

TOÁN 11	HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC
1H3-2	

Contents

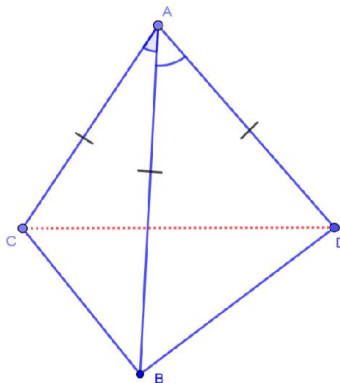
A. CÂU HỎI	1
DẠNG 1. GÓC CỦA HAI VÉCTƠ	1
DẠNG 2. GÓC CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG	3
DẠNG 3. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC	11
B. LỜI GIẢI	13
DẠNG 1. GÓC CỦA HAI VÉCTƠ	13
DẠNG 2. GÓC CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG	18
DẠNG 3. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC	49

A. CÂU HỎI

DẠNG 1. GÓC CỦA HAI VÉCTƠ

Câu 1. (SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ - 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có $BC = a\sqrt{2}$, các cạnh còn lại đều bằng a . Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng
A. 60° . **B.** 120° . **C.** 30° . **D.** 90° .

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $AB = AD = AC$ (tham khảo như hình vẽ bên).



Gọi φ là góc giữa AB và CD . Chọn mệnh đề **đúng**?

A. $\varphi = 60^\circ$. **B.** $\cos \varphi = \frac{1}{4}$. **C.** $\varphi = 90^\circ$. **D.** $\cos \varphi = \frac{3}{4}$.

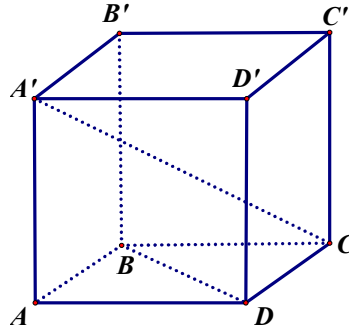
Câu 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'})$

A. $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = 0$. **B.** $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = 1$.
C. $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = \frac{1}{2}$. **D.** $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 4. Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB . Góc tạo bởi hai vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$ bằng

A. 135° . B. 150° . C. 120° . D. 60° .

Câu 5. (Trường THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên, năm 2019) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, biết đáy $ABCD$ là hình vuông. Tính góc giữa $A'C$ và BD .



A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

Câu 6. (Chuyên - Vĩnh Phúc - lần 3 - 2019) Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD .

A. 90° . B. 30° . C. 120° . D. 60° .

Câu 7. (THPT Trần Phú - Lần 1 - 2018-2019) Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Giá trị tích vô hướng $\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA})$ bằng

A. $\frac{a^2}{2}$. B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{3a^2}{2}$.

Câu 8. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a , cosin góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 9. Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB . Góc hợp bởi hai véc tơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$ bằng

A. 120° . B. 150° . C. 135° . D. 60° .

Câu 10. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . M là trung điểm cạnh CC' . Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM .

A. $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{22}}{11}$. B. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$.

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD . Biết $AB = 2a, CD = 2a\sqrt{2}$ và $MN = a\sqrt{5}$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là

A. 60° . B. 30° . C. 90° . D. 45° .

Câu 12. (THPT THUẬN THÀNH 1) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và góc $\widehat{CAB} = 30^\circ$. Cosin góc tạo bởi hai đường thẳng AB và SC gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 0,83. B. 0,37. C. 0,45. D. 0,71.

Câu 13. (THPT Xuân Hòa-Vĩnh Phúc-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a và $ABCD$ là hình vuông. Gọi M là trung điểm của CD . Giá trị $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{CB}$ bằng

- A. $\frac{a^2}{2}$. B. $-\frac{a^2}{2}$. C. $\frac{a^2}{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}a^2}{2}$.

Câu 14. (THPT Sơn Tây-Hà Nội-lần 1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$, $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và BC .

A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

DẠNG 2. GÓC CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Câu 15. (Chuyên Thái Bình lần 2 - 2018-2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B$.

A. 60° B. 45° C. 75° D. 90°

Câu 16. (THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG - PHÚ THỌ - LẦN 1 - 2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng:

A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

Câu 17. (THPT Chuyên ĐH Vinh-GK1-năm 2017-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp cùng bằng $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC .

A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. $\arctan 2$.

Câu 18. (THPT CHUYÊN NGŨ - HÀ NỘI - 2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BD bằng.

A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 90° .

Câu 19. (THPT THANH MIỆN I - HẢI DƯƠNG - LẦN 1 - 2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ là

A. 90° . B. 60° . C. 30° . D. 45° .

Câu 20. (THPT LÊ QUÝ ĐÔN - HÀ NỘI - LẦN 1 - 2018) Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên bằng 2. Gọi C_1 là trung điểm của CC' . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng BC_1 và $A'B'$.

- A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

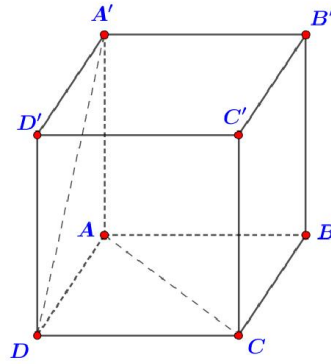
Câu 21. (THPT HÀ HUY TẬP - LẦN 2 - 2018) Cho tứ diện đều $ABCD$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là

A. 45° . B. 90° . C. 60° . D. 30° .

Câu 22. (THPT QUỲNH LƯU - NGHỆ AN - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Số đo của góc (IJ, CD) bằng:

A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

Câu 23. (CHUYÊN VINH - LẦN 2 - 2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng



- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Câu 24. (SGD Nam Định) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của CD và N là trung điểm của $A'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $B'M$ và $C'N$ bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 25. Cho tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC = a$; OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi I là trung điểm BC . Tính góc giữa hai đường thẳng AB và OI .

- A. 45° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .

Câu 26. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật và $\widehat{CAD} = 40^\circ$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$ là

- A. 40° . B. 20° . C. 50° . D. 80° .

Câu 27. (Chuyên Đại học Vinh - Lần 1 - Năm học 2018 - 2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có I, J lần lượt là trung điểm của BC và BB' . Góc giữa hai đường thẳng AC và IJ bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 120° .

Câu 28. (Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AC và DA' bằng

- A. 60° . B. 45° . C. 90° . D. 120° .

Câu 29. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và $A'C'$.

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

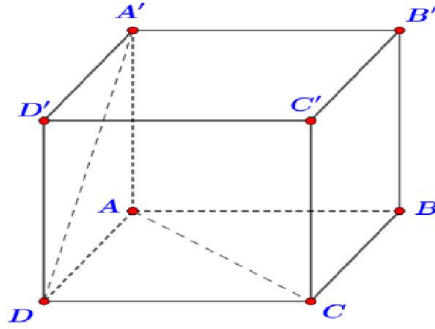
Câu 30. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và CD' bằng

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp BC$. Góc giữa hai đường thẳng SD và BC bằng

- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .

Câu 32. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng



- A. 30° . B. 60° . C. 90° . D. 45° .

Câu 33. Cho hình lăng trụ đều $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a . Góc giữa hai đường thẳng BC' và $B'D'$ bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Biết $MN = \sqrt{3}a$, góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

- A. 45° . B. 90° . C. 60° . D. 30° .

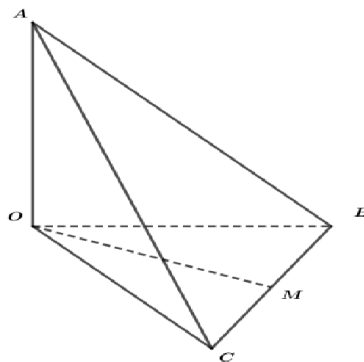
Câu 35. (Thi giữa kì II - 1819 Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định) Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$; cạnh $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm CD . Tính $\cos \alpha$ với α là góc tạo bởi SB và AM .

- A. $-\frac{2}{5}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{4}{5}$.

Câu 36. (THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng, lần 1) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

Câu 37. (Tham khảo 2018) Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

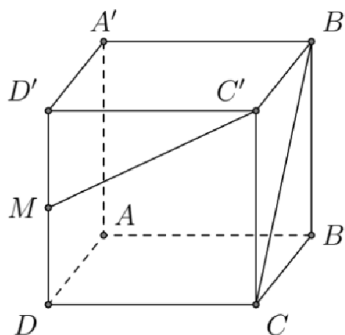


- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

Câu 38. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$; gọi M là trung điểm của $B'C'$. Góc giữa hai đường thẳng AM và BC' bằng

- A. 45° . B. 90° . C. 30° . D. 60° .

Câu 39. [THPT NINH BÌNH-BẠC LIÊU-2019] Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của DD' (Tham khảo hình vẽ). Tính cô-sin của góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và $C'M$



- A. $\frac{1}{\sqrt{10}}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{2\sqrt{2}}{9}$.

Câu 40. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD . Giả sử

$AB = CD = a$ và $PQ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là

- A. 90° . B. 45° . C. 30° . D. 60° .

Câu 41. (THPT CHUYÊN QUANG TRUNG - BP - LẦN 1 - 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có

$SA = SB = SC = AB = AC = a, BC = a\sqrt{2}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng AB và SC ta được kết quả:

- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

Câu 42. (THPT HOÀNG HOA THÁM - HƯNG YÊN - 2018) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Biết $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa AB và CD .

- A. 45° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .

Câu 43. (THPT NGUYỄN HUỆ - NINH BÌNH - 2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M trung điểm các cạnh CD . cosin của góc giữa AC và $C'M$ là

- A. 0. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

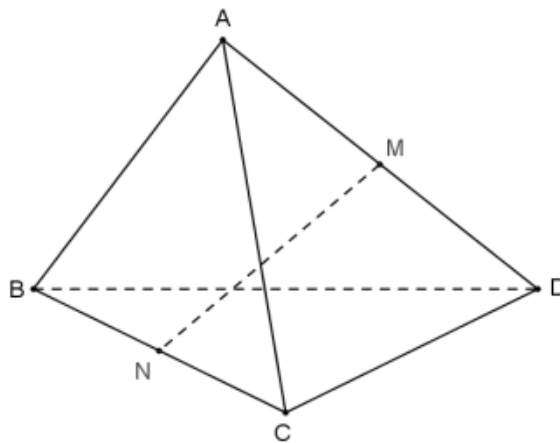
Câu 44. (CHUYÊN ĐHS PHN - 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a = 4\sqrt{2}\text{cm}$, cạnh bên SC vuông góc với đáy và $SC = 2\text{cm}$. Gọi M, N là trung điểm của AB và BC . Góc giữa hai đường thẳng SN và CM là

- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

Câu 45. (SGD - HÀ TĨNH - HK 2 - 2018) Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.MNP$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi I là trung điểm cạnh AC . Cosin của góc giữa hai đường thẳng NC và IB bằng

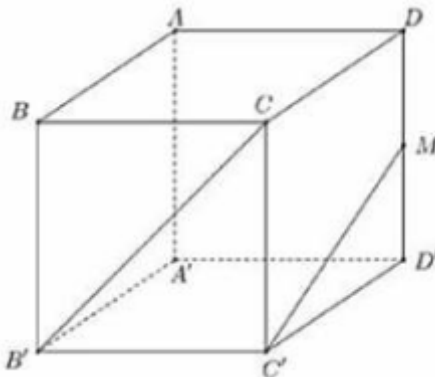
- A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{4}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Câu 46. (ĐẠNG THỨC HỨA - NGHỆ AN - LẦN 1 - 2018) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Xác định độ dài đoạn thẳng MN để góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng 30° .



- A. $MN = \frac{a}{2}$. B. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $MN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $MN = \frac{a}{4}$.

Câu 47. (THPT CHUYÊN NGUYỄN THỊ MINH KHAI - SÓC TRĂNG - 2018) Cho hình lập phương trình $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của DD' (tham khảo hình vẽ dưới đây). Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và $C'M$.



- A. $\frac{2\sqrt{2}}{9}$. B. $\frac{1}{\sqrt{10}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 48. (THPT NGUYỄN HUỆ - TT HUẾ - 2018) Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=1$, $AA'=\sqrt{2}$. Tính góc giữa AB' và BC'

- A. 30° . B. 45° . C. 120° . D. 60° .

Câu 49. (SỞ GD&ĐT BẠC LIÊU - 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC vuông góc với nhau đôi một và $SA=SB=SC$. Gọi M là trung điểm của AC . Góc giữa SM và AB bằng:

- A. 60° . B. 30° . C. 90° . D. 45° .

Câu 50. (THPT CHUYÊN HẠ LONG - LẦN 2 - 2018) Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA=SB=SC=AB=AC=a$ và $BC=a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC là?

- A. 45° . B. 90° . C. 60° . D. 30° .

Câu 51. (TOÁN HỌC TUỔI TRẺ SỐ 5) Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=AB=AC=1$, $BC=\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB, SC .

- A. 45° . B. 120° . C. 30° . D. 60° .

Câu 52. (XUÂN TRƯỜNG - NAM ĐỊNH - LẦN 1 - 2018) Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AB và CI , với I là trung điểm của AD .

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 53. (HỒNG QUANG - HẢI DƯƠNG - LẦN 1 - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a$, $SB = 2a$, $SC = 3a$, $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 90^\circ$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng SA và BC . Tính $\cos \alpha$.

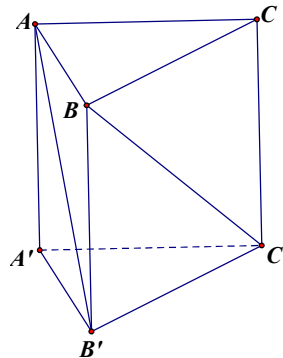
A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$.

B. $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{7}$.

C. $\cos \alpha = 0$.

D. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

Câu 54. (THPT CHUYÊN ĐH VINH - LẦN 3 - 2018) Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



A. 60° .

B. 45° .

C. 90° .

D. 30° .

Câu 55. (KIM LIÊN - HÀ NỘI - LẦN 1 - 2018) Cho tứ diện $ABCD$ có $DA = DB = DC = AC = AB = a$, $\widehat{ABC} = 45^\circ$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và DC .

A. 60° .

B. 120° .

C. 90° .

D. 30° .

Câu 56. (CHUYÊN TRẦN PHÚ - HẢI PHÒNG - LẦN 1 - 2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AD , BB' . Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 57. (CỤM 5 TRƯỜNG CHUYÊN - ĐBSH - LẦN 1 - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$. Hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng đáy là trung điểm của cạnh AB , góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AC .

A. $\frac{2}{\sqrt{7}}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{35}}$.

C. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$.

Câu 58. (THPT LÊ QUÝ ĐÔN - HÀ NỘI - LẦN 1 - 2018) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = 1$; $\widehat{BAC} = 60^\circ$; $\widehat{BAD} = 90^\circ$; $\widehat{DAC} = 120^\circ$. Tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng AG và CD , trong đó G là trọng tâm tam giác BCD .

