CHUYÊN ĐỀ

BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TÍNH GIÁ TRỊ CỦA TÍCH PHÂN KHI BIẾT MỘT HAY NHIỀU TÍCH PHÂN VỚI ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Cho f là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử F là một nguyên hàm của f trên $[a;b]$. Hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a;b]$ của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

Ta dùng kí hiệu $F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a)$ để chỉ hiệu số $F(b)-F(a)$.

Vậy $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a)$.

***Nhận xét*:** Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ hay $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

***Ý nghĩa hình học của tích phân*:** Nếu hàm số f liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì tích phân $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ là diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a, x=b.$ Vậy $S=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

2. Tính chất của tích phân

1. $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
2. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$
3. $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x \; (a<b<c)$
4. $\int\limits_a^b k.f(x)\mathrm{d}x = k.\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \; (k\in\mathbb{R})$
5. $\int\limits_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Lưu ý:

1) $f(x)$ là hàm số chẵn và liên tục trên đoạn $[-a;a]$, $a>0$ thì $\int\limits_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^a f(x)\mathrm{d}x$

2) $f(x)$ là hàm số lẻ và liên tục trên đoạn $[-a;a]$, $a>0$ thì $\int\limits_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

3) $f(x)$ là hàm số liên tục, tuần hoàn với chu kì T thì

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\mathrm{d}x, \forall a \in R$$

B. BÀI TẬP

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f(0)=0$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x f(x)\mathrm{d}x = \left[-\cos x f(x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x f'(x)\mathrm{d}x$. Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x f'(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

Hơn nữa ta tính được $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{2x+\sin 2x}{4}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

Do đó

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x - 2.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)-\cos x\right]^2\mathrm{d}x = 0$.

Suy ra $f'(x)=\cos x$, do đó $f(x)=\sin x + C$. Vì $f(0)=0$ nên $C=0$.

Ta được $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x = 1$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn, $f(1)=0$, $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x = \int_0^1 (x+1)e^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{e^2-1}{4}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$\int_0^1 (x+1)e^x f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}\left(xe^x\right) = \left(xe^x f(x)\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 xe^x f'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 xe^x f'(x)\mathrm{d}x$.

Suy ra $\int_0^1 xe^x f'(x)\mathrm{d}x = -\frac{e^2-1}{4}$.

Hơn nữa ta tính được $\int_0^1 \left(xe^x\right)^2\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2e^{2x}\mathrm{d}x = \frac{e^2-1}{4}$.

Do đó $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x + 2\int_0^1 xe^x f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1\left(xe^x\right)^2\mathrm{d}x = 0$

$\Leftrightarrow \int_0^1\left[f'(x)+xe^x\right]^2\mathrm{d}x = 0$. Suy ra $f'(x) = -xe^x$, do đó $f(x) = -(x-1)e^x + C$.

Vì $f(1)=0$ nên $C=0$.

Ta được $\int\limits_0^1 f(x)dx=-\int\limits_0^1(x-1)e^x dx=e-2$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$, $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{30}$,

$\int\limits_0^1(2x-1)f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{30}$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int\limits_0^1(2x-1)f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}\left(x^2-x\right)=\left(\left(x^2-x\right)f(x)\right)\Big|_0^1-\int_0^1\left(x^2-x\right)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1\left(x^2-x\right)f'(x)\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int_0^1\left(x^2-x\right)f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{30}$.

Hơn nữa ta tính được $\int_0^1\left(x^2-x\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^4-2x^3+x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{30}$.

Do đó $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1\left(x^2-x\right)f'(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1\left(x^2-x\right)^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f'(x)-\left(x^2-x\right)\right]^2\mathrm{d}x=0$.

Suy ra $f'(x)=x^2-x$, do đó $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+C$. Vì $f(0)=1$ nên $C=1$.

Ta được $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+1\right)\mathrm{d}x=\frac{11}{12}$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{9}$

và $\int\limits_0^1 x^3 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{36}$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int\limits_0^1 4x^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}\left(x^4\right)=\left(x^4 f(x)\right)\Big|_0^1-\int_0^1 x^4 f'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 x^4 f'(x)\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int_0^1 x^4 f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{9}$. Hơn nữa ta tính được $\int_0^1\left(x^4\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^1 x^8\mathrm{d}x=\frac{1}{9}$.

Do đó $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1 x^4 f'(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^1\left(x^4\right)^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\int\limits_0^1\left[f'(x)-x^4\right]^2\mathrm{d}x=0$.

Suy ra $f'(x)=x^4$, do đó $f(x)=\frac{x^5}{5}+C$. Vì $f(1)=0$ nên $C=-\frac{1}{5}$.

Ta được $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{x^5-1}{5}\mathrm{d}x=-\frac{1}{6}$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;e]$ thỏa mãn $f(e)=0$, $\int_1^e [f'(x)]^2\,dx = e-2$ và $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = 2-e$. Tích phân $\int_1^e f(x)\,dx$ bằng

Lời giải

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_0^1 f(x)\,d(\ln x) = \left(\ln x f(x)\right)\Big|_1^e - \int_0^1 \ln x f'(x)\,dx = -\int_1^e \ln x f'(x)\,dx.$$

$$\Rightarrow \int_1^e \ln x f'(x)\,dx = e-2$$

Suy ra $\int_1^e (\ln x)^2\,dx = \left[x(\ln x)^2\right]\Big|_1^e - 2\int_1^e \ln x\,dx = e-2$.

