

Lưu ý: Thí sinh không được phép sử dụng máy tính cầm tay.

Câu 1 (5,0 điểm):

a) Giải phương trình sau trên tập số thực: $2(3x+1)\sqrt{2x^2-1} = 10x^2 + 3x - 6$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x\sqrt{x} - 12\sqrt{y} + 3\sqrt{xy} = y\sqrt{y} - 25 \\ \sqrt{x} + 2y = x + \sqrt{xy} + 6 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 2 (5,0 điểm):

a) Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh $BC = a, CA = b, AB = c, \hat{A} = 60^\circ$ và $\frac{b-c}{a+c} = 2(\cos B - 1)$. Tính số đo góc B .

b) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D , có $CD = 2AD = 2AB$. Gọi $M(2; 4)$ là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AB = 3AM$. Điểm N thuộc cạnh BC sao cho tam giác DMN cân tại M . Phương trình đường thẳng MN là $2x + y - 8 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh B của hình thang $ABCD$ biết D thuộc đường thẳng $d: x + y = 0$ và điểm A thuộc đường thẳng $d': 3x + y - 8 = 0$.

Câu 3 (4,0 điểm):

Cho dãy số (u_n) :
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 2}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

a) Dãy số (u_n) là dãy số tăng hay dãy số giảm? Vì sao?

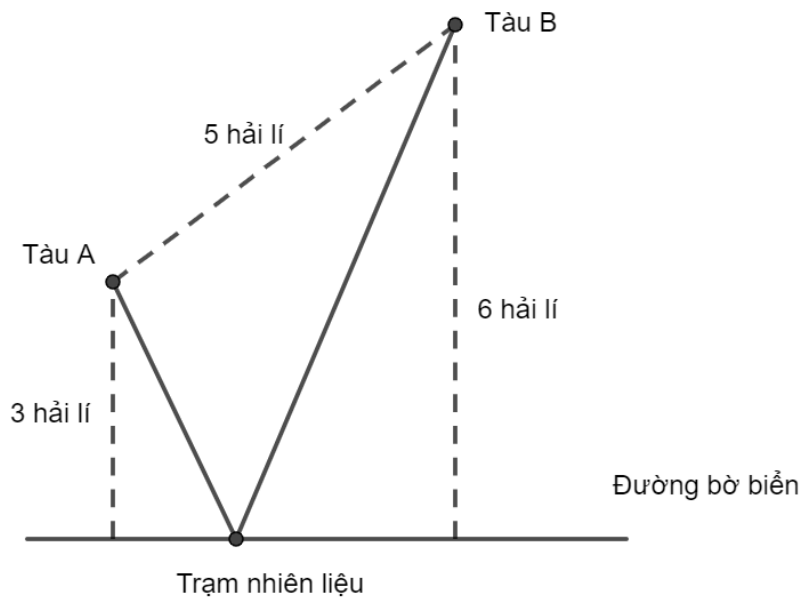
b) Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Câu 4 (3,0 điểm):

Cho tập hợp $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Gọi S là tập hợp các số nguyên dương gồm có sáu chữ số thỏa mãn điều kiện sau: “sáu chữ số của mỗi số nguyên dương trong S lập thành một tập hợp chứa đúng ba phần tử của tập X ”. Tìm số phần tử của tập hợp S .

Câu 5 (3,0 điểm):

Có hai tàu A và B cùng phía với con đường bờ biển. Biết tàu A, tàu B lần lượt cách con đường bờ biển là 3 hải lí và 6 hải lí; khoảng cách giữa hai tàu A và B là 5 hải lí (như hình vẽ bên dưới). Người ta muốn xây dựng một trạm nhiên liệu dọc theo con đường bờ biển. Hỏi phải đặt trạm nhiên liệu cách tàu A bao nhiêu hải lí để tổng khoảng cách từ trạm nhiên liệu đến hai tàu A và B là ngắn nhất?



..... **Hết**

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh:

Cán bộ coi thi 1 (ký, ghi rõ họ tên)

Cán bộ coi thi 2 (ký, ghi rõ họ tên)

.....

