

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

QUAN HỆ SONG SONG

BÀI GIẢNG ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Mục tiêu

❖ Kiến thức

- + Nhận biết được cách xác định điểm, đường thẳng và mặt phẳng trong không gian
- + Hiểu được các khái niệm giao tuyến, giao điểm, thiết diện

❖ Kỹ năng

- + Xác định được giao tuyến của hai mặt phẳng trong không gian
- + Xác định được giao điểm của hai đường thẳng trong không gian

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Khái niệm ở đầu

Mặt phẳng: Mặt hồ nước yên lặng cho ta hình ảnh của một phần mặt phẳng.

Mặt phẳng không có bề dày, không có giới hạn.



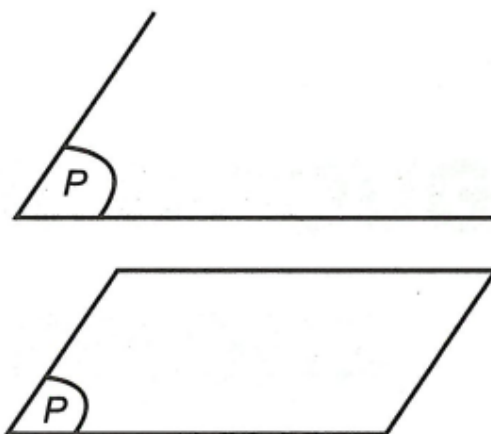
Biểu diễn mặt phẳng thường dùng một hình bình hành hoặc một miền góc có ghi tên mặt phẳng ở góc.

Kí hiệu mặt phẳng ta thường dùng chữ cái in hoa ($A, B, C, \dots$) hoặc kí tự $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ và có thể đặt trong ngoặc (A), (B), (α), khi cần thiết.

Khi một điểm A thuộc mặt phẳng (α) ta nói: A nằm trong mặt phẳng (α) hay mặt phẳng (α) chứa A , hay A thuộc (α).

Kí hiệu: $A \in (\alpha)$

Khi điểm B không nằm trong mặt phẳng (α), kí hiệu $B \notin (\alpha)$.



2. Tính chất thừa nhận

Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt cùng thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm trên đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Có bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng. Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó đồng phẳng.

Dựa vào tính chất này chúng ta có thể chứng minh 3 điểm thẳng hàng.

Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa và do đó chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm

Dựa vào tính chất này chúng ta có thể chứng minh 3 điểm thẳng hàng

chung của hai mặt phẳng đó.

Đường thẳng chung d của hai mặt phẳng phân biệt (α)

và (β) được gọi là giao tuyến của (α) và (β)

Kí hiệu là $d = (\alpha) \cap (\beta)$.

3. Xác định mặt phẳng

Cách 1:

Qua ba điểm không thẳng hàng có một và chỉ một mặt phẳng.

Cách 2:

Qua một đường thẳng và một điểm nằm ngoài nó có một và chỉ một mặt phẳng

Cách 3:

Qua hai đường thẳng cắt nhau có một và chỉ một mặt phẳng.

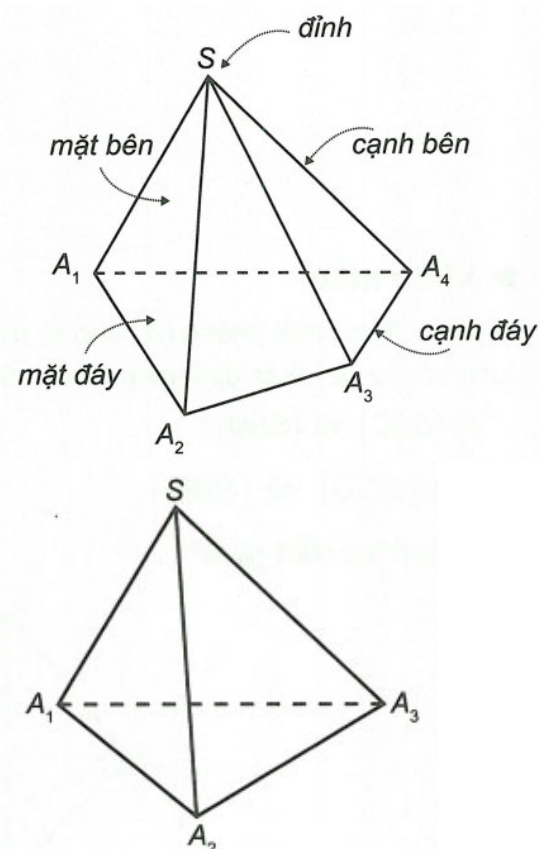
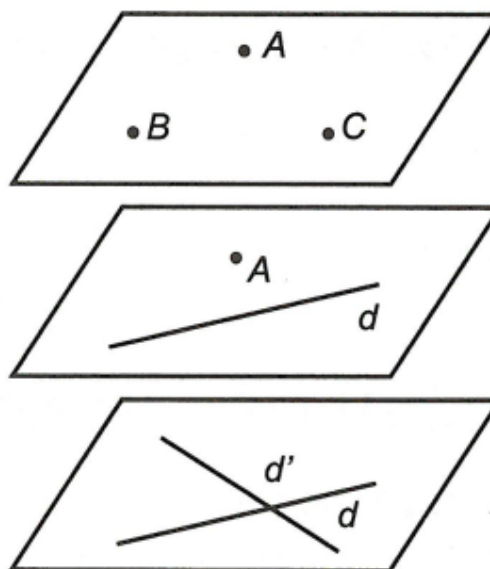
4. Hình chóp

Trong mặt phẳng (α) , cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (α) .

Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ để được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ được gọi là hình chóp và được kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.

Ta gọi S là đỉnh, đa giác $A_1A_2...A_n$ là mặt đáy, các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ gọi là mặt bên của hình chóp. Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ gọi là các cạnh bên, các cạnh của đa giác $A_1A_2...A_n$ là các cạnh đáy của hình chóp.

Chú ý: Nếu đáy của hình chóp là tam giác thì ta gọi là “hình chóp tam giác” hay “tứ diện”



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp giải

Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) và (β)

Tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng đó

$$\begin{cases} A \in (\alpha) \\ A \in (\beta) \end{cases} \Rightarrow A \in (\alpha) \cap (\beta)$$

$$\begin{cases} B \in (\alpha) \\ B \in (\beta) \end{cases} \Rightarrow B \in (\alpha) \cap (\beta)$$

$$\Rightarrow AB = (\alpha) \cap (\beta)$$

Chú ý. Hai đường thẳng phân biệt cắt nhau khi và chỉ khi chúng cùng nằm trên một mặt phẳng (đồng phẳng) và không song song với nhau.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng (α) cho tứ giác ABCD có các cặp cạnh đối không song song và $S \notin (\alpha)$.

Xác định giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

a) (SAC) và (SBD)

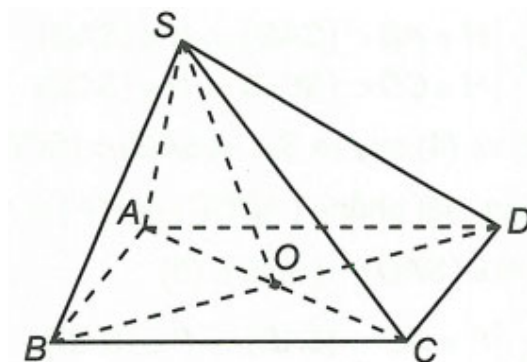
b) (SAB) và (SCD)

c) (SAD) và (SBC)

Hướng dẫn giải

Ví dụ: Cho S là một điểm không thuộc mặt phẳng chứa hình bình hành ABCD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

Hướng dẫn giải



Ta có $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (1)

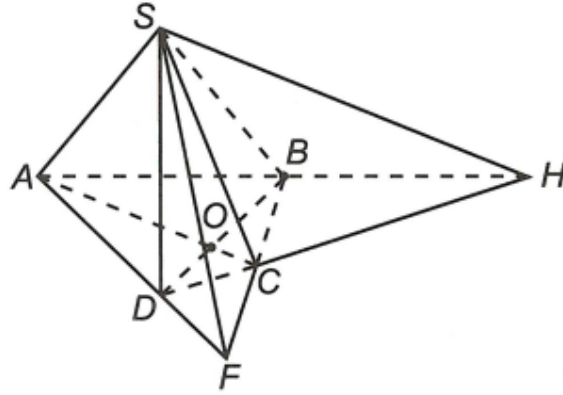
Trong mặt phẳng (ABCD) có $AC \cap BD = \{O\}$

Lại có

$$\begin{cases} O \in AC \subset (ASC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $SO = (SAC) \cap (SBD)$



a) Trong mặt phẳng (ABCD) gọi $\{O\} = AC \cap DB$

Ta có $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (1)

Lại có $\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SO = (SAC) \cap (SBD)$

b) Trong mặt phẳng (ABCD) gọi $\{H\} = AB \cap CD$

Ta có $S \in (SAB) \cap (SCD)$

Lại có $\begin{cases} H \in AB \subset (SAB) \Rightarrow H \in (SAB) \\ H \in CD \subset (SCD) \Rightarrow H \in (SCD) \end{cases} \Rightarrow H \in (SAB) \cap (SCD)$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $SH = (SAB) \cap (SCD)$

c) Trong mặt phẳng (ABCD) gọi $\{F\} = AD \cap CB$

Ta có $S \in (SAD) \cap (SBC)$ (5)

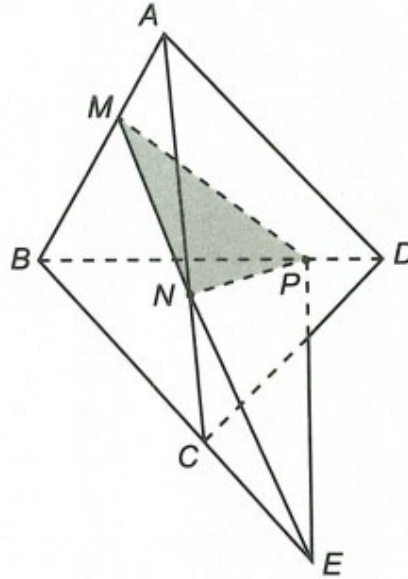
Lại có $\begin{cases} F \in AD \subset (SAD) \Rightarrow F \in (SAD) \\ F \in CB \subset (SBC) \Rightarrow F \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow F \in (SAD) \cap (SBC)$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $SF = (SAD) \cap (SBC)$

Chú ý: Đối với dạng tứ giác (hình bình hành, vuông)... ta xác định giao của hai đường chéo sẽ là điểm thứ hai của giao tuyến.