Do đó $\int_1^e [f'(x)]^2\,dx - 2\int_1^e \ln x f'(x)\,dx + \int_1^e (\ln x)^2\,dx = 0 \Leftrightarrow \int_1^e [f'(x)-\ln x]^2\,dx = 0$.

Suy ra $f'(x)=\ln x$, do đó $f(x) = x\ln x - x + C$. Vì $f(e)=0$ nên $C=0$.

Ta được $\int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e (x-1)\ln x\,dx = \frac{3-e^2}{4}$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + x\cos x) f(x)\,dx = -\frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8}$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2\,dx = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8}$. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

Lời giải

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + x\cos x) f(x)\,dx = \left[(x\sin x) f(x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin x) f'(x)\,dx.$$

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin x) f'(x)\,dx = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8}$.

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin x)^2\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2\sin^2 x\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2(1-\cos 2x)}{2}\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2(1-\cos 2x)}{2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{2}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2\cos 2x}{2}\,dx = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8}.$$

Do đó

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x)]^2\,dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin x) f'(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\sin x)^2\,dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f'(x) - x\sin x]^2\,dx = 0.$$

Suy ra $f'(x) = x\sin x$, do đó $f(x) = \sin x - x\cos x + C$. Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ nên $C=-1$.

Ta được $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - x\cos x - 1)\mathrm{d}x = 2 - \pi$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = \frac{3}{2} - 2\ln 2$ và $\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int\limits_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \left[\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)f(x)\right]\Bigg|_0^1 - \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)f'(x)\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)f'(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2} - 2\ln 2$.

Lại có $\int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^2 \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left(1 - 2\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x = \left[x - 2\ln|x+1| - \frac{1}{(x+1)}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2} - 2\ln 2$.

Do đó

$$\int\limits_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)f'(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)^2 \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^3 \left[f'(x) + \frac{1}{x+1} - 1\right]^2 \mathrm{d}x = 0.$$

Suy ra $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$, do đó $f(x) = x - \ln(x+1) + C$. Vì $f(1) = 0$ nên $C = \ln 2 - 1$.

Ta được $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 [x - \ln(x+1) + \ln 2 - 1]\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \ln 2$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{11}$ và $\int\limits_0^1 x^4 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{55}$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$\int\limits_0^1 x^4 f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5}f(x)\right]\Bigg|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x^5}{5}f'(x)\mathrm{d}x$. Suy ra $\int\limits_0^1 x^5 f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{11}$.

Lại có: $\int\limits_0^1 (x^5)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{11}$.

Do đó $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x - 2\int\limits_0^1 x^5 f'(x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 (x^5)^2 \mathrm{d}x = 0$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 [f'(x) - x^5]^2 \mathrm{d}x = 0$. Suy ra $f'(x) = x^5$, do đó $f(x) = \frac{1}{6}x^6 + C$.

Vì $f(1) = 0$ nên $C = -\frac{1}{6}$.

Ta được $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^6-1}{6}\mathrm{d}x = \frac{-1}{7}$.

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(4-x)=f(x)$. Biết $\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x = 5$. Tính $I=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Đặt $t=4-x$. Ta có $\int_1^3 xf(x)\mathrm{d}x = \int_1^3 xf(4-x)\mathrm{d}x = \int_1^3 (4-t)f(t)\mathrm{d}t = 4\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t - \int_1^3 t.f(t)\mathrm{d}t$

$\Rightarrow 5 = 4\int_1^3 f(t)\mathrm{d}t - 5 \Rightarrow \int_1^3 f(t)\mathrm{d}t = \frac{5}{2}$.

Câu 10. Biết $\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+3}{x+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}+b\ln\frac{3}{2}$ $(a,b>0)$. Tìm các giá trị của k để $\int_8^{ab}\mathrm{d}x < \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}$.

Lời giải

Ta có: $\int_0^1 \frac{x^3+2x^2+3}{x+2}\mathrm{d}x = \int_0^1\left(x^2+\frac{3}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \left.\frac{1}{3}x^3+3\ln|x+2|\right|_0^1 = \frac{1}{3}+3\ln\frac{3}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \int_8^{ab}\mathrm{d}x = \int_8^9 \mathrm{d}x = 1$

Mà $\int_8^{ab}\mathrm{d}x < \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018} \Rightarrow 1 < \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}$

Mặt khác ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018} = k^2+1$.

Vậy để $\int_8^{ab}\mathrm{d}x < \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(k^2+1)x+2017}{x+2018}$ thì $1<k^2+1 \Rightarrow k^2>0 \Rightarrow k\neq 0$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên $[-4;4]$ biết $\int_{-2}^0 f(-x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_1^2 f(-2x)\mathrm{d}x = 4$. Tính $I=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Xét tích phân $\int_{-2}^0 f(-x)\mathrm{d}x = 2$.

Đặt $-x=t \Rightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$.
Đổi cận: khi $x=-2$ thì $t=2$; khi $x=0$ thì $t=0$

Do đó $\int_{-2}^0 f(-x)\mathrm{d}x = -\int_2^0 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = 2 \Rightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$.

Do hàm số $y=f(x)$ là hàm số lẻ nên $f(-2x)=-f(2x)$.

Do đó $\int_1^2 f(-2x)\mathrm{d}x = -\int_1^2 f(2x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int_1^2 f(2x)\mathrm{d}x = -4$.