A. $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{6}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 59. (THPT NGUYỄN TRÃI - ĐÀ NẴNG - 2018) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $4a$, lấy H , K lần lượt trên các cạnh AB , AD sao cho $BH = 3HA$, $AK = 3KD$. Trên đường thẳng vuông góc với

mặt phẳng $(ABCD)$ tại H lấy điểm S sao cho $\widehat{SBH} = 30^\circ$. Gọi E là giao điểm của CH và BK . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SE và BC .

- A. $\frac{28}{5\sqrt{39}}$. B. $\frac{18}{5\sqrt{39}}$. C. $\frac{36}{5\sqrt{39}}$. D. $\frac{9}{5\sqrt{39}}$.

Câu 60. (THPT CHUYÊN THÁI BÌNH - LẦN 3 - 2018) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo của góc giữa hai đường thẳng MN và SC là

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

Câu 61. (THPT PHAN CHU TRINH - ĐẮC LẮC - 2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, BC, C'D'$. Xác định góc giữa hai đường thẳng MN và AP .

- A. 60° . B. 90° . C. 30° . D. 45° .

Câu 62. (THPT CHU VĂN AN - HÀ NỘI - 2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm SB . Góc giữa AM và BD là

- A. 60° . B. 30° . C. 90° . D. 45° .

Câu 63. (SỞ GD&ĐT YÊN BÁI - 2018) Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Tính giá trị của $\cos(\widehat{AB, DM})$.

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 64. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $AB, BC, C'D'$. Xác định góc giữa MN và AP .

- A. 60° . B. 30° . C. 90° . D. 45° .

Câu 65. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Cosin của góc giữa hai đường thẳng SB và AC là

- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 66. (Chuyên ĐBSH lần 1-2018-2019) Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = 3a, BD = 4a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Biết AC vuông góc BD . Tính MN .

- A. $MN = \frac{5a}{2}$. B. $MN = \frac{7a}{2}$. C. $MN = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. D. $MN = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 67. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật và $\widehat{CAD} = 40^\circ$. Số đo góc giữa hai đường thẳng $AC, B'D'$ là

- A. 40° . B. 20° . C. 50° . D. 80° .

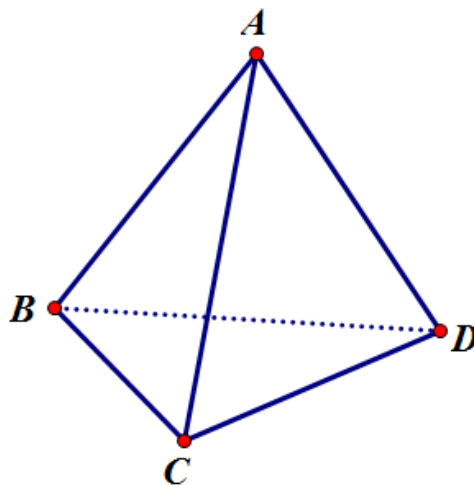
Câu 68. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Góc giữa hai đường thẳng CD' và $A'C'$ bằng.

- A. 30° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .

Câu 69. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a; AD = a\sqrt{2}; SA = 2a; SA \perp (ABCD)$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AC .

- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{15}}$. D. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

- Câu 70.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AD' .
A. 90° . **B.** 60° . **C.** 45° . **D.** 30° .
- Câu 71.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA=9a$, $AB=6a$. Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SM = \frac{1}{2}MC$. Côsin của góc giữa hai đường thẳng SB và AM bằng
A. $\frac{7}{2\sqrt{48}}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{19}}{7}$. **D.** $\frac{14}{3\sqrt{48}}$.
- Câu 72.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, $SA=a$, $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Tính $\cos$ của góc tạo bởi hai đường thẳng SC và BD .
A. $\sqrt{\frac{3}{10}}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{10}$.
- Câu 73.** (**Chuyên Tự Nhiên Lần 1 - 2018-2019**) Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Biết $MN=a\sqrt{3}$, góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng.
A. 45° . **B.** 90° . **C.** 60° . **D.** 30° .
- Câu 74.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B , $SA=a$, $AB=a$, $BC=a\sqrt{2}$. Gọi I là trung điểm BC . Côsin của góc giữa đường thẳng AI và SC là?
A. $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$
- Câu 75.** (**Bình Minh - Ninh Bình - Lần 4 - 2018**) Cho tứ diện $ABCD$ gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Biết $AB=CD=a$, $MN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD .
A. 30° . **B.** 90° . **C.** 60° . **D.** 120° .
- Câu 76.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD . Biết $AB=CD=a$ và $MN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng
A. 30° . **B.** 90° . **C.** 120° . **D.** 60° .
- Câu 77.** Cho tứ diện $ABCD$ với $AC=\frac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB}=\widehat{DAB}=60^\circ$; $CD=AD$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và CD . Chọn khẳng định đúng về góc φ .



- A. $\cos \varphi = \frac{3}{4}$. B. $\varphi = 30^\circ$. C. $\varphi = 60^\circ$. D. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

Câu 78. Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$; $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

- A. 0° . B. 120° . C. 60° . D. 90° .

Câu 79. Cho lăng trụ đều $ABC.DEF$ có cạnh đáy bằng a , chiều cao bằng $2a$. Tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng AC và BF .

- A. $\frac{\sqrt{5}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{10}$

Câu 80. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi M là trung điểm của BC . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và DM ?

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 81. (THPT Xuân Hòa-Vĩnh Phúc-năm 2017-2018) Cho tứ diện $ABCD$ có AB , AC , AD đôi một vuông góc với nhau, biết $AB = AC = AD = 1$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

Câu 82. (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

DẠNG 3. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Câu 83. (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-HKI 18-19) Trong không gian, cho đường thẳng d và điểm O . Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với đường thẳng d ?

- A. 3. B. vô số. C. 1. D. 2.

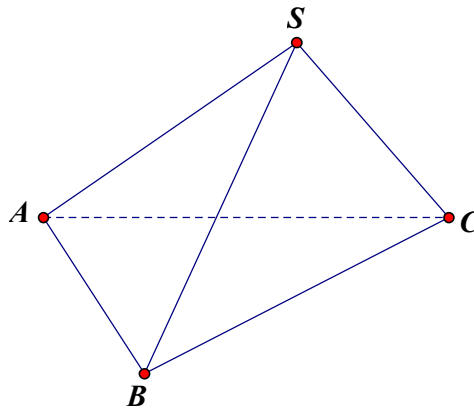
Câu 84. Trong không gian cho trước điểm M và đường thẳng Δ . Các đường thẳng đi qua M và vuông góc với Δ thì:

- A. vuông góc với nhau. B. song song với nhau.
C. cùng vuông góc với một mặt phẳng. D. cùng thuộc một mặt phẳng.

- Câu 85. (CHUYÊN BẮC NINH - LẦN 1 - 2018)** Trong không gian, cho các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?
- A. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì vuông góc với đường thẳng còn lại.
 B. Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
 C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.
 D. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.
- Câu 86.** Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c phân biệt và mặt phẳng (P) . Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. Nếu $a \perp c$ và $(P) \perp c$ thì $a // (P)$.
 B. Nếu $a \perp c$ và $b \perp c$ thì $a // b$.
 C. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \perp c$.
 D. Nếu $a \perp b$ thì a và b cắt nhau hoặc chéo nhau.
- Câu 87.** Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:
- A. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
 B. Qua một điểm O cho trước có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với một đường thẳng Δ cho trước.
 C. Hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Khi đó có một và chỉ một mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.
 D. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- Câu 88. (THPT Tứ Kỳ-Hải Dương năm 2017-2018)** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**
- A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.
 B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
 C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
 D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.
- Câu 89. (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa năm 2017-2018)** Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:
- A. Trong không gian hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
 B. Trong không gian hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.
 C. Trong không gian hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
 D. Trong không gian hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.
- Câu 90. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc - lần 3 năm 2017-2018)** Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?
- A. $BB' \perp BD$. B. $A'C' \perp BD$. C. $A'B \perp DC'$. D. $BC' \perp A'D$.
- Câu 91.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng BC' ?
- A. $A'D$. B. AC . C. BB' . D. AD' .
- Câu 92.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?
- A. $AC \perp SD$. B. $BD \perp AC$. C. $BD \perp SA$. D. $AC \perp SA$.

B. LỜI GIẢI

DẠNG 1. GÓC CỦA HAI VÉCTƠ

**Câu 1.**

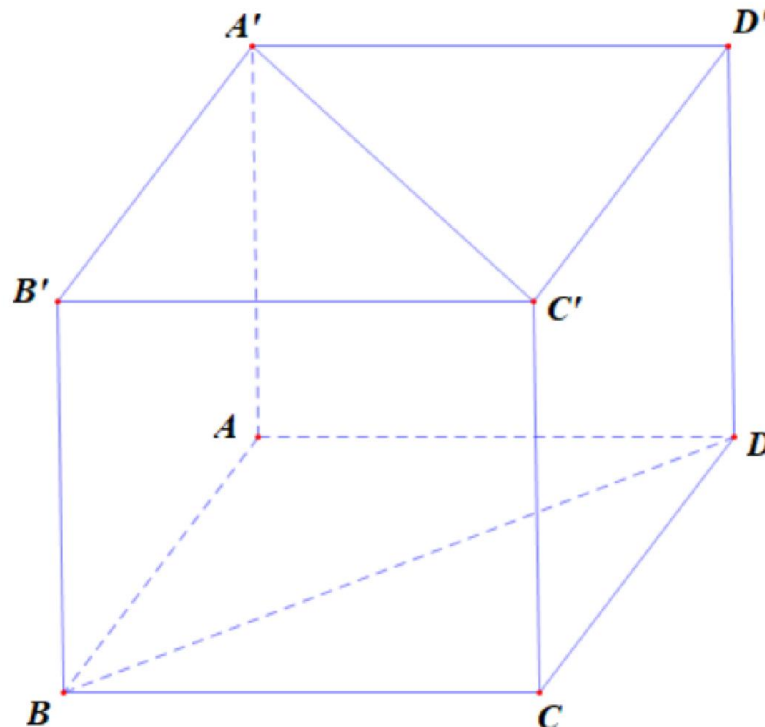
$$\text{Ta có } \cos(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{SB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC}}{a^2} = \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{a^2} = \frac{-\frac{a^2}{2} + 0}{a^2} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng 120° .

Câu 2. Chọn C

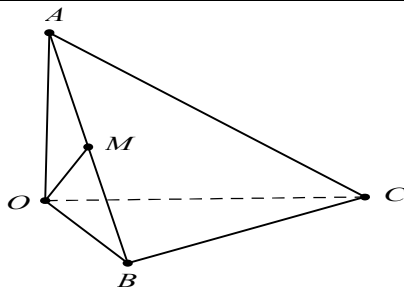
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AD \cos \widehat{DAB} - AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{CAB} = 0.$$

$$\Rightarrow \varphi = 90^\circ.$$

Câu 3. Chọn A

$$BD \perp AC \parallel A'C' \Rightarrow BD \perp A'C' \Rightarrow \cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A'C'}) = 0.$$

Câu 4. Chọn C



$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}OB^2 = -\frac{a^2}{2}.$$

$$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{2} \text{ và } OM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{OA^2 + OB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Do đó: } \cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BC}}{OM \cdot BC} = \frac{-\frac{a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ.$$

Câu 5. Chọn A

Đặt $\overrightarrow{A'B'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{A'D'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{A'A} = \vec{c}$, $AB = x$.

$$\overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{A'A} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

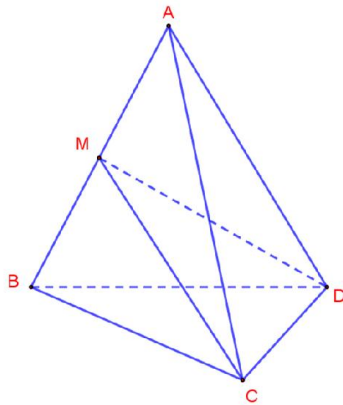
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}.$$

$$\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{BD} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - (\vec{a})^2 + (\vec{b})^2 - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{a}.$$

$$= 0 - x^2 + x^2 - 0 + 0 - 0 = 0. \text{ (Vì } ABCD \text{ là hình vuông nên } |\vec{a}| = |\vec{b}| = x).$$

Vậy $\overrightarrow{A'C} \perp \overrightarrow{BD}$ hay góc giữa $A'C$ và BD bằng 90° .

Câu 6. Chọn A



Gọi M là trung điểm của AB .

Vì hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều nên $CM \perp AB, DM \perp AB$.

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MD} = 0.$$

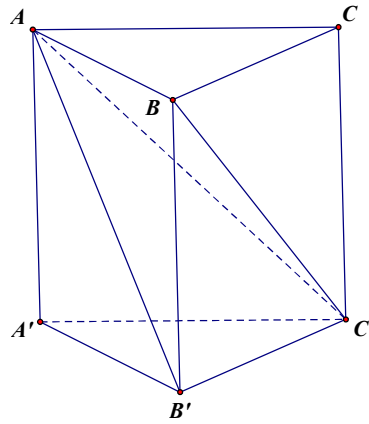
Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và CD là 90° .

Câu 7. Chọn D

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2 + |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$= AB^2 + AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{BAC}) = a^2 + a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{3a^2}{2}.$$

Câu 8. Chọn A



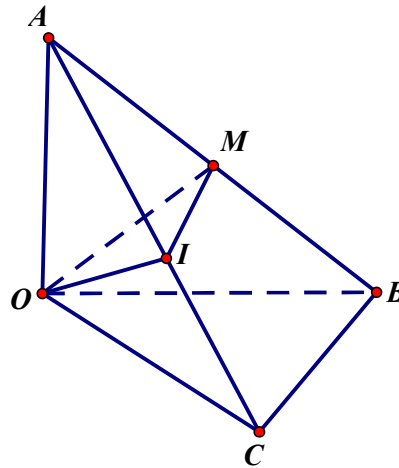
Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ theo giả thiết ta có: $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$, $\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c} = 0$, $\vec{b}\vec{c} = \frac{1}{2}a^2$.

Có $ABB'A'$ và $BCC'B'$ là các hình vuông nên $|\overrightarrow{AB'}| = |\overrightarrow{BC'}| = a\sqrt{2}$.

Mà $\overrightarrow{AB'} = \vec{a} + \vec{b}$ và $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$ suy ra

$$\cos(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}) = \left| \cos(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'}|}{|\overrightarrow{AB'}| |\overrightarrow{BC'}|} = \frac{\left| a^2 + \frac{1}{2}a^2 - a^2 \right|}{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{4}.$$

Câu 9. Chọn A



Gọi I là trung điểm của AC ta có góc hợp bởi hai véc tơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$ bằng 180° trừ đi góc tạo bởi hai véc tơ $\overrightarrow{MI}$ và $\overrightarrow{MO}$

$$\text{Ta có: } BC = a\sqrt{2} \Rightarrow MI = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

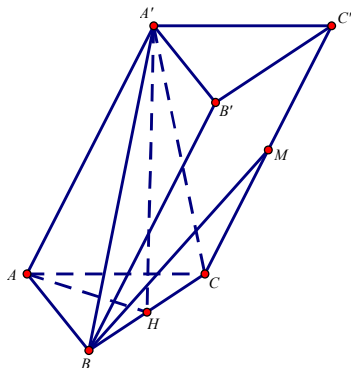
$$\text{Tam giác OAB vuông cân tại O nên: } OM = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Tam giác OAC vuông cân tại O nên: } OI = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Suy ra góc tạo bởi hai véc tơ $\overrightarrow{MI}$ và $\overrightarrow{MO}$ bằng 60°

Suy ra góc hợp bởi hai véc tơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{OM}$ bằng 120°

Câu 10. Chọn B.



