

CHỦ ĐỀ 14: VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI, GÓC, KHOẢNG CÁCH

VẤN ĐỀ 1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

1) Vị trí tương đối của 2 mặt phẳng

Cho 2 mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$

Ta có:

$$(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

$$(P) // (Q) \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$

$$(P) \text{ cắt } (Q) \Leftrightarrow A:B:C \neq A':B':C'$$

Đặc biệt: $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_{(P)}} \cdot \overrightarrow{n_{(Q)}} = 0 \Leftrightarrow A.A' + B.B' + C.C' = 0$

Nếu $(P) // (Q)$ thì vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(P)}}$ của mặt phẳng (P) cùng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) .

Ngược lại vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(Q)}}$ của mặt phẳng (Q) cùng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

Nếu $(P) \perp (Q)$ thì $\overrightarrow{n_{(P)}} \perp \overrightarrow{n_{(Q)}}$.

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x - y + z - 2 = 0$ song song với mặt phẳng $(Q): 2x - (m^2 + 1)y + (3m^2 - 1)z - 4m = 0$ khi:

A. $m = 1$.

B. $m = -1$.

C. $\begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$.

D. Đáp án khác.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Ta có: $(P) // (Q) \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{m^2 + 1}{1} + \frac{3m^2 - 1}{1} \neq \frac{-4m}{-1} \Leftrightarrow m = -1$.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x - 2y + z + 1 = 0$ trùng với mặt phẳng $(Q): (2m^2 - 1)x - (m^2 + 1)y + (2 - m)z + 3m - 2 = 0$ khi:

A. $m = -1$.

B. $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. Đáp án khác.

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Ta có: $(P) \equiv (Q) \Rightarrow \frac{2m^2 - 1}{1} = \frac{m^2 + 1}{2} + \frac{2 - m}{1} = \frac{3m - 2}{1} \Leftrightarrow m = 1$.

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): m^2x - y + (m^2 - 2)z + 2 = 0$ và $(Q): 2x + m^2y - 2z + 1 = 0$. Với m là tham số, $m \in \mathbb{R}$. Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) khi m thỏa mãn

A. $|m| = \sqrt{2}$.

B. $|m| = 1$.

C. $|m| = 2$.

D. $|m| = \sqrt{3}$.

Lời giải**Đáp án: Chọn C**

Các vecto pháp tuyến của hai mặt phẳng lần lượt là: $\vec{n}_1(m^2; -1; m^2 - 2), \vec{n}_2(2; m^2; -2)$

$$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - m^2 - 2(m^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow |m| = 2$$

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x + ay + 3z - 5 = 0$ và $(Q): 4x - y - (a + 4)z + 1 = 0$. Tìm a để (P) và (Q) vuông góc với nhau.

A. $a = 0$.

B. $a = 1$.

C. $a = \frac{1}{3}$.

D. $a = -1$.

Lời giải**Đáp án: Chọn D**

Ta có $\vec{n}_P = (2; a; 3)$ và $\vec{n}_Q = (4; -1; -(a + 4))$ khi đó

$$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 8 - a - 3(a + 4) = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 1 = 0$ và $(\beta): -2x + my + 2z - 2 = 0$. Tìm m để (α) song song với (β)

A. $m = 2$.

B. $m = 5$.

C. Không tồn tại.

D. $m = -2$.

Lời giải**Đáp án: Chọn C**

Hai mặt phẳng đã cho song song nên $\frac{-2}{1} = \frac{m}{1} = \frac{2}{-1} \neq \frac{-2}{1}$ do không tồn tại giá trị của tham số m

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 3x + 3y - z + 1 = 0$ và hai mặt phẳng $(Q): (m - 1)x + y - (m - 2)z + 5 = 0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hai mặt phẳng $(P), (Q)$ vuông góc với nhau.

A. $m = \frac{1}{2}$.

B. $m = -\frac{1}{2}$.

C. $m = 2$.

D. $m = -\frac{3}{2}$.

Lời giải**Đáp án: Chọn B**

$$\text{Để } mp(P) \perp mp(Q) \Leftrightarrow \vec{n}_{(P)} \cdot \vec{n}_{(Q)} = 0 \Leftrightarrow 3(m - 1) + 3 + m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

2) Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d có phương trình chính tắc $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$, phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \quad (a^2 + b^2 + c^2 > 0) \text{ với } M(x_o; y_o; z_o) \in d \text{ và mặt phẳng } (P) \text{ có phương trình} \\ z = z_o + ct \end{cases}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 > 0).$$

Khi $\vec{u_d} \cdot \vec{n_p} = 0$ thì $d \parallel (P)$ hoặc d nằm trên (P) ta có:

$$\bullet \quad d \subset (P) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u_d} \cdot \vec{n_{(P)}} = 0 \\ M(x_o; y_o; z_o) \in (P) \end{cases}$$

$$\bullet \quad d \parallel (P) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u_d} \cdot \vec{n_{(P)}} = 0 \\ M(x_o; y_o; z_o) \notin (P) \end{cases}$$

$\bullet \quad D \text{ cắt } (P) \Leftrightarrow \vec{u_d} \cdot \vec{n_{(P)}} \neq 0$ và tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \\ z = z_o + ct \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ phương trình trên ta được } t = -\frac{Ax_o + By_o + Cz_o + D}{a.A + b.B + c.C}$$

$$\bullet \quad d \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u_d} \parallel \vec{n_{(P)}} \Leftrightarrow \vec{u_d} = k \cdot \vec{n_{(P)}} \quad (k \neq 0)$$

Chú ý:

- Nếu $d \parallel (P)$ hoặc $d \subset (P)$ khi và chỉ khi $\vec{u_d} \perp \vec{u_{(P)}}$

- Nếu $d \perp (P)$ thì vectơ chỉ phương $\vec{u_d}$ của d là vectơ pháp tuyến của (P) . Ngược lại, vectơ pháp tuyến của (P) là vectơ chỉ phương của d .

Ví dụ 1: Xét vị trí tương đối của đường thẳng d và mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:

$$\text{a) } d: \frac{x-8}{4} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{1} \text{ và } (P): 3x + 5y - z - 2 = 0$$

$$\text{b) } d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3} \text{ và } (P): 3x - 3y + 2z - 5 = 0$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \vec{u_d} = (4; 3; 1); \vec{n_{(P)}} = (3; 5; -1) \Rightarrow \vec{u_d} \cdot \vec{n_{(P)}} = 26 \neq 0 \text{ nên } d \text{ cắt } (P)$$

$$\text{b) Ta có: } \vec{u_d} = (2; 4; 3); \vec{n_{(P)}} = (3; -3; 2) \Rightarrow \vec{u_d} \cdot \vec{n_{(P)}} = 0 \Rightarrow d \text{ song song hoặc nằm trên mặt phẳng } (P)$$

$$\text{Xét điểm } M(-1; 3; 0) \in d \text{ và } 3 \cdot (-1) - 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 - 5 = -17 \neq 0 \Rightarrow M \notin (P)$$

Ví dụ 2: Xét vị trí tương đối của đường thẳng d và mặt phẳng (P) trong các trường hợp sau:

a) $d: \frac{x-9}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$ và $(P): x+2y-4z+1=0$

b) $d: \frac{x-7}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{4}$ và $(P): 3x-y+2z-5=0$

Lời giải

a) Ta có: $\vec{u}_d = (8; 2; 3); \vec{n}_{(P)} = (1; 2; -4) \Rightarrow \vec{u}_d \cdot \vec{n}_{(P)} = 0$ nên song song hoặc nằm trên mặt phẳng (P)

Xét điểm $M(9; 1; 3) \in d$ và $M(9; 1; 3) \in (P) \Rightarrow d \subset (P)$

b) Ta có: $\vec{u}_d = (5; 1; 4); \vec{n}_{(P)} = (3; -1; 2) \Rightarrow \vec{u}_d \cdot \vec{n}_{(P)} = 22 \neq 0$ nên d cắt (P) .

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+15=0$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. $d \parallel (P)$. B. $d \cap (P) = \{I(1; -1; 0)\}$. C. $d \perp (P)$. D. $d \subset (P)$.

Lời giải

Đáp án: Chọn A

Vecto chỉ phương của d là $\vec{u} = (1; 2; -2)$, VTPT của (P) là $\vec{n} = (2; -1; 0)$

Ta có: $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow d \parallel (P)$ hoặc $d \subset (P)$. Mà $A(1; -1; 0) \in d$ nhưng $A \notin (P) \Rightarrow d \parallel (P)$.

Ví dụ 4: Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-10}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để cho mặt phẳng $(P): 10x+2y+mz+11=0$ vuông góc với đường thẳng Δ .

- A. $m = -2$. B. $m = 2$. C. $m = -52$. D. $m = 52$.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

$$\text{Để } \Delta \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u}_{\Delta} \parallel \vec{n}_{(P)} \Leftrightarrow \vec{u}_{\Delta} = k \cdot \vec{n}_{(P)} \Leftrightarrow \frac{10}{5} = \frac{2}{1} = \frac{m}{1} \Leftrightarrow m = 2.$$

Ví dụ 5: Cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x-3y+2z+6=0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. d cắt và không vuông góc với (P) . B. d vuông góc với (P) .
C. d song song với (P) . D. d nằm trong (P) .

Lời giải

Đáp án: Chọn A

Ta có $\vec{u}_d \cdot \vec{n}_{(P)} = 3+9-2 \neq 0$ mà $\vec{u}_d \neq k \cdot \vec{n}_{(P)} \Rightarrow d$ cắt và không vuông góc với (P) .

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-3y+z-1=0$ và đường thẳng

$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. d cắt và không vuông góc với (P) .

B. d song song với (P) .

C. d vuông góc với (P) .

D. d nằm trên (P) .

Lời giải

Đáp án: Chọn D

Ta có $\vec{n}_P = (2; -3; 1); \vec{u}_d = (2; 1; -1)$

Để ý rằng $\vec{n}_P \cdot \vec{u}_d = 4 - 3 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} d // (P) \\ d \subset (P) \end{cases}$

Hơn nữa d qua $A(1; 0; -1)$ mà $A \in (P) \Rightarrow d \subset (P)$.