Xét $\int_1^2 f(2x)\mathrm{d}x$.

Đặt $2x = t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{dt}$.

Đổi cận: khi $x = 1$ thì $t = 2$; khi $x = 2$ thì $t = 4$

Do đó $\int_1^2 f(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^4 f(t)\mathrm{dt} = -4$

$\Rightarrow \int_2^4 f(t)\mathrm{dt} = -8 \Rightarrow \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = -8$.

Do $I = \int_0^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = 2 - 8 = -6$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ xá định trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x) - 2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x = \frac{2-\pi}{2}$.

Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin 2x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi-2}{2}.$$

Do đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x) - 2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x = \frac{2-\pi}{2} + \frac{\pi-2}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x) - 2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + 2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x) - \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2\mathrm{d}x = 0$$

Suy ra $f(x) - \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = 0$, hay $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x = -\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(0\right)=1$. Tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases}u=f\left(x\right)\Rightarrow \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}v=\sin x\mathrm{d}x\Rightarrow v=-\cos x\end{cases}$

$\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f\left(x\right)\mathrm{d}x=\left(-\cos x.f\left(x\right)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.f\left(x\right)\mathrm{d}x+\cos x.f\left(x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1-1=0$.

Câu 14. Cho số thực $a>0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $\left[0;a\right]$ thỏa mãn $f(x).f(a-x)=1$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^a\frac{1}{1+f\left(x\right)}\mathrm{d}x$?

Lời giải

Đặt $t=a-x\Rightarrow \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$.

Thay vào ta được $I=\int\limits_0^a\frac{1}{1+f\left(x\right)}\mathrm{d}x=\int\limits_0^a\frac{1}{1+f\left(a-t\right)}\mathrm{d}t=\int\limits_0^a\frac{1}{1+f\left(a-x\right)}\mathrm{d}x$.

Suy ra $0=\int\limits_0^a\left[\frac{f\left(a-x\right)-f\left(x\right)}{\left(1+f\left(x\right)\right)\left(1+f\left(a-x\right)\right)}\right]\mathrm{d}x$

Do hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $\left[0;a\right]$. Suy ra $f\left(a-x\right)=f\left(x\right)$.

Mà $f(x).f(a-x)=1\Rightarrow f\left(x\right)=1$.

Vậy $I=\int\limits_0^a\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{a}{2}$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục, luôn dương trên $\left[0;3\right]$ và thỏa mãn $I=\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Tính giá trị của tích phân $K=\int\limits_0^3\left(e^{1+\ln\left(f\left(x\right)\right)}+4\right)\mathrm{d}x$

Lời giải

Ta có $K=\int\limits_0^3\left(\mathrm{e}^{1+\ln\left(f\left(x\right)\right)}+4\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^3\mathrm{e}^{1+\ln\left(f\left(x\right)\right)}\mathrm{d}x+\int\limits_0^3 4\mathrm{d}x=\mathrm{e}.\int\limits_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_0^3 4\mathrm{d}x=4\mathrm{e}+4x\Big|_0^3=4\mathrm{e}+12$.

Vậy $K=4\mathrm{e}+12$.

Câu 16. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int\limits_0^{2018} f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$. Tính tích phân $\int\limits_0^{\sqrt{\mathrm{e}^{2018}-1}}\frac{x}{x^2+1}f\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Đặt $I=\int\limits_0^{\sqrt{e^{2018}-1}}\frac{x}{x^2+1}f\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)dx$.

Đặt $t=\ln\left(x^2+1\right)\ \Rightarrow dt=\frac{2x}{x^2+1}dx$.

Đổi cận: $x=0\ \Rightarrow t=0$; $x=\sqrt{e^{2018}-1}\ \Rightarrow t=2018$.

Vậy $I=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2018}f\left(t\right)dt\ =\frac{1}{2}.\int\limits_0^{2018}f\left(x\right)dx=1$.

Câu 17. Cho $f\left(x\right)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f\left(1\right)=1$ và $\int\limits_0^1 f\left(t\right)dt=\frac{1}{3}$, tính $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.f'\left(\sin x\right)dx$

Lời giải

Đặt $\sin x=t\Rightarrow f\left(\sin x\right)=f\left(t\right)\Rightarrow \cos x.f'\left(\sin x\right)dx=f'\left(t\right)dt$

Đổi cận: khi $x=0\Rightarrow t=0$; $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x.f'\left(\sin x\right)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x.\cos x.f'\left(\sin x\right)dx=2\int\limits_0^1 t.f'\left(t\right)dt$$

Đặt: $\begin{cases}u=t\\ dv=f'\left(t\right)dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dt\\ v=f\left(t\right)\end{cases}$.

$$I=2\left[\left(t.f\left(t\right)\right)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f\left(t\right)dt\right]=2\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}.$$

Câu 18. Cho $f\left(x\right)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=4$, $\int\limits_0^3 f\left(x\right)dx=6$. Tính $I=\int\limits_{-1}^1 f\left(\left|2x+1\right|\right)dx$.

Lời giải

Đặt $u=2x+1\Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$.

$x=-1\ \Rightarrow\ u=-1$.

$x=1\ \Rightarrow\ u=3$.

Nên $I=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^3 f\left(\left|u\right|\right)du=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^0 f\left(\left|u\right|\right)du+\int\limits_0^3 f\left(\left|u\right|\right)du\right)=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-1}^0 f\left(-u\right)du+\int\limits_0^3 f\left(u\right)du\right)$.

