

CHỦ ĐỀ 15: MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỌN LỌC VỀ TÍCH PHÂN**Ví dụ 1:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1; 2]$ thỏa mãn

$$f(x) + x.f'(x) = [x.f(x) + 1]^2. \text{ Biết } f(1) = -2, \text{ tính } f(2)$$

A. $f(2) = \frac{-1}{2}.$

B. $f(2) = \frac{1}{2}.$

C. $f(2) = \frac{-3}{2}.$

D. $f(2) = \frac{-3}{4}.$

Lời giải:

$$\text{Ta có } f(x) + x.f'(x) = [x.f(x) + 1]^2 \Leftrightarrow \frac{f(x) + x.f'(x)}{[x.f(x) + 1]^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{[x.f(x)]'}{[x.f(x) + 1]^2} = 1$$

$$\text{Lấy nguyên hàm 2 vế ta được: } \frac{-1}{x.f(x) + 1} = x + C$$

$$\text{Thay } x = 1 \Rightarrow \frac{-1}{-2 + 1} = 1 + C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} \Rightarrow f(2) = -\frac{3}{4}. \text{ Chọn D.}$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[1; 3]$ và thỏa mãn

$$x^2.f(x) + x^3.f'(x) = [x.f(x) + 1]^2 \quad (\forall x \in [1; 3]) \text{ và } f(1) = \frac{-2}{3}. \text{ Khi đó:}$$

A. $0 < f(3) < 1.$

B. $1 < f(3) < 3.$

C. $f(3) > 3.$

D. $f(3) < 0.$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } x^2.f(x) + x^3.f'(x) = [x.f(x) + 1]^2 \Leftrightarrow x^2[f(x) + x.f'(x)] = [x.f(x) + 1]^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) + x.f'(x)}{[x.f(x) + 1]^2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{[x.f(x)]'}{[x.f(x) + 1]^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Lấy nguyên hàm 2 vế ta được: } \int \frac{d[x.f(x) + 1]}{[x.f(x) + 1]^2} = \int \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow \frac{-1}{x.f(x) + 1} = \frac{-1}{x} + C$$

$$\text{Lại có: } f(1) = \frac{-2}{3} \Rightarrow \frac{-1}{1.f(1) + 1} = -1 + C \Rightarrow C = \frac{-1}{\frac{-2}{3} + 1} + 1 = -2$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{x.f(x) + 1} = \frac{1}{x} + 2, \text{ thay } x = 3 \Rightarrow \frac{1}{3.f(3) + 1} = \frac{1}{3} + 2 \Rightarrow f(3) = \frac{-4}{21}. \text{ Chọn D.}$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và luôn dương trên đoạn $[1; 3]$ đồng thời thỏa mãn

$$[f'(x)]^2 = (x^4 + 3x^2)f(x), \text{ biết } f(1) = 4. \text{ Khi đó}$$

A. $0 < f(2) < 3$.

B. $3 < f(2) < 5$.

C. $5 < f(2) < 9$.

D. $f(2) > 9$.

Lời giải:

Ta có: $[f'(x)]^2 = (x^4 + 3x^2)f(x) \Rightarrow \frac{[f'(x)]^2}{f(x)} = x^2(x^2 + 3)$

$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = x\sqrt{x^2 + 3}$ (do $f(x) > 0 \forall x \in [1; 2]$)

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được: $\int \frac{d[f(x)]}{\sqrt{f(x)}} = \int x\sqrt{x^2 + 3}dx \Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)} = \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2 + 3}dx (x^2 + 3)$

$\Leftrightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(x^2 + 3)^3} + C = \frac{1}{6} \sqrt{(x^2 + 3)^3} + C$

Do $f(1) = 4 \Rightarrow 2 = \frac{8}{6} + C \Rightarrow C = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{\sqrt{(x^2 + 3)^3}}{6} + \frac{2}{3}$.

$\Rightarrow f(x) = \left[\frac{\sqrt{(x^2 + 3)^3}}{6} + \frac{2}{3} \right]^2 \Rightarrow f(2) \approx 14,1$. **Chọn D.**

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục $[0; 1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện

$f'(0) = -1$ và $[f'(x)]^2 = f''(x)$. Đặt $T = f(1) - f(0)$, hãy chọn khẳng định đúng?