Ví dụ 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng

$d: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-m}{-1}$ song song với mặt phẳng $(P): 4x + 4y + m^2z - 8 = 0$

A. $m = \pm 2$.

B. $m = 2$.

C. $m = -2$.

D. Không tồn tại m .

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Do $d // (P) \Rightarrow \vec{u}_d \cdot \vec{n}_P = 8 - 4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$

Xét điểm $A(0; 0; m) \in d$. Cho $A \in (P) \Rightarrow m^3 = 8 \Leftrightarrow m = 2$ do đó $m = 2$ thì d nằm trong (P) . Vậy $m = -2$ thì $d // (P)$.

3) Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho 2 đường thẳng d_1 (đi qua điểm M_1 và có vecto chỉ phương $\vec{u}_1$) và đường thẳng d_2 (đi qua điểm M_2 và có vecto chỉ phương $\vec{u}_2$). Khi đó:

- $d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} M_1 \in d_2 \\ \vec{u}_1 // \vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 = k \cdot \vec{u}_2 \end{cases}$
- $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} M_1 \notin d_2 \\ \vec{u}_1 // \vec{u}_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 = k \cdot \vec{u}_2 \end{cases}$
- $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$.
- d_1 và d_2 cắt nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{u}_1; \vec{u}_2] \neq 0 \\ [\vec{u}_1; \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0 \end{cases}$
- d_1 và d_2 chéo nhau $\Leftrightarrow [\vec{u}_1; \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$

Chú ý: Khi giải bài tập, nếu biết phương trình của 2 đường thẳng d_1 và d_2 ta có thể xét vị trí tương đối của chúng bằng cách giải hệ phương trình để tìm giao điểm.

- Nếu hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì d_1 và d_2 cắt nhau.
- Nếu hệ phương trình có vô số nghiệm thì $d_1 // d_2$ hoặc d_1 và d_2 chéo nhau, lúc đó cần xét thêm vecto chỉ phương của chúng (hai đường thẳng chéo nhau khi 2 vecto chỉ phương của chúng không cùng phương).
- Nếu $d_1 // d_2$ hoặc $d_1 \equiv d_2$ thì vecto chỉ phương $\vec{u}_1$ của đường thẳng d_1 cũng là vecto chỉ phương của đường thẳng d_2 và ngược lại vecto chỉ phương của $\vec{u}_2$ của đường thẳng d_2 cũng là vecto chỉ phương của đường thẳng d_1 .

Ví dụ 1: Xác định vị trí tương đối của các cặp đường thẳng d_1 và d_2 dưới đây:

a) $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}, d_2: \frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$

b) $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1}, d_2: \frac{x}{-2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z-4}{1}$

c) $d_1: \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-6} = \frac{z+1}{-6}, d_2: \frac{x-7}{-6} = \frac{y-2}{-9} = \frac{z}{12}$

Lời giải

a) Ta có: $\vec{u}_1 = (2; 1; 4); \vec{u}_2 = (3; -2; 1)$ và $\vec{u}_1 \neq k\vec{u}_2 \Rightarrow d_1; d_2$ cắt nhau hoặc chéo nhau.

d_1 đi qua điểm $M_1(1; 7; 3); d_2$ đi qua điểm $M_2(6; -1; -2) \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = (5; -8; -5)$

Xét $[\vec{u}_1; \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0 \Rightarrow d_1; d_2$ cắt nhau.

b) Đường thẳng d_1 qua $M_1(1; 2; 0)$ và có VTCP $\vec{u}_1 = (2; -2; 1)$

Đường thẳng d_2 qua $M_2(0; -8; 4)$ và có VTCP $\vec{u}_2 = (-2; 3; 1)$

Ta có: $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1; -10; 4)$ và $[\vec{u}_1; \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = (-5; -4; 2) \cdot (-1; -10; 4) \neq 0 \Rightarrow d_1; d_2$ chéo nhau.

c) Ta có: $\vec{u}_1 = -\frac{2}{3}\vec{u}_2$ và điểm $\overrightarrow{M_1}(2; 0; -1) \in d_1$ và $M_1(2; 0; -1) \notin d_2$ nên $d_1 // d_2$

Ví dụ 2: Xác định vị trí tương đối của các cặp đường thẳng d_1 và d_2 dưới đây:

a) $d_1: \frac{x-1}{9} = \frac{y-6}{6} = \frac{z-3}{3}; d_2: \frac{x-7}{6} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{2}$

b) $d_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -2t \end{cases}; d_2: \begin{cases} x = 3 + 2u \\ y = 6 + 4u \\ z = -4 - 4u \end{cases}$

Lời giải

a) Ta có: $\vec{u}_1 = \frac{3}{2}\vec{u}_2$ và điểm $M_1(1;6;3) \in d_1$ và $M_1(1;6;3) \notin d_2$ nên $d_1 \not\parallel d_2$

b) Ta có: $\vec{u}_1 = (1;2;-2); \vec{u}_2 = (2;4;-4) \Rightarrow \vec{u}_2 = 2\vec{u}_1$

Mặt khác điểm $M_1(1;2;0) \in d_1$ và $M_1(1;2;0) \in d_2$ nên d_1 trùng d_2

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+4}{3}$ và

$d_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 + 6t \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. d_1 và d_2 cắt nhau.

B. d_1 và d_2 trùng nhau.

C. d_1 và d_2 chéo nhau.

D. d_1 và d_2 song song với nhau.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Ta có: $(2;4;6) = 2(1;2;3) \Rightarrow \vec{u}_1 = 2\vec{u}_2 \Rightarrow d_1$ và d_2 song song hoặc trùng nhau.

Mà điểm $A(0;1;2) \in d_2$, thay đổi tọa độ điểm A vào d_1 thì $A \in d_1$ nên $d_1 \equiv d_2$

VẤN ĐỀ 2: BÀI TOÁN VỀ GÓC

1) Góc giữa 2 mặt phẳng .

Gọi φ là góc giữa 2 mặt phẳng (P) và (Q) ta có:

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{n}_{(P)}; \vec{n}_{(Q)}) \right| = \frac{|A.A' + B.B' + C.C'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \quad (0^\circ \leq \varphi, 90^\circ)$$

2) Góc giữa 2 đường thẳng

Cho 2 đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và đường thẳng d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$. Góc φ giữa hai đường thẳng đó được tính theo công thức

$$\cos \varphi = \left| \cos(\vec{u}_1; \vec{u}_2) \right| = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \quad (0^\circ \leq \varphi, 90^\circ)$$

3) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(A; B; C)$. Gọi φ là góc giữa d và (P) thì φ được tính theo công thức

$$\sin \varphi = \left| \cos(\vec{u}; \vec{n}) \right| = \frac{|A.a + B.b + C.c|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (0^\circ \leq \varphi, 90^\circ)$$

Ví dụ 1: Cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 5 = 0$ và $(Q): x - y + 1 = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là:

A. 30° .**B. 45° .****C. 60° .****D. 135° .****Lời giải****Đáp án: Chọn B**Ta có: $\vec{n}_{(P)} = \vec{n}_1 = (2; -1; -2); \vec{n}_{(Q)} = \vec{n}_2 = (1; -1; 0)$ Khi đó: $\cos((P); (Q)) = \left| \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2) \right| = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0|}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{1+1+0}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{(P); (Q)} = 45^\circ$ **Ví dụ 2:** Cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ và $(Q): x + 2y - z + 3 = 0$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) khi đó $\cos \alpha$ bằng**A. $-\frac{\sqrt{6}}{9}$.****B. $\frac{-2\sqrt{5}}{15}$.****C. $\frac{2\sqrt{5}}{15}$.****D. $\frac{\sqrt{6}}{9}$.****Lời giải****Đáp án: Chọn D**Ta có $\vec{n}_{(P)} = \vec{n}_1 = (2; -1; 2); \vec{n}_{(Q)} = \vec{n}_2 = (1; 2; -1)$ Khi đó: $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2) \right| = \frac{|2 - 2 - 2|}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{1+4+1}} = \frac{2}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{9}$.**Ví dụ 3:** Cho hai mặt phẳng $(P): mx + 2y + mz - 12 = 0$ và $(Q): x + my + z + 3 = 0$. Có bao nhiêu giá trị của m sao cho góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 45° **A. 0.****B. 2.****C. 3.****D. 4.****Lời giải****Đáp án: Chọn D**Ta có: $\vec{n}_{(P)} = \vec{n}_1 = (m; 2; m); \vec{n}_{(Q)} = \vec{n}_2 = (1; m; 1)$ Khi đó: $\cos 45^\circ = \left| \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2) \right| = \frac{|m + 2m + m|}{\sqrt{2m^2 + 4} \cdot \sqrt{m^2 + 2}} = \frac{4|m|}{\sqrt{2}(m^2 + 2)}$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4|m|}{\sqrt{2}(m^2 + 2)} \Leftrightarrow m^2 + 2 = 4|m| \xrightarrow{t=|m|>0} t^2 - 4t + 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{2} \Rightarrow m = \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2}$$
Suy ra có 4 giá trị của m .**Ví dụ 4:** Cho hai mặt phẳng $(P): 4x + my + mz + 1 = 0$ và $(Q): x - y - 3 = 0$. Có bao nhiêu giá trị của m sao cho góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 60° **A. 0.****B. 1.****C. 2.****D. 3.****Lời giải****Đáp án: Chọn B**Ta có $\vec{n}_{(P)} = \vec{n}_1 = (4; m; m); \vec{n}_{(Q)} = \vec{n}_2 = (1; -1; 0)$

$$\text{Khi đó: } \cos 60^\circ = \left| \cos(\vec{n}_1; \vec{n}_2) \right| = \frac{|4-m|}{\sqrt{2m^2+16} \cdot \sqrt{2}} = \frac{|4-m|}{2\sqrt{m^2+8}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|4-m|}{2\sqrt{m^2+8}} \Leftrightarrow m^2+8 = (4-m)^2 \Leftrightarrow 8 = 16-8m \Leftrightarrow m=1$$

Ví dụ 5: Cho 2 đường thẳng $d_1: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{3}$ và $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+2}{-3}$. Góc giữa d_1 và d_2 là:

- A. 0° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Đáp án: Chọn A

$$\vec{u}_1 = (-1; 4; 3); \vec{u}_2 = (1; -4; -3) \Rightarrow \cos(d_1; d_2) = \left| \cos(\vec{u}_1; \vec{u}_2) \right| = \frac{|-26|}{\sqrt{1+16+9} \cdot \sqrt{1+16+9}} = 1.$$

Do đó $(\widehat{d_1; d_2}) = 0^\circ$.

