta có: $f'(x) = \begin{cases} -4 - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(3x+1)^2} & \text{khi } x \in (0; +\infty) \\ -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(3x+1)^2} & \text{khi } x \in (-\infty; 0) \setminus \left\{-1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right\} \end{cases}$ và $f'(x)$ không

xác định tại $x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$- \parallel$	$- \parallel$	$- \parallel$	$- \parallel$	$-$
$f(x)$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$		$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thì $m \geq 0$. Do đó có 2021 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{(x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m}{x - 3}$ (C) và đường thẳng (d): $y = 2x$ (m là tham số thực).

Số giá trị nguyên của $m \in [-15; 15]$ để đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt là

Lời giải

ĐS: 15

Xét pt hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

$$\frac{(x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m}{x - 3} = 2x \Leftrightarrow (x^2 - 2x + m)^2 - 3x - m = 2x^2 - 6x \quad (x \neq 3)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + m)^2 = 2x^2 - 3x + m \quad (x \neq 3) \quad (*)$$

Đặt: $x^2 - 2x + m = t$ ta được hệ: $\begin{cases} x^2 - 2x + m = t \\ t^2 = 2x^2 - 3x + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - t + m = 0 \\ 2x^2 - t^2 - 3x + m = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow x^2 - t^2 - x + t = 0 \Rightarrow (x - t)(x + t - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = x \\ t = 1 - x \end{cases}$$

Suy ra: $\begin{cases} x^2 - 2x + m = x \\ x^2 - 2x + m = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m = 0 \quad (1) \\ x^2 - x + m - 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$

YCBT $\Leftrightarrow (*)$ phải có 4 nghiệm phân biệt khác 3 $\Leftrightarrow (1), (2)$ đều phải có hai nghiệm pb khác 3 và các nghiệm của chúng không trùng nhau.

$$-(1), (2) \text{ đều có hai nghiệm pb khác 3 khi: } \begin{cases} 9-4m > 0 \\ 3^3-3.3+m \neq 0 \\ 1-4(m-1) > 0 \\ 3^2-3+m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m \neq 0 \\ m < \frac{5}{4} \\ m \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1,25 \\ m \neq 0 \\ m \neq -5 \end{cases} (**)$$

$$-(1), (2) \text{ không có nghiệm trùng nhau} \Leftrightarrow \text{Hệ: } \begin{cases} x^2-3x+m=0 \\ x^2-x+m-1=0 \end{cases} \text{ Vô nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ x^2-3x+m=0 \end{cases} \text{ Vô nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x^2-3x+m=0 \end{cases} \text{ Vô nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m \neq \frac{5}{4} (***)$$

Vậy số giá trị nguyên của $m \in [-15; 15]$ đồng thời thỏa mãn (**) và (***) là 15.

Câu 12: Cho hai hàm số $y = x^6 + 6x^4 + 6x^2 + 1$ và $y = x^3 \sqrt{m-15x} (m+3-15x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2) . Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của tập hợp S bằng

Lời giải

ĐS: 2006

Ta biết (C_1) cắt (C_2) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^6 + 6x^4 + 6x^2 + 1 = x^3 \sqrt{m-15x} (m+3-15x)$ (1) có hai nghiệm phân biệt.

Điều kiện: $m-15x \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 15x$ (*).

Nếu $x=0$ thì phương trình (1) vô nghiệm. Suy ra $x \neq 0$.

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 6x + \frac{1}{x^3} = \sqrt{m-15x} (m+3-15x)$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = (\sqrt{m-15x})^3 + 3\sqrt{m-15x}.$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t) = t^3 + 3t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó (1)} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \sqrt{m-15x} \quad (2).$$

Nếu $x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm $\Rightarrow x > 0$.

Khi đó $\begin{cases} m > 0 \\ x + \frac{1}{x} > 0 \end{cases}$ nên $(2) \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = m - 15x \Leftrightarrow m = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + 15x$.

Đặt $g(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + 15x, x > 0$. $g'(x) = 2x - \frac{2}{x^3} + 15$.

Phương trình $g'(x) = 0$ có một nghiệm $x = \frac{1}{2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
g'			$-$	0	$+$
g		$+\infty$		$\frac{55}{4}$	$+\infty$

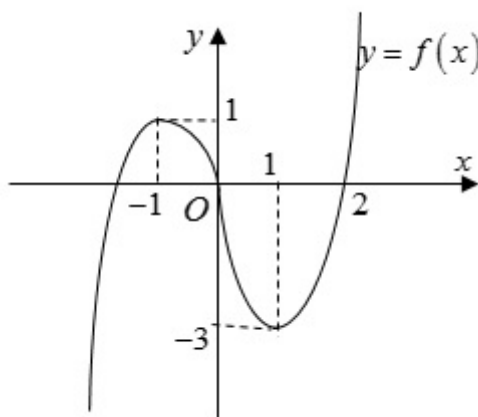
Suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m > \frac{55}{4}$ (thỏa $m > 0$).

Kết hợp với m nguyên và $m \in [-2019; 2019]$ ta có được m nguyên và $m \in [14; 2019]$.

Khi đó S có $2019 - 14 + 1 = 2006$ phần tử.

DẠNG 7. TƯƠNG GIAO HÀM HỢP, HÀM ẨN

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Số nghiệm của phương trình $f(2 + f(e^x)) = 1$ là

Lời giải

ĐS: 2

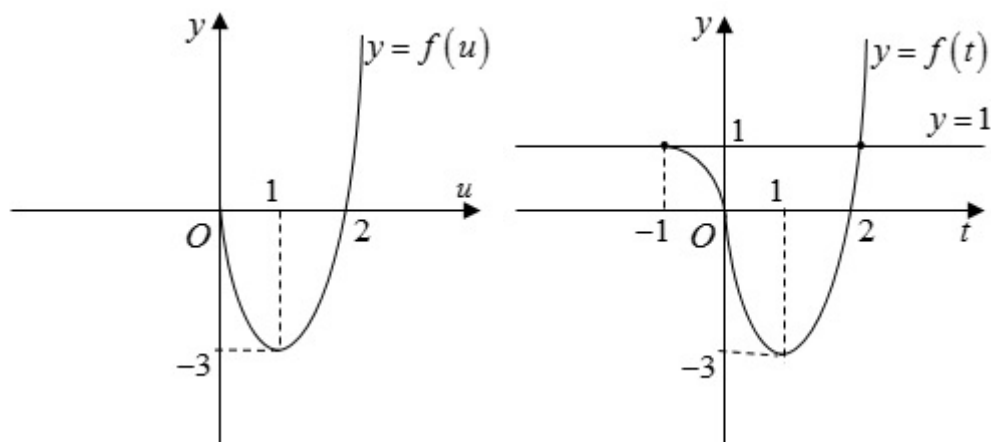
Đặt $u = e^x > 0$, từ đồ thị suy ra: $f(u) \geq -3, \forall u > 0$.

Đặt $t = 2 + f(u), t \geq -1$.

Ứng với mỗi nghiệm $t = -1$, có một nghiệm $u = 1$.

Ứng với mỗi nghiệm $t \in (-1; 2)$, có hai nghiệm $u \in (0; 2)$.

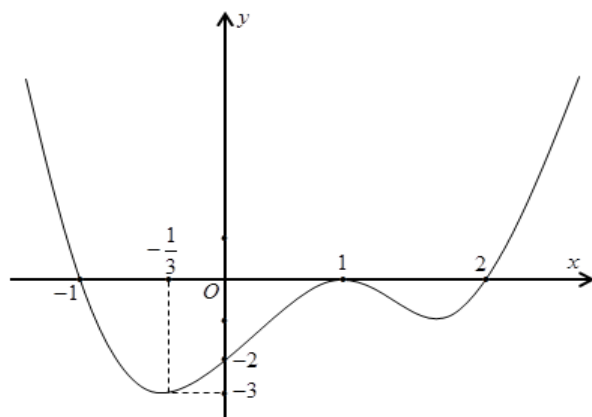
Ứng với mỗi nghiệm $t > 2$, có một nghiệm $u > 2$.



Phương trình $f(t)=1$ có một nghiệm $t=-1$ và một nghiệm $t>2$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $f'(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Đặt $g(x) = f(f'(x)-1)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$. Số phần tử của tập S là

Lời giải

ĐS: 9

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ và $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Do đó, tập xác định của hàm số $g(x)$ là $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } g'(x) = f''(x) \cdot f'(f'(x)-1), \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x) = 0 \\ f'(f'(x)-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{3} \\ x = 1 \\ x = x_0 \in (1; 2) \\ f'(x) - 1 = -1 \\ f'(x) - 1 = 1 \\ f'(x) - 1 = 2 \end{cases}$$

Từ đồ thị ta cũng có:

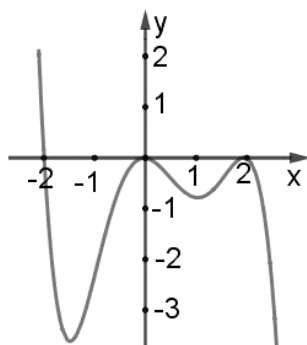
$$\square f'(x) - 1 = -1 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\square f'(x) - 1 = 1 \Leftrightarrow f'(x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-\infty; -1) \\ x = x_2 \in (2; +\infty) \end{cases}$$

$$\square f'(x) - 1 = 2 \Leftrightarrow f'(x) = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_3 \in (-\infty; x_1) \\ x = x_4 \in (x_2; +\infty) \end{cases}$$

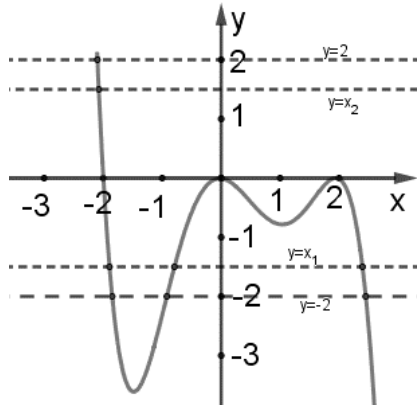
Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 9 nghiệm.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(f(x))$. Hỏi phương trình $g'(x) = 0$ có mấy nghiệm thực phân biệt?



Lời giải

ĐS: 10



Ta có $g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(f(x)) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1, (-2 < x_1 < -1) \\ x = 0 \\ x = x_2, (1 < x_2 < 2) \\ x = 2 \end{cases} \quad ; \quad f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x_1 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = x_2 \\ f(x) = 2 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy:

$f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt là $x=-2, x=0, x=2$, trong đó có 2 nghiệm trùng với nghiệm của $f'(x)=0$.

$f(x)=x_1$ có 3 nghiệm phân biệt $x_3 \in (-2; -1), x_4 \in (-1; 1), x_5 \in (2; +\infty)$.

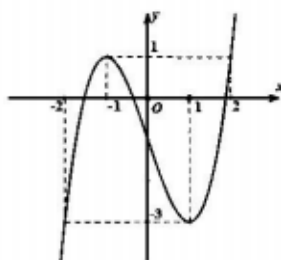
$f(x)=x_2$ có 1 nghiệm duy nhất $x_6 \in (-\infty; -2)$.

$f(x)=2$ có 1 nghiệm duy nhất $x_7 \in (-\infty; -2)$.

Cũng từ đồ thị có thể thấy các nghiệm $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, -2, 0, 2$ đôi một khác nhau.

Vậy $g'(x)=0$ có tổng cộng 10 nghiệm phân biệt.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Phương trình $f(f(x)-1)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



Lời giải

ĐS: 7

$$\text{Ta có } f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=x_1 \in (-2; -1) \\ x=x_2 \in (-1; 0) \\ x=x_3 \in (1; 2) \end{cases}$$

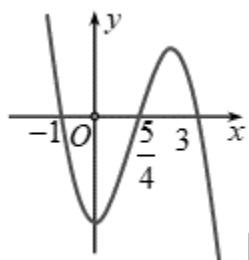
$$\text{Khi đó: } f(f(x)-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)-1=x_1 \in (-2; -1) \\ f(x)-1=x_2 \in (-1; 0) \\ f(x)-1=x_3 \in (1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=1+x_1 \in (-1; 0) \\ f(x)=1+x_2 \in (0; 1) \\ f(x)=1+x_3 \in (2; 3) \end{cases}$$

+ Ta thấy hai phương trình $f(x)=1+x_1 \in (-1; 0); f(x)=1+x_2 \in (0; 1)$ đều có ba nghiệm phân biệt.

Phương trình $f(x)=1+x_3 \in (2; 3)$ có một nghiệm.

Vậy phương trình $f(f(x)-1)=0$ có 7 nghiệm.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$,. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=r$ có số phần tử là

Lời giải

ĐS: 3

Ta có $f'(x) = 4mx^3 + 3nx^2 + 2px + q$ (1)

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta thấy phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm đơn là $-1, \frac{5}{4}, 3$.

Do đó $f'(x) = m(x+1)(4x-5)(x-3)$ và $m \neq 0$. Hay $f'(x) = 4mx^3 - 13mx^2 - 2mx + 15m$ (2).

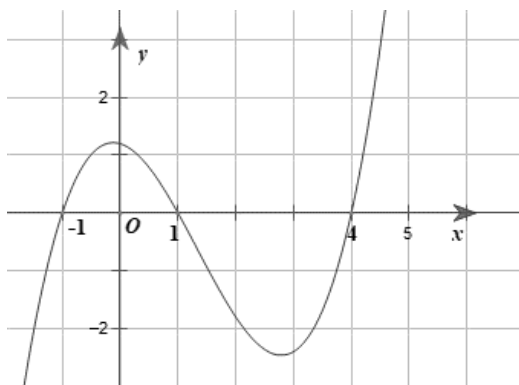
Từ (1) và (2) suy ra $n = -\frac{13}{3}m$, $p = -m$ và $q = 15m$.

Khi đó phương trình $f(x) = r \Leftrightarrow mx^4 + nx^3 + px^2 + qx = 0 \Leftrightarrow m\left(x^4 - \frac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 3x^4 - 13x^3 - 3x^2 + 45x = 0 \Leftrightarrow x(3x+5)(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{5}{3} \vee x = 3.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ là $S = \left\{-\frac{5}{3}; 0; 3\right\}$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x) = mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r$, trong đó $m, n, p, q, r \in \mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x)$ có đồ như hình vẽ dưới.



Tập nghiệm của phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r$ có tất cả bao nhiêu phần tử.

Lời giải

ĐS: 4

Từ đồ thị ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1 \vee x = 4$

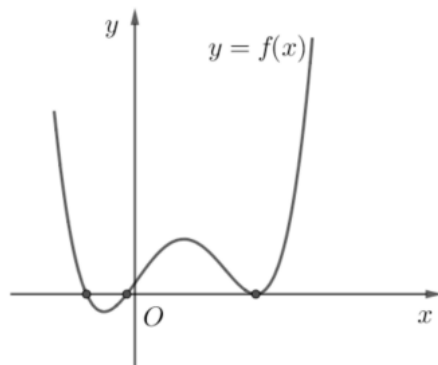
Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1	2	4		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$								

Phương trình $f(x) = 16m + 8n + 4p + 2q + r \Leftrightarrow f(x) = f(2)$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có 4 nghiệm.

Câu 19: Cho $f(x)$ là một hàm đa thức bậc bốn có đồ thị như hình dưới đây.



Tập nghiệm của phương trình $[f'(x)]^2 = f(x) \cdot f''(x)$ có số phần tử là

Lời giải

ĐS: 1

Xét phương trình $[f'(x)]^2 = f(x) \cdot f''(x)$ (1)

Do $f(x) = 0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$) và $f'(x_3) = 0$ suy ra x_3 là một nghiệm của (1)

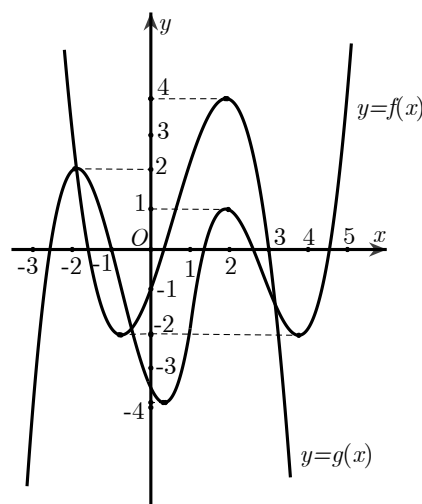
Ta có $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)^2, (a \neq 0)$

$$\text{Với } x \neq x_3 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{2}{x - x_3} \right)' = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{(x - x_1)^2} - \frac{1}{(x - x_2)^2} - \frac{2}{(x - x_3)^2} = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy, phương trình (1) có đúng một nghiệm $x = x_3$.

Câu 20: Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị như hình sau:



Khi đó tổng số nghiệm của hai phương trình $f(g(x)) = 0$ và $g(f(x)) = 0$ là

Lời giải

ĐS: 22

Quan sát đồ thị ta thấy: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 (-3 < x_1 < -2) \\ x = -1 \\ x = x_2 (1 < x_2 < 2) \\ x = x_3 (2 < x_3 < 3) \\ x = x_4 (4 < x_4 < 5) \end{cases} .$

Do đó: $f(g(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = x_1 (1) \\ g(x) = -1 (2) \\ g(x) = x_2 (3) \\ g(x) = x_3 (4) \\ g(x) = x_4 (5) \end{cases}$

Phương trình (1) có đúng 1 nghiệm; Phương trình (2) có đúng 3 nghiệm; Phương trình (3) có đúng 3 nghiệm; Phương trình (4) có đúng 3 nghiệm; Phương trình (5) có đúng 1 nghiệm. Tất cả các nghiệm trên đều phân biệt nên phương trình $f(g(x)) = 0$ có đúng 11 nghiệm.

Quan sát đồ thị ta thấy: $g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_5 (-2 < x_5 < -1) \\ x = x_6 (0 < x_6 < 1) \\ x = 3 \end{cases}$

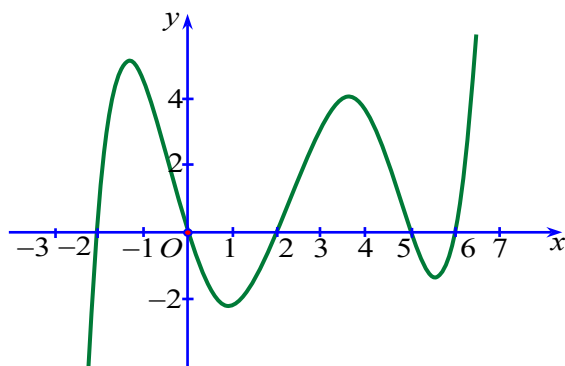
Do đó $g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x_5 (6) \\ f(x) = x_6 (7) \\ f(x) = 3 (8) \end{cases}$

Phương trình (6) có 5 nghiệm; Phương trình (7) có 5 nghiệm; Phương trình (8) có 1 nghiệm.

Tất cả các nghiệm này đều phân biệt nên phương trình $g(f(x)) = 0$ có đúng 11 nghiệm.

Vậy tổng số nghiệm của hai phương trình $f(g(x)) = 0$ và $g(f(x)) = 0$ là 22 nghiệm.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số nghiệm thuộc đoạn $[-2; 6]$ của phương trình $f(x) = f(0)$ là

Lời giải

ĐS: 2

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta có BBT

x	$-\infty$	-2	0	2	5	6	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$		$f(0)$		$f(5)$		$+\infty$

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = 0; x = 0; x = 2$

Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = 0; x = 2; x = 5$

Gọi S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f'(x); y = 0; x = 5; x = 6$

$$S_1 = -\int_0^2 f'(x) dx = f(0) - f(2);$$

$$S_2 = \int_2^5 f'(x) dx = f(5) - f(2);$$

$$S_3 = -\int_5^6 f'(x) dx = f(5) - f(6)$$

Từ đồ thị ta thấy $S_2 > S_1 \Rightarrow f(5) - f(2) > f(0) - f(2) \Rightarrow \boxed{f(5) > f(0)}$

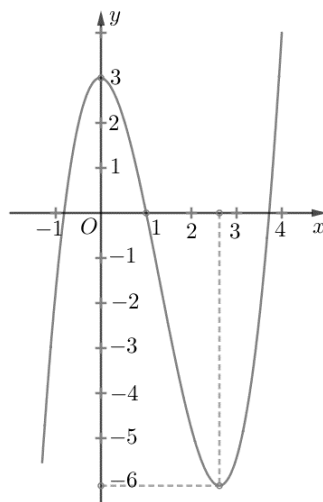
và $S_1 + S_3 < S_2 \Rightarrow f(0) - f(2) + f(5) - f(6) < f(5) - f(2) \Rightarrow \boxed{f(6) > f(0)}$

Khi đó ta có BBT chính xác (dạng đồ thị chính xác) như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	5	6	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$		$f(0)$		$f(5)$		$+\infty$

Vậy phương trình $f(x) = f(0)$ có 2 nghiệm thuộc đoạn $[-2; 6]$

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới. Đặt $g(x) = f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



Lời giải.

ĐS: 8

Ta có: $g'(x) = f'(x)f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{cases} (*)$.

Theo đồ thị hàm số suy ra.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a_1 \end{cases}, \text{ với } 2 < a_1 < 3.$$

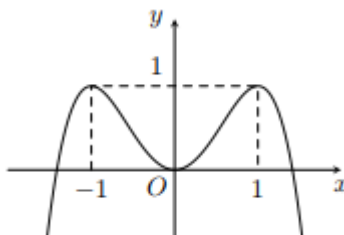
$$f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, (1) \\ f(x) = a_1, (2) \end{cases}.$$

Phương trình (1): $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình (*).

Phương trình (2): $f(x) = a_1$ có 3 nghiệm phân biệt khác nghiệm phương trình (1) và phương trình (*).

Vậy phương trình ban đầu có 8 nghiệm phân biệt.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ có đồ thị như hình vẽ bên đây, trong đó a, b, c, d, e là các hệ số thực. Số nghiệm của phương trình $f(\sqrt{f(x)}) + f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 1 = 0$ là



Lời giải

ĐS: 4

Từ hình vẽ ta có dạng đồ thị của hàm trùng phương nên $b = d = 0 \Rightarrow f(x) = ax^4 + cx^2 + e$

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$.

$$\text{Từ đồ thị} \Rightarrow \begin{cases} f'(1)=0 \\ f(0)=0 \\ f(1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2c=0 \\ e=0 \\ a+c+e=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ e=0 \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^4+2x^2.$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{x})=x^2+2x \text{ và } f(\sqrt{f(x)})=f^2(x)+2f(x).$$

$$\text{Như vậy phương trình } f(\sqrt{f(x)})+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0.$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)+2f(x)+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0 \text{ với } f(x) \geq 0.$$

$$\text{Đặt } t=f(x)(t \geq 0) \text{ ta được phương trình } g(t)=0 \text{ với } g(t)=t^2-3t-2\sqrt{t}+1.$$

Nhận thấy: Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $g(0).g(1) < 0$

$$\Rightarrow g(t)=0 \text{ có ít nhất 1 nghiệm thuộc } (0;1).$$

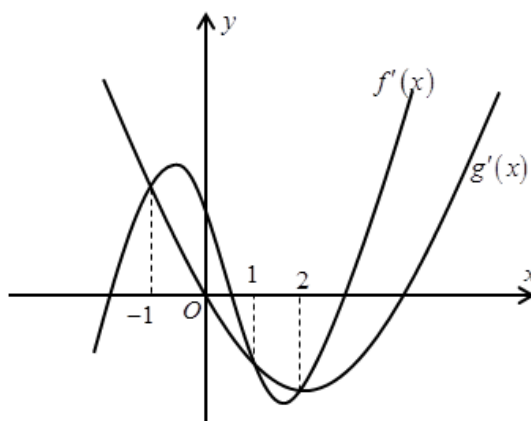
Hàm số $g(t)$ liên tục trên đoạn $[1;4]$ và $g(1).g(4) < 0$

$$\Rightarrow g(t)=0 \text{ có ít nhất 1 nghiệm thuộc } (1;4).$$

Mà $g(t)=0$ là phương trình bậc hai chỉ có tối hai nghiệm nên $g(t)=0$ có duy nhất một nghiệm thuộc $(0;1)$. Suy ra $f(\sqrt{f(x)})+f(x)+2\sqrt{f(x)}-1=0$ có duy nhất một nghiệm $f(x) \in (0;1)$.

Suy ra phương trình $f(x)=a$ với $a \in (0;1)$ luôn có 4 nghiệm x phân biệt.

Câu 24: Cho các hàm số $f(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$ và $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $(n,n,p,q,r,a,b,c,d \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $f(0)=g(0)$. Các hàm số $f'(x)$, $g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Tập nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$ có số phần tử là

Lời giải

ĐS: 2

+) Từ giả thiết $f(0)=g(0)$ suy ra $r=d$ do đó phương trình $f(x)=g(x)$ tương đương với:

$$x[mx^3 + (n-a)x^2 + (p-b)x + (q-c)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ mx^3 + (n-a)x^2 + (p-b)x + (q-c) = 0 \end{cases}$$

+) Từ đồ thị của các hàm số $f'(x), g'(x)$ suy ra $m \neq 0$ và

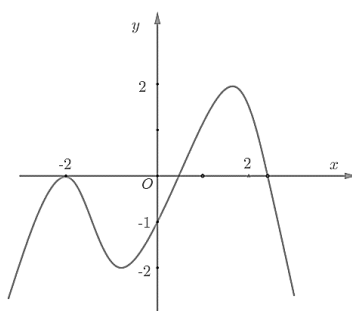
$$\begin{cases} f'(-1) = g'(-1) \\ f'(1) = g'(1) \\ f'(2) = g'(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m + 3(n-a) - 2(p-b) + q - c = 0 \\ 4m + 3(n-a) + 2(p-b) + q - c = 0 \\ 32m + 12(n-a) + 4(p-b) + q - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n-a = -\frac{8}{3}m \\ p-b = -2m \\ q-c = 8m \end{cases}$$

Từ đó ta có phương trình: $mx^3 - \frac{8}{3}mx^2 - 2mx + 8m = 0 \Leftrightarrow x^3 - \frac{8}{3}x^2 - 2x + 8 = 0$.