A. $-2 \leq T < -1$.

B. $-1 \leq T < 0$.

C. $0 \leq T < 1$.

D. $1 \leq T < 2$.

Lời giải:

Ta có: $[f'(x)]^2 = f''(x) \Rightarrow \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta có: $\int \frac{d[f'(x)]}{[f'(x)]^2} = \int dx \Leftrightarrow \frac{-1}{f'(x)} = x + C \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x + C}$

Do $f'(0) = -1 \Rightarrow C = 1$

Suy ra $\int_0^1 f'(x)dx = \int_0^1 \frac{-1}{x+1}dx \Leftrightarrow f(1) - f(0) = -\ln 2$. **Chọn B.**

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến trên đoạn $[0; 1]$, biết $f(0) = 1$ và

$[f'(x) + 2x]^2 = 9x^3 + 9x.f(x) \forall x \in [0; 1]$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $f(1) = 3$.

B. $f(1) = 5$.

C. $f(1) = 6$.

D. $f(1) = 4$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } [f'(x) + 2x]^2 = 9x^3 + 9x \cdot f(x) \Leftrightarrow \frac{[f'(x) + 2x]^2}{f(x) + x^2} = 9x \Leftrightarrow \frac{f'(x) + 2x}{\sqrt{f(x) + x^2}} = 3\sqrt{x}$$

$$\text{Lấy nguyên hàm 2 vế ta được } \int \frac{d[f(x) + x^2]}{\sqrt{f(x) + x^2}} = \int 3\sqrt{x} dx$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{f(x) + x^2} = 2\sqrt{x^3} + 2C \Leftrightarrow \sqrt{f(x) + x^2} = \sqrt{x^3} + C$$

$$\text{Thay } x = 0 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow \sqrt{f(x) + x^2} = \sqrt{x^3} + 1.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = (\sqrt{x^3} + 1)^2 - x^2 \Rightarrow f(1) = 3. \text{ Chọn A.}$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)$ liên tục thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$. Giá trị của $f^2(1)$ bằng

A. 8.

B. $\frac{9}{2}$.

C. 10.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } [f(x) \cdot f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 15x^4 + 12x$$

$$\text{Nguyên hàm 2 vế ta được } f(x) \cdot f'(x) = \frac{15x^5}{5} + 6x^2 + C = 3x^5 + 6x^2 + C$$

$$\text{Do } f(0) = f'(0) = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$\text{Tiếp tục nguyên hàm 2 vế ta được: } \int f(x) df(x) = \int (3x^5 + 6x^2 + 1) dx$$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{3x^6}{6} + \frac{6x^3}{3} + x + D = \frac{1}{2}x^6 + 2x^3 + x + D. \text{ Do } f(0) = 1 \Rightarrow D = \frac{1}{2} \Rightarrow f^2(1) = 8. \text{ Chọn A.}$$

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục và luôn dương trên đoạn $[1; 3]$ thỏa mãn

$f(1) = f'(1) = 1$ và $f''(x) \cdot f(x) = f'^2(x) - x^2 \cdot f^2(x)$. Giá trị của $\ln[f(3)]$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau:

A. $(1; 6)$.

B. $(7; 12)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(12; 15)$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } f''(x) \cdot f(x) = f'^2(x) - x^2 \cdot f^2(x) \Leftrightarrow f''(x) \cdot f(x) - f'^2(x) = -x^2 f^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(x) \cdot f(x) - f'^2(x)}{f^2(x)} = x^2 \quad (*)$$

Mặt khác $\left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]' = \frac{f''(x) \cdot f(x) - f'^2(x)}{f^2(x)}$, lấy nguyên hàm 2 vế của (*) ta được:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^3}{3} + C$$

Do $f(1) = f'(1) = 1 \Rightarrow C = \frac{2}{3}$. Tiếp tục nguyên hàm 2 vế ta được: $\ln f(x) = \left(\frac{x^4}{12} + \frac{2x}{3} \right) + D$

Do $f(1) = 1 \Rightarrow D = -\frac{3}{4} \Rightarrow \ln f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{2x}{3} - \frac{3}{4} \Rightarrow \ln[f(3)] = 8$. **Chọn B.**

Ví dụ 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$f(1) = 1, \int_0^1 [f'(x)]^2 dx = \frac{9}{5} \text{ và } \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \frac{2}{5}. \text{ Tính tích phân } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

A. $I = \frac{3}{5}.$

B. $I = \frac{1}{4}.$

C. $I = \frac{3}{4}.$

D. $I = \frac{1}{5}.$

Lời giải:

Đặt $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow t^2 = x \Leftrightarrow dx = 2t dt$ và $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=1 \end{cases}$.