Xét $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=4$. Đặt $x=-u\Rightarrow dx=-du$.

Khi $x=0$ thì $u=0$. Khi $x=1$ thì $u=-1$.

Nên $4=\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx=-\int\limits_0^{-1}f\left(-u\right)du=\int\limits_{-1}^0 f\left(-u\right)du$.

Ta có $\int\limits_0^3 f\left(x\right)dx=6\Rightarrow\int\limits_0^3 f\left(u\right)du=6$.

Nên $I=\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{0} f(-u)\mathrm{d}u+\int_{0}^{3} f(u)\mathrm{d}u\right)=\frac{1}{2}(4+6)=5$.

Câu 19. Cho $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x=-1$. Tính $I=\int_{-1}^{2}\left[x+2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x$

Lời giải

Ta có: $I=\int_{-1}^{2}\left[x+2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2} x\mathrm{d}x+2\int_{-1}^{2} \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x-3\int_{-1}^{2} \mathrm{g}(x)\mathrm{d}x=\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{2}+4+3=\frac{17}{2}$.

Câu 20. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $\int_{0}^{2} x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x=2$. Tính $I=\int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x$

Lời giải

Xét tích phân $\int_{0}^{2} x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x=2$

Đặt $x^2=t\Rightarrow x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2}$.

Đổi cận: Khi $x=0$ thì $t=0$; khi $x=2$ thì $t=4$.

Do đó $\int_{0}^{2} x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x=2\Leftrightarrow\frac{1}{2}\int_{0}^{4} f(t)\mathrm{d}t=2\Leftrightarrow\int_{0}^{4} f(t)\mathrm{d}t=4\Rightarrow\int_{0}^{4} f(x)\mathrm{d}x=4$

Vậy $I=4$.

Câu 21. Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa: $\int_{1}^{3}\left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10$.

$\int_{1}^{3}\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_{1}^{3}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có $\int_{1}^{3}\left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x+3\int_{1}^{3} g(x)\mathrm{d}x=10$.

Tương tự $\int_{1}^{3}\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6\Leftrightarrow 2\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{3} g(x)\mathrm{d}x=6$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases}u+3v=10\\2u-v=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=4\\v=2\end{cases}$, trong đó $u=\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$, $v=\int_{1}^{3} g(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int_{1}^{3}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} g(x)\mathrm{d}x=4+2=6$.

Câu 22. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2)=-2$, $\int_{0}^{2} f(x)\mathrm{d}x=1$.

Tính tích phân $I=\int_{0}^{4} f'\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Đặt $\sqrt{x}=t\Rightarrow\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

Đổi cận: $x\in[0;4]\Rightarrow t\in[0;2]$.

$I=2\int\limits_0^2 t.f'(t)\mathrm{d}t$.

Sử dụng phương pháp tính tích phân từng phần ta được:

$I=2\left[tf(t)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 f(t).\mathrm{d}t\right]=-10.$

Câu 23. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Đồng thời thỏa mãn $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\mathrm{d}x=3\pi$, $\int\limits_0^{\pi}(\sin x-x)f'(\frac{x}{2})\mathrm{d}x=6\pi$ và $f(\frac{\pi}{2})=0$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(f''(x))^3\mathrm{d}x$

Lời giải

$6\pi=\int\limits_0^{\pi}(\sin x-x)2f'(\frac{x}{2})\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-2x)f'(x)\mathrm{d}x$

$=(\sin 2x-2x)f(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-2x)''f(x)\mathrm{d}x$

$=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)f(x)\mathrm{d}x=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}$

Cách 1:

Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\mathrm{d}x=3\pi$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{4}$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xf^2(x)\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{16}$

Do đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\mathrm{d}x-8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\mathrm{d}(x)+16\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-4\sin^2 x\right]\mathrm{d}x=0$.

Vậy $f(x)=4\sin^2 x$.

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức $\frac{9\pi^2}{16}=\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x.\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{9\pi^2}{16}$.

Dấu "=" xảy ra khi $f(x)=k\sin^2 x$ mà $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{16}\Leftrightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}k\sin^4 x\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{16}$

nên $f(x)=4\sin^2 x$.

Vậy $f(x)=4\sin^2 x=2-2\cos 2x$ nên $f''(x)=8\cos 2x$ nên

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(f''(x))^3\mathrm{d}x=512\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x)^3\mathrm{d}x=0$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[1;8]$ thỏa mãn:

$\int\limits_1^2\left[f(x^3)\right]^2\mathrm{d}x+2\int\limits_1^2 f(x^3)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int\limits_1^8 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_1^2(x^2-1)^2\mathrm{d}x$. Tính tích phân $\int\limits_1^2\left[f'(x)\right]^3\mathrm{d}x$

Lời giải

Đặt $x=t^3 \Rightarrow \mathrm{d}x=3t^2.\mathrm{d}t$.

Với $x=1 \Rightarrow t=1$; $x=8 \Rightarrow t=2$.