Sử dụng máy tính Casio ta được phương trình có 1 nghiệm và nghiệm đó khác 0.

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ có 2 phần tử.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tập hợp nghiệm của phương trình $f(f(x)) + 1 = 0$ có bao nhiêu phần tử?



Lời giải

ĐS: 9

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có } f(f(x)) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(f(x)) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a < -2 \\ f(x) = b \in (-2; -1) \\ f(x) = 0 \\ f(x) = c > 2 \end{cases}.$$

$$+ \text{ Với } f(x) = a < -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 < -2 \\ x = x_2 > 2 \end{cases}.$$

$$+ \text{ Với } f(x) = b \in (-2; -1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_3 < -2 \\ x = x_4 \in (-2; -1) \\ x = x_5 \in (-1; 0) \\ x = x_6 > 2 \end{cases}.$$

$$+ \text{ Với } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_7 = -2 \\ x = x_8 \in (0; 1) \\ x = x_9 \in (2; 3) \end{cases}.$$

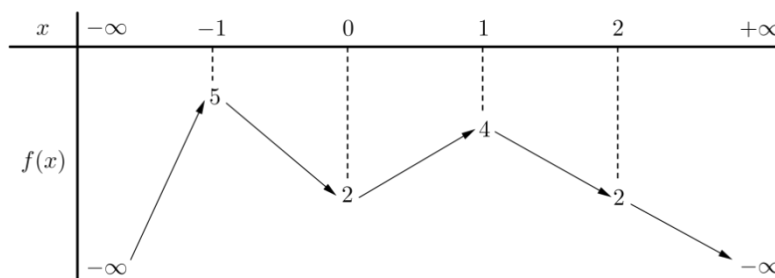
+ Với $f(x) = c > 2$ vô nghiệm.

Ta thấy hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên $(-\infty; -2)$, $f(x_1) = a \neq b = f(x_3)$ nên $x_1 \neq x_3$.

Hàm số $y = f(x)$ đơn điệu trên $(2; +\infty)$, $f(x_6) = b \neq 0 = f(x_9)$ nên $x_6 \neq x_9$.

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên



Phương trình $f(\sqrt{2x-x^2}) = 3$ có bao nhiêu nghiệm?

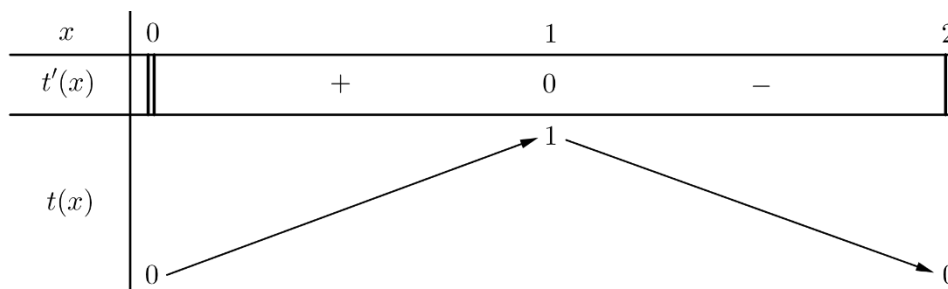
Lời giải

ĐS: 2

Trước hết, xét hàm số $t = t(x) = \sqrt{2x-x^2}$, $x \in [0; 2]$.

Ta có $t'(x) = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}$, $x \in (0; 2)$. $t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in (0; 2)$.

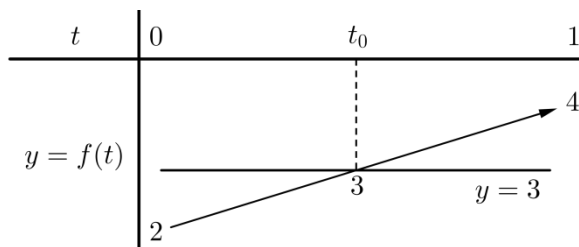
Bảng biến thiên của $t(x)$:



$\Rightarrow 0 \leq t \leq 1, \forall x \in [0; 2]$.

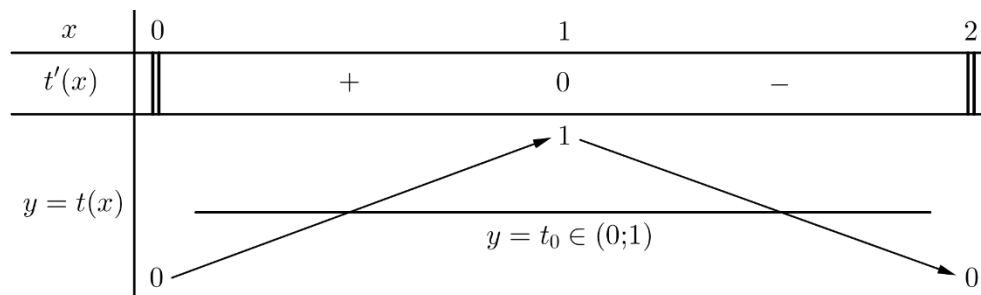
Lúc này, phương trình $f(\sqrt{2x-x^2}) = 3$ trở thành $f(t) = 3$ (1) với $t \in [0; 1]$.

Theo bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[0; 1]$ thì đường thẳng $y = 3$ cắt đồ thị hàm số $y = f(t)$ tại đúng 1 điểm có hoành độ thuộc khoảng $(0; 1)$ nên phương trình (2) có đúng 1 nghiệm $t = t_0$ với $t_0 \in (0; 1)$.



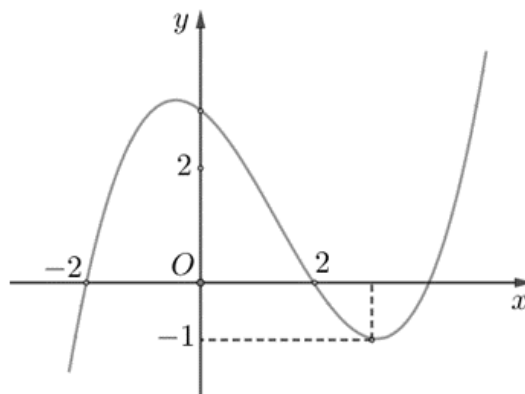
Khi đó, phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2x-x^2} = t_0$ (2), $t_0 \in (0; 1)$.

Mặt khác, theo bảng biến thiên của hàm số $t(x)$, với mỗi $t_0 \in (0; 1)$ thì đường thẳng $y = t_0$ cắt đồ thị hàm số $y = t(x)$ tại đúng 2 điểm phân biệt nên phương trình (2) có đúng 2 nghiệm phân biệt.



Vậy phương trình $f(\sqrt{2x-x^2}) = 3$ có đúng 2 nghiệm.

Câu 27: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $|f(x^3 - 3x)| = 1$ là

Lời giải

ĐS: 9

Xét phương trình $|f(x^3 - 3x)| = 1$ (1)

Đặt $t = x^3 - 3x$, ta có bảng biến thiên của hàm số $t = g(x) = x^3 - 3x$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên, ta thấy

+ Với mỗi $t_0 > 2$ hoặc $t_0 < -2$, phương trình $t_0 = x^3 - 3x$ có một nghiệm;

+ Với mỗi $-2 < t_0 < 2$, phương trình $t_0 = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm.

Khi đó, (1) trở thành $|f(t)| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = 1 \\ f(t) = -1 \end{cases}$

* TH 1: $f(t) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = t_1 \in (-2; 0) \\ t = t_2 \in (0; 2) \\ t = t_3 \in (2; +\infty) \end{cases}$

+ Với $t = t_1 \in (-2; 0) \Rightarrow$ Phương trình $t_1 = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm;

+ Với $t = t_2 \in (0; 2) \Rightarrow$ Phương trình $t_2 = x^3 - 3x$ có 3 nghiệm;

+ Với $t = t_3 \in (2; +\infty) \Rightarrow$ Phương trình $t_3 = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm;

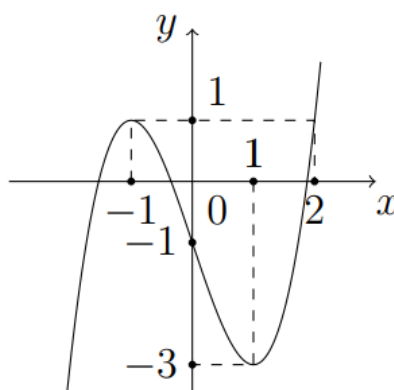
* TH 2: $f(t) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = t_4 \in (-\infty; -2) \\ t = t_5 \in (2; +\infty) \end{cases}$

+ Với $t = t_4 \in (-\infty; -2) \Rightarrow$ Phương trình $t_4 = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm;

+ Với $t = t_5 \in (2; +\infty) \Rightarrow$ Phương trình $t_5 = x^3 - 3x$ có 1 nghiệm.

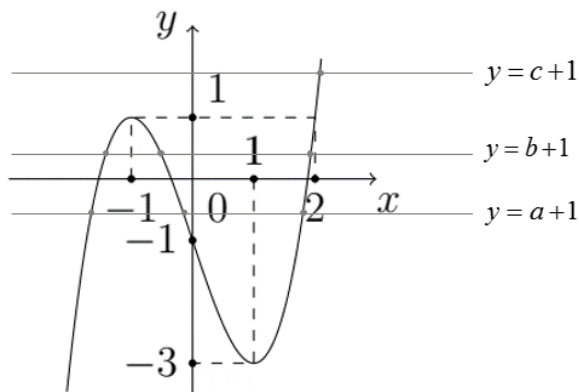
Mặt khác, các nghiệm này đều phân biệt. Vậy phương trình $|f(x^3 - 3x)| = 1$ có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên. Phương trình $f[f(\cos x) - 1] = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$?



Lời giải

ĐS: 4



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:

$$f[f(\cos x) - 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos x) - 1 = a \in (-2; -1) \\ f(\cos x) - 1 = b \in (-1; 0) \\ f(\cos x) - 1 = c \in (1; 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos x) = a + 1 \in (-1; 0) \\ f(\cos x) = b + 1 \in (0; 1) \\ f(\cos x) = c + 1 \in (2; 3) \end{cases}$$

• Xét phương trình $f(\cos x) = a + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \alpha_1 < -1 & (1) \\ \cos x = \alpha_2 \in (-1; 0) & (2) \\ \cos x = \alpha_3 > 1 & (3) \end{cases}$

Vì $\cos x \in [-1; 1]$ nên phương trình (1), (3) vô nghiệm và phương trình (2) có 2 nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

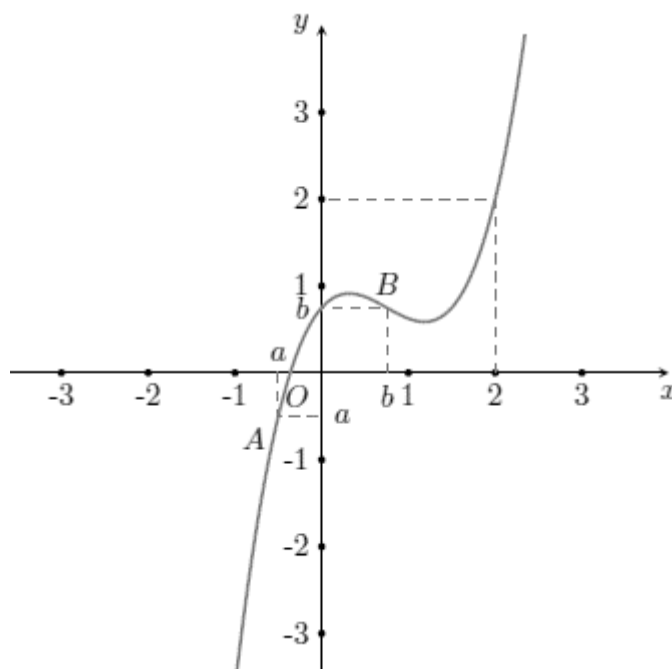
• Xét phương trình $f(\cos x) = b + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \beta_1 < -1 & (4) \\ \cos x = \beta_2 \in (-1; 0) & (5) \\ \cos x = \beta_3 > 1 & (6) \end{cases}$

Vì $\cos x \in [-1; 1]$ nên phương trình (4), (6) vô nghiệm và phương trình (5) có 2 nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$.

• Xét phương trình $f(\cos x) = c + 1 \Leftrightarrow \cos x = t > 2$ (vô nghiệm)

Nhận xét hai nghiệm của phương trình (5) không trùng với nghiệm nào của phương trình (2) nên phương trình $f[f(\cos x) - 1] = 0$ có 4 nghiệm phân biệt.

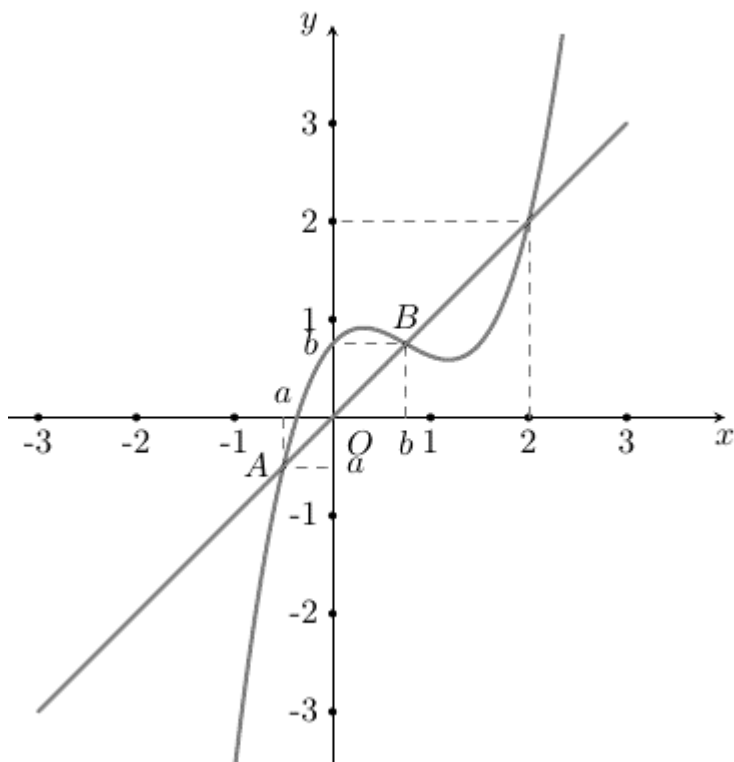
Câu 29: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ:



Số nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; 3\pi\right)$ của phương trình $f(\cos x + 1) = \cos x + 1$ là

Lời giải

ĐS: 5



Từ đồ thị ta có $f(x) = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-\infty; 0) \\ x = b \in (0; 1) \\ x = 2 \end{cases}$

$$\text{Do đó } f(\cos x + 1) = \cos x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + 1 = a \in (-\infty; 0) \\ \cos x + 1 = b \in (0; 1) \\ \cos x + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a - 1 = t_1 \in (-\infty; -1) \text{ (VN)} \\ \cos x = b - 1 = t_2 \in (-1; 0) \\ \cos x = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Dựa vào đường tròn lượng giác, phương trình (1) có 3 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; 3\pi\right)$.

Phương trình (2) có 2 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; 3\pi\right)$.

Vậy phương trình ban đầu có tất cả 5 nghiệm nằm trong $\left(\frac{-\pi}{2}; 3\pi\right)$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc khoảng $(-\infty; \ln 2)$ của phương trình $2019f(1 - e^x) - 2021 = 0$ là

Lời giải

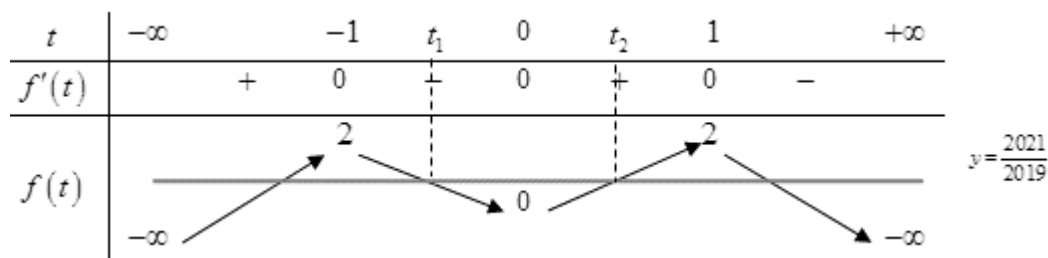
ĐS: 2

Đặt $t = 1 - e^x$; $x \in (-\infty; \ln 2) \Rightarrow t \in (-1; 1)$.

Nhận xét: $x = \ln(1 - t) \Rightarrow$ với mỗi giá trị của $t \in (-1; 1)$ ta được một giá trị của $x \in (-\infty; \ln 2)$.

Phương trình tương đương: $f(t) = \frac{2021}{2019}$.

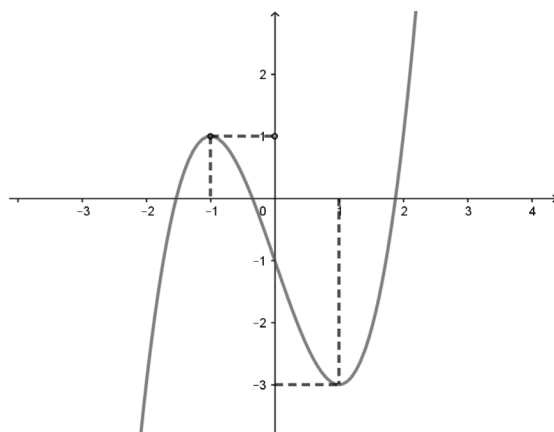
Sử dụng bảng biến thiên của $f(x)$ cho $f(t)$ như sau:



Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t) = \frac{2021}{2019}$ có 2 nghiệm $t_1, t_2 \in (-1; 1)$.

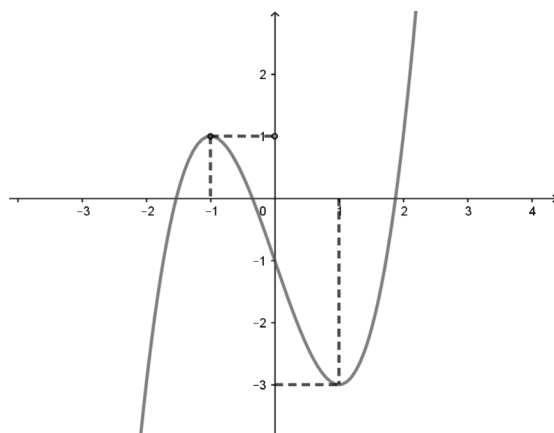
Vậy phương trình $2019f(1 - e^x) - 2021 = 0$ có 2 nghiệm $x \in (-\infty; \ln 2)$.

Câu 31: Cho $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc 3 và có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi phương trình $f(f(\cos x) - 1) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 3\pi]$?



Lời giải

ĐS: 6



Đặt $t = \cos x$, với $x \in [0; 3\pi] \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

Với $t = 1$, phương trình $t = \cos x$ có hai nghiệm $x \in [0; 3\pi]$.

Với $t = -1$, phương trình $t = \cos x$ có hai nghiệm $x \in [0; 3\pi]$.

Với $-1 < t < 1$, phương trình $t = \cos x$ có ba nghiệm $x \in [0; 3\pi]$.

Thay $t = \cos x$ vào phương trình $f(f(\cos x) - 1) = 0$, ta được phương trình:

$$f(f(t) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) - 1 = a \in (-2; -1) \\ f(t) - 1 = b \in (-1; 0) \\ f(t) - 1 = c \in (1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(t) = a + 1 \in (-1; 0) & (1) \\ f(t) = b + 1 \in (0; 1) & (2) \\ f(t) = c + 1 \in (2; 3) & (3) \end{cases}$$

Từ đồ thị ta có:

+) Phương trình (1) có 1 nghiệm $t \in (-1; 0)$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

+) Phương trình (2) có 1 nghiệm $t \in (-1; 0)$, suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.

+) Phương trình (3) có 1 nghiệm $t > 1$, suy ra phương trình đã cho vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	5	-3	$+\infty$	

Phương trình $|f(3x+1) - 2| = 5$ có bao nhiêu nghiệm?

Lời giải

ĐS: 3

$$\text{Ta có } |f(3x+1) - 2| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} f(3x+1) - 2 = 5 \\ f(3x+1) - 2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(3x+1) = 7 & (1) \\ f(3x+1) = -3 & (2) \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên,

+ Phương trình (1) có nghiệm duy nhất thỏa mãn $3x+1 = a > 3 \Leftrightarrow x = \frac{a-1}{3} > \frac{2}{3}$.

+ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} 3x_1 + 1 = 3 \\ 3x_2 + 1 = b < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{b-1}{3} < -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$			3		$+\infty$
		1			2	

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ của phương trình $3f\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}\right) - 7 = 0$ là:

Lời giải

ĐS: 5

$$\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}} = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x \in \left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right] \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \in [-1; 1]$$

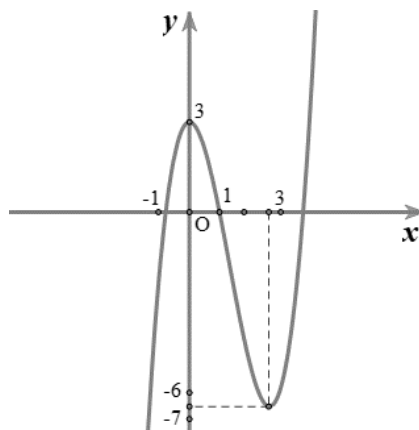
$$3f\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{2}}\right) - 7 = 0 \Leftrightarrow f\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{7}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = a \in (-1; 0) \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = b \in (0; 1) \end{cases}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = a \in (-1; 0) \text{ có 2 nghiệm.}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = b \in (0; 1) \text{ có 3 nghiệm.}$$

Vậy phương trình có 5 nghiệm.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Đặt $g(x) = f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



Lời giải

ĐS: 8

$$\text{Ta có } g'(x) = f'(x) \cdot f'[f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = m \in (1; 3) \end{cases}.$$

Phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm

Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm

Phương trình $f(x) = m \in (1; 3)$ có 3 nghiệm

Vậy phương trình có 8 nghiệm.

Câu 35: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	2	-2	$+\infty$		

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(2\sin x + 1) = 1$ là

Lời giải

ĐS: 7

$$\text{Ta có } f(2\sin x + 1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x + 1 = -1 \\ 2\sin x + 1 = a \in (1; 3) \\ 2\sin x + 1 = b \in (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 & (1) \\ \sin x = \frac{a-1}{2} \in (0; 1) & (2) \\ \sin x = \frac{b-1}{2} \in (1; +\infty) & (3) \end{cases}$$

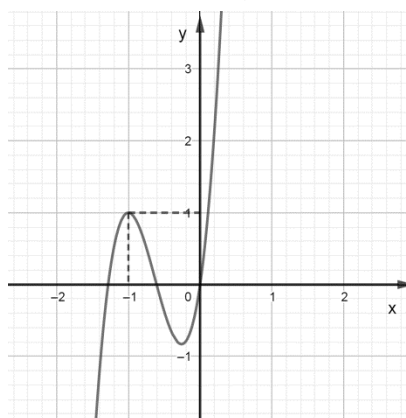
(1) có 2 nghiệm trong $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$.

(2) có 5 nghiệm trong $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$.

(3) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm trong $\left[0; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm của phương trình $f\left(f\left(\sqrt{f(x)}\right) + f(x) + 2\sqrt{f(x)}\right) - f(1) = 0$ là



Lời giải

ĐS: 3

Đặt $t = \sqrt{f(x)}$, $t \geq 0$.

Ta có: $f(f(t) + t^2 + 2t) - f(1) = 0$ (*).

Xét $t = 0$: (*) $\Leftrightarrow f(0) - f(1) = 0$ (không thỏa).

Xét $t > 0$: Ta có $f(t) > 0$ và $f(t) + t^2 + 2t > 0$

Theo đồ thị, hàm $f(u)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

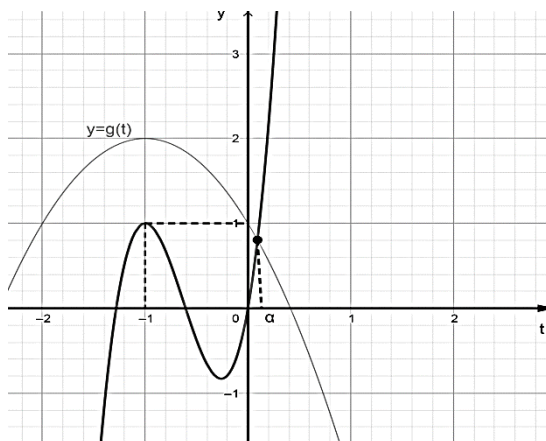
$$\text{Do đó, } (*) \Leftrightarrow f(f(t) + t^2 + 2t) = f(1) \Leftrightarrow f(t) + t^2 + 2t = 1$$

$$\Leftrightarrow f(t) = 1 - t^2 - 2t$$

$$\Leftrightarrow f(t) = g(t) \quad (**) \text{ (với } g(t) = 1 - t^2 - 2t, t > 0 \text{)}$$

Vì hàm $f(t)$ đồng biến và $g(t)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$ nên phương trình $(**)$ có nghiệm duy nhất $t = \alpha$

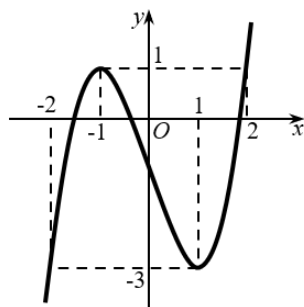
Theo đồ thị hàm $f(t), g(t)$ ta có $\alpha \in (0; 1)$.