Khi đó: $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = \int_0^1 2t \cdot f(t) dt = 2 \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{1}{5}.$

Đặt $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = x dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 x \cdot f(x) dx = \frac{x^2 \cdot f(x)}{2} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx \Rightarrow \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx = \frac{3}{5}.$

Xét $\int_0^1 [f'(x) + kx^2]^2 dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 dx + 2k \int_0^1 x^2 \cdot f'(x) dx + k^2 \int_0^1 x^4 dx = \frac{9}{5} + \frac{6}{5}k + \frac{1}{5}k^2 = 0 \Leftrightarrow k = -3.$

Do đó $f'(x) - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = x^3 + C$ mà $f(1) = 1 \Rightarrow C = 0.$

Vậy $f(x) = x^3 \longrightarrow I = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$. **Chọn B.**

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0) + f(1) = 0$. Biết rằng tích

phân $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 f'(x) \cdot \cos \pi x dx = \frac{\pi}{2}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x) dx$?

A. $\frac{3\pi}{2}$.

B. $\frac{2}{\pi}$.

C. π .

D. $\frac{1}{\pi}$.

Lời giải:

Ta có $\int_0^1 f'(x) \cdot \cos \pi x dx = \int_0^1 \cos \pi x d(f(x)) = f(x) \cdot \cos \pi x \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) \cdot (\cos \pi x)' dx$

$= -[f(1) + f(0)] + \pi \int_0^1 f(x) \cdot \sin \pi x dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^1 f(x) \cdot \sin \pi x dx = \frac{1}{2}$.

Xét $\int_0^1 [f(x) + k \cdot \sin \pi x]^2 dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f^2(x) dx + 2k \cdot \int_0^1 f(x) \cdot \sin \pi x dx + k^2 \cdot \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}k^2 + 2k \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow (k+1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = -1$. Suy ra $\int_0^1 [f(x) - \sin \pi x]^2 dx = 0$.

Vậy $f(x) = \sin \pi x \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi}$. **Chọn B.**

Ví dụ 10: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, $f(x)$ và $f'(x)$ luôn nhận giá trị dương trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(0) = 1$; $\int_0^1 [f^{2'}(x)f(x) + x]^2 dx = 4 \int_0^1 x \cdot f^{2'}(x)f(x) dx$. Tính $f(1)$?

A. $f(1) = \sqrt[3]{4}$.

B. $f(1) = 2$.

C. $f(1) = 1$.

D. $f(1) = 4$.

Lời giải:

Giả thuyết tương đương với $\int_0^1 [f^{2'}(x)f(x) - x]^2 dx = 0$

$\Leftrightarrow f^{2'}(x)f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f^{2'}(x)f(x) = x \Leftrightarrow f'(x) \cdot \sqrt{f(x)} = \sqrt{x}$

Nguyên hàm 2 vế ta được: $\frac{2}{3} \sqrt{f^3(x)} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$

Mặt khác $f(0) = 1 \Rightarrow C = \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{f^3(x)} = \sqrt{x^3} + 1$

Vậy $f(1) = \sqrt[3]{4}$. **Chọn A.**

Ví dụ 11: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}$, $f(0) = 1$ và $f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $4 + \ln 5$.**B.** $2 + \ln 15$.**C.** $3 + \ln 15$.**D.** $\ln 15$.**Lời giải:**

$$\text{Ta có } \int f'(x)dx = \ln|2x-1| + C = \begin{cases} \ln(2x-1) + C_1 & \text{khi } x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + C_2 & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Do } f(0) = 1 \text{ và } f(1) = 2 \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow f(-1) + f(3) = \ln 3 + \ln 5 + C_1 + C_2 = 3 + \ln 15. \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 12: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ và thỏa mãn $f'(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$; $f(-3) = 0$; $f(0) = 1$ và $f(3) = 2$. Tính giá trị biểu thức $P = f(-4) + f(-1) + f(4)$.

A. $P = 3 + \ln \frac{3}{25}$ **B.** $P = 3 + \ln 3$ **C.** $P = 2 + \ln \frac{5}{3}$ **D.** $P = 2 - \ln \frac{5}{3}$ **Lời giải:**

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{4}{x^2 - 4} \Rightarrow \int f'(x)dx = \int \frac{4dx}{x^2 - 4} = \int \frac{4dx}{(x-2)(x+2)} = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C = \begin{cases} \ln \frac{x-2}{x+2} + C_1 & \text{khi } x > 2 \\ \ln \left(\frac{2-x}{x+2} \right) + C_2 & \text{khi } -2 < x < 2 \\ \ln \frac{x-2}{x+2} + C_3 & \text{khi } x < -2 \end{cases}$$

$$\text{Lại có: } f(-3) = 0 \Rightarrow C_3 = -\ln 5; f(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1; f(3) = 2 \Rightarrow C_1 = 2 - \ln \frac{1}{5}.$$

$$\text{Do đó } P = f(-4) + f(-1) + f(4) = \ln 3 + \ln 3 + \ln \frac{1}{3} + C_1 + C_2 + C_3 = 3 + \ln 3. \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 13: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$. Biết $f(-3) + f(3) = 0$ và

