

THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Phần 1. Thể tích khối đa diện

Câu 1. Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi V' là thể tích của khối tám mặt có các đỉnh là trung điểm các cạnh của khối tứ diện $ABCD$. Tỉ số $\frac{V'}{V}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{1}{8}$.

Câu 2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng 1, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng của A, B, C qua S . Thể tích của khối bát diện $ABC.A'B'C'$ bằng

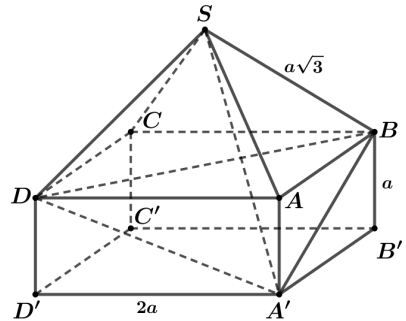
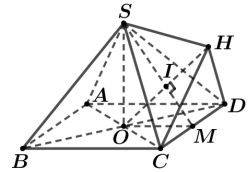
- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. D. $2\sqrt{3}$.

Câu 3. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , tâm O ; cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của CD , H là điểm đối xứng của O qua SM . Thể tích khối đa diện $ABCD.SH$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{10}}{12}$. B. $\frac{a^3\sqrt{10}}{18}$. C. $\frac{a^3\sqrt{10}}{24}$. D. $\frac{5a^3\sqrt{10}}{24}$.

Câu 4. Cho hình đa diện như hình vẽ, trong đó $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật với $AB = AD = 2a$, $AA' = a$, $S.ABCD$ là hình chóp có các cạnh bên bằng nhau và bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích của khối tứ diện $SA'BD$ có thể tích bằng

- A. $2a^3$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.
C. $\frac{2a^3}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.



Câu 5. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V . Hai mặt phẳng (ACB') và $(BA'C')$ chia khối lăng trụ đã cho thành bốn phần. Thể tích của phần có thể tích lớn nhất bằng

- A. $\frac{1}{2}V$. B. $\frac{2}{5}V$. C. $\frac{3}{5}V$. D. $\frac{5}{12}V$.

Câu 6. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $AA' = a$. Gọi E là trung điểm cạnh AC , mặt phẳng $(A'B'E)$ cắt BC tại F . Thể tích khối đa diện $CA'B'FE$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{15}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Câu 7. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P . Thể tích khối đa diện $MBP.A'B'N$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{32}$. B. $\frac{7a^3\sqrt{3}}{32}$. C. $\frac{7a^3\sqrt{3}}{48}$. D. $\frac{7a^3\sqrt{3}}{96}$.

Câu 8. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích 96 cm^3 . Gọi G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ và H là trung điểm của BC . Thể tích khối tứ diện $B'GAH$ bằng

- A. 12 cm^3 . B. 16 cm^3 . C. 18 cm^3 . D. 24 cm^3 .

Câu 9. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', BC, CC'$. Mặt phẳng (MNP) chia khối lăng trụ thành hai phần, phần chứa điểm B có thể tích là V_1 . Tỷ số $\frac{V_1}{V}$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{25}{72}$. C. $\frac{49}{144}$. D. $\frac{73}{216}$.

Câu 10. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, A'C', BB'$. Thể tích của khối tứ diện $CMNP$ bằng

- A. $\frac{V}{3}$. B. $\frac{V}{4}$. C. $\frac{5V}{24}$. D. $\frac{7V}{24}$.

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 5$, $AC = BD = \sqrt{34}$, $AD = BC = \sqrt{41}$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

- A. 10. B. 20. C. 30. D. 40.

Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích 120 cm^3 . Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và AD . Thể tích khối tứ diện $MNA'C'$ bằng:

- A. 15 cm^3 . B. 20 cm^3 . C. 24 cm^3 . D. 30 cm^3 .

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$ có $S_{\triangle ABC} = 4 \text{ cm}^2$, $S_{\triangle ABD} = 6 \text{ cm}^2$, $AB = 3 \text{ cm}$. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) bằng 60° . Thể tích của khối tứ diện đã cho bằng

- A. $2\sqrt{3} \text{ cm}^3$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$. C. $\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$. D. $\frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích V . Gọi E là điểm trên cạnh SC sao cho $EC = 2ES$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường

thẳng AE và song song với đường thẳng BD , (α) cắt hai cạnh SB, SD lần lượt tại hai điểm M, N . Thể tích khối chóp $S.AMEN$ bằng

- A. $\frac{V}{6}$. B. $\frac{V}{9}$. C. $\frac{V}{12}$. D. $\frac{V}{27}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng (P) qua A vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại G, F, E .

Biết rằng (P) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính $k = \frac{SF}{SC}$.

- A. $k = \frac{\sqrt{13}-1}{4}$. B. $k = \frac{\sqrt{13}+1}{6}$. C. $k = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$. D. $k = \frac{\sqrt{17}+1}{8}$.

Câu 16. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AA' và BB' . Mặt phẳng $(C'MN)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Gọi

V_1 là thể tích khối $C'MNB'A'$ và V_2 là thể tích khối $ABC.MNC'$. Khi đó tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 17. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V và có độ dài cạnh bên $A'A = 6$. Trên cạnh $A'A, B'B, C'C$ lần lượt lấy các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho $A_1A = 2, B_1B = x, C_1C = y$ với x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy = 12$. Biết rằng thể tích của khối đa diện $ABC.A_1B_1C_1$ bằng $\frac{1}{2}V$. Giá trị của $|x - y|$ bằng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 18. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng a , một mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P, Q . Biết $AM = \frac{a}{3}, CP = \frac{2a}{5}$.

Thể tích khối đa diện $ABCD.MNPQ$ bằng

- A. $\frac{a^3}{3}$. B. $\frac{2a^3}{3}$. C. $\frac{11a^3}{15}$. D. $\frac{11a^3}{30}$.

Câu 19. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC . Biết mặt phẳng (AEF) vuông góc với mặt phẳng (SBC) . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{8}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. C. $\frac{a^3\sqrt{5}}{24}$. D. $\frac{a^3\sqrt{15}}{27}$.

Câu 20. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng a . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC . Biết mặt phẳng (AEF) vuông góc với mặt phẳng (SBC) .

Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{8}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. C. $\frac{a^3\sqrt{5}}{24}$. D. $\frac{a^3\sqrt{15}}{27}$.

Câu 21. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M là trung điểm SA . Biết mặt phẳng (MCD) vuông góc với mặt phẳng (SAB) . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{a^3}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{a^3\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{BSC} = 45^\circ$, mặt phẳng (SAC) tạo với mặt phẳng (SBC) một góc 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{15}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{30}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều, mặt bên SCD là tam giác vuông cân tại S . Gọi M là điểm thuộc đường thẳng CD sao cho BM vuông góc với SA . Thể tích của khối chóp $S.BDM$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{32}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và hai tam giác SAC và SBD là những tam giác đều. Gọi A' , C' lần lượt là trung điểm của SA và SC . Thể tích khối tứ diện $A'BC'D$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{32}$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SC = a\sqrt{3}$. Gọi M , N , P , Q lượt là trung điểm của SB , SD , CD , BC . Thể tích của khối chóp $A.MNPQ$ bằng

- A. $\frac{a^3}{3}$. B. $\frac{a^3}{4}$. C. $\frac{a^3}{8}$. D. $\frac{a^3}{12}$.

Câu 26. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và góc $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Gọi M là trung điểm của AB , tam giác $MA'C$ đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC) . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $\frac{a^3}{7}$. B. $\frac{2a^3}{7}$. C. $\frac{3a^3}{7}$. D. $\frac{5a^3}{7}$.

Câu 27. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a , góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

- A. $\frac{3a^3\sqrt{15}}{10}$. B. $\frac{9a^3\sqrt{15}}{10}$. C. $\frac{3a^3\sqrt{15}}{20}$. D. $\frac{9a^3\sqrt{15}}{20}$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M , N lần lượt là trung

điểm của SB và CD . Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Cosin góc giữa MN và (SAC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{5}}{10}$. B. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$. C. $\frac{\sqrt{310}}{20}$. D. $\frac{3\sqrt{310}}{20}$.

Câu 29. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = 6$, $SB = 2$, $SC = 4$, $AB = 2\sqrt{10}$ và $\widehat{SBC} = \widehat{ASC} = 90^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $4\sqrt{3}$. B. $6\sqrt{3}$. C. $8\sqrt{3}$. D. $12\sqrt{3}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 1$, $AD = \sqrt{10}$; $SA = SB$, $SC = SD$. Biết hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) cùng vuông góc với nhau và tổng diện tích hai tam giác SAB và SCD bằng 2. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{3}{2}$. D. 2.

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh A , $BC = 2a$, $SB = SC$, $SA = 2a$ và SA tạo với đáy một góc 60° . Biết H là hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt đáy (ABC) thuộc tam giác ABC . Thể tích khối chóp $S.AHC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$; tam giác SOA cân tại S và mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Biết góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Các mặt bên (SAB) , (SAC) lần lượt tạo với đáy các góc là 60° , 30° . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) nằm trên cạnh BC . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{32}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{64}$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác với $AB = AC = 5a$, $BC = 6a$ và các mặt bên cùng tạo với đáy các góc 60° . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) nằm bên trong tam giác ABC . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{2a^3}{\sqrt{3}}$. B. $a^3\sqrt{3}$. C. $6a^3\sqrt{3}$. D. $8a^3$.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng $(ABCD)$ thuộc đoạn BD . Hai mặt

phẳng (SBC) và (SCD) lần lượt hợp với đáy các góc 60° và 30° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{5}$. B. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{5}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{15}$. D. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{15}$.

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Các mặt phẳng (SAB) , (SBD) và (SAD) cùng hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Biết hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy nằm ngoài tam giác ABD . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 37. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{3}$, $AD = \sqrt{7}$, cạnh bên bằng 1. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với đáy những góc bằng 45° và 60° . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- A. 3. B. $3\sqrt{3}$. C. 7. D. $7\sqrt{7}$.

Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$, tam giác SAC nhọn và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) tạo với nhau góc α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{3}{4}$; cạnh $SC = 3$.

Thể tích khối $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{8}{3}$. C. $3\sqrt{3}$. D. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SB > 2a$ và $\widehat{ABC} = \widehat{BAS} = \widehat{BCS} = 90^\circ$. Sin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{11}}{11}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. D. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A với $AB = a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$. Biết góc giữa SB và mặt đáy (ABC) bằng 60° , thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. C. $\frac{3a^3}{4}$. D. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt đáy (ABC) bằng 60° , thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A với $AB = a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$. Biết góc φ giữa SB và mặt phẳng (SAC) thỏa mãn $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{8}$, khoảng cách từ S đến mặt đáy (ABC) nhỏ hơn $2a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

Câu 43. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng 4 và khoảng cách từ điểm A đến các đường thẳng BB' , CC' lần lượt bằng 1 và 2. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $3\sqrt{3}$. D. $4\sqrt{3}$.

Câu 44. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. B. 1. C. $\sqrt{3}$. D. 2.

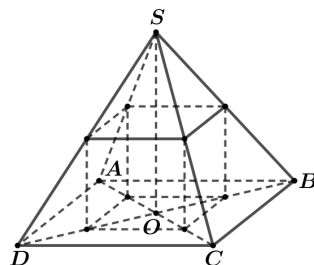
Câu 45. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$ và $A'G' = \frac{4}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{8}{3}$. D. 2.

Phần 2. Tỷ số thể tích

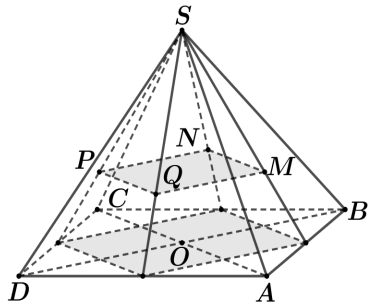
Câu 1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi H là hình hộp chữ nhật có bốn đỉnh là bốn trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC, SD và bốn đỉnh còn lại nằm trong mặt đáy $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ). Biết thể tích khối hộp H là V . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A. $2V$. B. $6V$.
C. $\frac{4}{3}V$. D. $\frac{8}{3}V$.



Câu 2. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA . Biết khối chóp $S.MNPQ$ có thể tích là V , khi đó thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{9V}{4}$.
B. $\frac{27V}{4}$.
C. $\frac{81V}{4}$.
D. $\frac{81V}{8}$.



Câu 3. Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD, ACD, BCD . Gọi V' là thể tích của khối tứ diện $MNPQ$. Tỉ số $\frac{V'}{V}$ bằng

- A. $\frac{1}{27}$.
B. $\frac{2}{27}$.
C. $\frac{4}{27}$.
D. $\frac{1}{9}$.

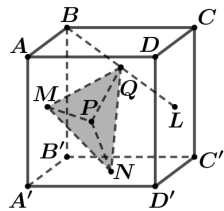
Câu 4. Cho lăng trụ tam giác $ABC.MNP$ có thể tích V . Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACM, AMB, BCM ; V_1 là thể tích khối tứ diện $G_1G_2G_3G_4$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A. $V = 9V_1$.
B. $V = 27V_1$.
C. $V = 81V_1$.
D. $8V = 81V_1$.

Câu 5. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có thể tích V . Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ADB và V' là thể tích khối tứ diện $AMNP$. Tỉ số $\frac{V'}{V}$ bằng

- A. $\frac{4}{9}$.
B. $\frac{2}{27}$.
C. $\frac{4}{27}$.
D. $\frac{8}{81}$.

Câu 6. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, L lần lượt là tâm của các hình vuông $ABB'A', A'B'C'D', ADD'A'$ và $CDD'C'$. Gọi Q là trung điểm của BL (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích khối tứ diện $MNPQ$ bằng



- A. $\frac{1}{16}$.
B. $\frac{1}{24}$.
C. $\frac{\sqrt{2}}{27}$.
D. $\frac{\sqrt{3}}{27}$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm BC . Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SM cắt SB, SC lần lượt tại E, F . Biết $V_{SAEF} = \frac{1}{4}V_{SABC}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3}{2}$.
B. $\frac{2a^3}{5}$.
C. $\frac{a^3}{8}$.
D. $\frac{a^3}{12}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy (ABC).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SC . Biết $\frac{V_{S.ABH}}{V_{S.ABC}} = \frac{16}{19}$. Thể tích của khối

chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Câu 9. Cho hình chóp đều $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , góc giữa SG và mặt phẳng (SBC) là 30° . Mặt phẳng (P) chứa BC và vuông góc với SA chia khối chóp $S.ABC$ thành hai phần. Tỷ số thể tích hai phần bằng

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{7}$. D. $\frac{6}{7}$.

Câu 10. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , chiều cao bằng $2a$. Mặt phẳng (P) qua B' và vuông góc $A'C$ chia lăng trụ thành hai khối. Biết thể tích của hai khối là V_1 và V_2 với $V_1 < V_2$. Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{1}{7}$. B. $\frac{1}{11}$. C. $\frac{1}{23}$. D. $\frac{1}{47}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD . Tỷ số $\frac{V_{S.BCNM}}{V_{S.BCDA}}$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{5}{12}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm di động trên cạnh AB và N là trung điểm của SD . Mặt phẳng (α) đi qua M, N và song song với BC chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối có tỷ số thể tích $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$, trong đó V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh A , V_2 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh B . Tỷ số $\frac{AM}{AB}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{3}{7}$.

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm thuộc đoạn CC' thỏa mãn $CC' = 3CM$. Mặt phẳng ($AB'M$) chia khối hộp thành hai phần có thể tích là V_1, V_2 .

Gọi V_1 là thể tích phần chứa điểm B . Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{7}{9}$. B. $\frac{13}{20}$. C. $\frac{7}{27}$. D. $\frac{13}{41}$.

Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AA', BC, CD . Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp thành hai phần có thể tích là V_1, V_2 .

Gọi V_1 là thể tích phần chứa điểm C . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{113}{24}$. C. $\frac{119}{25}$. D. $\frac{119}{425}$.

Câu 15. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P . Thể tích khối đa diện $MBP.A'B'N$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$. C. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{32}$. D. $\frac{7\sqrt{3}a^3}{96}$.

Câu 16. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là trung điểm ba cạnh $A'B', BB'$ và $D'D$. Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng $A'A$ tại I . Biết thể tích khối tứ diện $IANP$ là V . Thể tích khối hộp đã cho $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

- A. $2V$. B. $4V$. C. $6V$. D. $12V$.

Câu 17. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Trên $A'B'$ kéo dài lấy điểm M sao cho $B'M = \frac{1}{2}A'B'$. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của $A'C', B'B$. Mặt phẳng (MNP) chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A' có thể tích V_1 , khối đa diện chứa đỉnh C' có thể tích V_2 . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{97}{59}$. B. $\frac{49}{95}$. C. $\frac{49}{144}$. D. $\frac{95}{144}$.

Câu 18. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với đáy góc 60° . Gọi M là điểm đối xứng của C qua D , N là trung điểm của SC . Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích là V_1, V_2 trong đó

V_1 là phần thể tích chứa đỉnh A . Tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$ bằng

- A. $\frac{7}{5}$. B. $\frac{5}{7}$. C. $\frac{12}{5}$. D. $\frac{5}{12}$.

Câu 19. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B , $AB = 4$; $SA = SB = SC = 12$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC, BC . Trên cạnh SA, SB lần lượt lấy điểm E, F sao cho $\frac{SE}{SA} = \frac{BF}{BS} = \frac{2}{3}$. Thể tích khối tứ diện $MNEF$ bằng

- A. $\frac{4\sqrt{34}}{3}$. B. $\frac{16\sqrt{34}}{3}$. C. $\frac{4\sqrt{17}}{9}$. D. $\frac{4\sqrt{34}}{9}$.

Câu 20. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $AB, BC, C'D'$ và DD' . Thể tích khối tứ diện $MNPQ$ bằng

A. $\frac{1}{8}$.

B. $\frac{3}{8}$.

C. $\frac{1}{12}$.

D. $\frac{1}{24}$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, thể tích là V . Gọi M là một điểm trên cạnh AB sao cho $\frac{AM}{AB} = x$, $0 < x < 1$. Mặt phẳng (α) qua M và song song với (SBC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, trong đó phần chứa điểm A có thể tích bằng $\frac{4}{27}V$. Giá trị của biểu thức $P = \frac{1-x}{1+x}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{5}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Câu 22. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Mặt phẳng đi qua trọng tâm các tam giác SAB, SAC, SAD chia khối chóp thành hai phần có thể tích là V_1 và V_2 ($V_1 < V_2$). Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{8}{19}$.

B. $\frac{8}{27}$.

C. $\frac{16}{75}$.

D. $\frac{16}{81}$.

Câu 23. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, BC và điểm P là điểm đối xứng với B qua D . Mặt phẳng (MNP) chia tứ diện thành hai phần có tỉ số thể tích là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{7}{11}$.

C. $\frac{7}{18}$.

D. $\frac{11}{18}$.

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$, trên các cạnh BC, BD, AC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $BC = 3BM$, $BD = \frac{3}{2}BN$, $AC = 2AP$. Mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai phần có thể tích là V_1 và V_2 . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ có giá trị bằng

A. $\frac{26}{13}$.

B. $\frac{3}{19}$.

C. $\frac{15}{19}$.

D. $\frac{26}{19}$.

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD, AC sao cho $BC = 4BM$, $AC = 3AP$, $BD = 2BN$. Tỉ số thể tích hai phần của khối tứ diện $ABCD$ được phân chia bởi mặt phẳng (MNP) bằng

A. $\frac{7}{13}$.

B. $\frac{8}{13}$.

C. $\frac{7}{15}$.

D. $\frac{8}{15}$.

Câu 26. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABD, ABC và E là điểm đối xứng với B qua điểm D . Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, thể tích khối đa diện chứa đỉnh A bằng

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{80}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{96}$.

C. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{320}$.

D. $\frac{9a^3\sqrt{2}}{320}$.

Câu 27. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là điểm trên cạnh AB, AC sao cho $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}, \frac{AN}{CN} = 2$. Mặt phẳng (α) chứa MN và song song với AD chia khối tứ diện thành hai phần. Thể tích khối đa diện chứa đỉnh A bằng

- A. $\frac{4\sqrt{2}a^3}{81}$. B. $\frac{4\sqrt{2}a^3}{108}$. C. $\frac{5\sqrt{2}a^3}{108}$. D. $\frac{11\sqrt{2}a^3}{342}$.

Câu 28. Cho khối chóp $S.ABC$ có $M \in SA, N \in SB$ sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MS}, \overrightarrow{NS} = -2\overrightarrow{NB}$. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm M, N và song song với SC chia khối chóp thành hai khối đa diện. Tỷ số thể tích của hai khối đa diện đó bằng

- A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{4}{9}$. D. $\frac{5}{9}$.

Câu 29. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi E là điểm đối xứng của A qua D . Mặt phẳng qua CE và vuông góc với mặt phẳng (ABD) cắt cạnh AB tại điểm F . Thể tích của khối tứ diện $AECF$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{15}$. B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{30}$. C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{40}$. D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{60}$.

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, DC . Kéo dài SD một đoạn sao cho D là trung điểm của SP . Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) chia hình chóp thành hai khối lần lượt có thể tích là V_1, V_2 (trong đó V_2 là thể tích của phần chứa điểm S). Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{71}{49}$. C. $\frac{72}{49}$. D. $\frac{71}{120}$.