Ví dụ 2. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng thuộc một mặt phẳng. Trên các đoạn thẳng AB, AC, BD lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho MN không song song với BC. Tìm giao tuyến của (BCD) và (MNP)

Hướng dẫn giải



Trong mặt phẳng (ABC) gọi $\{E\} = MN \cap BC$

Ta thấy $P \in (BCD) \cap (MNP)$ (1)

$$\text{Lại có } \begin{cases} E \in MN \subset (MNP) \Rightarrow E \in (MNP) \\ E \in BC \subset (BCD) \Rightarrow E \in (BCD) \end{cases} \Rightarrow E \in (MNP) \cap (BCD) \quad (2)$$

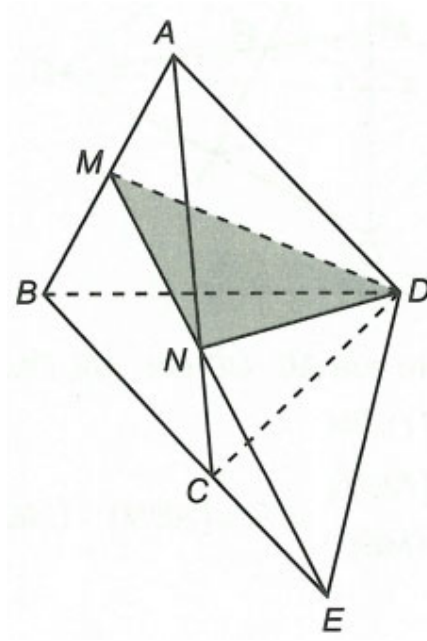
Từ (1) và (2) suy ra $PE = (MNP) \cap (BCD)$

Chú ý: A, B, C, D không cùng thuộc một mặt phẳng nghĩa là A, B, C, D là bốn đỉnh của tứ diện. Vì giả thiết cho MN không song song với BC, nên việc tìm điểm thứ hai của giao tuyến chỉ cần tìm giao điểm MN và BC.

Ví dụ 3. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Trên hai đoạn thẳng AB, AC lần lượt lấy các điểm

M, N sao cho $\frac{AM}{BM} = 1$ và $\frac{AN}{NC} = 2$. Tìm giao tuyến của (DMN) và (BCD).

Hướng dẫn giải



Trong tam giác $\triangle ABC$ có

$$\begin{cases} \frac{AM}{BM} = 1 \\ \frac{AN}{NC} = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{AM}{BM} \neq \frac{AN}{NC}$$

Nên MN và BC không song song theo định lý Ta-lét.

Trong mặt phẳng (ABC) gọi $\{H\} = MN \cap BC$

Ta thấy $D \in (BCD) \cap (DMN)$ (1)

$$\text{Lại có } \begin{cases} H \in MN \subset (DMN) \Rightarrow H \in (DMN) \\ H \in BC \subset (BCD) \Rightarrow H \in (BCD) \end{cases}$$

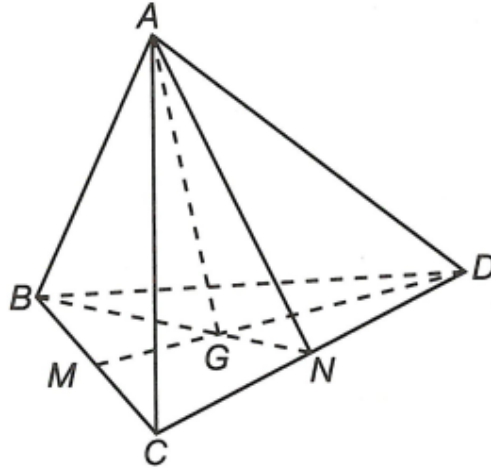
$$\Rightarrow H \in (DMN) \cap (BCD) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $DH = (DMN) \cap (BCD)$

Chú ý: Vì đề bài không đưa ra giả thiết là không song song mà lại cho tỉ lệ độ dài nên ta cần chứng minh MN và BC không song song theo định lý Ta-lét.

Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD . Tìm giao tuyến của mặt phẳng (ACD) và (GAB) .

Hướng dẫn giải



Ta có $\{A\} \in (GAB) \cap (ACD)$

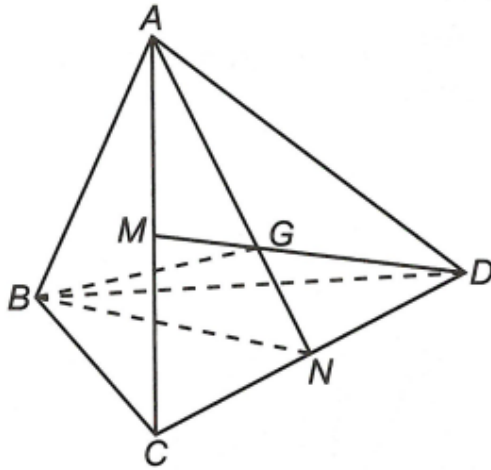
Xét trong mặt phẳng (BCD) gọi $\{N\} = BG \cap CD$

$$\Rightarrow \begin{cases} N \in BG \subset (ABG) \Rightarrow N \in (ABG) \\ N \in CD \subset (ACD) \Rightarrow N \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow N \in (ABG) \cap (ACD)$$

Vậy $(ABG) \cap (ACD) = AN$

Ví dụ 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, CD . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MBD) và (ABN).

Hướng dẫn giải



Ta có $\{B\} \in (ABN) \cap (MBD)$

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AC, CD nên AN, DM là hai trung tuyến của tam giác ACD .

Gọi $\{G\} = AN \cap DM$

$$\Rightarrow \begin{cases} G \in AN \subset (ABN) \Rightarrow G \in (ABN) \\ G \in DM \subset (MBD) \Rightarrow G \in (MBD) \end{cases} \Rightarrow G \in (ABN) \cap (MBD). \text{ Vậy } (ABN) \cap (MBD) = BG$$

Bài tập tự luyện dạng 1

Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là đường thẳng

- A. SA B. SD C. SB D. AC

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng

- A. SA B. SB C. SC D. SO

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBD) là đường thẳng

- A. SA B. SB C. BD D. SO

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$, gọi G là trọng tâm của tam giác ABC ; M, N lần lượt là trung điểm BC, AC . Giao tuyến của (SAM) và (SBN) là

- A. SG B. SN C. SM D. $Sx // AM // BN$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , giao tuyến của mặt (SAC) và (SBD) là

- A. SC B. SA C. SB D. SO

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và AD , G là trọng tâm tam giác ACD . BG là giao tuyến của hai mặt phẳng nào?

- A. (ABM) và (BCN) B. (ABM) và (BDM) C. (BCN) và (ABC) D. (BMN) và (ABD)

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$, gọi N và K lần lượt là trung điểm của AD và BC . NK là giao tuyến của mặt phẳng (BCA) với mặt phẳng nào

- A. (ABC) B. (ABD) C. (AKD) D. (AKB)

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . MN là giao tuyến của hai mặt phẳng nào?

- A. (BMC) và (AND) B. (ABD) và (ADN) C. (BMC) và (ACD) D. (BMN) và (ACD)

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. M, N lần lượt là trung điểm của BC và SD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (SCD) là

- A. đường thẳng NI với I là giao điểm giữa SC và MN
B. đường thẳng NI với I là giao điểm giữa SC và AM
C. đường thẳng NI với I là giao điểm giữa CD và AM
D. đường thẳng NI với I là giao điểm giữa CD và MN

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ với AC và BD giao nhau tại M , AB và CD giao nhau tại N . Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có giao tuyến là

- A. SA B. SM C. SN D. MN

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trung điểm AC, BC . Gọi K thuộc BD sao cho $KD < KB$. Gọi E là giao điểm của JK và CD , F là giao điểm của AD và IE . Giao tuyến của (IJK) và (ACD) là

- A. đường thẳng AI B. đường thẳng IF C. đường thẳng JE D. đường thẳng IE

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$. M, N là hai điểm lần lượt thuộc hai cạnh AB, AC sao cho MN cắt BC tại I . Khẳng định nào sau đây là đúng

- A. Đường thẳng MN cắt đường thẳng CD

- B. Đường thẳng DN cắt đường thẳng AB
 C. (AMN) không có điểm chung với (DBC)
 D. $(DMN) \cap (DBC) = DI$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là tứ giác lồi với AB và CD không song song. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AB và CD . Gọi d là giao tuyến của các mặt phẳng (SAB) và (SCO) . Tìm d ?