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2. \text{ Giá trị } T = f(-2) + f(0) + f(4) \text{ bằng}$$

A. $T = 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{9}$.**B.** $T = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}$.**C.** $T = 3 + \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}$.**D.** $T = \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}$.**Lời giải:**

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \Rightarrow \int f'(x)dx = \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{x+1} \right) + C_2 & \text{khi } -1 < x < 1. \\ \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} + C_3 & \text{khi } x < -1 \end{cases}$$

Theo bài ra ta có:
$$\begin{cases} f(-3) + f(3) = 0 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 0 \\ 2C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1 \end{cases}$$

Do đó $T = f(-2) + f(0) + f(4) = [f(-2) + f(4)] + f(0)$

$$= \frac{1}{2} \ln 3 + C_1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5} + C_3 + C_2 = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}. \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa $\int_0^{x^2} f(t) dt = x \cdot \cos \pi x$. Tính $f(4)$.

A. $f(4) = \frac{1}{2}$. B. $f(4) = \frac{1}{4}$. C. $f(4) = \frac{3}{4}$. D. $f(4) = \sqrt[3]{12}$.

Lời giải:

Ta có $\left(\int_0^{x^2} f(t) dt \right)' = (x \cdot \cos \pi x)' \Leftrightarrow (x^2)' \cdot f(x^2) = \cos \pi x - \pi x \cdot \sin \pi x$

$\Leftrightarrow 2x \cdot f(x^2) = \cos \pi x - \pi x \cdot \sin \pi x$. Thay $x = 2$ vào 2 vế, ta được $4f(4) = 1 \Leftrightarrow f(4) = \frac{1}{4}$. **Chọn B.**

Ví dụ 15: Cho hàm số $G(x) = \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} dt$ ($x > 0$). Tính $G'(x)$.

A. $G'(x) = x^2 \cdot \cos x$. B. $G'(x) = 2x \cdot \cos x$. C. $G'(x) = \cos x$. D. $G'(x) = \cos x - 1$.

Lời giải:

Gọi $F(t)$ là nguyên hàm của hàm số $f(t) = \cos \sqrt{t}$.

Ta có $G(x) = \int_0^{x^2} \cos \sqrt{t} dt = F(x^2) - F(0) \longrightarrow G'(x) = [F(x^2)]' = 2x \cdot F'(x^2) = 2x \cdot f(x^2)$.

Lại có $f(x^2) = \cos \sqrt{x^2} = \cos x$ nên suy ra $G'(x) = 2x \cdot \cos x$. **Chọn B.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$. Tính $S = f(3) - f(-1)$.

- A. $S = 1$. B. $S = \ln 2$. C. $S = \ln 4035$. D. $S = 4$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) = 2x + 1$ và $f(1) = 5$. Phương trình $f(x) = 5$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính tổng $S = \log_2 |x_1| + \log_2 |x_2|$.

- A. $S = 1$. B. $S = 2$. C. $S = 0$. D. $S = 4$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{3}{3x-1}$, $f(0) = 1$ và $f\left(\frac{2}{3}\right) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

- A. $3 + 5 \ln 2$. B. $-2 + 5 \ln 2$. C. $4 + 5 \ln 2$. D. $2 + 5 \ln 2$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$; $f(-3) - f(3) = 0$ và $f(0) = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4) + f(1) - f(4)$ bằng

- A. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2$. B. $1 + \ln 80$. C. $1 + \ln 2 + \frac{1}{3} \ln \frac{4}{5}$. D. $1 + \frac{1}{3} \ln \frac{8}{5}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f(2) = \frac{1}{15}$ và $f'(x) + (2x + 4)f^2(x) = 0$. Tính $f(1) + f(2) + f(3)$.

- A. $\frac{7}{15}$. B. $\frac{11}{15}$. C. $\frac{11}{30}$. D. $\frac{7}{30}$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f^6(x) \cdot f'(x) = 12x + 13$ và $f(0) = 2$. Khi đó phương trình $f(x) = 3$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 2. B. 3. C. 7. D. 1.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(0) = 1$ và $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$. Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt.