Khi đó, $t = \alpha \Leftrightarrow f(x) = \alpha^2, \alpha^2 \in (0; 1)$ (***)

Vì đồ thị hàm $f(x)$ cắt đường thẳng $y = \alpha^2$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $(***)$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x) - 1) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



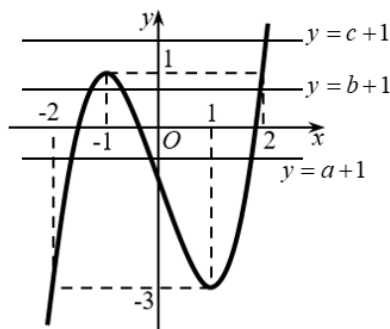
Lời giải

ĐS: 7

$$\text{Từ đồ thị của hàm số } y = f(x) \text{ suy ra } f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-2; -1) \\ x = b \in (-1; 0) \\ x = c \in (1; 2) \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } f(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 1 = a \\ f(x) - 1 = b \\ f(x) - 1 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a + 1 \\ f(x) = b + 1 \\ f(x) = c + 1 \end{cases}$$

- + Do $a \in (-2; -1) \Rightarrow a+1 \in (-1; 0) \Rightarrow$ Phương trình $f(x) = a+1$ có 3 nghiệm phân biệt.
- + Do $b \in (-1; 0) \Rightarrow b+1 \in (0; 1) \Rightarrow$ Phương trình $f(x) = b+1$ có 3 nghiệm phân biệt.
- + Do $c \in (1; 2) \Rightarrow c+1 \in (2; 3) \Rightarrow$ Phương trình $f(x) = c+1$ có 1 nghiệm.



Vậy phương trình $f(f(x)-1) = 0$ có $3+3+1=7$ nghiệm.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$				2020		$-\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 -2020 $-\infty$

Số nghiệm của phương trình $|f(x+2019) - 2020| = 2021$ là

Lời giải

ĐS: 4

Ta có :

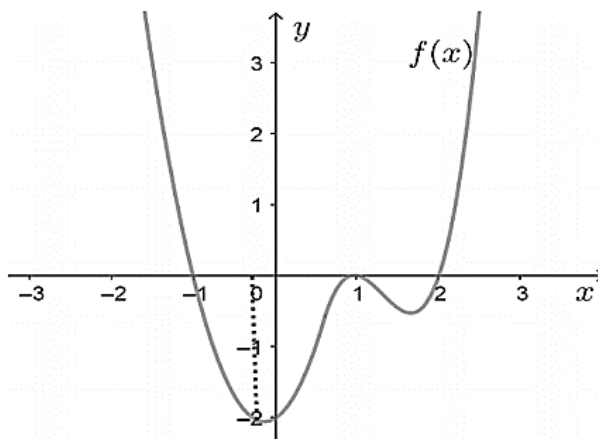
$$|f(x+2019) - 2020| = 2021 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x+2019) - 2020 = -2021 \\ f(x+2019) - 2020 = 2021 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x+2019) = -1 \\ f(x+2019) = 4041 \end{cases}.$$

Từ bảng biến thiên suy ra:

- +) Phương trình: $f(x+2019) = -1$ có 3 nghiệm.
- +) Phương trình: $f(x+2019) = 4041$ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

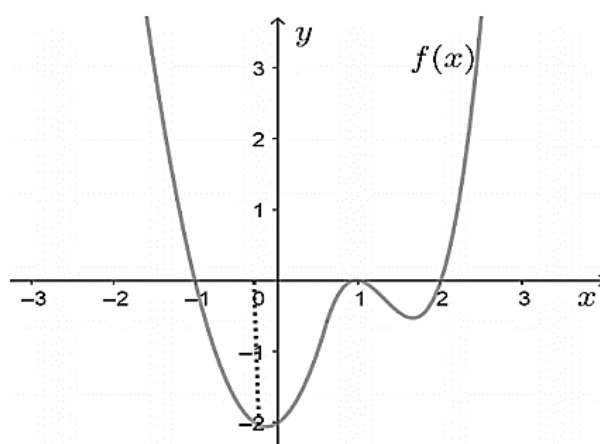
Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f(f(x) - 1)$. Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ là

Lời giải

ĐS: 9



Ta có $g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x) - 1)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot f'(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x) - 1) = 0 \end{cases}$$

$$+) f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a_1 (a_1 \in (-1; 0)) \\ x = 1 \\ x = a_2 (a_2 \in (1; 2)) \end{cases}$$

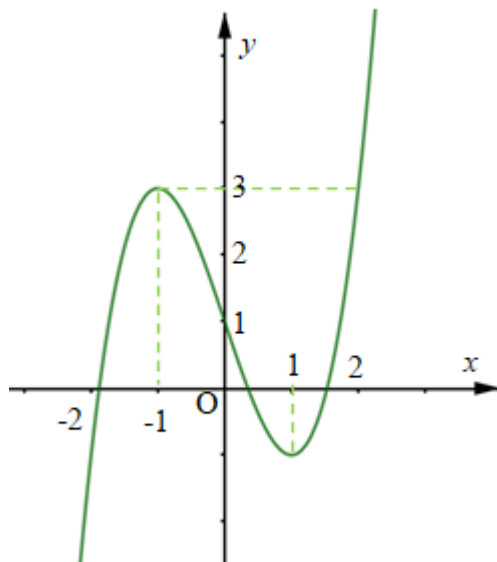
$$+) f'(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 1 = a_1 \\ f(x) - 1 = 1 \\ f(x) - 1 = a_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a_1 + 1 \in (0; 1) & (1) \\ f(x) = 2 & (2) \\ f(x) = a_2 + 1 \in (2; 3) & (3) \end{cases}$$

Từ đồ thị suy ra

- ☐ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $b_1 \in (-2; -1); b_2 \in (2; 3)$
- ☐ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $c_1 \in (-2; b_1); c_2 \in (b_2; 3)$
- ☐ phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt $d_1 \in (-2; c_1); d_2 \in (c_2; 3)$

Vậy phương trình đã cho có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{7\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(f(\cos x)) = 0$ là

Lời giải

ĐS: 5

Đặt $f(\cos x) = t$ ta được phương trình $f(t) = 0$.

Quan sát đồ thị $y = f(x)$ ta suy ra $f(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = t_1 \in (-2; -1) \\ t = t_2 \in (0; 1) \\ t = t_3 \in (1; 2) \end{cases}$.

* Với $t = t_1$ ta có $f(\cos x) = t_1$. Xét tương giao giữa hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = t_1 \in (-2; -1) \Rightarrow f(\cos x) = t_1 \Leftrightarrow \cos x = x_1 < -1$ nên phương trình vô nghiệm.

* Với $t = t_2$ ta có $f(\cos x) = t_2$. Xét tương giao giữa hai đồ thị $y = f(x)$ và

$$y = t_2 \in (0; 1) \Rightarrow f(\cos x) = t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = x_2 < -1 \\ \cos x = x_3 \in (0; 1) \\ \cos x = x_4 \in (1; 2) \end{cases}$$

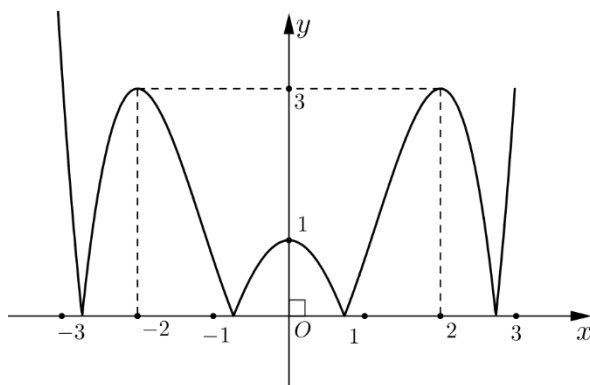
Chỉ có $\cos x = x_3$ thỏa mãn. Khi đó tồn tại 3 giá trị $x \in \left[0; \frac{7\pi}{2}\right]$ tương ứng để $\cos x = x_3$.

* Với $t = t_3$ tương tự ta có $\begin{cases} \cos x = x_5 < -1 \\ \cos x = x_6 \in (-1; 0) \\ \cos x = x_7 > 1 \end{cases}$.

Chỉ có $\cos x = x_6$ thỏa mãn. Khi đó tồn tại 2 giá trị $x \in \left[0; \frac{7\pi}{2}\right]$ tương ứng để $\cos x = x_6$.

Vậy phương trình đã cho có 5 nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{7\pi}{2}\right]$.

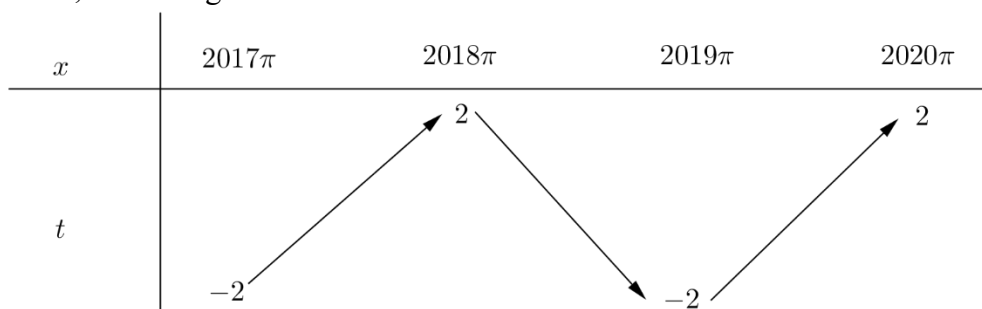
Câu 41: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm số nghiệm thuộc đoạn $[2017\pi; 2020\pi]$ của phương trình $3f(2\cos x) = 8$.



Lời giải

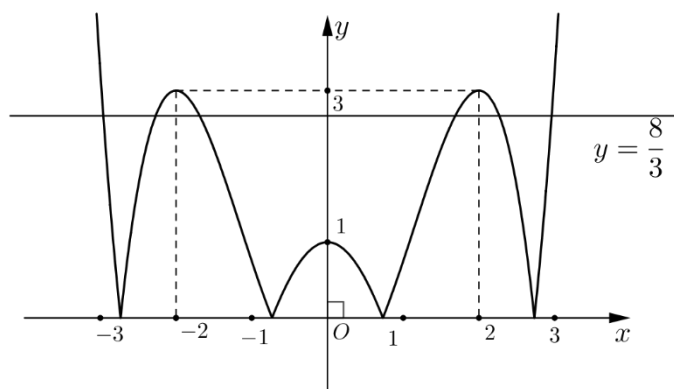
ĐS: 6

Đặt $t = 2 \cos x$, ta có bảng biến thiên của t như sau



Khi đó $3f(2 \cos x) = 8 \Leftrightarrow f(t) = \frac{8}{3}$.

Vẽ thêm đường thẳng $y = \frac{8}{3}$ trên đồ thị $y = f(x)$ đã cho.



Xét trên đoạn $[-2; 2]$, đường thẳng $y = \frac{8}{3}$ cắt đồ thị hàm số $f(t)$ tại hai điểm $t_1 \in (-2; -1)$ và $t_2 \in (1; 2)$.

Từ bảng biến thiên của t , ứng với giá trị t_1 , ta tìm được 3 nghiệm x thỏa $2 \cos x = t_1$, tương tự, ta cũng tìm được 3 nghiệm x thỏa $2 \cos x = t_2$.

Vậy phương trình $3f(2 \cos x) = 8$ có 6 nghiệm x thuộc đoạn $[2017\pi; 2020\pi]$

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

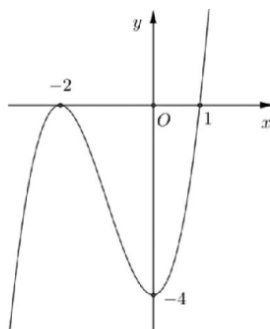
BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

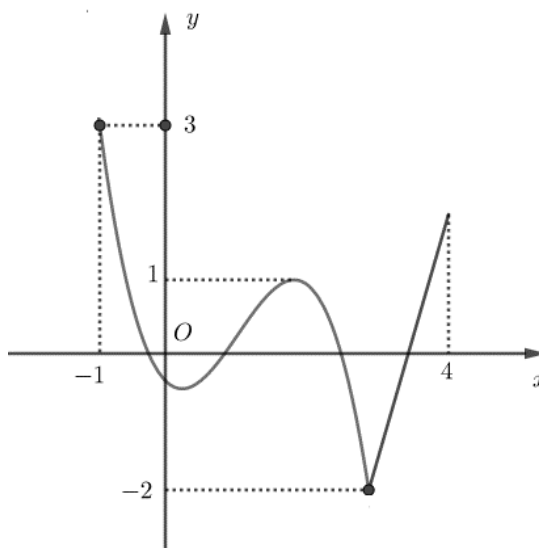
DẠNG 3. BIỆN LUẬN TƯƠNG GIAO HÀM HỢP, HÀM ẨN CHỨA THAM SỐ

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới đây



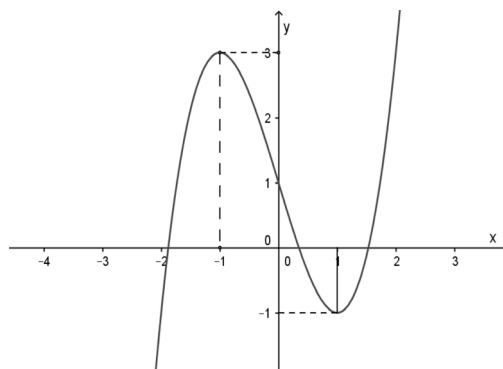
Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-5; 5)$ để phương trình $f^2(x) - (m+4)|f(x)| + 2m+4 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1; 4]$.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) - m + 2 = 2 \sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



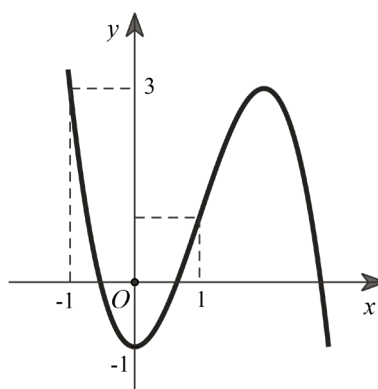
Câu 45: Cho hàm số $f(x) = x^3 + x + 2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}) = -x^3 - x + 2$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$?

- A.** 1750. **B.** 1748. **C.** 1747. **D.** 1746.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[2; 4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x + 2\sqrt{x^2 - 2x} = m \cdot f(x)$ có nghiệm thuộc đoạn $[2; 4]$?

x	2	3	$\frac{7}{2}$	4
$f(x)$	4		$\sqrt{11}$	2

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (m - 2019)f(\cos x) + m - 2020 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ là

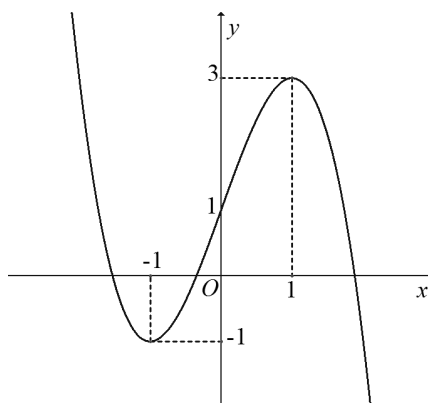


Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-1) = 5, f(-3) = 0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-

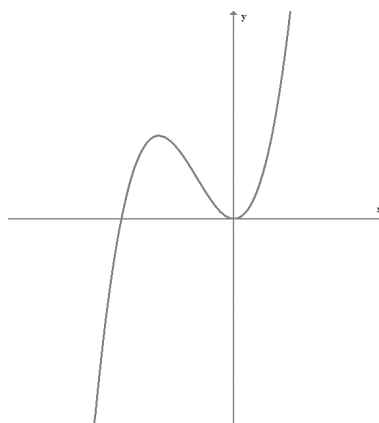
Số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $3f(2-x) + \sqrt{x^2 + 4} - x = m$ có nghiệm trong khoảng $(3; 5)$ là

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



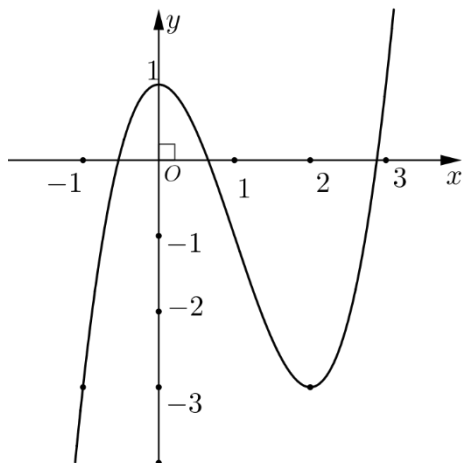
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(\cos x)) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$?

Câu 50: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2|\sin x|) = f(m^2 + 6m + 10)$ có nghiệm?

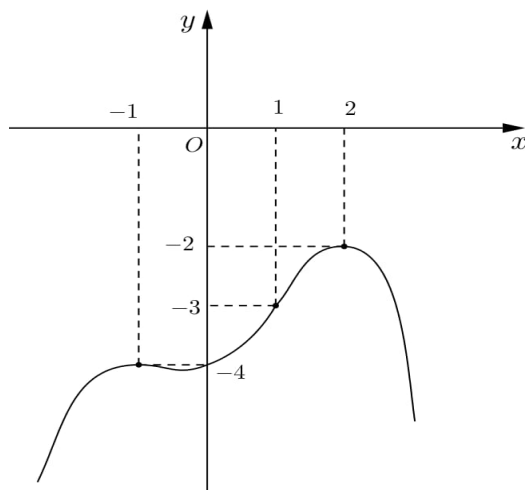
Câu 51: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^3 - 3x^2 + m) + 3 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 2]$.



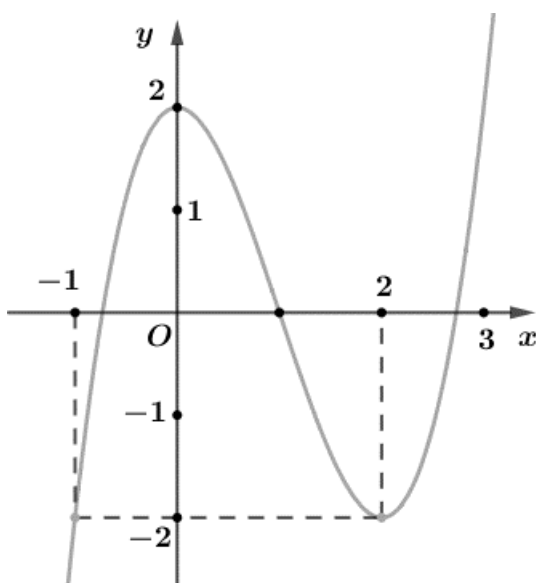
Câu 52: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$16.8^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m).4^{f(x)} - ((4 - f^2(x)).16^{f(x)})$$

nghiệm đúng với mọi số thực x là



Câu 53: Cho hàm số $f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn. Biết $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có hình vẽ bên dưới.



Tập nghiệm của phương trình $f(|2 \sin x - 1| - 1) = m$ (với m là tham số) trên đoạn $[0; 3\pi]$ có tất cả bao nhiêu phần tử?

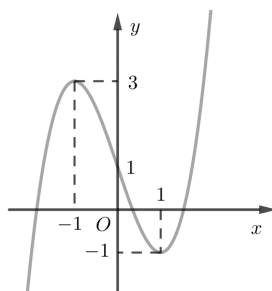
Câu 54: Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[3]{f(x)+m}) = x^3 - m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$?

Câu 55: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

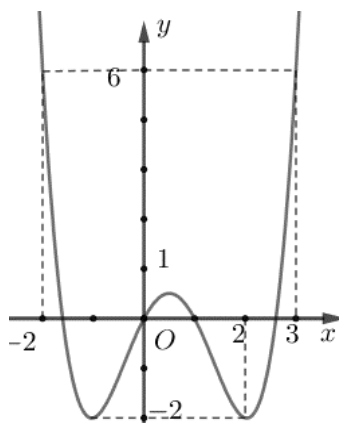
x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-4	2	4	2	$+\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (3-m)f(\cos x) + 2m - 10 = 0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ là

Câu 56: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $y = f(\sin x) = 3\sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng

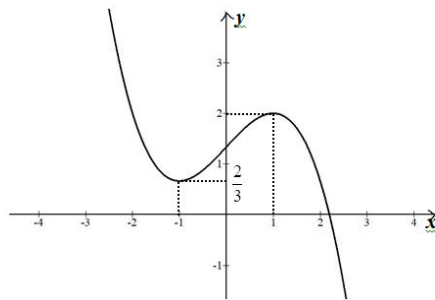


Câu 57: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



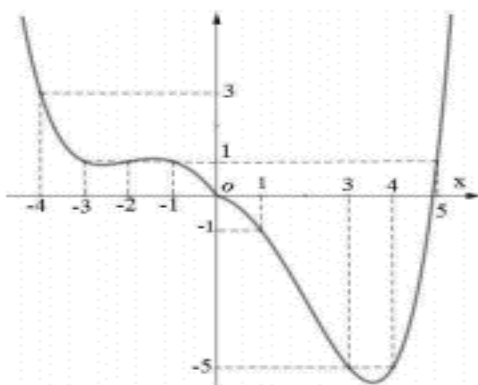
Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?

Câu 58: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



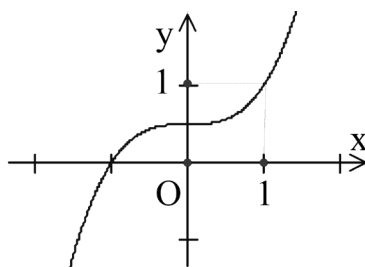
Số giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x^2 - 4x + 5) + 1 = m$ có nghiệm là

Câu 59: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}\right) = m - 3$ có nghiệm



Câu 60: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) - (m - 6)f(|x|) - m + 5 = 0$ có 6 nghiệm thực phân biệt?

Câu 61: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ

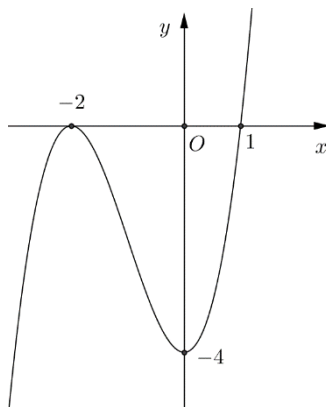


Gọi S là tập hợp các giá trị của $m (m \in \mathbb{R})$ sao cho

$$(x - 1)[m^3 f(2x - 1) - mf(x) + f(x) - 1] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

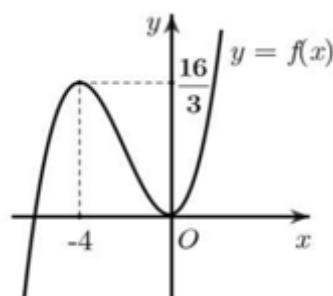
Số phần tử của tập S là

Câu 62: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên dưới



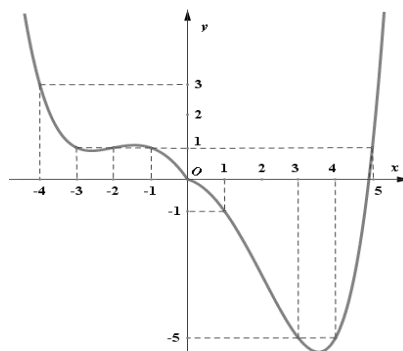
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(x) - (m+5)|f(x)| + 4m+4 = 0$ có 7 nghiệm phân biệt?

Câu 63: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ

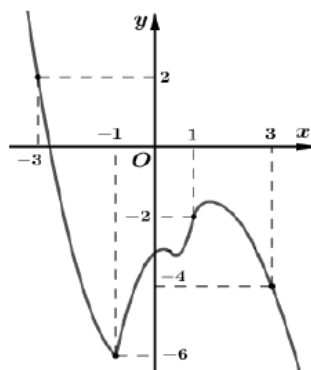


Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\frac{3\sin x - \cos x - 1}{2\cos x - \sin x + 4}\right|\right) = f(m^2 + 4m + 4)$ có nghiệm.

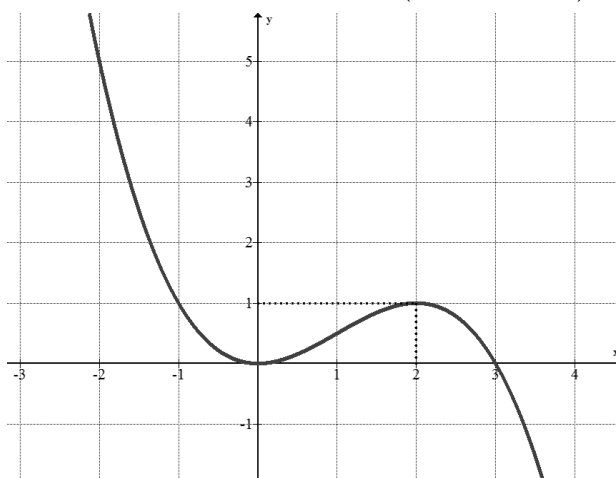
Câu 64: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2.f\left(3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21}\right) = m - 2019$ có nghiệm.