- A. $d \equiv SI$ B. $d \equiv AC$ C. $d \equiv BD$ D. $d \equiv SO$

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang (AD là đáy lớn). Gọi O là giao điểm của AC và BD , I là giao điểm của AB và CD . Giao tuyến của (SAB) và (SCO) là

- A. SI B. SO C. $Sx // AB$ D. $Sy // AD$

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J và K lần lượt là trung điểm của AC, BC và BD . Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK) là

- A. không có B. KI
 C. đường thẳng qua K và song song với AB D. KD

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là tứ giác lồi. Gọi o là giao điểm của AC và BD . Gọi c là giao tuyến của các mặt phẳng (SAC) và (SBD) . Tìm c ?

- A. $c \equiv BD$ B. $c \equiv SO$ C. $c \equiv AC$ D. $c \equiv SA$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm thuộc vào các cạnh AC và BC , sao cho MN không song song AB . Gọi đường thẳng a là giao tuyến của các mặt phẳng (SMN) và (SAB) . Tìm a ?

- A. $a \equiv SO$, với O là giao điểm của hai đường thẳng AM với BN
 B. $a \equiv MI$, với I là giao điểm của hai đường thẳng MN với AB
 C. $a \equiv SQ$, với Q là giao điểm của hai đường thẳng BM với AN
 D. $a \equiv SI$, với I là giao điểm của hai đường thẳng MN với AB

Dạng 2. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

🔗 Phương pháp giải

Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α)

Ví dụ: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là các điểm nằm trên AB, AD với I là trung điểm AB và

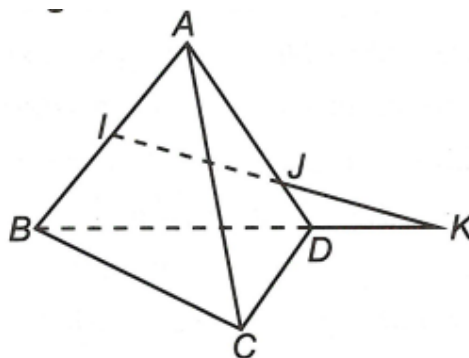
$AJ = \frac{2}{3}AD$. Tìm giao điểm của IJ và mp (BCD)

Hướng dẫn giải

- Để chứng minh A là giao điểm của đường thẳng d

và mp (α) , ta phải chứng minh $\begin{cases} A \in d \\ A \in (\alpha) \end{cases}$

Khi đó $\{A\} = d \cap (\alpha)$



$$\text{Trong tam giác } \triangle ABC \text{ có } \begin{cases} \frac{AI}{AB} = \frac{1}{2} \\ \frac{AJ}{AD} = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{AI}{AB} \neq \frac{AJ}{AD}$$

Do đó IJ và BD không song song theo định lý Ta-lét.

Ta có

$$IJ \subset (ABD)$$

$$\text{Lại có } (ABD) \cap (BCD) = BD$$

$$\text{Trong mặt phẳng } (ABD) \text{ gọi } \{K\} = IJ \cap BD$$

$$\text{Vậy } IJ \cap (BCD) = \{K\}$$

Phương pháp tổng quát:

Bước 1: Tìm một mặt phẳng phụ (β) chứa d

Bước 2: Tìm giao tuyến $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$

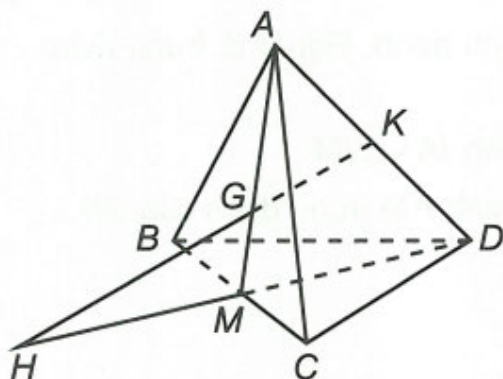
Bước 3: Trong (β) có $\Delta \cap d = \{M\}$

$$\text{Vậy } (\alpha) \cap d = \{M\}$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho tam giác BCD và điểm A không thuộc (BCD). Gọi K là trung điểm của AD và G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm giao điểm của đường thẳng GK và (BCD)

Hướng dẫn giải



$$\text{Trong tam giác } \triangle AMD \text{ có } \begin{cases} \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} \\ \frac{AK}{AD} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{AG}{AM} \neq \frac{AK}{AD}$$

Nên GK và MD không song song theo định lý Ta-lét.

Ta có: $GK \subset (AMD)$ và $(AMD) \cap (BCD) = MD$, suy ra trong (AMD) : $\{H\} = MD \cap GK$

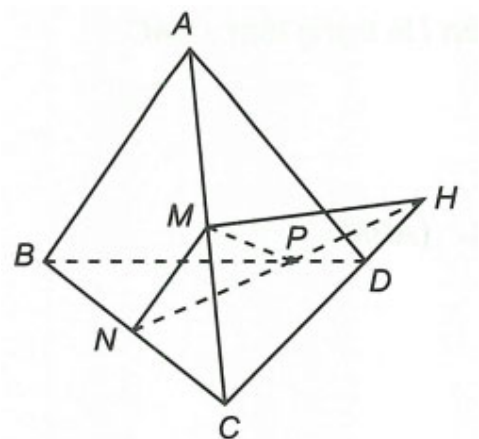
$$\text{Vậy } GK \cap (BCD) = \{H\}$$

Ví dụ 2. Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC, BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$.

a) Tìm giao điểm của CD và (MNP)

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ACD)

Hướng dẫn giải



a) Trong $\triangle BCD$ có $\begin{cases} \frac{BN}{NC} = 1 \\ \frac{BP}{PD} = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{BN}{NC} \neq \frac{BP}{PD}$

Do đó NP và CD không song song theo định lý Ta-lét.

Ta có $CD \subset (BCD)$ và $(BCD) \cap (MNP) = NP$

Trong (BCD) : $CD \cap NP = \{H\}$

Vậy $CD \cap (MNP) = \{H\}$

b) Xét hai mặt phẳng (MNP) và (ACD) có $M \in (MNP) \cap (ACD)$ (1)

Lại có $\begin{cases} H \in NP \subset (MNP) \Rightarrow H \in (MNP) \\ H \in CD \subset (ACD) \Rightarrow H \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow H \in (MNP) \cap (ACD)$ (2)

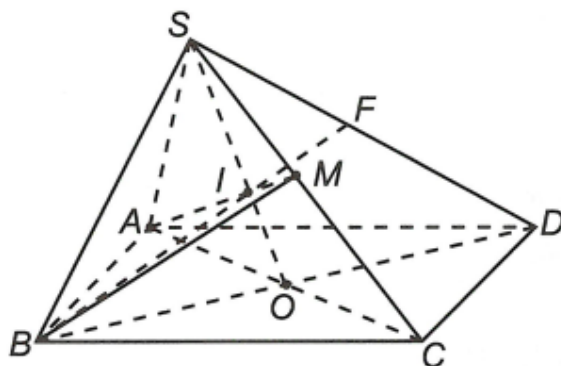
Từ (1) và (2) suy ra $MH = (MNP) \cap (ACD)$

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC.

a) Tìm giao điểm I của AM với (SBD). Chứng minh $IA = 2.IM$

b) Tìm giao điểm F của SD với (ABM). Chứng minh F là trung điểm của SD.

Hướng dẫn giải



a) Trong mặt phẳng (ABCD) gọi $AC \cap BD = \{O\}$

Ta có $AM \subset (SAC)$; (SAC) và (SBD) có S chung

$$\text{Lại có } \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$$

$$\text{Nên } SO = (SAC) \cap (SBD)$$

$$\text{Trong mặt phẳng } (SAC): \{I\} = AM \cap SO$$

$$\text{Vậy } AM \cap (SBD) = \{I\}$$

Xét ΔSAC có AM, SO là hai đường trung tuyến nên I là trọng tâm ΔSAC , suy ra theo tính chất trọng tâm ta có $AI = 2IM$

b) Ta có (SBD) và (ABM) có B chung

$$\text{Lại có } \begin{cases} I \in SO \subset (SBD) \Rightarrow I \in (SBD) \\ I \in AM \subset (ABM) \Rightarrow I \in (ABM) \end{cases} \Rightarrow I \in (SBD) \cap (ABM)$$

$$\text{Nên } BI = (SBD) \cap (ABM)$$

$$\text{Trong mặt phẳng } (SBD): \{F\} = BI \cap SD$$

$$\text{Vậy } \{F\} \in (ABM) \cap (SBD)$$

Xét ΔSBD có $SI = 2.OI$ và O là trung điểm BD nên I là trọng tâm ΔSBD .

Suy ra BF là trung tuyến ΔSBD

Vậy F là trung điểm SD.