- A. $m > e$. B. $0 < m \leq 1$. C. $0 < m < e$. D. $1 < m < e$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x) \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = (2x+1)f^2(x)$ và $f(1) = -0,5$. Biết rằng tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2017) = \frac{a}{b}$; ($a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$) với $\frac{a}{b}$ tối giản. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a+b = -1$. B. $a \in (-2017; 2017)$. C. $\frac{a}{b} < -1$. D. $b-a = 4035$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa điều kiện $f'(x) = (2x+3).f^2(x)$ và $f(0) = \frac{-1}{2}$. Biết tổng $f(1) + f(2) + \dots + f(2017) + f(2018) = \frac{a}{b}$ với $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\frac{a}{b} < -1$. B. $\frac{a}{b} > 1$. C. $a+b = 1010$. D. $b-a = 3029$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x), \forall x \geq 0$, thỏa mãn $\begin{cases} f'''(x).f(x) - 2[f'(x)]^2 + xf^3(x) = 0 \\ f'(0) = 0; f(0) = 1 \end{cases}$. Tính $f(1)$.

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{6}{7}$. D. $\frac{7}{6}$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \frac{2}{3}$ và $[f'(x)]^2 = (x+1).f(x)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. $2613 < f^2(8) < 2614$. B. $2614 < f^2(8) < 2615$.
C. $2618 < f^2(8) < 2619$. D. $2616 < f^2(8) < 2617$.

Câu 12: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $4 < f(5) < 5$. B. $2 < f(5) < 3$. C. $3 < f(5) < 4$. D. $1 < f(5) < 2$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int \frac{f(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{2(\sqrt{x+1}+3)}{x+5} + C$. Nguyên hàm của hàm số $f(2x)$ trên tập $\mathbb{R}^+$ là:

- A. $\frac{x+3}{2(x^2+4)} + C$. B. $\frac{x+3}{x^2+4} + C$. C. $\frac{2x+3}{4(x^2+1)} + C$. D. $\frac{2x+3}{8(x^2+1)} + C$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^{f(x)} t^2 dt = x \cos \pi x$. Tính $f(4)$.

- A. $f(4) = 2\sqrt{3}$. B. $f(4) = -1$. C. $f(4) = \frac{1}{2}$. D. $f(4) = \sqrt[3]{12}$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0) = -1$ và $[f'(x)]^2 = f''(x)$. Đặt $T = f(1) - f(0)$. Hãy chọn khẳng định đúng?

- A. $-2 \leq T < -1$. B. $-1 \leq T < 0$. C. $0 \leq T < 1$. D. $1 \leq T < 2$.

Câu 16: Cho hàm số $G(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt$. Tính $G'(x)$.

- A. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. B. $\sqrt{1+x^2}$. C. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. D. $(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$.

Câu 17: Cho hàm số $G(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt$ ($x > 0$). Tính $G'(x)$.

- A. $\sin x$. B. $\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$. C. $\frac{2\sin x}{\sqrt{x}}$. D. $\sin \sqrt{x}$.

Câu 18: Tính đạo hàm của $f(x)$, biết $f(x)$ thỏa $\int_0^x t.e^{f(t)} = e^{f(x)}$.

- A. $f'(x) = x$. B. $f'(x) = x^2 + 1$. C. $f'(x) = \frac{1}{x}$. D. $f'(x) = \frac{1}{1-x}$.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$ và $\int_0^{x^2} f(t) dt = x \sin(\pi x)$. Tính $f(4)$.

- A. $f(\pi) = \frac{\pi-1}{4}$. B. $f(\pi) = \frac{\pi}{2}$. C. $f(\pi) = \frac{\pi}{4}$. D. $f(\pi) = \frac{1}{2}$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^3+x^5}$, $f(1) = a$ và $f(-2) = b$. Tính $f(-1) + f(2)$.

- A. $f(-1) + f(2) = -a - b$. B. $f(-1) + f(2) = a - b$.
C. $f(-1) + f(2) = a + b$. D. $f(-1) + f(2) = b - a$.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = -e^x f^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = \frac{1}{2}$. Tính giá trị của $f(\ln 2)$.

- A. 1. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C), xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (x.f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ

$x=1$ của đồ thị (C) là

- A. $y=6x+30$. B. $y=-6x+30$. C. $y=36x-30$. D. $y=-36x+42$.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)>0$ xác định, có đạo hàm trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn:

$$g(x)=1+2018\int_0^x f(t)dt, \quad g(x)=f^2(x). \text{ Tính } \int_0^1 \sqrt{g(x)}dx.$$

- A. $\frac{1011}{2}$. B. $\frac{1009}{2}$. C. $\frac{2019}{2}$. D. 505.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định, liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện

$$f'(0)=-1 \text{ và } \left[f'(x)\right]^2=f''(x). \text{ Đặt } T=f(1)-f(0). \text{ Hãy chọn khẳng định đúng?}$$