Câu 65: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}\right) = m - 3$ có nghiệm.



Câu 66: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O(0;0)$ và cắt trục hoành tại $A(3;0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5;5]$ để phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = e$ có bốn nghiệm phân biệt.

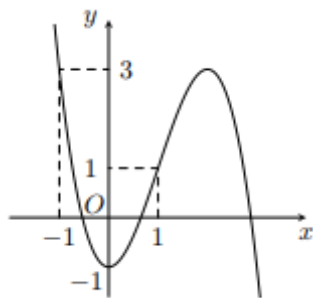


Câu 67: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và có bảng biến thiên như hình sau:

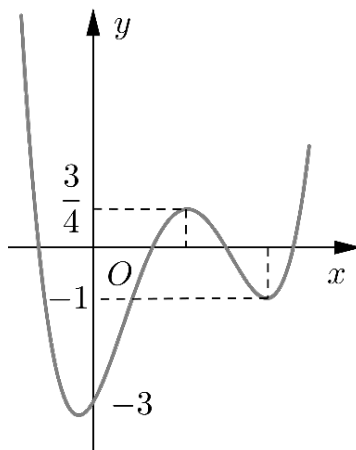
x	0	1	2	3	5
$f(x)$	4		3		3
		↘	↗	↘	↗
			1		1

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $mf(x) + \sqrt{3x} \leq 2019f(x) - \sqrt{10-2x}$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0;5]$.

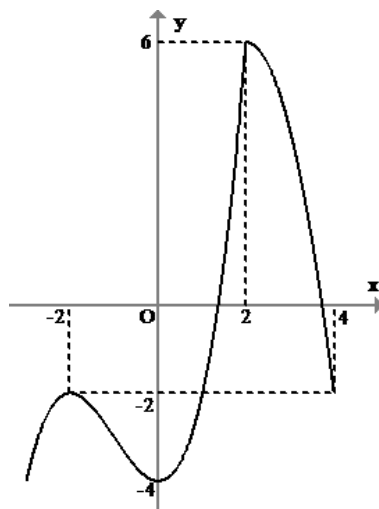
Câu 68: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (m-2018)f(\cos x) + m-2019 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0;2\pi]$ là



Câu 69: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x+m|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt là

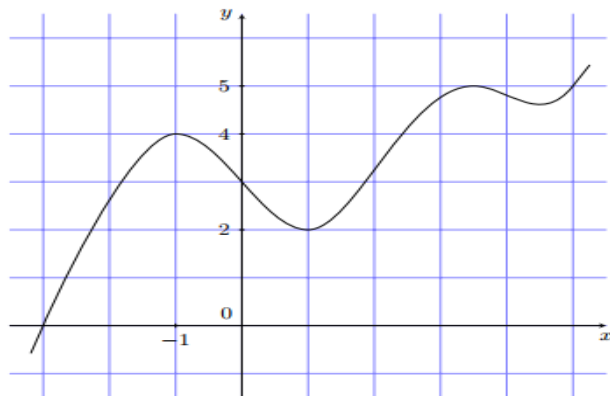


Câu 70: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

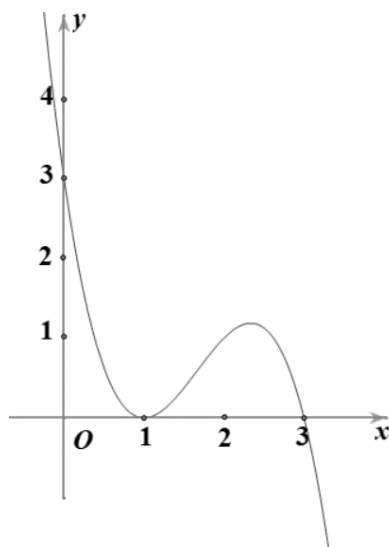


Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$?

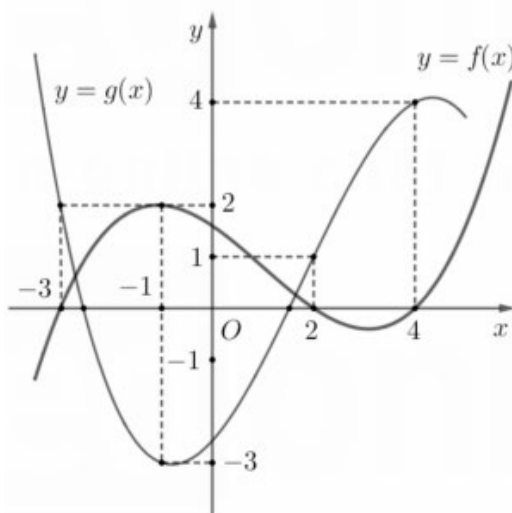
Câu 71: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$.



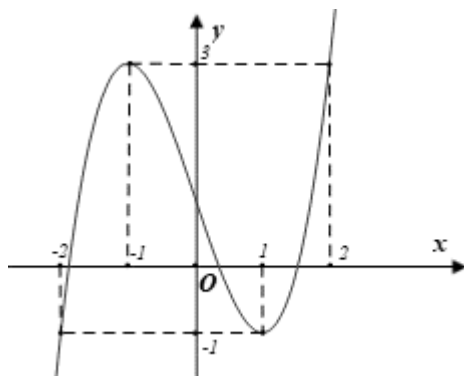
Câu 72: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0) = 0$ và $f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Phương trình $|f(|x|)| = m$ (với m là tham số) có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?



Câu 73: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên (trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = f(x)$). Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(1 - g(2x - 1)) = m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$.



Câu 74: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau đây. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để phương trình $f(f(x)) = m$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?



Câu 75: Cho hàm số $g(x) = 2x^3 + x^2 - 8x$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\sqrt{g(g(x)+3)} - m = 2g(x) + 7$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt

Câu 76: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) - (m-6)f(|x|) - m + 5 = 0$ có 6 nghiệm thực phân biệt?

Câu 77: Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 7$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\sqrt{f(f(x)-3)+m} = 2f(x) - 5$ có 6 nghiệm thực phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

Câu 78: Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[3]{f(x)+m}) = x^3 - m$ có nghiệm thuộc $[1; 2]$?

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

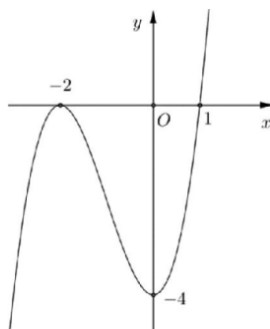
BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

DẠNG 3. BIỆN LUẬN TƯƠNG GIAO HÀM HỢP, HÀM ẨN CHỨA THAM SỐ

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-5; 5)$ để phương trình $f^2(x) - (m+4)|f(x)| + 2m+4 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt

Lời giải

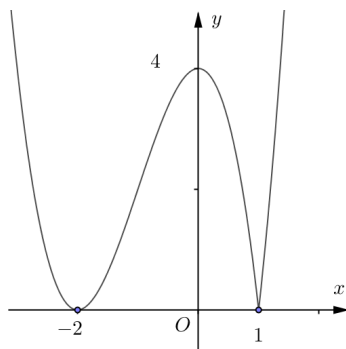
ĐS: 3

Ta có: $f^2(x) - (m+4)|f(x)| + 2m+4 = 0 \Leftrightarrow |f(x)|^2 - m|f(x)| - 4|f(x)| + 2m+4 = 0$

$$\Leftrightarrow (|f(x)| - 2)^2 - m(|f(x)| - 2) = 0 \Leftrightarrow (|f(x)| - 2)(|f(x)| - 2 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)| - 2 = 0 \\ |f(x)| - 2 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)| = 2 & (1) \\ |f(x)| = m + 2 & (2) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ta có đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như sau:



Dựa vào đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ suy ra phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Suy ra phương trình đã cho có 6 nghiệm phân biệt (2) có 2 nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình (1).

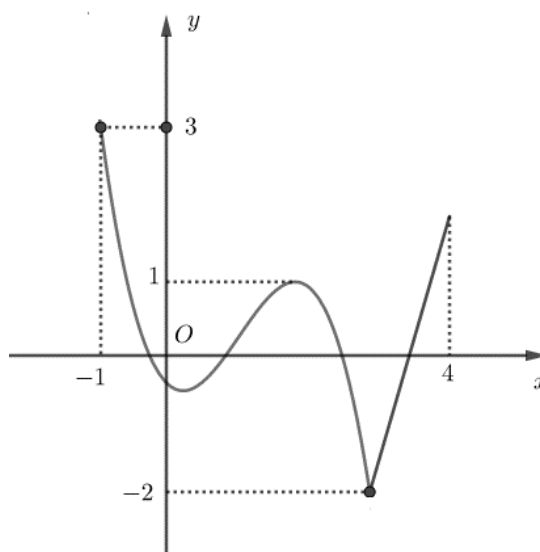
Ta có phương trình (2) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y = |f(x)|$ và $y = m + 2$. Số nghiệm phương trình (2) là số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ và $y = m + 2$. Dựa vào hình vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ ta được phương trình $|f(x)| = m + 2$ có

$$2 \text{ nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình } |f(x)| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 = 0 \\ m + 2 > 4 \\ m + 2 \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m > 2 \end{cases}$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-5; 5) \Rightarrow m \in \{-2; 3; 4\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên $m \in (-5; 5)$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1; 4]$.

Lời giải

ĐS: 7

Để bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ có nghiệm ta suy ra điều kiện $m > 0$.

$$|f(x) + m| < 2m \Leftrightarrow -2m < f(x) + m < 2m \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -3m \\ f(x) < m \end{cases}.$$

Bất phương trình $|f(x) + m| < 2m$ đúng với mọi x thuộc đoạn $[-1; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -3m \\ f(x) < m \end{cases}$ đúng

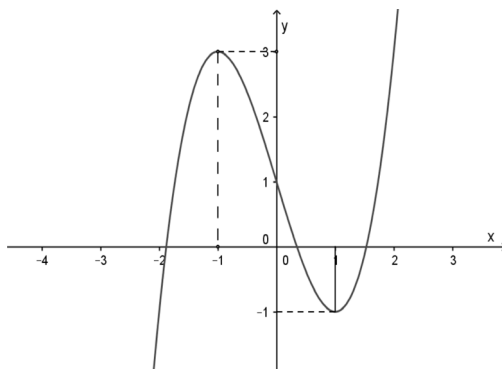
$$\text{với mọi } x \text{ thuộc đoạn } [-1; 4] \Leftrightarrow \begin{cases} -3m < \min_{[-1; 4]} f(x) \\ m > \max_{[-1; 4]} f(x) \end{cases}.$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra $\min_{[-1; 4]} f(x) = -2$; $\max_{[-1; 4]} f(x) = 3$.

$$\Rightarrow \begin{cases} -3m < \min_{[-1;4]} f(x) \\ m > \max_{[-1;4]} f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m < -2 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3 \text{ (thỏa mãn điều kiện } m > 0 \text{)}$$

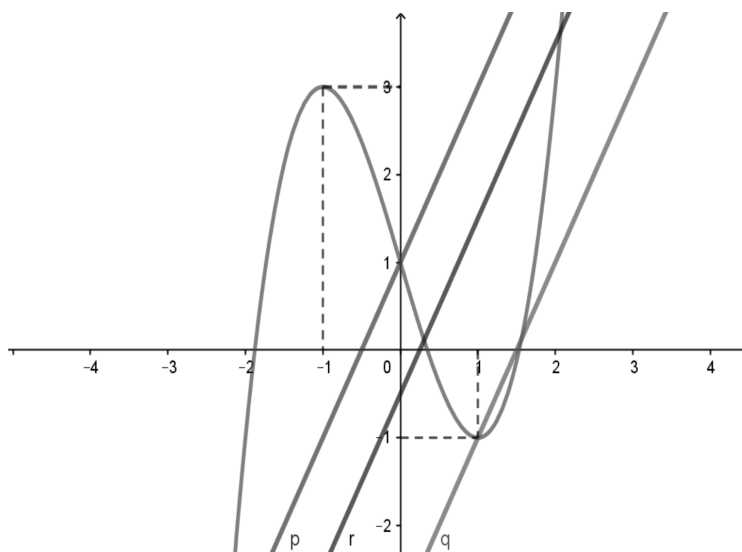
Vậy trên đoạn $[-10;10]$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sin x) - m + 2 = 2 \sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



Lời giải

ĐS: 2



Đặt $t = \sin x$, với $x \in (0; \pi) \Rightarrow t \in (0; 1]$.

Ta được phương trình: $f(t) - 2t = m - 2 \Leftrightarrow f(t) = 2t + m - 2$ (1)

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(t)$ và đường thẳng $y = 2t + m - 2$ (r).

Gọi (p): $y = 2x + 1$ song song với đường thẳng (Δ): $y = 2t$ và đi qua điểm $A(0; 1)$.

Gọi q : $y = 2x - 3$ song song với đường thẳng (Δ): $y = 2t$ và đi qua điểm $B(1; -1)$.

Để phương trình $f(\sin x) - m + 2 = 2 \sin x$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ thì phương trình (1) phải có nghiệm $t \in (0; 1]$, suy ra đường thẳng r nằm trong miền nằm giữa hai đường thẳng q và p (có thể trùng lên q và bỏ p)

$$\Rightarrow -3 \leq m - 2 < 1 \Leftrightarrow -1 \leq m < 3 \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2\} \Rightarrow S = \{-1; 0; 1; 2\}.$$

Do đó tổng các phần tử là: $-1 + 0 + 1 + 2 = 2$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x) = x^3 + x + 2$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = -x^3 - x + 2 \text{ có nghiệm } x \in [-1; 2]?$$

A. 1750.

B. 1748.

C. 1747.

D. 1746.

Lời giải

ĐS: 1750

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t + 2$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f\left(\sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m}\right) = f(-x)$$

$$\Leftrightarrow -x = \sqrt[3]{f^3(x) + f(x) + m} \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) + x^3 + m = 0 \quad (1)$$

Xét $h(x) = f^3(x) + f(x) + x^3 + m$ trên đoạn $[-1; 2]$.

$$\text{Ta có } h'(x) = 3f^2(x) \cdot f'(x) + f'(x) + 3x^2 = f'(x)[3f^2(x) + 1] + 3x^2.$$

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in [-1; 2] \Rightarrow h'(x) > 0, \forall x \in [-1; 2].$$

$$\text{Hàm số } h(x) \text{ đồng biến trên } [-1; 2] \text{ nên } \min_{[-1; 2]} h(x) = h(-1) = m - 1, \quad \max_{[-1; 2]} h(x) = h(2) = m + 1748.$$

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\min_{[-1; 2]} h(x) \cdot \max_{[-1; 2]} h(x) \leq 0 \Leftrightarrow h(-1) \cdot h(2)$$

$$\Leftrightarrow (m - 1)(1748 + m) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1748 \leq m \leq 1.$$

Do m nguyên nên tập các giá trị m thỏa mãn là $S = \{-1748; -1747; \dots; 0; 1\}$.

Vậy có tất cả 1750 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 46: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[2; 4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá

trị nguyên của m để phương trình $x + 2\sqrt{x^2 - 2x} = m \cdot f(x)$ có nghiệm thuộc đoạn $[2; 4]$?

x	2	3	$\frac{7}{2}$	4
$f(x)$	4	3	$\sqrt{11}$	2

Lời giải

ĐS: 4

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min_{[2; 4]} f(x) = f(4) = 2$ và $\max_{[2; 4]} f(x) = f(2) = 4$

Hàm số $g(x) = x + 2\sqrt{x^2 - 2x}$ liên tục và đồng biến trên $[2; 4]$

$$\text{Suy ra } \min_{[2; 4]} g(x) = g(2) = 2 \text{ và } \max_{[2; 4]} g(x) = g(4) = 4 + 4\sqrt{2}$$

Ta có $x + 2\sqrt{x^2 - 2x} = m \cdot f(x) \Leftrightarrow \frac{x + 2\sqrt{x^2 - 2x}}{f(x)} = m \Leftrightarrow \frac{g(x)}{f(x)} = m$

Xét hàm số $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ liên tục trên $[2; 4]$

Vì $g(x)$ nhỏ nhất và $f(x)$ lớn nhất đồng thời xảy ra tại $x = 2$ nên

$$\min_{[2;4]} h(x) = \frac{\min_{[2;4]} g(x)}{\max_{[2;4]} f(x)} = \frac{g(2)}{f(2)} = h(2) = \frac{1}{2}$$

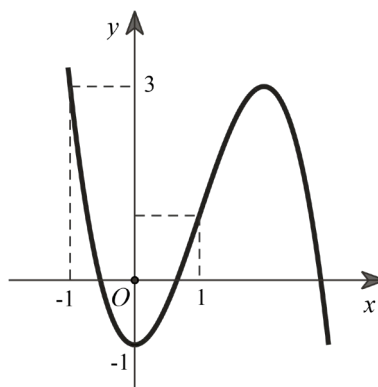
Vì $g(x)$ lớn nhất và $f(x)$ nhỏ nhất đồng thời xảy ra tại $x = 4$ nên

$$\max_{[2;4]} h(x) = \frac{\max_{[2;4]} g(x)}{\min_{[2;4]} f(x)} = \frac{g(4)}{f(4)} = h(4) = 2 + 2\sqrt{2}$$

Từ đó suy ra phương trình $h(x) = m$ có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{1}{2} \leq m \leq 2 + 2\sqrt{2}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình có nghiệm.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (m - 2019)f(\cos x) + m - 2020 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ là



Lời giải

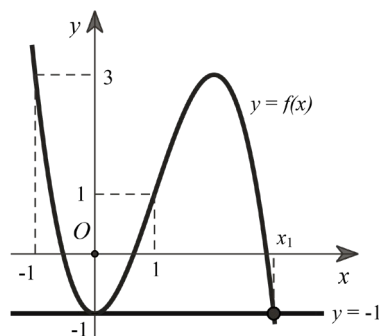
ĐS: 2

Ta có $f^2(\cos x) + (m - 2019)f(\cos x) + m - 2020 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos x) = -1 \\ f(\cos x) = 2020 - m \end{cases} \quad (1)$

* Với $f(\cos x) = -1$

Dựa vào đồ thị ta có $f(\cos x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = x_1 \ (x_1 > 1) \end{cases} (VN) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Vì $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\}$



* Với $f(\cos x) = 2020 - m$

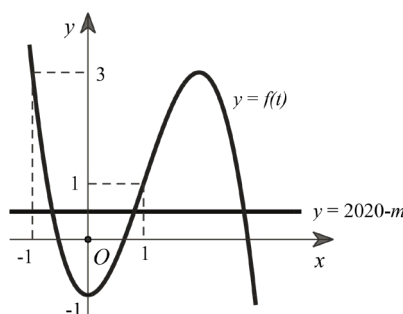
Đặt $t = \cos x (t \in [-1; 1])$

Với $t \in (-1; 1]$ thì phương trình $t = \cos x$ có hai nghiệm phân biệt thuộc $[0; 2\pi]$.

Với $t = -1$ thì phương trình $t = \cos x$ có một nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$

Phương trình trở thành $f(t) = 2020 - m$

Để phương trình (1) có tất cả 6 nghiệm phân biệt thì phương trình $f(\cos x) = 2020 - m$ có 4 nghiệm phân biệt, hay phương trình $f(t) = 2020 - m$ có hai nghiệm $t \in (-1; 1]$



Dựa vào đồ thị ta có để phương trình $f(t) = 2020 - m$ có hai nghiệm $t \in (-1; 1]$ thì $-1 < 2020 - m \leq 1 \Leftrightarrow 2019 \leq m < 2021$

Vì m nguyên nên $m \in \{2019; 2020\}$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-1) = 5, f(-3) = 0$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-

Số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $3f(2-x) + \sqrt{x^2 + 4} - x = m$ có nghiệm trong khoảng $(3; 5)$ là

Lời giải

ĐS: 15

Đặt $g(x) = 3f(2-x) + \sqrt{x^2 + 4} - x$ với $x \in (3; 5)$.

Ta có: $g'(x) = -3f'(2-x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 1$.

Với $x \in (3;5)$:

Ta có: $2-x \in (-3;-1)$ nên $f'(2-x) > 0$ suy ra $-3f'(2-x) < 0$.

Ta có: $\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} < \frac{x}{x} = 1$

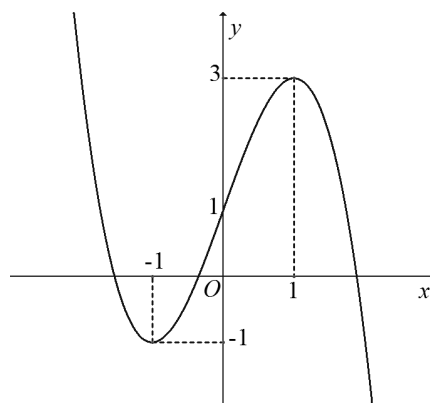
Suy ra $g'(x) = -3f'(2-x) + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 1 < 0, \forall x \in (3;5)$ nên hàm số nghịch biến trên $(3;5)$.

Suy ra $\min_{(3;5)} g(x) = g(5) = 3f(-3) + \sqrt{5^2+4} - 5 = \sqrt{29} - 5$;

$\max_{(3;5)} g(x) = g(3) = 3f(-1) + \sqrt{3^2+4} - 3 = 12 + \sqrt{13}$.

Để phương trình $3f(2-x) + \sqrt{x^2+4} - x = m$ có nghiệm thì $\sqrt{29} - 5 \leq m \leq 12 + \sqrt{13}$ mà m nguyên dương nên $m \in \{1, 2, \dots, 15\}$ tức là có 15 giá trị

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(\cos x)) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$?

Lời giải.

ĐS: 4

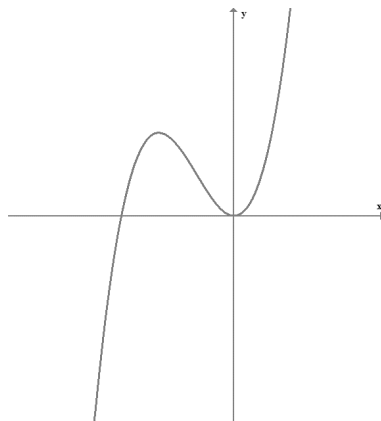
Khi $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\cos x \in [-1; 0)$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy khi $\cos x \in [-1; 0)$ thì $f(\cos x) \in [-1; 1)$; khi đó $f(f(\cos x)) \in [-1; 3)$.

Do đó phương trình $f(f(\cos x)) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi $-1 \leq m < 3$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 50: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(2|\sin x|) = f(m^2 + 6m + 10)$ có nghiệm?

Lời giải.

ĐS: 3

Từ đồ thị suy ra hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

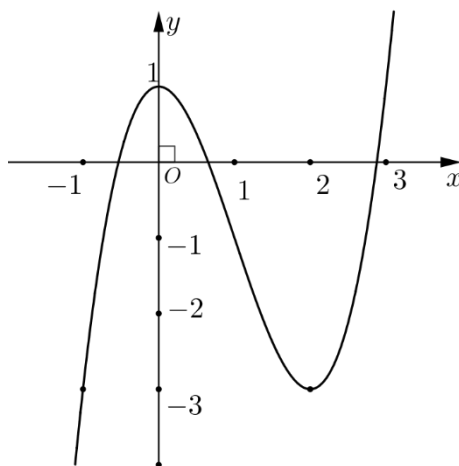
Do $2|\sin x| \geq 0; m^2 + 6m + 10 > 0$ nên $f(2|\sin x|) = f(m^2 + 6m + 10) \Leftrightarrow 2|\sin x| = m^2 + 6m + 10$.

Mà $0 \leq 2|\sin x| \leq 2$ nên yêu cầu bài toán tương đương

$$0 \leq m^2 + 6m + 10 \leq 2 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 8 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq -2.$$

Vậy có 3 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 51: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^3 - 3x^2 + m) + 3 = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 2]$.