Ta có: $AH = A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AH \perp BC, A'H \perp BC \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp AA'$ hay

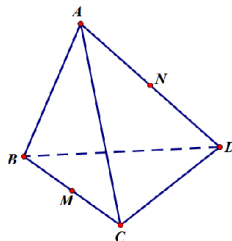
$BC \perp BB'$. Do đó: $BCC'B'$ là hình chữ nhật.

Khi đó: $CC' = AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow BM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2 \cdot 6}{16}} = a \frac{\sqrt{22}}{4}$.

Xét: $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AA'} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}) = 0 + AA' \cdot CM = \frac{3a^2}{4}$.

Suy ra $\cos(AA', BM) = \frac{\left| \frac{3a^2}{4} \right|}{\frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{22}}{4}} = \frac{\sqrt{33}}{11}$.

Câu 11. Chọn D



Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN}$. Suy ra

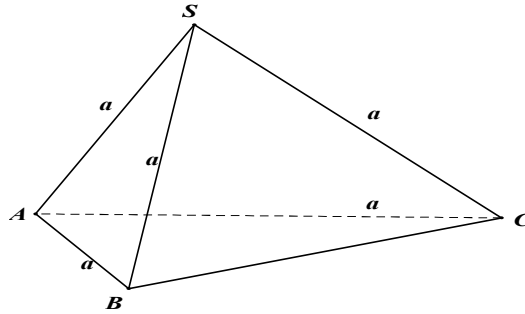
$2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{DN}) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}$ (Vì M là trung điểm BC và N là trung điểm AD).

Khi đó: $4\overrightarrow{MN}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(4\overrightarrow{MN}^2 - \overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{CD}^2) = 4a^2$.

Do vậy ta có: $\cos(AB, CD) = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy, số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là 45° .

Câu 12. Chọn B



+) Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ + a \cdot a \cdot \cos 30^\circ = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$

+) Do đó: $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{SC}|} = \frac{-\frac{a^2}{2} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}}{a^2} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \approx 0.37$. Chọn **B**.

Câu 13. Chọn A

Do tất cả các cạnh của hình chóp bằng nhau nên hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều

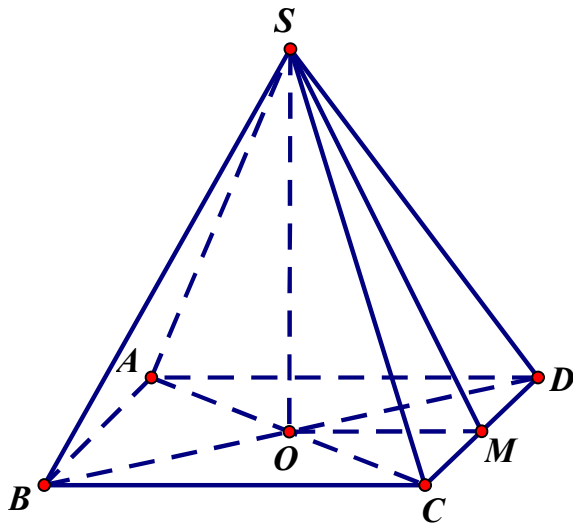
$$\Rightarrow \begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ AC \perp BD \end{cases}.$$

Do M là trung điểm của CD nên ta có:

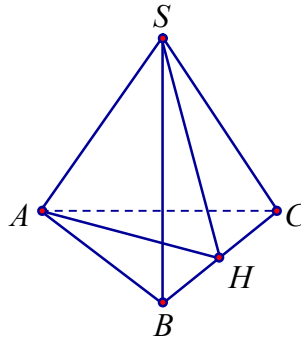
$$\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OS}, \quad \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}.$$

Do $\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OS}$; $\overrightarrow{OD}$ đôi một vuông góc với nhau nên ta có:

$$\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}OC^2 + \frac{1}{2}OD^2 = OC^2 = \frac{a^2}{2}$$



Câu 14. Chọn D



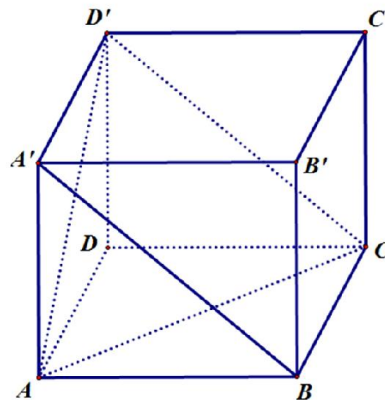
Cách 1:

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AS} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AB} = AS \cdot AC \cdot \cos \widehat{SAC} - AS \cdot AB \cdot \cos \widehat{SAB} = 0.$$

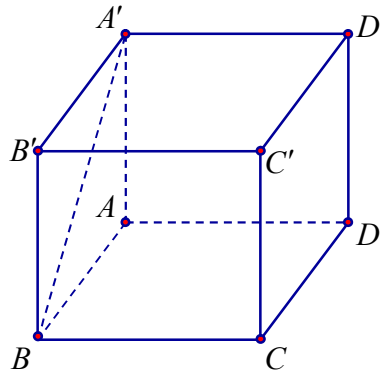
Do đó số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và BC bằng 90° .

DẠNG 2. GÓC CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Câu 15. Chọn A



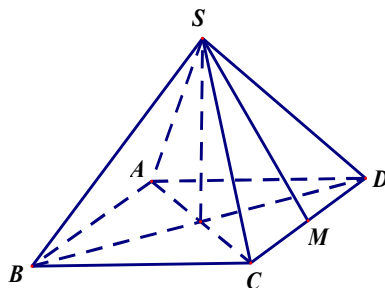
Do $A'BCD'$ là hình bình hành nên $A'B \parallel D'C$. Suy ra góc giữa hai đường thẳng AC và $A'B$ bằng góc giữa hai đường thẳng AC và $D'C$ và đó chính là góc $\widehat{ACD'} = 60^\circ$ (do $\Delta ACD'$ đều).



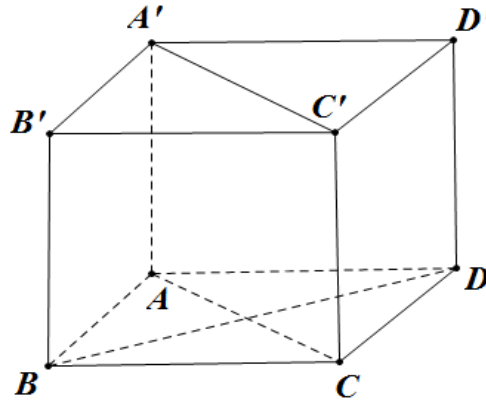
Câu 16.

Có $CD \parallel AB \Rightarrow (BA', CD) = (BA', BA) = \widehat{ABA'} = 45^\circ$ (do $ABB'A'$ là hình vuông).

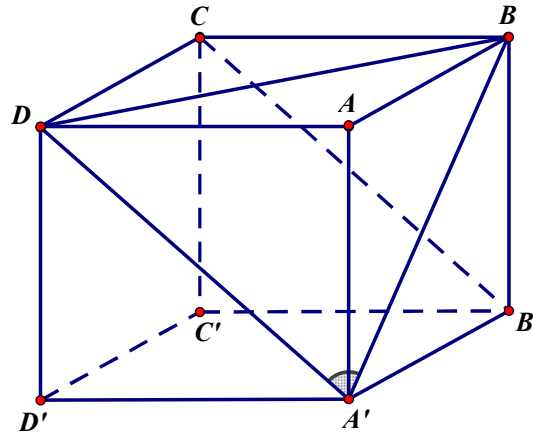
Câu 17. Chọn A



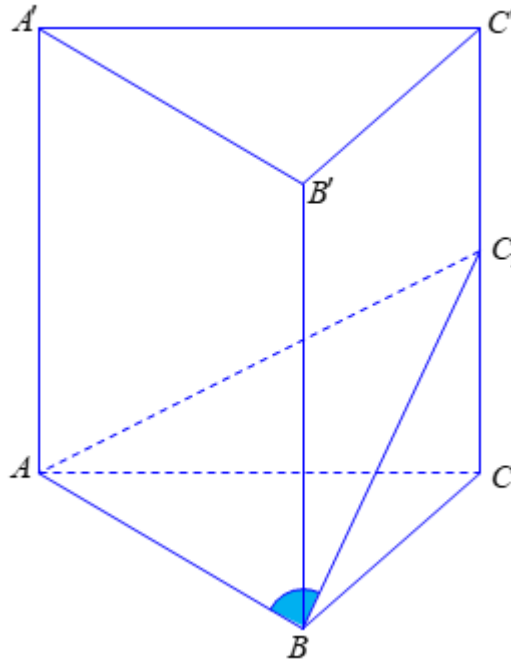
Gọi M là trung điểm của CD . Tam giác SCM vuông tại M và có $SC = a\sqrt{2}$, $CM = a$ nên là tam giác vuông cân tại M nên $\widehat{SCD} = 45^\circ$. Vậy $\left(\widehat{AB; SC}\right) = 45^\circ$.



Ta có: $\left(\widehat{A'C';BD}\right)=\left(\widehat{AC;BD}\right)=90^\circ$



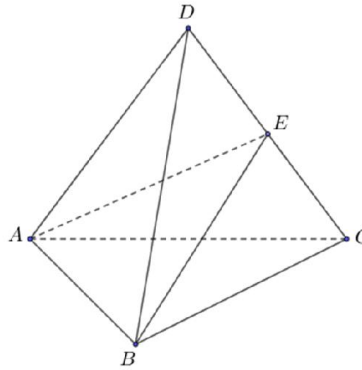
Vậy $\widehat{DA'B} = 60^\circ$.



Câu 20.

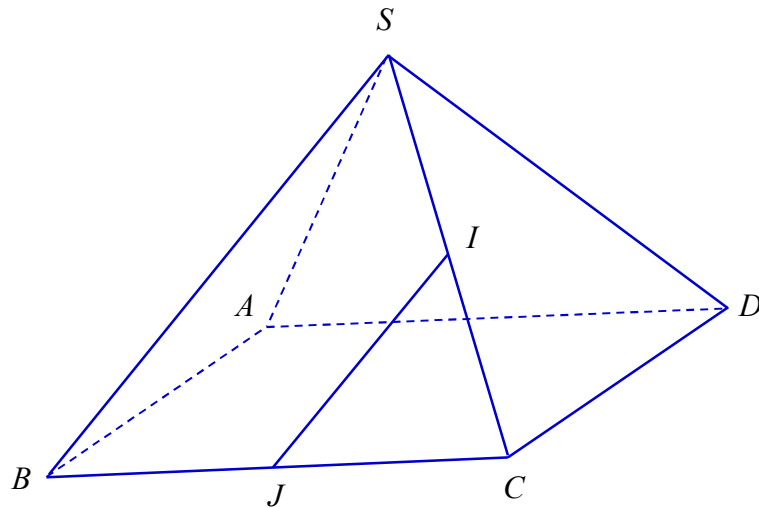
Ta có $A'B' \parallel AB \Rightarrow (\widehat{BC_1, A'B'}) = (\widehat{BC_1, AB}) = \widehat{ABC_1}$.

Tam giác ABC_1 có $AB=1$; $AC_1=BC_1=\sqrt{2}$ và $\cos B = \frac{AB^2 + BC_1^2 - AC_1^2}{2AB \cdot BC_1} \Leftrightarrow \cos B = \frac{\sqrt{2}}{4}$.



Câu 21.

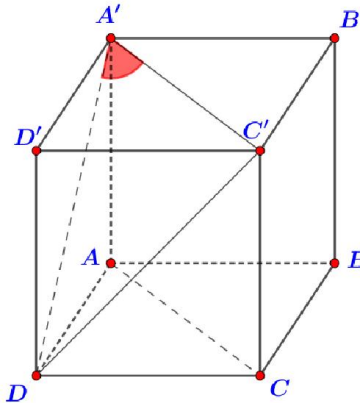
Đặt $AB = a$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow AB \perp CD$.



Câu 22.

$$\left. \begin{array}{l} IJ \parallel SB \\ CD \parallel AB \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{(IJ, CD)} = \widehat{(SB, AB)} = \widehat{SBA} = 60^\circ$$

(vì tam giác SAB là tam giác đều cạnh a).

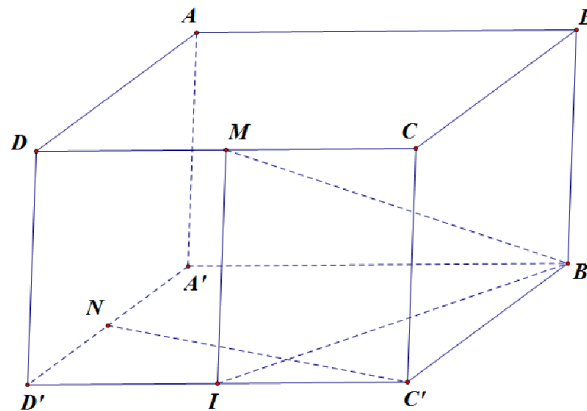


Câu 23.

$$\text{Ta có: } \widehat{(AC, A'D)} = \widehat{(A'C', A'D)} = \widehat{DA'C'} = 60^\circ.$$

Vì $A'D = A'C' = C'D$.

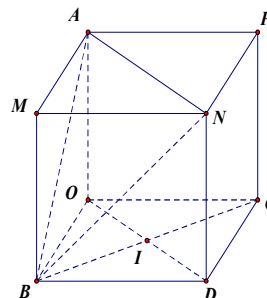
Câu 24. Chọn D



Gọi I là trung điểm của $C'D'$ khi đó IB' là hình chiếu vuông góc của $B'M$ trên $(A'B'C'D')$. Mặt khác ta có

$$\widehat{IB'C'} + \widehat{NC'B'} = \widehat{NC'D'} + \widehat{NC'B'} = \widehat{B'C'D'} = 90^\circ \Rightarrow C'N \perp IB' \text{ Do đó } C'N \perp B'M. \text{ Vậy góc giữa } B'M \text{ và } C'N \text{ bằng } 90^\circ.$$

Câu 25. Chọn D

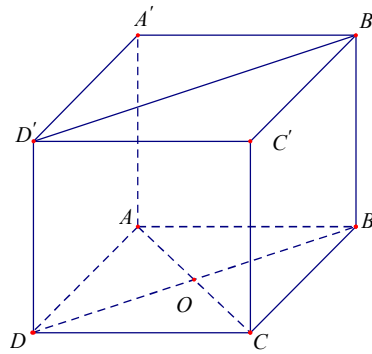


Vì tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC = a$; OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một nên ta có thể dựng hình lập phương $AMNP.OBDC$ như hình vẽ với I là trung điểm BC nên $\{I\} = OD \cap BC$.