Ví dụ 6: Cho 2 đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=5-2t \\ z=14-3t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=1-4t \\ y=2+t \\ z=-1+5t \end{cases}$. Góc giữa d_1 và d_2 là:

- A. 0° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Đáp án: Chọn A

$$\vec{u}_1 = (1; -2; 3); \vec{u}_2 = (-4; 1; 5) \Rightarrow \cos(d_1; d_2) = \left| \cos(\vec{u}_1; \vec{u}_2) \right| = \frac{|-4-2-15|}{\sqrt{1+4+9} \cdot \sqrt{16+1+25}} = \frac{21}{14\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $(\widehat{d_1; d_2}) = 30^\circ$.

Ví dụ 7: Cho 4 điểm $A(1; 0; 0); B(0; 1; 0); C(0; 0; 1)$ và $D(-2; 1; -1)$. Góc giữa 2 đường thẳng AB và CD là:

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Đáp án: Chọn A

Ta có: $\vec{u}_{AB} = \vec{u}_1 = (-1; 1; 0); \vec{u}_{CD} = \vec{u}_2 = (-2; 1; -2)$

$$\text{Khi đó: } \cos(\widehat{AB; CD}) = \left| \cos(\vec{u}_1; \vec{u}_2) \right| = \frac{|2+1|}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\widehat{AB; CD}) = 45^\circ.$$

Ví dụ 8: Cho 2 đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$ và $d_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{1}$. Cosin góc giữa d_1 và d_2 là:

- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{1}{\sqrt{6}}$. D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn C

$$\text{Ta có: } \vec{u}_1 = (2; 2; -1); \vec{u}_2 = (1; -2; 1) \Rightarrow \cos(d_1; d_2) = \left| \cos(\vec{u}_1; \vec{u}_2) \right| = \frac{|2-4-1|}{3\sqrt{6}} = \frac{3}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Suy ra } (\widehat{d_1; d_2}) = 30^\circ.$$

Ví dụ 9: Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t\sqrt{2} \\ z = 2 + t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t\sqrt{2} \\ z = 2 + mt \end{cases}$. Tìm giá trị của m sao cho góc giữa hai

đường thẳng d_1 và d_2 bằng 60° .

A. $m = 1$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 1$ và $m = -1$. **D.** $m = 0$.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

$$\text{Ta có: } \vec{u}_1 = (1; -\sqrt{2}; 1); \vec{u}_2 = (1; \sqrt{2}; m) \Rightarrow \cos(d_1; d_2) = \left| \cos(\vec{u}_1; \vec{u}_2) \right| = \frac{|1-2+m|}{2\sqrt{m^2+3}} = \frac{|m-1|}{2\sqrt{m^2+3}}$$

$$\text{Do } (\widehat{d_1; d_2}) = 60^\circ \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{|m-1|}{2\sqrt{m^2+3}} \Leftrightarrow \frac{|m-1|}{2\sqrt{m^2+3}} = \frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow |m-1| = \sqrt{m^2+3} \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = m^2 + 3 \Leftrightarrow m = -1.$$

Ví dụ 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x - y + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng

$$\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}. \text{ Góc giữa đường thẳng } \Delta \text{ và mặt phẳng } (\alpha) \text{ bằng}$$

A. 150° . **B.** 60° . **C.** 30° . **D.** 120° .

Lời giải

Đáp án: Chọn C

$$\text{Ta có } \vec{n}_\alpha = (1; -1; 2); \vec{u}_\Delta = (1; 2; -1) \Rightarrow \sin(\widehat{(\alpha); \Delta}) = \left| \cos(\vec{n}_\alpha; \vec{u}_\Delta) \right| = \frac{|1-2-2|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\widehat{(\alpha); \Delta}) = 30^\circ.$$

Ví dụ 11: Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 6 + 5t \\ y = 2 + t \\ z = 1 \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 1 = 0$. Góc hợp giữa đường thẳng d

và mặt phẳng (P) là:

A. 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Lời giải

Đáp án: Chọn B

$$\text{Ta có } \vec{n}_{(P)} = (3; -2; 0); \vec{u}_d = (5; 1; 0) \Rightarrow \sin(\widehat{(P); d}) = \left| \cos(\vec{n}_{(P)}; \vec{u}_d) \right| = \frac{|15-2|}{\sqrt{13}\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\widehat{(P); d}) = 45^\circ.$$

Ví dụ 12: Cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 5z + 8 = 0$. Góc hợp giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là:

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Ta có $\vec{n}_{(P)} = (3; 4; 5); \vec{u}_d = (2; 1; 1) \Rightarrow \sin(\widehat{(P); \Delta}) = \left| \cos(\widehat{\vec{n}_{(P)}; \vec{u}_d}) \right| = \frac{|6+4+5|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{50}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{(P); \Delta} = 60^\circ$.

Ví dụ 13: Cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 5z + 3 = 0$. Gọi α là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) khi đó $\sin \alpha$ bằng

- A. $\frac{13}{2\sqrt{57}}$. B. $\frac{13}{\sqrt{57}}$. C. $\frac{13}{\sqrt{75}}$. D. $\frac{13}{2\sqrt{75}}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn A

Ta có $\vec{n}_{(P)} = (3; -2; 5); \vec{u}_d = (2; -1; 1) \Rightarrow \sin(\widehat{(P); \Delta}) = \left| \cos(\widehat{\vec{n}_{(P)}; \vec{u}_d}) \right| = \frac{|6+2+5|}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{6}} = \frac{13}{2\sqrt{57}}$.

Ví dụ 14: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-2}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 5 = 0$. Góc giữa d và (P) là:

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 150° .

Lời giải

Đáp án: Chọn A

Ta có $\vec{n}_{(P)} = (2; 1; -1); \vec{u}_d = (1; -1; -2) \Rightarrow \sin(\widehat{(P); \Delta}) = \left| \cos(\widehat{\vec{n}_{(P)}; \vec{u}_d}) \right| = \frac{|2-1+2|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$.

Suy ra $\widehat{(P); \Delta} = 30^\circ$.

Ví dụ 15: Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{5}$ và mặt phẳng $(P): 2x + my + mz - 1 = 0$. Gọi α là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Gọi S là tập hợp các giá trị của m sao cho $\alpha = 60^\circ$. Tổng các phần tử của tập hợp S là:

- A. 0. B. -19. C. -18. D. -20.

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Ta có $\vec{n}_{(P)} = (2; m; m); \vec{u}_d = (3; 4; 5) \Rightarrow \sin(\widehat{(P); \Delta}) = \left| \cos(\widehat{\vec{n}_{(P)}; \vec{u}_d}) \right| = \frac{|6+4m+5m|}{\sqrt{4+2m^2} \cdot \sqrt{50}}$

$$\Leftrightarrow \sin 60^\circ = \frac{|9m+6|}{10\sqrt{m^2+2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|9m+6|}{10\sqrt{m^2+2}} \Leftrightarrow 3.25(m^2+2) = 9(3m+2)^2$$

$$\Leftrightarrow 3(9m^2+12m+4) = 25m^2+50 \Leftrightarrow 2m^2+36m-38=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-19 \end{cases}$$

VẤN ĐỀ 3: BÀI TOÁN VỀ KHOẢNG CÁCH

1) Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Cho mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_o(x_o; y_o; z_o)$ khi đó khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) được tính theo công thức:

$$d(M; (P)) = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

2) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Cho mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$

Mặt phẳng $(Q) // (P)$ và có phương trình $(Q): Ax + By + Cz + E = 0$

Khoảng cách giữa 2 mặt phẳng (P) và (Q) bằng khoảng cách từ điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (P) đến mặt phẳng (Q) . Ta thấy điểm $H\left(0; 0; \frac{-D}{C}\right) \in (P)$ suy ra:

$$d((P); (Q)) = d(H; (Q)) = \frac{\left|C \cdot \frac{-D}{C} + E\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D - E|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

3) Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng

Công thức khoảng cách từ điểm M_1 đến đường thẳng Δ (đi qua điểm M_o và có vecto chỉ phương $\vec{u}$) là

$$d(M_1; \Delta) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{M_1 M_o}; \vec{u} \right] \right|}{|\vec{u}|}$$

Ngoài ra ta còn có thể tìm hình chiếu của điểm M_1 trên đường thẳng Δ và khi đó $d(M_1; \Delta) = M_1 H$.

4) Khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau

Công thức khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau d_1 (đi qua điểm M_1 và có vecto chỉ phương $\vec{u}_1$) và đường thẳng d_2 (đi qua điểm M_2 và có vecto chỉ phương $\vec{u}_2$) là:

$$d(d_1; d_2) = \frac{\left| \left[\vec{u}_1; \vec{u}_2 \right] \overrightarrow{M_1 M_2} \right|}{\left| \left[\vec{u}_1; \vec{u}_2 \right] \right|}$$

Ngoài cách làm trên ta có thể tính $d(d_1; d_2)$ như sau:

Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_2 và song song với d_1 . Khi đó (P) xác định, đi qua điểm M_2 và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_1; \vec{u}_2]$. Khi đó $d(d_1; d_2) = d(d_1; (P)) = d(M_1; (P))$.

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;0;0), B(0;-1;0), C(0;0;3)$. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) bằng

- A. $\frac{7}{6}$. B. $\frac{36}{49}$. C. $\frac{49}{36}$. D. $\frac{6}{7}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn D

Ta có: $(ABC): \frac{x}{2} - \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1$ hay $(ABC): 2x - 6y + 2z - 6 = 0$

Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (ABC) là: $d = \frac{|3 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2}} = \frac{6}{7}$

Ví dụ 2: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 6x - 3y + 2z - 6 = 0$. Tính khoảng cách từ d từ điểm $M(1; -2; 3)$ đến mặt phẳng (P) .

- A. $d = \frac{12\sqrt{85}}{85}$. B. $d = \frac{\sqrt{31}}{7}$. C. $\frac{18}{7}$. D. $\frac{12}{7}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn D

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) là $d = \frac{|6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{6^2 + 9 + 4}} = \frac{12}{7}$.