.....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

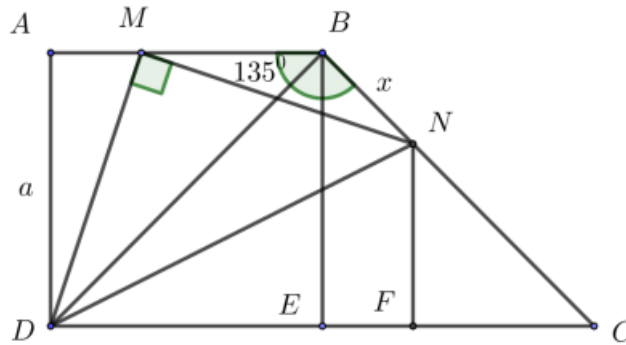
HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Hướng dẫn chấm gồm 06 trang)

	HƯỚNG DẪN CHẤM	Điểm
Câu 1a (3,0đ)	Giải phương trình sau trên tập số thực: $2(3x+1)\sqrt{2x^2-1} = 10x^2 + 3x - 6$.	
	Điều kiện: $\begin{cases} x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$	0,5
	Đặt $t = \sqrt{2x^2-1}, t \geq 0$. Ta có: $4t^2 - 2(3x+1)t + 2x^2 + 3x - 2 = 0$ (1)	0,5
	$\Delta' = (x-3)^2$.	0,25
	Khi đó (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2x-1}{2} \\ t = \frac{x+2}{2} \end{cases}$	0,25
	Với $t = \frac{2x-1}{2} \Rightarrow \sqrt{2x^2-1} = \frac{2x-1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2 + x - \frac{5}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = \frac{-1+\sqrt{6}}{2} (n) \\ x = \frac{-1-\sqrt{6}}{2} (l) \end{cases}$	0,5
	Với $t = \frac{x+2}{2} \Rightarrow \sqrt{2x^2-1} = \frac{x+2}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ \frac{7}{4}x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x = \frac{2+2\sqrt{15}}{7} (n) \\ x = \frac{2-2\sqrt{15}}{7} (n) \end{cases}$	0,5
$S = \left\{ \frac{-1+\sqrt{6}}{2}; \frac{2\pm 2\sqrt{15}}{7} \right\}$	0,5	

Câu 1b (2,0đ)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{x} - 12\sqrt{y} + 3\sqrt{xy} = y\sqrt{y} - 25 & (1) \\ \sqrt{x} + 2y = x + \sqrt{xy} + 6 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$	
	Điều kiện xác định: $x \geq 0, y \geq 0$.	0,25
	Nhân hai vế phương trình thứ hai trong hệ cho 3 rồi cộng vế theo vế với phương trình thứ nhất ta được	0,25
	$x\sqrt{x} - 12\sqrt{y} + 3\sqrt{xy} + 3\sqrt{x} + 6y = y\sqrt{y} + 3x + 3\sqrt{xy} - 7$ $\Leftrightarrow x\sqrt{x} - 3x + 3\sqrt{x} - 1 = y\sqrt{y} - 6y + 12\sqrt{y} - 8$	
	$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^3 = (\sqrt{y} - 2)^3$	0,25
	$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = \sqrt{y} - 2$ $\Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x} + 1$	0,25
	Thay $\sqrt{y} = \sqrt{x} + 1$ vào (2) ta được $\sqrt{x} + 2(\sqrt{x} + 1)^2 = x + \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) + 6$ $\Leftrightarrow 4\sqrt{x} = 4$ $\Leftrightarrow x = 1$	0,5
	Với $x = 1 \Rightarrow y = 4$. Vậy hệ có nghiệm là $(1; 4)$.	0,5
Câu 2a (3,0đ)	Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh $BC = a, CA = b, AB = c, \hat{A} = 60^\circ$ và $\frac{b-c}{a+c} = 2(\cos B - 1)$. Tính số đo góc B.	
	Vì $\hat{A} = 60^\circ$ nên $a^2 = b^2 + c^2 - bc$	0,25
	$\Leftrightarrow a^2 - b^2 = c^2 - bc. \quad (1)$	0,25
	$\frac{b-c}{a+c} = 2(\cos B - 1)$ $\Leftrightarrow \frac{b-c}{a+c} = \frac{(a^2 - b^2) + c^2 - 2ac}{ac}$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{b-c}{a+c} = \frac{2c - b - 2a}{a} \quad (\text{do (1)})$	0,5
	$\Leftrightarrow 2(a^2 - c^2) + 2ab + bc - ac = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow 2b^2 + 2ab - bc - ac = 0 \quad (\text{do } a^2 - c^2 = b^2 - bc)$	
	$\Leftrightarrow (2b - c)(a + b) = 0$ $\Leftrightarrow c = 2b$	0,25
	Thay $c = 2b$ vào (1) ta được $a^2 + b^2 = c^2$.	0,5
	Vậy ΔABC vuông tại $C \Rightarrow \hat{B} = 30^\circ$.	0,5