Cạnh của hình lập phương trên bằng a nên $AB = AN = NB = a\sqrt{2}$ vậy tam giác ABN đều.

Dễ thấy $OI \parallel AN$ nên góc giữa hai đường thẳng AB và OI bằng góc giữa AB và AN bằng 60° .

Câu 26. Chọn D

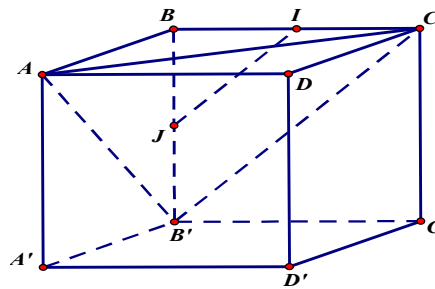


Ta có $BD \parallel B'D' \Rightarrow (\widehat{AC; B'D'}) = (\widehat{AC; BD})$.

Gọi $O = AC \cap BD$. Vì $\widehat{CAD} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{AOB} = 80^\circ$

Vậy $(\widehat{AC; B'D'}) = 80^\circ$.

Câu 27. Chọn B

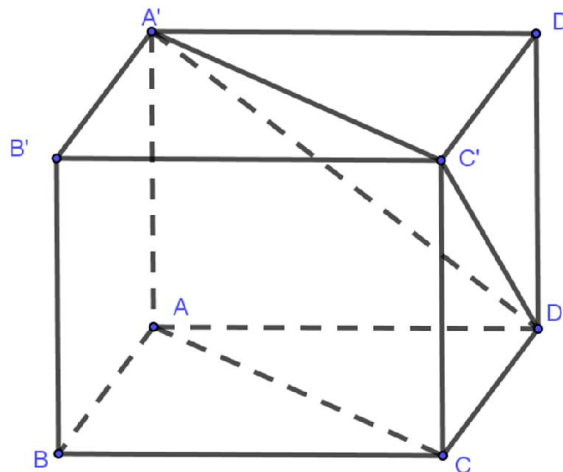


Vì $IJ \parallel B'C$ nên $(IJ, AC) = (B'C, AC)$.

Mà AC, AB', CB' là đường chéo của các hình vuông bằng nhau nên $AC = AB' = CB'$.

$\Rightarrow \triangle ACB'$ đều. Vậy $(IJ, AC) = (B'C, AC) = \widehat{ACB'} = 60^\circ$.

Câu 28. Chọn A



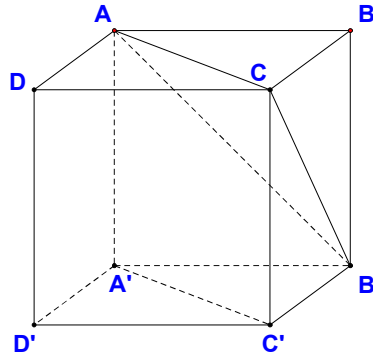
Ta có $AC \parallel A'C'$ nên góc giữa hai đường thẳng AC và DA' bằng góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và DA' .

Mà $A'C' = DA' = DC'$ (các đường chéo của hình vuông).

Suy ra $\triangle A'C'D$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{A'C'D} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AC và DA' bằng 60° .

Câu 29. Chọn A



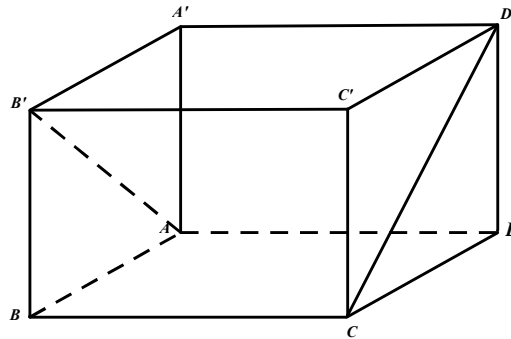
Giả sử hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a .

Do $AC \parallel A'C'$ nên $(AB', A'C') = (AB', AC)$.

Ta có: $AB' = AC = CB' = a\sqrt{2} \Rightarrow$ Tam giác $AB'C$ đều nên $\widehat{CAB'} = 60^\circ$.

$\Rightarrow (AB', A'C') = (AB', AC) = \widehat{CAB'} = 60^\circ$.

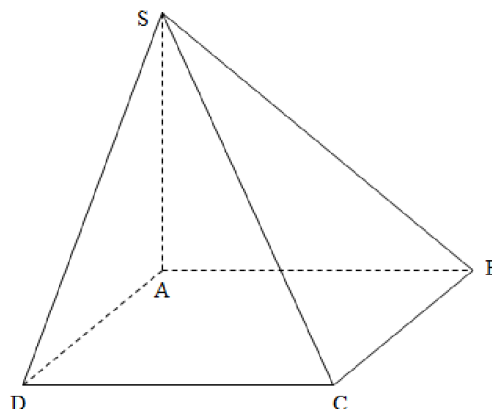
Câu 30. Chọn D



Ta có: $C'D \parallel AB'$.

$\Rightarrow (\widehat{AB', CD'}) = (\widehat{C'D, CD'}) = 90^\circ$ (vì $CDD'C'$ là hình vuông nên hai đường chéo vuông góc).

Câu 31. Chọn B



$AD \parallel BC, SA \perp BC \Rightarrow SA \perp AD$ hay $\triangle SAD$ vuông tại A .

$AD \parallel BC, SD \cap AD = D \Rightarrow (\widehat{SD, BC}) = (\widehat{SD, AD}) = \widehat{SDA}$.

$\triangle SAD$ vuông tại $A \Rightarrow \tan \widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 60^\circ$.

Câu 32. Chọn A

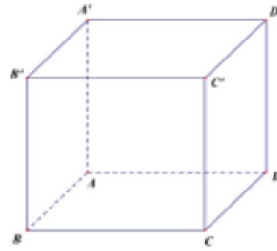
Gọi cạnh hình lập phương là a .

Ta có $(AC, A'D) = (A'C', A'D) = \widehat{C'A'D}$.

Vì $A'C' = A'D = DC' = a\sqrt{2}$ nên tam giác $A'C'D$ là tam giác đều.

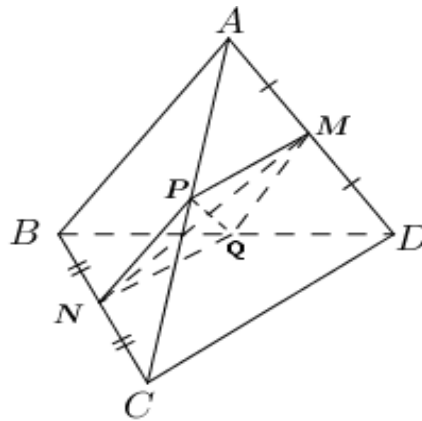
Suy ra $\widehat{C'A'D} = 60^\circ$.

Câu 33. Chọn C



Ta có $(BC', B'D') = (BC', BD) = \widehat{DBC'}$, xét $\triangle BDC'$ có BD, BC', DC' đều là các đường chéo của hình vuông cạnh bằng a nên $\triangle BDC'$ là tam giác đều. Do đó $(BC', B'D') = (BC', BD) = \widehat{DBC'} = 60^\circ$.

Câu 34. Chọn C



Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AC và BD . Khi đó ta có

$$\begin{cases} PM \parallel NQ \parallel CD \\ PM = NQ = \frac{CD}{2} \end{cases} \Rightarrow PMQN \text{ là hình bình hành.}$$

Ta cũng có $MQ \parallel NP \parallel AB, MQ = NP = \frac{AB}{2}$.

Do $AB = CD = 2a \Rightarrow PM = MQ = QN = NP = a$.

Gọi $(AB, CD) = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \left| \cos(\widehat{MPN}) \right|$. Áp dụng định lí Côsin ta có

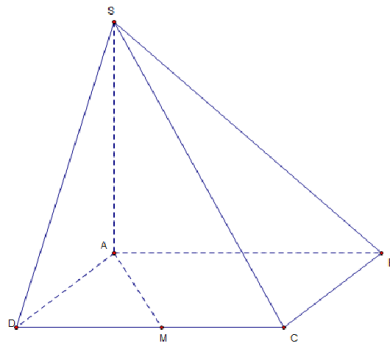
$$MN^2 = PM^2 + PN^2 - 2PM \cdot PN \cdot \cos(\widehat{MPN})$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 = a^2 + a^2 - 2.a.a \cdot \cos(\widehat{MPN})$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{MPN}) = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2.a.a} = \frac{-1}{2}$$

$$\text{nên } \cos \alpha = \left| \cos(\widehat{MPN}) \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow (AB, CD) = 60^\circ$$

Câu 35. Chọn C

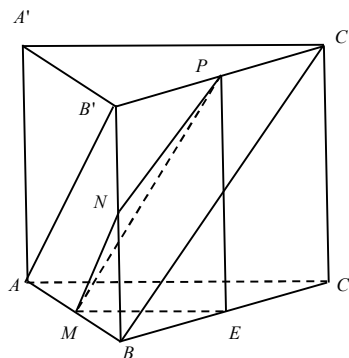


Ta có $AM = \sqrt{AD^2 + DM^2} = a\sqrt{5}$, $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{5}$.

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{SB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM}) \cdot (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2.$$

Mặt khác $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{SB} = AM \cdot SB \cdot \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{SB}) = 5a^2 \cdot \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{SB})$

$$\Rightarrow 2a^2 = 5a^2 \cdot \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{SB}) \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{SB}) = \frac{2}{5}. \text{ Suy ra } \cos \alpha = \frac{2}{5}.$$



Câu 36.

Chọn C

Gọi M, N, P, E lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng $AB, BB', B'C', BC$.

Suy ra $MN \parallel AB'$ và $NP \parallel BC'$. Khi đó góc giữa đường thẳng AB' và BC' là góc giữa hai đường thẳng MN và NP .

$$\text{Ta có: } MN = NP = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

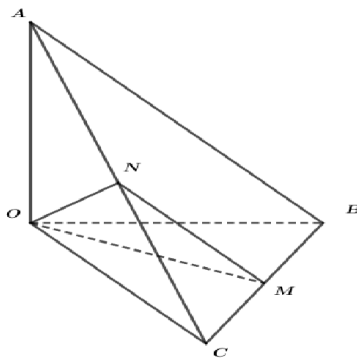
$$\text{Xét tam giác } PEM \text{ vuông tại } E, MP^2 = PE^2 + ME^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{9a^2}{4}.$$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác MNP , ta có

$$\cos MNP = \frac{MN^2 + NP^2 - MP^2}{2 \cdot MN \cdot NP} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - \frac{9a^2}{4}}{2 \cdot \frac{3a^2}{4}} = -\frac{1}{2}.$$

Do đó góc MNP bằng 120° nên góc giữa đường thẳng AB' và BC' bằng 60° .

Câu 37. Chọn C



Đặt $OA = a$ suy ra $OB = OC = a$ và $AB = BC = AC = a\sqrt{2}$

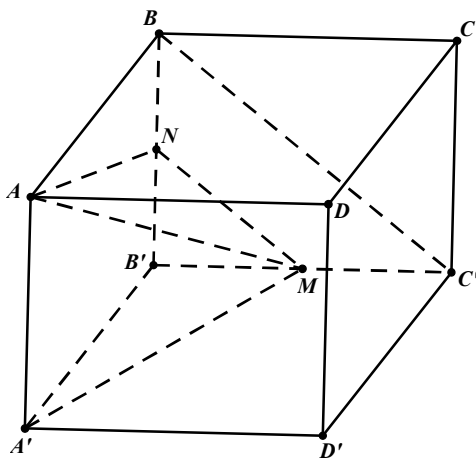
Gọi N là trung điểm AC ta có $MN \parallel AB$ và $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Suy ra góc $(\widehat{OM, AB}) = (\widehat{OM, MN})$. Xét $\widehat{OMN}$

Trong tam giác OMN có $ON = OM = MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên OMN là tam giác đều

Suy ra $\widehat{OMN} = 60^\circ$. Vậy $(\widehat{OM, AB}) = (\widehat{OM, MN}) = 60^\circ$.

Câu 38. Chọn A



Giả sử cạnh của hình lập phương là $a > 0$.

Gọi N là trung điểm đoạn thẳng BB' . Khi đó, $MN \parallel BC'$ nên $(AM, BC') = (AM, MN)$.

Xét tam giác $A'B'M$ vuông tại B' ta có: $A'M = \sqrt{A'B'^2 + B'M^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác $AA'M$ vuông tại A' ta có: $AM = \sqrt{AA'^2 + A'M^2} = \sqrt{a^2 + \frac{5a^2}{4}} = \frac{3a}{2}$.

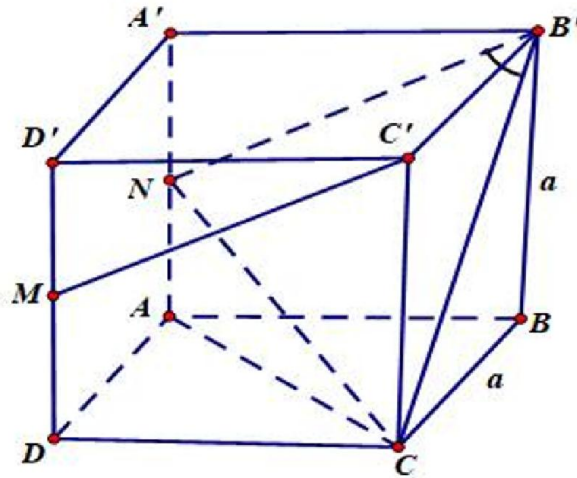
Có $AN = A'M = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $MN = \frac{BC'}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác AMN ta có:

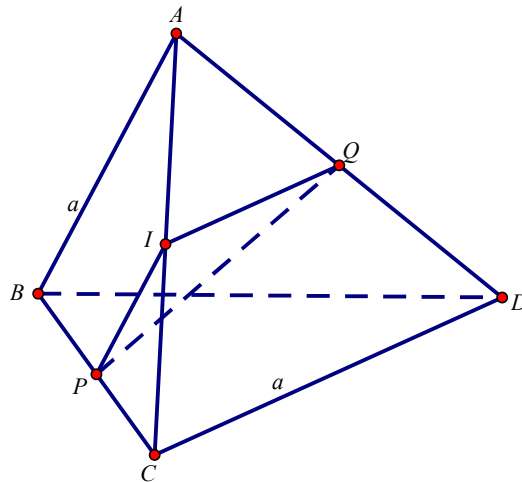
$$\cos \widehat{AMN} = \frac{MA^2 + MN^2 - AN^2}{2 \cdot MA \cdot MN} = \frac{\frac{9a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}}{2 \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{6a^2}{4} \cdot \frac{4}{6a^2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $\widehat{AMN} = 45^\circ$.