Lời giải

ĐS: 8

Từ hình vẽ, ta suy ra được hình vẽ là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

$$f(x^3 - 3x^2 + m) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x^3 - 3x^2 + m) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + m = -1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 1 = -m \\ x^3 - 3x^2 + 1 = -m + 3 \end{cases}$$

$$\text{Để phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn } [-1; 2] \text{ thì } \begin{cases} -3 \leq -m \leq 1 \\ -3 \leq -m + 3 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 3 \\ 2 \leq m \leq 6 \end{cases}.$$

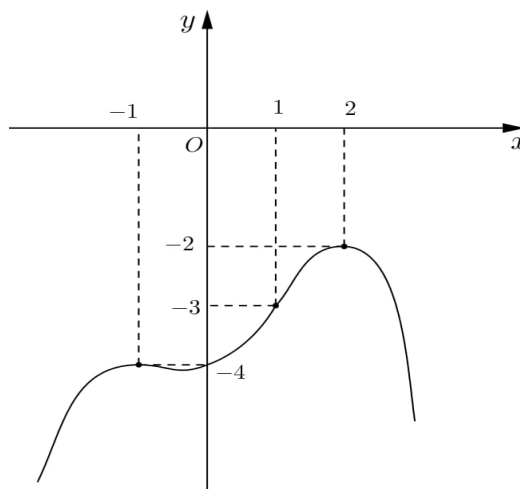
$$\Rightarrow m \in [-1; 6].$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên có 8 giá trị m để phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 52: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$16.8^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m).4^{f(x)} - ((4 - f^2(x)).16^{f(x)})$$

nghiệm đúng với mọi số thực x là



Lời giải

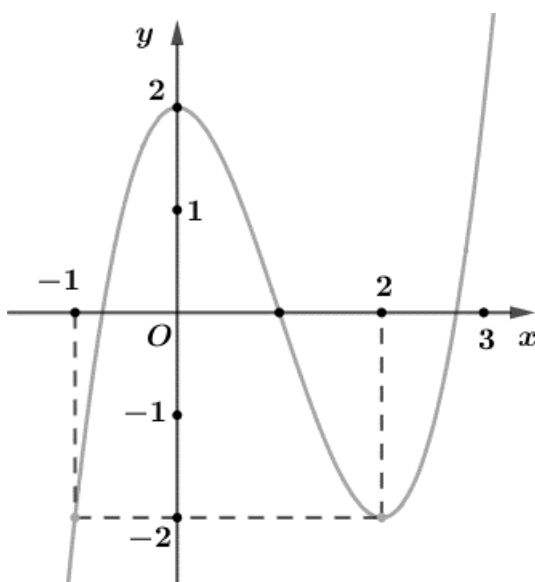
ĐS: 4

$$16.8^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m).4^{f(x)} - ((4 - f^2(x)).16^{f(x)}) \Leftrightarrow -m^2 + 5m \geq 16.2^{f(x)} + (4 - f^2(x)).4^{f(x)}$$

$$\text{Vì, nên ta có } 16.2^{f(x)} + (4 - f^2(x)).4^{f(x)} \leq 16.2^{-2} + 0 = 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow -m^2 + 5m \geq 4 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4$$

Câu 53: Cho hàm số $f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn. Biết $f(0) = 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có hình vẽ bên dưới.



Tập nghiệm của phương trình $f(|2\sin x - 1| - 1) = m$ (với m là tham số) trên đoạn $[0; 3\pi]$ có tất cả bao nhiêu phần tử?

Lời giải

ĐS: 16

Đồ thị đã cho là đồ thị hàm số bậc ba có hai điểm cực trị $x = 0$ và $x = 2$ nên có dạng $f'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Lần lượt thay thế các dữ kiện từ hình vẽ, ta được
$$\begin{cases} d = 2 \\ c = 0 \\ 3 \cdot a \cdot 2^2 + 2 \cdot b \cdot 2 = 0 \\ -a^3 + b + d = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases}.$$

Suy ra $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x + C$.

Mà $f(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 2x$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 1 + \sqrt{3} \end{cases}$.

Suy ra bảng biến thiên

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{3}$			1	$1 + \sqrt{3}$			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$				$\frac{5}{4}$				$+\infty$
		-1				-1			

Từ đó ta có bảng biến thiên của $f(x-1)$

x	$-\infty$	$2-\sqrt{3}$	2	$2+\sqrt{3}$	$+\infty$	
$f'(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x-1)$	$+\infty$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$	
		-1		-1		

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in [0; 3\pi]$ nên $0 \leq |2\sin x - 1| \leq 3$.

Đặt $t = |2\sin x - 1|, t \in [0; 3]$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình $f(t-1) = m$ có tối đa 2 nghiệm $t = h, t = k$.

Do đó
$$\begin{cases} 2\sin x - 1 = \pm h \\ 2\sin x - 1 = \pm k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\pm h + 1}{2} \\ \sin x = \frac{\pm k + 1}{2} \end{cases}.$$

Trên $[0; 3\pi]$, mỗi phương trình có nhiều nhất 4 nghiệm, do đó phương trình đã cho có nhiều nhất 16 nghiệm.

Câu 54: Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[3]{f(x) + m}) = x^3 - m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 2]$?

Lời giải

ĐS: 16

Xét phương trình $f(\sqrt[3]{f(x)+m}) = x^3 - m$ (1)

Đặt $t = \sqrt[3]{f(x)+m}$. Ta có $\begin{cases} f(t) = x^3 - m \\ f(x) = t^3 - m \end{cases} \Rightarrow f(t) + t^3 = f(x) + x^3$ (2)

Xét hàm số $g(u) = f(u) + u^3 \Rightarrow g'(u) = f'(u) + 3u^2 = 5u^4 + 12u^2 \geq 0, \forall u$.

Khi đó (2) $\Leftrightarrow g(t) = g(x) \Leftrightarrow t = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{f(x)+m} = x \Leftrightarrow x^3 - f(x) = m \Leftrightarrow x^5 + 2x^3 = 3m$

Xét hàm số $h(x) = x^5 + 2x^3 \Rightarrow h'(x) = 5x^4 + 6x^2 \geq 0, \forall x$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$:

x	$-\infty$	0	1	2
$h'(x)$	+	0	+	+
$h(x)$	$-\infty$		3	48

Từ bảng biến thiên suy ra để (1) có nghiệm thuộc đoạn $[1; 2] \Leftrightarrow 3 \leq 3m \leq 48 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 16$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; \dots; 16\}$ suy ra có 16 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 55: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-4	2	4	2	$+\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (3-m)f(\cos x) + 2m - 10 = 0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ là

Lời giải

ĐS: 6

Xét $f^2(\cos x) + (3-m)f(\cos x) + 2m - 10 = 0$. Ta có $\Delta = (m-7)^2$.

Do đó $\begin{cases} f(\cos x) = m-5 & (1) \\ f(\cos x) = 2 & (2) \end{cases}$.

Với $f(\cos x) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a < -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = 1 \end{cases}$.

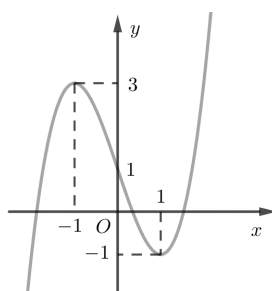
Trường hợp này được 3 nghiệm trong $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

Để phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ thì (1) có đúng 1 nghiệm trong $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ và không trùng với nghiệm của các phương trình $\cos x = \frac{1}{2}; \cos x = 1$

$$\Leftrightarrow f(t) = m - 5 \text{ với } t = \cos x \text{ có đúng 1 nghiệm trong } \left[-1; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow -4 \leq m - 5 < 2 \Leftrightarrow 1 \leq m < 7.$$

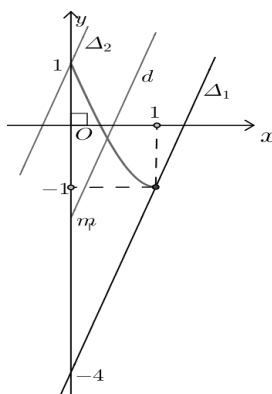
Do m nguyên nên có 6 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 56: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $y = f(\sin x) = 3\sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$. Tổng các phần tử của S bằng



Lời giải

ĐS: -10



Đặt $t = \sin x$, $x \in (0; \pi) \Leftrightarrow t \in (0; 1]$.

Phương trình $f(\sin x) = 3\sin x + m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = 3t + m$ có nghiệm thuộc $(0; 1]$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $d: y = 3x + m$ có điểm chung với hoành độ $x \in (0; 1]$.

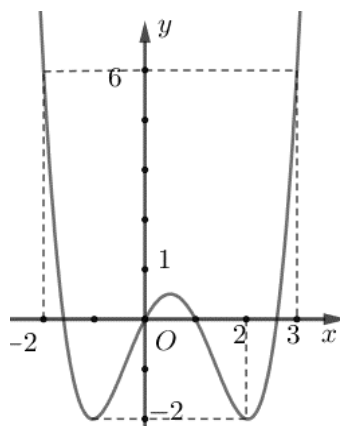
$\Delta_1: y = 3x - 4$ là đường thẳng qua điểm $(1; -1)$ và $\Delta_2: y = 3x + 1$ là đường thẳng qua điểm $(0; 1)$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $(0; 1]$ là phần đường cong nằm giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .

Vậy phương trình $f(t) = 3t + m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0; 1]$ khi và chỉ khi d dao động trong miền giới hạn bởi Δ_1 và Δ_2 (không trùng với Δ_2) khi và chỉ khi $-4 \leq m < 1 \Leftrightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1; 0\}$.

Vậy tổng các giá trị của S bằng -10 .

Câu 57: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?

Lời giải

ĐS: 2

Đặt $t = g(x) = x^3 - 3x, x \in [-1; 2]$

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-1; 2]$

x	-1	1	2
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	2	-2	2

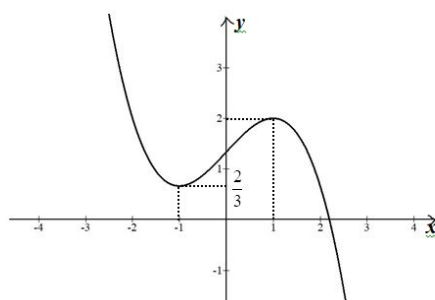
Suy ra với $t = -2$, có 1 giá trị của x thuộc đoạn $[-1; 2]$.

$t \in (-2; 2]$, có 2 giá trị của x thuộc đoạn $[-1; 2]$.

Phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $(-2; 2]$. (1)

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ và m nguyên ta có hai giá trị của m thỏa mãn điều kiện (1) là: $m = 0, m = -1$.

Câu 58: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Số giá trị nguyên dương của m để phương trình $f(x^2 - 4x + 5) + 1 = m$ có nghiệm là

Lời giải

ĐS: 3

Đặt $t = x^2 - 4x + 5$. Ta có $t = (x - 2)^2 + 1 \geq 1$.

Phương trình $f(x^2 - 4x + 5) + 1 = m$ (1) trở thành phương trình $f(t) = m - 1$ (2).

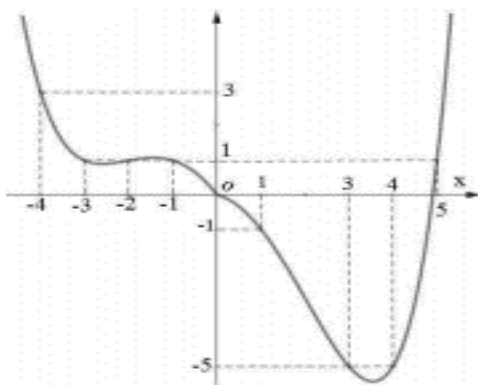
Sử dụng các nhận xét ở trên và đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta có

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm thuộc $[1; +\infty)$

$\Leftrightarrow m - 1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 3$

Vậy tập hợp các giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán là $\{1; 2; 3\}$.

Câu 59: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f(3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}) = m - 3$ có nghiệm



Lời giải

ĐS: 13

Điều kiện: $6x - 9x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{2}{3}$

Đặt $t = 3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}$; $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$

Ta có: $t'(x) = \frac{12(3x-1)}{\sqrt{6x-9x^2}}$; $0 < x < \frac{2}{3}$; $t'(x) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$ (nhận).

$t(0) = 3$; $t\left(\frac{1}{3}\right) = -1$; $t\left(\frac{2}{3}\right) = 3$.

Nên $-1 \leq t \leq 3$.

Mặt khác: $f(t) = \frac{m-3}{2}$, $t \in [-1; 3]$ có nghiệm.

Từ đồ thị ta có $-5 \leq \frac{m-3}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -7 \leq m \leq 5$.

Do m nguyên nên có 13 giá trị m là $-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Câu 60: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) - (m-6)f(|x|) - m + 5 = 0$ có 6 nghiệm thực phân biệt?

Lời giải

ĐS: 3

Hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	3	-1	$+\infty$

Hàm số $y = f(|x|)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-1	3	-1	$+\infty$

Đặt $t = f(|x|) \geq -1$ (*)

Nhận xét:

+ với $t_0 < -1 \xrightarrow{(*)} x \in \emptyset$

+ với $t_0 = -1; t_0 > 3 \xrightarrow{(*)} 2$ nghiệm

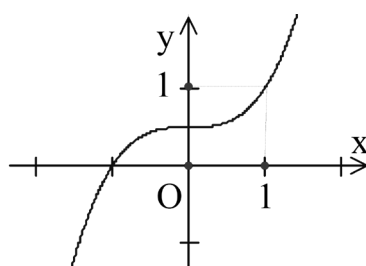
+ với $t_0 = 3 \xrightarrow{(*)} 3$ nghiệm

+ với $t_0 \in (-1; 3) \xrightarrow{(*)} 4$ nghiệm

Phương trình trở thành $t^2 - (m-6)t - m + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = m-5 \end{cases}$

Yêu cầu bài toán suy ra $-1 < m-5 < 3 \Leftrightarrow 4 < m < 8 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{5; 6; 7\}$.

Câu 61: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp các giá trị của $m (m \in \mathbb{R})$ sao cho

$$(x-1)[m^3 f(2x-1) - mf(x) + f(x) - 1] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Số phần tử của tập S là

Lời giải

ĐS: 2

Từ đồ thị ta thấy $f(x) = 1$. Đặt $g(x) = m^3 f(2x-1) - mf(x) + f(x) - 1$.

$$(x-1)[m^3 f(2x-1) - mf(x) + f(x) - 1] \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Từ giả thiết ta có điều kiện cần để (*) là

$$g(1) = 0 \Leftrightarrow m^3 f(1) - mf(1) + f(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow m^3 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \pm 1 \end{cases}$$

Điều kiện đủ:

+) Với $m = 0$ ta có (*) $\Leftrightarrow g(x) = (x-1)[f(x)-1] \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó $m = 0$ thỏa mãn.

+) Với $m = 1$ ta có $(x-1)[f(2x-1)-1] = \frac{1}{2}[(2x-1)-1][f(2x-1)-1] \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $m = 1$ thỏa mãn.

+) Với $m = -1$, (*) $\Leftrightarrow (x-1)[-f(2x-1)+2f(x)-1] \geq 0$ (**).

Xét $x > 1$ ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x-1)+1}{2f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a(2x-1)^3 + b(2x-1)^2 + c(2x-1) + d + 1}{2(ax^3 + bx^2 + cx + d)} = 4 > 0$

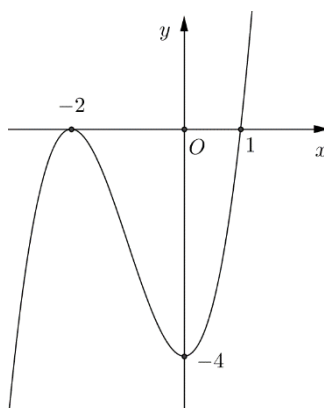
$$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}, a > 1: f(2a-1)+1 > 2f(a) \text{ hay } 2f(a) - f(2a-1) - 1 < 0$$

$$\Rightarrow (a-1)[2f(a) - f(2a-1) - 1] < 0 \text{ (không thỏa mãn (**)).}$$

Do đó $m = -1$ không thỏa mãn

Vậy S có 2 phần tử.

Câu 62: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên dưới



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(x) - (m+5)|f(x)| + 4m + 4 = 0$ có 7 nghiệm phân biệt?

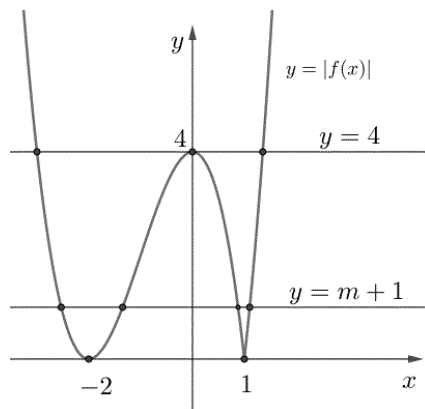
Lời giải

ĐS: 3

Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} f^2(x) - 5|f(x)| + 4 - m(|f(x)| - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (|f(x)| - 4)(|f(x)| - 1 - m) &= 0 \\ \Leftrightarrow (|f(x)| - 4)(|f(x)| - 1 - m) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)| = 4 & (1) \\ |f(x)| = m+1 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như sau



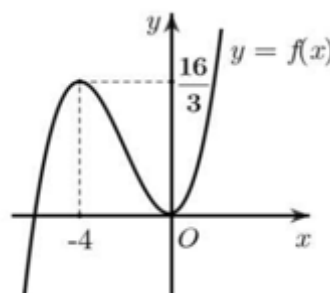
Dựa vào đồ thị hàm số $y = |f(x)|$, suy ra phương trình (1) luôn có 3 nghiệm phân biệt.

Vì vậy, yêu cầu bài toán tương đương với phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt khác 4.

Suy ra $0 < m+1 < 4 \Leftrightarrow -1 < m < 3 \Rightarrow m = 0, 1, 2$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa bài toán.

Câu 63: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|\frac{3 \sin x - \cos x - 1}{2 \cos x - \sin x + 4}\right|\right) = f(m^2 + 4m + 4)$ có nghiệm.

Lời giải

ĐS: 3

Ta có $\left|\frac{3 \sin x - \cos x - 1}{2 \cos x - \sin x + 4}\right| \geq 0$, $\forall x$ và $m^2 + 4m + 4 = (m+2)^2 \geq 0$, $\forall m$. Nhìn vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên $[0; +\infty)$ suy ra phương trình đã cho tương đương

$$\left|\frac{3 \sin x - \cos x - 1}{2 \cos x - \sin x + 4}\right| = m^2 + 4m + 4 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } P = \frac{3 \sin x - \cos x - 1}{2 \cos x - \sin x + 4} (*)$$

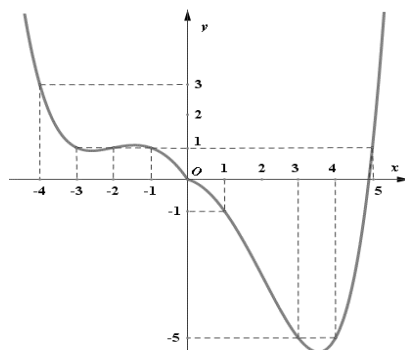
vì $2 \cos x - \sin x + 4 > 0$, $\forall x$

$$\text{nên } (*) \Leftrightarrow (3-P) \sin x - (1+2P) \cos x = 4P+1 \quad (2)$$

$$\text{Phương trình (2) có nghiệm} \Leftrightarrow (4P+1)^2 \leq (3-P)^2 + (1+2P)^2 \Leftrightarrow \frac{-9}{11} \leq P \leq 1 \Rightarrow |P| \leq 1$$

Suy ra phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m^2 + 4m + 4 \leq 1 \Leftrightarrow m \in [-3; -1] \Rightarrow$ Có ba giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 64: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2.f\left(3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21}\right) = m - 2019$ có nghiệm.



Lời giải

ĐS: 13

$$\text{Ta có: } \sqrt{-9x^2 + 30x - 21} = \sqrt{4 - (3x - 5)^2} \Rightarrow 0 \leq \sqrt{-9x^2 + 30x - 21} \leq 2$$

$$\Rightarrow -3 \leq 3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21} \leq 3.$$

$$\text{Đặt } t = 3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21} \Rightarrow t \in [-3; 3].$$

$$\text{Khi đó, phương trình } 2.f\left(3 - 3\sqrt{-9x^2 + 30x - 21}\right) = m - 2019 \quad (1) \Leftrightarrow 2f(t) = m - 2019$$

$$\Leftrightarrow f(t) = \frac{m - 2019}{2} \quad (2)$$

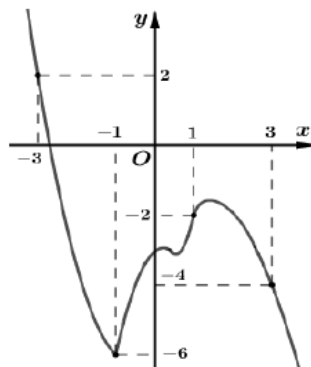
Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm $t \in [-3; 3]$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có, phương trình (2) có nghiệm $t \in [-3; 3]$ khi và chỉ khi

$$-5 \leq \frac{m - 2019}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -10 \leq m - 2019 \leq 2 \Leftrightarrow 2009 \leq m \leq 2021$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{2009, 2010, \dots, 2021\}$. Vậy có 13 giá trị m nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 65: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2f\left(3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}\right) = m - 3$ có nghiệm.



Lời giải

ĐS: 9

Điều kiện: $6x - 9x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{2}{3}$.

Đặt $t = 3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}$, $x \in \left[0; \frac{2}{3}\right]$.

Ta có: $t' = -4 \cdot \frac{6 - 18x}{2\sqrt{6x - 9x^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$.

Bảng biến thiên cho $t = 3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}$. Vì $x \in \left[0; \frac{2}{3}\right] \Rightarrow t \in [-1; 3]$

Phương trình trở thành: $2f(t) = m - 3 \Leftrightarrow f(t) = \frac{m-3}{2}, t \in [-1; 3]$. (*)

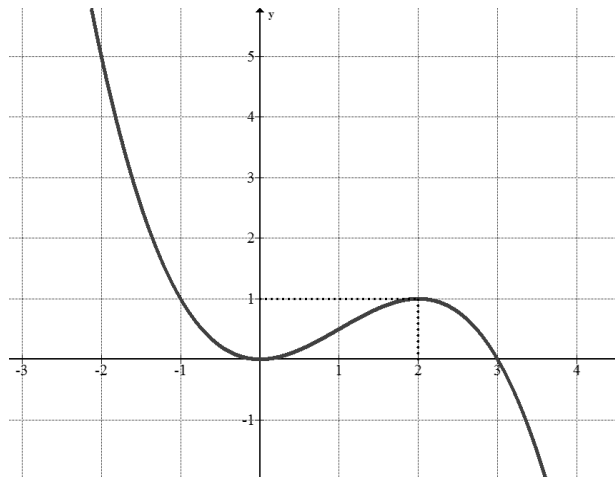
Phương trình $2f\left(3 - 4\sqrt{6x - 9x^2}\right) = m - 3$ có nghiệm $\Leftrightarrow f(t) = \frac{m-3}{2}$ có nghiệm $t \in [-1; 3]$

$\Leftrightarrow -6 \leq \frac{m-3}{2} \leq -2 + a \Leftrightarrow -12 \leq m - 3 \leq -4 + 2a \Leftrightarrow -9 \leq m \leq -1 + 2a$, với

$\max_{[-1; 3]} f(t) = a + 2, a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-9; -8; -7; \dots; -1\} \Rightarrow$ có 9 giá trị m nguyên thỏa ycbt.

Câu 66: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ với $(a, b, c, d, e \in \mathbb{R})$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ, đạt cực trị tại điểm $O(0; 0)$ và cắt trục hoành tại $A(3; 0)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trên $[-5; 5]$ để phương trình $f(-x^2 + 2x + m) = e$ có bốn nghiệm phân biệt.



Lời giải

ĐS: 2

Theo hình vẽ ta có $y = f'(x)$ là hàm số bậc ba nên $a \neq 0$.

$f'(x) = 4ax^3 + 3b^2x + 2cx + d \Rightarrow f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$.

Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(3) = 0 \\ f''(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ 108a + 27b + 6c + d = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ c = d = 0 \end{cases}$.

$\Rightarrow f(x) = ax^4 - 4ax^3 + e$.

$$\Rightarrow f(x) = e \Leftrightarrow ax^4 - 4ax^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Khi đó $f(-x^2 + 2x + m) = e(1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x + m = 0 \\ -x^2 + 2x + m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 1+m \\ (x-1)^2 = m-3 \end{cases}$$

PT(1) có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+m > 0 \\ m-3 > 0 \\ 1+m \neq m-3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$

Mà $m \in \mathbb{Z} \cap [-5; 5] \Rightarrow m \in \{4; 5\}.$

Vậy có 2 giá trị m thỏa đề bài.

Câu 67: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và có bảng biến thiên như hình sau:

x	0	1	2	3	5
$f(x)$	4		3		3
		↘	↗	↘	↗
		1		1	

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $mf(x) + \sqrt{3x} \leq 2019f(x) - \sqrt{10-2x}$ nghiệm đúng với mọi $x \in [0; 5]$.

Lời giải

ĐS: 2014

Trên $[0; 5]$, ta có: $mf(x) + \sqrt{3x} \leq 2019f(x) - \sqrt{10-2x} \Leftrightarrow m \leq 2019 - \frac{\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}}{f(x)}.$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}$ trên đoạn $[0; 5]$.

$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x}} - \frac{1}{\sqrt{10-2x}} = \frac{3\sqrt{10-2x} - 2\sqrt{3x}}{2\sqrt{3x} \cdot \sqrt{10-2x}}$$

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in [0; 5].$

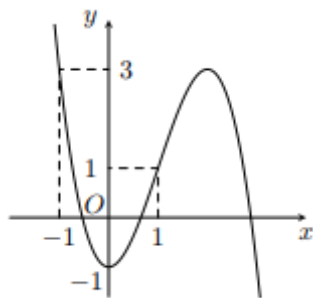
Do $g(0) = \sqrt{10}$, $g(3) = 5$ và $g(5) = \sqrt{15}$ nên $\max_{[0; 5]} g(x) = g(3) = 5.$

Mặt khác $\min_{[0; 5]} f(x) = f(3) = 1$ nên

$$m \leq 2019 - \frac{\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}}{f(x)}, \forall x \in [0; 5]$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{[0; 5]} \left(2019 - \frac{\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}}{f(x)} \right) = 2019 - \frac{5}{1} = 2014.$$

Câu 68: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (m-2018)f(\cos x) + m-2019 = 0$ có đúng 6 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ là



Lời giải

ĐS: 2

Ta có $f^2(\cos x) + (m - 2018)f(\cos x) + m - 2019 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(\cos x) = -1 \\ f(\cos x) = 2019 - m \end{cases}$

Dựa vào đồ thị ta có: $f(\cos x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 & (1) \\ \cos x = k > 1 & (2) \end{cases}$

PT có 2 nghiệm thỏa mãn, PT vô nghiệm.