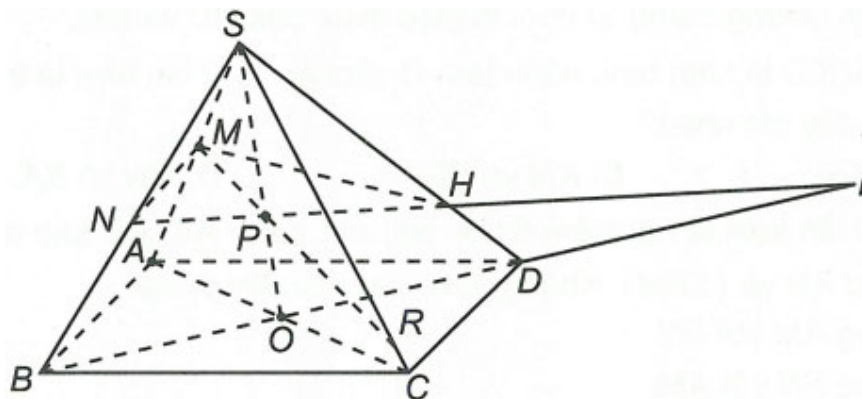
Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của

SA, SB. Điểm H thuộc đoạn SD thỏa mãn $\frac{SH}{SD} = \frac{3}{4}$

a) Tìm giao điểm của NH và (ABCD)

b) Tìm giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng (HMN)

Hướng dẫn giải



$$\text{a) Trong } \Delta SBD \text{ có } \begin{cases} \frac{SH}{SD} = \frac{3}{4} \\ \frac{SN}{SB} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{SH}{SD} \neq \frac{SN}{SB}$$

Do đó NH và BD không song song theo định lý Ta-lét

Ta có $NH \subset (SBD)$ và $(SBD) \cap (ABCD) = BD$

Trong mặt phẳng $(SBD): \{I\} = NH \cap BD$

Vậy $NH \cap (ABCD) = \{I\}$

b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$ có $AC \cap BD = \{O\}$

Trong mặt phẳng (SBD) có $SO \cap NH = \{P\}$

Ta có $SC \subset (SAC); (SAC)$ và (HMN) có M chung

Lại có $\begin{cases} P \in NH \subset (HNM) \Rightarrow P \in (HNM) \\ P \in SO \subset (SAC) \Rightarrow P \in (SAC) \end{cases} \Rightarrow P \in (HNM) \cap (SAC)$

Nên $MP = (SAC) \cap (HNM)$

Trong (SAC) gọi $\{R\} = MP \cap SC$. Vậy $SC \cap (HNM) = \{R\}$

Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho tứ diện ABCD có M, N lần lượt là các điểm thuộc cạnh BC và BD sao cho MN không song song CD. Gọi K là giao điểm của MN và (ACD). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. K là giao của CM và DN

B. K là giao MN và AC

C. K là giao của MN và AD

D. K là giao của MN và CD

Câu 2: Cho hình chóp S.ABC. Gọi M, N lần lượt là hai điểm thuộc các cạnh AC, BC sao cho MN không song song với AB. Gọi K là giao điểm của đường thẳng MN và (SAB). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. K là giao điểm của hai đường thẳng MN với AB

B. K là giao điểm của hai đường thẳng AM với BN

C. K là giao điểm của hai đường thẳng BN với AM

D. K là giao điểm của hai đường thẳng AN với BM

Câu 3: Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M là điểm trên cạnh AB (M khác A, B), N là điểm trên cạnh SC (N khác S, C). Giao điểm của MN và (SBD) là

A. giao điểm của đường thẳng MN với SB

B. giao điểm của đường thẳng MN với SD

C. giao điểm của đường thẳng MN với BD

D. giao điểm của đường thẳng MN với đường thẳng SI với I là giao điểm của BD và CM

Câu 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, K lần lượt là trung điểm của CD, CB, SA. Cặp đường thẳng nào sau đây cắt nhau?

A. SO và KC

B. MN và SB

C. KM và SC

D. MN và SA

Câu 5: Cho hình chóp S.ABC. Gọi M, N lần lượt là hai điểm thuộc vào các cạnh AC, BC sao cho MN không song song AB. Gọi Z là giao điểm đường AN và (SBM). Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Z là giao điểm của hai đường thẳng AM với BN
- B. Z là giao điểm của hai đường thẳng SN với AM
- C. Z là giao điểm của hai đường thẳng MN với AB
- D. Z là giao điểm của hai đường thẳng AN với BM

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một tứ giác (AB không song song với CD). Gọi M là trung điểm của SD, N là điểm nằm trên cạnh SB sao cho $SN = 2NB$. Giao điểm của MN với (ABCD) là điểm K. Cách xác định điểm K nào đúng nhất trong bốn phương án sau?

- A. K là giao điểm của MN với SD
- B. K là giao điểm của MN với BC
- C. K là giao điểm của MN với AB
- D. K là giao điểm của MN với BD

Câu 7: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình thang có đáy lớn AB. Gọi O là giao của AC với BD, M là trung điểm SC. Giao điểm của đường thẳng AM và mp (SBD) là

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| A. I, với $\{I\} = AM \cap BC$ | B. I, với $\{I\} = AM \cap SO$ |
| C. I, với $\{I\} = AM \cap SB$ | D. I, với $\{I\} = AM \cap SC$ |

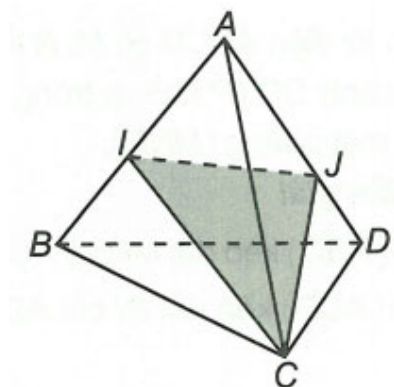
Dạng 3: Tìm thiết diện tạo bởi một mặt phẳng và hình chóp. Chứng minh ba điểm thẳng hàng

🔧 Phương pháp giải

Muốn tìm thiết diện của một hình chóp với mặt phẳng (α) cho trước, ta cần tìm các “đoạn giao tuyến” của (α) với các mặt của hình chóp. Thiết diện cần tìm chính là đa giác giới hạn với các đoạn giao tuyến vừa tìm được.

Ví dụ: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là các điểm nằm trên AB, AD sao cho BD và IJ không song song. Tìm thiết diện tạo bởi (CU) và hình chóp

Hướng dẫn giải



Ta có $(CIJ) \cap (ABD) = IJ$

$$(CIJ) \cap (ABC) = IC$$

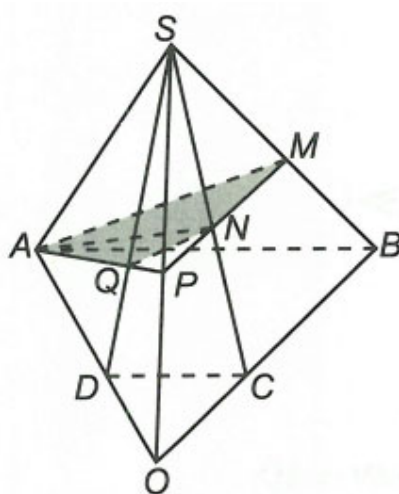
$$(CIJ) \cap (ACD) = CJ$$

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SC .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC)
- Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (AMN)

Hướng dẫn giải



- Trong mặt phẳng $(ABCD)$: $\{O\} = AD \cap BC$

Ta có (SAD) và (SBC) có S chung

$$\text{Lại có } \begin{cases} O \in AD \subset (SAD) \Rightarrow O \in (SAD) \\ O \in BC \subset (SBC) \Rightarrow O \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAD) \cap (SBC)$$

$$\text{Nên } SO = (SAD) \cap (SBC)$$

- Trong mặt phẳng (SOB) có $\{P\} = SO \cap MN$ và trong (SOA) gọi $\{Q\} = AP \cap SD$

Khi đó ta có

$$(SBC) \cap (AMN) = MN$$

$$(SCD) \cap (AMN) = QN$$

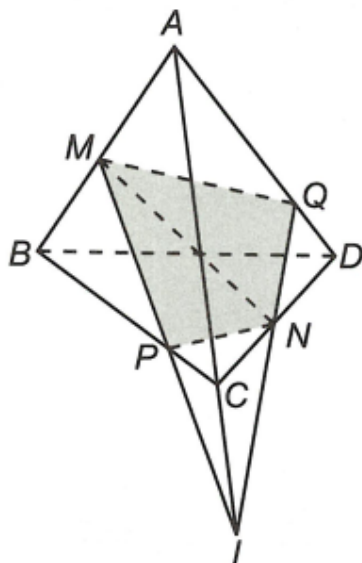
$$(SAD) \cap (AMN) = AQ$$

$$(SAB) \cap (AMN) = AM$$

Vậy thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (AMN) là tứ giác $AMNQ$

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và P là một điểm thuộc cạnh BC (P không trùng trung điểm cạnh BC). Tìm thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (MNP) .

Hướng dẫn giải



Trong mp (ABC) kéo dài MP và AC cắt nhau tại I.