Ta được: $\dfrac{2}{3}\int\limits_1^8 f(x)\mathrm{d}x=2\int\limits_1^2 t^2 f(t^3)\mathrm{d}t=2\int\limits_1^2 x^2 f(x^3)\mathrm{d}x.$

Thay vào giả thiết ta được:

$$\int\limits_1^2\left[f(x^3)\right]^2\mathrm{d}x+2\int\limits_1^2 f(x^3)\mathrm{d}x=2\int\limits_1^2 x^2 f(x^3)\mathrm{d}x-\int\limits_1^2(x^2-1)^2\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_1^2\left[f(x^3)\right]^2\mathrm{d}x+2\int\limits_1^2 f(x^3)\mathrm{d}x-2\int\limits_1^2 x^2 f(x^3)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2(1-x^2)^2\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_1^2\left(\left[f(x^3)\right]^2+2f(x^3).(1-x^2)+(1-x^2)^2\right)\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_1^2\left(f(x^3)+(1-x^2)\right)^2\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \left(f(x^3)+(1-x^2)\right)^2=0 \Leftrightarrow f(x^3)=x^2-1 \Rightarrow f(x)=\sqrt[3]{x^2}-1$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}.\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

Do đó : $\int\limits_1^2\left[f'(x)\right]^3\mathrm{d}x=\dfrac{8}{27}\int\limits_1^2\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{8}{27}.(\ln x)\Big|_1^2=\dfrac{8.\ln 2}{27}$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int\limits_{-5}^1 f(x)\mathrm{d}x=9$. Tính tích phân $\int\limits_0^2\left[f(1-3x)+9\right]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Đặt $t=1-3x \Rightarrow \mathrm{d}t=-3\mathrm{d}x$.

Với $x=0 \Rightarrow t=1$ và $x=2 \Rightarrow t=-5$.

Ta có $\int\limits_0^2\left[f(1-3x)+9\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f(1-3x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^2 9\mathrm{d}x=\int\limits_1^{-5}\left[f(t)\right]\dfrac{\mathrm{d}t}{-3}+9x\Big|_0^2=\dfrac{1}{3}\int\limits_{-5}^1\left[f(x)\right]\mathrm{d}x+18$

$=\dfrac{1}{3}.9+18=21$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm dương, liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(0)=1$ và $3\int\limits_0^1\left[f'(x)\left[f(x)\right]^2+\dfrac{1}{9}\right]\mathrm{d}x\le 2\int\limits_0^1\sqrt{f'(x)}f(x)\mathrm{d}x$. Tính tích phân $\int\limits_0^1\left[f(x)\right]^3\mathrm{d}x$:

Lời giải

Từ giả thiết suy ra:

$$\int\limits_0^1\left[\left(3\sqrt{f'(x)}f(x)\right)^2-2.3\sqrt{f'(x)}f(x)+1\right]\mathrm{d}x\le 0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1\left[3\sqrt{f'(x)}f(x)-1\right]^2\mathrm{d}x\le 0.$$

Suy ra $3\sqrt{f'(x)}f(x)-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{f'(x)}f(x)=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow f'(x).f^2(x)=\dfrac{1}{9}$.

Vì $\left[f^3(x)\right]'=3.f^2(x)f'(x)$ nên suy ra $\left[f^3(x)\right]'=\dfrac{1}{3} \Rightarrow f^3(x)=\dfrac{1}{3}x+C$.

Vì $f(0)=1$ nên $f^3(0)=1 \Rightarrow C=1$.

Vậy $\Rightarrow f^3(x)=\frac{1}{3}x+1$.

Suy ra $\int_0^1 \left[f(x)\right]^3 \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x+1\right)\mathrm{d}x = \frac{7}{6}$.

Câu 27. Cho a là hằng số thực và hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^2 f(x-a)\mathrm{d}x = 2017$. Tính giá trị của tích phân $I = \int_{1-a}^{2-a} f(x)\mathrm{d}x$

Lời giải

Xét $\int_1^2 f(x-a)\mathrm{d}x = 2017$.

Đặt $t = x-a \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$

Đổi cận:

+ $x=1 \Rightarrow t = 1-a$

+ $x=2 \Rightarrow t = 2-a$

Khi đó $\int_1^2 f(x-a)\mathrm{d}x = \int_{1-a}^{2-a} f(t)\mathrm{d}t = \int_{1-a}^{2-a} f(x)\mathrm{d}x = 2017$.

Câu 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;5]$ và $f(5)=10$, $\int_0^5 xf'(x)\mathrm{d}x = 30$. Tính $\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = x \Rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow v = f(x) \end{cases}$

$\int_0^5 x.f'(x)\mathrm{d}x = \left(x.f(x)\right)\Big|_0^5 - \int_0^5 f(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow 30 = 5f(5) - \int_0^5 f(x)\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \int_0^5 f(x)\mathrm{d}x = 5f(5) - 30 = 20$.

Câu 29. Kí hiệu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Biết $F(3)=3$ và $\int_{-1}^2 F(x+1)\mathrm{d}x = 1$. Tính $I = \int_0^3 xf(x)\mathrm{d}x$

Lời giải

Đặt $t = x+1 \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Đổi cận: $\begin{cases} x=-1 \Rightarrow t=0 \\ x=2 \Rightarrow t=3 \end{cases}$

Khi đó $1 = \int_{-1}^2 F(x+1)\mathrm{d}x = \int_0^3 F(t)\mathrm{d}t = \int_0^3 F(x)\mathrm{d}x$

Xét tích phân $I=\int\limits_0^3 xf\left(x\right)\mathrm{d}x$ Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=f\left(x\right)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=F\left(x\right) \end{cases}$.