Câu 39. Chọn A


$$\text{Vậy } \cos(\widehat{B'C, C'M}) = \left| \cos \widehat{NB'C} \right| = \frac{|B'N^2 + B'C^2 - NC^2|}{2B'N.B'C} = \frac{a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Câu 40. Chọn D

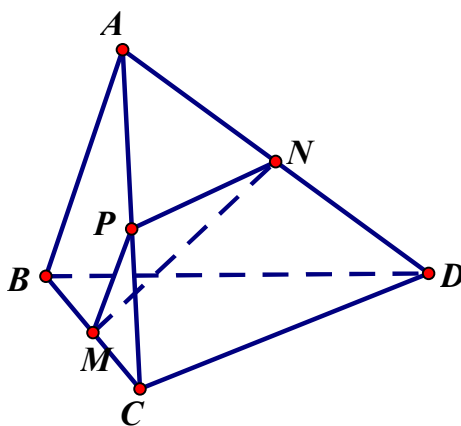
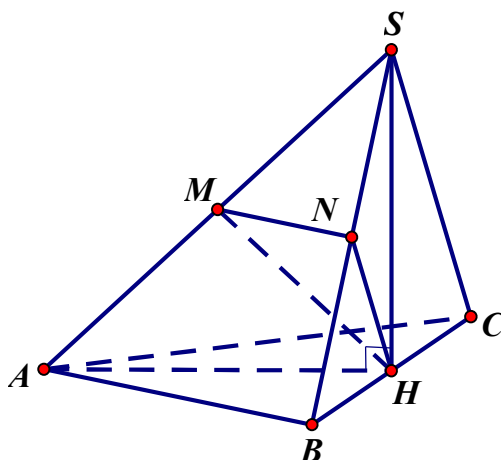

$$\cos \widehat{PIQ} = \frac{IP^2 + IQ^2 - PQ^2}{2IP.IQ} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\left(\frac{a}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2} \text{ suy ra } \widehat{PIQ} = 120^\circ.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và CD có số đo là $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Câu 41. * Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) , theo đầu bài $SA = SB = SC$ và tam giác $\triangle ABC$ vuông cân tại A ta có H là trung điểm của BC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB ta có: $\begin{cases} MN \parallel AB \\ HN \parallel SC \end{cases} \Rightarrow$ Góc giữa AB và SC là góc giữa MN và HN .

Xét tam giác $\triangle MNH$ ta có: $MN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$; $HN = \frac{SC}{2} = \frac{a}{2}$; $MH = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$ (Do $\triangle SHA$ vuông tại H)

$\Rightarrow$ tam giác $\triangle MNH$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{MNH} = 60^\circ$. Vậy góc cần tìm là 60° .

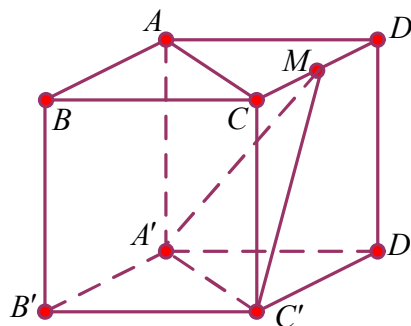


Câu 42.

Kẻ $MP \parallel AB$, $NP \parallel CD$ nên góc giữa AB và CD là góc giữa MP và NP .

$$\cos \widehat{MPN} = \frac{MP^2 + NP^2 - MN^2}{2 \cdot MP \cdot NP} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \widehat{MPN} = 120^\circ.$$

Vậy góc giữa AB và CD bằng 60° .

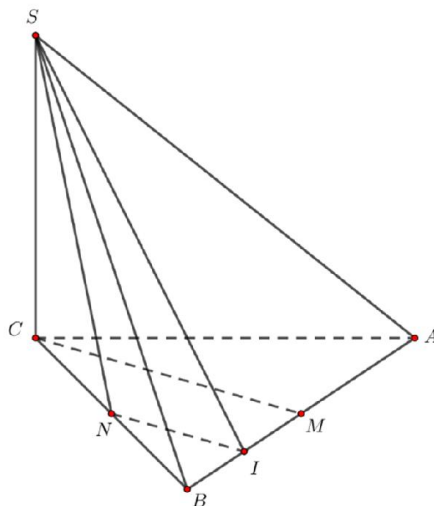


Câu 43.

Ta có $AC \parallel A'C'$ nên góc giữa AC và $C'M$ cũng bằng góc giữa $A'C'$ và $C'M$ là $\widehat{A'C'M}$.

Gọi cạnh của hình lập phương có độ dài là a . Khi đó $A'C' = a\sqrt{2}$, $C'M = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ (trong tam giác vuông $CC'M$ có $CM = \frac{a}{2}$), $A'M = \frac{3a}{2}$ (trong tam giác vuông $A'MD$, $MD = \frac{a}{2}$, $A'D = a\sqrt{2}$).

Xét tam giác $A'MC'$ ta có $\cos \widehat{A'C'M} = \frac{(A'C')^2 + C'M^2 - A'M^2}{2A'M \cdot C'M} = \frac{1}{2}$.



Câu 44.

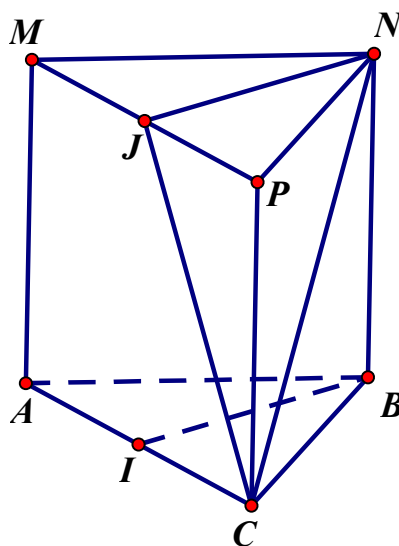
Gọi I là trung điểm của BM , ta có $NI \parallel CM$ nên góc giữa SN và CM là góc giữa SN và NI .

Xét tam giác SNI có $SN = \sqrt{SC^2 + CN^2} = \sqrt{4+8} = 2\sqrt{3}$; $NI = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{2}4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$;

$CI = \sqrt{CM^2 + MI^2} = \sqrt{24+2} = \sqrt{26} \Rightarrow SI = \sqrt{SC^2 + CI^2} = \sqrt{4+26} = \sqrt{30}$.

Vậy $\cos \widehat{SNI} = \frac{SN^2 + NI^2 - SI^2}{2SN \cdot NI} = \frac{12+6-30}{2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{-12}{3\sqrt{2} \cdot 4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{SNI} = 135^\circ$.

Vậy góc giữa SN và CM bằng 45° .

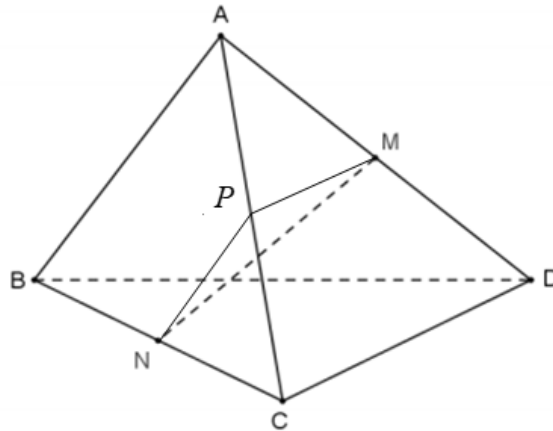


Câu 45.

Gọi J là trung điểm của MP . Góc giữa hai đường thẳng NC và IB bằng góc giữa hai đường thẳng NC và NJ .

Ta có $JN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $NC^2 = NP^2 + PC^2 = 2a^2$, $JC^2 = JP^2 + PC^2 = \frac{5a^2}{4}$.

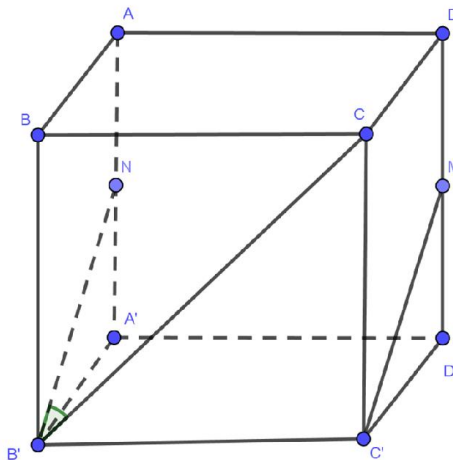
Xét tam giác NJC có: $\cos \widehat{JNC} = \frac{JN^2 + NC^2 - JC^2}{2NJ \cdot NC} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$



Câu 46.

Gọi P là trung điểm của AC . Suy ra $PM = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB = PN$. Do đó tam giác PMN cân tại P . Lại có góc giữa AB và MN bằng 30° nên góc giữa MN và PN bằng 30° . Vậy tam giác PMN là tam giác cân có góc ở đỉnh bằng 120° .

Ta có $PN \cdot \sqrt{3} = MN$ nên $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

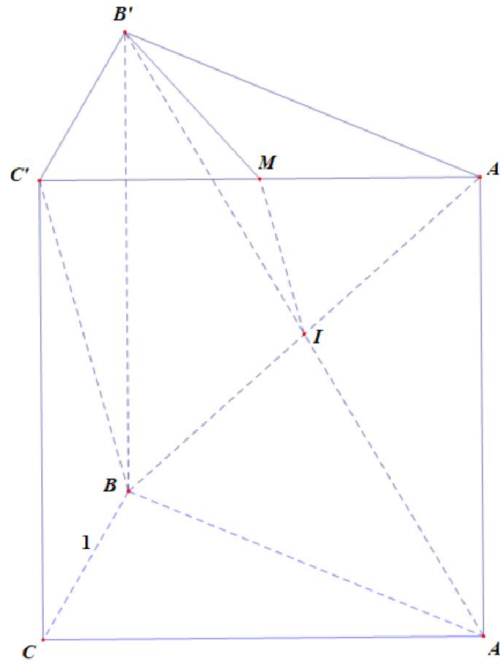


Câu 47.

Kẻ $B'N$ song song với $C'M$. Ta được $(B'C; C'M) = (B'C; B'N) = \widehat{NB'C}$

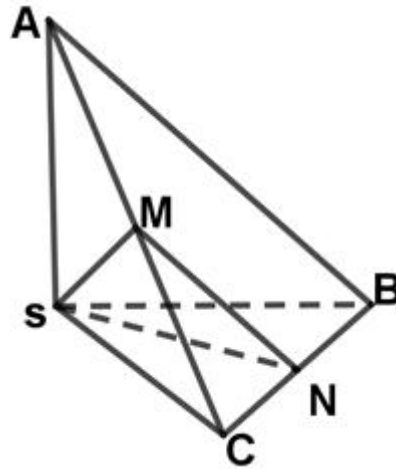
Ta có $B'C = \sqrt{BB'^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$, $B'N = \sqrt{AB'^2 + A'N^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $CN = \sqrt{AN^2 + AC^2} = \frac{3}{2}a$

Áp dụng định lý hàm số cosin trong $\Delta B'NC$, ta được $\cos \widehat{NB'C} = \frac{B'N^2 + B'C^2 - NC^2}{2 \cdot B'N \cdot B'C} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

**Câu 48.**

Gọi I là tâm của hình chữ nhật $ABB'A'$ và M là trung điểm của $A'C'$.

Có $IM = IB' = B'M = \frac{\sqrt{3}}{2}$ suy ra $(AB', BC') = (AB', IM) = \widehat{MIB'} = 60^\circ$.

**Câu 49.**

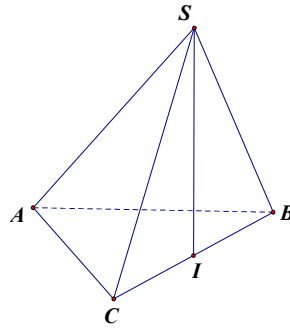
$$C1. \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}) (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) = -\frac{1}{2} SA^2$$

$$SM = \frac{SA}{\sqrt{2}}; AB = SA\sqrt{2}$$

$$\cos(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{AB}}{SM \cdot AB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$$

Vậy góc giữa SM và AB bằng 60° .

C2. N là trung điểm của BC . Tam giác SMN đều (cạnh bằng $\frac{1}{2}SA$). Nên góc giữa SM và AB bằng góc SMN bằng 60° .

**Câu 50.**

Ta có $BC = a\sqrt{2}$ nên tam giác ABC vuông tại A . Vì $SA = SB = SC = a$ nên hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Tam giác ABC vuông tại A nên I là trung điểm của BC .

$$\text{Ta có } \cos(AB, SC) = \left| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC}|}{AB \cdot SC}.$$

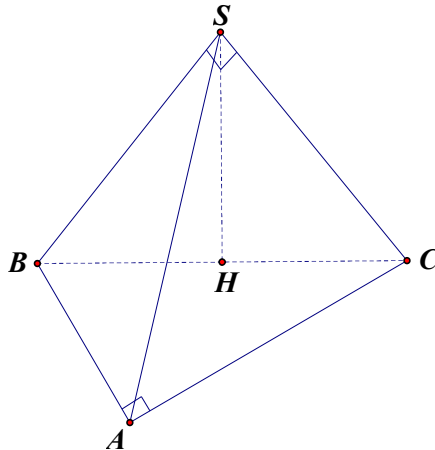
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SI} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \cos 45^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$

$$\cos(AB, SC) = \frac{\frac{a^2}{2}}{a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{(AB, SC)} = 60^\circ.$$

$$\text{Cách 2: } \cos(AB, SC) = \left| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC}|}{AB \cdot SC}$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{SC} = (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) \cdot \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} = SB \cdot SC \cdot \cos 90^\circ - SA \cdot SC \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$

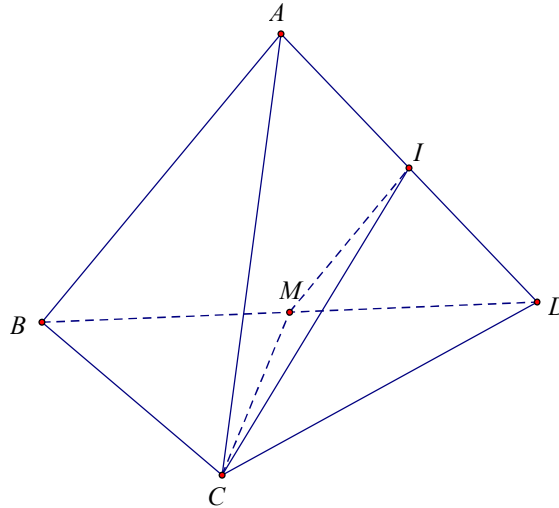
$$\text{Khi đó } \cos(AB, SC) = \frac{\left| \frac{-a^2}{2} \right|}{a^2} = \frac{1}{2}$$

**Câu 51.**

□ Tam giác ABC vuông tại A và tam giác SBC vuông tại S vì $AB = AC = 1$, $BC = \sqrt{2}$ và $SB = SC = 1$, $BC = \sqrt{2}$.

$$\square \text{ Ta có } \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC} \cdot (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA} = 0 - SC \cdot SB \cdot \cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$$

□ Suy ra $\cos(SC; AB) = \left| \cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) \right| = \frac{|\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}|}{SC \cdot AB} = \frac{1}{2}$. Vậy góc giữa hai đường thẳng AB , SC bằng 60° .