Trong mp (ACD) kéo dài IN cắt AD tại Q

Ta có

$$(ABC) \cap (MNP) = MP$$

$$(BCD) \cap (MNP) = PN$$

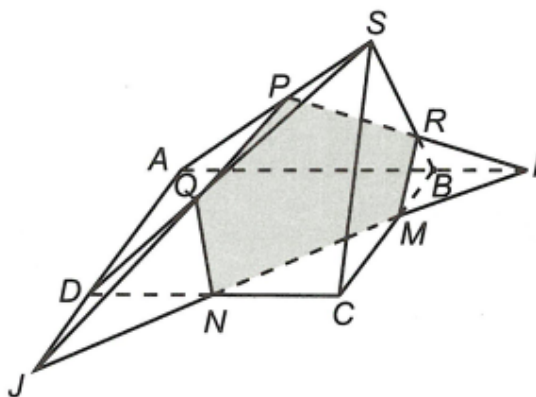
$$(ACD) \cap (MNP) = NQ$$

$$(ABD) \cap (MNP) = QM$$

Vậy thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (MNP) là tứ giác MNPQ

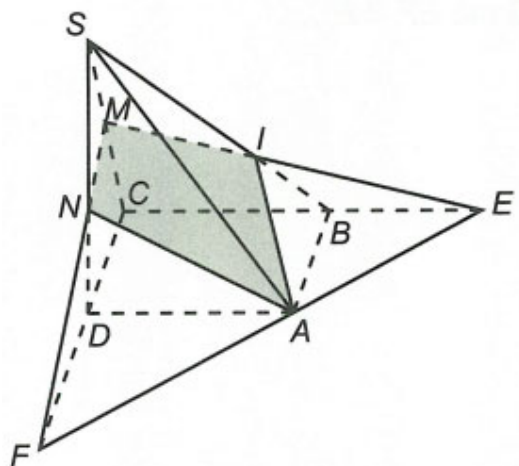
Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P là các điểm lần lượt trên các cạnh CB, CD, SA. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (MNP)

Hướng dẫn giải



Trong mặt phẳng (ABCD) gọi $\{I\} = MN \cap AB$; $\{J\} = MN \cap AD$

Trong (SAD) gọi $\{Q\} = SD \cap PJ$



Trong (ABCD) gọi $\{E\} = d \cap BC$; $\{F\} = d \cap CD$

Trong (SBC) gọi $\{I\} = ME \cap SB$

Trong (SCD) gọi $\{N\} = MF \cap SD$

Khi đó, ta có tứ giác AIMN là thiết diện cần tìm.

Bài tập tự luyện dạng 3

Câu 1: Cho hình chóp S.ABCD. M là điểm thuộc cạnh SB (không trùng với S và B). Thiết diện tạo bởi (AMD) và hình chóp S.ABCD là

- A. ngũ giác B. tứ giác C. tam giác D. không có

Câu 2: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành, cắt hình chóp bằng mặt phẳng (MNP), trong đó M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD, SC. Thiết diện nhận được là

- A. ngũ giác B. tứ giác C. tam giác D. không có

Câu 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SB và SD. Thiết diện của mặt phẳng (AIJ) với hình chóp là

- A. tam giác B. ngũ giác C. tứ giác D. lục giác

Câu 4: Cho tứ diện ABCD và ba điểm M, N, P lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC, AD (không trùng với các đỉnh). Thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (MNP) là

- A. một đoạn thẳng B. một tứ giác C. một tam giác đều D. một tam giác

Câu 5: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (GCD) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích

- A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$ D. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Câu 6: Cho tứ diện ABCD; gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC, E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện ABCD

- A. tam giác MNE
B. tứ giác MNEF với F là điểm bất kì trên cạnh BD
C. hình bình hành MNEF với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$
D. hình thang MNEF với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$

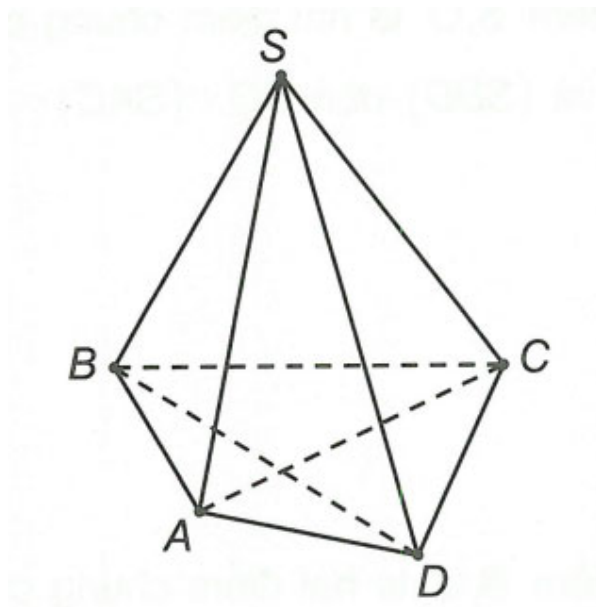
ĐÁP ÁN

Dạng 1. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

1-C	2-C	3-D	4-A	5-D	6-A	7-C	8-A	9-C	10-C
11-D	12-D	13-A	14-A	15-C	16-B	17-D			

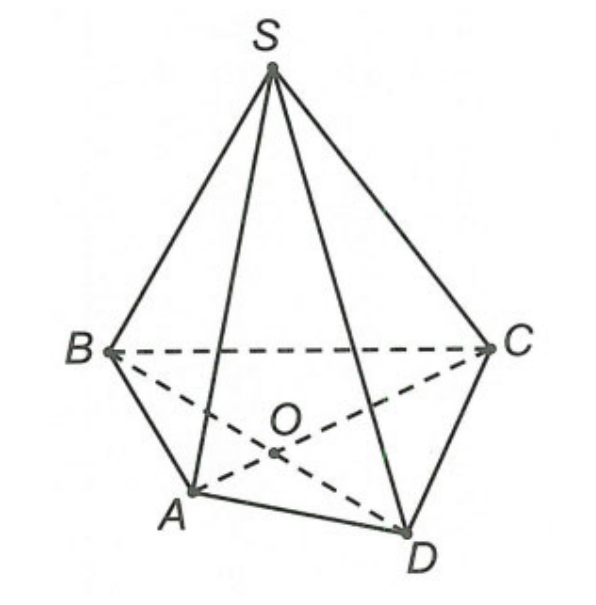
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1:



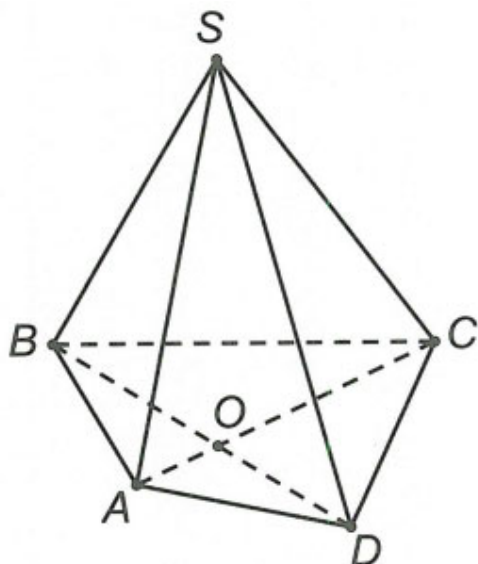
Ta có điểm S, B là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) nên $SB = (SAB) \cap (SBC)$

Câu 2:



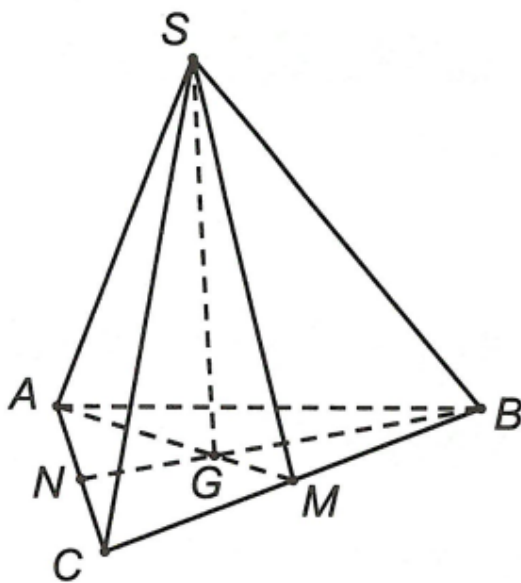
Ta có điểm S, C là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAO) và (SBC) nên $SC = (SAO) \cap (SBC)$

Câu 3:



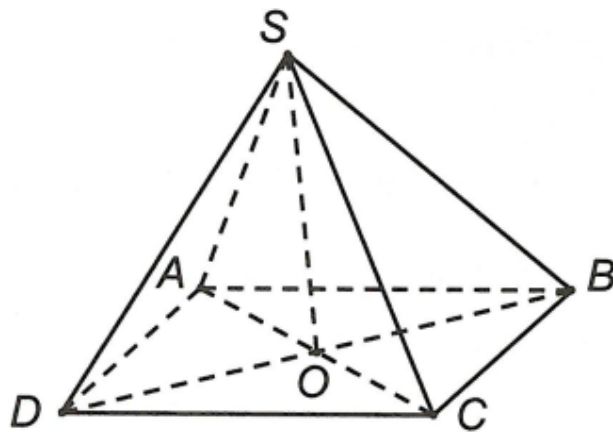
Ta có điểm S, O là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAO) và (SBD) nên $SO = (SAO) \cap (SBD)$

Câu 4:



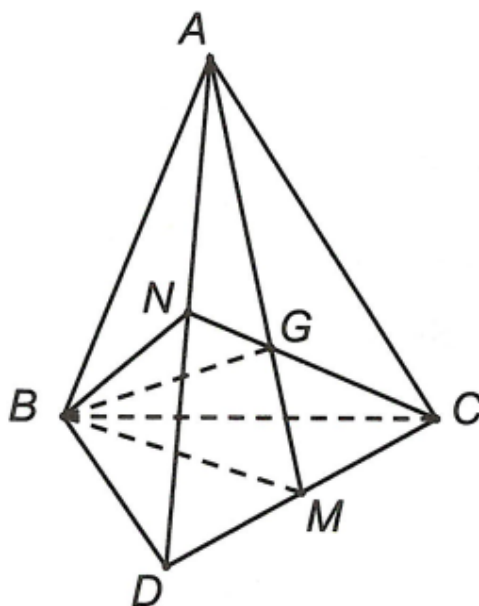
Ta có điểm S, G là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAM) và (SBN) nên $SG = (SAM) \cap (SBN)$