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;3;2); B(3;-1;5)$ và mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$. Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (P) tại M . Tính tỷ số $\frac{AM}{BM}$.

- A. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$. B. $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{3}$. C. $\frac{AM}{BM} = 3$. D. $\frac{AM}{BM} = 2$.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

Ta có: $\frac{AM}{BM} = \frac{d(A; (P))}{d(B; (P))} = \frac{|1 - 6 + 4 - 3|}{|3 + 2 + 10 - 3|} = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z + 6 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc tia Oz sao cho khoảng cách từ M đến (P) bằng 3.

- A. $M(0;0;3)$. B. $M(0;0;21)$.
C. $M(0;0;-15)$. D. $M(0;0;3)$ hoặc $M(0;0;-15)$.

Lời giải

Đáp án: Chọn A

Gọi $M(0;0;t)$ ($t > 0$) thuộc tia Oz (phần có cao độ lớn hơn 0) ta có:

$$d(M;(P)) = \frac{|t+6|}{\sqrt{4+4+1}} = 3 \Leftrightarrow |t+6| = 9 \xrightarrow{t>0} t = 3.$$

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc tia Oy sao cho khoảng cách từ M đến (P) bằng 3.

- A. $M(0;-6;0)$, B. $M(0;-3;0)$. C. $M(0;6;0)$. D. $M(0;3;0)$.

Lời giải**Đáp án: Chọn D**

Gọi $M(0;t;0)$ ($t > 0$) (Do M thuộc tia Oy)

$$\text{Lại có } d(M;(P)) = \frac{|2t+3|}{\sqrt{4+4+1}} = 3 \Leftrightarrow |2t+3| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -6(l) \end{cases}$$

Vậy $M(0;3;0)$.

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 6 = 0$ và $(Q): x + 2y - 2z + 3 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

- A. 1. B. 3. C. 9. D. 6.

Lời giải**Đáp án: Chọn B**

$$\text{Lấy điểm } A(0;0;-3) \in (P) \Rightarrow d((P);(Q)) = d(A;(Q)) = \frac{|0+2.0-2(-3)-3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = 3.$$

Ví dụ 7: Cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z + 1 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{z-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Tính khoảng cách d giữa Δ và (P)

- A. $d = \frac{1}{3}$. B. $d = \frac{5}{3}$. C. $d = \frac{2}{3}$. D. $d = 2$.

Lời giải**Đáp án: Chọn D**

$$\text{Do } \vec{u}_{\Delta} \cdot \vec{n}_{(P)} = 4 - 2 - 2 = 0 \Rightarrow \Delta // (P)$$

$$\text{Lấy điểm } A(1;-2;1) \in \Delta \text{ ta có: } d(\Delta;(P)) = d(A;(P)) = \frac{|2+4-1+1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{6}{3} = 2.$$

Ví dụ 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 6 = 0$ và $(Q): x + 2y - 2z + 3 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

- A. 1. B. 3. C. 9. D. 6.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

$$\text{Lấy điểm } A(0;0;-3) \in (P) \Rightarrow d((P);(Q)) = d(A;(Q)) = \frac{|0+2.0-2(-3)+3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = 3.$$

Ví dụ 9: Cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua $M(1;0;-2)$ song song và cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 2 là:

- A. $x-2y+2z-5=0$ hoặc $x-2y+2z+7=0$.
B. $x-2y+2z-5=0$ hoặc $x-2y+2z-7=0$.
C. $x-2y+2z+5=0$ hoặc $x-2y+2z-7=0$.
D. $x-2y+2z+5=0$ hoặc $x-2y+2z+7=0$.

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Ta có phương trình mặt phẳng (Q) có dạng: $x-2y+2z+D=0$

$$\text{Khi đó } d((P);(Q)) = \frac{|D+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = 2 \Rightarrow |D+1| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} D=5 \\ D=-7 \end{cases}$$

Ví dụ 10: Cho 4 điểm $A(2;2;3); B(0;1;0); C(1;2;1); D(3;1;5)$. Phương trình mặt phẳng (P) cách đều 2 đường thẳng AB và CD là:

- A. $14x+4y-8z+3=0$. B. $14x-4y-8z+1=0$. C. $14x-4y-8z-3=0$. D. $14x-4y-8z+3=0$.

Lời giải

Đáp án: Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{n_{(P)}} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}] = (-7; 2; 4)$ suy ra $(P): 7x-2y-4z+D=0$

$$\text{Mặt khác } d(A;(P)) = d(C;(P)) \Leftrightarrow |D-2| = |D-1| \Leftrightarrow D = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } (P): 14x-4y-8z+3=0.$$

Ví dụ 11: Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

$$\text{a) } M(2;3;1); d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$$

$$\text{b) } M(1;0;0); d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{1}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } A(-2;1;-1) \in d \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (4;2;2); \overrightarrow{u_d} = (1;2;-2) \Rightarrow [\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u_d}] = (-8;10;6)$$

$$\text{Do đó } d(M;d) = \frac{|\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u_d}|}{|\overrightarrow{u_d}|} = \frac{\sqrt{64+100+36}}{\sqrt{9}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

b) Ta có: $A(3;3;1) \in d \Rightarrow \overrightarrow{AM}(-2;-3;-1); \overrightarrow{u_d}(1;2;1) \Rightarrow [\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u_d}] = (-1;1;-1)$

$$\text{Do đó } d(M;d) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u_d}|}{|\overrightarrow{u_d}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ví dụ 12: Tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng sau:

a) $d_1: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 2t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$

b) $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{2}$ và $d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-1}{-5}$

Lời giải

a) **Cách 1:** Đường thẳng d_1 qua $A(2;0;4)$ và có VTCP: $\overrightarrow{u_1} = (-3;2;-2)$

Đường thẳng d_2 qua $B(1;2;-1)$ và có VTCP: $\overrightarrow{u_2} = (3;1;2)$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_1 và song song với d_2 ta có: $\overrightarrow{n_{(P)}} = [\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}] = (6;0;-9) = 3(2;0;-3)$

Suy ra $(P): 2x - 3z + 8 = 0 \Rightarrow d(d_1; d_2) = d(d_2; (P)) = d(B; (P)) = \frac{|13|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}.$

Cách 2: Ta có: $d(d_1; d_2) = \frac{|[\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}] \cdot \overrightarrow{AB}|}{|[\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}]|} = \frac{|(6;0;-9) \cdot (-1;2;-5)|}{\sqrt{36+81}} = \sqrt{13}.$

b) **Cách 1:** Đường thẳng d_1 qua $A(1;0;-1)$ và có VTCP $\overrightarrow{u_1} = (1;-2;2)$

Đường thẳng d_2 qua $B(2;3;1)$ và có VTCP: $\overrightarrow{u_2} = (2;-4;-5)$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_1 và song song với d_2 ta có: $\overrightarrow{n_{(P)}} = [\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}] = (18;9;0) = 9(2;1;0)$

Suy ra $(P): 2x + y - 2 = 0 \Rightarrow d(d_1; d_2) = d(d_2; (P)) = d(B; (P)) = \sqrt{5}$

Cách 2: Ta có: $d(d_1; d_2) = \frac{|[\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}] \cdot \overrightarrow{AB}|}{|[\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}]|} = \frac{|9(2;1;0) \cdot (1;3;2)|}{9\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

Ví dụ 13: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$ và điểm $M(-3;1;2).$

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d là:

A. $\sqrt{14}.$

B. $\sqrt{6}.$

C. $2\sqrt{5}.$

D. $2\sqrt{7}.$

Lời giải

Đáp án: Chọn A

Ta có: $A(1;-1;2) \in d \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-4;2;0); \overrightarrow{u_d} = (2;1;1) \Rightarrow [\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u_d}] = (2;4;-8)$

$$\text{Do đó } d(M; d) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u_d} \right] \right|}{\left| \overrightarrow{u_d} \right|} = \frac{\sqrt{4+16+64}}{\sqrt{6}} = \sqrt{14}.$$

Ví dụ 14: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho 2 đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ và $d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng d_1 và d_2

A. $\sqrt{26}$. B. $\frac{\sqrt{13}}{13}$. C. $\frac{\sqrt{26}}{13}$. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Đáp án: Chọn C

Cách 1: Đường thẳng d_1 qua $A(1;2;3)$ và có VTCP: $\overrightarrow{u_1} = (1;2;3)$

Đường thẳng d_2 qua $B(1;0;1)$ và có VTCP: $\overrightarrow{u_2} = (-1;1;1)$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_1 và song song với d_2 ta có: $\overrightarrow{n_{(P)}} = [\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}] = (-1; -4; 3) = -(1; 4; -3)$

$$\text{Suy ra } (P): x + 4y - 3z = 0 \Rightarrow d(d_1; d_2) = d(d_2(P)) = d(B; (P)) = \frac{|-2|}{\sqrt{1+16+9}} = \frac{2}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{13}.$$

$$\text{Cách 2: Ta có: } d(d_1; d_2) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2} \right] \overrightarrow{AB} \right|}{\left| \left[\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2} \right] \right|} = \frac{|(-1; -4; 3) \cdot (0; -2; -2)|}{\sqrt{1+16+9}} = \frac{|2|}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{13}.$$

Ví dụ 15: Cho mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2}$. Tọa độ điểm A thuộc Ox sao cho A cách đều d và (P) là

A. $A(-3;0;0)$. B. $A(3;0;0)$. C. $A(3;3;0)$. D. $A(3;0;3)$.

Lời giải

Đáp án: Chọn B

$$\text{Gọi } A(t;0;0) \text{ suy ra } d(A; (P)) = \frac{2|t|}{3}; d(A; d) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u_d} \right] \right|}{\left| \overrightarrow{u_d} \right|} \text{ trong đó } M(1;0;-2)$$

$$\text{Suy ra } d(A; d) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{u_d} \right] \right|}{\left| \overrightarrow{u_d} \right|} = \frac{\sqrt{16 + (2t-4)^2 + (2-2t)^2}}{3} = \frac{2|t|}{3}$$

$$\Leftrightarrow 36 - 24t + 4t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 3.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI TẬP VỀ VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{-6} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-3}$ và mặt phẳng

$(P): 2x - y + z - 3 = 0$. Mệnh đề nào đúng?

- A. d song song với (P) .
B. d chứa trong (P) .
C. d vuông góc với (P) .
D. d cắt (P) và không vuông góc với (P) .