Câu 52.

Gọi M là trung điểm của BD .

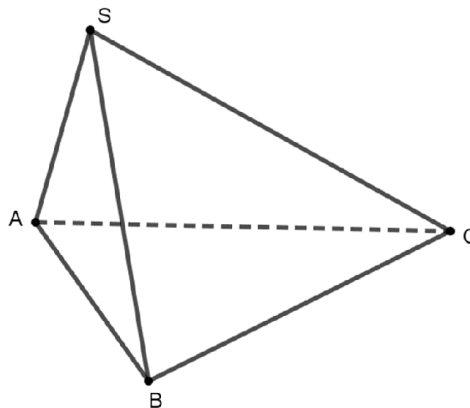
Ta có: $IM \parallel AB$.

$$\Rightarrow (AB, IC) = (IM, IC).$$

$$\Rightarrow \cos(AB, IC) = \cos(IM, IC) = \left| \cos(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IC}) \right| = \left| \cos \widehat{MIC} \right|.$$

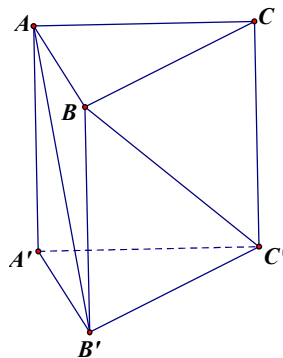
$$\text{Mà: } \cos \widehat{MIC} = \frac{MI^2 + IC^2 - MC^2}{2 \cdot MI \cdot IC} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\Rightarrow \cos(AB, IC) = \left| \cos \widehat{MIC} \right| = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$



Câu 53.

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \left| \cos(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}) \right| = \frac{|\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BC}|}{SA \cdot BC} = \frac{|\overrightarrow{SA} \cdot (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB})|}{SA \cdot BC} = \frac{|\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}|}{SA \cdot BC} \\ &= \frac{|SA \cdot SC \cdot \cos 90^\circ - SA \cdot SB \cdot \cos 60^\circ|}{a \cdot \sqrt{4a^2 + 9a^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ}} = \frac{\sqrt{7}}{7}. \end{aligned}$$

**Câu 54.**

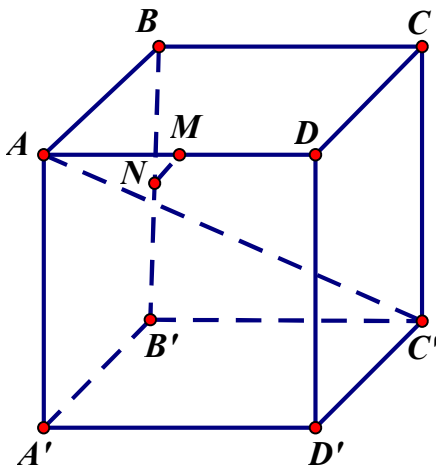
$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}) (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'} = -\frac{a^2}{2} + 0 + 0 + 2a^2 = \frac{3a^2}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}) = \frac{\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'}}{|\overrightarrow{AB'}| \cdot |\overrightarrow{BC'}|} = \frac{\frac{3a^2}{2}}{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}) = 60^\circ.$$

Câu 55. Ta có tam giác ABC vuông cân tại A , tam giác BDC vuông cân tại D .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= |\overrightarrow{DB}| |\overrightarrow{CD}| \cos(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CD}) - |\overrightarrow{DA}| |\overrightarrow{CD}| \cos(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CD}) = -\frac{1}{2} a^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác ta lại có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CD}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CD}|} = -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) &= 120^\circ \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 60^\circ. \end{aligned}$$

**Câu 56.**

* Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

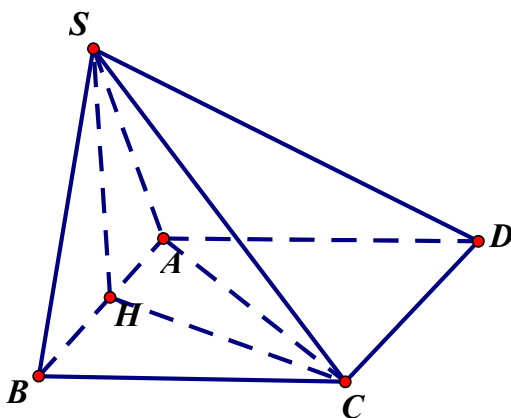
* Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AA'}$ $\Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$.

* Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \Rightarrow |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ \overrightarrow{AC'} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow |\overrightarrow{AC'}| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{MN} = a^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = a^2$$

$$\cos(MN; AC') = \left| \cos(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{AC'}) \right| = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AC'}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{AC'}|} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$



Câu 57.

$$(SC, (ABCD)) = (SC, CH) = \widehat{SCH} = 60^\circ.$$

$$\cos(SB, AC) = \frac{|\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}}$$

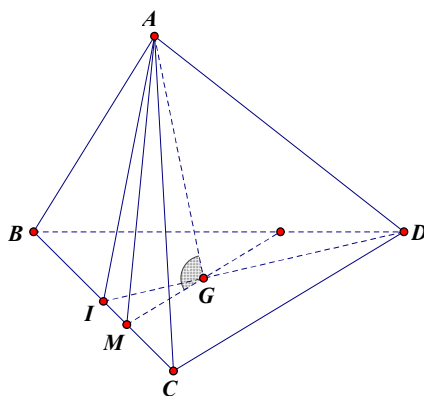
$$\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HB}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} AB^2 = 2a^2$$

$$AC = a\sqrt{5}, CH = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}, SH = CH \cdot \tan \widehat{SCH} = a\sqrt{6}.$$

$$SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \sqrt{(a\sqrt{6})^2 + a^2} = a\sqrt{7}.$$

$$\cos(SB, AC) = \frac{\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{AC}} = \frac{2a^2}{a\sqrt{7} \cdot a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{35}}.$$



Câu 58.

* $\triangle ABC$ đều $\Rightarrow BC = 1$.

* $\triangle ACD$ cân tại A có $CD = \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{3}$.

* $\triangle ABD$ vuông cân tại A có $BD = \sqrt{2}$.

* $\triangle BCD$ có $CD^2 = BC^2 + BD^2 \Rightarrow \triangle BCD$ vuông tại B .

Dựng đường thẳng d qua G và song song CD , cắt BC tại M .

Ta có $MG \parallel CD \Rightarrow (AG, CD) = (AG, MG)$.

Gọi I là trung điểm của BC , xét $\triangle BDI$ vuông tại B có $DI = \sqrt{BD^2 + BI^2} = \sqrt{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$.

Ta có $\frac{IM}{IC} = \frac{MG}{CD} = \frac{IG}{ID} = \frac{1}{3} \Rightarrow IM = \frac{1}{3} \cdot IC = \frac{1}{3} \cdot \frac{BC}{2} = \frac{1}{6}$; $MG = \frac{1}{3} \cdot CD = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $IG = \frac{1}{3} \cdot ID = \frac{1}{2}$.

Xét $\triangle AIM$ vuông tại I có $AM = \sqrt{AI^2 + IM^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

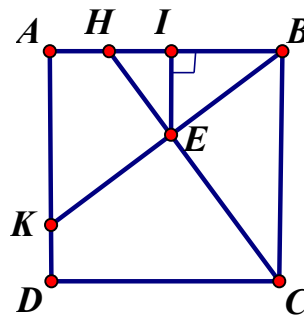
$$\cos \widehat{AID} = \frac{AI^2 + ID^2 - AD^2}{2 \cdot AI \cdot ID} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

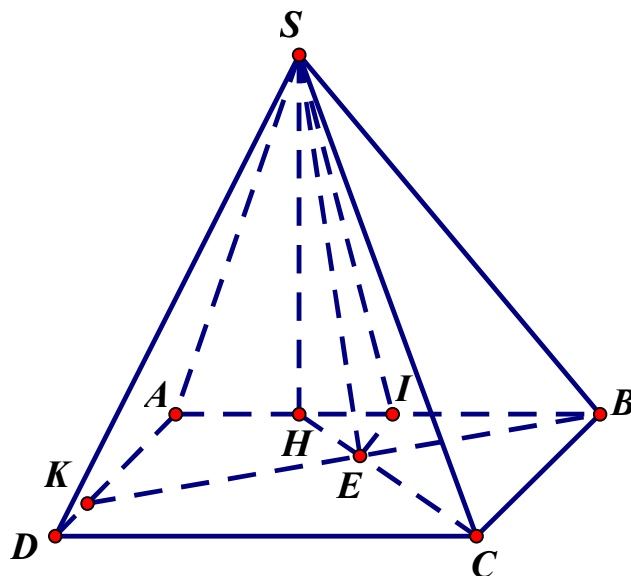
$$AG = \sqrt{AI^2 + IG^2 - 2 \cdot AI \cdot IG \cdot \cos \widehat{AID}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Xét $\triangle AMG$ có

$$\cos(\angle AG, MG) = |\cos \widehat{AGM}| = \left| \frac{AG^2 + GM^2 - AM^2}{2 \cdot AG \cdot GM} \right| = \left| \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} \right| = \frac{1}{6}.$$

Câu 59. Gọi I là hình chiếu vuông góc của E lên AB ta có $\triangle ABD = \triangle BCH$.
 $\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BCH} \Rightarrow \widehat{HEB} = 90^\circ$.





Ta có: $\cos(SE; BC) = \cos(SE; EI) = |\cos \widehat{SEI}|$, $SH = BH \cdot \tan 30^\circ = a\sqrt{3}$.

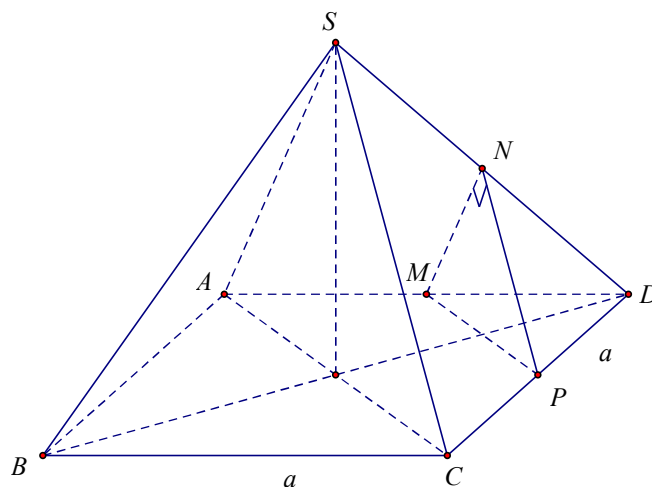
$$\frac{HB}{HC} = \frac{HE}{HB} \Rightarrow HE = \frac{HB^2}{HC} = \frac{9a}{5}, SE = \sqrt{SH^2 + HE^2} = \sqrt{3a^2 + \frac{81a^2}{25}} = \frac{2a\sqrt{39}}{5}.$$

$$\frac{HE}{HB} = \frac{HI}{HE} \Rightarrow HI = \frac{HE^2}{HB} = \frac{27a}{25}, SI = \sqrt{SH^2 + HI^2} = \sqrt{3a^2 + \left(\frac{27a}{25}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{651}}{25}.$$

$$\frac{EI}{BC} = \frac{HI}{HB} = \frac{9}{25} \Rightarrow EI = \frac{36a}{25}$$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác SEI ta được:

$$\cos \widehat{SEI} = \frac{SE^2 + EI^2 - SI^2}{2 \cdot SE \cdot EI} = \frac{\left(\frac{2a\sqrt{39}}{5}\right)^2 + \left(\frac{36a}{25}\right)^2 - \left(\frac{2a\sqrt{651}}{25}\right)^2}{2 \cdot \frac{2a\sqrt{39}}{5} \cdot \frac{36a}{25}} = \frac{18a}{5\sqrt{39}}.$$



Câu 60.

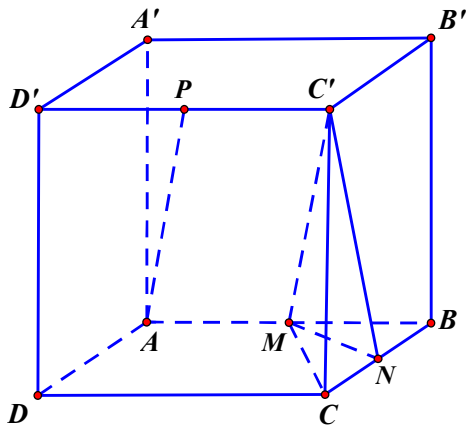
Gọi P là trung điểm của CD.

Ta có: $NP \parallel SC \Rightarrow (MN, SC) = (MN, NP)$.

Xét tam giác MNP ta có: $MN = \frac{a}{2}$, $NP = \frac{a}{2}$, $MP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow MN^2 + NP^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} = MP^2 \Rightarrow \Delta MNP \text{ vuông tại } N$$

$$\Rightarrow \widehat{MNP} = 90^\circ \Rightarrow (MN, SC) = (MN, NP) = 90^\circ.$$



Câu 61.

Ta có tứ giác $AMC'P$ là hình bình hành nên $AP \parallel MC' \Rightarrow (\widehat{MN}, \widehat{AP}) = (\widehat{MN}, \widehat{MC'}) = \widehat{NMC'}$.

Gọi cạnh hình vuông có độ dài bằng a .

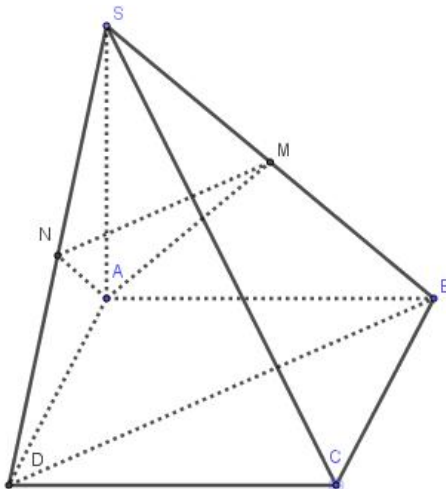
$$\text{Xét tam giác } C'CM \text{ vuông tại } C \text{ có } C'M = \sqrt{C'C^2 + MC^2} = \sqrt{C'C^2 + BC^2 + MB^2} = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } C'CN \text{ vuông tại } C \text{ có } C'N = \sqrt{C'C^2 + CN^2} = \frac{\sqrt{5}a}{2}.$$

$$\text{Mà } MN = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Xét tam giác } C'CM \text{ có } \cos \widehat{NMC'} = \frac{MC'^2 + MN^2 - C'N^2}{2MC' \cdot MN} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

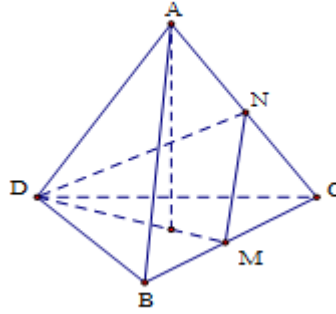
$$\Rightarrow \widehat{NMC'} = 45^\circ \Rightarrow (\widehat{MN}, \widehat{AP}) = 45^\circ.$$



Câu 62.