Câu 5:



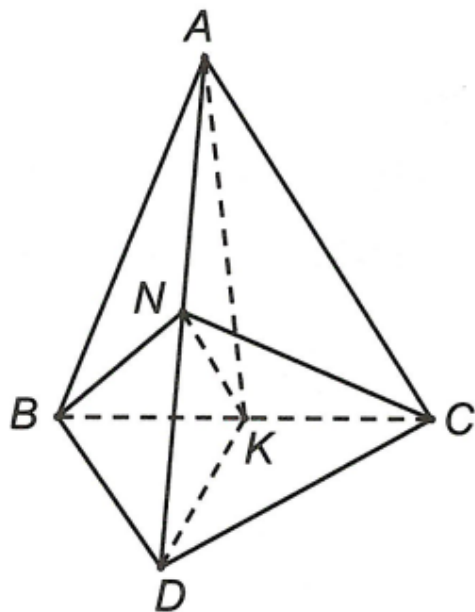
Ta có điểm S, O là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) nên $SO = (SAC) \cap (SBD)$

Câu 6:



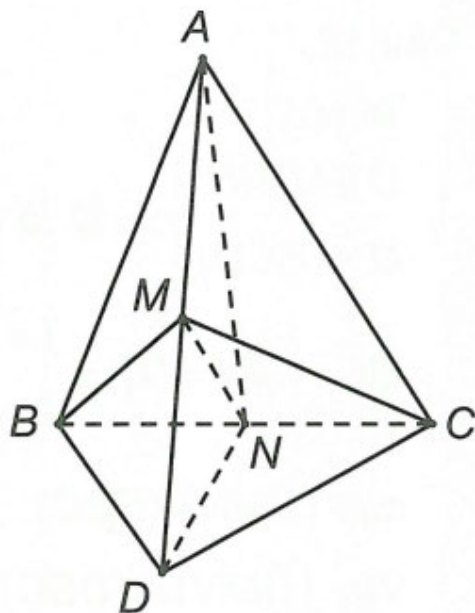
Ta có điểm B, G là hai điểm chung của hai mặt phẳng (ABM) và (BCN) nên $BG = (ABM) \cap BCN$

Câu 7:



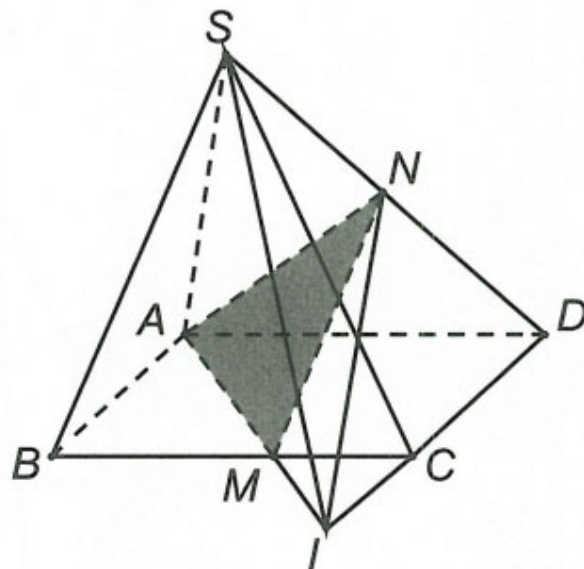
Ta có điểm N, K là hai điểm chung của hai mặt phẳng (BCN) và (AKD) nên $NK = (BCN) \cap (AKD)$

Câu 8:

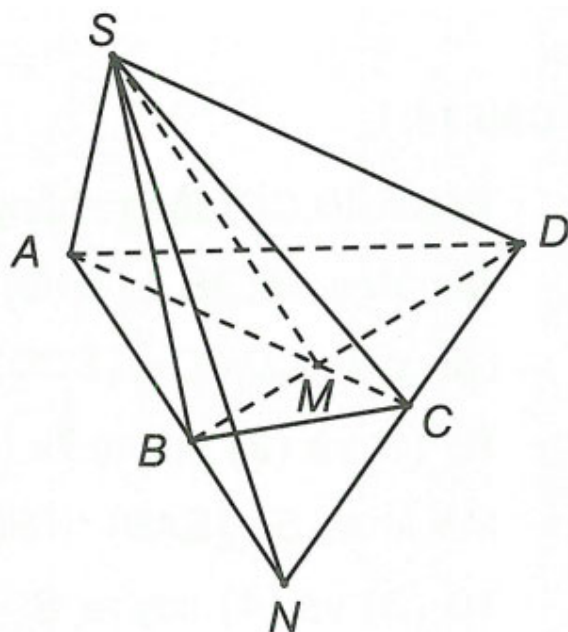


Ta có điểm M, N là hai điểm chung của hai mặt phẳng (BCM) và (AND) nên $MN = (BCM) \cap (AND)$

Câu 9:

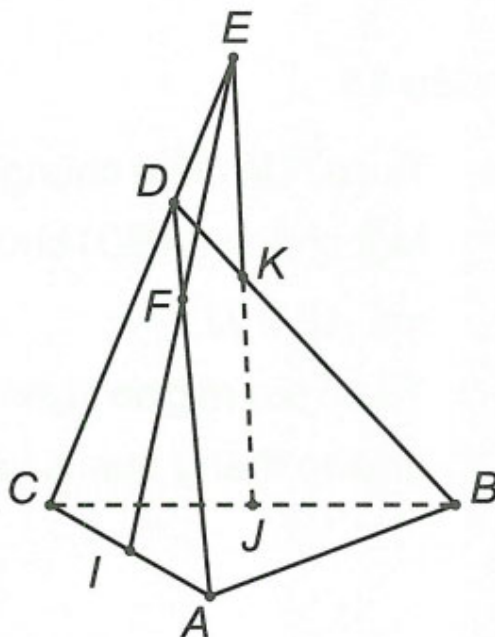


Câu 10:



Ta có điểm S, N là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) nên $SN = (SAB) \cap (SCD)$

Câu 11:



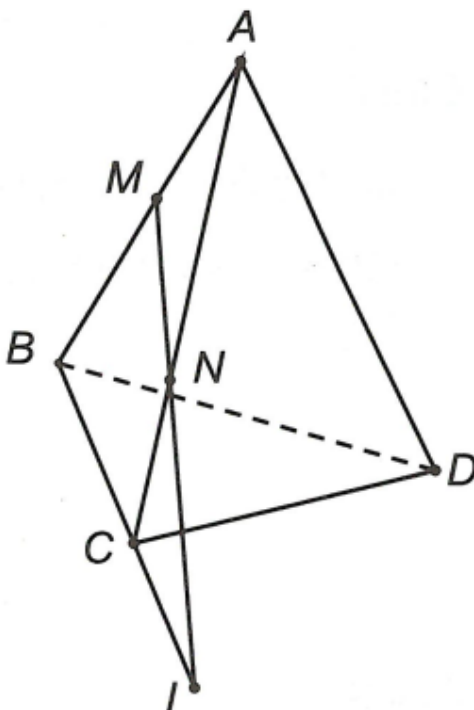
Gọi E là giao điểm của JK và CD

$$\Rightarrow \begin{cases} E \in IJ \subset (IJK) \\ E \in CD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow E \text{ là điểm chung thứ nhất}$$

$$\text{Lại có } \begin{cases} I \in IE \subset (IJK) \\ I \in AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow I \text{ là điểm chung thứ hai}$$

$$\text{Vậy } (ACD) \cap (IJK) = IE$$

Câu 12:



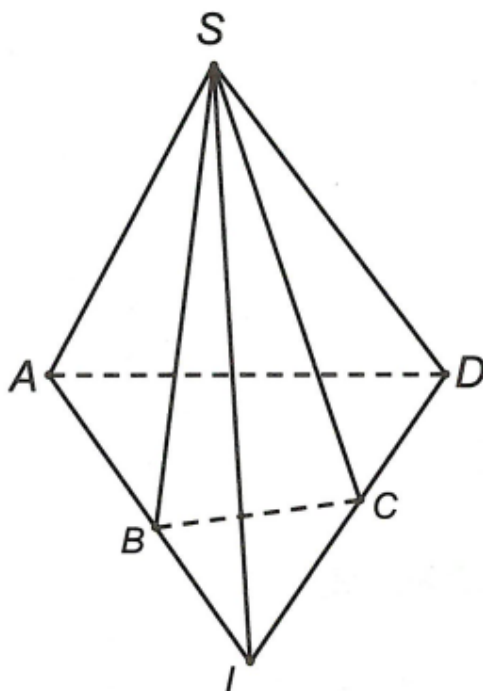
Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} D \in (DMN) \\ D \in (BCD) \end{array} \right\} \Rightarrow D \text{ là điểm chung của } (DMN), (DBC)$$

$$BC \cap MN = \{I\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} I \in MN \subset (DMN) \\ I \in BC \subset (BCD) \end{array} \right\} \Rightarrow I \text{ là điểm chung của } (DMN), (DBC)$$

Vậy $(DMN) \cap (DBC) = DI$.