**Câu 2b
(2,0đ)**

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D , có $CD = 2AD = 2AB$. Gọi $M(2; 4)$ là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AB = 3AM$. Điểm N thuộc cạnh BC sao cho tam giác DMN cân tại M . Phương trình đường thẳng MN là $2x + y - 8 = 0$. Tìm tọa độ đỉnh B của hình thang $ABCD$ biết D thuộc đường thẳng $d: x + y = 0$ và điểm A thuộc đường thẳng $d': 3x + y - 8 = 0$.



+) Đặt $BN = x, AB = a \Rightarrow MD = MN = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$.

Xét $\triangle BMN$ có

$$MN^2 = MB^2 + BN^2 - 2MB \cdot BN \cdot \cos \widehat{MBN} \Leftrightarrow \frac{10a^2}{9} = \frac{4a^2}{9} + x^2 - 2 \cdot \frac{2a}{3} \cdot x \cdot \cos 135^\circ$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}ax - \frac{2a^2}{3} = 0 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

0,25

Gọi E là chân đường vuông góc hạ từ B , kẻ NF vuông góc với DC . Ta có

$$\frac{NF}{BE} = \frac{CN}{CB} = \frac{CF}{CE}$$

$$\Leftrightarrow \frac{NF}{a} = \frac{2}{3} = \frac{CF}{a} \Leftrightarrow NF = CF = \frac{2a}{3} \Rightarrow DN = \sqrt{\left(\frac{4a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$$

0,25

$$MD^2 + MN^2 = \frac{10a^2}{9} + \frac{10a^2}{9} = \frac{20a^2}{9} = DN^2. \text{ Suy ra } \triangle DMN \text{ vuông tại } M$$

+) Vì D thuộc đường thẳng $d: x + y = 0$ nên

$$D(d; -d) \Rightarrow \overrightarrow{MD} = (d - 2; -d - 4).$$

Phương trình đường thẳng $MN: 2x + y - 8 = 0$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; 2)$

0,25

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MD} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow d = -2 \Rightarrow D(-2; 2).$$

+) Điểm A thuộc đường thẳng $d': 3x + y - 8 = 0$ nên $A(a; -3a + 8)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DA} = (a + 2; -3a + 6), \overrightarrow{MA} = (a - 2; -3a + 4)$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

0,25

*) Trường hợp 1: $a = 1 \Rightarrow A(1; 5)$.

$$\text{Giả sử } B(x; y) \text{ ta có } \overrightarrow{AB} = (x - 1; y - 5); \overrightarrow{AM} = (1; -1) \Rightarrow 3\overrightarrow{AM} = (3; -3)$$

	<p>Vì $AB = 3AM \Rightarrow \overline{AB} = 3\overline{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=3 \\ y-5=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow B(4; 2).$</p> <p>Nhận trường hợp 1 vì $AB = AD.$</p>	0,5
	<p>*) Trường hợp 2: $a = 2 \Rightarrow A(2; 2).$</p> <p>Giả sử $B(x; y)$ ta có $\overline{AB} = (x-2; y-2); \overline{AM} = (0; 2) \Rightarrow 3\overline{AM} = (0; 6)$</p> <p>Vì $AB = 3AM \Rightarrow \overline{AB} = 3\overline{AM} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ y-2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases} \Rightarrow B(2; 8).$</p> <p>Loại trường hợp 2 vì $AB \neq AD.$</p>	0,5
Câu 3a (2,0đ)	<p>Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$</p> <p>a) Dãy số (u_n) là dãy số tăng hay dãy số giảm? Vì sao?</p>	
	<p>Trước hết ta chứng minh $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$</p> <p>Ta có $u_1 = 1 > 0.$ Giả sử $u_k > 0, k \in \mathbb{N}^*.$ Khi đó $u_{k+1} = \frac{u_k}{u_k + 2} > 0.$</p>	0,5
	<p>Theo nguyên lý quy nạp ta có $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$</p>	0,5
	<p>Khi đó ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 - u_n}{u_n + 2} < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$</p>	0,5
	<p>Suy ra dãy số đã cho là dãy số giảm.</p>	0,5
Câu 3b (2,0đ)	<p>Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$</p> <p>b) Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số $(u_n).$</p>	
	<p>$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 2} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_n + 2}{u_n} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = 1 + \frac{2}{u_n}.$</p>	0,5
	<p>$\Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} + 1 = 2\left(\frac{1}{u_n} + 1\right).$</p>	0,5
	<p>Suy ra dãy số $(v_n): v_n = \frac{1}{u_n} + 1$ lập thành cấp số nhân với $v_1 = 2, q = 2$</p> <p>nên ta có $\frac{1}{u_n} + 1 = 2.2^{n-1}.$</p>	0,5
	<p>Vậy công thức số hạng tổng quát của dãy số $(u_n): u_n = \frac{1}{2^n - 1}.$</p>	0,5