Suy ra $I=\int\limits_0^3 xf\left(x\right)\mathrm{d}x=xF\left(x\right)\Big|_0^3-\int\limits_0^3 F\left(x\right)\mathrm{d}x=3F\left(3\right)-1=8$.

Câu 30. Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=1$ và $\int\limits_e^{e^2}\frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x=1$. Tính tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{2}\frac{f\left(2x\right)}{x}\mathrm{d}x$

Lời giải

● Xét $A=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=1$.

Đặt $t=\cos^2 x\Rightarrow \mathrm{d}t=-2\sin x\cos x\mathrm{d}x=-2\cos^2 x\tan x\mathrm{d}x=-2t.\tan x\mathrm{d}x\Rightarrow \tan x\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{2t}$

Đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=1 \\ x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{1}{2} \end{cases}$

Khi đó $A=-\int\limits_1^{\frac{1}{2}}f\left(t\right)\frac{\mathrm{d}t}{2t}=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=1\Rightarrow \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=2$

● Xét $B=\int\limits_e^{e^2}\frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x=1$.

Đặt $t=\ln^2 x\Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x=\frac{2\ln^2 x}{x\ln x}\mathrm{d}x=\frac{2t}{x\ln x}\mathrm{d}x\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\frac{\mathrm{d}t}{2t}$

Đổi cận: $\begin{cases} x=e\Rightarrow t=1 \\ x=e^2\Rightarrow t=4 \end{cases}$

Khi đó $B=\int\limits_1^4 f\left(t\right)\frac{\mathrm{d}t}{2t}=\frac{1}{2}\int\limits_1^4\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=1\Rightarrow \int\limits_1^4\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=2$

● Xét $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(2x\right)}{x}\mathrm{d}x$

Đặt $t=2x\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2} \\ x=\frac{t}{2} \end{cases}$.

Đổi cận: $\begin{cases} x=\frac{1}{4}\Rightarrow t=\frac{1}{2} \\ x=2\Rightarrow t=4 \end{cases}$

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t+\int\limits_1^4\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=2+2=4$.

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $\int\limits_1^2 xf(x)\mathrm{d}x=1$ và $f(1)=4f(2)$. Tính $\int\limits_1^2 x^2f'(x)\mathrm{d}x$

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=f(x) \\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$.

Khi đó $1=\int\limits_1^2 xf(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x^2f(x)\Big|_1^2-\dfrac{1}{2}\int\limits_1^2 x^2f'(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow 1=\dfrac{1}{2}.[4f(2)-f(1)]-\dfrac{1}{2}\int\limits_1^2 x^2f'(x)\mathrm{d}x$.

Theo giả thiết $f(1)=4f(2)$ nên $1=\dfrac{1}{2}.0-\dfrac{1}{2}\int\limits_1^2 x^2f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int\limits_1^2 x^2f'(x)\mathrm{d}x=-2$.

Câu 32. Cho $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $\int\limits_0^1 g(x).f'(x)\mathrm{d}x=-1$, $\int\limits_0^1 g'(x).f(x)\mathrm{d}x=2$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^1 [f(x).g(x)]'\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có $[f(x).g(x)]'=f'(x).g(x)+g'(x).f(x)$.

Và đặt $I_1=\int\limits_0^1 g(x).f'(x)\mathrm{d}x=-1;\ I_2=\int\limits_0^1 g'(x).f(x)\mathrm{d}x=2$

Khi đó $I=\int\limits_0^1 [f(x).g(x)]'\,\mathrm{d}x=I_1+I_2=-1+2=1..$

Câu 33. Cho biết $\int\limits_0^{\sqrt{2}} xf(x^2)\mathrm{d}x=4$, $\int\limits_2^3 f(z)\mathrm{d}z=2$, $\int\limits_9^{16} \dfrac{f(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=3$. Tính $I=\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

$\int_0^{\sqrt{2}} xf(x^2)\mathrm{d}x=4 \xrightarrow{t=x^2} \int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t=8 \Rightarrow \int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=8$.

$\int_2^3 f(z)\mathrm{d}z=2 \Rightarrow \int_2^3 f(\mathrm{x})\mathrm{d}x=2$.

$\int_9^{16} \dfrac{f(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t=3 \xrightarrow{x=\sqrt{t}} \int\limits_3^4 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{3}{2}$.

Vậy $I=8+2+\dfrac{3}{2}=\dfrac{23}{2}$.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn: $\int_0^1 x(f'(x)-2)\mathrm{d}x=f(1)$. Tính giá trị của $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=[f'(x)-2]\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\mathrm{d}x \\ v=f(x)-2x \end{cases}$

$$\int_0^1 x\left(f'(x)-2\right)\mathrm{d}x = f(1) \Leftrightarrow x\left(f(x)-2x\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 (f(x)-2x)\mathrm{d}x = f(1)$$

Vậy $I=-1$.

Câu 35. **[THPT Nguyễn Khuyến Tp HCM 2017]** Cho biết $\int\limits_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 15$. Tính giá trị của $P=\int\limits_0^2 [f(5-3x)+7]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Để tính P ta đặt $t=5-3x \Rightarrow \mathrm{d}x = -\dfrac{\mathrm{d}t}{3}$

$x=0 \Rightarrow t=5$

$x=2 \Rightarrow t=-1$

$$P=\int\limits_5^{-1}[f(t)+7](-\frac{\mathrm{d}t}{3}) = \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{5}[f(t)+7]\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\left(\int\limits_{-1}^{5} f(t)\mathrm{d}t + 7\int\limits_{-1}^{5}\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{3}.15+\frac{1}{3}.7.(6)=19.$$

Câu 36. **[THPT Lạng Giang số 1-2017]** Giả sử $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 3$ và $\int\limits_0^5 f(z)\mathrm{d}z = 9$.