Phần 3. Cực trị

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) , tính $\cos \alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

- A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

Câu 2. Trên đường thẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác đều ABC cạnh bằng 2, lấy các điểm M và N không trùng với A sao cho (MBC) vuông góc với (NBC) . Giá trị nhỏ nhất thể tích tứ diện $BCMN$ bằng

- A. 2. B. $2\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. 6.

Câu 3. Cho tam giác OAB đều cạnh a . Trên đường thẳng d qua O và vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy điểm M sao cho $OM = x$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu

vuông góc của A trên MB và OB . Gọi N là giao điểm của EF và d . Tìm x để thể tích tứ diện $ABMN$ có giá trị nhỏ nhất.

- A. $x = a\sqrt{2}$. B. $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $x = \frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, thể tích là V . Gọi M là trung điểm của cạnh SA , N là điểm nằm trên cạnh SB sao cho $SN = 2NB$; mặt phẳng (α) đi động qua các điểm M, N và cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại hai điểm phân biệt P, Q . Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.MNPQ$ bằng

- A. $\frac{V}{2}$. B. $\frac{V}{3}$. C. $\frac{2V}{3}$. D. $\frac{3V}{4}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, thể tích là V . Điểm M di động trên cạnh SC , đặt $\frac{MC}{MS} = k$. Mặt phẳng (α) qua A, M và song song với BD cắt SB, SD thứ tự tại N, P . Thể tích khối chóp $C.APMN$ lớn nhất khi

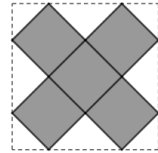
- A. $k = 1$. B. $k = 2$. C. $k = \sqrt{2}$. D. $k = \sqrt{3}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = y$ ($y > 0$) và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Trên cạnh AD lấy điểm M và đặt $AM = x$ ($0 < x < a$). Biết $x^2 + y^2 = a^2$, thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp $S.ABCM$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 7. Từ hình vuông có cạnh bằng 6 người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gấp thành hình hộp chữ nhật không nắp. Thể tích lớn nhất của khối hộp bằng

- A. $8\sqrt{2}$. B. $9\sqrt{2}$. C. $10\sqrt{2}$. D. $11\sqrt{2}$.



Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành với $AD = 4a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{6}$. Thể tích lớn nhất của khối chóp đã cho bằng

- A. $\frac{8a^3}{3}$. B. $\frac{4\sqrt{6}}{3}a^3$. C. $8a^3$. D. $4\sqrt{6}a^3$.

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3a, AC = a$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa BC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Điểm D di động trên (Q) sao cho tam giác DBC nhọn và hai mặt phẳng (DAB) và (DAC) lần lượt hợp với mặt phẳng (ABC) hai góc phụ nhau. Thể tích lớn nhất của khối chóp $D.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{3a^3}{8}$. C. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{10}$. D. $\frac{3a^3}{13}$.

Câu 10. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Tam giác ABC' có diện tích bằng $\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng tạo với đáy một góc nhọn bằng α . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đạt giá trị lớn nhất khi α bằng

- A. $\alpha = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $\alpha = \arctan \frac{1}{\sqrt{6}}$. C. $\alpha = \arctan \sqrt{2}$. D. $\alpha = \arctan \sqrt{6}$.

Câu 11. Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều có $d = \sqrt{3}$ là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau gồm một đường thẳng chứa một đường chéo của đáy và đường thẳng còn lại chứa một cạnh bên hình chóp. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp bằng

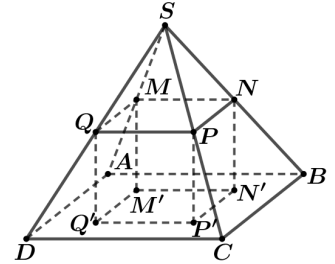
- A. 3. B. 9. C. $9\sqrt{3}$. D. 27.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Một mặt phẳng không qua S và song song với đáy cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q .

Gọi M', N', P', Q' lần lượt là hình chiếu của M, N, P, Q trên mặt phẳng đáy. Khi thể tích khối đa diện

$MNPQ.M'N'P'Q'$ đạt giá trị lớn nhất, tỉ số $\frac{SM}{SA}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{4}$.



Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x$ ($0 < x < \sqrt{3}$), tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Thể tích lớn nhất của khối chóp đã cho bằng

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{1}{12}$. D. $\frac{1}{16}$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x, BC = y, AB = AC = SB = SC = 1$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất khi tổng $x + y$ bằng

- A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{4}{\sqrt{3}}$. C. $\sqrt{3}$. D. $4\sqrt{3}$.

Câu 15. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại A ta lấy điểm S di động. Hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD lần lượt là H, K .

Thể tích lớn nhất của tứ diện $ACHK$ bằng

- A. $\frac{a^3}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{32}$.

Câu 16. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (T) đường kính $AB = 2r, C$ là một điểm di động trên đường tròn (T) . Trên đường thẳng d vuông góc với (P) tại A lấy điểm S sao cho $SA = r$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SC và SB . Khi C chạy trên đường tròn, thể tích lớn nhất của tứ diện $S.AHK$ bằng

- A. $\frac{r^3}{3}$. B. $\frac{r^3\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{r^3\sqrt{5}}{25}$. D. $\frac{r^3\sqrt{5}}{75}$.

Câu 17. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$. Xác định độ dài cạnh AB để khối chóp $S.ABC$ có thể tích nhỏ nhất.

- A. $AB = \frac{a\sqrt{10}}{2}$. B. $AB = a\sqrt{3}$. C. $AB = 2a$. D. $AB = 3a\sqrt{5}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi φ là góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) với $\varphi \leq 30^\circ$. Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{4a^3}{3}$. B. $\frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{8a^3\sqrt{2}}{9}$. D. $\frac{8a^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 19. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh AB và SC sao cho $\frac{CN}{CS} = \frac{AM}{AB}$. Khi khoảng cách giữa M và N nhỏ nhất thì thể tích của khối chóp $S.AMN$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{72}$. B. $\frac{5\sqrt{2}a^3}{72}$. C. $\frac{5\sqrt{2}a^3}{432}$. D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{432}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M là điểm di động trên cạnh CD và H là hình chiếu vuông góc của S lên đường thẳng BM . Khi điểm M di động trên cạnh CD , thể tích khối chóp $S.ABH$ có giá trị lớn nhất bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{15}$.

Câu 21. Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai đoạn thẳng BC, BD (M, N không trùng B) sao cho $2\frac{BC}{BM} + 3\frac{BD}{BN} = 10$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của các khối tứ diện $ABMN$ và $ABCD$. Giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{25}{3}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{3}{25}$. D. $\frac{6}{25}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N lần lượt trên các đoạn thẳng AB, AD (M, N không trùng A) sao cho $\frac{AB}{AM} + 2\frac{AD}{AN} = 4$. Kí hiệu V, V_1 lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$. Giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$ bằng

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{17}{14}$.

Câu 23. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc cạnh BC, BD sao cho (AMN) luôn vuông góc với (BCD) . Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $ABMN$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}}{12}$. B. $\frac{17\sqrt{2}}{72}$. C. $\frac{17\sqrt{2}}{144}$. D. $\frac{17\sqrt{2}}{216}$.

Câu 24. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = \sqrt{2}$, $OC = 1$. Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai cạnh AC, BC sao cho (OMN) vuông góc với (ABC) . Thể tích khối đa diện $ABOMN$ có giá trị lớn nhất bằng

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{9}$. C. $\frac{2}{9}$. D. $\frac{1}{12}$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 1, SB = 2, SC = 3$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Mặt phẳng (α) đi qua trung điểm I của SG cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt

tại M, N, P . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{1}{SM^2} + \frac{1}{SN^2} + \frac{1}{SP^2}$ bằng

- A. $\frac{2}{7}$. B. $\frac{3}{7}$. C. $\frac{18}{7}$. D. 6.

THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Phần 1. Thể tích khối đa diện

Phần 2. Tỷ số thể tích

Phần 3. Cực trị

Phần 1. Thể tích khối đa diện

Câu 1. Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi V' là thể tích của khối tám mặt có các đỉnh là trung điểm các cạnh của khối tứ diện $ABCD$. Tỉ số $\frac{V'}{V}$ bằng

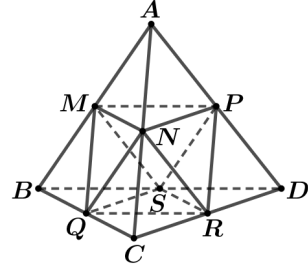
- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{1}{8}$.

Lời giải. Ta có $\frac{V_{A.MNP}}{V} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} \cdot \frac{AP}{AD} = \frac{1}{8}$.

Suy ra $V_{A.MNP} = \frac{V}{8}$.

Tương tự, ta có $V_{B.MSQ} = V_{C.NQR} = V_{D.PSR} = \frac{V}{8}$.

Từ đó suy ra $V' = \frac{V}{2}$ nên $\frac{V'}{V} = \frac{1}{2}$. **Chọn A.**



Câu 2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng 1, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm đối xứng của A, B, C qua S . Thể tích của khối bát diện $ABC.A'B'C'$ bằng

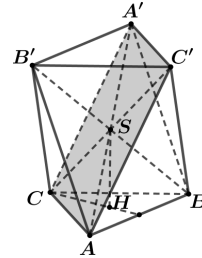
- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải. Dễ dàng tính được $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}}{12}$.

Thể tích khối bát diện

$$V = 2V_{B.ACA'C'} = 2.4V_{B.ACS} = 8V_{S.ABC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn B.



Câu 3. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , tâm O ; cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của CD , H là điểm đối xứng của O qua SM . Thể tích khối đa diện $ABCD.SH$ bằng

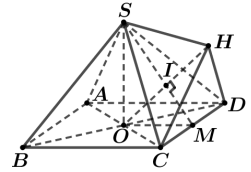
- A. $\frac{a^3\sqrt{10}}{12}$. B. $\frac{a^3\sqrt{10}}{18}$. C. $\frac{a^3\sqrt{10}}{24}$. D. $\frac{5a^3\sqrt{10}}{24}$.

Lời giải. Khối đa diện $ABCD.SH$ được chia thành hai khối chóp $S.ABCD$ và $H.SCD$.

$$\bullet V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}\sqrt{SB^2 - OB^2}.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{10}}{6}.$$

$$\bullet \text{ Vì } H \text{ là điểm đối xứng của } O \text{ qua } SM \text{ nên } d[O, (SCD)] = d[H, (SCD)]$$

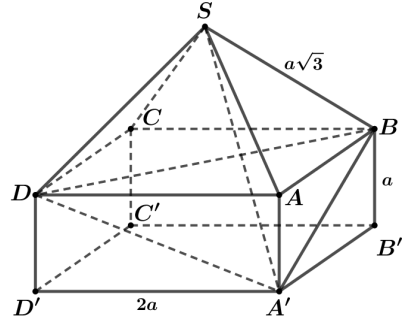
$$\longrightarrow V_{HSCD} = V_{OSCD} = \frac{1}{4}V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{10}}{24}.$$



Vậy thể tích khối đa diện cần tính bằng $V_{S.ABCD} + V_{H.SCD} = \frac{5a^3\sqrt{10}}{24}$. **Chọn D.**

Câu 4. Cho hình đa diện như hình vẽ, trong đó $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật với $AB = AD = 2a$, $AA' = a$, $S.ABCD$ là hình chóp có các cạnh bên bằng nhau và bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích của khối tứ diện $SA'BD$ có thể tích bằng

- A. $2a^3$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.
C. $\frac{2a^3}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.



Lời giải. Gọi $O = AC \cap BD$, $I = SA' \cap AC$. Ta thấy $V_{S.A'BD} = V_{S.DBI} + V_{A'.DBI}$
Tính được $DB = 2\sqrt{2}a \rightarrow OB = \sqrt{2}a$ và

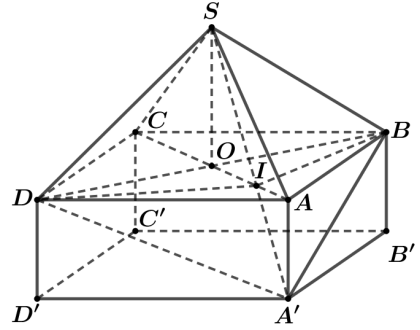
$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = a = A'A.$$

Suy ra $V_{S.A'BD} = V_{S.DBI} + V_{A'.DBI} = 2V_{S.DBI}$.

Ta có $S_{\triangle DBI} = \frac{1}{4}S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{S.A'BD} = 2V_{S.DBI} = 2 \cdot \frac{1}{3}S_{\triangle DBI} \cdot SO = \frac{2}{3}a^2 \cdot a = \frac{2a^3}{3}$.

Chọn C.



Câu 5. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V . Hai mặt phẳng (ACB') và $(BA'C')$ chia khối lăng trụ đã cho thành bốn phần. Phần lớn nhất có thể tích bằng

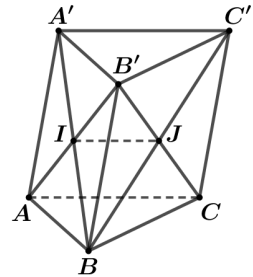
- A. $\frac{1}{2}V$. B. $\frac{2}{5}V$. C. $\frac{3}{5}V$. D. $\frac{5}{12}V$.

Lời giải. Gọi $I = A'B \cap AB'$, $J = B'C \cap BC'$.

Ta tính được $V_{B'BAC} = \frac{1}{3}V$; $V_{BJB'} = \frac{1}{4}V_{B'BAC} = \frac{1}{12}V$.

Suy ra $V_{ABCIJ} = V_{A'B'C'IJ} = \frac{1}{3}V - \frac{1}{12}V = \frac{1}{4}V$.

Vậy $V_{ACC'A'IJ} = V - \frac{1}{3}V - \frac{1}{4}V = \frac{5}{12}V$. **Chọn D.**

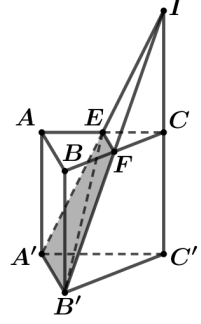


Câu 6. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $AA' = a$. Gọi E là trung điểm cạnh AC , mặt phẳng $(A'B'E)$ cắt BC tại F . Thể tích khối đa diện $CA'B'FE$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{15}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

Lời giải. Dễ dàng xác định được F là trung điểm của BC .
Kéo dài $A'E$ cắt CC' tại I . Khi đó $C'I = 2a$.

Ta có $V_{CA'B'FE} = V_{I.A'B'C'} - V_{I.EFC} - V_{C.A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **Chọn D.**



Câu 7. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P . Thể tích khối đa diện $MBP.A'B'N$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{32}$. B. $\frac{7a^3\sqrt{3}}{32}$. C. $\frac{7a^3\sqrt{3}}{48}$. D. $\frac{7a^3\sqrt{3}}{96}$.

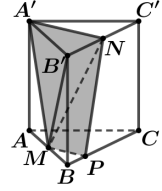
Lời giải. Chia khối đa diện $MBP.A'B'N$ thành 2 phần gồm: chóp tam giác $M.A'B'N$ và chóp tứ giác $M.BB'NP$ (như hình vẽ).

Ta có $V = V_{M.A'B'N} + V_{M.BB'NP} = \frac{1}{3}(AA'.S_{\Delta A'B'N} + MP.S_{BB'NP})$.

Trong đó

$$S_{\Delta A'B'N} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}, MP = \frac{a\sqrt{3}}{4}, S_{BB'NP} = \frac{a^2}{2} - \frac{1}{2}.a.\frac{a}{4} = \frac{3a^2}{8}.$$

Vậy $V = \frac{a^3}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{3\sqrt{3}}{32}\right) = \frac{7a^3\sqrt{3}}{96}$. **Chọn D.**



Câu 8. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích 96 cm^3 . Gọi G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$ và H là trung điểm của BC . Thể tích khối tứ diện $B'GAH$ bằng

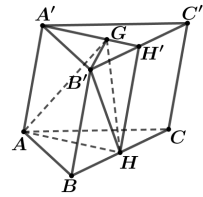
- A. 12 cm^3 . B. 16 cm^3 . C. 18 cm^3 . D. 24 cm^3 .

Lời giải. Gọi H' là trung điểm của của $B'C' \longrightarrow H', G, A'$ thẳng hàng.

Ta có $V_{B'.ABH} = \frac{1}{3}.V_{A'B'H'.ABH}$.

Suy ra $V_{B'.AHH'A'} = \frac{2}{3}V_{ABH.A'B'H'} = \frac{1}{3}.V_{ABC.A'B'C'} = 32 \text{ cm}^3$.

Do $S_{\Delta GAH} = \frac{1}{2}S_{AHH'A'} \longrightarrow V_{B'.GAH} = \frac{1}{2}V_{B'.AHH'A'} = 16 \text{ cm}^3$. **Chọn B.**



Câu 9. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', BC, CC'$. Mặt phẳng (MNP) chia khối lăng trụ thành hai phần, phần chứa điểm B có thể tích là V_1 . Tỉ số $\frac{V_1}{V}$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{25}{72}$. C. $\frac{49}{144}$. D. $\frac{73}{216}$.

Lời giải. Kéo dài NP cắt BB' , $B'C'$ lần lượt tại R , Q .

Gọi $K = AB \cap MR$, $J = A'C' \cap MQ$.

Vì $\triangle PNC = \triangle PQC'$ ($g - c - g$) $\longrightarrow C'Q = CN = \frac{1}{2}BC$.

Gọi h và S lần lượt là chiều cao và diện tích đáy lăng trụ.

Ta có

$$S_{MB'Q} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} S = \frac{3}{4} S \longrightarrow V_{R.MB'Q} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3h}{2} \cdot \frac{3}{4} S = \frac{3V}{8}.$$

$$S_{KBN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} S = \frac{1}{12} S \longrightarrow V_{R.KBN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{12} S = \frac{V}{72}.$$

$$S_{JQC'} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} S = \frac{1}{8} S \longrightarrow V_{P.JC'Q} = \frac{1}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{8} S = \frac{V}{48}.$$

Suy ra $V_1 = V_{R.MB'Q} - V_{R.KBN} - V_{P.C'JQ} = \frac{49}{144} V$. **Chọn C.**

Câu 10. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích bằng V . Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB , $A'C'$, BB' . Thể tích của khối tứ diện $CMNP$ bằng

A. $\frac{V}{3}$.

B. $\frac{V}{4}$.

C. $\frac{5V}{24}$.

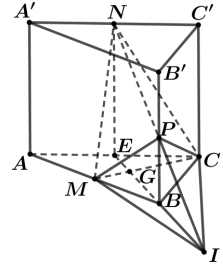
D. $\frac{7V}{24}$.

Lời giải. Gọi E là trung điểm của AC . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , gọi I là giao điểm của NP và EB .

Dễ dàng chứng minh được $IG = \frac{5}{2}GB$.

$$\text{Suy ra } S_{\triangle IMC} = \frac{5}{2} S_{\triangle MBC} = \frac{5}{4} S_{\triangle ABC} \longrightarrow V_{N.IMC} = \frac{5}{4} V_{N.ABC} = \frac{5}{12} V.$$

$$\text{Ta có } \frac{V_{N.MCP}}{V_{N.MCI}} = \frac{NP}{NI} = \frac{1}{2} \longrightarrow V_{N.MCP} = \frac{1}{2} V_{N.MCI} = \frac{5V}{24}. \text{ **Chọn C.}**$$



Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 5$, $AC = BD = \sqrt{34}$, $AD = BC = \sqrt{41}$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

A. 10.

B. 20.

C. 30.

D. 40.

Lời giải. Cho tứ diện $ABCD$ gần đều có $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $AD = BC = c$.

$$\text{Khi đó } V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)}.$$

$$\text{Áp dụng: } V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12} \sqrt{(25 + 34 - 41)(34 + 41 - 25)(25 + 41 - 34)} = 20. \text{ **Chọn B.}**$$

Cách 2. Đặt $a = AB = CD = 5$, $b = AC = BD = \sqrt{34}$, $c = AD = BC = \sqrt{41}$.

Dựng tứ diện $AMNP$ với B, C, D là trung điểm của MN, MP, NP .

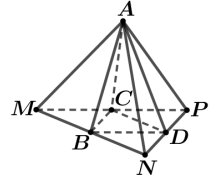
Ta có $AB = \frac{MN}{2}, AC = \frac{MP}{2}, AD = \frac{NP}{2}$

→ các tam giác AMN, ANP, AMP đều vuông tại đỉnh A

→ AM, AN, AP đôi một vuông góc.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} AM^2 + AN^2 = 4a^2 \\ AN^2 + AP^2 = 4c^2 \\ AM^2 + AP^2 = 4b^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} AM^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2) \\ AN^2 = 2(b^2 + c^2 - a^2) \\ AM^2 = 2(c^2 + a^2 - b^2) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{3} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{3} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}} = 20.$$

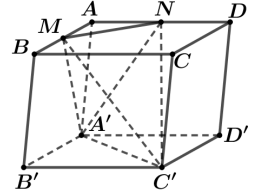


Câu 12. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích 120 cm^3 . Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và AD . Thể tích khối tứ diện $MNA'C'$ bằng:

- A. 15 cm^3 . B. 20 cm^3 . C. 24 cm^3 . D. 30 cm^3 .

Lời giải. Gọi h, S, V lần lượt là chiều cao, diện tích đáy, thể tích của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó $V = h.S$.