- A. $-2\leq T<-1$. B. $-1\leq T<0$. C. $0\leq T<1$. D. $1\leq T<2$.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: $f'(x) = \frac{1}{x-1} \Rightarrow f(x) = \int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C = \begin{cases} \ln(x-1) + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(1-x) + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$

Do $f(0) = 2017 \Rightarrow C_2 = 2017$; $f(2) = 2018 \Rightarrow C_1 = 2018$

Suy ra $S = \ln 2 + 2018 - (\ln + 2017) = 1$. **Chọn A.**

Câu 2: $f'(x) = 2x + 1 \Rightarrow f(x) = x^2 + x + C$

Do $f(1) = 5 \Rightarrow C = 3 \Rightarrow f(x) = x^2 + x + 3$

Khi đó $f(x) = 5 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow S = \log_2 |x_1| + \log_2 |x_2| = 1$. **Chọn A.**

Câu 3: $f'(x) = \frac{3}{3x-1} \Rightarrow f(x) = \int \frac{3dx}{3x-1} = \ln|3x-1| + C = \begin{cases} \ln(3x-1) + C_1 & \text{khi } x > \frac{1}{3} \\ \ln(1-3x) + C_2 & \text{khi } x < \frac{1}{3} \end{cases}.$

Do $f(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1$; $f\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \Rightarrow C_1 = 2$

Khi đó $f(-1) + f(3) = \ln 4 + 1 + \ln 8 + 2 = 3 + 5 \ln 2$. **Chọn A.**

Câu 4: $f(x) = \int \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C.$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C = \begin{cases} \frac{1}{3} \ln \frac{x-2}{x+1} + C_1 & \text{khi } x > 2 \\ \frac{1}{3} \ln \left(\frac{2-x}{x+1} \right) + C_2 & \text{khi } -1 < x < 2. \\ \frac{1}{3} \ln \frac{x-2}{x+1} + C_3 & \text{khi } x < -1 \end{cases}$$

Khi đó: $f(-3) - f(-4) = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{4}$; $f(4) - f(3) = \frac{1}{3} \ln \frac{8}{5}$

$$f(-3) - f(-4) + f(4) - f(3) = \ln 2 \Rightarrow f(-4) - f(4) = -\frac{1}{3} \ln 2$$

Mặt khác $f(1) - f(0) = \frac{1}{3} \ln \frac{1}{4} \Rightarrow f(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln \frac{1}{4}$

Do đó $f(-4) + f(1) - f(4) = 1 + \frac{1}{3} \ln \frac{8}{5}$. **Chọn D.**

Câu 5: $f'(x) + (2x+4)f^2(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-f'(x)}{f^2(x)} = 2x+4 \Leftrightarrow \int \frac{-f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+4) dx.$

$$\Leftrightarrow \int -\frac{d(f(x))}{f^2(x)} = x^2 + 4x + C \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = x^2 + 4x + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + C}$$

Mặt khác $f(2) = \frac{1}{12+C} = \frac{1}{15} \Rightarrow C = 3 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$

Suy ra $f(1) + f(2) + f(3) = \frac{7}{30}$. **Chọn D.**

Câu 6: Ta có $\int f^6(x) f'(x) dx = \int (12x+13) dx \Leftrightarrow \int f^6(x) df(x) = 6x^2 + 13x + C$

$$\Rightarrow \frac{f^7(x)}{7} = 6x^2 + 13x + C$$

Lại có $f(0) = 2$ nên $\frac{2^7}{7} = 24 + 26 + C \Rightarrow C = -\frac{222}{7}$

Suy ra $f(x) = \sqrt[7]{7\left(6x^2 + 13x - \frac{222}{7}\right)}$ do đó $f(x) = 3$ có 2 nghiệm phân biệt. **Chọn A.**

Câu 7: Lấy nguyên hàm 2 vế của biểu thức $\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 - 2x$ ta được:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int (2 - 2x) dx \Leftrightarrow \int \frac{d[f(x)]}{f(x)} = 2x - x^2 + C \Leftrightarrow \ln[f(x)] = 2x - x^2 + C \quad (Do f(x) > 0)$$

Do $f(0) = 1 \Rightarrow \ln[f(0)] = C \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = e^{2x-x^2}$.

Lại có: $f'(x) = (2 - 2x) \cdot e^{2x-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ và } f(1) = e$$

Suy ra phương trình $f(x) = m$ có 2 nghiệm thực phân biệt khi $0 < m < e$. **Chọn C.**

Câu 8: $f'(x) = (2x+1)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+1 \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+1) dx$.

$$\Leftrightarrow \int \frac{d(f(x))}{f^2(x)} = x^2 + x + C \Leftrightarrow \frac{-1}{f(x)} = x^2 + x + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{-1}{x^2 + x + C} \text{ mà } f(1) = \frac{-1}{2} \Rightarrow C = 0$$

Khi đó $-f(x) = \frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \Rightarrow f(1) = 1 - \frac{1}{2}; \dots; f(2017) = \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018}$.