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x - 2y - 5 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$.

Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. $\vec{n} = (4; 6; 2)$ là một vectơ chỉ phương của d .
B. (P) cắt cả ba trục tọa độ.
C. Điểm $A(1; -1; 2017)$ thuộc (P) .
D. $(P) // d$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 2t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = 5 - 2t' \end{cases}$. Chọn

khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A. d trùng d' .
B. d cắt d' .
C. d và d' chéo nhau.
D. d song song với d' .

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, giá trị của m để hai mặt phẳng $(\alpha): 7x - 3y + mz - 3 = 0$ và $(\beta): x - 3y + 4z + 5 = 0$ vuông góc với nhau là

- A. 6.
B. -4.
C. 1.
D. 2.

Câu 5: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2t \\ z = 2 - mt \end{cases}$ và mặt phẳng

$(P): 2x - y - 2z - 6 = 0$. Giá trị của m để $d \subset (P)$ là

- A. $m = 2$.
B. $m = -2$.
C. $m = 4$.
D. $m = -4$. m

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y + z + 5 = 0$, đường thẳng

$d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{-3}$. Tìm tọa độ giao điểm giữa (P) và d .

- A. $(17; 9; 20)$.
B. $(17; -9; -20)$.
C. $(-17; 9; 20)$.
D. $(1; 3; 2)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): m^2x - y + (m^2 - 2)z + 2 = 0$ và

$(Q): 2x + m^2y - 2z + 1 = 0$, với m là tham số thực. Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) khi m thỏa mãn

- A. $|m| = 2$.
B. $|m| = 1$.
C. $|m| = \sqrt{3}$.
D. $|m| = \sqrt{2}$.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$ nằm trên mặt phẳng $(P): mx + ny + 3z + 5 = 0$ (m, n là các tham số). Khi đó giá trị của n là

- A. -3 . B. 1 . C. 3 . D. -1 .

Câu 9: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ và $d_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$.

Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng d_1 và d_2 .

- A. Chéo nhau. B. Trùng nhau. C. Cắt nhau. D. Song song nhau.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + z + 1 = 0$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. $(P) // (Oyz)$. B. $(P) // Ox$. C. $Ox \subset (P)$. D. $(P) // Oy$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 + 6t \end{cases}$ và $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{3}$.

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $d_1 // d_2$. B. $d_1 \equiv d_2$. C. d_1, d_2 chéo nhau. D. d_1 cắt d_2 .

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + y + 1 = 0$ và đường thẳng

$d: \begin{cases} x = 2 + mt \\ y = n + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases} (m, n, t \in \mathbb{R})$. Tìm m, n để đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) .

- A. $m = 6, n = -5$. B. $m = -\frac{3}{2}, n = -5$. C. $m = -2; n = -4$. D. $m = \frac{3}{2}, n = 5$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và mặt phẳng

$(P): x + 3y + z + 1 = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. (d) cắt và không vuông góc với (P) . B. (d) nằm trong (P) .
C. (d) vuông góc với (P) . D. (d) song song (P) .

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + 2y + 3z - 6 = 0$ và đường thẳng

$\Delta: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\Delta // (\alpha)$. B. $\Delta \subset (\alpha)$.
C. $\Delta \perp (\alpha)$. D. Δ cắt và không vuông góc với (α) .

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng

$(P): x + 2y - z + 3 = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. d song song với (P) .

B. d vuông góc với (P) .

C. d nằm trên (P) .

D. d cắt (P) .

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+4}{3}$ và

$d_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 2 + 6t \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. d_1 và d_2 cắt nhau.

B. d_1 và d_2 trùng nhau.

C. d_1 và d_2 chéo nhau.

D. d_1 và d_2 song song với nhau.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-5}{3} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{2}$ và mặt phẳng

$(P): x - 3y - z + 6 = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. d cắt và không vuông góc với (P) .

B. d song song với (P) .

C. d nằm trong (P) .

D. d vuông góc với (P) .

Câu 18: Cho 2 đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-7}{1}$ và $d': \frac{x-6}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-2}$. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng d và d' .

A. d và d' cắt nhau.

B. d và d' chéo nhau.

C. d song song với d' .

D. d vuông góc với d' .

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$. Hãy

xác định vị trí tương đối giữa đường thẳng d và đường thẳng d' .

A. d song song với d' .

B. d trùng d' .

C. d cắt d' .

D. d và d' chéo nhau.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $(\Delta_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$,

$(\Delta_2): \frac{x-3}{-2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{1}$. Vị trí tương đối của (Δ_1) và (Δ_2) là

A. trùng nhau.

B. song song.

C. cắt nhau.

D. chéo nhau.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng: $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-2}$ và mặt phẳng $(P): x + my + m^2z - 1 = 0$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) song song với đường thẳng d .

- A. $m = 0$ và $m = \frac{1}{2}$. B. $m = \frac{1}{2}$. C. $m = 1$. D. $m = 1$ và $m = \frac{1}{2}$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 11 = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. d cắt và vuông góc với (P) . B. d vuông góc với (P) .
C. d song song với (P) . D. d nằm trong (P) .

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba mặt phẳng (P) , (Q) , (R) tương ứng có phương trình là $2x + 6y - 4z + 8 = 0$; $5x + 15y - 10z + 20 = 0$ và $6x + 18y - 12z - 24 = 0$. Chọn mệnh đề đúng trong bốn mệnh đề sau:

- A. $(P) // (Q)$. B. (P) cắt (Q) . C. (Q) cắt (R) . D. $(R) // (P)$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) tương ứng có phương trình là $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{1}$ và $3x + y - 5z + 5 = 0$, gọi mặt phẳng (Q) là mặt phẳng (Oxz) . Chọn mệnh đề đúng trong bốn mệnh đề sau:

- A. $d // (P)$ và d cắt (Q) . B. $d \subset (P)$ và d cắt (Q) .
C. d cắt (P) và d cắt (Q) . D. $d // (P)$ và $d // (Q)$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): (m^2 - 1)x + 2y - mz + m - 1 = 0$. Xác định m biết (α) song song với Ox .

- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = \pm 1$. D. $m = 0$.

Câu 26: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 5y + z + 4 = 0$. Xác định vị trí tương đối của d và (α) .

- A. $d \perp (\alpha)$. B. $d \subset (\alpha)$.
C. d cắt và không vuông góc với (α) . D. $d // (\alpha)$.

Câu 27: Cho 4 điểm $A(1; -3; 2)$, $B(2; -3; 1)$, $C(3; 2; 1)$, $D(1; 2; 3)$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AB , song song với đường thẳng CD . Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến (P) ?

- A. $\vec{n}_1 = (1; -1; 1)$. B. $\vec{n}_2 = (1; 1; -1)$. C. $\vec{n}_3 = (1; 1; 1)$. D. $\vec{n}_4 = (5; -1; 5)$.

Câu 28: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxy , cho điểm $I(2;6;-3)$ và các mặt phẳng $(\alpha): x-2=0, (\beta): y-6=0, (\gamma): z+3=0$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. (β) đi qua I .
 B. $(\alpha) \perp (\beta)$.
 C. (γ) song song với Oz .
 D. (β) song song với (Oxz) .

Câu 29: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(a;0;a), B(0;a;a), C(a;a;0)$. Mặt phẳng (ABC) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại M, N, P . Tính thể tích khối tứ diện $OMNP$.

- A. $4a^3$.
 B. $\frac{8a^3}{3}$.
 C. $8a^3$.
 D. $\frac{4a^3}{3}$.

BÀI TẬP VỀ GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (0;1;0), \vec{b} = (\sqrt{3};1;0)$. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A. $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$.
 B. $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.
 C. $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$.
 D. $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$ và $(P): x+2y-z+5=0$. Góc giữa d và (P) là

- A. 30° .
 B. 45° .
 C. 60° .
 D. 90° .

Câu 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x+4y+5z+8=0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x-2y+1=0$ và $(\beta): x-2z-3=0$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Tính φ

- A. $\varphi = 45^\circ$.
 B. $\varphi = 30^\circ$.
 C. $\varphi = 60^\circ$.
 D. $\varphi = 90^\circ$.

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-y+4z-2=0$ và $(Q): 2x-2z+7=0$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

- A. 90° .
 B. 45° .
 C. 60° .
 D. 30° .

Câu 34: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): \sqrt{2}x + \sqrt{2}z - 2 = 0$ và $(Q): \sqrt{2}y - \sqrt{2}z - 1 = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$ bằng

- A. 30° .
 B. 90° .
 C. 60° .
 D. 45° .

Câu 35: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x-y+2z-1=0$ và $(\beta): x+2y-z+2=0$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (α) và (β) .

- A. $\varphi = 120^\circ$.
 B. $\varphi = 30^\circ$.
 C. $\varphi = 90^\circ$.
 D. $\varphi = 60^\circ$.

Câu 36: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét giao tuyến d của hai mặt phẳng có phương trình theo thứ tự là $2x-y+z+1=0, x+y-z-2=0$. Tìm số đo độ của góc α giữa d và Oz .

- A. $\alpha = 0^\circ$.
 B. $\alpha = 30^\circ$.
 C. $\alpha = 45^\circ$.
 D. $\alpha = 60^\circ$.

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xác định tất cả các giá trị thực của tham số m để hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + my + 2mz + 4 = 0$ và $(\beta): 6x - y - z + 3 = 0$ vuông góc với nhau.

- A. $m = 4$. B. $m = 3$. C. $m = -3$. D. $m = -4$.

Câu 38: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC có $A(1;1;1), B(5;1;-2)$ và $C(a;5;1)$.

Tìm $a > 0$ biết $\cos \widehat{BAC} = \frac{12}{25}$.

- A. $a = 4$. B. $a = 3$. C. $a = 5$. D. $a = 1$.

Câu 39: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 1 = 0$, đường thẳng

$d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+2}{2}$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Tính $\cos \varphi$

- A. $\cos \varphi = \frac{5}{9}$. B. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{65}}{9}$. C. $\cos \varphi = \frac{9\sqrt{65}}{65}$. D. $\cos \varphi = \frac{4}{9}$.

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng có phương trình $(P): x - y + 4z - 2 = 0$ và $(Q): 2x - 2z + 7 = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

- A. 90° . B. 45° . C. 60° . D. 30° .