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{2} AC.BD.\sin(\angle AC, BD) \rightarrow V = \frac{1}{2} h.AC.BD.\sin(\angle AC, BD).$$



Vì M, N là trung điểm của AB, AD nên ta có $MN \parallel BD \rightarrow \widehat{(MN, AC)} = \widehat{(BD, AC)}$.

$$\text{Lại có } d(MN, A'C') = h \rightarrow V_{MNA'C'} = \frac{1}{6} MN.A'C'.d(MN, A'C').\sin(\angle MN, A'C').$$

$$\text{Vậy } V_{MNA'C'} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} BD.AC.h.\sin(\angle MN, AC) = \frac{1}{6} V = 20 \text{ cm}^3. \text{ Chọn B.}$$

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$ có $S_{\triangle ABC} = 4 \text{ cm}^2, S_{\triangle ABD} = 6 \text{ cm}^2, AB = 3 \text{ cm}$. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) bằng 60° . Thể tích của khối tứ diện đã cho bằng

- A. $2\sqrt{3} \text{ cm}^3$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$. C. $\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$. D. $\frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$.

Lời giải. Cho tứ diện $ABCD$, biết diện tích hai mặt bên là S_1 và S_2 ; Độ dài giao tuyến của hai mặt là ℓ ; Góc giữa hai mặt bên là α . Khi đó $V_{S.ABC} = \frac{2.S_1.S_2.\sin \alpha}{3\ell}$.

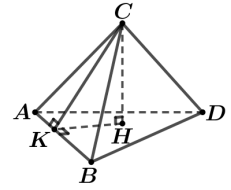
$$\text{Áp dụng: } V_{S.ABC} = \frac{2.4.6.\sin 60^\circ}{3.3} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3. \text{ Chọn D.}$$

$$\text{Cách 2. Kẻ } CK \perp AB (K \in AB). \text{ Ta có } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB.CK \rightarrow CK = \frac{8}{3} \text{ cm.}$$

Gọi H là chân đường cao của hình chóp hạ từ đỉnh C .

Xét tam giác vuông CHK , ta có $CH = CK \cdot \sin \widehat{CKH} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Vậy thể tích khối tứ diện $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot CH = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$. **Chọn D.**



Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và có thể tích V . Gọi E là điểm trên cạnh SC sao cho $EC = 2ES$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng AE và song song với đường thẳng BD , (α) cắt hai cạnh SB, SD lần lượt tại hai điểm M, N . Thể tích khối chóp $S.AMEN$ bằng

A. $\frac{V}{6}$.

B. $\frac{V}{9}$.

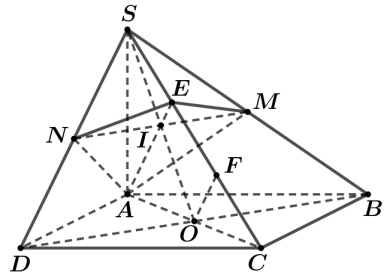
C. $\frac{V}{12}$.

D. $\frac{V}{27}$.

Lời giải. Kẻ OF song song IE , suy ra

$$\frac{SI}{SO} = \frac{SE}{SF} = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2}.$$

Khi đó $\begin{cases} a = \frac{SA}{SA} = 1, c = \frac{SC}{SE} = 3 \\ b = \frac{SB}{SM} = 2, d = \frac{SD}{SN} = 2 \end{cases}$.



Áp dụng công thức tính nhanh $\begin{cases} \frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd} \\ a+c = b+d \end{cases}$ ta được $\frac{V_{S.AMEN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{6}$. **Chọn A.**

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng (P) qua A vuông góc với SC cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại G, F, E .

Biết rằng (P) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau. Tính $k = \frac{SF}{SC}$.

A. $k = \frac{\sqrt{13}-1}{4}$.

B. $k = \frac{\sqrt{13}+1}{6}$.

C. $k = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$.

D. $k = \frac{\sqrt{17}+1}{8}$.

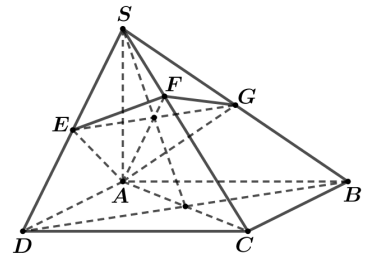
Lời giải. Đặt $\frac{SB}{SG} = \frac{SD}{SE} = x, \frac{SC}{SF} = y (x, y > 0)$.

Áp dụng công thức tính nhanh

$$\begin{cases} \frac{V_{S.AEFG}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1+y+2x}{4yx^2} \\ x+x = y+1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2y+2}{y(y+1)^2} = \frac{2}{y(y+1)} \xrightarrow{y>0} y = \frac{\sqrt{17}-1}{2}.$$

Từ đó ta tính được $k = \frac{SF}{SC} = \frac{1}{y} = \frac{\sqrt{17}+1}{8}$. **Chọn D.**



Câu 16. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AA' và BB' . Mặt phẳng $(C'MN)$ chia khối lăng trụ đã cho thành hai phần. Gọi V_1 là thể tích khối $C'MNB'A'$ và V_2 là thể tích khối $ABC.MNC'$. Khi đó tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{3}$.

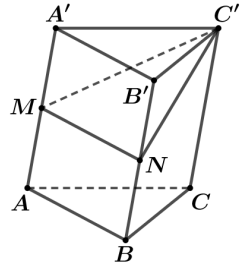
C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải. Ta có $\frac{C'C'}{C'C} = 0$; $\frac{A'M}{A'A} = \frac{B'N}{B'B} = \frac{1}{2}$.

Áp dụng công thức giải nhanh: $\frac{V_{C'MNB'A'}}{V_{ABC.C'A'B'}} = \frac{1}{3} \left(0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3}$.

Suy ra $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$. **Chọn A.**



Câu 17. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V và có độ dài cạnh bên $A'A = 6$. Trên cạnh $A'A, B'B, C'C$ lần lượt lấy các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho $A_1A = 2, B_1B = x, C_1C = y$ với x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy = 12$. Biết rằng thể tích của khối đa diện $ABC.A_1B_1C_1$ bằng $\frac{1}{2}V$. Giá trị của $|x - y|$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

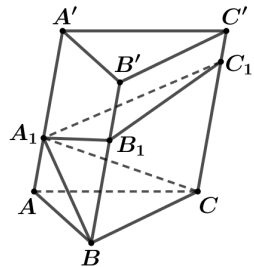
D. 4.

Lời giải. Ta có $\frac{AA_1}{AA'} = \frac{1}{3}, \frac{BB_1}{BB'} = \frac{x}{6}, \frac{CC_1}{CC'} = \frac{y}{6}$.

Áp dụng công thức giải nhanh: $\frac{V_{ABC.A'B'C'}}{V_{ABC.A_1B_1C_1}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} + \frac{x}{6} + \frac{y}{6} \right) = \frac{1}{2}$.

Suy ra $x + y = 7$. Kết hợp với giả thiết $xy = 12$ ta được

$$\begin{cases} x = 3; y = 4 \\ x = 4; y = 3 \end{cases} \longrightarrow |x - y| = 1. \text{ **Chọn A.**}$$



Câu 18. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng a , một mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P, Q . Biết $AM = \frac{a}{3}, CP = \frac{2a}{5}$.

Thể tích khối đa diện $ABCD.MNPQ$ bằng

A. $\frac{a^3}{3}$.

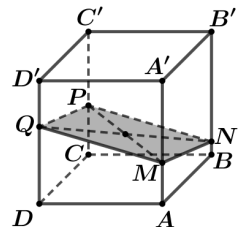
B. $\frac{2a^3}{3}$.

C. $\frac{11a^3}{15}$.

D. $\frac{11a^3}{30}$.

Lời giải. Thể tích hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^3$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} a = \frac{AM}{AA'} = \frac{1}{3}, c = \frac{CP}{CC'} = \frac{2}{5} \\ b = \frac{BN}{BB'}, d = \frac{DQ}{DD'} \end{cases}$$



Áp dụng công thức giải nhanh:
$$\begin{cases} \frac{V_{MNPQ.A'D'C'B'}}{V_{ABCD.A'D'C'B'}} = \frac{1}{4}(a+b+c+d) \\ a+c=b+d \end{cases}$$

Suy ra $\frac{V_{MNPQ.A'D'C'B'}}{V_{ABCD.A'D'C'B'}} = \frac{1}{2}(a+c) = \frac{11}{30} \longrightarrow V_{MNPQ.A'D'C'B'} = \frac{11}{30} \cdot V_{ABCD.A'D'C'B'} = \frac{11a^3}{30}$. **Chọn D.**

Câu 19. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC . Biết mặt phẳng (AEF) vuông góc với mặt phẳng (SBC) . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{8}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. C. $\frac{a^3\sqrt{5}}{24}$. D. $\frac{a^3\sqrt{15}}{27}$.

Lời giải. Gọi M là trung điểm BC , O là trọng tâm tam giác ABC .

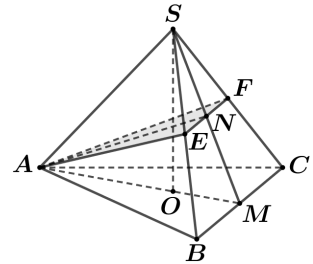
Suy ra $SO \perp (ABC)$. Gọi $N = SM \cap EF \rightarrow \begin{cases} SN \perp EF \\ AN \perp EF \end{cases}$ nên $90^\circ = \widehat{(AEF), (SBC)} = \widehat{SNA}$.

Xét tam giác SAM , có AN là đường trung tuyến và cũng là đường cao nên tam giác SAM cân tại A

$$\longrightarrow SA = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Tam giác vuông SAO , có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{5}}{24}$. **Chọn C.**



Câu 20. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng a . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC . Biết mặt phẳng (AEF) vuông góc với mặt phẳng (SBC) .

Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{8}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. C. $\frac{a^3\sqrt{5}}{24}$. D. $\frac{a^3\sqrt{15}}{27}$.

Lời giải. Tương tự như bài trên, ta có $AM = SA = a$.

Suy ra $\begin{cases} AB = BC = CA = \frac{2a}{\sqrt{3}} \\ AO = \frac{2a}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_{\Delta ABC} = \frac{a^2}{\sqrt{3}} \\ SO = \frac{a\sqrt{5}}{3} \end{cases}$ nên $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{15}}{27}$. **Chọn D.**

Câu 21. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi M là trung điểm SA . Biết mặt phẳng (MCD) vuông góc với mặt phẳng (SAB) . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{a^3}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{a^3\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{5}}{6}$.

Lời giải. Gọi $N = (MCD) \cap SB$, suy ra N là trung điểm SB .

Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm MN, CD, AB

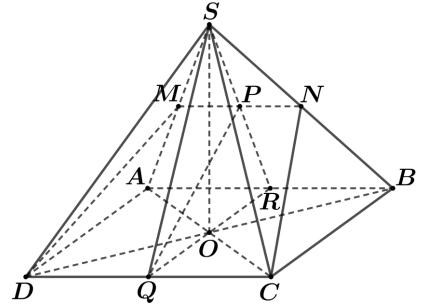
$$\longrightarrow \begin{cases} SP \perp MN \\ QP \perp MN \end{cases} \text{ nên } 90^\circ = \widehat{(MCD)}, \widehat{(SAB)} = \widehat{QPS}.$$

Xét tam giác SQR , có QP là đường trung tuyến và cũng là đường cao nên tam giác SQR cân tại Q

$$\longrightarrow SQ = QR = a.$$

$$\text{Tam giác vuông } SQO, \text{ có } SO = \sqrt{SQ^2 - QO^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO^2 = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}. \text{ Chọn C.}$$



Câu 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{BSC} = 45^\circ$, mặt phẳng (SAC) tạo với mặt phẳng (SBC) một góc 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{15}.$

B. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{18}.$

C. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{24}.$

D. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{30}.$

Lời giải. Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (SAC) . Suy ra $H \in AC$ và $BH \perp AC$. Gọi E là hình chiếu vuông góc của H trên SC . Suy ra $BE \perp SC$ và $60^\circ = \widehat{(SAC)}, \widehat{(SBC)} = \widehat{HEB}.$

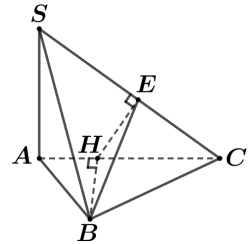
Tam giác SBC vuông cân tại B suy ra E là trung điểm SC .

$$\text{Ta có } SC = BC\sqrt{2} = a\sqrt{2}, \text{ suy ra } BE = \frac{1}{2} SC = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Tam giác } BHE \text{ có } BH = BE \sin \widehat{HEB} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Từ đó tính được } AB = \frac{a\sqrt{15}}{5}, AC = \frac{2a\sqrt{10}}{5}, SA = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SA = \frac{a^3 \sqrt{6}}{30}. \text{ Chọn D.}$$



Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều, mặt bên SCD là tam giác vuông cân tại S . Gọi M là điểm thuộc đường thẳng CD sao cho BM vuông góc với SA . Thể tích của khối chóp $S.BDM$ bằng

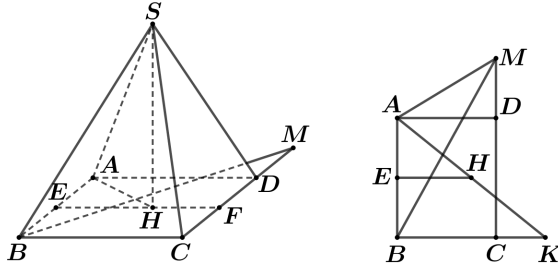
A. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{16}.$

B. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{24}.$

C. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{32}.$

D. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{48}.$

Lời giải. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của $AB, CD \longrightarrow EF$ là trung trực của AB .



Kẻ $SH \perp (ABCD)$ ($H \in (ABCD)$), mà $SA = SB = a \rightarrow HA = HB$ nên $H \in EF$

Suy ra $HC = HD \Rightarrow SD = SC \rightarrow \triangle SDC$ vuông cân tại S .

Trong tam giác SEF có $SE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $EF = a$; $SF = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2}$.

Nhận thấy $SE^2 + SF^2 = EF^2 \rightarrow \triangle SEF$ vuông cân tại S

$$\rightarrow EH = \frac{SE^2}{EF} = \frac{3a}{4}; FH = \frac{a}{4}; SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Kéo dài AH cắt BC tại $K \rightarrow BK = 2EH = \frac{3a}{2}$.

Từ giả thiết $BM \perp SA$, suy ra $BM \perp AK$.

Từ đó ta chứng minh được $\triangle ABK = \triangle BCM$ ($g - c - g$) $\Rightarrow CM = BK = \frac{3a}{2} \rightarrow DM = \frac{a}{2}$.

Vậy $V_{S.BDM} = \frac{1}{3} S_{\triangle BDM} . SH = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} BC . DM \right) SH = \frac{a^3 \sqrt{3}}{48}$. **Chọn D.**

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và hai tam giác SAC và SBD là những tam giác đều. Gọi A' , C' lần lượt là trung điểm của SA và SC . Thể tích khối tứ diện $A'BC'D$ bằng

A. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{16}$.

B. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{24}$.

C. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{24}$.

D. $\frac{a^3 \sqrt{6}}{32}$.

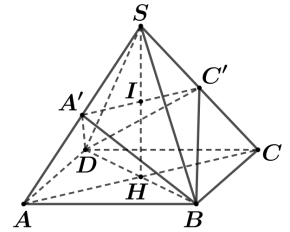
Lời giải. Gọi H là tâm hình vuông $ABCD$.

Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} SA = SB = SC = SD \\ SH \perp (ABCD) \end{cases}$.

Suy ra $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $V_{A'BC'D} = 2V_{B.HA'C'}$.

Ta có $BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp (HA'C')$.

Do đó $V_{A'BC'D} = 2 \cdot \frac{1}{3} S_{\triangle HA'C'} . BH = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} S_{\triangle SAC} \right) . BH = \frac{a^3 \sqrt{6}}{24}$. **Chọn C.**



Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SC = a\sqrt{3}$. Gọi M , N , P , Q lượt là trung điểm của SB , SD , CD , BC . Thể tích của khối chóp $A.MNPQ$ bằng

A. $\frac{a^3}{3}$.

B. $\frac{a^3}{4}$.

C. $\frac{a^3}{8}$.

D. $\frac{a^3}{12}$.

Lời giải. Gọi $I = AC \cap PQ$. Ta có $\begin{cases} MN \parallel PQ \\ MN = PQ \\ NP \perp PQ \end{cases}$

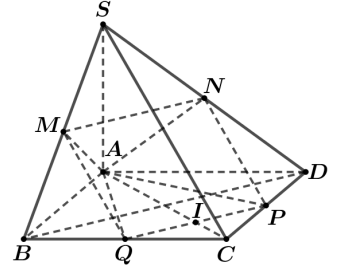
$\longrightarrow$ $MNPQ$ là hình chữ nhật nên $V_{A.MNPQ} = 2V_{M.APQ}$.

Ta có $d[M, (APQ)] = \frac{1}{2}SA$, mà

$$SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a \longrightarrow d[M, (APQ)] = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}.$$

Tính được $S_{\Delta APQ} = \frac{1}{2}AI \cdot PQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot AC \cdot \frac{1}{2}BD = \frac{3a^2}{8}$. Từ đó suy ra $V_{M.APQ} = \frac{a^3}{16}$.

Vậy $V_{A.MNPQ} = 2V_{M.APQ} = \frac{a^3}{8}$. **Chọn C.**



Câu 26. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và góc $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Gọi M là trung điểm của AB , tam giác $MA'C$ đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC) . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

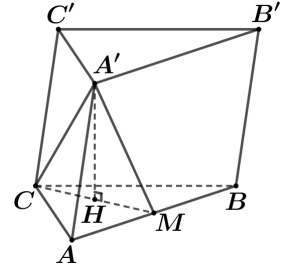
- A. $\frac{a^3}{7}$. B. $\frac{2a^3}{7}$. C. $\frac{3a^3}{7}$. D. $\frac{5a^3}{7}$.

Lời giải. Gọi H là trung điểm CM . Suy ra $A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $A'H \perp (ABC)$.

Đặt $AC = x$, suy ra $BC = 2x$ và $AB = x\sqrt{3}$.

Pitago trong ΔCAM tìm được $x = \frac{2a}{\sqrt{7}}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot A'H = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot A'H = \frac{3a^3}{7}$. **Chọn C.**



Câu 27. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a , góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

- A. $\frac{3a^3\sqrt{15}}{10}$. B. $\frac{9a^3\sqrt{15}}{10}$. C. $\frac{3a^3\sqrt{15}}{20}$. D. $\frac{9a^3\sqrt{15}}{20}$.

Lời giải. Gọi M là trung điểm của AB , H là hình chiếu của C lên $C'M$.

Suy ra $CH \perp (ABC')$ và $CH = a$.

Gọi N là hình chiếu của C lên BC' , khi đó

$$BC' \perp (CHN) \Rightarrow BC' \perp NH \longrightarrow \widehat{(ABC'), (BCC')} = \widehat{CNH} = \alpha.$$

Đặt $AB = AC = BC = x \longrightarrow CM = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông CHN có $CN = \frac{CH}{\sin \alpha} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

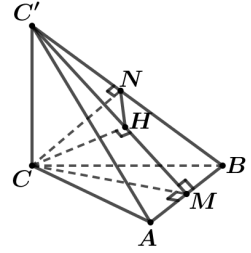
Trong hai tam giác vuông $C'CB$ và $C'CM$ lần lượt có

$$\frac{1}{C'C^2} = \frac{1}{CN^2} - \frac{1}{BC^2}; \frac{1}{C'C^2} = \frac{1}{CH^2} - \frac{1}{CM^2}.$$

$$\longrightarrow \frac{1}{CN^2} - \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{CH^2} - \frac{1}{CM^2} \Leftrightarrow \frac{8}{9a^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{4}{3x^2} \longrightarrow x = a\sqrt{3} \longrightarrow CM = \frac{3a}{2}.$$

Từ đó ta tính được $CC' = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$ và $S_{ABC} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = CC'.S_{ABC} = \frac{9a^3\sqrt{15}}{20}$. **Chọn D.**



Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD . Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Cosin góc giữa MN và (SAC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{5}}{10}$. B. $\frac{3\sqrt{5}}{10}$. C. $\frac{\sqrt{310}}{20}$. D. $\frac{3\sqrt{310}}{20}$.

Lời giải. Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA \cdot \frac{AD+BC}{2} \cdot d(AD, BC) = \frac{1}{3}SA \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} \longrightarrow SA = a$.

Gọi P là trung điểm AB , khi đó $MP \perp (ABCD)$.

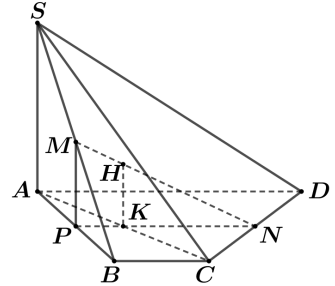
Gọi $K = NP \cap AC$.

Dựng $HK \perp (ABCD)$ với $H \in MN$. Khi đó $H \in (SAC)$.

Ta có $AC = a\sqrt{3}$, $CD = a$, $AD = 2a$ suy ra $NC \perp AC$.