Gọi N là trung điểm SD khi đó $MN \parallel BD$, suy ra $(\widehat{BD}, \widehat{AM}) = (\widehat{MN}, \widehat{AM}) = \widehat{AMN}$

$$AN = AM = MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \text{ suy ra } \triangle AMN \text{ là tam giác đều, nên } \widehat{AMN} = 60^\circ$$



Câu 63.

Giả sử cạnh của tứ diện đều bằng a .

Gọi N là trung điểm của AC .

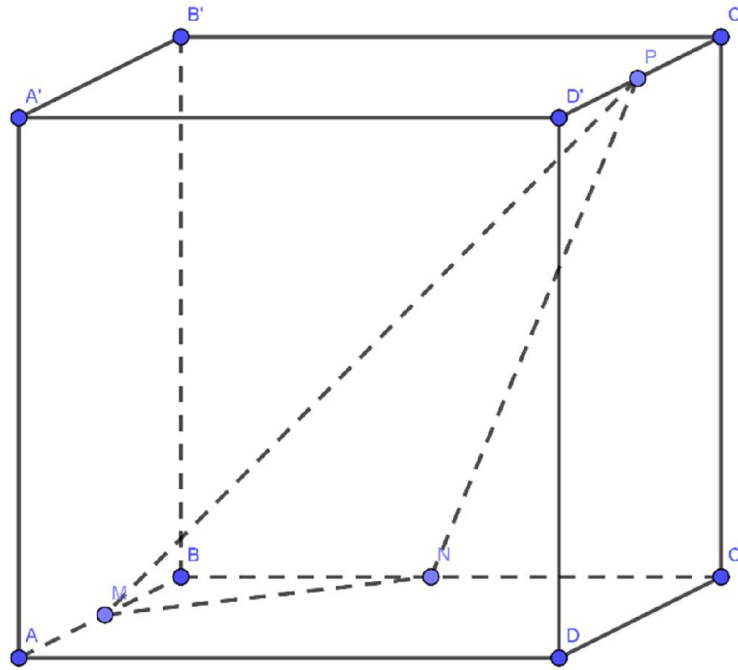
$$\text{Khi đó: } (\widehat{AB, DM}) = (\widehat{MN, DM})$$

$$\text{Ta có: } MN = \frac{a}{2}, DM = DN = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos \widehat{NMD} = \frac{MN^2 + MD^2 - ND^2}{2 \cdot MN \cdot MD} = \frac{\frac{a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Vậy } \cos(\widehat{AB, DM}) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 64. Chọn D



Ta có MN song song AC (Đường trung bình)

$$(MN, AP) = (AC, AP)$$

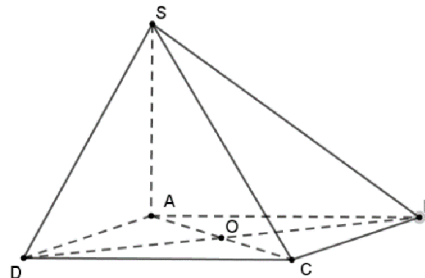
Giả sử hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài các cạnh bằng 1

Xét tam giác APC có:

$$PC = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}; \quad AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}; \quad AP = \sqrt{1^2 + \left(1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Theo định lý hàm cos trong tam giác } APC \text{ ta có: } \cos \widehat{PAC} = \frac{2 + \frac{9}{4} - \frac{5}{4}}{2\sqrt{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{PAC} = 45^\circ.$$

Câu 65. Chọn B



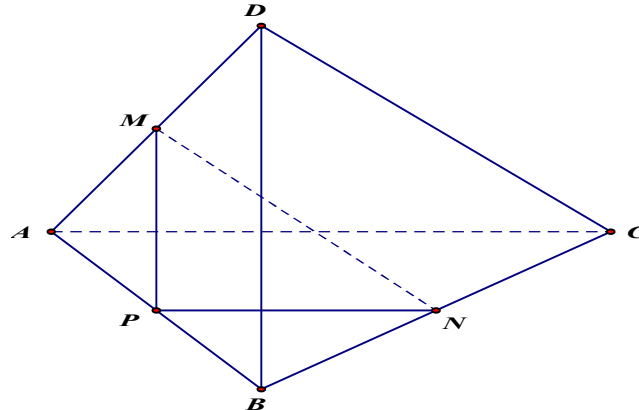
Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AC và SB .

Có $AC = a\sqrt{2}$, $SB = 2a$.

$$\text{Có } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SB} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AS}) = AB^2 = a^2.$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SB}|}{AC \cdot SB} = \frac{a^2}{a\sqrt{2} \cdot 2a} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 66. Chọn A

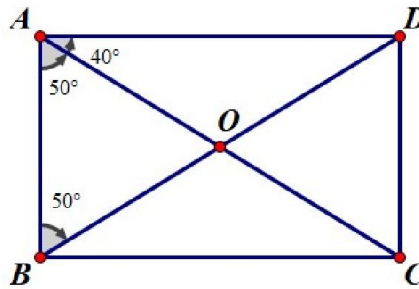


Gọi P là trung điểm AB

$$\text{Ta có } \begin{cases} AC \parallel PN \\ BD \parallel PM \end{cases} \Rightarrow PN \perp PM \text{ và } PN = \frac{AC}{2} = \frac{3a}{2}; PM = \frac{BD}{2} = 2a$$

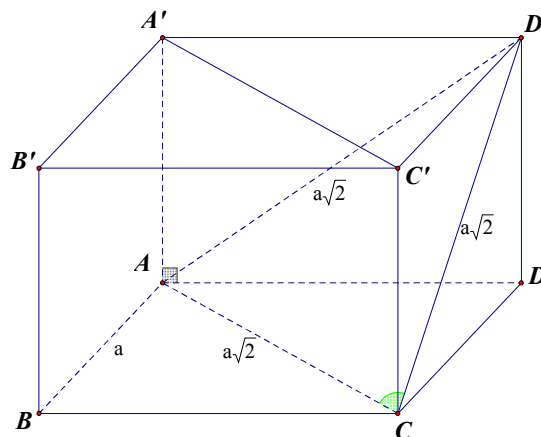
$$MN = \sqrt{PM^2 + PN^2} = \frac{5a}{2}$$

Câu 67. Chọn D



Vì $BD \parallel B'D'$ nên $(\widehat{AC; B'D'}) = (\widehat{AC; BD}) = \widehat{AOB} = 80^\circ$ với O là tâm hình chữ nhật $ABCD$.

Câu 68. Chọn C

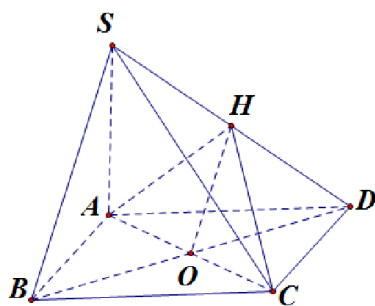


Ta thấy $A'C' \parallel AC \Rightarrow (\widehat{CD', A'C'}) = (\widehat{CD', AC}) = \varphi$

Do các mặt của hình lập phương bằng nhau nên các đường chéo $AC = CD' = AD' = a\sqrt{2}$

Suy ra $\triangle ACD'$ đều nên $(\widehat{CD', A'C'}) = (\widehat{CD', AC}) = \varphi = 60^\circ$.

Câu 69. Chọn C



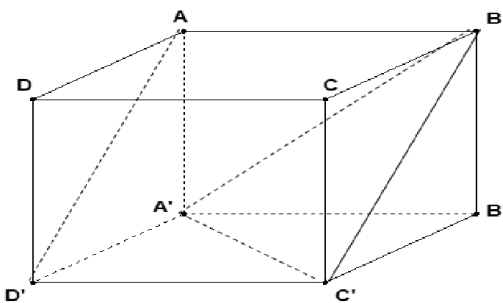
Gọi H là trung điểm của $SD \Rightarrow OH \parallel SB$. Do đó $(SB, AC) = (OH, AC)$.

Tính được $SB = \sqrt{5}a$; $SD = a\sqrt{6}$; $AC = a\sqrt{3}$, suy ra $OH = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $AH = \frac{1}{2}SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$;

$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Do đó } \cos \widehat{AOH} = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{5}{4}a^2 - \frac{3}{2}a^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{\sqrt{15}}{15} \text{ nên } \cos(SB, AC) = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng BA' và $B'D'$ bằng 60° .

Câu 70. Chọn B



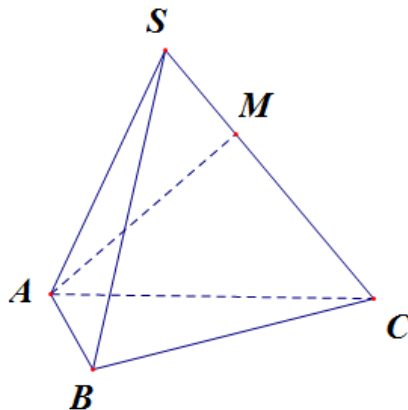
Vì là hình lập phương $\Rightarrow$ 6 mặt đều là hình vuông bằng nhau nên các đường chéo của chúng đều bằng nhau

$$\Rightarrow A'C' = A'B = BC'$$

$$\Rightarrow \Delta A'C'B \text{ đều}$$

$$\text{Ta có: } AD' \parallel BC' \Rightarrow (A'B; AD') = (A'B; BC') = \angle A'BC' = 60^\circ$$

Câu 71. Chọn D



Cách 1

$$\text{Ta có } \cos ASB = \frac{SA^2 + SB^2 - AB^2}{2SA \cdot SB} = \frac{7}{9} = \cos CSB = \cos ASC$$

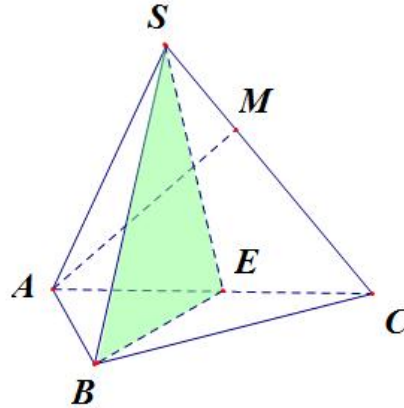
$$AM^2 = SA^2 + SM^2 - 2SA \cdot SM \cdot \cos ASC = 48 \Rightarrow AM = 4\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{SB} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA} \right) \cdot \overrightarrow{SB} = \frac{1}{3} \cdot SC \cdot SB \cdot \cos \widehat{BSC} - SA \cdot SB \cdot \cos \widehat{ASB} = -42a^2 \text{ nên}$$

$$\cos(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{SB}) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{SB}|}{AM \cdot SB} = \frac{42}{4\sqrt{3} \cdot 9} = \frac{14}{3\sqrt{48}}.$$

Cách 2.



Gọi E là trung điểm AC .

$$\text{Ta có } 2\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

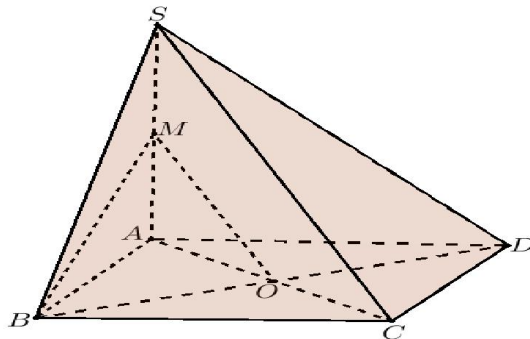
Dễ chứng minh được $AC \perp (SBE)$ nên $AC \perp SB$.

$$\cos ASB = \frac{SA^2 + SB^2 - AB^2}{2SA \cdot SB} = \frac{7}{9}$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{SB} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AS} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \right) \cdot \overrightarrow{SB} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{SB} = \frac{2}{3} AS \cdot SB \cdot \cos(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{SB}) = \frac{2}{3} \cdot 9a \cdot 9a \cdot \left(\frac{-7}{9} \right) = -42a^2.$$

$$\text{Vậy } \cos(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{SB}) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{SB}|}{AM \cdot SB} = \frac{42}{4\sqrt{3} \cdot 9} = \frac{14}{3\sqrt{48}}.$$

Câu 72. Chọn. B.



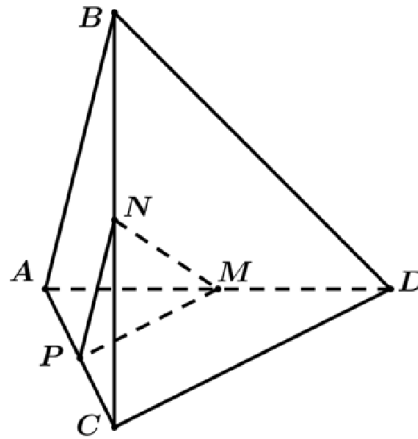
$$\text{Kẻ } OM \parallel SC \Rightarrow (\widehat{SC}, \widehat{BD}) = (\widehat{OM}, \widehat{BD})$$

$$\text{Ta có } ABCD \text{ là hình chữ nhật có } AB = a, BC = a\sqrt{3} \Rightarrow AC = BD = 2a.$$

$$BO = \frac{BD}{2} = a, OM = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, BM = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\cos(\widehat{MOB}) = \frac{OM^2 + BO^2 - BM^2}{2OM \cdot BO} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos(\widehat{SC, BD}) = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 73. Chọn C

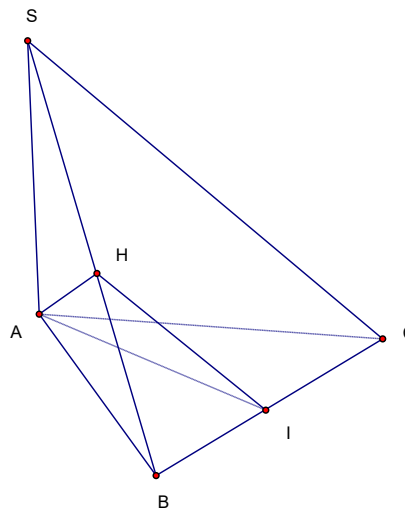


Gọi P là trung điểm AC , ta có $PM \parallel CD$ và $PN \parallel AB$, suy ra $(\widehat{AB, CD}) = (\widehat{PM, PN})$.

Dễ thấy $PM = PN = a$.

$$\text{Xét } \triangle PMN \text{ ta có } \cos \widehat{MPN} = \frac{PM^2 + PN^2 - MN^2}{2PM \cdot PN} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2 \cdot a \cdot a} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{MPN} = 120^\circ \Rightarrow (\widehat{AB, CD}) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$



Câu 74.