Vậy $P = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018}\right) = \frac{-504}{1009} \Rightarrow \begin{cases} a = -504 \\ b = 1009 \end{cases}$. **Chọn B.**

Câu 9: $f'(x) = (2x+3)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+3 \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+3) dx$.

$$\Leftrightarrow \int \frac{d(f(x))}{f^2(x)} = x^2 + 3x + C \Leftrightarrow \frac{-1}{f(x)} = x^2 + 3x + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{-1}{x^2 + 3x + C} \text{ mà } f(0) = \frac{-1}{2} \Rightarrow C = 2.$$

Khi đó $-f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \Rightarrow -f(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \dots; -f(2018) = \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}.$

Vậy $P = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}\right) = \frac{-1009}{2020}$. **Chọn D.**

Câu 10: $f''(x) \cdot f(x) - 2[f'(x)]^2 + xf^3(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f''(x) \cdot f(x) - 2[f'(x)]^2}{f^3(x)} = -x \quad (*)$

Lại có: $\left[\frac{f'(x)}{f^2(x)}\right]' = \frac{f''(x) \cdot f^2(x) - 2f(x) \cdot [f'(x)]^2}{f^4(x)} = \frac{f''(x) \cdot f(x) - 2[f'(x)]^2}{f^3(x)}$

Do đó lấy nguyên hàm 2 vế của (*) ta được: $\int \frac{f'(x) dx}{f^2(x)} = \frac{-x^2}{2} + C \Leftrightarrow \int \frac{d(f(x))}{f^2(x)} = \frac{-x^2}{2} + C$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{f(x)} = \frac{-x^2}{2} + C. \text{ Do } f(0) = 1 \Rightarrow -1 = C \Rightarrow \frac{-1}{f(x)} = \frac{-x^2}{2} - 1 = \frac{-x^2 - 2}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{2}{x^2 + 2}.$$

Do đó $f(1) = \frac{2}{3}$. **Chọn A.**

Câu 11: $[f'(x)]^2 = (x+1)f(x) \Leftrightarrow f'(x) = \sqrt{(x+1)f(x)} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{x+1} \quad (*).$

Lấy nguyên hàm hai vế của (*), ta được:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = \int \sqrt{x+1} dx \Leftrightarrow 2 \int \frac{d(f(x))}{2\sqrt{f(x)}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} + C$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)} = \frac{2}{3} \sqrt{(x+1)^3} + C \text{ mà } f(3) = \frac{2}{3} \Rightarrow 2\sqrt{f(3)} = \frac{2}{3} \sqrt{4^3} + C \Rightarrow C = \frac{2\sqrt{6} - 16}{3}.$$

Do đó $\sqrt{f(x)} = \frac{1}{3} \sqrt{(x+1)^3} + \frac{\sqrt{6} - 8}{3} \Rightarrow f(x) = \left[\frac{1}{3} \sqrt{(x+1)^3} + \frac{\sqrt{6} - 8}{3} \right]^2.$

Vậy $2613 < f^2(8) < 2614$. **Chọn A.**

Câu 12: $f(x) = f'(x)\sqrt{3x+1} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$

Lấy nguyên hàm 2 vế ta được $\int \frac{d[f(x)]}{f(x)} = \int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} = \frac{2}{3} \int \frac{d(3x+1)}{2\sqrt{3x+1}} \Leftrightarrow \ln f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{3x+1} + C$

Thay $x=1 \Rightarrow \ln 1 = \frac{4}{3} + C \Rightarrow C = -\frac{4}{3}$

Thay $x = 5 \Rightarrow \ln f(5) = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow f(5) = e^{\frac{4}{3}} \approx 3,8$. **Chọn C.**

Câu 13: Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1$. Khi đó $\int \frac{f(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{2(\sqrt{x+1}+3)}{x+5} + C$

$$\Rightarrow \int \frac{f(t)}{t} d(t^2 - 1) = \frac{2(t+3)}{t^2+4} + C \Leftrightarrow \int 2f(t) dt = \frac{2(t+3)}{t^2+4} + C \Leftrightarrow \int f(t) dt = \frac{t+3}{t^2+4} + C$$

Do đó $\int f(2x) d(2x) = \frac{2x+3}{4x^2+4} + C \Rightarrow \int f(2x) dx = \frac{2x+3}{8(x^2+1)} + C$. **Chọn D.**

Câu 14: Ta có $\int_0^{f(x)} t^2 dt = x \cos \pi x \Leftrightarrow \frac{t^3}{3} \Big|_0^{f(x)} = x \cdot \cos \pi x \Leftrightarrow \frac{f^3(x)}{3} = x \cdot \cos \pi x \quad (*)$.