Khi đó $\cos(MN, (SAC)) = \cos \widehat{NHC} = \frac{HC}{NH}$

$= \frac{3\sqrt{HK^2 + KC^2}}{2MN} = \frac{\sqrt{310}}{20}$. **Chọn C.**



Câu 29. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = 6$, $SB = 2$, $SC = 4$, $AB = 2\sqrt{10}$ và $\widehat{SBC} = \widehat{ASC} = 90^\circ$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

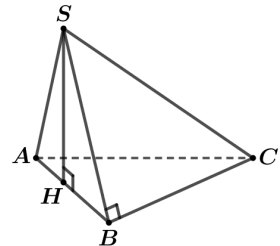
- A. $4\sqrt{3}$. B. $6\sqrt{3}$. C. $8\sqrt{3}$. D. $12\sqrt{3}$.

Lời giải. Pitago trong tam giác SBC ta được $BC = 2\sqrt{3}$;

trong tam giác SAC ta được $AC = 2\sqrt{13}$.

Kiểm tra thấy $AB^2 + BC^2 = AC^2 \longrightarrow$ tam giác ABC vuông tại B .

Ta có $\begin{cases} BC \perp SB \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (ABC) \perp (SAB)$.



Do đó nếu gọi H là chân đường cao hạ từ S trong tam giác SAB thì ta có $SH \perp (ABC)$ và $SH = \frac{SA \cdot SB}{\sqrt{SA^2 + SB^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}}$. Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SH = 4\sqrt{3}$. **Chọn A.**

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 1$, $AD = \sqrt{10}$; $SA = SB$, $SC = SD$. Biết hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) cùng vuông góc với nhau và tổng diện tích hai tam giác SAB và SCD bằng 2. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

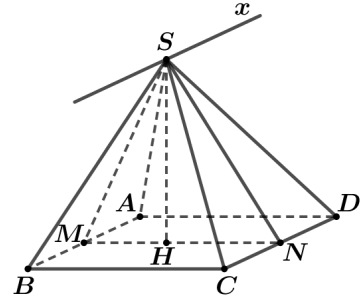
B. 1.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 2.

Lời giải. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy $(ABCD)$. Do $SA = SB$ suy ra H thuộc đường trung trực của AB ; tương tự H thuộc đường trung trực của CD . Suy ra $H \in MN$ (như hình vẽ).

Ta có $\begin{cases} (SAB) \cap (SCD) = Sx \\ SM \perp Sx; SN \perp Sx \end{cases} \xrightarrow{\text{giao thiết}} \widehat{MSN} = 90^\circ$.



Đặt $\begin{cases} SM = x \\ SN = y \end{cases}$, ta có hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = MN^2 = 10 \\ \frac{1}{2}x \cdot AB + \frac{1}{2}y \cdot CD = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$.

Khi đó $SH = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = 1$. **Chọn B.**

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh A , $BC = 2a$, $SB = SC$, $SA = 2a$ và SA tạo với đáy một góc 60° . Biết H là hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt đáy (ABC) thuộc tam giác ABC . Thể tích khối chóp $S.AHC$ bằng

A. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{9}$.

D. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$.

Lời giải. Ta có $SB = SC$ suy ra H thuộc trung trực của đoạn BC . Tam giác ABC vuông cân tại A nên H nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm A và M (M là trung điểm BC nên $AM = \frac{1}{2}BC = a$). Hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng

(ABC) là HA nên $60^\circ = \widehat{SA, (ABC)} = \widehat{SA, HA} = \widehat{SAH}$.

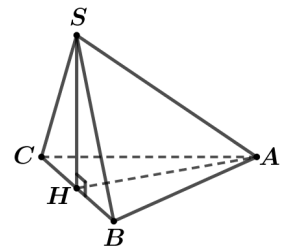
Xét tam giác vuông SAH , ta có $AH = SA \cdot \cos \widehat{SAH} = a = AM$. Do đó $H \equiv M$.

Trong tam giác vuông cân ABC có $AB = AC = \frac{BC}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông SHA có $SH = SA \cdot \sin \widehat{SAH} = a\sqrt{3}$.

Ta có $S_{\triangle AHC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} AB \cdot AC \right) = \frac{a^2}{2}$.

Vậy $V_{S.AHC} = \frac{1}{3} S_{\triangle AHC} \cdot SH = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$. **Chọn B.**



Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$; tam giác SOA cân tại S và mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Biết góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải. Tam giác SOA cân tại S nên $SO = SA$ suy ra H thuộc trung trực đoạn OA ; mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ nên H thuộc giao tuyến AD . Từ đó suy ra H là giao điểm của trung trực đoạn OA với cạnh AD .

Ta có $AC = BD = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$.

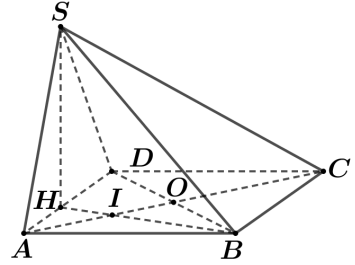
Suy ra $AO = BO = AB = a$ nên tam giác ABO đều cạnh a , suy ra $\widehat{ABI} = 30^\circ$.

Gọi I là trung điểm của AO , suy ra đường trung trực đoạn OA đi qua hai điểm I, B .

Suy ra $H = BI \cap AD$. Khi đó $60^\circ = \widehat{SD, (ABCD)} = \widehat{SD, HD} = \widehat{SDH}$.

Tính được $AH = \frac{a}{\sqrt{3}}$, suy ra $HD = AD - AH = \frac{2a}{\sqrt{3}} \longrightarrow SH = HD \cdot \tan \widehat{SDH} = 2a$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **Chọn B.**



Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Các mặt bên (SAB) , (SAC) lần lượt tạo với đáy các góc là $60^\circ, 30^\circ$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) nằm trên cạnh BC . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{32}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{64}$.

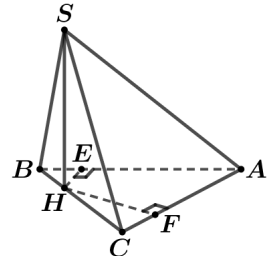
Lời giải. Kẻ $HE \perp AB$ ($E \in AB$), $HF \perp AC$ ($F \in AC$) (tham khảo hình vẽ).

Từ hình vẽ, suy ra $\begin{cases} \widehat{SEH} = 60^\circ \\ \widehat{SFH} = 30^\circ \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} HE = SH \cdot \cot 60^\circ \\ HF = SH \cdot \cot 30^\circ \end{cases}$.

Ta có $S_{\triangle ABH} + S_{\triangle ACH} = S_{\triangle ABC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot HE + \frac{1}{2} AC \cdot HF = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot a \cdot SH \cdot (\cot 60^\circ + \cot 30^\circ) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \longrightarrow SH = \frac{3a}{8}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{32}$. **Chọn C.**



Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác với $AB = AC = 5a$, $BC = 6a$ và các mặt bên cùng tạo với đáy các góc 60° . Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) nằm bên trong tam giác ABC . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{2a^3}{\sqrt{3}}$.

B. $a^3\sqrt{3}$.

C. $6a^3\sqrt{3}$.

D. $8a^3$.

Lời giải. Kẻ $HE \perp AB$ ($E \in AB$), $HF \perp AC$ ($F \in AC$), $HI \perp BC$ ($I \in BC$).

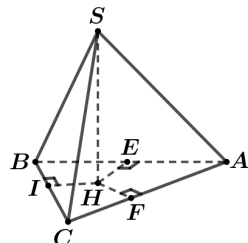
Từ hình vẽ, suy ra $\widehat{SEH} = \widehat{SFH} = \widehat{SIH} = 60^\circ \longrightarrow HI = HE = HF = SH \cdot \cot 60^\circ$.

Ta có $S_{\Delta ABH} + S_{\Delta ACH} + S_{\Delta BCH} = S_{\Delta ABC}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB \cdot HE + \frac{1}{2}AC \cdot HF + \frac{1}{2}BC \cdot HI = 12a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 16a \cdot SH \cdot \cot 60^\circ = 12a^2 \longrightarrow SH = \frac{3a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SH = 6a^3\sqrt{3}$. **Chọn C.**



Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng $(ABCD)$ thuộc đoạn BD . Hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) lần lượt hợp với đáy các góc 60° và 30° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{5}$.

B. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{5}$.

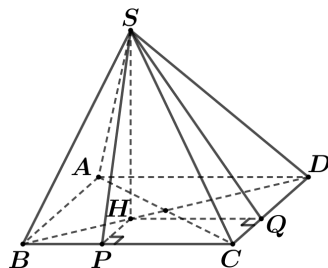
C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{15}$.

D. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{15}$.

Lời giải. Ta có $S_{\Delta BCD} = S_{\Delta BHC} + S_{\Delta CHD}$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{2}BC \cdot SH \cot 60^\circ + \frac{1}{2}CD \cdot SH \cot 30^\circ \rightarrow SH = \frac{2a\sqrt{3}}{5}.$$

Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \frac{4a^3\sqrt{3}}{15}$. **Chọn D.**



Câu 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Các mặt phẳng (SAB) , (SBD) và (SAD) cùng hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Biết hình chiếu vuông góc của S trên mặt đáy nằm ngoài tam giác ABD . Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

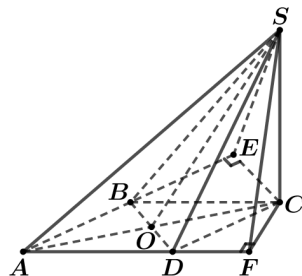
C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra chân đường cao của hình chóp $S.ABCD$ là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác đều ABD . Do ba đường tròn bàng tiếp của tam giác đều ABD có bán kính bằng nhau nên chỉ cần xét một trường hợp H là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A .

Để thấy C là tâm đường tròn bàng tiếp cần tìm và bán

$$\text{kinh bằng } CO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \longrightarrow SC = CO \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}.$$



Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SC = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}$. **Chọn B.**

Câu 37. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{3}$, $AD = \sqrt{7}$, cạnh bên bằng 1. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với đáy những góc bằng 45° và 60° . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. 3.

B. $3\sqrt{3}$.

C. 7.

D. $7\sqrt{7}$.

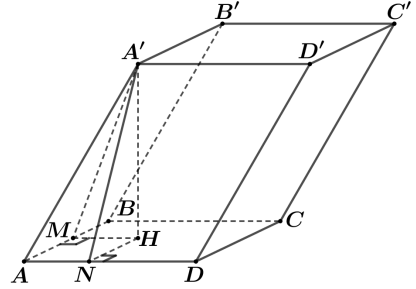
Lời giải. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' xuống mặt đáy $(ABCD)$.

Đặt $A'H = h$. Ta có $MH = h \cot 45^\circ$; $NH = h \cot 60^\circ$

và $AH = \sqrt{AA'^2 - h^2} = \sqrt{1 - h^2}$.

Từ $MH^2 + NH^2 = AH^2 \longrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Suy ra $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'H = 3$. **Chọn A.**



Câu 38. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$, tam giác SAC nhọn và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) tạo với nhau góc α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{3}{4}$; cạnh $SC = 3$.

Thể tích khối $S.ABCD$ bằng

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{8}{3}$.

C. $3\sqrt{3}$.

D. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải. Đặt $AH = x$, $SH = y$. Có $AB = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3} \longrightarrow AC = 3$.

Ta có $SC = \sqrt{HC^2 + SH^2} \Leftrightarrow 3 = \sqrt{(3-x)^2 + y^2} \longrightarrow x^2 + y^2 - 6x = 0$. (1)

Gọi $M \in AC$, $BM \perp AC \longrightarrow BM = \sqrt{2}$ và $AM = 2$.

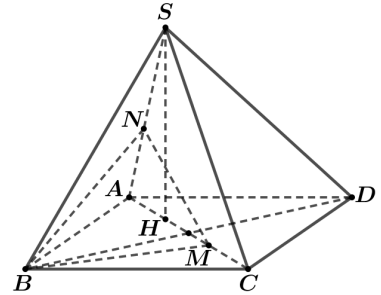
Kẻ $MN \perp SA$ ($N \in SA$) $\longrightarrow \angle(SAB), \angle(SAC) = \alpha$.

Ta có: $\tan \alpha = \frac{BM}{MN} = \frac{3}{4} \longrightarrow MN = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Mặt khác: $\frac{d(H, SA)}{MN} = \frac{AH}{AM} \Leftrightarrow \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\frac{4\sqrt{2}}{3}} = \frac{x}{2}$

suy ra $y^2 = \frac{16}{3}x$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ nên $V_{S.ABCD} = \frac{8}{3}$. **Chọn B.**



Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SB > 2a$ và $\widehat{ABC} = \widehat{BAS} = \widehat{BCS} = 90^\circ$. Sin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{11}}{11}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. D. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải. Gọi O là trung điểm AC , D đối xứng của B qua O .
Suy ra $d[B, (SAC)] = d[D, (SAC)]$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \rightarrow AB \perp SD$.

Tương tự có $BC \perp SD$. Từ đó suy ra $SD \perp (ABCD)$.

Đặt $SD = x$ ($x > 0$) $\rightarrow SB = \sqrt{x^2 + 3a^2}$ (1) $\xrightarrow{SB > 2a} x > a$.

Vì $\sin(\widehat{SB, (SAC)}) = \frac{\sqrt{11}}{11} \Leftrightarrow \frac{d(B, (SAC))}{SB} = \frac{\sqrt{11}}{11} \rightarrow d(D, (SAC)) = \frac{\sqrt{11}}{11} SB$. (2)

Lại có $\frac{1}{d^2(D, (SAC))} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{DA^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2}$. (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có phương trình

$$\frac{11}{x^2 + 3a^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{2a^2} \Leftrightarrow 3x^4 - 11x^2a^2 + 6a^4 = 0 \xrightarrow{x > a} x = a\sqrt{3}.$$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SD = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **Chọn B.**

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A với $AB = a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$. Biết góc giữa SB và mặt đáy (ABC) bằng 60° , thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. C. $\frac{3a^3}{4}$. D. $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải. Chọn $D \in (ABC)$ sao cho $\widehat{DBA} = \widehat{DCA} = 90^\circ$.

Suy ra $\triangle DBC$ đều nên $DB = DC = BC = a\sqrt{3}$.

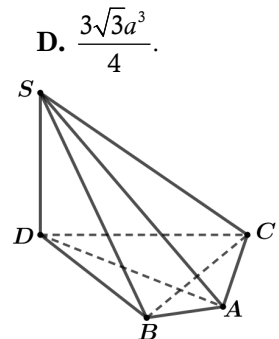
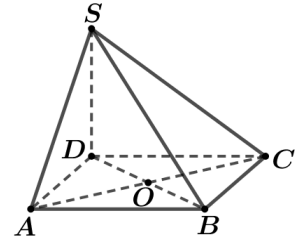
Tương tự như bài trên ta chứng minh được $SD \perp (ABCD)$.

Suy ra $60^\circ = (\widehat{SB, (ABC)}) = \widehat{SBD}$.

Khi đó ta tính được $SD = DB \cdot \tan \widehat{SBD} = 3a$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SD = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **Chọn B.**

Câu 41. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt đáy (ABC) bằng 60° , thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng



A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

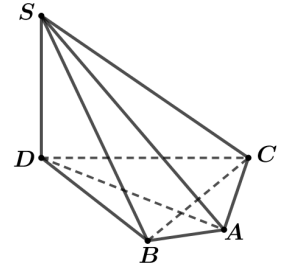
Lời giải. Chọn $D \in (ABC)$ sao cho $\widehat{DBA} = \widehat{DCA} = 90^\circ$.

Ta chứng minh được $SD \perp (ABCD)$.

Suy ra $60^\circ = (\widehat{SAB}, \widehat{ABC}) = \widehat{SBD}$.

Tính được $BD = AB \cdot \tan \widehat{BAD} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $SD = BD \cdot \tan \widehat{SBD} = a$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SD = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$. **Chọn C.**



Câu 42. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A với $AB = a$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$. Biết góc φ giữa SB và mặt phẳng (SAC) thỏa mãn $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{8}$, khoảng cách từ S đến mặt đáy (ABC) nhỏ hơn $2a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

Lời giải. Chọn $D \in (ABC)$ sao cho $\widehat{DBA} = \widehat{DCA} = 90^\circ$.

Suy ra $\triangle DBC$ đều nên $DB = DC = BC = a\sqrt{3}$.

Ta chứng minh được $SD \perp (ABCD)$.

Đặt $SD = x$ ($0 < x < 2a$) $\longrightarrow SB = \sqrt{x^2 + 3a^2}$.

Gọi $I = DB \cap AC$. Trong tam giác vuông DCI , có

$$DI = \frac{DC}{\cos 60^\circ} = 2a\sqrt{3} \text{ nên } B \text{ là trung điểm của } DI$$

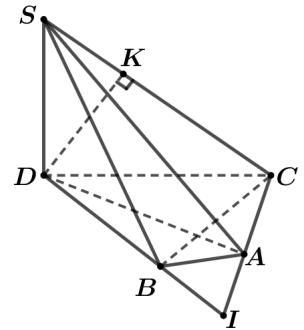
$$\longrightarrow d[B, (SAC)] = \frac{1}{2} \cdot d[D, (SAC)]. \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \sin \varphi = \frac{d[B, (SAC)]}{SB} \longrightarrow d[B, (SAC)] = SB \cdot \sin \varphi = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + 3a^2}}{8}. \quad (2)$$

$$\text{Kẻ } DK \perp SC \text{ (} K \in SC \text{)} \longrightarrow d[D, (SAC)] = DK = \frac{SD \cdot DC}{\sqrt{SD^2 + DC^2}} = \frac{xa\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 + 3a^2}}. \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) suy ra } \frac{xa\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 + 3a^2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2 + 3a^2}}{4} \xrightarrow{0 < x < 2a} x = a.$$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SD = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$. **Chọn C.**



Câu 43. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng 4 và khoảng cách từ điểm A đến các đường thẳng BB' , CC' lần lượt bằng 1 và 2. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\sqrt{3}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $3\sqrt{3}$.

D. $4\sqrt{3}$.

Lời giải. Kẻ $AE \perp BB'$ tại E ; $AF \perp CC'$ tại F .

Khi đó $\widehat{ABB'A'}, \widehat{ACC'A'} = \widehat{AE}, \widehat{AF}$.

• **Trường hợp 1.** $\widehat{EAF} = 60^\circ \xrightarrow{\cos} EF = \sqrt{3}$.

Ta có $AF^2 = AE^2 + EF^2 \longrightarrow AE \perp EF$. Suy ra $AE \perp (BCC'B')$.

$$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{2}V_{A.BCC'B'} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}S_{BCC'B'} \cdot AE \right) = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}BB' \cdot EF \cdot AE \right) = 2\sqrt{3}.$$

• **Trường hợp 2.** $\widehat{EAF} = 120^\circ \xrightarrow{\cos} EF = \sqrt{7}$.

$$\text{Ta có } S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} d(A, EF) \cdot EF \longrightarrow d(A, EF) = \frac{AE \cdot AF \cdot \sin 120^\circ}{EF} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Ta có } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{2}V_{A.BCC'B'} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}BB' \cdot EF \cdot d(A, EF) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{21}}{7} \cdot \sqrt{7} \cdot 4 = 2\sqrt{3}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 44. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và

$$A'M = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \text{ Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng}$$

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

B. 1.

C. $\sqrt{3}$.

D. 2.

Lời giải. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên đường thẳng BB', CC' .

$$\text{Ta có } \begin{cases} BB' \perp AE \\ BB' \perp AF \end{cases} \text{ (do } BB' \parallel CC') \Rightarrow \begin{cases} BB' \perp EF \longrightarrow d(C, BB') = EF. \\ (AEF) \perp (BCC'B') \longrightarrow d[A, (BB'C'C)] = d(A, EF) \end{cases}$$

Tam giác AEF có $AE = 1, AF = \sqrt{3}, EF = 2$ nên vuông tại A . Suy ra $d(A, EF) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Gọi N là trung điểm BC và $H = EF \cap MN$.

Suy ra H là trung điểm EF nên $AH = \frac{1}{2}EF = 1$.

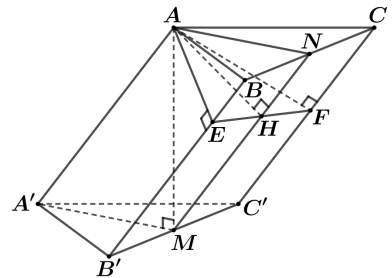
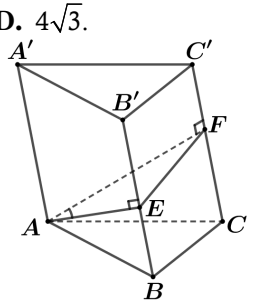
Trong tam AMN vuông tại A , có

$$\begin{cases} AN = A'M = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow BB' = MN = \frac{4\sqrt{3}}{3}. \\ AH = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3}{2}V_{A.BCC'B'} = \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}BB' \cdot EF \cdot d[A, EF] \right) = 2. \text{ Chọn D.}$$

Cách 2. Ta có $(AEF) \perp BB'$ nên $\triangle ABC$ có hình chiếu vuông góc lên (AEF) là $\triangle AEF$.

$$\text{Mà } \begin{cases} MN \perp (AEF) \\ AM \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow \widehat{(AEF), (ABC)} = \widehat{MN, AM} = \widehat{AMN}.$$



Do đó $S_{\Delta ABC} = \frac{S_{\Delta AEF}}{\cos \angle AMN} = \frac{MN}{AM} \cdot S_{\Delta AEF}$. Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AM \cdot S_{\Delta ABC} = MN \cdot S_{\Delta AEF} = 2$.