<p>Câu 4 (3,0đ)</p>	<p>Cho tập hợp $X = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Gọi S là tập hợp các số nguyên dương gồm có sáu chữ số thỏa mãn điều kiện sau: “sáu chữ số của mỗi số nguyên dương trong S lập thành một tập hợp chứa đúng ba phần tử của tập X”. Tìm số phần tử của tập hợp S.</p>	
	<p>Chọn bộ $(a;b;c)$ gồm 3 chữ số từ X có $C_9^3 = 84$ cách.</p>	<p>0,25</p>
	<p>Như vậy S được phân hoạch thành 84 tập rời nhau $T_i, i = 1,2,\dots,84$ tương ứng với 84 bộ trên và số phần tử của mỗi tập phân hoạch đó là bằng nhau. Ta tính số số phần tử của mỗi tập T_i đó ứng với bộ $(a;b;c)$.</p>	<p>0,25</p>
	<p>Với mỗi bộ $(a;b;c)$ ta viết được 3^6 số có sáu chữ số. Ta đếm số lượng các số vi phạm yêu cầu bài toán.</p>	<p>0,5</p>
	<p>TH1: Có 3 số dạng aaaaaa, bbbbbb, cccccc.</p>	<p>0,5</p>
	<p>TH2: Số lượng các số có sáu chữ số được viết bởi đúng hai chữ số a và b. $2^6 - 2$.</p>	<p>0,5</p>
	<p>TH3: Số lượng các số có sáu chữ số được viết bởi đúng hai chữ số a và c. $2^6 - 2$.</p> <p>TH4: Số lượng các số có sáu chữ số được viết bởi hai chữ số b và c. $2^6 - 2$.</p>	<p>0,5</p>
	<p>Vậy mỗi bộ $(a;b;c)$ có tất cả $3^6 - 3 - 3(2^6 - 2) = 540$ số. Có tất cả $540.84 = 45360$ số.</p>	<p>0,5</p>
<p>Câu 5 (3,0đ)</p>	<p>Có hai tàu A và B cùng phía với con đường bờ biển. Biết tàu A, tàu B lần lượt cách con đường bờ biển là 3 hải lí và 6 hải lí; khoảng cách giữa hai tàu A và B là 5 hải lí (như hình vẽ bên dưới). Người ta muốn xây dựng một trạm nhiên liệu dọc theo con đường bờ biển. Hỏi phải đặt trạm nhiên liệu cách tàu A bao nhiêu hải lí để tổng khoảng cách từ trạm nhiên liệu đến hai tàu A và B là ngắn nhất?</p>	
	<div style="text-align: center;"> </div> <p>Chọn hệ trục tọa độ (Oxy) như hình vẽ.</p>	<p>0,25</p>

<p>Tìm được $A(0;3), B(4;6)$.</p>	0,25
<p>Có $A'(0;-3)$ là điểm đối xứng với A qua trục Ox.</p>	0,25
<p>Gọi C là điểm đặt trạm nhiên liệu. Ta có $(AC + BC)$ min khi và chỉ khi $C = A'B \cap Ox$.</p>	0,25
<p>Phương trình đường thẳng $A'B: 9x - 4y - 12 = 0$.</p>	0,5
<p>Tọa độ của điểm $C(x;y)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 9x - 4y - 12 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.</p> <p>Vậy $C\left(\frac{4}{3}; 0\right)$.</p>	0,5
<p>$AC = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{97}}{3}$.</p>	0,5
<p>Vậy trạm nhiên liệu phải đặt cách tàu A là $\frac{\sqrt{97}}{3}$ hải lí.</p>	0,5

Lưu ý: Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong hướng dẫn chấm mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.

---HẾT---