Tính tổng $\int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_3^5 f(t)\mathrm{d}t$.

Lời giải

Ta có $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 3 \Rightarrow \int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 3$; $\int\limits_0^5 f(z)\mathrm{d}z = 9 \Rightarrow \int\limits_0^5 f(t)\mathrm{d}t = 9$

$$9=\int\limits_0^5 f(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_3^5 f(t)\mathrm{d}t = 3+\int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_3^5 f(t)\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \int\limits_1^3 f(t)\mathrm{d}t + \int\limits_3^5 f(t)\mathrm{d}t = 6.$$

Câu 37. **[Sở GD&ĐT Hà Nội 2017]** Cho $y=f(x)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $[-6;6]$. Biết rằng $\int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 8$ và. $\int\limits_1^3 f(-2x)\mathrm{d}x = 3$. Tính $I=\int\limits_{-1}^{6} f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Vì $y=f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int\limits_{-1}^{2} f(-x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 8$, $\int\limits_1^3 f(-2x)\mathrm{d}x = \int\limits_1^3 f(2x)\mathrm{d}x = 3$.

Xét tích phân $K=\int\limits_1^3 f(2x)\mathrm{d}x = 3$

Đặt $u=2x \Rightarrow \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x$.

Đổi cận: $x=1 \Rightarrow u=2$, $x=3 \Rightarrow u=6$.

$$K=\frac{1}{2}\int_2^6 f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x=3\Rightarrow\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x=6$$

Vậy. $I=\int_{-1}^6 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x+\int_2^6 f(x)\mathrm{d}x=8+6=14$.

Câu 38. **[Chuyên Quang Trung-Bình Phước 2017]** Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1;3]$ thỏa: $\int_1^3\left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10$, $\int_1^3\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6$. Tính $\int_1^3\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$.

Lời giải

□ Ta có $\int_1^3\left[f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=10\Leftrightarrow\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x+3\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x=10$.

□ Tương tự $\int_1^3\left[2f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=6\Leftrightarrow 2\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x-\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x=6$.

□ Xét hệ phương trình $\begin{cases}u+3v=10\\2u-v=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=4\\v=2\end{cases}$, trong đó $u=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$, $v=\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int_1^3\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^3 g(x)\mathrm{d}x=4+2=6$.

Câu 39. **[Chuyên Đại học Vinh–2018]** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\left(f'(x)\right)^2+f(x).f''(x)=15x^4+12x,\ \forall x\in R$ và $f(0)=f'(0)=1$. Tính giá trị của $f^2(1)$.

Lời giải

$$\int\left[\left(f'(x)\right)^2+f(x).f'(x)\right]\mathrm{d}x=\int\left(15x^4+12x\right)\mathrm{d}x\ \ (1)$$

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\\mathrm{d}v=f''(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\v=f'(x)\end{cases}$

$$(1)\Leftrightarrow\ \int\left[\left(f'(x)\right)^2\right]\mathrm{d}x+f(x).f'(x)-\int\left[\left(f'(x)\right)^2\right]\mathrm{d}x=3x^5+6x^2+C$$

$$f(x).f'(x)=3x^5+6x^2+C$$

Ta có $f(0).\mathrm{f}'(0)=C\Rightarrow C=1$

Ta có $\int_0^1 f(x).f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(3x^5+6x^2+1\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^1 f(x).\mathrm{d}f(x)=\left(\frac{x^6}{2}+2x^3+x\right)\Big|_0^1=\frac{7}{2}$.

Suy ra $\frac{f^2(x)}{2}\Big|_0^1=\frac{7}{2}\Leftrightarrow f^2(1)-f^2(0)=7\Rightarrow f^2(1)=8$.

Câu 40. **[Sở GD&ĐT Phú Thọ 2018]** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$, $f(-2)+f(2)=0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2$. Tính $f(-3)+f(0)+f(4)$.

Lời giải

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int \frac{2}{x^2-1}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_1 \text{ khi } x<-1\\ \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_2 \text{ khi } -1<x<1\\ \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C_3 \text{ khi } x>1\end{cases}.$

Khi đó $\begin{cases}f(-2)+f(2)=0\\ f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln 3+C_1+\ln\frac{1}{3}+C_3=0\\ \ln 3+C_2+\ln\frac{1}{3}+C_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1+C_3=0\\ C_2=1\end{cases}$

Do đó $f(-3)+f(0)+f(4)=\ln 2+C_1+C_2+\ln\frac{3}{5}+C_3=\ln\frac{6}{5}+1$.

Câu 41. **[PTNK ĐHQG HCM 2018]** Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;4]$ và thỏa mãn hệ thức $\begin{cases}f(1)+g(1)=4\\ g(x)=-x.f'(x);f(x)=-x.g'(x)\end{cases}$. Tính $I=\int_1^4[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Cách 1:

Ta có $f(x)+g(x)=-x[f'(x)+g'(x)]$

$\Leftrightarrow\frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}=-\frac{1}{x}\Leftrightarrow\int\frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow\ln|f(x)+g(x)|=-\ln|x|+C$

Theo giả thiết ta có $C-\ln|1|=\ln|f(1)+g(1)|\Rightarrow C=\ln 4$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l}f(x)+g(x)=\frac{4}{x}\\ f(x)+g(x)=-\frac{4}{x}\end{array}\right.$, vì $f(1)+g(1)=4$ nên $f(x)+g(x)=\frac{4}{x}$

$\Rightarrow I=\int_1^4[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=8\ln 2$.