Gọi H là trung điểm SB ta có $SC \parallel HI$

Góc giữa đường thẳng AI và SC bằng góc giữa đường thẳng AI và HI

$$AH = \frac{1}{2}SB = \frac{\sqrt{AB^2 + SA^2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$AI = \sqrt{AB^2 + BI^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}a$$

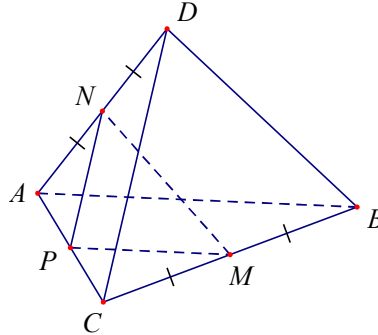
$$HI = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = a$$

$$AI^2 = AH^2 + HI^2 \text{ suy ra tam giác } AHI \text{ vuông tại } H$$

$$\cos \widehat{AIH} = \frac{HI}{AI} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Côsin của góc giữa đường thẳng AI và SC là $\cos \widehat{AIH} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Câu 75. Chọn C



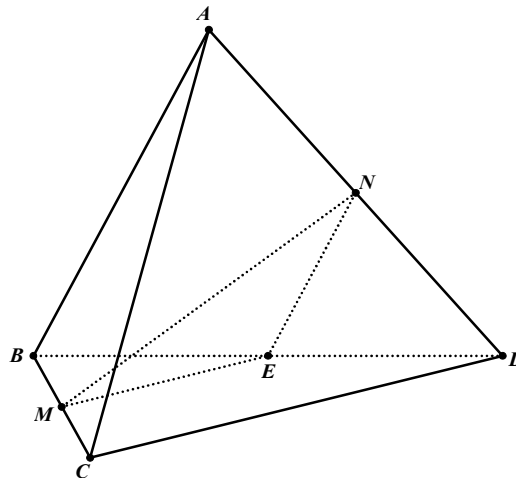
Gọi P là trung điểm của AC , ta có: $MP \parallel AB$, $PN \parallel CD$ và $MP = PN = \frac{a}{2}$.

Do $MP \parallel AB$ và $PN \parallel CD$ nên góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng góc giữa hai đường thẳng MP và PN .

Xét tam giác MPN , có $\cos \widehat{MPN} = \frac{MP^2 + PN^2 - MN^2}{2 \cdot MP \cdot PN} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{MPN} = 120^\circ$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng 60° .

Câu 76. Chọn D



Gọi E lần lượt là trung điểm của BD . Vì $\begin{cases} AB \parallel NE \\ CD \parallel ME \end{cases}$ nên góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng góc giữa hai đường thẳng NE và ME .

Trong tam giác MNE ta có: $\cos \widehat{MEN} = \frac{ME^2 + NE^2 - MN^2}{2 \cdot ME \cdot NE} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a^2}{4}} = -\frac{1}{2}$

Suy ra $\widehat{MEN} = 120^\circ$. Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và CD là 60° .

Câu 77. Chọn D

Đặt $CD = AD = a \Rightarrow AC = \frac{3}{2}a$.

Ta có: $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DC}|}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} - AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{BAD}$

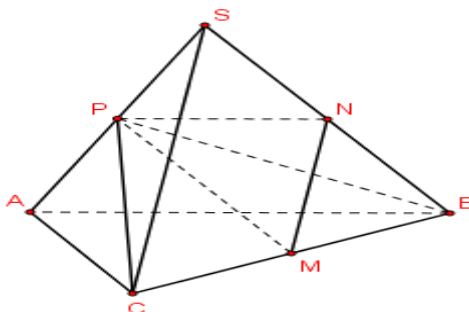
$= AB \cdot \frac{3a}{2} \cdot \cos 60^\circ - AB \cdot a \cdot \cos 60^\circ = AB \cdot \frac{a}{4}$

Nên $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DC}|} = \frac{AB \cdot \frac{a}{4}}{AB \cdot a} = \frac{1}{4}$

Vì $\cos(AB, CD) = |\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC})|$

Vậy $\cos(AB, CD) = \frac{1}{4}$.

Câu 78. Chọn C



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, SB, SA .

Góc giữa AB và SC là góc giữa PN và MN .

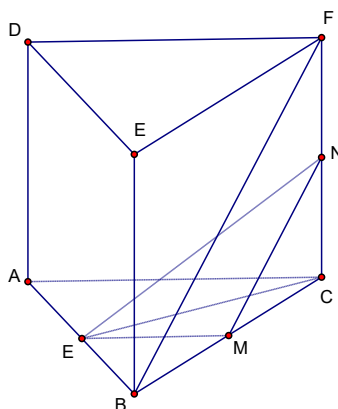
$MN = \frac{a}{2} = NP$

$PC = BP = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow PM = \sqrt{PC^2 - CM^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}$

Suy ra tam giác MNP là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{MNP} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa AB và SC bằng 60° .

Câu 79. Chọn A



Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng BC, CF, AB .

Khi đó: $\begin{cases} MN \parallel BF \\ ME \parallel AC \end{cases} \Rightarrow (AC; BF) = (MN; ME)$.

Tính góc $\widehat{EMN}$.

Xét tam giác MNE , ta có:

$$MN = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 + CF^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

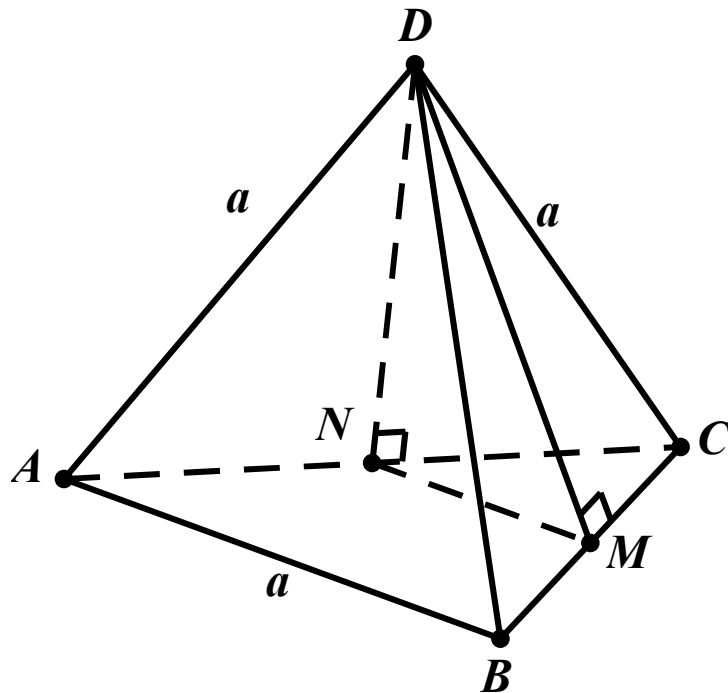
$$ME = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}, \quad EC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$NE = \sqrt{EC^2 + NC^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{Suy ra: } \cos \widehat{EMN} = \frac{ME^2 + MN^2 - EN^2}{2ME \cdot MN} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{5a^2}{4} - \frac{7a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$\text{Vậy } \cos(AC; BF) = |\cos \widehat{EMN}| = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

Câu 80. Chọn B



Gọi N là trung điểm của AC . Khi đó, $AB \parallel MN$ nên $(DM, AB) = (DM, MN)$.

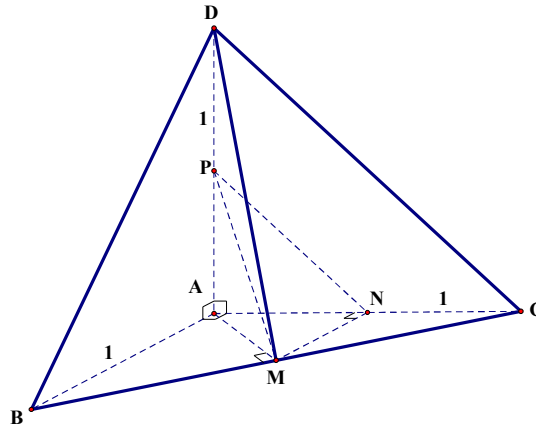
Dễ dàng tính được $DM = DN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $MN = \frac{a}{2}$.

$$\text{Trong tam giác } DMN, \text{ ta có } \cos \widehat{DMN} = \frac{DM^2 + MN^2 - DN^2}{2DM \cdot MN} = \frac{\frac{a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\forall i \cos \widehat{DMN} = \frac{\sqrt{3}}{6} > 0 \text{ nên } \cos(DM, MN) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Vậy } \cos(DM, AB) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 81. Chọn D



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AD .

Trong ΔABC , có $\begin{cases} MN \parallel AB \\ MN = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \end{cases}$ (Tính chất đường trung bình)

Trong ΔACD , có $\begin{cases} NP \parallel CD \\ NP = \frac{1}{2}CD = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ (Tính chất đường trung bình)

Trong ΔAMP , có $MP = \sqrt{AP^2 + AM^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

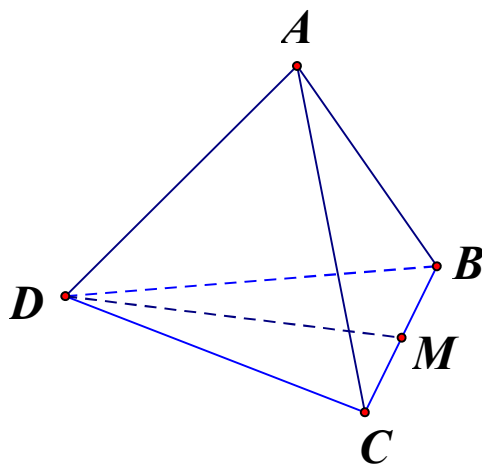
Ta có $\begin{cases} MN \parallel AB \\ NP \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (AB; CD) = (MN; NP) = \widehat{MNP}$

Áp dụng định lý Cosin cho $\triangle MNP$, có

$$\cos \widehat{MNP} = \frac{NP^2 + NM^2 - MP^2}{2NP \cdot NM} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \widehat{MNP} = 90^\circ$$

Hay $(AB; CD) = 90^\circ$.

Câu 82. Chọn A



Giả sử tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a ta có: $DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Ta lại có: } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DM}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DM}|} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM}}{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a \cdot a \cdot \cos 60^\circ + a \cdot a \cdot \cos 120^\circ}{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Vậy } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DM}) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

DẠNG 3. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Câu 83. Chọn B

Trong không gian, có vô số đường thẳng qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước. Vì vậy chọn đáp án B

Câu 84. Chọn D

Suy ra từ tính chất 1 theo SGK hình học 11 trang 100.

Câu 85. Sử dụng định lí $\begin{cases} a \perp b \\ b \parallel c \end{cases} \Rightarrow a \perp c.$

Câu 86. Chọn D

Theo kiến thức SGK có bốn vị trí tương đối của hai đường thẳng mà nếu hai đường thẳng trùng nhau hoặc song song thì chúng không vuông góc với nhau do đó nếu $a \perp b$ thì a và b cắt nhau hoặc chéo nhau.

Câu 87. Chọn D

Qua một điểm O cho trước có vô số đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước. Các đường thẳng này cùng nằm trên mặt phẳng qua O và vuông góc với đường thẳng ấy.

Vậy D sai.

Câu 88.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì có thể song song hoặc chéo nhau.

Đáp án C chỉ đúng trong mặt phẳng.

Câu 89. Chọn B

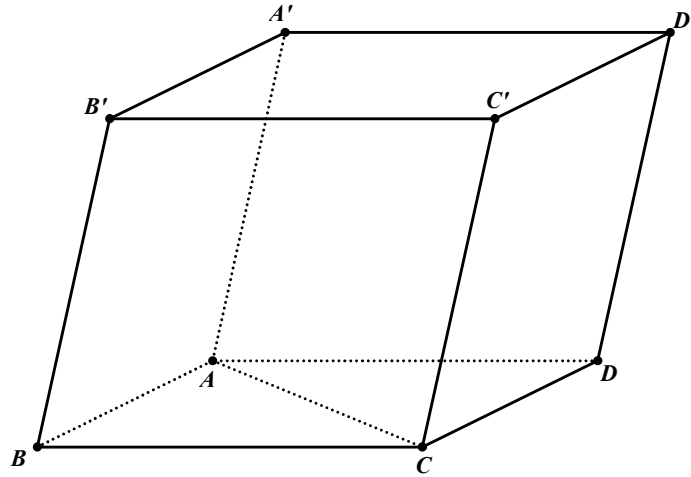
Đáp án A sai do hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

Ví dụ: Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ ta có $\begin{cases} AA' \perp AB \\ AD \perp AB \end{cases}$. Dễ thấy AA' và AD cắt nhau.

Đáp án C sai do hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng có thể trùng nhau.

Đáp án D sai do trong không gian hai đường thẳng không có điểm chung thì có thể chéo nhau.

Câu 90. **Chọn A**



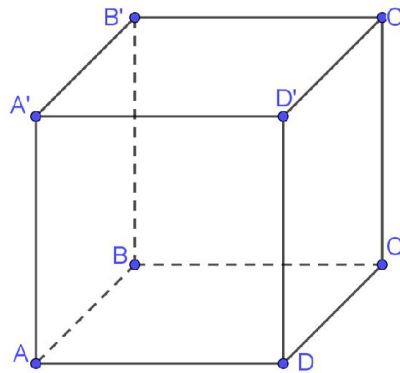
Vì hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau nên các tứ giác $ABCD$, $A'B'BA$, $B'C'CB$ đều là hình thoi nên ta có

$AC \perp BD$ mà $AC \parallel A'C' \Rightarrow A'C' \perp BD$ (B đúng).

$A'B \perp AB'$ mà $AB' \parallel DC' \Rightarrow A'B \perp DC'$ (C đúng).

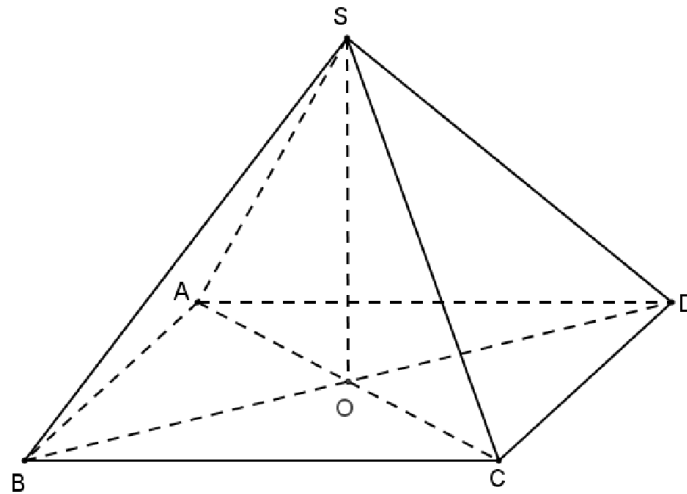
$BC' \perp B'C$ mà $B'C \parallel A'D \Rightarrow BC' \perp A'D$ (D đúng).

Câu 91. **Chọn A**



Ta có: $A'D \parallel B'C$, $B'C \perp BC' \Rightarrow A'D \perp BC'$

Câu 92. **Chọn D**



Ta có tam giác SAC cân tại S và SO là đường trung tuyến cũng đồng thời là đường cao.
Do đó $SO \perp AC$.

Trong tam giác vuông SOA thì AC và SA không thể vuông tại A .