Cách 3. Ta chứng minh được $AA' \perp (AEF)$. Khi đó thể tích lăng trụ đã cho bằng thể tích của khối lăng trụ (T) có đáy là tam giác AEF và chiều cao là AA' (chỉ cần cắt khối đa diện $ABCFE$ ghép xuống dưới khối $A'B'C'AEF$ ta sẽ thu được lăng trụ đứng). Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\Delta AEF} = 2$.

Câu 45. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$ và $A'G' = \frac{4}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{2}{3}$.

B. $\frac{4}{3}$.

C. $\frac{8}{3}$.

D. 2.

Lời giải. Tương tự như bài trên $V = AA' \cdot S_{\Delta AEF}$.

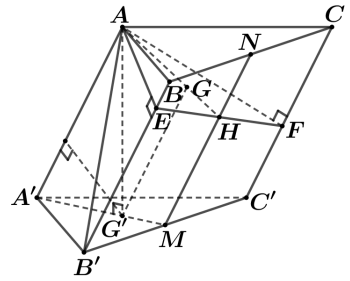
Gọi G là trọng tâm $\Delta AEF \Rightarrow AG = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}$.

Vì $AA' \perp (AEF) \Rightarrow AA' \perp AG$ nên $d(G, AA') = AG$.

Mà $AA' \parallel GG'$ nên $d(G', AA') = d(G, AA') = AG = \frac{2}{3}$.

Tam giác vuông $AG'A'$ có $d(G', AA') = \frac{2}{3}$, $A'G' = \frac{4}{3}$ nên

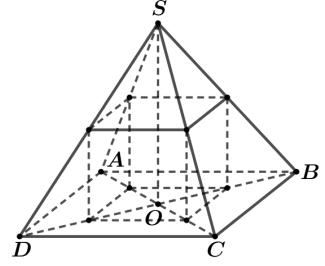
tính được $AA' = \frac{8}{3\sqrt{3}}$. Vậy $V = \frac{4}{3}$. **Chọn B.**



Phần 2. Tỷ số thể tích

Câu 1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi H là hình hộp chữ nhật có bốn đỉnh là bốn trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC, SD và bốn đỉnh còn lại nằm trong mặt đáy $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ). Biết thể tích khối hộp H là V . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

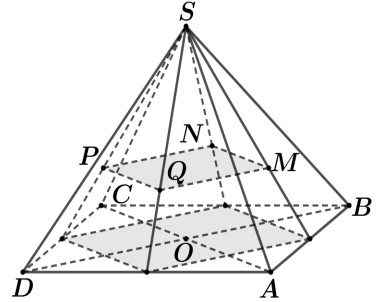
- A. $2V$. B. $6V$.
C. $\frac{4}{3}V$. D. $\frac{8}{3}V$.



Lời giải. Chiều cao của khối chóp gấp hai lần chiều cao khối hộp và diện tích mặt đáy khối chóp gấp 4 lần diện tích mặt đáy khối hộp. Do đó $V_{S.ABCD} = \frac{8}{3}V$. **Chọn D.**

Câu 2. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD, SDA . Biết khối chóp $S.MNPQ$ có thể tích là V , khi đó thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

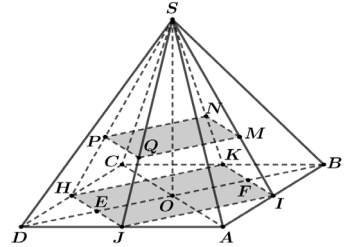
- A. $\frac{9V}{4}$. B. $\frac{27V}{4}$.
C. $\frac{81V}{4}$. D. $\frac{81V}{8}$.



Lời giải. Ta có $d[S, (ABCD)] = \frac{3}{2}d[S, (MNPQ)]$ và

$$S_{ABCD} = 2S_{IJKL} = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 S_{MNPQ} = \frac{9}{2}S_{MNPQ}.$$

Do đó $V_{S.ABCD} = \frac{27}{4}V_{S.MNPQ}$. **Chọn B.**



Câu 3. Cho khối tứ diện $ABCD$ có thể tích V . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD, ACD, BCD . Gọi V' là thể tích của khối tứ diện $MNPQ$.

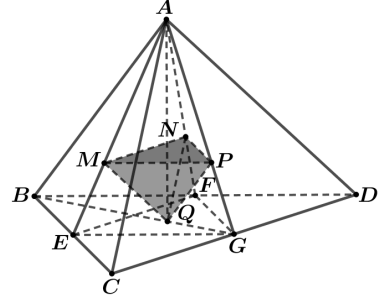
Tỷ số $\frac{V'}{V}$ bằng

- A. $\frac{1}{27}$. B. $\frac{2}{27}$. C. $\frac{4}{27}$. D. $\frac{1}{9}$.

Lời giải. Ta có $\triangle MNP \sim \triangle DCB$ theo tỉ số $k = \frac{1}{3}$

nên $S_{\triangle MNP} = \frac{1}{9} S_{\triangle DCB}$ và $d[Q, (MNP)] = \frac{1}{3} d[A, (DCB)]$

nên $\frac{V'}{V} = \frac{1}{27}$. **Chọn A.**



Câu 4. Cho lăng trụ tam giác $ABC.MNP$ có thể tích V . Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACM, AMB, BCM ; V_1 là thể tích khối tứ diện $G_1G_2G_3G_4$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A. $V = 9V_1$. B. $V = 27V_1$. C. $V = 81V_1$. D. $8V = 81V_1$.

Lời giải. Tương tự như bài trên và chú ý rằng đây là thể tích lăng trụ. **Chọn C.**

Câu 5. Cho khối tứ diện đều $ABCD$ có thể tích V . Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ADB và V' là thể tích khối tứ diện $AMNP$. Tỉ số $\frac{V'}{V}$ bằng

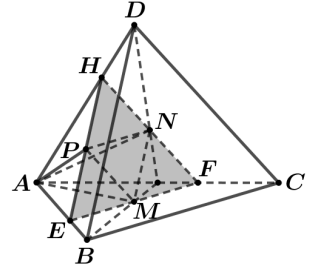
- A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{2}{27}$. C. $\frac{4}{27}$. D. $\frac{8}{81}$.

Lời giải. Xác định được thiết diện là tam giác EFH (tham khảo hình vẽ). Ta có

$$\bullet \quad d[A, (MNP)] = d[A, (EGH)] = \frac{2}{3} d[A, (BCD)].$$

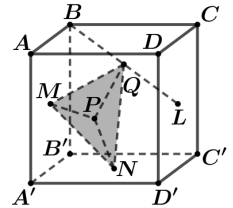
$$\bullet \quad S_{\triangle MNP} = \frac{1}{4} S_{\triangle EFH} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 S_{\triangle BCD} = \frac{1}{9} S_{\triangle BCD}.$$

Suy ra $V_{AMNP} = \frac{2}{27} V_{ABCD}$ nên $\frac{V'}{V} = \frac{2}{27}$. **Chọn B.**



Câu 6. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, L lần lượt là tâm của các hình vuông $ABB'A', A'B'C'D', ADD'A'$ và $CDD'C'$. Gọi Q là trung điểm của BL (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích khối tứ diện $MNPQ$ bằng

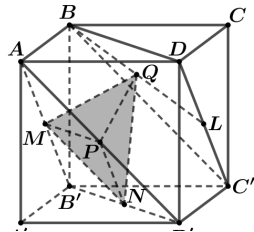
- A. $\frac{1}{16}$. B. $\frac{1}{24}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{27}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{27}$.



Lời giải. Ta có M, N, P lần lượt là trung điểm của $AB', B'D', AD'$ nên suy ra $S_{\triangle MNP} = \frac{1}{4}S_{\triangle AB'D'}$. (1)

Lại có $Q \in (BC'D)$, mà $(BC'D) \parallel (AB'D')$ nên

$$d[Q, (AB'D')] = d[B, (AB'D')] = d[A', (AB'D')]. \quad (2)$$



Từ (1) và (2) $\longrightarrow V_{MNPQ} = \frac{1}{4}V_{BAB'D'} = \frac{1}{4}V_{A'AB'D'} = \frac{1}{24}$. **Chọn B.**

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm BC . Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SM cắt SB, SC lần lượt tại E, F . Biết $V_{SAEF} = \frac{1}{4}V_{SABC}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3}{2}$.

B. $\frac{2a^3}{5}$.

C. $\frac{a^3}{8}$.

D. $\frac{a^3}{12}$.

Lời giải. Kẻ $AH \perp SM$ ($H \in SM$).

Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \longrightarrow BC \perp SM$.

Do (P) đi qua A vuông góc với SM cắt SB, SC tại E, F nên EF đi qua H và song song với BC

$$\longrightarrow \frac{SE}{SB} = \frac{SH}{SM} = \frac{SF}{SC}.$$

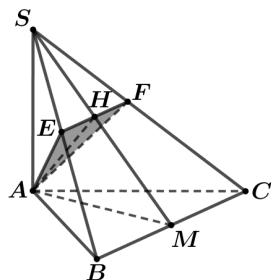
Trong tam giác vuông SAM , có $SH \cdot SM = SA^2 \longrightarrow \frac{SH}{SM} = \frac{SA^2}{SM^2}$.

$$\text{Ta có } \frac{V_{SAEF}}{V_{SABC}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{SE}{SB} \cdot \frac{SF}{SC} = \left(\frac{SH}{SM} \right)^2 = \left(\frac{SA^2}{SA^2 + \frac{3a^2}{4}} \right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow SA^2 = \frac{3}{4}a^2 \longrightarrow SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{8}$. **Chọn C.**

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy (ABC) .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SC . Biết $\frac{V_{S.ABH}}{V_{S.ABC}} = \frac{16}{19}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải. Gọi O là trung điểm của $AB \longrightarrow SO \perp (ABC)$.

Ta có $\begin{cases} SC \perp AH \\ SC \perp AB \end{cases} \rightarrow SC \perp (AHB)$. Suy ra $SC \perp OH$.

Trong tam giác vuông SOC , có $SH \cdot SC = SO^2 \longrightarrow \frac{SH}{SC} = \frac{SO^2}{SC^2}$.

Ta có $\frac{V_{S.AHB}}{V_{S.ACB}} = \frac{16}{19} \Leftrightarrow \frac{SH}{SC} = \frac{16}{19} \Leftrightarrow \frac{SO^2}{SC^2} = \frac{16}{19} \Leftrightarrow \frac{SO^2}{SO^2 + \frac{3}{4}} = \frac{16}{19} \longrightarrow SO = 2$.

Vậy $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. **Chọn C.**

Câu 9. Cho hình chóp đều $S.ABC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , góc giữa SG và mặt phẳng (SBC) là 30° . Mặt phẳng (P) chứa BC và vuông góc với SA chia khối chóp $S.ABC$ thành hai phần. Tỷ số thể tích hai phần bằng

A. $\frac{2}{3}$.

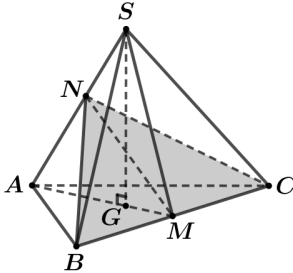
B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{1}{7}$.

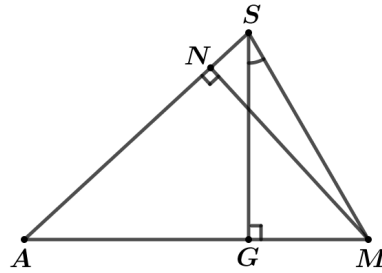
D. $\frac{6}{7}$.

Lời giải. Ta chứng minh được $BC \perp SA$. Trong mặt phẳng (SAM) , kẻ $MN \perp SA$ với $N \in SA$. Khi đó thiết diện tạo bởi mp (P) và khối chóp là $\triangle NBC$ (hình a).

Dễ dàng xác định được: $30^\circ = \widehat{(SG, (SBC))} = \widehat{(SG, SM)} = \widehat{GSM}$.



hình a



hình b

Ta có $\frac{V_{S.NBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SN}{SA}$. Ta tính được $\frac{SN}{SA} = \frac{1}{7}$ (hình b). Suy ra $\frac{V_{SNBC}}{V_{NABC}} = \frac{1}{6}$. **Chọn B.**

Câu 10. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a , chiều cao bằng $2a$. Mặt phẳng (P) qua B' và vuông góc $A'C$ chia lăng trụ thành hai khối. Biết thể tích của hai khối là V_1 và V_2 với $V_1 < V_2$. Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{1}{7}$.

B. $\frac{1}{11}$.

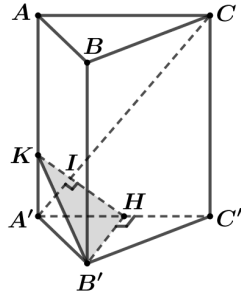
C. $\frac{1}{23}$.

D. $\frac{1}{47}$.

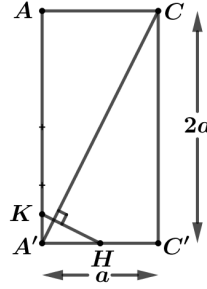
Lời giải. Gọi H là trung điểm của $A'C'$, suy ra $B'H \perp A'C$ nên $B'H \subset (P)$.

Trong mặt phẳng $(ACC'A')$, kẻ $HK \perp A'C$ với $K \in AA'$. Suy ra $HK \subset (P)$.

Do đó thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) và khối lăng trụ là tam giác HKB' .



hình a



hình b

Ta có $S_{\Delta A'B'H} = \frac{1}{2} S_{\Delta A'B'C'}$ và tính được $KA' = \frac{1}{8} AA'$.

Do đó $V_{K.A'B'H} = \frac{1}{48} V_{ABCD.A'B'C'D'} \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{47}$. **Chọn D.**

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD . Tỉ số $\frac{V_{S.BCNM}}{V_{S.BCDA}}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{5}{12}$.

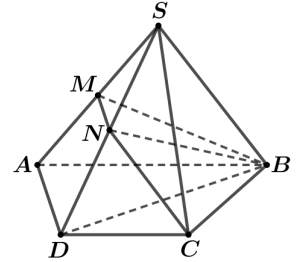
Lời giải. Vì hình thang $ABCD$ có $AB = 2CD$ nên $S_{\Delta ABD} = 2S_{\Delta BCD}$.

Ta có $V_{S.BCMN} = V_{S.BCN} + V_{S.BNM}$.

• $\frac{V_{S.BCN}}{V_{S.BCD}} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \longrightarrow V_{S.BCN} = \frac{1}{2} V_{S.BCD} = \frac{1}{6} V_{S.ABCD}$.

• $\frac{V_{S.BNM}}{V_{S.BDA}} = \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SM}{SA} = \frac{1}{4} \longrightarrow V_{S.BNM} = \frac{1}{4} V_{S.ABD} = \frac{1}{6} V_{S.ABCD}$.

Suy ra $V_{S.BCMN} = \frac{1}{3} V_{S.ABCD}$ nên $\frac{V_{S.BCMN}}{V_{S.BCDA}} = \frac{1}{3}$. **Chọn A.**



Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm di động trên cạnh AB và N là trung điểm của SD . Mặt phẳng (α) đi qua M, N và song song với BC chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối có tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{5}$,

trong đó V_1 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh A , V_2 là thể tích khối đa diện chứa đỉnh B . Tỉ số $\frac{AM}{AB}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{3}{5}$.

D. $\frac{3}{7}$.

Lời giải. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với CD, SA . Đặt $\frac{AM}{AB} = x \in [0;1]$.

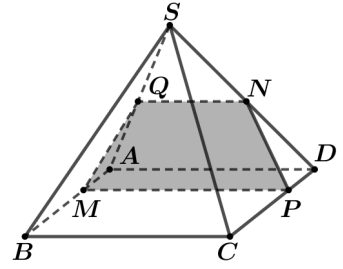
Ta có $V_1 = V_{S.ADPM} - V_{S.QNPM} = \frac{AM}{AB} \cdot V_{S.ABCD} - (V_{S.QNP} + V_{S.QMP})$.

$$\bullet V_{S.QNP} = \frac{1}{4} V_{S.ADP} = \frac{1}{8} V_{S.ADPM} = \frac{1}{8} x V_{S.ABCD};$$

$$\bullet V_{S.QMP} = \frac{1}{2} V_{S.AMP} = \frac{1}{4} V_{S.ADPM} = \frac{1}{4} x V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Suy ra } V_1 = \frac{5}{8} x V_{S.ABCD} \longrightarrow V_2 = \left(1 - \frac{5}{8} x\right) V_{S.ABCD}.$$

$$\text{Theo đề, ta có } \frac{\frac{5}{8}x}{1 - \frac{5}{8}x} = \frac{3}{5} \longrightarrow x = \frac{3}{5}. \text{ Chọn C.}$$



Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm thuộc đoạn CC' thỏa mãn $CC' = 3CM$. Mặt phẳng $(AB'M)$ chia khối hộp thành hai phần có thể tích là V_1, V_2 .

Gọi V_1 là thể tích phần chứa điểm B . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{7}{9}$.

B. $\frac{13}{20}$.

C. $\frac{7}{27}$.

D. $\frac{13}{41}$.

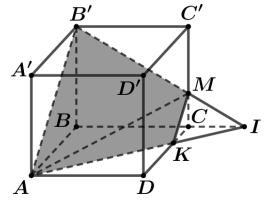
Lời giải. Vì $(BAB') \parallel (CKM)$ nên $\frac{IK}{IA} = \frac{IC}{IB} = \frac{IM}{IB'} = \frac{1}{3}$.

$$\text{Ta có } \frac{V_{IKCM}}{V_{IABB'}} = \frac{IK}{IA} \cdot \frac{IC}{IB} \cdot \frac{IM}{IB'} = \frac{1}{27} \longrightarrow V_{IKCM} = \frac{1}{27} V_{B'.ABI}.$$

$$\text{Suy ra } V_1 = \frac{26}{27} V_{B'.ABI}.$$

$$\text{Mà } V_{B'.ABI} = \frac{1}{3} d[B', (ABCD)] \cdot S_{\triangle ABI} = \frac{1}{3} d[B', (ABCD)] \cdot \frac{3}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{4} V_{ABCD.A'B'C'D'}.$$

$$\text{Vậy } V_1 = \frac{26}{27} \cdot \frac{1}{4} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{13}{54} V_{ABCD.A'B'C'D'} \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{13}{41}. \text{ Chọn D.}$$



Câu 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AA', BC, CD . Mặt phẳng (MNP) chia khối hộp thành hai phần có thể tích là V_1, V_2 .

Gọi V_1 là thể tích phần chứa điểm C . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{3}{4}$.

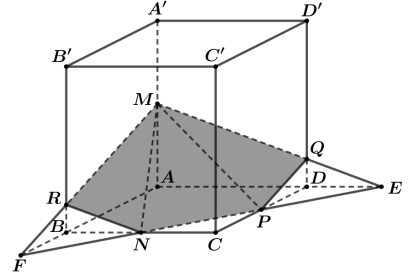
B. $\frac{113}{24}$.

C. $\frac{119}{25}$.

D. $\frac{119}{425}$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned}
\bullet V_{R.BNF} &= \frac{1}{3}d[R, (ABCD)] \cdot S_{\triangle BNF} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}d[M, (ABCD)] \cdot \frac{1}{9}S_{\triangle AEF} = \frac{1}{27}V_{M.AEF}; \\
\bullet V_{Q.DEP} &= \frac{1}{3}d[Q, (ABCD)] \cdot S_{\triangle DEP} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}d[M, (ABCD)] \cdot \frac{1}{9}S_{\triangle AEF} = \frac{1}{27}V_{M.AEF}.
\end{aligned}$$



$$\text{Suy ra } V_2 = \left(1 - \frac{1}{27} + \frac{1}{27}\right)V_{M.AEF} = \frac{25}{27}V_{M.AEF}.$$

$$\text{Mà } V_{M.AEF} = \frac{1}{3}d[M, (ABCD)] \cdot S_{\triangle AEF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}d[A', (ABCD)] \cdot \frac{9}{8}S_{ABCD} = \frac{3}{16}V_{ABCD.A'B'C'D'}.$$

$$\text{Vậy } V_2 = \frac{25}{27} \cdot \frac{3}{16}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{25}{144}V_{ABCD.A'B'C'D'} \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{119}{25}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 15. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và $B'C'$. Mặt phẳng $(A'MN)$ cắt cạnh BC tại P . Thể tích khối đa diện $MBP.A'B'N$ bằng

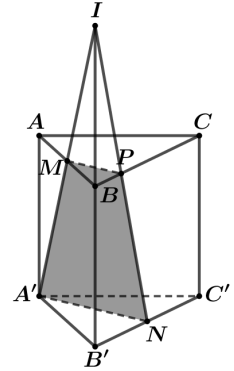
$$\text{A. } \frac{\sqrt{3}a^3}{12}. \quad \text{B. } \frac{\sqrt{3}a^3}{24}. \quad \text{C. } \frac{7\sqrt{3}a^3}{32}. \quad \text{D. } \frac{7\sqrt{3}a^3}{96}.$$

$$\text{Lời giải. Ta có } \frac{V_{IMBP}}{V_{IA'B'N}} = \frac{IM}{IA'} \cdot \frac{IB}{IB'} \cdot \frac{IP}{IN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

$$\text{Suy ra } V_{MBP.A'B'N} = \left(1 - \frac{1}{8}\right)V_{IA'B'N} = \frac{7}{8}V_{IA'B'N}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Mà } V_{IA'B'N} &= \frac{1}{3}d[I, (A'B'C')] \cdot S_{\triangle A'B'N} \\
&= \frac{1}{3} \cdot 2d[B, (A'B'C')] \cdot \frac{1}{2}S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}.
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } V_{MBP.A'B'N} = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{7}{24}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{7\sqrt{3}}{96}a^3. \text{ Chọn D.}$$



Câu 16. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là trung điểm ba cạnh $A'B', BB'$ và $D'D$. Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng $A'A$ tại I . Biết thể tích khối tứ diện $IANP$ là V . Thể tích khối hộp đã cho $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

$$\text{A. } 2V. \quad \text{B. } 4V. \quad \text{C. } 6V. \quad \text{D. } 12V.$$

Lời giải. Gọi $Q = (MNP) \cap A'D'$. Theo tính chất của giao tuyến suy ra $MQ \parallel NP$ nên Q là trung điểm của $A'D'$. Suy ra M, Q lần lượt là trung điểm IN, IP .

$$\text{Ta có } \frac{V_{I.A'MQ}}{V_{IANP}} = \frac{IA'}{IA} \cdot \frac{IM}{IN} \cdot \frac{IQ}{IP} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \longrightarrow V_{I.A'MQ} = \frac{V}{12}.$$

$$\text{Mặt khác } V_{I.A'MQ} = \frac{1}{3} d[I, (A'B'C'D')] \cdot S_{\Delta A'MQ}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} d[A', (ABCD)] \cdot \frac{1}{8} S_{A'B'C'D'} = \frac{1}{48} V_{ABCD.A'B'C'D'}. \text{ Từ đó suy ra } V_{ABCD.A'B'C'D'} = 4V. \text{ Chọn B.}$$

Câu 17. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Trên $A'B'$ kéo dài lấy điểm M sao cho $B'M = \frac{1}{2} A'B'$. Gọi N, P lần lượt là trung điểm của $A'C', B'B$. Mặt phẳng (MNP) chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh A' có thể tích V_1 , khối đa diện chứa đỉnh C' có thể tích V_2 . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{97}{59}$.