Câu 13:



Vì AB, CD đồng phẳng nên gọi $\{I\} = AB \cap CD$

Ta có $I \in AB$; $AB \subset (SAB) \Rightarrow I \in (SAB)$ (1)

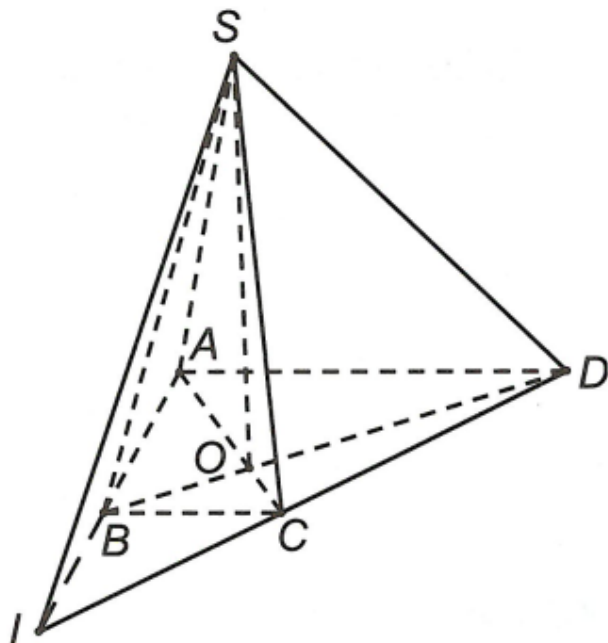
Lại có $I \in CD$; $CD \subset (SCD) \Rightarrow I \in (SCD)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $I \in (SAB) \cap (SCD)$ (3)

Mặt khác $S \in (SAB) \cap (SCD)$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $SI = (SAB) \cap (SCD)$

Câu 14:



Ta có AB, CD đồng phẳng nên gọi $\{I\} = AB \cap CD$

Ta có $I \in AB; AB \subset (SAB) \Rightarrow I \in (SAB)$ (1)

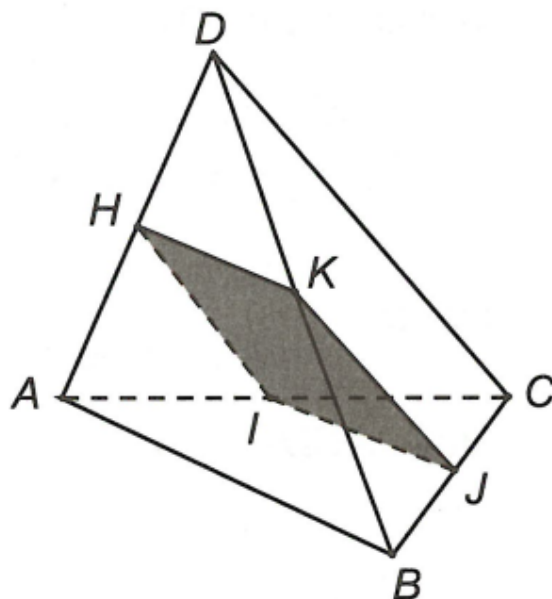
Lại có $I \in CD; CD \subset (SCD) \Rightarrow I \in (SCD)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $I \in (SAB) \cap (SCD)$ (3)

Mặt khác $S \in (SAB) \cap (SCD)$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $SI = (SAB) \cap (SCD)$

Câu 15:

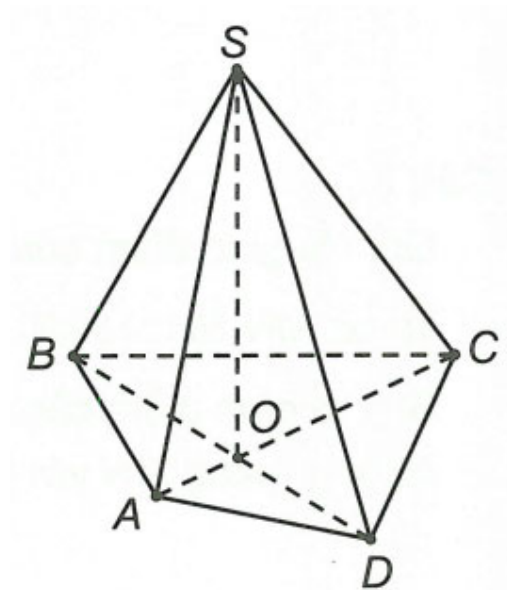


Ta có K là điểm chung của hai mặt phẳng (ABD) và (HJK)

Mặt phẳng (ABD) chứa AB, mặt phẳng (JK) chứa IJ mà $AB \parallel IJ$

Từ đó suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK) là đường thẳng qua K và song song với AB

Câu 16:



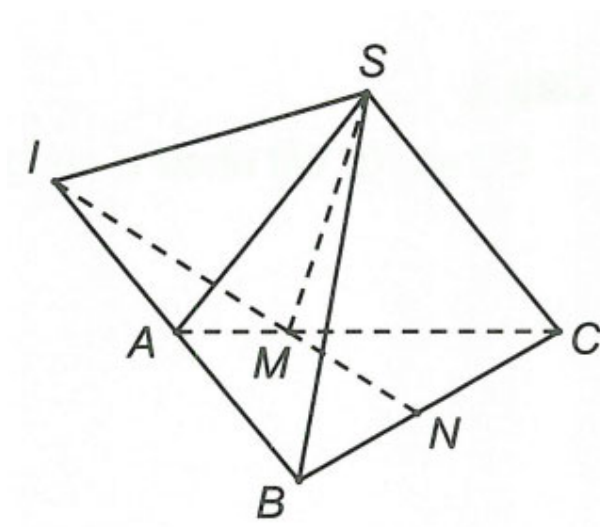
$$\text{Ta có } \begin{cases} S \in (SAC) \\ S \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow S \in c$$

Gọi O là giao điểm của AC và BD

$$\text{Suy ra } \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in c$$

$$\text{Vậy } (SAC) \cap (SBD) = SO \equiv c$$

Câu 17:



$$\text{Ta có } \begin{cases} S \in (SNMN) \\ S \in (SAB) \end{cases} \Rightarrow S \in a. \text{ Gọi I là giao điểm của MN với AB}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} I \in MN \subset (SMN) \\ I \in AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow I \in a$$

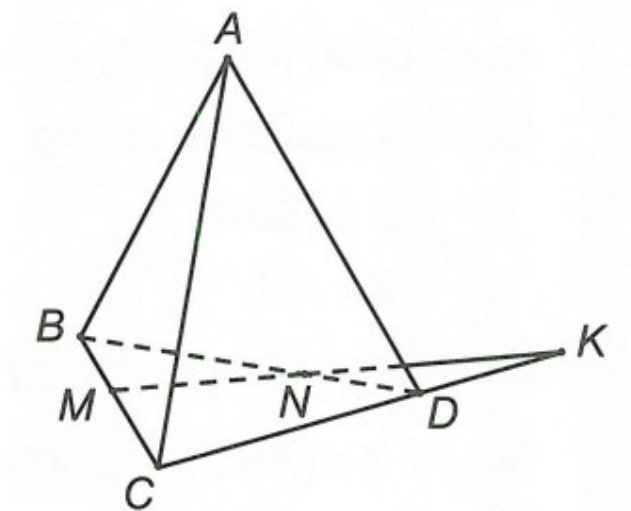
$$\text{Vậy } (SMN) \cap (SAB) = SI \equiv a$$

Dạng 2. Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

1-D	2-A	3-D	4-A	5-D	6-D	7-B			
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	--	--	--

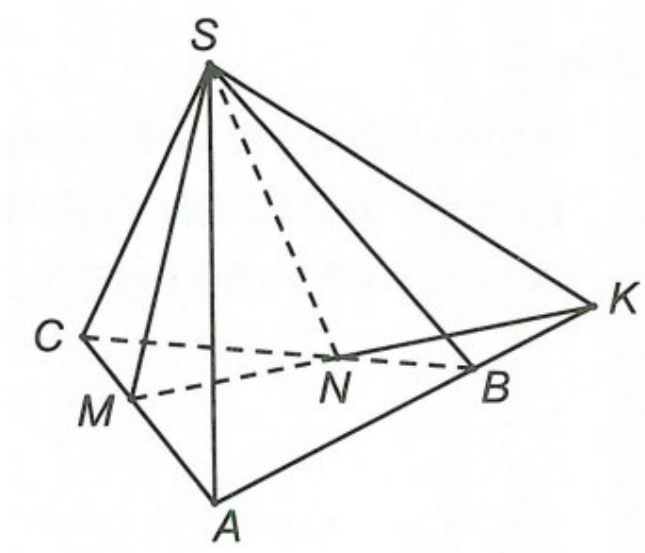
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1:



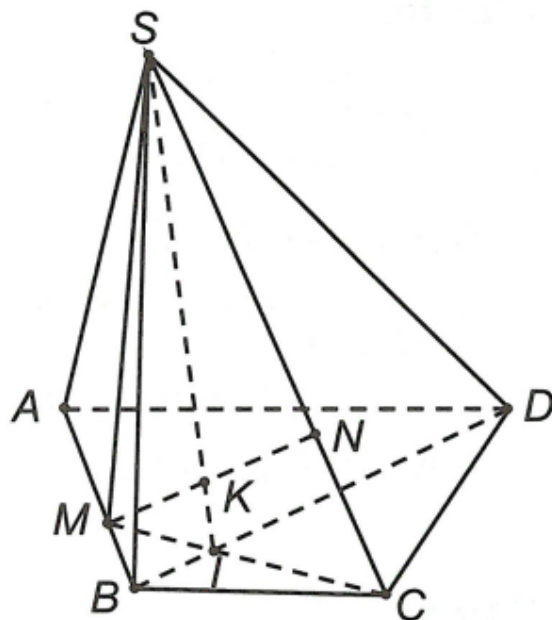
Trong (BCD) có $MN \cap CD = \{K\} \Rightarrow K$ là giao điểm của MN và (ACD)