Yêu cầu: phương trình $f(\cos x) = 2019 - m$ ($2019 - m \neq 1$) có thêm 4 nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$.

Nhận xét:

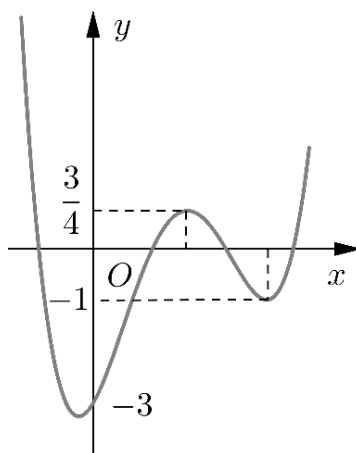
+ Với mỗi $t \notin [-1; 1]$, phương trình $\cos x = t$ vô nghiệm.

+ Với mỗi $t \in (-1; 1]$, phương trình $\cos x = t$ có 2 nghiệm $x \in [0; 2\pi]$.

+ Với $t = -1$, phương trình $\cos x = t$ có đúng 1 nghiệm $x \in [0; 2\pi]$.

Như vậy, $-1 < 2019 - m \leq 1 \Leftrightarrow 2018 \leq m \leq 2020$.

Câu 69: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x + m|) = m$ có 4 nghiệm phân biệt là



Lời giải

ĐS: 1

Đặt $t = |x + m| \geq 0$

Với $t = 0 \Rightarrow x = m$

Với mỗi giá trị $t > 0$ sẽ ứng với 2 giá trị x

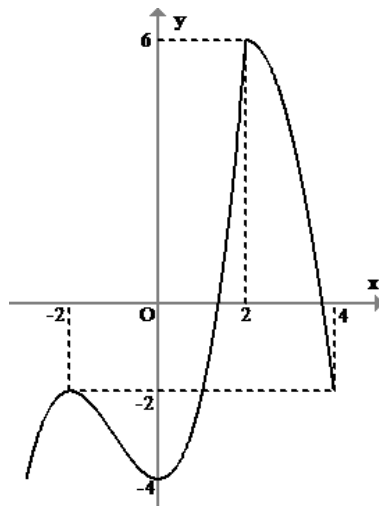
Ta có phương trình: $f(t) = m$ ($t \geq 0$) (*)

Đề phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì (*) có 2 nghiệm phân biệt dương

$$\text{Từ đồ thị của hàm số } y = f(t) \text{ trên miền } t \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{4} \\ m = -1 \end{cases}$$

Vậy có 1 giá trị nguyên thỏa mãn

Câu 70: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{2}+1\right)+x=m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$?

Lời giải

ĐS: 8

Đặt $t = \frac{x}{2} + 1$, khi $-2 \leq x \leq 2$ thì $0 \leq t \leq 2$.

Phương trình đã cho trở thành $\frac{1}{3}f(t) + 2t - 2 = m \Leftrightarrow f(t) + 6t - 6 = 3m$.

Xét hàm số $g(t) = f(t) + 6t - 6$ trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có $g'(t) = f'(t) + 6$. Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ nên $f'(t) > 0, \forall t \in (0; 2) \Rightarrow g'(t) > 0, \forall t \in (0; 2)$ và $g(0) = -10; g(2) = 12$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(t)$ trên đoạn $[0; 2]$

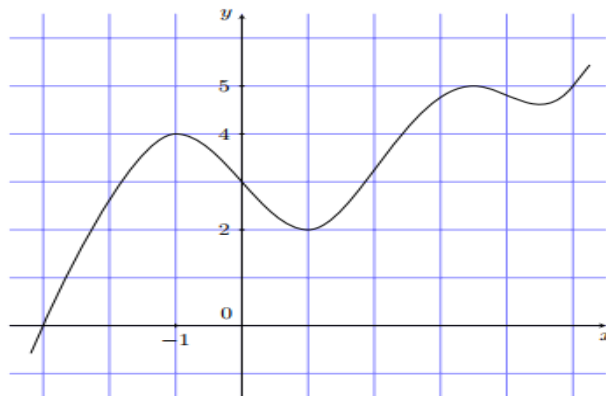
t	0	2
$g'(t)$		+
$g(t)$	-10	12

Phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $[-2; 2]$ khi và chỉ khi phương trình $g(t) = 3m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0; 2]$ hay $-10 \leq 3m \leq 12 \Leftrightarrow -\frac{10}{3} \leq m \leq 4$.

Mặt khác m nguyên nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 8 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 71: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số giá trị nguyên của m để phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$.



Lời giải

ĐS: 2

Xét phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ (1)

Đặt $t = x^2 - 2x$, với $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

Ta có $t' = 2x - 2$; $t' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên của hàm số $t = x^2 - 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$

x	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{7}{2}$	
t'		-	0	+
t	$\frac{21}{4}$		$-\frac{1}{4}$	$\frac{21}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $t \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{21}{4}\right]$.

Xét $t = -\frac{1}{4}$ khi đó phương trình (1) thành $f(-\frac{1}{4}) = m \Rightarrow 4 = m$.

Với $m = 4$ phương trình $f(x^2 - 2x) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = -\frac{1}{4} \\ x^2 - 2x = a \end{cases} (*)$ với $-\frac{1}{4} < a < \frac{21}{4}$.

Dễ thấy (*) có tối đa 3 nghiệm (không thỏa mãn yêu cầu).

Xét $t_0 \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{21}{4}\right]$.

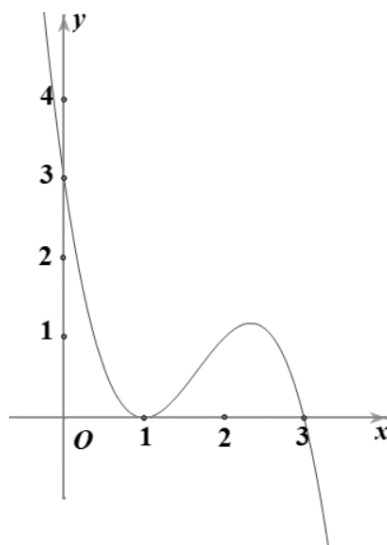
Nhận xét với mỗi $t_0 \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{21}{4}\right]$ thì có 2 giá trị $x \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$ thỏa mãn $t_0 = x^2 - 2x$.

Do đó phương trình $f(x^2 - 2x) = m$ có 4 nghiệm thực phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right]$ khi phương trình $f(t) = m$ có 2 nghiệm phân biệt $t \in \left(-1; \frac{21}{4}\right]$. Hay đường thẳng $y = m$ phải cắt đồ thị hàm số $y = f(t)$ tại 2 điểm với $t \in \left(-1; \frac{21}{4}\right]$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có $m = 3; m = 5$ thỏa mãn yêu cầu.

KL: Có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài.

Câu 72: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0) = 0$ và $f'(x)$ được cho như hình vẽ bên. Phương trình $|f(|x|)| = m$ (với m là tham số) có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm?



Lời giải

DS: 6

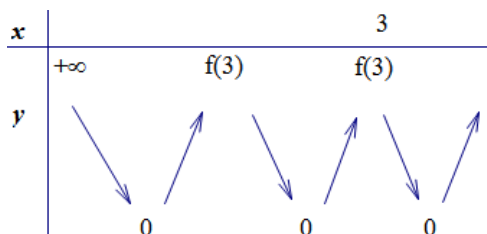
BBT của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$		0		3		∞
y'		+	0	+	0	-	
y	$-\infty$		0		$f(3)$		$-\infty$

BBT của hàm số $y = f(|x|)$

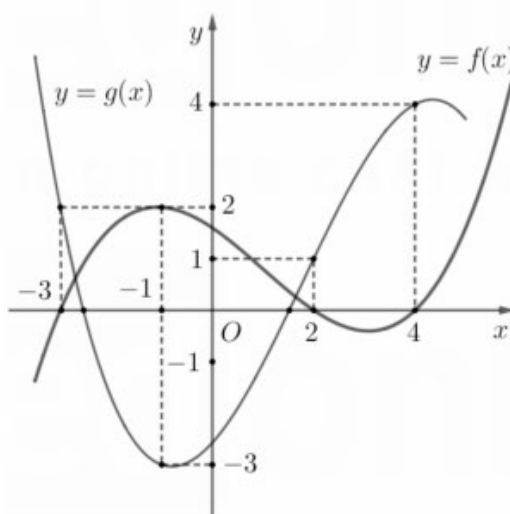
x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y	$-\infty$		$f(3)$		0		$f(3)$		$-\infty$

BBT của hàm số $y = |f(|x|)|$



Suy ra phương trình $|f(|x|)| = m$ có nhiều nhất là 6 nghiệm.

Câu 73: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên (trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = f(x)$). Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(1 - g(2x - 1)) = m$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[-1; \frac{5}{2}\right]$.



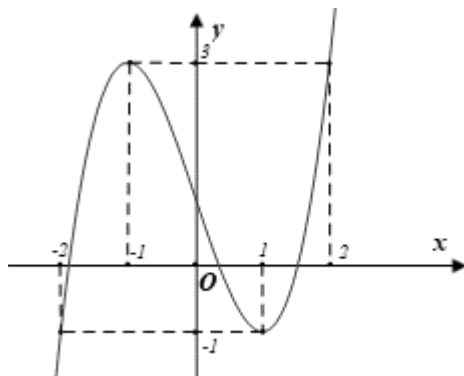
Lời giải

ĐS: 3

Với $x \in \left[-1; \frac{5}{2}\right] \Rightarrow 2x - 1 \in [-3; 4] \Rightarrow g(2x - 1) \in [-3; 4] \Rightarrow t = 1 - g(2x - 1) \in [-3; 4]$

Vậy ta cần tìm m để phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc đoạn $[-3; 4]$
 $\Leftrightarrow \min_{[-3; 4]} f(t) \leq m \leq \max_{[-3; 4]} f(t) \Leftrightarrow \min_{[-3; 4]} f(t) \leq m \leq 2$ trong đó $\min_{[-3; 4]} f(t) \in (-1; 0)$. Vậy các số nguyên cần tìm là $a \in \{0, 1, 2\}$

Câu 74: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau đây. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để phương trình $f(f(x)) = m$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$?



Lời giải

ĐS: 3

Đặt $g(x) = f(f(x))$.

$$g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x).$$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(f(x)) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases}$$

$$+ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \text{ (hoành độ các điểm cực trị).}$$

$$+ f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -1 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị, ta có:

+ Khi $f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$; $x = a \in (-2; -1)$; $x = b \in (1; 2)$.

+ Khi $f(x) = -1 \Leftrightarrow x = 1$; $x = -2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	b	2	$+\infty$
g'		0	-	0	+	0	+
g							

$\swarrow$ -1 $\nearrow$ 3 $\searrow$ -1 $\nearrow$

Phương trình $f(f(x)) = m$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1; 2]$

$$\Leftrightarrow -1 < m < 3.$$

Mà m là số nguyên nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Vậy có 3 giá trị của m thỏa đề bài.

Câu 75: Cho hàm số $g(x) = 2x^3 + x^2 - 8x$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình

$$\sqrt{g(g(x)+3)} - m = 2g(x) + 7 \text{ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt}$$

Lời giải

ĐS: 25

$$\text{Đặt } t = g(x) + 3 \Rightarrow t = 2x^3 + x^2 - 8x + 3 \Rightarrow t' = 6x^2 + 2x - 8.$$

$$t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ x = 1 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$		1	$+\infty$	
t'		+	0	-	0	+
t	$-\infty$		$\frac{289}{27}$		-2	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra mỗi giá trị $t \in \left(-2; \frac{289}{27}\right)$ sẽ có tương ứng 3 giá trị x .

$$\sqrt{g(g(x)+3)} - m = 2g(x) + 7 \Leftrightarrow \sqrt{g(t) - m} = 2(t+3) + 7 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\frac{1}{2} \\ g(t) - m = (2t+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\frac{1}{2} \\ m = 2t^3 + t^2 - 8t - 4t^2 - 4t - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\frac{1}{2} \\ m = 2t^3 - 3t^2 - 12t - 1 \quad (1) \end{cases}$$

Phương trình đã cho có 6 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{289}{27}\right)$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 - 3t^2 - 12t - 1$ với $t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{289}{27}\right)$.

$$f'(t) = 6t^2 - 6t - 12 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{2}$		2		$\frac{289}{27}$
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	4		-21		1979,5

Từ bảng biến thiên, phương trình đã cho có 6 nghiệm thực phân biệt $m \in (-21; 4]$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-20; -19; -18; \dots; 4\} \Rightarrow$ có 25 số nguyên thỏa mãn.

Câu 76: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) - (m-6)f(|x|) - m + 5 = 0$ có 6 nghiệm thực phân biệt?

Lời giải

ĐS: 3

Hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	3	-1	$+\infty$

Hàm số $y = f(|x|)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-1	3	-1	$+\infty$

Đặt $t = f(|x|) \geq -1$ (*)

Nhận xét:

+ với $t_0 < -1 \xrightarrow{(*)} x \in \emptyset$ + với $t_0 = -1; t_0 > 3 \xrightarrow{(*)} 2$ nghiệm

+ với $t_0 = 3 \xrightarrow{(*)} 3$ nghiệm + với $t_0 \in (-1; 3) \xrightarrow{(*)} 4$ nghiệm

Phương trình trở thành $t^2 - (m-6)t - m + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = m-5 \end{cases}$

Yêu cầu bài toán suy ra $-1 < m-5 < 3 \Leftrightarrow 4 < m < 8 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{5; 6; 7\}$

Câu 77: Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 7$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\sqrt{f(f(x)-3)+m} = 2f(x)-5$ có 6 nghiệm thực phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

Lời giải

ĐS: 91

Đặt $t = f(x) - 3$.

* $t = f(x) - 3 \Leftrightarrow t = 2x^3 + x^2 - 8x + 4$ (1)

Đặt $g(x) = 2x^3 + x^2 - 8x + 4$; $g'(x) = 6x^2 + 2x - 8$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -\frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{316}{27} \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+
y	$-\infty$		$\nearrow \frac{316}{27}$	$\searrow -1$		$\nearrow +\infty$

Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = g(x)$ và $y = t$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

+ $t < -1$ hoặc $t > \frac{316}{27}$ thì phương trình (1) có 1 nghiệm.

+ $t = -1$ hoặc $t = \frac{316}{27}$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm.

+ $-1 < t < \frac{316}{27}$ thì phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

* Ta có $\sqrt{f(f(x)-3)+m} = 2f(x)-5 \Leftrightarrow \sqrt{f(t)+m} = 2t+1$ (2)

Điều kiện để phương trình (2) có nghiệm $t \geq -\frac{1}{2}$

$$(2) \Leftrightarrow f(t)+m = 4t^2+4t+1 \Leftrightarrow m = 4t^2+4t+1-f(t) \Leftrightarrow m = -2t^3+3t^2+12t-6$$

$$\text{Đặt } h(t) = -2t^3+3t^2+12t-6 \quad ; h'(t) = -6t^2+6t+12 \quad ; h(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{2}$		2		$\frac{316}{27}$
$h'(t)$		+	0	-	
y	-11		$\nearrow 14$	$\searrow -2660,89$	

Số nghiệm

của phương trình (2) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = h(t)$ và $y = m$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

+ $m > 14$ thì phương trình (2) vô nghiệm.

+ $m = 14$ hoặc $m < -11$ thì phương trình (2) có 1 nghiệm.

+ $-11 \leq m < 14$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình $\sqrt{f(f(x)-3)+m} = 2f(x)-5$ có 6 nghiệm thực phân biệt khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt và phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương $\sqrt{f(f(x)-3)+m} = 2f(x)-5$ có 6 nghiệm thực phân biệt khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $-\frac{1}{2} \leq t < \frac{316}{27}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta được kết quả là $-11 \leq m < 14$. Suy ra $S = \{1; 2; \dots; 13\}$

Tổng các phần tử của $S = 1 + \dots + 11 + 12 + 13 = 91$.

Câu 78: Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt[3]{f(x)+m}) = x^3 - m$ có nghiệm thuộc $[1; 2]$?

Lời giải

ĐS: 16

Đặt $t = \sqrt[3]{f(x)+m} \Rightarrow t^3 = f(x)+m$.

Ta có hệ $\begin{cases} t^3 = f(x)+m \\ x^3 = f(t)+m \end{cases} \Rightarrow f(x)+x^3 = f(t)+t^3$.

Xét hàm số $g(x) = f(x)+x^3, x \in [1; 2] \Rightarrow g'(x) = f'(x)+3x^2 > 0 \quad \forall x \in [1; 2]$.

$\Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ đồng biến trên đoạn $[1; 2]$.

Vì $g(x) = g(t) \Leftrightarrow x = t \Rightarrow f(x) = x^3 - m$

$\Leftrightarrow x^5 + 3x^3 - 4m = x^3 - m \Rightarrow 3m = x^5 + 2x^3 \quad (1)$

Xét hàm số $h(x) = x^5 + 2x^3, x \in [1; 2] \Rightarrow h'(x) = 5x^4 + 6x^2 > 0 \quad \forall x \in [1; 2]$.

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow h(1) \leq 3m \leq h(2) \Leftrightarrow 3 \leq 3m \leq 48 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 16$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; \dots; 16\}$.

Vậy có 16 giá trị nguyên của tham số m .

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

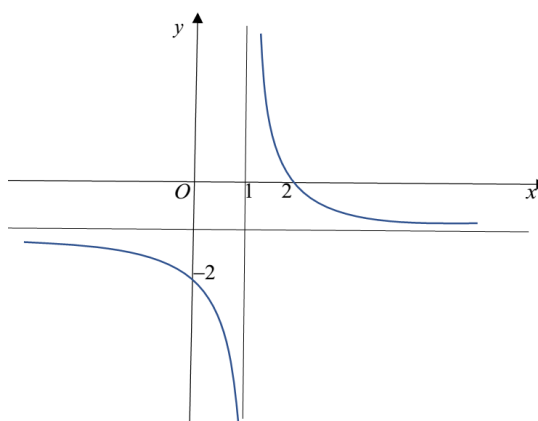
Câu 79: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		2		1	

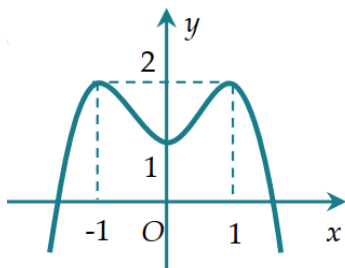
The graph illustrates the function $f(x)$ based on the first derivative test. The function has a local maximum at $x = -2$ with a value of $f(-2) = 2$, and a local minimum at $x = 0$ with a value of $f(0) = 1$. The function increases from $-\infty$ to 2 , decreases from 2 to 1 , and then increases from 1 to $+\infty$.

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

Câu 80: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$, có đồ thị là hình vẽ với a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a - 3b + 2c$.

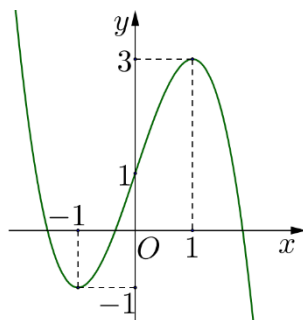


Câu 81: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ

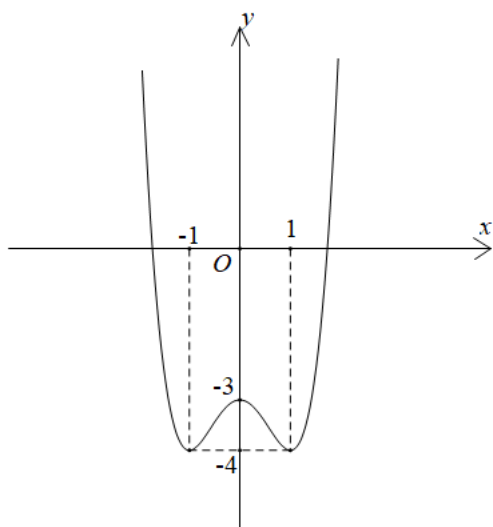


Số nghiệm của phương trình $2f(x)|f'(x)| - 3f'(x) = 0$ là:

Câu 82: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(\cos x)) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$?

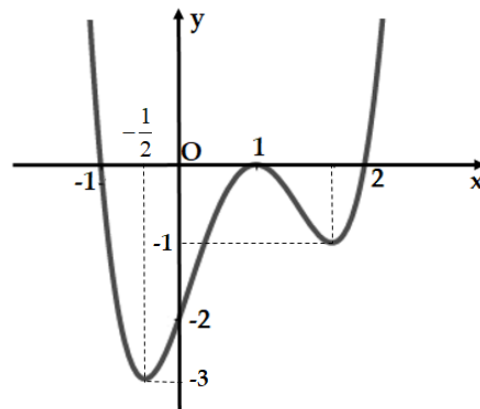


Câu 83: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2|f(x)| - 3 = 0$ là

Câu 84: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới.



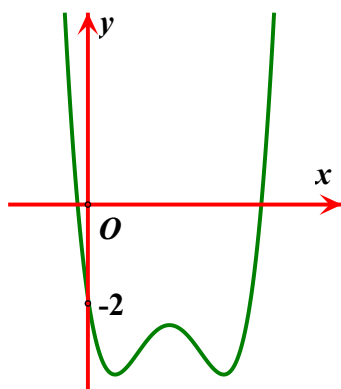
Đặt $g(x) = f(f(x) - 1)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g(x) = 0$. Số phần tử của tập S là

Câu 85: Cho hàm số $y = f(x)$ bậc ba có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	0	$+\infty$	

Đặt $g(x) = f\left(\frac{1}{2}f^2(x) - f(x)\right)$. Phương trình $g'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

Câu 86: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ và hàm số $g(x) = \sqrt{x^2 + 4} + x$. Số nghiệm thực của phương trình $f[g(x)f(x)] + 2 = 0$ là



Câu 87: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Phương trình $\sqrt{15 - 2x - x^2} \cdot \sin[\pi \cdot f(x)] = 0$ có tối đa bao nhiêu nghiệm thực?

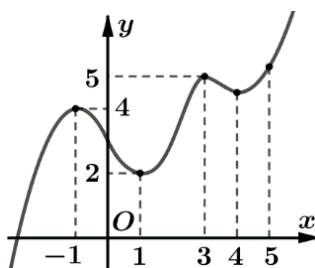
Câu 88: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Tìm tổng các số nguyên m sao cho phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 7 nghiệm phân biệt.

Câu 89: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		-2		2		-3		$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $4f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất ba nghiệm dương phân biệt?

Câu 90: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(3\log_3 x) = m - 1$ có nghiệm duy nhất trên $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; 3\right]$?



A. 2.

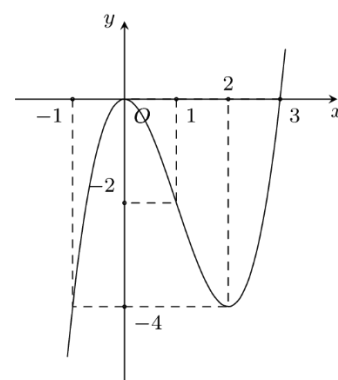
B. 4.

C. 3.

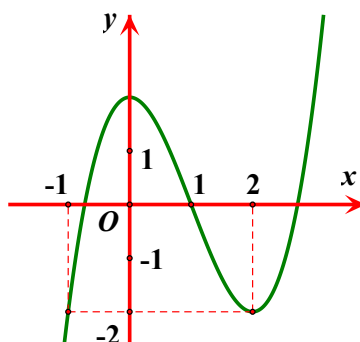
D. 1.

Câu 91: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ

Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(x) - (m+5)|f(x)| + 4m + 4 = 0$ có 7 nghiệm phân biệt là

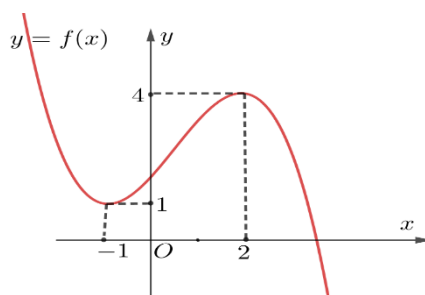


Câu 92: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



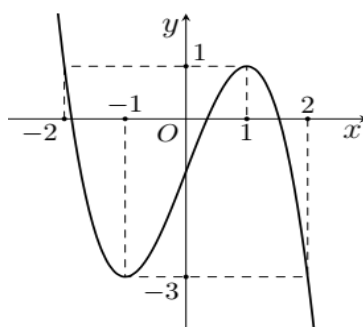
Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - m) + 2 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-2; 2)$?

Câu 93: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m , để phương trình $|3f^2(2x) - 12f(2x) - m| = 1$ có ít nhất 7 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-\infty; 1)$?

Câu 94: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(-x^2 + 4x + m) + 3 = 0$ có đúng ba nghiệm $x \in [0; +\infty)$

Câu 95: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với a, b, c là các hệ số thực và có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			1		0		1
	$-\infty$						$-\infty$

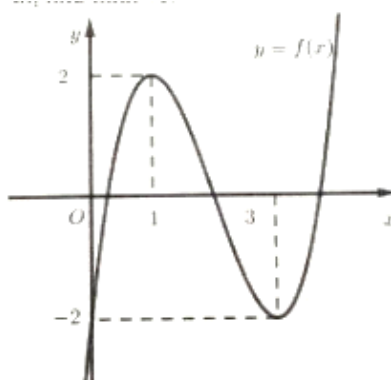
Tổng tất cả các giá trị nguyên của $m \in [-20; 20]$ để phương trình $f(x) + 2\sqrt{f(x)} + f(\sqrt{f(x)}) + m = 1$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt là

Câu 96: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$		0		$+\infty$	
		-2		-2		

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x)) - f^2(x) = m$ có ít nhất 6 nghiệm?