B. $\frac{49}{95}$.

C. $\frac{49}{144}$.

D. $\frac{95}{144}$.

Lời giải. Gọi các giao điểm như hình vẽ. Ta chứng minh được J là trung điểm MN ; K là trung điểm AB .

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{V_{M.PJB'}}{V_{M.SNA'}} = \frac{MP}{MS} \cdot \frac{MJ}{MN} \cdot \frac{MB'}{MA'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18} \\ \frac{V_{S.ALK}}{V_{S.A'NM}} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SK}{SM} \cdot \frac{SL}{SN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } V_1 = \left(1 - \frac{1}{18} - \frac{1}{27}\right) V_{MA'NS} = \frac{49}{54} V_{MA'NS}. \text{ Mà } \frac{V_{S.A'NM}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{S_{\Delta MNA'}}{S_{\Delta A'B'C'}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$

$$\text{Suy ra } V_1 = \frac{49}{144} V_{ABC.A'B'C'} \text{ nên } \frac{V_1}{V_2} = \frac{49}{95}. \text{ Chọn B.}$$

Câu 18. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên hợp với đáy góc 60° . Gọi M là điểm đối xứng của C qua D , N là trung điểm của SC . Mặt phẳng (BMN) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích là V_1, V_2 trong đó

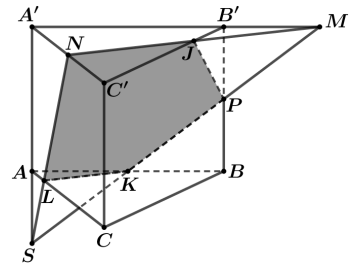
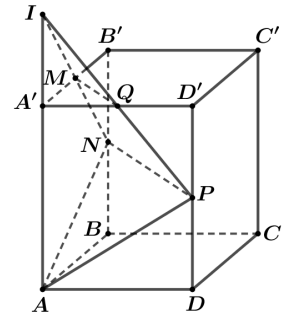
V_1 là phần thể tích chứa đỉnh A . Tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$ bằng

A. $\frac{7}{5}$.

B. $\frac{5}{7}$.

C. $\frac{12}{5}$.

D. $\frac{5}{12}$.



Lời giải. Dễ thấy DE là đường trung bình của tam giác MBC , suy ra $\frac{ME}{MB} = \frac{1}{2}$;

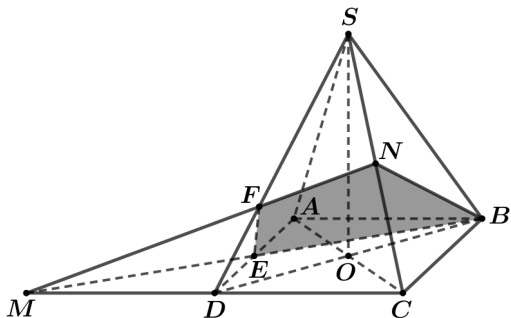
F là trọng tâm của tam giác SMC , suy ra $\frac{MF}{MN} = \frac{2}{3}$. Ta có

$$\frac{V_{M.DEF}}{V_{M.CBN}} = \frac{MD}{MC} \cdot \frac{ME}{MB} \cdot \frac{MF}{MN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

Suy ra $V_2 = \left(1 - \frac{1}{6}\right)V_{M.CBN} = \frac{5}{6}V_{M.CBN}$.

Mà $\frac{V_{C.BNM}}{V_{C.BSD}} = \frac{CN}{CS} \cdot \frac{CM}{CD} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \Rightarrow V_{C.BNM} = V_{C.BSD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD}$.

Vậy $V_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2}V_{S.ABCD} \longrightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{5}{7}$. **Chọn B.**



Câu 19. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh B , $AB = 4$; $SA = SB = SC = 12$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC, BC . Trên cạnh SA, SB lần lượt lấy điểm E, F sao cho $\frac{SE}{SA} = \frac{BF}{BS} = \frac{2}{3}$. Thể tích khối tứ diện $MNEF$ bằng

A. $\frac{4\sqrt{34}}{3}$.

B. $\frac{16\sqrt{34}}{3}$.

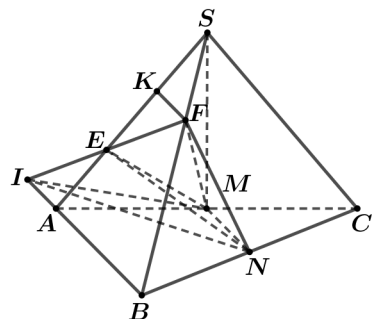
C. $\frac{4\sqrt{17}}{9}$.

D. $\frac{4\sqrt{34}}{9}$.

Lời giải. Gọi K là trung điểm của SE và $I = EF \cap AB$. Suy ra E là trung điểm của IF và $IA = KF = \frac{1}{3}AB$ nên $S_{\triangle IMN} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC} \longrightarrow V_{FIMN} = \frac{1}{6}V_{SABC}$.

Mà $\frac{V_{FEMN}}{V_{FIMN}} = \frac{FE}{FI} = \frac{1}{2} \longrightarrow V_{FEMN} = \frac{1}{2}V_{FIMN}$.

Vậy $V_{FEMN} = \frac{1}{12}V_{SABC} = \frac{1}{12} \cdot \frac{16\sqrt{34}}{3} = \frac{4\sqrt{34}}{9}$. **Chọn D.**



Câu 20. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $AB, BC, C'D',$ và DD' . Thể tích khối tứ diện $MNPQ$ bằng

A. $\frac{1}{8}$.

B. $\frac{3}{8}$.

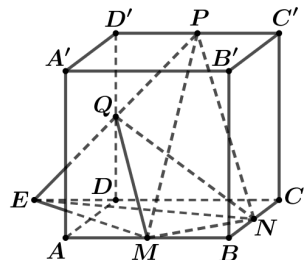
C. $\frac{1}{12}$.

D. $\frac{1}{24}$.

Lời giải. Gọi $E = PQ \cap CD$. Khi đó ta có Q là trung điểm của PE và $DE = \frac{1}{2}$.

Tính được $S_{\triangle MNE} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}$.

Ta có $\frac{V_{P.QMN}}{V_{P.EMN}} = \frac{PQ}{PE} = \frac{1}{2} \longrightarrow V_{P.QMN} = \frac{1}{2}V_{P.EMN}$



$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot d[P, (MNE)] \cdot S_{\Delta MNE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}. \text{ Chọn C.}$$

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, thể tích là V . Gọi M là một điểm trên cạnh AB sao cho $\frac{AM}{AB} = x$, $0 < x < 1$. Mặt phẳng (α) qua M và song song với (SBC) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai phần, trong đó phần chứa điểm A có thể tích bằng $\frac{4}{27}V$. Giá trị của biểu thức $P = \frac{1-x}{1+x}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{5}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải. Tham khảo hình vẽ bên.

Từ giả thiết suy ra

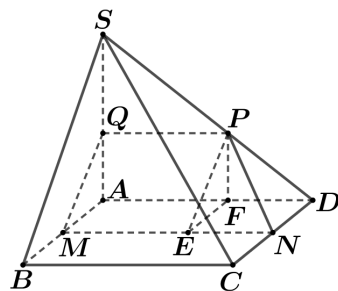
$$\frac{AQ}{AS} = \frac{AM}{AB} = x; \quad \frac{AF}{AD} = 1-x; \quad \frac{DF}{DA} = x.$$

Do đó $\frac{V_{Q.AMEF}}{V_{S.ABCD}} = x^2(1-x); \quad \frac{V_{P.FEND}}{V_{S.ABCD}} = x^3.$

Ta có $V_{AMQ.FED} = \frac{3}{2}V_{Q.AMEF} = \frac{3}{2}x^2(1-x)V_{S.ABCD}.$

Theo giả thiết: $V_{AMQ.FED} + V_{P.FEND} = \frac{4}{27}V_{S.ABCD} \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2(1-x) + x^3 = \frac{4}{27} \xrightarrow{0 < x < 1} x = \frac{1}{3}$ nên

$P = \frac{1}{2}$. **Chọn A.**



Câu 22. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Mặt phẳng đi qua trọng tâm các tam giác SAB, SAC, SAD chia khối chóp thành hai phần có thể tích là V_1 và V_2 ($V_1 < V_2$). Tỷ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{8}{19}$.

B. $\frac{8}{27}$.

C. $\frac{16}{75}$.

D. $\frac{16}{81}$.

Lời giải. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SAD, SAC .

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, AC thì

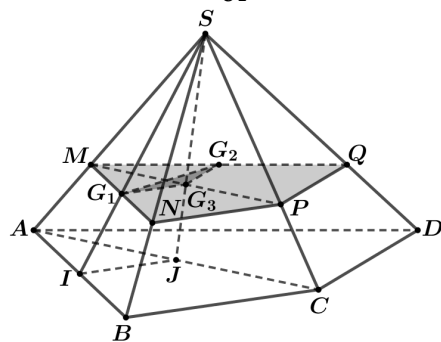
$$\frac{SG_1}{SI} = \frac{2}{3} = \frac{SG_3}{SJ} \rightarrow G_1G_3 \parallel IJ \longrightarrow G_1G_3 \parallel (ABC).$$

Chứng minh tương tự ta có $G_2G_3 \parallel (ABC).$

Suy ra $(G_1G_2G_3) \parallel (ABCD).$

Gọi các giao điểm của $(G_1G_2G_3)$ với các cạnh bên

như hình vẽ, ta tìm được thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi $(G_1G_2G_3)$ là tứ giác $MNPQ$.



Ta có $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM.SN.SP}{SA.SB.SC} = \frac{8}{27} \longrightarrow V_{S.MNP} = \frac{8}{27} V_{S.ABC}$; Tương tự $V_{S.MPQ} = \frac{8}{27} V_{S.ACD}$.

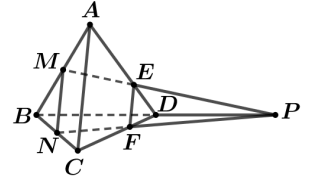
Suy ra $V_{S.MNPQ} = V_{S.MNP} + V_{S.MPQ} = \frac{8}{27}(V_{S.ABC} + V_{S.ACD}) = \frac{8}{27} V_{S.ABCD}$ nên $\frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{19}$. **Chọn A.**

Câu 23. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, BC và điểm P là điểm đối xứng với B qua D . Mặt phẳng (MNP) chia tứ diện thành hai phần có tỉ số thể tích là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{7}{11}$. C. $\frac{7}{18}$. D. $\frac{11}{18}$.

Lời giải. Do E, F lần lượt là trọng tâm các tam giác ABP, BCP nên $\frac{DE}{DA} = \frac{DF}{DC} = \frac{1}{3}$.

Ta có
$$\begin{cases} \frac{V_{BMNP}}{V_{BACD}} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BN}{BC} \cdot \frac{BP}{BD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2} \\ \frac{V_{DEFP}}{V_{DACB}} = \frac{DE}{DA} \cdot \frac{DF}{DC} \cdot \frac{DP}{DB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{9} \end{cases}$$



$\longrightarrow \frac{V_{BMNDEF}}{V_{DACB}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{9} = \frac{7}{18}$ nên $\frac{V_{BDMNFE}}{V_{ACMNE}} = \frac{7}{11}$. **Chọn B.**

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$, trên các cạnh BC, BD, AC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $BC = 3BM, BD = \frac{3}{2}BN, AC = 2AP$. Mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai phần có thể tích là V_1 và V_2 . Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ có giá trị bằng

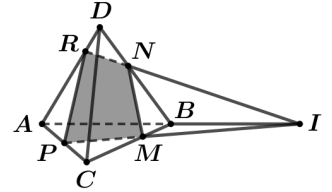
- A. $\frac{26}{13}$. B. $\frac{3}{19}$. C. $\frac{15}{19}$. D. $\frac{26}{19}$.

Lời giải. Gọi $I = PM \cap AB$ và $R = NI \cap AD$.

Ta cần tính $\frac{V_{APRI}}{V_{ACDB}} = \frac{AP}{AC} \cdot \frac{AR}{AD} \cdot \frac{AI}{AB}$ và $\frac{V_{BMNI}}{V_{BCDA}} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{BN}{BD} \cdot \frac{BI}{BA}$.

Theo Menelaus, ta có

- $\frac{PC}{PA} \cdot \frac{IA}{IB} \cdot \frac{MB}{MC} = 1 \longrightarrow \frac{IA}{IB} = 2$;
- $\frac{RD}{RA} \cdot \frac{IA}{IB} \cdot \frac{NB}{ND} = 1 \longrightarrow \frac{RD}{RA} = \frac{1}{4}$.



Từ đó suy ra $\frac{V_{APRI}}{V_{ACDB}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot 2 = \frac{4}{5}$ và $\frac{V_{BMNI}}{V_{BCDA}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{9}$.

Suy ra $V_{APRBMN} = \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{9}\right) V_{ACDB} = \frac{26}{45} V_{ACDB}$ nên $\frac{V_1}{V_2} = \frac{26}{19}$. **Chọn D.**

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, BD, AC sao cho $BC = 4BM, AC = 3AP, BD = 2BN$. Tỉ số thể tích hai phần của khối tứ diện $ABCD$ được phân chia bởi mặt phẳng (MNP) bằng

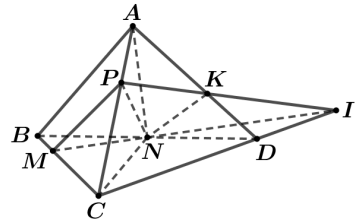
- A. $\frac{7}{13}$. B. $\frac{8}{13}$. C. $\frac{7}{15}$. D. $\frac{8}{15}$.

Lời giải. Gọi $I = MN \cap DC$ và $K = AD \cap PI$.

Ta cần tính $\frac{V_{CMPI}}{V_{CBAD}} = \frac{CM}{CB} \cdot \frac{CP}{CA} \cdot \frac{CI}{CD}$ và $\frac{V_{DNKI}}{V_{DBAC}} = \frac{DN}{DB} \cdot \frac{DK}{DA} \cdot \frac{DI}{DC}$.

Theo Menelaus, ta có

- $\frac{IC}{ID} \cdot \frac{ND}{NB} \cdot \frac{MB}{MC} = 1 \longrightarrow \frac{IC}{ID} = 3$;
- $\frac{KD}{KA} \cdot \frac{PA}{PC} \cdot \frac{IC}{ID} = 1 \longrightarrow \frac{KD}{KA} = \frac{2}{3}$.



Từ đó suy ra $\frac{V_{CMPI}}{V_{CBAD}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$ và $\frac{V_{DNKI}}{V_{DBAC}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$.

Suy ra $V_{MCPNDK} = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{10} \right) V_{ACDB} = \frac{13}{20} V_{ACDB}$ nên tỉ số cần tính bằng $\frac{7}{13}$. **Chọn A.**

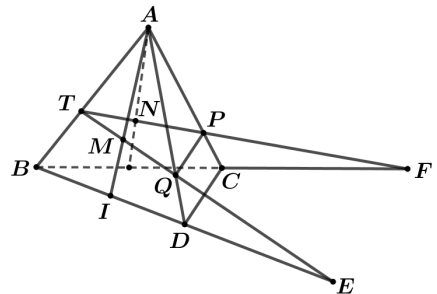
Câu 26. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABD, ABC và E là điểm đối xứng với B qua điểm D . Mặt phẳng (MNE) chia khối tứ diện $ABCD$ thành hai khối đa diện, thể tích khối đa diện chứa đỉnh A bằng

- A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{80}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{96}$. C. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{320}$. D. $\frac{9a^3\sqrt{2}}{320}$.

Lời giải. Thể tích khối tứ diện đều cạnh a là: $V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Gọi các giao điểm như hình vẽ. Menelaus cho

- $\triangle AID$, ta có $\frac{ED}{EI} \cdot \frac{MI}{MA} \cdot \frac{QA}{QD} = 1 \longrightarrow \frac{QA}{QD} = 3$.
- Tương tự ta cũng có $\frac{PA}{PC} = 3$.
- $\triangle ABI$, ta có $\frac{EI}{EB} \cdot \frac{TB}{TA} \cdot \frac{MA}{MI} = 1 \longrightarrow \frac{TB}{TA} = \frac{2}{3}$.



Ta có $\frac{V_{ATPQ}}{V_{ABCD}} = \frac{AT}{AB} \cdot \frac{AP}{AC} \cdot \frac{AQ}{AD} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{80} \longrightarrow V_{ATPQ} = \frac{27}{80} \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \frac{9a^3\sqrt{2}}{320}$. **Chọn D.**

Câu 27. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là điểm trên cạnh AB, AC sao cho $\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}, \frac{AN}{CN} = 2$. Mặt phẳng (α) chứa MN và song song với AD chia khối tứ diện thành hai phần. Thể tích khối đa diện chứa đỉnh A bằng

- A. $\frac{4\sqrt{2}a^3}{81}$. B. $\frac{4\sqrt{2}a^3}{108}$. C. $\frac{5\sqrt{2}a^3}{108}$. D. $\frac{11\sqrt{2}a^3}{342}$.

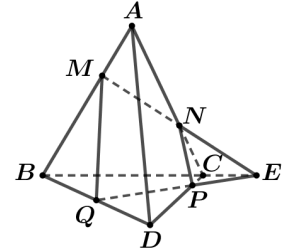
Lời giải. Thể tích khối tứ diện đều cạnh a là: $V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Kẻ $MQ \parallel AD$ với $Q \in BD$; $NP \parallel AD$ với $P \in CD$. Gọi $E = PQ \cap BC$.

Suy ra $\frac{BQ}{BD} = \frac{BM}{BA} = \frac{2}{3}$ và $\frac{CP}{CD} = \frac{CN}{CA} = \frac{1}{3}$.

Menelaus cho $\triangle BCD$, ta có $\frac{EC}{EB} \cdot \frac{QB}{QD} \cdot \frac{PD}{PC} = 1 \longrightarrow \frac{EC}{EB} = \frac{1}{4}$.

Ta có
$$\begin{cases} \frac{V_{BMEQ}}{V_{BACD}} = \frac{BM}{BA} \cdot \frac{BE}{BC} \cdot \frac{BQ}{BD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{27} \\ \frac{V_{CNEP}}{V_{CABD}} = \frac{CN}{CA} \cdot \frac{CE}{CB} \cdot \frac{CP}{CD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27} \end{cases}$$



$\longrightarrow \frac{V_{BMQCNP}}{V_{ABCD}} = \frac{16}{27} - \frac{1}{27} = \frac{5}{9}$ nên thể tích cần tính bằng $\frac{4}{9}V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{27}$. **Chọn B.**

Câu 28. Cho khối chóp $S.ABC$ có $M \in SA, N \in SB$ sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MS}, \overrightarrow{NS} = -2\overrightarrow{NB}$. Mặt phẳng (α) đi qua hai điểm M, N và song song với SC chia khối chóp thành hai khối đa diện. Tỷ số thể tích của hai khối đa diện đó bằng

- A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{4}{9}$. D. $\frac{5}{9}$.

Lời giải. Hoàn toàn tương tự như bài trên, ta được đáp án **B**.

Câu 29. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi E là điểm đối xứng của A qua D . Mặt phẳng qua CE và vuông góc với mặt phẳng (ABD) cắt cạnh AB tại điểm F .

Thể tích của khối tứ diện $AECF$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{15}$. B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{30}$. C. $\frac{\sqrt{2}a^3}{40}$. D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{60}$.