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-2}$ và

$d_2: \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{z} = \frac{z-3}{1}$. Tính góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 .

- A. 90° . B. 60° . C. 30° . D. 45° .

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (x; 0; 1); \vec{v} = (\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0)$. Tìm x để góc giữa $\vec{u}$ và $\vec{v}$ bằng 60° ?

- A. $x = -1$. B. $x = \pm 1$. C. $x = 0$. D. $x = 1$.

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = 10$ và mặt phẳng $(P): -2x + y + \sqrt{5}z + 9 = 0$. Gọi (Q) là tiếp diện của (S) tại điểm $M(5;0;4)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

- A. 45° . B. 60° . C. 120° . D. 30° .

Câu 44: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $A(0;0;0), B(0;1;0), C(1;1;0), A'(0;0;1)$. Tính góc giữa hai đường thẳng $A'C'$ và BC' .

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của tọa độ O xuống mặt phẳng (P) . Tính số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x - y - 11 = 0$.

- A. 90° . B. 60° . C. 45° . D. 30° .

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x + ay + bz - 1 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-1}$. Biết rằng $(\alpha) // \Delta$ và α tạo với các trục Ox, Oz các góc bằng nhau. Tìm giá trị của a .

- A. $a = 0$. B. $a = 0$ hoặc $a = 2$. C. $a = 2$. D. $a = -1$ hoặc $a = 1$.

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và hai điểm $A(1; -2; 3), B(1; 1; 2)$. Gọi h_1, h_2 lần lượt là khoảng cách từ điểm A đến B đến mặt phẳng (P) . Trong các khẳng định sau đây khẳng định nào **đúng**?

- A. $h_2 = h_1$. B. $h_2 = 2h_1$. C. $h_2 = 3h_1$. D. $h_2 = 4h_1$.

Câu 48: Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 7 = 0$ và $(Q): 2x - y + 2z - 5 = 0$.

- A. $\frac{13}{3}$. B. $\frac{11}{3}$. C. 4. D. 3.

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x - 2y - 2z + 5 = 0$. Điểm A thuộc d sao cho khoảng cách từ A đến (α) bằng 3. Tìm tọa độ điểm A biết A' có hoành độ dương.

- A. $A(0; 0; -1)$. B. $A(-2; 1; -2)$. C. $A(4; -2; 1)$. D. $A(2; -1; 0)$.

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 3 = 0$. Khoảng cách d từ điểm M đến mặt phẳng (P) là

- A. $d = \frac{5}{3}$. B. $d = \frac{2}{3}$. C. $d = 3$. D. $d = \sqrt{5}$.

Câu 51: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 2; 3), B(3; 4; 4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $2x + y + mz - 1 = 0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB .

- A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m = -3$. D. $m = \pm 2$.

Câu 52: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2; 0; 0), B(0; -1; 0), C(0; 0; 3)$. Khi đó khoảng cách từ gốc tọa độ đến mặt phẳng (ABC) bằng.

- A. $\frac{6}{7}$. B. $\frac{7}{6}$. C. $\frac{49}{36}$. D. $\frac{36}{49}$.

Câu 53: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1; -2; 3)$ và hai mặt phẳng $(P): x + y - 2 = 0, (Q): x + z + 2 = 0$. Gọi h_1 và h_2 lần lượt là khoảng cách từ điểm M đến (P) và (Q) . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $h_1 = h_2$. B. $h_1 = \frac{4}{5}h_2$. C. $h_1 = 2h_2$. D. $h_1 = \frac{5}{4}h_2$.

Câu 54: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ và $d_2: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$.

A. $2x - 2z + 1 = 0$. B. $2y - 2z + 1 = 0$. C. $2x - 2y + 1 = 0$. D. $2y - 2z - 1 = 0$.

Câu 55: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, hai mặt phẳng $4x - 4y + 2z - 7 = 0$ và $2x - 2y + z + 1 = 0$ chứa hai mặt phẳng của hình lập phương. Thể tích khối lập phương đó là.

A. $V = \frac{9\sqrt{3}}{2}$. B. $V = \frac{81\sqrt{3}}{8}$. C. $V = \frac{64}{27}$. D. $V = \frac{27}{8}$.

Câu 56: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: x = y = z$, $d' = \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 1 - t \end{cases}$. Tính

khoảng cách giữa hai đường thẳng d, d' .

A. $\frac{1}{\sqrt{6}}$. B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{2}{\sqrt{6}}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 57: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$

$\Delta_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Tính khoảng cách d giữa Δ_1, Δ_2

A. $d = \frac{2\sqrt{26}}{13}$. B. $d = \frac{\sqrt{26}}{13}$. C. $d = \frac{2\sqrt{13}}{13}$. D. $d = \frac{5}{13}$.

Câu 58: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$ song song với mặt phẳng

$(P): x + 2y + z + 2 = 0$. Tính khoảng cách $d = d[\Delta; (P)]$ từ đường thẳng Δ đến mặt phẳng (P) .

A. $d = 0$. B. $d = \frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $d = \frac{\sqrt{6}}{6}$. D. $d = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

Câu 59: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$, $d_2: \frac{x}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-3}$. Mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2 . Tính khoảng cách từ điểm $M(1;1;1)$ đến (P) .

A. $\frac{5}{\sqrt{3}}$. B. 4. C. $\sqrt{3}$. D. 1.

Câu 60: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z + 1 = 0$ và đường thẳng

$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Gọi I là giao điểm của d và (P) , M là điểm trên đường thẳng d sao cho $IM = 9$. Tính

khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) .

A. $d(M, (P)) = 3\sqrt{2}$. B. $d(M; (P)) = 4$. C. $d(M, (P)) = 8$. D. $d(M, (P)) = 2\sqrt{2}$.

Câu 61: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P) và (Q) tương ứng có phương trình là $3x - 6y + 12z - 3 = 0$ và $2x - my + 8z + 2 = 0$, với m là tham số thực. Tìm m để mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và khi đó tính khoảng cách d giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .

A. $m = -4, d = \frac{2}{\sqrt{21}}$. **B.** $m = 4, d = \frac{1}{\sqrt{21}}$. **C.** $m = 2, d = \frac{2}{\sqrt{21}}$. **D.** $m = 4, d = \frac{2}{\sqrt{21}}$.

Câu 62: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 3y + z - 1 = 0$ và đường thẳng

$\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+2}{m}$ với m là tham số thực khác 0. Tìm m để đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P)

và khi đó tính khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) .

A. $m = 2, d = \frac{3}{\sqrt{11}}$. **B.** $m = 1, d = \frac{2}{\sqrt{11}}$. **C.** $m = 1, d = \frac{4}{\sqrt{11}}$. **D.** $m = -1, d = \frac{3}{\sqrt{11}}$.

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Chọn C

Ta có $\vec{u_d} = (-6; 3; -3)$ và $\vec{n_{(P)}} = (2; -1; 1) \Rightarrow \vec{u_d} = -3\vec{n_{(P)}}$

Suy ra d vuông góc với mặt phẳng (P) .

Câu 2: Chọn B

Mặt phẳng (P) không cắt ba trục tọa độ.

Câu 3: Chọn D

Đường thẳng d có $\vec{u_d} = (1; -1; -1)$ qua $M_1(1; 2; 3)$. Đường thẳng d' có $\vec{u_{d_2}} = (1; -1; -1)$ qua $M_2(2; -1; 5)$. Ta có

$\vec{u_d} = \vec{u_{d'}}$ và $M_1 \notin d' \Rightarrow d // d'$.

Câu 4: Chọn B

Ta có $\vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_\beta} = 0 \Leftrightarrow 7.1 + (-3).(-3) + 4m = 0 \Leftrightarrow m = -4$

Câu 5: Chọn C

Để $d \subset (P)$ thì $\vec{u_d} \cdot \vec{n_{(P)}} = 0 \Leftrightarrow 2.(-3) + 2.(-1) + (-m).(-2) = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

Câu 6: Chọn C

Giả sử M là giao điểm của (P) và $d \Rightarrow M(1+3t; 3-t; 2-3t)$

Mà $M \in (P) \Rightarrow 2(1+3t) + (3-t) + (2-3t) + 5 = 0 \Leftrightarrow t = -6 \Rightarrow M(-17; 9; 20)$.

Câu 7: Chọn A

Ta có $\vec{n_p} \cdot \vec{n_Q} = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - m^2 - 2(m^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow |m| = 2$.

Câu 8: Chọn A

Đường thẳng d có $\vec{u_d} = (3; 3; 2)$ qua điểm $M(-2; 1; 0)$.

Để $d \cup (P)$ thì $\begin{cases} \vec{u_d} \cdot \vec{n_p} = 0 \\ M \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 3n + 6 = 0 \\ -2m + m + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -3 \end{cases}$

Câu 9: Chọn C

Đường thẳng d_1 có $\vec{u_{d_1}} = (2; 1; -1)$ qua $M_1(1; -1; 0)$. Đường thẳng d_2 có $\vec{u_{d_2}} = (-1; 2; 3)$ qua $M_2(3; 0; -1)$

Ta có $[\vec{u_{d_1}}; \vec{u_{d_2}}] = (5; -5; 5)$ và $\vec{M_1M_2} = (2; 1; -1) \Rightarrow [\vec{u_{d_1}}; \vec{u_{d_2}}] \cdot \vec{M_1M_2} = 0 \Rightarrow d_1, d_2$ cắt nhau.

Câu 10: Chọn B

Ta có $\vec{u_{Ox}} \cdot \vec{n_p} = 0 \Rightarrow (P) // Ox$.

Câu 11: Chọn A

Ta có $\vec{u_{d_1}} = 2\vec{u_{d_2}}$ và $\begin{cases} M(0; 1; 2) \in d_1 \\ M(0; 1; 2) \notin d_2 \end{cases} \Rightarrow d_1 // d_2$.