- Câu 97:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2m + 1$ và trục Ox có đúng hai điểm chung phân biệt. Tính tổng T của các phần tử thuộc tập S .
- Câu 98:** Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-3; 3]$ để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là
- Câu 99:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right) = x^3 - m$ có nghiệm $x \in [1; 2]$ biết $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$.
- Câu 100:** Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d: y = m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 . Số giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5$ là
- Câu 101:** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với $a \neq 0$ có đồ thị tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1 và cắt đường thẳng $y = 2m - 1$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là 0 và 4, với m là tham số. Số nghiệm của phương trình $f(x) = f(-3)$ là.
- Câu 102:** Cho hàm số $f(x) = x^4 - 32x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3; 2)$ của phương trình $f(x^2 + 2x + 3) = m$ bằng -4 ?
- Câu 103:** Cho hàm số $f(x) = x^4 - 18x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-4; 1)$ của phương trình $f(x^2 + 4x + 5) = m$ bằng -8 ?
- Câu 104:** Cho hàm số $f(x) = x^4 - 32x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-4; 1)$ của phương trình $f(x^2 + 4x + 5) = m$ bằng -8 ?
- Câu 105:** Cho hàm số $f(x) = x^4 - 18x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3; 2)$ của phương trình $f(x^2 + 2x + 3) = m$ bằng -4 ?
- Câu 106:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^4(x) + 2 = 3f^2(x) + |f(x) + 2m|$ có đúng 4 nghiệm phân biệt?

Câu 107: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị (C) và có đạo hàm cấp hai $f''(x) = 6x + 12$.
Biết đồ thị (C) đi qua điểm $M(-2; 2)$ và tiếp tuyến của (C) tại M là đường thẳng $d: y = 2x + 6$.
Khi đó giá trị của $f(3)$ bằng

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 79: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		2		1	$+\infty$

Diagram showing the function values at the critical points: $-\infty \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow +\infty$.

Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

Lời giải

ĐS: 3

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow a > 0$

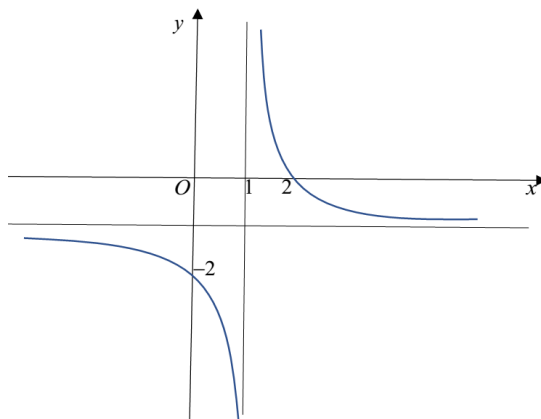
$$f(0) = d = 1 > 0 \Rightarrow d > 0.$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \text{ vì } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 0 \Rightarrow c = 0.$$

$$x_{cd} + x_{ct} = -2 + 0 = -2 < 0 \Rightarrow \frac{-2b}{3a} < 0 \Rightarrow b > 0.$$

Vậy có ba số dương.

Câu 80: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$, có đồ thị là hình vẽ với a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $T = a - 3b + 2c$.



Lời giải

ĐS: -9

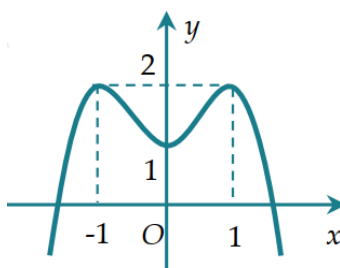
Tiệm cận đứng $x = -c = 1 \Rightarrow c = -1$.

Tiệm cận ngang $y = a = -1$.

Giao điểm trục Oy là $y = \frac{b}{c} = -2 \Rightarrow b = 2$.

$$T = a - 3b + 2c = -1 - 6 - 2 = -9$$

Câu 81: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số nghiệm của phương trình $2f(x)|f'(x)| - 3f'(x) = 0$ là:

Lời giải

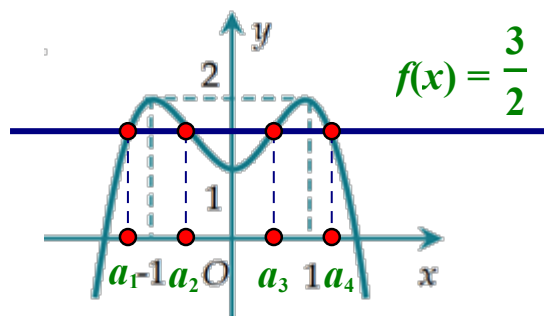
ĐS: 6

Trường hợp 1: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = \pm 1$.

Trường hợp 2: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee 0 < x < 1$.

Khi đó:

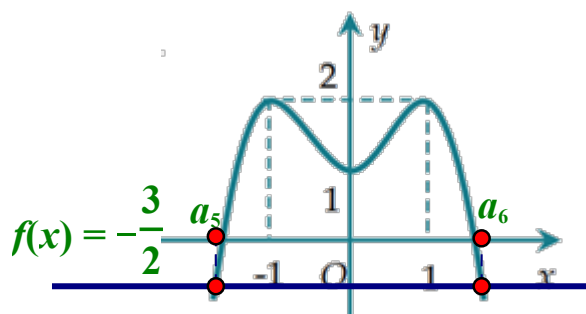
$$2f(x)|f'(x)| - 3f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) - 3f'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a_1 \ (a_1 < -1) \\ x = a_2 \ (-1 < a_2 < 0) \\ x = a_3 \ (0 < a_3 < 1) \\ x = a_4 \ (a_4 > 1) \end{cases}.$$



So với điều kiện, ta nhận: $x = a_1$ và $x = a_3$.

Trường hợp 3: $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0 \vee x > 1$.

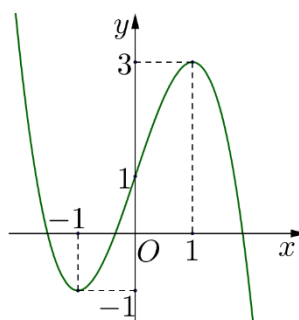
$$2f(x)|f'(x)| - 3f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2f(x) \cdot f'(x) - 3f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a_5 \ (a_5 < -1) \\ x = a_6 \ (a_6 > 1) \end{cases}.$$



So với điều kiện, ta nhận: $x = a_6$.

Nhận thấy các nghiệm trên phân biệt nên phương trình $2f(x)|f'(x)| - 3f'(x) = 0$ có 6 nghiệm.

Câu 82: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(\cos x)) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$?



Lời giải

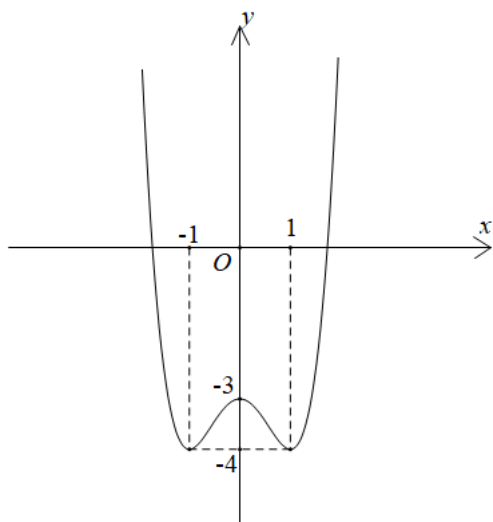
ĐS: 4

Đặt $t = \cos x$, vì $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow t \in [-1; 0) \rightarrow f(t) \in [-1; 1)$

Điều kiện bài toán $\Leftrightarrow \exists t \in [-1; 0) \text{ s.t. } f(f(t)) = m \Leftrightarrow -1 \leq m < 3$

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-1; 0; 1; 2\}$.

Câu 83: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

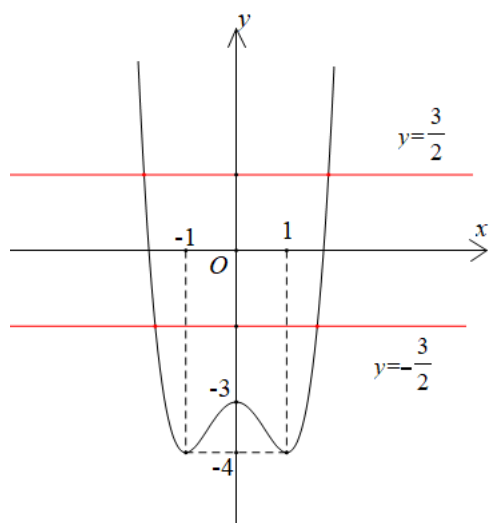


Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $2|f(x)| - 3 = 0$ là

Lời giải

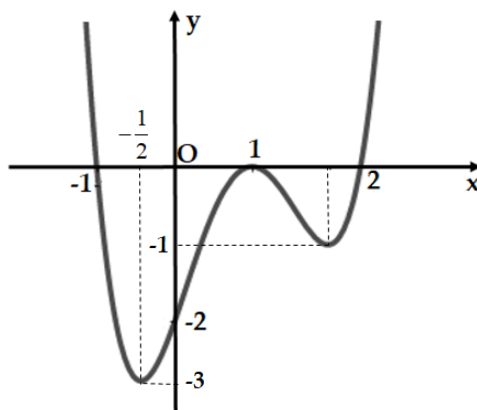
ĐS: 4

$$2|f(x)| - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{3}{2} \\ f(x) = -\frac{3}{2} \end{cases}$$



Từ đồ thị, ta thấy hai đường thẳng $y = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 4 điểm phân biệt. Vậy phương trình $2|f(x)| - 3 = 0$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

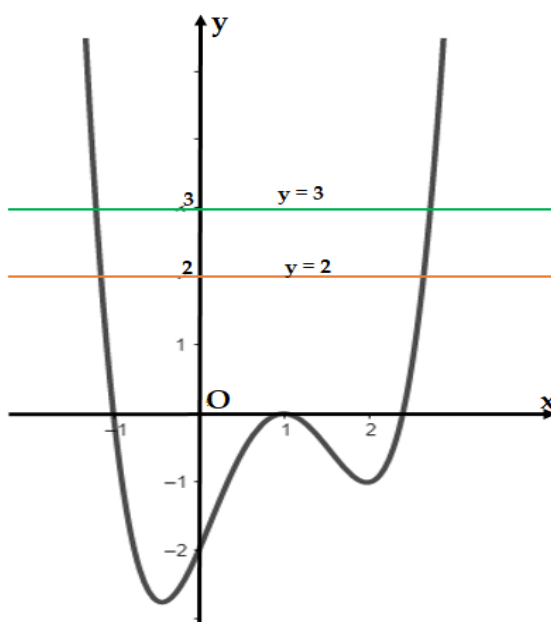
Câu 84: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới.



Đặt $g(x) = f(f(x) - 1)$. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g(x) = 0$. Số phần tử của tập S là

Lời giải

ĐS: 7



Ta có phương trình $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(f(x) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - 1 = -1 \\ f(x) - 1 = 1 \\ f(x) - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \text{ (3 nghiệm)} \\ f(x) = 2 \text{ (2 nghiệm)} \\ f(x) = 3 \text{ (2 nghiệm)} \end{cases}$

Các nghiệm trên không trùng nhau. Vậy phương trình $g(x) = 0$ có 7 nghiệm.

Câu 85: Cho hàm số $y = f(x)$ bậc ba có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	0	$+\infty$	

Đặt $g(x) = f\left(\frac{1}{2}f^2(x) - f(x)\right)$. Phương trình $g'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

Lời giải

ĐS: 7

Ta có $g'(x) = f'(x)[f(x)-1]f'\left(\frac{1}{2}f^2(x)-f(x)\right)$ nên

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0; f(x) = 1 \\ f'\left(\frac{1}{2}f^2(x)-f(x)\right) = 0. \end{cases}$$

Xét phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2}. \end{cases}$

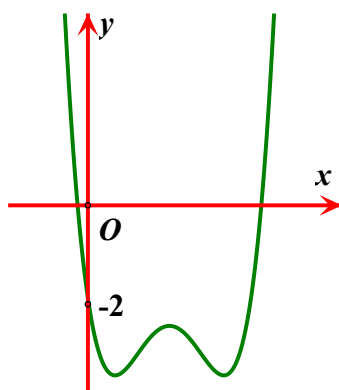
Xét phương trình $f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \left(a > \frac{3}{2} \right). \end{cases}$

Xét phương trình

$$f'\left(\frac{1}{2}f^2(x)-f(x)\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}f^2(x)-f(x) = 0 \\ \frac{1}{2}f^2(x)-f(x) = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = b (b < 0) \end{cases} \\ f(x) = 2 \Leftrightarrow x = c (c > a) \\ f(x) = 3 \Leftrightarrow x = d (d > c) \\ f(x) = -1 \Leftrightarrow x = e (e < b). \end{cases}$$

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt.

Câu 86: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ và hàm số $g(x) = \sqrt{x^2 + 4} + x$. Số nghiệm thực của phương trình $f[g(x)f(x)] + 2 = 0$ là



Lời giải

ĐS: 8

Ta có: $\sqrt{x^2 + 4} > \sqrt{x^2} = |x|$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4} + x > |x| + x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 + 4} - x > |x| - x \geq 0 \end{cases}$$

Khi đó, phương trình: $f[g(x)f(x)] + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow f[g(x)f(x)] = -2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \cdot f(x) = 0 \\ g(x) \cdot f(x) = a \in (0;1) \\ g(x) \cdot f(x) = b \in (2;3) \\ g(x) \cdot f(x) = c \in (3;4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \quad (1) \quad \left(\text{do } g(x) = x + \sqrt{x^2 + 4} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \right) \\ f(x) = \frac{1}{4}a(\sqrt{x^2 + 4} - x) \quad (2) \\ f(x) = \frac{1}{4}b(\sqrt{x^2 + 4} - x) \quad (3) \\ f(x) = \frac{1}{4}c(\sqrt{x^2 + 4} - x) \quad (4) \end{cases}$$

Dễ thấy phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

Xét hàm số $h(x) = \frac{1}{4}t(\sqrt{x^2 + 4} - x)$, $x \in \mathbb{R}$ ($t > 0$)

$$h'(x) = \frac{1}{4}t \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2 + 4}} < 0, x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{t}{\sqrt{x^2 + 4} + x} = 0$$

Từ đồ thị ta thấy các phương trình (2), (3), (4) mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt

Vậy phương trình đã cho có 8 nghiệm phân biệt.

Câu 87: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Phương trình $\sqrt{15 - 2x - x^2} \cdot \sin[\pi \cdot f(x)] = 0$ có tối đa bao nhiêu nghiệm thực?

Lời giải

ĐS: 113

Ta có $15 - 2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 3$.

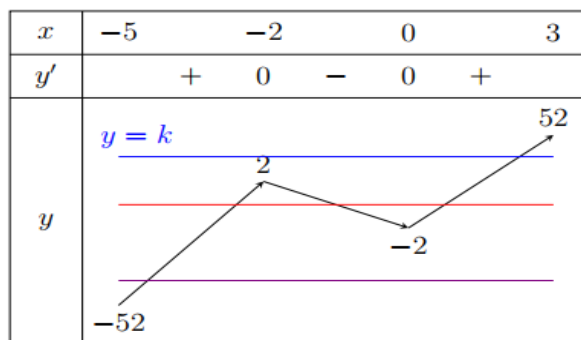
$$\text{Phương trình } \sqrt{15-2x-x^2} \cdot \sin[\pi \cdot f(x)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 15-2x-x^2 = 0 & (1) \\ \sin[\pi f(x)] = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -5. \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow f(x) = k, \text{ với } k \text{ nguyên.}$$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$, trên khoảng $(-5; 3)$ ta có:



Với mỗi số nguyên k thỏa mãn $-52 < k < -2$ hoặc $2 < k < 52$ thì phương trình $f(x) = k$ có một nghiệm. Do đó $f(x) = k$ có tối đa 98 nghiệm.

Với mỗi số nguyên k thỏa mãn $k = -2$ hoặc $k = 2$ thì phương trình $f(x) = k$ có hai nghiệm. Do đó $f(x) = k$ có tối đa 4 nghiệm.

Với mỗi số nguyên k thỏa mãn $-2 < k < 2$ thì phương trình $f(x) = k$ có ba nghiệm. Do đó $f(x) = k$ có tối đa 9 nghiệm.

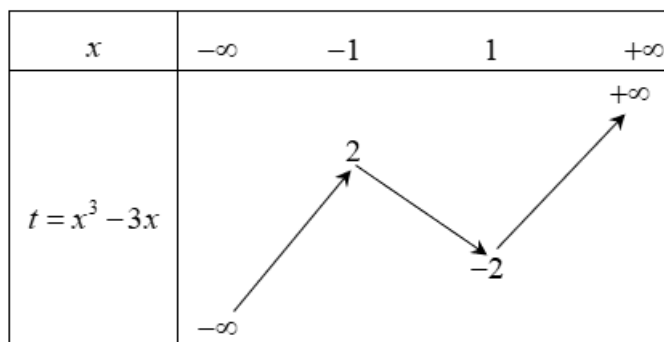
Vậy phương trình đã cho có tối đa $2 + 98 + 4 + 9 = 113$ nghiệm.

Câu 88: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Tìm tổng các số nguyên m sao cho phương trình $f(x^3 - 3x) = m$ có 7 nghiệm phân biệt.

Lời giải

ĐS: 0

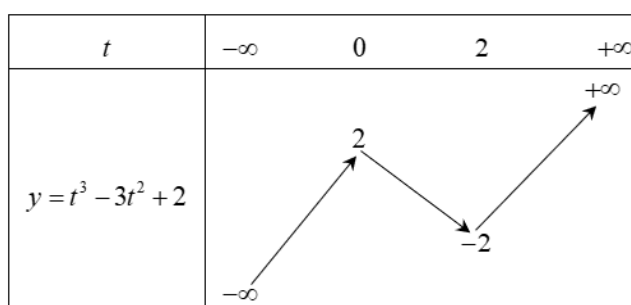
Đặt $t = x^3 - 3x$ (1). Ta có BBT của hàm số $t = x^3 - 3x$:



Khi đó ta có: $f(x^3 - 3x) = m \Leftrightarrow f(t) = m \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 2 = m \quad (2)$

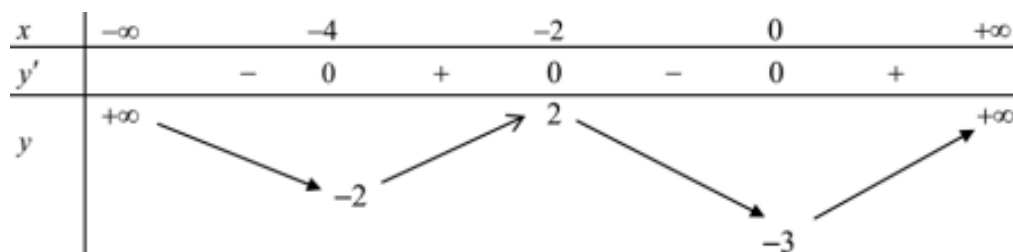
Để phương trình có 7 nghiệm phân biệt thì phương trình có 3 nghiệm t trong đó có 2 nghiệm $t \in (-2; 2)$ và 1 nghiệm $t > 2$ hoặc $t < -2$.

Ta có BBT của hàm số $y = t^3 - 3t^2 + 2$:



Dựa vào BBT, để thỏa mãn yêu cầu trên thì $m \in (-2; 2) \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-1; 0; 1\} \Rightarrow \sum_{-1}^1 m = 0$

Câu 89: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $4f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất ba nghiệm dương phân biệt?

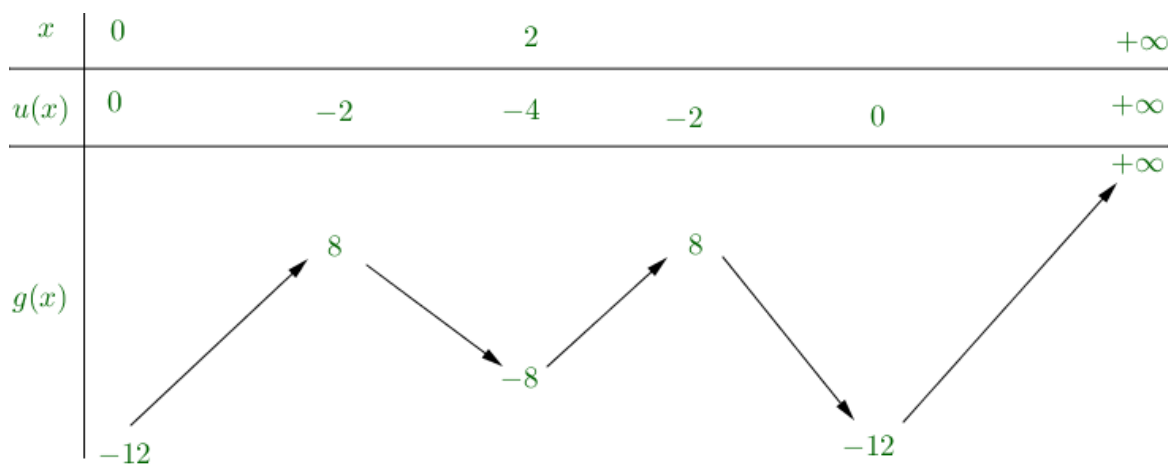
Lời giải

ĐS: 20

Ta có: $4f(x^2 - 4x) = m \Leftrightarrow 4f(u(x)) = m$, với $u(x) = x^2 - 4x$.

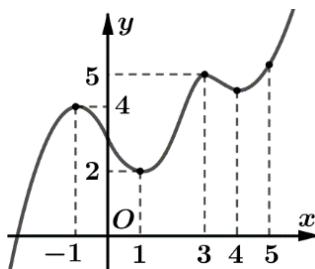
Đặt $g(x) = 4f(u(x))$.

Phương trình đã cho có ít nhất ba nghiệm dương phân biệt khi đồ thị hàm số $y = g(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$ và đường thẳng $y = m$ có ít nhất ba điểm chung phân biệt.



Vậy phương trình $4f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất ba nghiệm dương phân biệt khi $-12 < m \leq 8$, mà m nguyên nên $m = -11, -10, \dots, 8$.

Câu 90: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(3\log_3 x) = m - 1$ có nghiệm duy nhất trên $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; 3\right)$?



A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

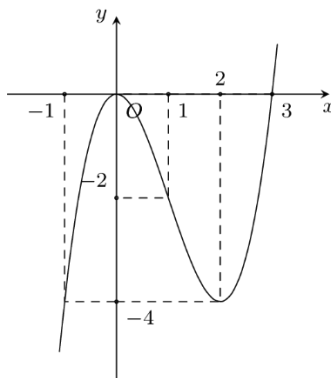
Lời giải

ĐS: 1

Đặt $u = 3\log_3 x, x \in \left[\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; 3\right) \Rightarrow u \in [-1; 3)$. Do hàm số $u = 3\log_3 x$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên với $u \in [-1; 3)$ phương trình có nghiệm duy nhất trên $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; 3\right)$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $f(u) = m - 1$ có nghiệm duy nhất trên $[-1; 3)$. Từ đồ thị hàm số suy ra $\begin{cases} m - 1 = 1 \\ 4 < m - 1 < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ 5 < m < 6 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 2$.

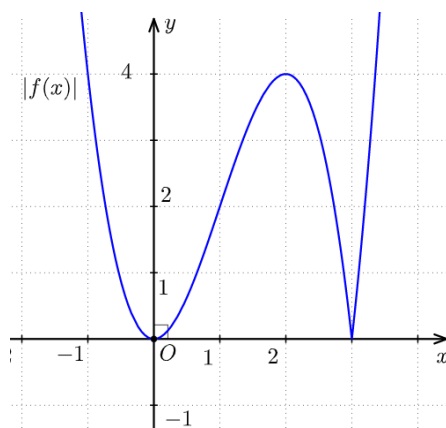
Câu 91: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ



Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(x) - (m+5)|f(x)| + 4m+4 = 0$ có 7 nghiệm phân biệt là

Lời giải

ĐS: 3



Dựa vào giả thiết ta vẽ được đồ thị hàm số $|f(x)|$ như bên trên

Ta có: $f^2(x) - (m+5)|f(x)| + 4m+4 = 0 \Leftrightarrow (|f(x)| - 4)(|f(x)| - m - 1) = 0$

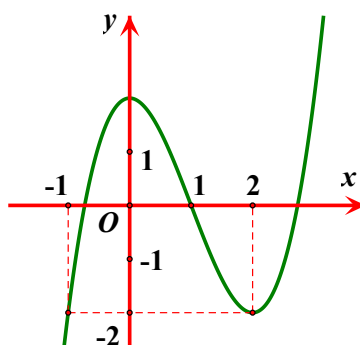
TH1: $|f(x)| = 4$ thì phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

TH2: $|f(x)| = m+1$ theo yêu cầu bài toán thì phương trình cần có 4 nghiệm phân biệt, nên:

$0 < m+1 < 4 \Leftrightarrow -1 < m < 3$. Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị của m bằng 3.

Câu 92: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - m) + 2 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-2; 2)$?