Thay $x = 4$ vào biểu thức $(*)$, ta được $\frac{f^3(4)}{3} = 4 \Leftrightarrow f^3(4) = 12 \Leftrightarrow f(4) = \sqrt[3]{12}$. **Chọn D.**

Câu 15: Ta có $[f'(x)]^2 = f''(x) \Leftrightarrow \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1 \Leftrightarrow \int \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} dx = \int dx = x + C$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{f'(x)} = x + C \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x+C} \text{ mà } f'(0) = -1 \longrightarrow C = 1$$

Do đó $f'(x) = -\frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0) = \int_0^1 -\frac{1}{x+1} dx \approx -0,693$. **Chọn B.**

Câu 16: Gọi $F(t)$ là nguyên hàm của hàm số $f(t) = \sqrt{1+t^2}$.

Ta có $G(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt = F(x) - F(0) \longrightarrow G'(x) = [F(x)]' = F'(x) = f(x)$.

Lại có $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ nên suy ra $G'(x) = \sqrt{1+x^2}$. **Chọn B.**

Câu 17: Gọi $F(t)$ là nguyên hàm của hàm số $f(t) = \sin t^2$.

Ta có $G(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt = F(\sqrt{x}) - F(0) \longrightarrow G'(x) = [F(\sqrt{x})]' = \frac{F'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \frac{f(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

Lại có $f(\sqrt{x}) = \sin(\sqrt{x})^2 = \sin x$ nên suy ra $G'(x) = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$. **Chọn B.**

Câu 18: Ta có $\int_0^x t \cdot e^{f(t)} dt = e^{f(x)} \Leftrightarrow x \cdot e^{f(x)} = f'(x) \cdot e^{f(x)} \Leftrightarrow f'(x) = x$. **Chọn A.**

Câu 19: Ta có $\left(\int_0^{x^2} f(t) dt \right)' = (x \cdot \sin \pi x)' \Leftrightarrow (x^2)' \cdot f(x^2) = \sin \pi x + \pi x \cdot \cos \pi x$

$$\Leftrightarrow 2x.f(x^2) = \sin \pi x + \pi x.\cos \pi x.$$

Thay $x = 4$ vào hai vế, ta được $4f(4) = \pi \Leftrightarrow f(4) = \frac{\pi}{4}$. **Chọn C.**

Câu 20: Ta có $f(-1) - f(-2) = \int_{-2}^{-1} f'(x) dx$ và $f(2) - f(1) = \int_1^2 f'(x) dx$.

$$\Rightarrow f(-1) + f(2) = \int_{-2}^{-1} f'(x) dx + \int_1^2 f'(x) dx + f(-2) + f(1) = a + b. \text{ **Chọn C.**}$$

Câu 21: $f'(x) = -e^x.f^2(x) \Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = e^x \Leftrightarrow \int -\frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int e^x .dx$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = e^x + C \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{e^x + C} \text{ mà } f(0) = \frac{1}{2} \longrightarrow C = 1.$$

Do đó $f(x) = \frac{1}{e^x + 1} \longrightarrow f(\ln 2) = \frac{1}{e^{\ln 2} + 1} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$. **Chọn C.**

Câu 22: $f'(x) = x^2.f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^2 \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int x^2 dx$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = \frac{x^3}{3} + C \Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{\frac{x^3}{3} + C} \text{ mà } f(0) = 2 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}.$$

Do đó $f(x) = -\frac{1}{\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}} \rightarrow \begin{cases} f'(1) = 36 \\ f(1) = 6 \end{cases}$ nên phương trình tiếp tuyến là $y = 36x - 30$. **Chọn C.**

Câu 23: Ta có $g(0) = 1$ và $g(x) = 1 + 2018 \int_1^x f(t) dt \Rightarrow g'(x) = 2018f(x) = 2018\sqrt{g(x)}$

$$\Rightarrow \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} = 2018 \Leftrightarrow \int_0^t \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} dx = 2018 \int_0^t dx \Rightarrow 2[\sqrt{g(t)} - 1] = 2018t$$

$$\Rightarrow \sqrt{g(t)} = 1009t + 1. \text{ Vậy } \int_0^1 \sqrt{g(t)} dt = \frac{1011}{2}. \text{ **Chọn A.**}$$