Câu 12: Chọn B

Ta có $A(2;n;1) \in d; \overrightarrow{u_d} = (m;3;-2); \overrightarrow{n_p} = (2;1;0)$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} A \in (P) \\ \overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{n_p} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+n+1=0 \\ 2m+3=0 \end{cases} \Rightarrow m = -\frac{3}{2}; n = -5.$$

Câu 13: Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{u_d} = (1;-1;2) \\ \overrightarrow{n_p} = (1;3;1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{n_p} = 1-3+2=0 \Rightarrow \begin{cases} d // (P) \\ d \subset (P) \end{cases}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} A(1;1;2) \in d \\ A(1;1;2) \notin (P) \end{cases} \Rightarrow d // (P).$$

Câu 14: Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{n_\alpha} = (1;2;3) \\ \overrightarrow{u_\Delta} = (-1;-1;1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = -1-2+3=0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta // (\alpha) \\ \Delta \subset (\alpha) \end{cases}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} A(-1;-1;3) \in \Delta \\ A \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \Delta \subset (\alpha).$$

Câu 15: Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{u_d} = (4;-1;2) \\ \overrightarrow{n_p} = (1;2;-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{n_p} = 4-2-2=0 \Rightarrow \begin{cases} d // (P) \\ d \subset (P) \end{cases}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} A(3;-1;4) \in d \\ A \in (P) \end{cases} \Rightarrow d \subset (P).$$

Câu 16: Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{u_{d_1}} = (1;2;3) \\ \overrightarrow{u_{d_2}} = (2;4;6) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_{d_2}} = 2\overrightarrow{u_{d_1}} \Rightarrow \begin{cases} d_1 // d_2 \\ d_1 \equiv d_2 \end{cases}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} A(-2;-3;-4) \in d_1 \\ A \in d_2 \end{cases} \Rightarrow d_1 \equiv d_2.$$

Câu 17: Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{u_d} = (3;-3;2) \\ \overrightarrow{n_p} = (1;-3;-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{n_p} = 10 \neq 0 \Rightarrow d \text{ cắt } (P).$$

$$\text{Mà } \frac{3}{1} \neq \frac{-3}{-3} \Rightarrow d \text{ không vuông góc với } (P).$$

Câu 18: Chọn A

$$\text{Ta có } d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = 7 + t \end{cases}; d': \begin{cases} x = 6 + 3t' \\ y = -2 + t' \\ z = -1 - 2t' \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} 1+2t=6+3t' \\ 3+4t=-2+t' \\ 7+t=-1-2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ t'=-3 \\ 7+t=-1-2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ t'=-3 \end{cases} \Rightarrow \text{hai đường cắt nhau.}$$

Câu 19: Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{u_d} = (1; 1; -1) \\ \overrightarrow{u_{d'}} = (2; 2; -2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_{d'}} = 2\overrightarrow{u_d} \Rightarrow \begin{cases} d // d' \\ d \equiv d' \end{cases}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} A(1; 2; 3) \in d \\ A \notin d' \end{cases} \Rightarrow d // d'.$$

Câu 20: Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{u_{\Delta_1}} = (2; 3; -1) \\ \overrightarrow{u_{\Delta_2}} = (-2; -3; 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_{\Delta_1}} = -\overrightarrow{u_{\Delta_2}} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 // \Delta_2 \\ \Delta_1 \equiv \Delta_2 \end{cases}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} A(1; -1; 0) \in \Delta_1 \\ A \in \Delta_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta_1 \equiv \Delta_2.$$

Câu 21: Chọn C

$$\text{Ta có: } A(0; 0; 4) \in d, \overrightarrow{u_d} = (1; 1; -2), \overrightarrow{n_p} = (1; m; m^2)$$

$$YCBT \Leftrightarrow \begin{cases} A \notin (P) \\ \overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{n_p} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 1 \neq 0 \\ 1 + m - 2m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 22: Chọn D

$$\text{Ta có } \overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{n_p} = 1.1 + (-3).1 + (-1).(-2) = 0 \Rightarrow d // (P)$$

$$\text{Lại có } A(-1; 0; 5) \in (P) \longrightarrow d \subset (P).$$

Câu 23: Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} (P): x + 3y - 2z + 4 = 0 \\ (Q): x + 3y - 2z + 4 = 0 \\ (R): x + 3y - 2z - 4 = 0 \end{cases} \text{ suy ra } (P) // (R).$$

Câu 24: Chọn A

$$\text{Ta có } \overrightarrow{u_d} = (2; -1; 1), \overrightarrow{n_{(P)}} = (3; 1; -5) \longrightarrow \overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{n_{(P)}} = 0$$

$$\text{Lại có } A(3; -1; -2) \in d \text{ và } A \notin (P). \text{ Vậy } d // (P) \text{ và } d \text{ cắt } (Q).$$

Câu 25: Chọn B

$$\text{Ta có } \overrightarrow{u_{(Ox)}} = (1; 0; 0) \text{ và } \overrightarrow{n_{(\alpha)}} = (m^2 - 1; 2; -m)$$

$$\text{Đề } (\alpha) // Ox \Rightarrow \overrightarrow{u_{(Ox)}} \cdot \overrightarrow{n_{(\alpha)}} = 0 \text{ và } O(0; 0; 0) \in Ox; O \notin (P).$$

$$\text{Khi đó, ta được hệ phương trình } \begin{cases} m^2 - 1 = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Câu 26: Chọn B

Ta có $\overrightarrow{u_d} = (2; -1; 3), \overrightarrow{n_{(\alpha)}} = (1; 5; 1) \longrightarrow \overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{n_{(\alpha)}} = 0$

Lại có $M(1; -1; 0) \in (P) \longrightarrow$ Đường thẳng d nằm trong (α)

Câu 27: Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 0; -1), \overrightarrow{CD} = (-2; 0; 2) \Rightarrow$ Bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.

Do đó $\overrightarrow{n_{(P)}} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (5; -1; 5)$

Câu 28: Chọn C

Trục Oz có $\vec{u} = (0; 0; 1)$ mà $\overrightarrow{n_{(\gamma)}} = (0; 0; 1) \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{n_{(\gamma)}} \Rightarrow Oz \perp (\gamma)$.

Câu 29: Chọn D

Chọn $a = 1 \longrightarrow A(1; 0; 1), B(0; 1; 1), C(1; 1; 0)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0), \overrightarrow{AC} = (0; 1; -1) \Rightarrow \vec{n}_{(ABC)} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (1; 1; 1)$

Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) là $x + y + z - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$

Do đó $M(2; 0; 0), N(0; 2; 0), P(0; 0; 2) \Rightarrow V_{O.MNP} = \frac{OM.ON.OP}{6} = \frac{4}{3}$.

Câu 30: Chọn B

Ta có $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}; \vec{b}) = 60^\circ$.

Câu 31: Chọn A

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{u_d} = (2; 1; 1) \\ \overrightarrow{n_p} = (1; 2; -1) \end{cases} \Rightarrow \sin(d; (P)) = \frac{|\overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{n_p}|}{|\overrightarrow{u_d}| \cdot |\overrightarrow{n_p}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow (d(P)) = 30^\circ$.

Câu 32: Chọn C

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{n_\alpha} = (1; -2; 0) \\ \overrightarrow{n_\beta} = (1; 0; -2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_d} = [\overrightarrow{n_\alpha}; \overrightarrow{n_\beta}] = (4; 2; 2)$.

Lại có $\overrightarrow{n_p} = (3; 4; 5)$, tính $\sin(d; (P)) = \frac{|\overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{n_p}|}{|\overrightarrow{u_d}| \cdot |\overrightarrow{n_p}|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (d(P)) = 60^\circ$.

Câu 33: Chọn C

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{n_p} = (1; -1; 4) \\ \overrightarrow{n_q} = (2; 0; -2) \end{cases} \Rightarrow \cos((P); (Q)) = \frac{|\overrightarrow{n_p} \cdot \overrightarrow{n_q}|}{|\overrightarrow{n_p}| \cdot |\overrightarrow{n_q}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow ((P); (Q)) = 60^\circ$.

Câu 34: Chọn C

Ta có $\begin{cases} \vec{n_p} = (1; 0; 1) \\ \vec{n_q} = (0; 1; -1) \end{cases} \Rightarrow \cos((P); (Q)) = \frac{|\vec{n_p} \cdot \vec{n_q}|}{|\vec{n_p}| \cdot |\vec{n_q}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow ((P); (Q)) = 60^\circ.$

Câu 35: Chọn D

Ta có $\begin{cases} \vec{n_\alpha} = (1; -1; 2) \\ \vec{n_\beta} = (1; 2; -1) \end{cases} \Rightarrow \cos((\alpha); (\beta)) = \frac{|\vec{n_\alpha} \cdot \vec{n_\beta}|}{|\vec{n_\alpha}| \cdot |\vec{n_\beta}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow ((\alpha); (\beta)) = 60^\circ.$

Câu 36: Chọn C

Hai mặt phẳng đã cho có VTPT lần lượt là $\begin{cases} \vec{n} = (2; -1; 1) \\ \vec{n'} = (1; 1; -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{u_d} = [\vec{n}; \vec{n'}] = (0; 3; 3)$

và $\vec{u_{Oz}} = (0; 0; 1) \Rightarrow \cos(\vec{u_d}; \vec{u_{Oz}}) = \frac{|\vec{u_d} \cdot \vec{u_{Oz}}|}{|\vec{u_d}| \cdot |\vec{u_{Oz}}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (d; Oz) = 45^\circ.$

Câu 37: Chọn A

Ta có $YCBT \Leftrightarrow 2.6 + m(-1) + 2m.(-1) = 0 \Leftrightarrow m = 4$

Câu 38: Chọn A

Ta có $\begin{cases} \vec{CA} = (1-a; -4; 0) \\ \vec{BA} = (-4; 0; 3) \end{cases} \Rightarrow \frac{12}{25} = \frac{|\vec{CA} \cdot \vec{BA}|}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{BA}|} = \frac{|4a-4|}{5\sqrt{(1-a)^2+16}}$

$\Leftrightarrow 9(a^2 - 2a + 17) = 25(a^2 - 2a + 1) \Rightarrow a = 4.$

Câu 39: Chọn D

Ta có $\begin{cases} \vec{u_d} = (-1; -2; 2) \\ \vec{n_p} = (2; -1; 2) \end{cases} \Rightarrow \cos(d; (P)) = \frac{|\vec{u_d} \cdot \vec{n_p}|}{|\vec{u_d}| \cdot |\vec{n_p}|} = \frac{4}{9}.$