Cách 2:

Ta có $f(x)+g(x)=-x[f'(x)+g'(x)]\Rightarrow\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=-\int x[f'(x)+g'(x)]\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=-x[f(x)+g(x)]+\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow -x[f(x)+g(x)]=C\Rightarrow f(x)+g(x)=-\frac{C}{x}$. Vì $f(1)+g(1)=-C\Rightarrow C=-4$

Do đó $f(x)+g(x)=\frac{4}{x}$. Vậy $I=\int_1^4[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=8\ln 2$.

Câu 42. **[ĐTK Bộ GD&ĐT 2018]** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,dx=7$ và $\int\limits_0^1 x^2 f(x)\,dx=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

Lời giải

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int\limits_0^1 x^2 f(x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}f(x)\right]\Bigg|_0^1-\int\limits_0^1 \frac{x^3}{3}f'(x)\,dx.$$

Suy ra $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{3}f'(x)\,dx=-\frac{1}{3}$.

Mặt khác $\int\limits_0^1 \frac{x^6}{9}\,dx=\frac{1}{63}$.

Do đó $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\,dx+2.21\int\limits_0^1 \frac{x^3}{3}f'(x)\,dx+21^2\int\limits_0^1 \frac{x^6}{9}\,dx=0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \left[f'(x)+7x^3\right]^2 dx=0$.

Suy ra $f'(x)=-7x^3$, do đó $f(x)=-\frac{7}{4}x^4+C$.

$f(1)=0 \Rightarrow C=\frac{7}{4}. \Rightarrow f(x)=-\frac{7}{4}x^4+\frac{7}{4}$

Ta được $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=-\frac{7}{4}\int\limits_0^1 \left(x^4-1\right)dx=\frac{7}{5}$.

Câu 43. **[HSG Phú Thọ 2018]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thoả mãn $f(x)=6x^2 f(x^3)+\frac{3}{\sqrt{3x+1}}$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$

Lời giải

$$I=\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\int\limits_0^1\left[6x^2 f(x^3)+\frac{3}{\sqrt{3x+1}}\right]dx=2\int\limits_0^1 f(x^3)\,dx^3+\int\limits_0^1\frac{d(3x+1)}{\sqrt{3x+1}}$$

$$\Rightarrow I=2\int\limits_0^1 f(t)\,dt+2\sqrt{3x+1}\Big|_0^1=2\int\limits_0^1 f(x)\,dx+2$$

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=-2$.

Câu 44. **[THTT-12-2017]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\tan x)=\cos^4 x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

Lời giải

Đặt $t=\tan x$.

Ta có $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x=1+t^2$

$$\Rightarrow \cos^4 x = \frac{1}{\left(1+t^2\right)^2} \Rightarrow f\left(t\right) = \frac{1}{\left(1+t^2\right)^2}$$

$$I = \int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x.$$

Đặt $x = \tan u \Rightarrow \mathrm{d}x = \left(1+\tan u\right)\mathrm{d}u$.

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{4}$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(1+\tan^2 u\right)^2}\mathrm{d}\left(\tan u\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 u}\right)^2}.\frac{1}{\cos^2 u}\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u\mathrm{d}u = \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2+\pi}{8}.$$

Câu 45. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;3\right]$ thỏa mãn $f\left(3\right) = 0$, $\int_0^3 \left[f'\left(x\right)\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{7}{6}$ và $\int_0^3 \frac{f\left(x\right)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = -\frac{7}{3}$. Tính tích phân $\int_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Bằng công thức tích phân từng phần ta có

$$\int_0^3 \frac{f\left(x\right)}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \int_0^3 2f\left(x\right)\mathrm{d}\left(\sqrt{x+1}-1\right) = \left[2\left(\sqrt{x+1}-1\right)f\left(x\right)\right]\Big|_0^3 - 2\int_0^3 \left(\sqrt{x+1}-1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

Suy ra $\int_0^3 \left(\sqrt{x+1}-1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{7}{6}$.

Lại có $\int_0^3 \left(\sqrt{x+1}-1\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^3 \left(x+2-2\sqrt{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{7}{6}$.

Do đó

$$\int_0^3 \left[f'\left(x\right)\right]^2 \mathrm{d}x - 2.\int_0^3 \left(\sqrt{x+1}-1\right)f'\left(x\right)\mathrm{d}x + \int_0^3 \left(\sqrt{x+1}-1\right)^2 \mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow \int_0^3 \left[f'\left(x\right) - \sqrt{x+1}+1\right]^2 \mathrm{d}x = 0.$$

Suy ra $f'\left(x\right) = \sqrt{x+1}-1$, do đó $f\left(x\right) = \frac{2}{3}\left(x+1\right)\sqrt{x+1} - x + C$. Vì $f\left(3\right) = 0$ nên $C = -\frac{7}{3}$.

Ta được $\int_0^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int_0^3 \left[\frac{2}{3}\left(x+1\right)\sqrt{x+1} - x - \frac{7}{3}\right]\mathrm{d}x = -\frac{97}{30}$.