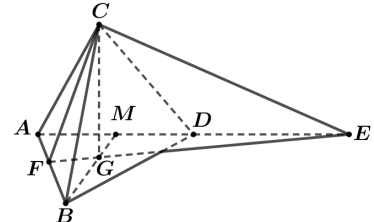
Lời giải. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD , suy ra $CG \perp (ABD)$.

Do đó mặt phẳng cần dựng là (CEG) . Gọi

$F = EG \cap AB$.

Gọi M là trung điểm AD , áp dụng Menelaus cho $\triangle ABM$, ta có

$$\frac{FA}{FB} \cdot \frac{GB}{GM} \cdot \frac{FM}{FA} = 1 \longrightarrow \frac{FA}{FB} = \frac{2}{3}.$$



Ta có $\frac{V_{AEFC}}{V_{ADCB}} = \frac{AE}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} \cdot \frac{AF}{AB} = 2.1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5} \longrightarrow V_{AEFC} = \frac{4}{5} V_{ADCB} = \frac{\sqrt{2}a^3}{15}$. **Chọn A.**

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, DC . Kéo dài SD một đoạn sao cho D là trung điểm của SP . Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) chia hình chóp thành hai khối lần lượt có thể tích là V_1, V_2 (trong đó V_2 là thể tích của phần chứa điểm S). Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{71}{49}$. C. $\frac{72}{49}$. D. $\frac{71}{120}$.

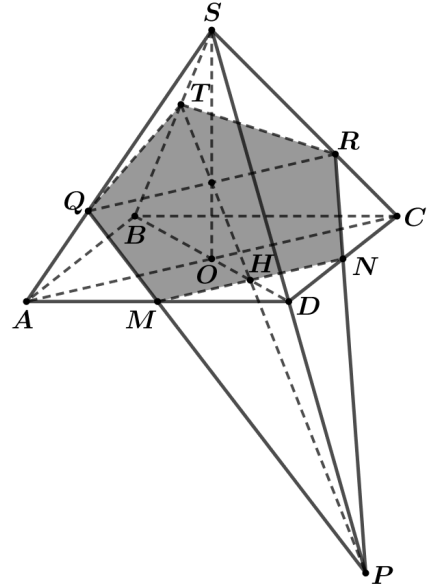
Lời giải. Tham khảo hình vẽ. Menelaus cho

- $\triangle SCD$, có $\frac{PD}{PS} \cdot \frac{RS}{RC} \cdot \frac{NC}{ND} = 1 \longrightarrow \frac{RS}{RC} = 2$.
- Tương tự ta cũng có $\frac{QS}{QA} = 2$.
- $\triangle SBD$, có $\frac{PD}{PS} \cdot \frac{TS}{TB} \cdot \frac{HB}{HD} = 1 \longrightarrow \frac{TS}{TB} = \frac{2}{3}$.

Ta có

$$\begin{cases} \frac{V_{S.QTR}}{V_{S.ABC}} = \frac{SQ}{SA} \cdot \frac{ST}{SB} \cdot \frac{SR}{SC} = \frac{8}{45} \longrightarrow V_{S.QTR} = \frac{4}{45} V_{S.ABCD} \\ \frac{V_{S.QPR}}{V_{S.ADC}} = \frac{SQ}{SA} \cdot \frac{SP}{SD} \cdot \frac{SR}{SC} = \frac{8}{9} \longrightarrow V_{S.QPR} = \frac{4}{9} V_{S.ABCD} \\ V_{P.DMN} = \frac{1}{4} V_{S.DAC} = \frac{1}{8} V_{S.ABCD} \quad \left(\text{do } S_{\triangle DMN} = \frac{1}{4} S_{\triangle DAC} \right) \end{cases}$$

Suy ra $V_2 = V_{S.QTR} + V_{S.QPR} - V_{P.DMN} = \frac{49}{120} V_{S.ABCD} \longrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{71}{49}$. **Chọn B.**



Phần 3. Cực trị

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng 3. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) , tính $\cos \alpha$ khi thể tích khối chóp $S.ABC$ nhỏ nhất.

A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. C. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.

Lời giải. Đặt $AB = AC = x$; $SA = y$. Khi đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{6}x^2y$.

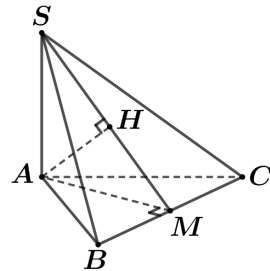
Vì AB, AC, AS đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{d^2[A, (SBC)]} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x^4y^2}}.$$

Suy ra $x^2y \geq 81\sqrt{3} \longrightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{6}x^2y \geq \frac{27\sqrt{3}}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 3\sqrt{3}$.

Khi đó $\cos \alpha = \cos \widehat{SMA} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **Chọn C.**



Câu 2. Trên đường thẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng chứa tam giác đều ABC cạnh bằng 2, lấy các điểm M và N không trùng với A sao cho (MBC) vuông góc với (NBC) . Giá trị nhỏ nhất thể tích tứ diện $BCMN$ bằng

A. 2. B. $2\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. 6.

Lời giải. Ta có (MBC) vuông góc với (NBC) khi tam giác MHN vuông tại H .

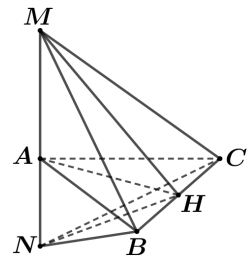
Đặt $MA = x$, $NA = y$. Ta có $MA.NA = AH^2 \Leftrightarrow xy = 3$.

Áp dụng công thức thể tích đặc biệt: $V = \frac{1}{6}abd \sin \alpha$ ta có

$$V_{BCMN} = \frac{1}{6}MN.BC.AH.\sin(MN, BC) = \frac{1}{6}(x+y).2.\sqrt{3}.\sin 90^\circ.$$

Theo BĐT Côsi: $x+y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{3}$.

Do đó $V_{BCMN} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+y) \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y = \frac{3}{2}$. **Chọn A.**



Câu 3. Cho tam giác OAB đều cạnh a . Trên đường thẳng d qua O và vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy điểm M sao cho $OM = x$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên MB và OB . Gọi N là giao điểm của EF và d . Tìm x để thể tích tứ diện $ABMN$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $x = a\sqrt{2}$. B. $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $x = \frac{a\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải. Do tam giác OAB đều cạnh a , suy ra F là trung điểm $OB \Rightarrow OF = \frac{a}{2}$.

Ta có $\begin{cases} AF \perp OB \\ AF \perp MO \end{cases} \Rightarrow AF \perp (MOB) \Rightarrow AF \perp MB$.

Lại có $MB \perp AE$ nên suy ra $MB \perp (AEF) \Rightarrow MB \perp EF$.

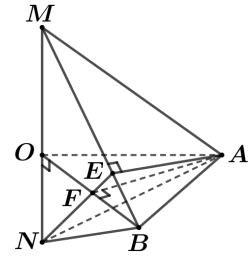
Suy ra $\triangle OBM \sim \triangle ONF$ nên

$$\frac{OB}{OM} = \frac{ON}{OF} \longrightarrow ON = \frac{OB \cdot OF}{OM} = \frac{a^2}{2x}.$$

Ta có $V_{ABMN} = V_{ABOM} + V_{ABON}$

$$= \frac{1}{3} S_{\triangle OAB} (OM + ON) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{12} \left(x + \frac{a^2}{2x} \right) \geq \frac{a^3 \sqrt{6}}{12}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{a^2}{2x} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **Chọn B.**



Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, thể tích là V . Gọi M là trung điểm của cạnh SA , N là điểm nằm trên cạnh SB sao cho $SN = 2NB$; mặt phẳng (α) đi động qua các điểm M, N và cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại hai điểm phân biệt P, Q . Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.MNPQ$ bằng

- A. $\frac{V}{2}$. B. $\frac{V}{3}$. C. $\frac{2V}{3}$. D. $\frac{3V}{4}$.

Lời giải. Gọi $a = \frac{SP}{SC}$ ($0 \leq a \leq 1$). Vì mặt phẳng (α) đi động đi qua các điểm M, N và cắt các cạnh SC, SD lần lượt tại hai điểm phân biệt P, Q nên ta có đẳng thức

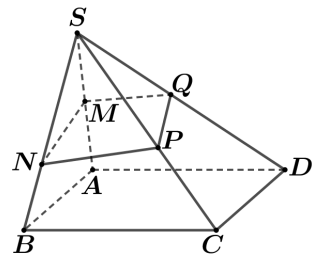
$$\frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SP} = \frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SQ} \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{a} = \frac{3}{2} + \frac{SD}{SQ} \longrightarrow \frac{SD}{SQ} = \frac{2+a}{2a}.$$

Áp dụng công thức tính nhanh

$$\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{a} + \frac{2+a}{2a}}{4 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{2+a}{2a}} = \frac{2a^2 + a}{3a + 6}.$$

Xét hàm $f(a) = \frac{2a}{3} - \frac{1}{a+2}$ trên đoạn $[0;1]$, ta được

$$\max_{[0;1]} f(a) = f(1) = \frac{1}{3}. \text{ **Chọn B.**}$$



Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, thể tích là V . Điểm M di động trên cạnh SC , đặt $\frac{MC}{MS} = k$. Mặt phẳng (α) qua A, M và song song với BD cắt SB, SD thứ tự tại N, P . Thể tích khối chóp $C.APMN$ lớn nhất khi

- A. $k = 1$. B. $k = 2$. C. $k = \sqrt{2}$. D. $k = \sqrt{3}$.

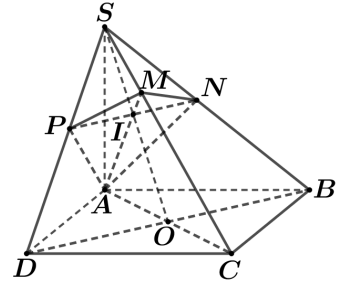
Lời giải. Từ giả thiết $\frac{MC}{MS} = k$ suy ra $MC = kMS$. Khi đó $\frac{SC}{SM} = \frac{SM + MC}{SM} = 1 + k$.

Áp dụng Menelaus cho $\triangle SOC$, có $\frac{AC}{AO} \cdot \frac{IO}{IS} \cdot \frac{MS}{MC} = 1 \longrightarrow \frac{IO}{IS} = \frac{k}{2}$, suy ra $\frac{SO}{SI} = \frac{2+k}{2}$.

Vì $NP \parallel BD$ nên suy ra $\frac{SB}{SN} = \frac{SD}{SP} = \frac{SO}{SI} = \frac{2+k}{2}$.

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.ANMP}}{V} = \frac{1 + (1+k) + \frac{2+k}{2} + \frac{2+k}{2}}{4 \cdot 1 \cdot (1+k) \cdot \frac{2+k}{2} \cdot \frac{2+k}{2}} = \frac{2}{(1+k)(2+k)}.$$

$$\text{Lại có } \frac{V_{S.ANMP}}{V_{C.ANMP}} = \frac{SM}{CM} = \frac{1}{k}. \text{ Suy ra } V_{C.ANMP} = \frac{2kV}{(1+k)(2+k)}.$$



Xét $f(k) = \frac{k}{k^2 + 3k + 2}$ trên $(0; +\infty)$, có $\max_{(0; +\infty)} f(k) = f(\sqrt{2}) = 3 - 2\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Chú ý: Ta có thể tính theo cách khác: $V_{C.ANMP} = V_{S.ABCD} - V_{S.ANMP} - V_{P.ACD} - V_{N.ABC}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = y$ ($y > 0$) và vuông góc với đáy ($ABCD$). Trên cạnh AD lấy điểm M và đặt $AM = x$ ($0 < x < a$). Biết $x^2 + y^2 = a^2$, thể tích lớn nhất $V_{\max}$ của khối chóp $S.ABCM$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{3}$.

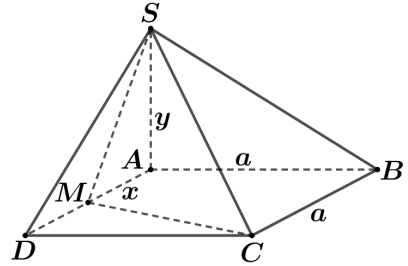
C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải. Từ $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

$$\text{Diện tích } S_{ABCM} = \left(\frac{BC + AM}{2} \right) \cdot AB = \left(\frac{a + x}{2} \right) a.$$

$$\begin{aligned} \text{Thể tích khối chóp } V_{S.ABCM} &= \frac{1}{3} S_{ABCM} \cdot SA \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a + x}{2} \cdot a \right) \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a}{6} (a + x) \sqrt{a^2 - x^2}. \end{aligned}$$



Xét hàm $f(x) = (a + x) \sqrt{a^2 - x^2}$ trên $(0; a)$, ta được $\max_{(0; a)} f(x) = f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Suy ra $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **Chọn C.**

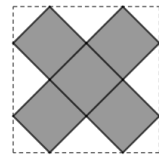
Câu 7. Từ hình vuông có cạnh bằng 6 người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gấp thành hình hộp chữ nhật không nắp. Thể tích lớn nhất của khối hộp bằng

A. $8\sqrt{2}$.

B. $9\sqrt{2}$.

C. $10\sqrt{2}$.

D. $11\sqrt{2}$.



Lời giải. Gọi độ dài các cạnh của hình hộp chữ nhật không nắp là a, b (như hình vẽ).

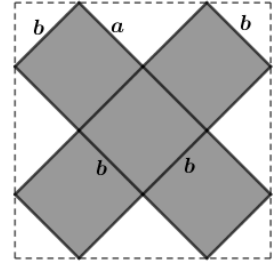
Suy ra hình chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh b , chiều cao là $a \longrightarrow V_{hh} = ab^2$.

Ta tính được cạnh của hình vuông ban đầu là $b\sqrt{2} + a\sqrt{2}$.

Theo đề suy ra $b\sqrt{2} + a\sqrt{2} = 6 \longrightarrow a = 3\sqrt{2} - b$.

Khi đó ta có $V_{hh} = ab^2 = (3\sqrt{2} - b)b^2$.

Xét hàm $f(b) = 3\sqrt{2}b^2 - b^3$ trên $(0; 3\sqrt{2})$, ta được $\max_{(0; 3\sqrt{2})} f(x) = f(2\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}$. **Chọn A.**



Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành với $AD = 4a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{6}$. Thể tích lớn nhất của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{8a^3}{3}$.

B. $\frac{4\sqrt{6}}{3}a^3$.

C. $8a^3$.

D. $4\sqrt{6}a^3$.

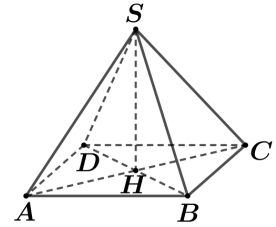
Lời giải. Do $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{6}$ nên hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đáy. Do đó tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi $H = AC \cap BD$, suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Đặt $AB = x > 0$, suy ra $AC = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{x^2 + 16a^2}$.

Tam giác vuông SHA , có $SH = \sqrt{SA^2 - \frac{AC^2}{4}} = \frac{\sqrt{8a^2 - x^2}}{2}$.

Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}AB.AD.SH$

$= \frac{1}{3}.x.4a.\frac{\sqrt{8a^2 - x^2}}{2} = \frac{a}{3}(2x\sqrt{8a^2 - x^2}) \leq \frac{a}{3}(x^2 + 8a^2 - x^2) = \frac{8a^3}{3}$. **Chọn A.**



Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 3a$, $AC = a$. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa BC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Điểm D di động trên (Q) sao cho tam giác DBC nhọn và hai mặt phẳng (DAB) và (DAC) lần lượt hợp với mặt phẳng (ABC) hai góc phụ nhau. Thể tích lớn nhất của khối chóp $D.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{3a^3}{8}$.

C. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{10}$.

D. $\frac{3a^3}{13}$.

Lời giải. Kẻ $DH \perp BC$ với $H \in BC$. Suy ra $DH \perp (ABC)$. Vì diện tích tam giác ABC không đổi nên thể tích khối chóp $D.ABC$ lớn nhất khi DH lớn nhất.

Kẻ $HM \perp AB$ với $M \in AB$, $HN \perp AC$ với $N \in AC$. Khi đó theo giả thiết, ta có

$$(\widehat{DAB}), (\widehat{ABC}) = \widehat{DMH} = \alpha \quad \text{và} \quad (\widehat{DAC}), (\widehat{ABC}) = \widehat{DNH} = 90^\circ - \alpha.$$

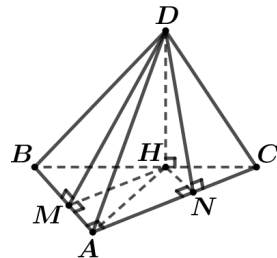
Ta có $S_{AHC} + S_{AHB} = S_{ABC}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot DH \cot(90 - \alpha) \cdot a + \frac{1}{2} \cdot DH \cot \alpha \cdot 3a = \frac{3a^2}{2}$$

$$\Rightarrow DH = \frac{3a}{\tan \alpha + 3 \cot \alpha} \stackrel{\tan \alpha = x}{=} \frac{3a \cdot x}{x^2 + 3}.$$

Xét $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$ trên $(0; +\infty)$, được $\max_{(0; +\infty)} f(x) = f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Khi đó $DH_{\max} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **Chọn A.**

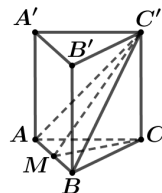


Câu 10. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Tam giác ABC' có diện tích bằng $\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng tạo với đáy một góc nhọn bằng α . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đạt giá trị lớn nhất khi α bằng

- A. $\alpha = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $\alpha = \arctan \frac{1}{\sqrt{6}}$. C. $\alpha = \arctan \sqrt{2}$. D. $\alpha = \arctan \sqrt{6}$.

Lời giải. Đặt $AB = x > 0$. Gọi M là trung điểm của AB

$$\longrightarrow \begin{cases} MC = \frac{x\sqrt{3}}{2} \\ \alpha = \widehat{(ABC')}, \widehat{(ABC)} = \widehat{CMC'} \end{cases}. \text{ Suy ra } MC' = \frac{x\sqrt{3}}{2 \cos \alpha}.$$



Theo giả thiết: $\frac{1}{2} MC' \cdot AB = \sqrt{3} \longrightarrow x = 2\sqrt{\cos \alpha}$.

Khi đó $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot CC' = \frac{3}{8} \cdot 8 \cos \alpha \sqrt{\cos \alpha} \cdot \tan \alpha = 3 \sin \alpha \sqrt{\cos \alpha} = 3\sqrt{\cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}$.

Xét hàm $f(t) = t(1 - t^2)$ trên $(0; 1)$, ta được $\max_{t \in (0; 1)} f(t) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ khi $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $V_{\max} = \sqrt{2\sqrt{3}}$ khi $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{2} \longrightarrow \alpha = \arctan \sqrt{2}$. **Chọn C.**

Câu 11. Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều có $d = \sqrt{3}$ là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau gồm một đường thẳng chứa một đường chéo của đáy và đường thẳng còn lại chứa một cạnh bên hình chóp. Thể tích nhỏ nhất của khối chóp bằng

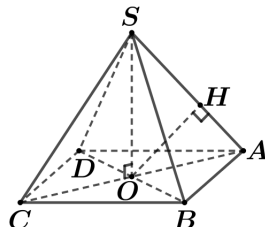
- A. 3. B. 9. C. $9\sqrt{3}$. D. 27.

Lời giải. Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$.

Đặt $AB = x$, $SO = h \longrightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} hx^2$. Ta cần đánh giá $\frac{1}{3} hx^2 \geq$ hằng số.

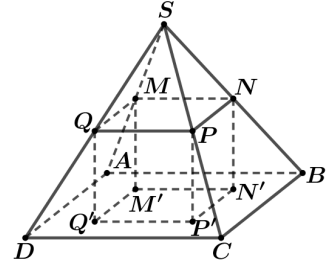
Ta tính được $OA = \frac{x}{\sqrt{2}}$ nên theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{OH^2} &= \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OA^2} \Leftrightarrow \frac{1}{d^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{2}{x^2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} &= \frac{1}{h^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \stackrel{AM-GM}{\geq} 3\sqrt{\frac{1}{h^2} \cdot \frac{1}{x^4}} \Leftrightarrow hx^2 \geq 27. \end{aligned}$$



Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = h = 3$. Khi đó $V_{\min} = 9$. **Chọn B.**

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Một mặt phẳng không qua S và song song với đáy cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q . Gọi M', N', P', Q' lần lượt là hình chiếu của M, N, P, Q trên mặt phẳng đáy. Khi thể tích khối đa diện $MNPQ.M'N'P'Q'$ đạt giá trị lớn nhất, tỉ số $\frac{SM}{SA}$ bằng



- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải. Đặt $\frac{SM}{SA} = x$ ($0 < x < 1$). Suy ra $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{SM}{SA} = x$ và $\frac{MA}{SA} = 1 - x$.

Do $MNPQ$ đồng dạng với $ABCD$ theo tỉ số x nên $\frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCD}} = x^2$.

$$\text{Ta có } \frac{V_{MNPQ.M'N'P'Q'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{S_{MNPQ} \cdot d[M, (ABCD)]}{\frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot d[A, (ABCD)]} = 3 \cdot \frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCD}} \cdot \frac{MA}{SA} = 3x^2(1-x).$$

Suy ra $V_{MNPQ.M'N'P'Q'} = 3x^2(1-x) \cdot V_{S.ABCD}$. Xét $f(x) = 3x^2(1-x) = -3x^3 + 3x^2$ trên $(0;1)$, ta được $\max_{(0;1)} f(x) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$. **Chọn C.**

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x$ ($0 < x < \sqrt{3}$), tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Thể tích lớn nhất của khối chóp đã cho bằng

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{1}{12}$. D. $\frac{1}{16}$.