Câu 40: Chọn C

Ta có $\begin{cases} \vec{n_p} = (1; -1; 4) \\ \vec{n_q} = (2; 0; -2) \end{cases} \Rightarrow \cos((P); (Q)) = \frac{|\vec{n_p} \cdot \vec{n_q}|}{|\vec{n_p}| \cdot |\vec{n_q}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow ((P); (Q)) = 60^\circ.$

Câu 41: Chọn A

Ta có $\begin{cases} \vec{u_{d_1}} = (-1; 1; -2) \\ \vec{u_{d_2}} = (-1; 1; 1) \end{cases} \Rightarrow \cos(d_1; d_2) = \frac{|\vec{u_{d_1}} \cdot \vec{u_{d_2}}|}{|\vec{u_{d_1}}| \cdot |\vec{u_{d_2}}|} = 0 \Rightarrow (d_1; d_2) = 90^\circ.$

Câu 42: Chọn B

$\cos 60^\circ = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|x\sqrt{2}|}{\sqrt{x^2+1}.2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

Câu 43: Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; 4)$

Ta có (Q) nhận $\overrightarrow{n_Q} = \overrightarrow{IM} = (3; 1; 0)$ là một VTPT

$$\text{Lại có } \overrightarrow{n_P} = (-2; 1; \sqrt{5}) \Rightarrow \cos((P); (Q)) = \frac{|\overrightarrow{n_P} \cdot \overrightarrow{n_Q}|}{|\overrightarrow{n_P}| \cdot |\overrightarrow{n_Q}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow ((P); (Q)) = 60^\circ.$$

Câu 44: Chọn B

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow (0; 0; 1) = (x_{C'} - 1; y_{C'} - 1; z_{C'}) \Rightarrow \begin{cases} x_{C'} - 1 = 0 \\ y_{C'} - 1 = 0 \\ z_{C'} = 1 \end{cases} \Rightarrow C'(1; 1; 1)$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} \overrightarrow{A'C} = (1; 1; -1) \\ \overrightarrow{BC'} = (1; 0; 1) \end{cases} \Rightarrow \cos(A'C, BC') = \frac{|\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{BC'}|}{|\overrightarrow{A'C}| \cdot |\overrightarrow{BC'}|} = 0 \Rightarrow ((A'C); (BC')) = 90^\circ.$$

Câu 45: Chọn C

(P) nhận $\overrightarrow{OH} = (2; -1; -2)$ là một VTPT

$$\text{Lại có } \overrightarrow{n_Q} = (1; -1; 0) \Rightarrow \cos((P); (Q)) = \frac{|\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{n_Q}|}{|\overrightarrow{OH}| \cdot |\overrightarrow{n_Q}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow ((P); (Q)) = 45^\circ.$$

Câu 46: Chọn B

$$(\alpha) // \Delta \Rightarrow 1 - a - b = 0 \Leftrightarrow a + b = 1.$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_\alpha} = (1; a; b) \\ \overrightarrow{n_{Ox}} = (1; 0; 0) \\ \overrightarrow{n_{Oz}} = (0; 0; 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(Ox; (\alpha)) = \frac{|\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{u_{Ox}}|}{|\overrightarrow{n_\alpha}| \cdot |\overrightarrow{u_{Ox}}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} \\ \sin(Oz; (\alpha)) = \frac{|\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{u_{Oz}}|}{|\overrightarrow{n_\alpha}| \cdot |\overrightarrow{u_{Oz}}|} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} \end{cases} \longrightarrow |b| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \Rightarrow a = 0 \\ b = -1 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

Câu 47: Chọn C

$$h_1 = d(A; (P)) = \frac{5}{\sqrt{29}}; h_2 = d(B; (P)) = \frac{15}{\sqrt{29}} \Rightarrow h_2 = 3h_1$$

Câu 48: Chọn C

$$\text{Lấy } M(0; 7; 0) \in (P) \Rightarrow d((P); (Q)) = d(M; (Q)) = 4$$

Câu 49: Chọn D

$$\text{Do } A \in d \Rightarrow A(2t; -t; -1+t)$$

$$\text{Ta có } d(A; (\alpha)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|2t - 2 \cdot (-t) - 2(-1+t) + 5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = 3 \Leftrightarrow |2t + 7| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow A(2; -1; 0) \\ t = -8 \Rightarrow A(-16; 8; -9) \end{cases} (l)$$

Câu 50: Chọn A

$$\text{Ta có } d(M, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 - (-2) - 2 \cdot 3 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{3}.$$

Câu 51: Chọn A

$$d(A, (P)) = AB \Leftrightarrow \frac{|3m+3|}{\sqrt{2^2+1^2+m^2}} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{m^2+5} = |m+1| \Leftrightarrow m^2+5 = (m+1)^2 \Leftrightarrow m = 2.$$

Câu 52: Chọn A

$$(ABC): \frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 1 \text{ hay } (ABC): 3x - 6y + 2z - 6 = 0$$

$$\text{Khi đó } d(O, (ABC)) = \frac{|-6|}{\sqrt{3^2+(-6)^2+2^2}} = \frac{6}{7}.$$

Câu 53: Chọn D

$$h_1 = d(M, (P)) = \frac{5}{\sqrt{2}}, h_2 = d(M, (Q)) = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow h_1 = \frac{5}{4} h_2$$

Câu 54: Chọn B

$$\vec{n}_P = [\vec{u}_{d_1}; \vec{u}_{d_2}] = (0; 1; -1) \Rightarrow (P): y - z + m = 0. \text{ Lấy } A(2; 0; 0) \in d_1, B(0; 1; 2) \in d_2$$

$$\text{Ta có } d(A, (P)) = d(B, (P)) \Leftrightarrow \frac{|m|}{\sqrt{2}} = \frac{|m-1|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \Rightarrow (P): 2y - 2z + 1 = 0$$

Câu 55: Chọn D

$$\text{Giả sử } (P): 4x - 4y + 2z - 7 = 0, (Q): 2x - 2y + z + 1 = 0. \text{ Lấy } M(0; 0; -1) \in (Q).$$

$$\text{Ta có } d((P), (Q)) = d(M, (P)) = \frac{|-9|}{\sqrt{4^2+4^2+2^2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow V = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{8}.$$

Câu 56: Chọn D

$$\text{Đường thẳng } d \text{ có VTCP } \vec{u}_d = (1; 1; 1) \text{ và đi qua điểm } O(0; 0; 0)$$

$$\text{Đường thẳng } d' \text{ có VTCP } \vec{u}_{d'} = (1; 0; -1) \text{ và đi qua điểm } A(0; -1; 1)$$

$$\text{Khi đó phương trình mặt phẳng } (P) \text{ chứa } d \text{ và song song với } d' \text{ có VTPT là: } \vec{n} = [\vec{u}_d; \vec{u}_{d'}] = (-1; 2; -1)$$

$$\text{Suy ra } (P): -x + 2y - z = 0 \Rightarrow d(d; d') = d(A; (P)) = \frac{3}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Câu 57: Chọn B

$$\text{VTCP của đường thẳng } \Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ lần lượt là } \vec{u}_1 = (1; 2; 3) \text{ và } \vec{u}_2 = (-1; 1; 1)$$

$$\text{Đường thẳng } \Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ lần lượt đi qua các điểm } A(1; 2; 3) \text{ và } B(1; 0; 1)$$

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (P) \text{ chứa } \Delta_1 \text{ và song song với } \Delta_2 \text{ có VTPT là: } \vec{n} = [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (-1; -4; 3)$$

$$\text{Khi đó } (P): x + 4y - 3z = 0 \Rightarrow d(\Delta_1; \Delta_2) = d(B, (P)) = \frac{2}{\sqrt{1+16+9}} = \frac{\sqrt{26}}{13}.$$

Câu 58: Chọn C

Do Δ có VTCP là $\vec{u} = (1; -1; 1)$ và đi qua điểm $A(3; -2; 0)$

Mặt phẳng (P) có $\vec{n}_P = (1; 2; 1)$, do $\vec{u}_\Delta \cdot \vec{n}_{(P)} = 0 \Rightarrow \Delta // (P)$

$$\text{Do đó } d = d[\Delta, (P)] = d(A; (P)) = \frac{|3 - 4 + 2|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Câu 59: Chọn C

Đường thẳng d_1 có VTCP $\vec{u}_1 = (2; -1; 3)$ và đi qua điểm $(-1; 1; 2)$

Đường thẳng d_2 có VTCP $\vec{u}_2 = (-1; 2; -3)$

Mặt phẳng (P) chứa d_1 và song song với d_2 nên $\vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (-3; 3; 3) = 3(1; -1; -1)$

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $(-1; 1; 2)$ và có VTPT $\vec{n}_{(P)}(1; -1; -1)$ có PT là:

$$x - y - z + 4 = 0 \Rightarrow d \in (M; (P)) = \frac{|3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Câu 60: Chọn C

Ta có: $\vec{n}_{(P)} = (1; 2; 2)$ và $\vec{u}_d = (2; 2; 1)$

$$\text{Khi đó } \sin(\widehat{d; (P)}) = \left| \cos(\vec{u}_d; \vec{n}_{(P)}) \right| = \frac{|2 + 4 + 2|}{\sqrt{1 + 4 + 4} \cdot \sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{8}{9}$$

$$\text{Lại có } d(M; (P)) = IM \cdot \sin(\widehat{d; (P)}) = 9 \cdot \frac{8}{9} = 8.$$

Câu 61: Chọn D

$$(P) // (Q) \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{-6}{-m} = \frac{12}{8} \neq \frac{-3}{2} \Leftrightarrow m = 4.$$

$$\text{Lấy điểm } A(-1; 0; 0) \in (Q) \text{ khi đó } d((P); (Q)) = d(M; (P)) = \frac{|-3 - 3|}{\sqrt{9 + 36 + 12^2}} = \frac{2}{\sqrt{21}}.$$

Câu 62: Chọn B

Mặt phẳng (P) có VTPT là: $\vec{n}_{(P)} = (1; -3; 1)$

Đường thẳng Δ có VTCP là: $\vec{u} = (2; 1; m)$ và đi qua điểm $M(0; -2; -2)$

$$\text{Để } \Delta // (P) \Rightarrow \vec{n}_{(P)} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 2 - 3 + m = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

$$\text{Khi đó } d(\Delta; (P)) = d(M; (P)) = \frac{|6 - 2 - 1|}{\sqrt{1 + 9 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$