Lời giải

ĐS: 1

$$PT \Leftrightarrow f(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - m) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - m = -1 \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - m = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} + 1 = m \\ \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - 2 = m \end{cases}$$

Xét

$$+ f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ta có BBT sau

x	-2	0	2
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	3	$1+2\sqrt{2}$	3

Từ BBT trên phương trình $\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} + 1 = m$ có nghiệm

$$+ g(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - 2 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ta có BBT sau

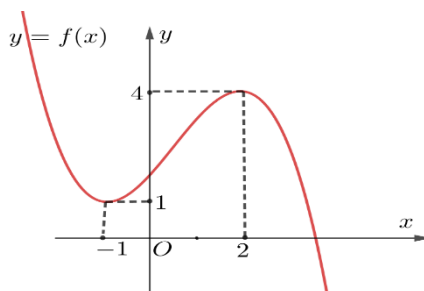
x	-2	0	2
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	$2\sqrt{2}-2$	0

Từ BBT trên phương trình $\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - 2 = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow 0 < m \leq 2\sqrt{2} - 2$

Vậy PT $f(\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} - m) + 2 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-2; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m \leq 2\sqrt{2} - 2 \\ 3 < m \leq 1 + 2\sqrt{2} \end{cases}, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{có 1 giá trị nguyên } m = 3 \text{ thỏa mãn.}$$

Câu 93: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m , để phương trình $|3f^2(2x) - 12f(2x) - m| = 1$ có ít nhất 7 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-\infty; 1)$?

Lời giải

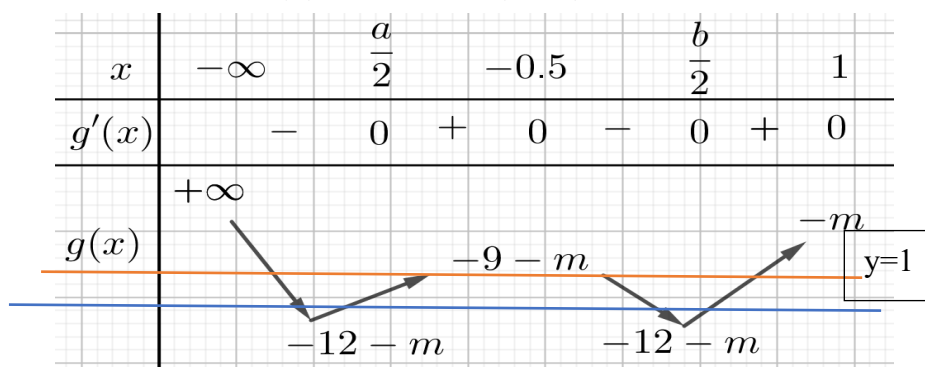
ĐS: 1

+ Đặt $g(x) = 3f^2(2x) - 12f(2x) - m$.

Ta có $g'(x) = 12f(2x) \cdot f'(2x) - 24 \cdot f'(2x) = 12f'(2x)[f(2x) - 2]$.

$$+ \text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(2x) = 0 \\ f(2x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -1 \\ 2x = 2 \\ 2x = a \in (-\infty; -1) \\ 2x = b \in (-1; 2) \\ 2x = c \in (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,5 \\ x = 1 \\ x = \frac{a}{2} \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \\ x = \frac{b}{2} \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right) \\ x = \frac{c}{2} \in (1; +\infty) \end{cases}$$

+ Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên khoảng $(-\infty; 1)$.



Tính giá trị

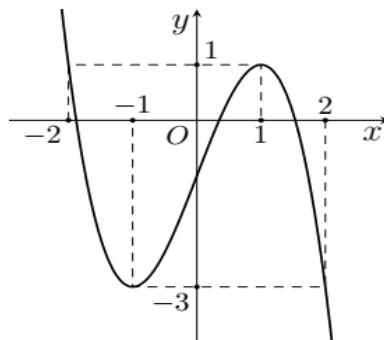
$$\textcircled{\bullet} \text{ Tại } \begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ x = \frac{b}{2} \\ x = \frac{c}{2} \end{cases} \Rightarrow f(2x) = 2 \Rightarrow g(x) = 3f^2(2x) - 12f(2x) - m = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 - m = -12 - m$$

$$\textcircled{\bullet} \text{ Tại } x = -0,5 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow f(2x) = f(-1) = 1 \Rightarrow g(x) = 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 - m = -9 - m$$

$$|3f^2(2x) - 12f(2x) - m| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 1 \\ g(x) = -1 \end{cases}, \text{ ta vẽ hai đường thẳng } y = \pm 1 \text{ vào BBT để có ít nhất}$$

$$7 \text{ nghiệm khi } -12 - m < -1 < 1 \leq -9 - m \Leftrightarrow -11 < m \leq -10, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = -10.$$

Câu 94: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(-x^2 + 4x + m) + 3 = 0$ có đúng ba nghiệm $x \in [0; +\infty)$

Lời giải

ĐS: 4

Xét phương trình: $f(-x^2 + 4x + m) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(-x^2 + 4x + m) = -3$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4x + m = -1 \\ -x^2 + 4x + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x = m + 1 & (1) \\ x^2 - 4x = m - 2 & (2) \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 4x$ với $x \in [0; +\infty)$.

$$\Rightarrow g'(x) = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Bảng biến thiên:

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	0	-4	$+\infty$

Phương trình có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ pt có 2 nghiệm và phương trình có 1 nghiệm hoặc phương trình có 1 nghiệm và phương trình có 2 nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m - 2 \leq 0 \\ m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq 2 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m \leq 2 \\ m = -2 \end{cases} \text{ Suy ra có 4 giá trị nguyên của } m.$$

Câu 95: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với a, b, c là các hệ số thực và có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	0	-
y			1		1			
	$-\infty$			0				$-\infty$

Tổng tất cả các giá trị nguyên của $m \in [-20; 20]$ để phương trình $f(x) + 2\sqrt{f(x)} + f(\sqrt{f(x)}) + m = 1$ có đúng 4 nghiệm thực phân biệt là

Lời giải

ĐS: -3

Dựa vào bảng biến thiên ta có $y = f(x) = -x^4 + 2x^2$.

Xét phương trình $f(x) + 2\sqrt{f(x)} + f(\sqrt{f(x)}) + m = 1$.

Điều kiện $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Đặt $t = \sqrt{f(x)}, (0 \leq t \leq 1)$.

Ta được phương trình $t^2 + 2t - t^4 + 2t^2 + m = 1 \Leftrightarrow -t^4 + 3t^2 + 2t - 1 = -m$.

Đặt $h(t) = -t^4 + 3t^2 + 2t - 1 \Rightarrow h'(t) = -4t^3 + 6t + 2 > 0, \forall t \in [0; 1]$.

Bảng biến thiên của $y = h(t)$

t	0	1
$h'(t)$		+
$h(t)$	-1	3

Với mỗi $t, (0 < t < 1)$ thì phương trình $f(x) = t$ có 4 nghiệm phân biệt. Do đó để phương trình

$f(x) + 2\sqrt{f(x)} + f(\sqrt{f(x)}) + m = 1$ có 4 nghiệm phân biệt khi $-1 < -m < 3$.

$$\text{Do } \begin{cases} m \in [-20; 20] \\ m \in \mathbb{Z} \\ -1 < -m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-20; 20] \\ m \in \mathbb{Z} \\ -3 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0, m = -1, m = -2 \Rightarrow 0 - 1 - 2 = -3.$$

Câu 96: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$			0			$+\infty$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x)) - f^2(x) = m$ có ít nhất 6 nghiệm?

Lời giải

ĐS: 6

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta tìm được $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2$

Khi đó phương trình

$$f(f(x)) - f^2(x) = m \Leftrightarrow \frac{1}{8}f^4(x) - 2f^2(x) = m \quad (1)$$

Đặt $t = f(x) \geq -2$

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{8}t^4 - 2t^2 = m \quad (2)$

Xét hàm số $y = \frac{1}{8}t^4 - 2t^2 \quad (t \geq -2) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}t^3 - 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2\sqrt{2} \\ t = 0 \\ t = -2\sqrt{2} \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:

t	-2	0	2	$2\sqrt{2}$	$+\infty$
y'		+	0	-	
			0	-	0
y	-6		-6	-8	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên ta có các kết quả sau:

+ Nếu $m < -8$ thì vô nghiệm suy ra vô nghiệm

+ Nếu $m = -8$ thì có nghiệm $t = 2\sqrt{2} \Rightarrow f(x) = 2\sqrt{2}$

Vậy khi $m = -8$ thì có 2 nghiệm.

+ Nếu $-8 < m < -6$ thì có 2 nghiệm:

$t_1 = a > 2\sqrt{2} \Rightarrow f(x) = a > 2\sqrt{2}$

$t_2 = b \in (2; 2\sqrt{2}) \Rightarrow f(x) = b \in (2; 2\sqrt{2})$

Vậy khi $-8 < m < -6$ thì có 4 nghiệm

+ Nếu $m = -6$ thì có 3 nghiệm:

$t_1 = a > 2\sqrt{2} \Rightarrow f(x) = a > 2\sqrt{2}$

$t_2 = 2 \Rightarrow f(x) = 2$

$t_3 = -2 \Rightarrow f(x) = -2$

Vậy khi $m = -6$ thì có 6 nghiệm.

+ Nếu $-6 < m < 0$ thì có 3 nghiệm:

$t_1 = a > 2\sqrt{2} \Rightarrow f(x) = a > 2\sqrt{2}$

$t_2 = b \in (0; 2) \Rightarrow f(x) = b \in (0; 2)$

$t_3 = c \in (-2; 0) \Rightarrow f(x) = c \in (-2; 0)$

Vậy khi $-6 < m < 0$ thì có 8 nghiệm.

+ Nếu $m = 0$ thì có 2 nghiệm:

$t_1 = a > 2\sqrt{2} \Rightarrow f(x) = a > 2\sqrt{2}$

$$t_2 = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

Vậy khi $m = 0$ thì có 5 nghiệm.

$$+ \text{ Nếu } m > 0 \text{ thì có 1 nghiệm } t = a > 2\sqrt{2} \Rightarrow f(x) = a > 2\sqrt{2}$$

Vậy khi $m > 0$ thì có 2 nghiệm.

Kết luận: phương trình có ít nhất 6 nghiệm khi $-6 \leq m < 0$

Vậy có 6 số nguyên cần tìm.

Câu 97: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 2m + 1$ và trục Ox có đúng hai điểm chung phân biệt. Tính tổng T của các phần tử thuộc tập S .

Lời giải

ĐS: $T = -12$

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^3 + 3x^2 - 9x + 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 9x + 1 = -2m$.

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			28		-4		$+\infty$

The diagram illustrates the function's behavior across its domain. It shows a table with three rows: x , $f'(x)$, and $f(x)$. The x row has values $-\infty$, -3 , 1 , and $+\infty$. The $f'(x)$ row has values $+$, 0 , $-$, 0 , and $+$. The $f(x)$ row has values $-\infty$, 28 , -4 , and $+\infty$. Arrows indicate the function's path: from $-\infty$ to 28 , from 28 to -4 , and from -4 to $+\infty$.

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra yêu cầu bài toán tương đương $\begin{cases} -2m = 28 \\ -2m = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -14 \\ m = 2 \end{cases}$.

Suy ra $S = \{-14; 2\}$.

Vậy $T = -14 + 2 = -12$.

Câu 98: Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-3; 3]$ để đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương là

Lời giải

ĐS: -6

Xét phương trình: $\frac{2x-3}{x-1} = x+m \Leftrightarrow 2x-3 = (x+m)(x-1)$

$$\Leftrightarrow x^2 + (m-3)x - m + 3 = 0 \quad (1)$$

Đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương

$$\Leftrightarrow (1) \text{ có hai nghiệm phân biệt dương khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)^2 - 4(-m+3) > 0 \\ 3-m > 0 \\ 3-m > 0 \\ 1+m-3-m+3 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \Leftrightarrow m < 1 \\ m < 3 \end{cases}$$

Vậy các giá trị nguyên của m trên đoạn $[-3; 3]$ thỏa mãn bài toán là: $-3; -2; -1; 0$

Cách 2

Xét phương trình: $\frac{2x-3}{x-1} = x + m \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-1} - x = m \quad (2)$

Xét hàm số $h(x) = \frac{2x-3}{x-1} - x$, $h'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - 1$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'		0	+	+	0	-
y						

Đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương

thì (2) có hai nghiệm phân biệt dương khác 1. Khi đó đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại hai điểm phân biệt trên khoảng $(0; +\infty)$. Dựa vào BBT của hàm số $h(x)$ ta có: $m < 1$.

Câu 99: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x)+m}\right) = x^3 - m$ có nghiệm $x \in [1; 2]$ biết $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$.

Lời giải

ĐS: 16

Đặt $t = \sqrt[3]{f(x)+m}$ ta có $\begin{cases} f(t) = x^3 - m \\ f(x) = t^3 - m \end{cases}$. Từ đó suy ra $f(t) + t^3 = f(x) + x^3, (1)$.

Đặt $g(x) = f(x) + x^3 = x^5 + 4x^3 - 4m$ thì $g'(x) = 5x^4 + 12x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Kết hợp với (1) ta suy ra $t = x$ hay $f(x) + m = x^3 \Leftrightarrow x^5 + 2x^3 = 3m$.

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Xét hàm $h(x) = x^5 + 2x^3$ trên $[1; 2]$ ta có $h'(x) = 5x^4 + 6x^2 \geq 0$. Nên GTNN và GTLN của $h(x)$ lần lượt là $h(1) = 3$ và $h(2) = 48$.

Phương trình có nghiệm trên $[1; 2]$ khi và chỉ khi $3 \leq 3m \leq 48 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 16$. Vậy có 16 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 100: Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d: y = m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 . Số giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 5$ là

Lời giải

ĐS: 12

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } x^3 - 3x^2 + 2 = m(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \underbrace{x^2 - 2x - 2 - m}_{g(x)} = 0 \end{cases} (a).$$

$$+ \text{ Hai đường cắt nhau tại ba điểm phân biệt } \Leftrightarrow pt(a) \text{ có 2 nghiệm pb khác 1 } \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_g > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3.$$

$$+ \text{ Giả sử } x_3 = 1, \text{ ta có: } x_1^2 + x_2^2 + 1^2 > 5 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 > 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 > 4 \\ \Rightarrow (2)^2 - 2 \cdot (-2 - m) > 4 \Leftrightarrow m > -2$$

.

Kết hợp với điều kiện $m \in [-10; 10]$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-1; 0; 1; \dots; 10\}$.

Câu 101: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, với $a \neq 0$ có đồ thị tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1 và cắt đường thẳng $y = 2m - 1$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là 0 và 4, với m là tham số. Số nghiệm của phương trình $f(x) = f(-3)$ là.

Lời giải

ĐS: 1

Do đồ thị $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1 nên đồ thị còn cắt trục hoành tại một điểm khác nữa, ta giả sử điểm đó có hoành độ $x_0 \neq 1$.

$$\text{Khi đó } f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-1)^2(x-x_0).$$

Do đồ thị $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cắt đường thẳng $y = 2m - 1$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là 0 và 4 nên ta có:

$$\begin{cases} f(0) = 2m - 1 \\ f(4) = 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a \cdot x_0 = 2m - 1 \\ 9a \cdot (4 - x_0) = 2m - 1 \end{cases} \Rightarrow -a \cdot x_0 = 9a \cdot (4 - x_0) \Leftrightarrow x_0 = \frac{9}{2}.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-1)^2 \left(x - \frac{9}{2} \right).$$

$$\text{Vậy } f(x) = f(-3) \Leftrightarrow a(x-1)^2 \left(x - \frac{9}{2} \right) = -120a \Leftrightarrow 2x^3 - 13x^2 + 20x + 231 = 0 \Leftrightarrow x = -3.$$

Câu 102: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 32x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3; 2)$ của phương trình $f(x^2 + 2x + 3) = m$ bằng -4 ?

Lời giải

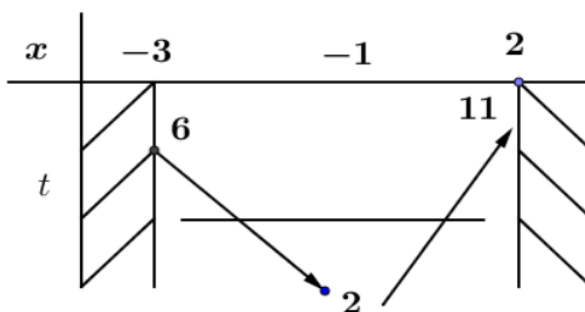
ĐS: 143

Phương trình $x^2 + 2x + 3 = a$ ($a \in \mathbb{R}$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì ta có: $x_1 + x_2 = -2$

Phương trình $f(x^2 + 2x + 3) = m$ (1) có tổng nghiệm bằng -4

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm xảy ra ở trường hợp: 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 (2)

Đặt $x^2 + 2x + 3 = t$



Điều kiện (2) $\Leftrightarrow$ Tìm m để phương trình $f(t) = m$ có 2 nghiệm $2 < t < 6$ (2)

Xét $f(t) = t^4 - 32t^2 + 4$

$$\Rightarrow f'(t) = 4t^3 - 64t \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \pm 4 \end{cases}$$

t	2	4	6
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	-108		148
		-252	

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -252 < m < -108 \Rightarrow 143$ số.

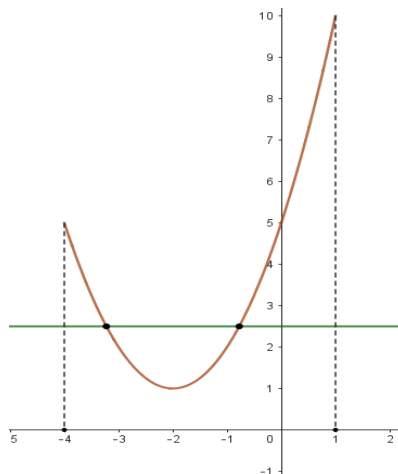
Câu 103: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 18x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-4; 1)$ của phương trình $f(x^2 + 4x + 5) = m$ bằng -8 ?

Lời giải

ĐS: 63

Đặt $t = x^2 + 4x + 5$, vì $x \in (-4; 1) \Rightarrow t \in (1; 10)$.

Nhận xét: với $1 < t < 5$ ta suy ra có 2 giá trị x có tổng bằng -4 .



Yêu cầu bài toán tương đương $f(t) = m$ có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(1; 10)$

x	1	3	10
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	–13	–77	8204

Nhận xét: $f(1) = f(\sqrt{17})$ và phương trình $f(t) = m$ có tối đa 2 nghiệm $t \in (1; 10)$.

TH1: Nếu $f(t) = m$ chỉ có 1 nghiệm $t \in (1; 10)$ thì tổng các nghiệm của phương trình $x^2 + 4x + 5 = t_0$ sẽ là -4 .

TH2: Nếu $f(t) = m$ có 2 nghiệm phân biệt $t_1; t_2 \in (1; 10) \Rightarrow t_1; t_2 \in (1; \sqrt{17})$

Khi đó mỗi phương trình $\begin{cases} x^2 + 4x + 5 = t_1 \\ x^2 + 4x + 5 = t_2 \end{cases}$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-4; 1)$. Từ đó

suy ra tổng các nghiệm là -8 .

Vậy $m \in (-77; -13)$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-76; \dots; -14\} \Rightarrow$ có 63 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 104: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 32x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-4; 1)$ của phương trình $f(x^2 + 4x + 5) = m$ bằng -8 ?

Lời giải

ĐS: 80

Đặt $t = x^2 + 4x + 5$, với $x \in (-4; 1) \Rightarrow x^2 + 4x + 5 - t = 0$ (*).

Ta có: $t' = 2x + 4$.

$t' = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Bảng biến thiên:

x	-4	-2	1
t'	-	0	+
t	5	1	10

Do đó, với $t < 1$, phương trình (*) vô nghiệm.

Với $t = 1$ hoặc $5 \leq t < 10$, phương trình (*) có nghiệm duy nhất.

Với $1 < t < 5$, phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 + x_2 = -4$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(t) = m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(1; 5)$.

Xét hàm số $f(t) = t^4 - 32t^2 + 4$ với $t \in (1; 5)$.

$$f'(t) = 4t^3 - 64t.$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4.$$

Bảng biến thiên:

x	1	4	5
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	-27	-252	-171

Dựa vào bảng biến thiên, ta có yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -252 < m < -171$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-251; -250; \dots; -172\}$.

Vậy có 80 giá trị cần tìm.

Câu 105: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 18x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3; 2)$ của phương trình $f(x^2 + 2x + 3) = m$ bằng -4

Lời giải

ĐS: 24

$$f(x) = x^4 - 18x^2 + 4, \text{ TXĐ } D = \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 4x^3 - 36x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 36x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 3 \end{cases}$$

Đặt $g(x) = f(x^2 + 2x + 3)$, TXĐ $D = \mathbb{R}$.

$$g'(x) = (2x + 2)f'(x^2 + 2x + 3)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2=0 \\ f'(x^2+2x+3)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x^2+2x+3=0 \\ x^2+2x+3=3 \\ x^2+2x+3=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	x_1	-2	x_2	-1	x_3	0	x_4	2	$+\infty$
$f'(x)$			-	0	+	0	-	0	+		
$f(x)$	$-\infty$	652		-77		-52		-77		12467	

$$g(-1) = f(2) = -52$$

$$g(-2) = f(3) = -77; \quad g(0) = f(3) = -77; \quad g(-3) = f(6) = 652; \quad g(2) = f(11) = 12467$$

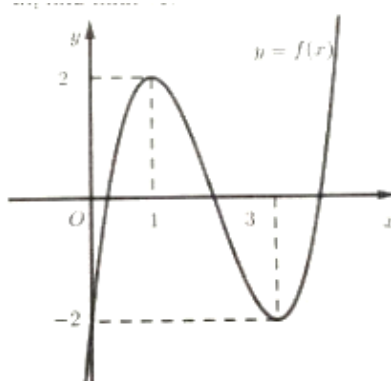
Ta thấy hàm số $g(x)$ nhận đường thẳng $x = -1$ làm trục đối xứng.

Do đó tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3; 2)$ của phương trình $f(x^2+2x+3) = m$ bằng -4 khi nó có bốn nghiệm phân biệt.

Yêu cầu bài toán tương đương với $-77 < m < -52$.

Kết luận: Vậy có 24 giá trị m nguyên thỏa mãn đề bài.

Câu 106: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^4(x) + 2 = 3f^2(x) + |f(x) + 2m|$ có đúng 4 nghiệm phân biệt?

Lời giải

ĐS: 2

Đặt $t = f(x)$, dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có:

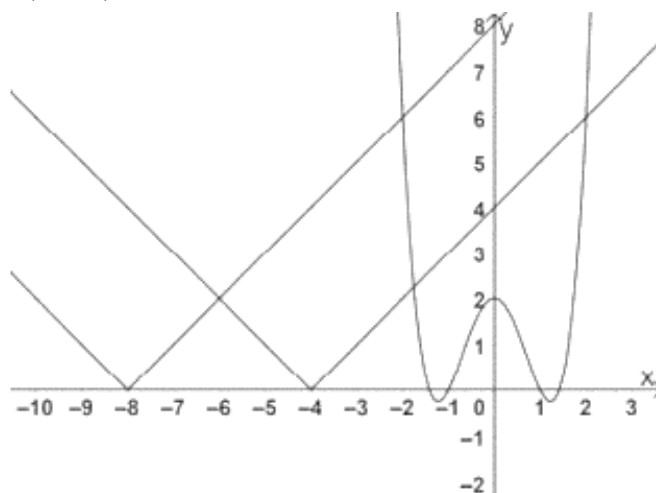
Với $t > 2$ hoặc $t < -2$ thì phương trình $f(x) = t$ có đúng 1 nghiệm.

Với $t = \pm 2$ thì phương trình $f(x) = t$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.

Với $-2 < t < 2$ thì phương trình $f(x) = t$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Từ $f^4(x) + 2 = 3f^2(x) + |f(x) + 2m|$ ta có phương trình: $t^4 - 3t^2 + 2 = |t + 2m| (*)$.

Phương trình đã cho có đúng 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $(*)$ có 1 nghiệm $t \in (-2; 2)$ và 1 nghiệm $t \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.



Vẽ đồ thị các hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$; $y = |x + 2m|$ trên cùng 1 hệ trục, ta thấy yêu cầu bài toán được thỏa mãn khi và chỉ khi: $2m \in (-8; -4) \cup (4; 8) \Leftrightarrow m \in (-4; -2) \cup (2; 4)$.

Kết hợp với m nguyên nên ta có 2 giá trị của m là ± 3 .

Câu 107: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị (C) và có đạo hàm cấp hai $f''(x) = 6x + 12$.

Biết đồ thị (C) đi qua điểm $M(-2; 2)$ và tiếp tuyến của (C) tại M là đường thẳng $d: y = 2x + 6$.

Khi đó giá trị của $f(3)$ bằng

Lời giải

ĐS: 137

Ta có: $f'(x) = \int (6x + 12)dx = 3x^2 + 12x + C$

$f'(-2) = 2 \Leftrightarrow 3 \cdot (-2)^2 + 12(-2) + C = 2 \Leftrightarrow C = 14$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 12x + 14$

$f(x) = \int (3x^2 + 12x + 14)dx = x^3 + 6x^2 + 14x + C$

Do đồ thị (C) đi qua điểm $M(-2; 2)$ nên ta có: $(-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 + 14 \cdot (-2) + C = 2 \Leftrightarrow C = 14$

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 14x + 14$

Vậy $f(3) = 137$