Lời giải. Ta có tam giác ABC và SBC là những tam giác đều cạnh bằng 1.

Gọi N là trung điểm $BC \longrightarrow SN = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác SAN , kẻ $SH \perp AN$. (1)

Ta có $\begin{cases} BC \perp AN \\ BC \perp SN \end{cases} \longrightarrow BC \perp (SAN) \longrightarrow BC \perp SH$. (2)

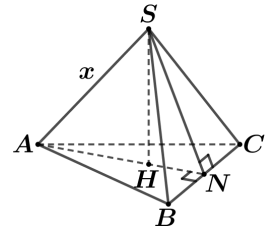
Từ (1) và (2), suy ra $SH \perp (ABC)$.

$$\text{Khi đó } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SH \leq \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SN = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{8}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow H \equiv N$. **Chọn B.**

Cách 2. Gọi M là trung điểm $SA \longrightarrow \begin{cases} NM \perp SA \\ NM \perp BC \end{cases} \longrightarrow d(SA, BC) = MN$.

Tam giác SNA cân tại N , có $SN = AN = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nên suy ra $MN = \frac{\sqrt{3-x^2}}{2}$.



Khi đó $V_{S.ABC} = \frac{1}{6} SA.BC.d(SA, BC). \sin \widehat{SA, BC} = \frac{x\sqrt{3-x^2}}{12} \leq \frac{1}{8}$.

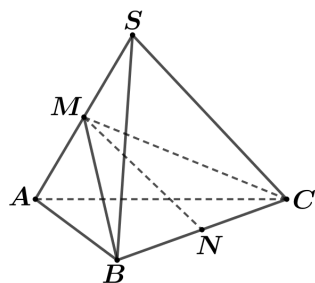
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \sqrt{3-x^2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = x, BC = y, AB = AC = SB = SC = 1$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất khi tổng $x + y$ bằng

- A. $\frac{2}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{4}{\sqrt{3}}$. C. $\sqrt{3}$. D. $4\sqrt{3}$.

Lời giải. Tương tự như bài trên ta được

$$\begin{aligned} V_{S.ABC} &= \frac{1}{6} xy \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{4}} \\ &= \frac{1}{12} \sqrt{x^2 y^2 (4 - x^2 - y^2)} \\ &\leq \frac{1}{12} \sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + 4 - x^2 - y^2}{3} \right)^3} = \frac{2\sqrt{3}}{27}. \end{aligned}$$



Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = y^2 = 4 - x^2 - y^2 \longrightarrow x = y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Vậy $x + y = \frac{4}{\sqrt{3}}$. **Chọn B.**

Câu 15. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại A ta lấy điểm S di động. Hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD lần lượt là H, K . Thể tích lớn nhất của tứ diện $ACHK$ bằng

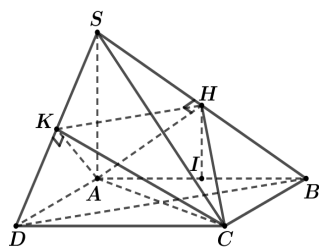
- A. $\frac{a^3}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{32}$.

Lời giải. Tham khảo hình vẽ. Ta sẽ sử dụng công thức $V = \frac{1}{6} a.b.d(a, b). \sin(a, b)$.

Đặt $SA = x (x > 0)$. Tính được $KH = \frac{x^2 a \sqrt{2}}{a^2 + x^2}, IH = \frac{a^2 x}{a^2 + x^2}$.

Chứng minh được $HI = d(KH, AC)$ và $AC \perp HK$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } V_{ACHK} &= \frac{1}{6} AC.KH.HI \\ &= \frac{1}{6} .a\sqrt{2} . \frac{x^2 a \sqrt{2}}{a^2 + x^2} . \frac{a^2 x}{a^2 + x^2} = \frac{a^4}{3} . \frac{x^3}{(a^2 + x^2)^2}. \end{aligned}$$



Xét hàm $f(x) = \frac{x^3}{(x^2 + a^2)^2}$ trên $(0; +\infty)$, ta có $\max_{(0; +\infty)} f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{16a}$ khi $x = a\sqrt{3}$.

Suy ra thể tích khối tứ diện lớn nhất bằng $V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}$. **Chọn C.**

Câu 16. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (T) đường kính $AB = 2r, C$ là một điểm di động trên đường tròn (T) . Trên đường thẳng d vuông góc với (P) tại A lấy

điểm S sao cho $SA = r$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SC và SB . Khi C chạy trên đường tròn, thể tích lớn nhất của tứ diện $SAHK$ bằng

- A. $\frac{r^3}{3}$. B. $\frac{r^3\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{r^3\sqrt{5}}{25}$. D. $\frac{r^3\sqrt{5}}{75}$.

Lời giải. Chuẩn hóa, chọn $r = 1$, đặt $AC = x$ ($0 < x < 2$). Khi đó $BC = \sqrt{4 - x^2}$.

Trong hai tam giác vuông SAC, SAB lần lượt có $\frac{SH}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{1}{x^2 + 1}$ và $\frac{SK}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{1}{5}$.

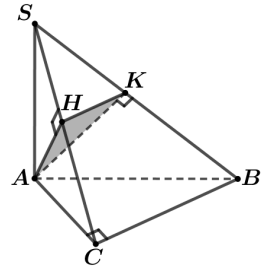
$$\text{Ta có } \frac{V_{S.AKH}}{V_{S.ABC}} = \frac{SK}{SB} \cdot \frac{SH}{SC} = \frac{1}{5(x^2 + 1)}$$

$$\Rightarrow V_{S.AHK} = \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{15(x^2 + 1)} \longrightarrow 15V_{S.AHK} = \sqrt{\frac{-5}{(x^2 + 1)^2} + \frac{6}{x^2 + 1} - 1}$$

$$\text{Có } \frac{-5}{(x^2 + 1)^2} + \frac{6}{x^2 + 1} - 1 = \frac{4}{5} - 5 \left[\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{3}{5} \right]^2 \leq \frac{4}{5}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Vậy } \max V_{S.AHK} = \frac{r^3\sqrt{5}}{75}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } AC = \frac{r\sqrt{6}}{3}. \text{ Chọn D.}$$



Câu 17. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B . Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $a\sqrt{2}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$. Xác định độ dài cạnh AB để khối chóp $S.ABC$ có thể tích nhỏ nhất.

- A. $AB = \frac{a\sqrt{10}}{2}$. B. $AB = a\sqrt{3}$. C. $AB = 2a$. D. $AB = 3a\sqrt{5}$.

Lời giải. Gọi D là điểm sao cho $ABCD$ là hình vuông.

$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \perp AD \\ \widehat{SAB} = 90^\circ \rightarrow AB \perp SA \end{cases} \longrightarrow AB \perp (SAD) \longrightarrow AB \perp SD.$$

Tương tự, ta cũng có $BC \perp SD$. Từ đó suy ra $SD \perp (ABDC)$.

Kẻ $DH \perp SC$ ($H \in SC$) $\longrightarrow DH \perp (SBC)$. Khi đó

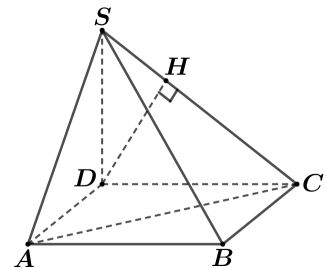
$$d[A, (SBC)] = d[D, (SBC)] = DH.$$

Đặt $AB = x > 0$. Trong tam giác vuông SDC , có

$$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{DC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Suy ra } SD = \frac{ax\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - 2a^2}}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } V_{S.ABC} = \frac{1}{2} V_{S.ABCD} = \frac{1}{6} \cdot \frac{ax^3\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 - 2a^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2a^2}}.$$



Xét $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2a^2}}$ trên $(a\sqrt{2}; +\infty)$, được $\min_{(a\sqrt{2}; +\infty)} f(x) = f(a\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}a^2$. **Chọn B.**

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi φ là góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) với $\varphi \leq 30^\circ$. Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{4a^3}{3}$. B. $\frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{8a^3\sqrt{2}}{9}$. D. $\frac{8a^3\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải. Lấy điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{SK} = \overrightarrow{AD}$.

Ta chứng minh được $SA \perp (SBC) \longrightarrow DK \perp (SBC)$. Do đó $\widehat{SD, (SBC)} = \widehat{KSD} = \widehat{SDA} = \varphi$.

Tam giác SAD vuông nên ta có $SA = AD \tan \varphi = 2a \tan \varphi$.

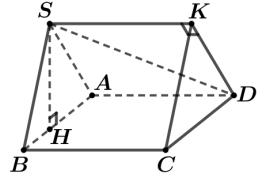
Trong tam giác vuông SAB , có $SA^2 = AH \cdot AB \Rightarrow AH = 2a \tan^2 \varphi$.

Suy ra $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 2a \sqrt{\tan^2 \varphi (1 - \tan^2 \varphi)}$.

Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{8a^3}{3} \sqrt{\tan^2 \varphi (1 - \tan^2 \varphi)}$.

Xét hàm $f(x) = -x^4 + x^2$ trên $\left[0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, ta được $\max_{\left[0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]} f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{9}$.

Suy ra $\max V_{S.ABCD} = \frac{8a^3\sqrt{2}}{9}$. **Chọn C.**



Câu 19. Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$.

Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh AB và SC sao cho $\frac{CN}{CS} = \frac{AM}{AB}$. Khi khoảng

cách giữa M và N nhỏ nhất thì thể tích của khối chóp $S.AMN$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{72}$. B. $\frac{5\sqrt{2}a^3}{72}$. C. $\frac{5\sqrt{2}a^3}{432}$. D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{432}$.

Lời giải. Tính được $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $CA = a\sqrt{3}$ suy ra $\triangle ABC$ vuông tại B .

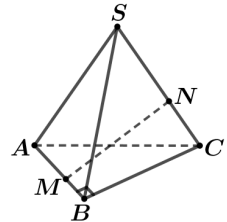
Gọi H là trung điểm $AC \xrightarrow{SA=SB=SC} SH \perp (ABC)$. Khi đó $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Đặt $\frac{CN}{CS} = \frac{AM}{AB} = x$ ($0 < x \leq 1$). Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{CN} = x \cdot \overrightarrow{CS} \longrightarrow \overrightarrow{SN} = (1-x) \cdot \overrightarrow{SC} \\ \overrightarrow{AM} = x \cdot \overrightarrow{AB} \longrightarrow \overrightarrow{SM} = (1-x) \cdot \overrightarrow{SA} + x \cdot \overrightarrow{SB} \end{cases}$$

Suy ra $\overrightarrow{NM} = (1-x) \cdot \overrightarrow{SA} + x \cdot \overrightarrow{SB} - (1-x) \cdot \overrightarrow{SC}$.

Suy ra $MN^2 = a^2 (3x^2 - 5x + 3) = a^2 \left[3 \left(x - \frac{5}{6} \right)^2 + \frac{11}{12} \right] \geq \frac{11a^2}{12}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{5}{6}$.



Ta có
$$\begin{cases} \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.AMC}} = \frac{SN}{SC} = \frac{1}{6} \\ \frac{V_{A.SCM}}{V_{A.SCB}} = \frac{AM}{AB} = \frac{5}{6} \end{cases} \longrightarrow V_{S.AMN} = \frac{5}{36} V_{S.ABC} = \frac{5a^3\sqrt{2}}{432}. \text{ Chọn C.}$$

Cách khác. Kẻ $MP \parallel AC$ với $P \in BC$. Dùng định lý hàm số cosin trong tam giác MNP tính được độ dài $MN^2 = a^2(3x^2 - 5x + 3)$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M là điểm di động trên cạnh CD và H là hình chiếu vuông góc của S lên đường thẳng BM . Khi điểm M di động trên cạnh CD , thể tích khối chóp $S.ABH$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{15}$.

Lời giải. Lấy điểm $N \in BC$ sao cho $BN = CM$. Dễ dàng chứng minh được $AN \perp BM$.

Gọi $H = AN \cap BM$. Ta có $\begin{cases} BM \perp AN \\ BM \perp SA \end{cases} \rightarrow BM \perp (SAH) \rightarrow BM \perp SH$ nên H là hình

chiếu vuông góc của S lên đường thẳng BM .

Đặt $BN = CM = x$, $0 < x \leq a$. Trong tam giác vuông

ABN có BH là đường cao, suy ra

$$BH = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad AH = \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

Ta có $S_{\triangle ABH} = \frac{1}{2} AH \cdot BH = \frac{a^3}{2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABH} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABH} \cdot SA = \frac{a^4\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} \stackrel{\text{Cosin}}{\leq} \frac{a^4\sqrt{2}}{6} \cdot \frac{x}{2ax} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = a$ hay $N \equiv C$, $M \equiv D$. **Chọn C.**

Câu 21. Cho tứ diện $ABCD$. Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai đoạn thẳng

BC, BD (M, N không trùng B) sao cho $2\frac{BC}{BM} + 3\frac{BD}{BN} = 10$. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể

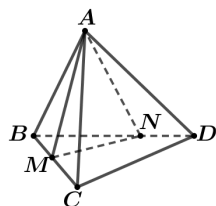
tích của các khối tứ diện $ABMN$ và $ABCD$. Giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{25}{3}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{3}{25}$. D. $\frac{6}{25}$.

Lời giải. Đặt $\frac{BC}{BM} = x$, $\frac{BD}{BN} = y$ ($x, y \geq 1$).

Theo giả thiết: $10 = 2x + 3y \Rightarrow 2x = 10 - 3y$.

Do $x \geq 1 \Rightarrow 2x \geq 2 \Rightarrow 10 - 3y \geq 2 \Rightarrow y \leq \frac{8}{3}$.



Ta có $\frac{V_1}{V_2} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{BN}{BD} \cdot \frac{BA}{BA} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot 1 = \frac{1}{xy} = \frac{2}{y(10-3y)}$.

Xét $f(y) = y(10-3y)$ trên $\left[1; \frac{8}{3}\right]$, được $f(y) \in \left[\frac{16}{3}; \frac{25}{3}\right]$. Suy ra $\frac{V_1}{V_2} \in \left[\frac{6}{25}; \frac{3}{8}\right]$. **Chọn D.**

Cách khác: Ta có $10 = 2x + 3y \geq 2\sqrt{6xy} \longrightarrow xy \leq \frac{25}{6}$.

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Hai điểm M, N lần lượt trên các đoạn thẳng AB, AD (M, N không trùng A) sao cho $\frac{AB}{AM} + 2\frac{AD}{AN} = 4$.

Kí hiệu V, V_1 lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$. Giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1}{V}$ bằng

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{17}{14}$.

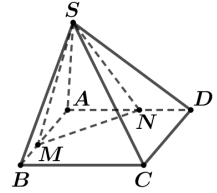
Lời giải. Đặt $\frac{AB}{AM} = x, \frac{AD}{AN} = y$ ($x, y \geq 1$).

Theo giả thiết: $x + 2y = 4 \Rightarrow 2y = 4 - x$.

Do $y \geq 1 \Rightarrow 2y \geq 2 \Rightarrow 4 - x \geq 2 \Rightarrow x \leq 2$.

Ta có $\frac{V_1}{V} = \frac{V - V_{S.AMN}}{V} = 1 - \frac{S_{\Delta AMN}}{2S_{\Delta ABD}} = 1 - \frac{AM \cdot AN}{2AB \cdot AD} = 1 - \frac{1}{x(4-x)}$.

Xét $f(x) = \frac{1}{x(4-x)}$ trên $[1; 2]$, ta được $f(x) \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$. Suy ra $\frac{V_1}{V} \in \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right]$. **Chọn B.**



Câu 23. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc cạnh BC, BD sao cho (AMN) vuông góc với (BCD) . Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $ABMN$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{2}}{12}$. B. $\frac{17\sqrt{2}}{72}$. C. $\frac{17\sqrt{2}}{144}$. D. $\frac{17\sqrt{2}}{216}$.

Lời giải. Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD . Khi đó MN luôn đi qua H .

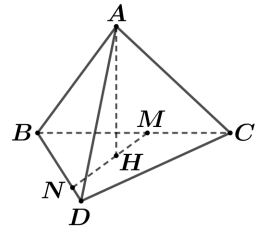
Ta có $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BH} \Leftrightarrow \frac{BC}{BM} \overrightarrow{BM} + \frac{BD}{BN} \overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BH} \longrightarrow \frac{BC}{BM} + \frac{BD}{BN} = 3$.

Đặt $\frac{BC}{BM} = x, \frac{BD}{BN} = y$ ($x, y \geq 1$). Suy ra $x + y = 3$.

Ta có $\frac{V_{ABMN}}{V_{ABCD}} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{BN}{BD} = \frac{1}{xy}$.

Tương tự như các bài trên, ta được $\frac{1}{xy} \in \left[\frac{4}{9}; \frac{1}{2}\right]$.

Suy ra $V_{ABMN} \in \left[\frac{4}{9}V_{ABCD}; \frac{1}{2}V_{ABCD}\right]$. Vậy $V_1 + V_2 = \frac{17}{18}V_{ABCD} = \frac{17\sqrt{2}}{216}$. **Chọn D.**



Câu 24. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA=OB=\sqrt{2}$, $OC=1$. Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai cạnh AC, BC sao cho (OMN) vuông góc với (ABC) . Thể tích khối đa diện $ABOMN$ có giá trị lớn nhất bằng

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{9}$. C. $\frac{2}{9}$. D. $\frac{1}{12}$.

Lời giải. Thể tích $ABOMN$ có giá trị lớn nhất khi $\frac{V_{COMN}}{V_{COAB}} = \frac{CM}{CA} \cdot \frac{CN}{CB}$ nhỏ nhất.

Gọi K là trung điểm AB , suy ra $OK \perp AB$ và $OK = \frac{1}{2}AB = 1$.

Kẻ $OI \perp CK$, suy ra I là trung điểm CK . Ta chứng minh được $OI \perp (ABC)$.

Do $(OMN) \perp (ABC)$ suy ra MN đi qua I .

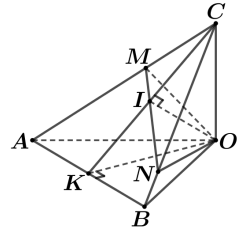
Ta có $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CK} \Rightarrow \frac{CA}{CM}\overrightarrow{CM} + \frac{CB}{CN}\overrightarrow{CN} = 4\overrightarrow{CK} \longrightarrow \frac{CA}{CM} + \frac{CB}{CN} = 4$.

Đặt $\frac{CA}{CM} = x, \frac{CB}{CN} = y$ ($x, y \geq 1$). Suy ra $x + y = 4$.

Ta có $\frac{V_{COMN}}{V_{COAB}} = \frac{CM}{CA} \cdot \frac{CN}{CB} = \frac{1}{xy}$.

Tương tự như các bài trên, ta được $\frac{1}{xy} \in \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$.

Suy ra $\min V_{COMN} = \frac{1}{4}V_{COAB} \longrightarrow \max V_{ABOMN} = \frac{3}{4}V_{COAB} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{4}$. **Chọn A.**



Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=1, SB=2, SC=3$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Mặt phẳng (α) đi qua trung điểm I của SG cắt các cạnh SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{1}{SM^2} + \frac{1}{SN^2} + \frac{1}{SP^2}$ bằng

- A. $\frac{2}{7}$. B. $\frac{3}{7}$. C. $\frac{18}{7}$. D. 6.

Lời giải. Do G là trọng tâm $\triangle ABC$.

Ta có $\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$

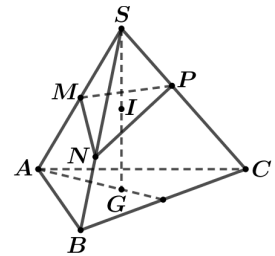
$$\Leftrightarrow \frac{SG}{SI} \cdot \overrightarrow{SI} = \frac{1}{3} \left(\frac{SA}{SM} \cdot \overrightarrow{SM} + \frac{SB}{SN} \cdot \overrightarrow{SN} + \frac{SC}{SP} \cdot \overrightarrow{SP} \right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SI} = \frac{1}{6} \left(\frac{SA}{SM} \cdot \overrightarrow{SM} + \frac{SB}{SN} \cdot \overrightarrow{SN} + \frac{SC}{SP} \cdot \overrightarrow{SP} \right).$$

Do I, M, N, P đồng phẳng nên $\frac{1}{6} \left(\frac{SA}{SM} + \frac{SB}{SN} + \frac{SC}{SP} \right) = 1 \Leftrightarrow \frac{SA}{SM} + \frac{SB}{SN} + \frac{SC}{SP} = 6$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki, ta có

$$\left(\frac{SA}{SM} + \frac{SB}{SN} + \frac{SC}{SP} \right)^2 \leq \left(\frac{1}{SM^2} + \frac{1}{SN^2} + \frac{1}{SP^2} \right) (SA^2 + SB^2 + SC^2).$$



Suy ra $T \geq \frac{36}{SA^2 + SB^2 + SC^2} = \frac{18}{7}$. **Chọn C.**