Câu 2:



Ta có MN, AB đồng phẳng nên gọi $\{K\} = MN \cap AB$

Câu 3:

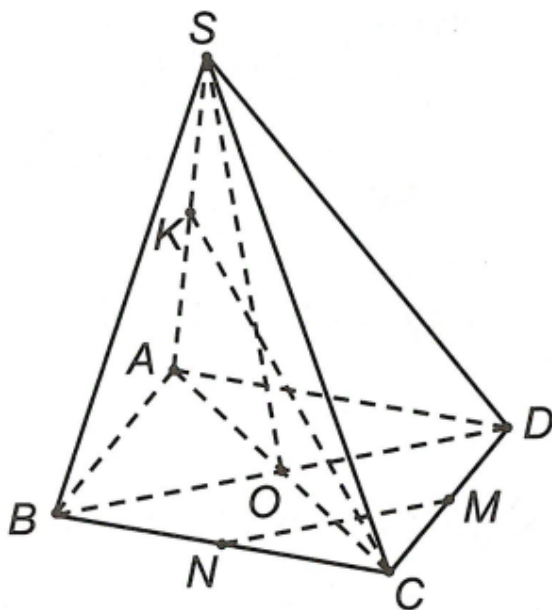


Gọi I là giao điểm của BD và CM.

Ta có MN , $SI \subset (SMC)$, gọi $\{K\} = MN \cap SI$

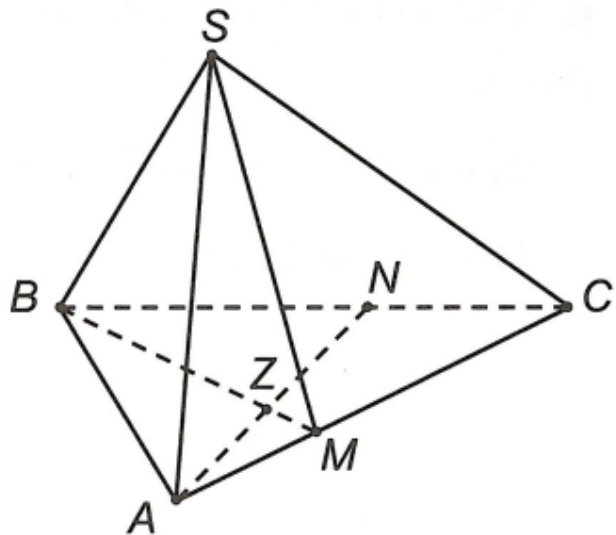
Suy ra giao điểm của MN và (SBD) là giao điểm của đường thẳng MN với đường thẳng SI

Câu 4:



SO và KC cắt nhau vì cùng nằm trong mặt phẳng (SAC)

Câu 5:



Ta có $(ABC) \cap (SMB) = BM$

Do Z là giao điểm đường AN và (SBM)

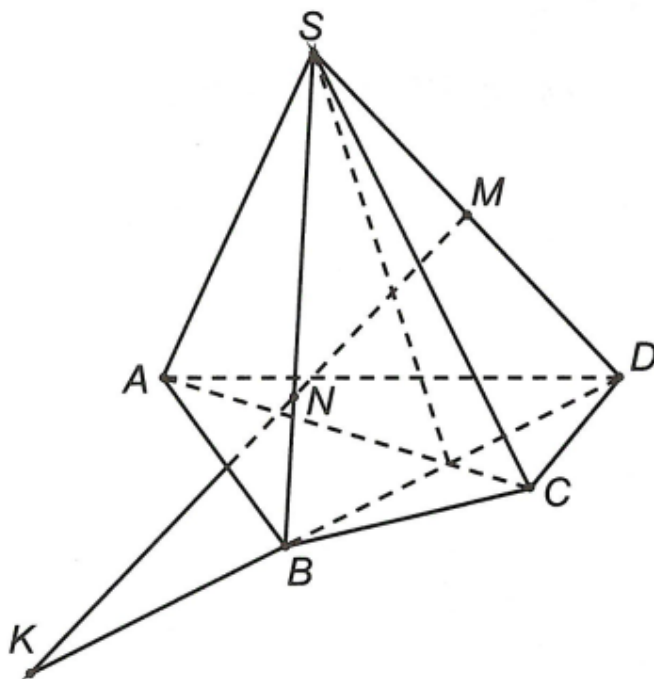
$$\Rightarrow \begin{cases} Z \in (SBM) \\ Z \in AN \end{cases} \quad (1)$$

Mà $AN \subset (ABC) \Rightarrow Z \in (ABC)$

Suy ra $Z \in (ABC) \cap (SBM) = BM \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra Z là giao điểm của hai đường thẳng AN và BM

Câu 6:

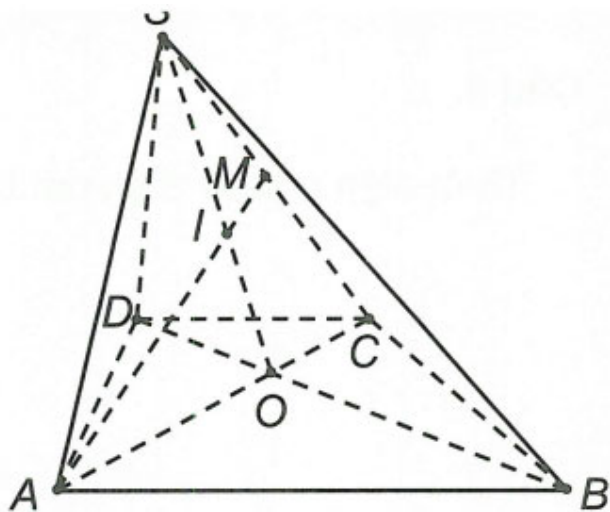


Đường thẳng MN và BD cùng nằm trong mặt phẳng (SBD)

Theo giả thiết thì MN và BD không song song.

Gọi $\{K\} = MN \cap BD$ mà $BD \subset (ABCD) \Rightarrow \{K\} = MN \cap (ABCD)$

Câu 7:



Do AM, SO cùng nằm trong mặt phẳng (SAC)

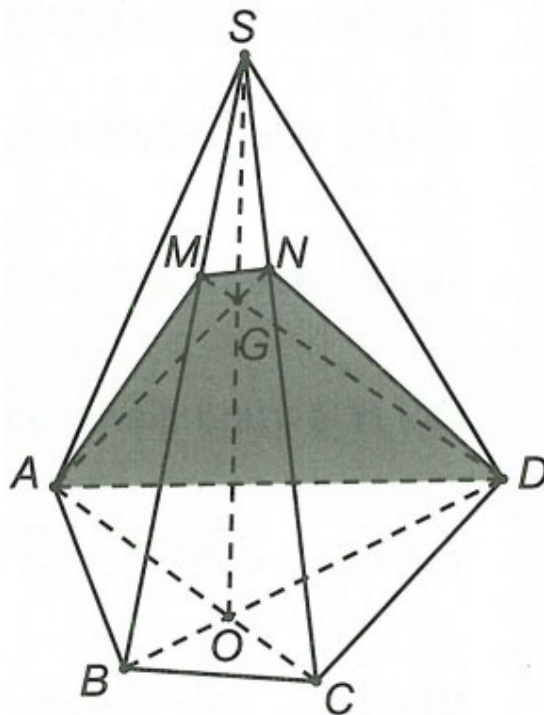
Gọi $\{I\} = AM \cap SO$

Mà $SO \subset (SBD)$ nên $\{I\} = AM \cap (SBD)$

Dạng 3. Tìm thiết diện tại bởi một mặt phẳng và hình chóp. Chứng minh ba điểm thẳng hàng

1-B	2-A	3-C	4-D	5-B	6-D				
-----	-----	-----	-----	-----	-----	--	--	--	--

Câu 1:



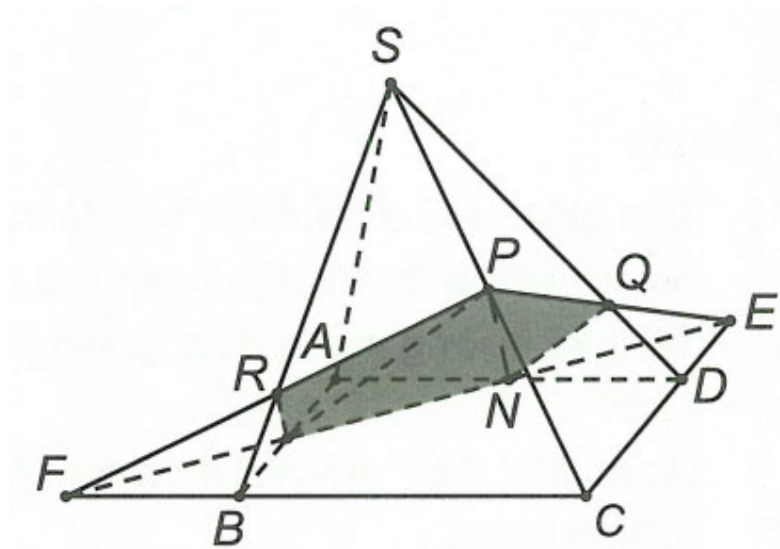
Ta có $(SBD) \cap (SAC) = SO$; $(ADM) \cap (SBD) = MD$

Gọi $MD \cap SO = \{G\} \Rightarrow (SAC) \cap (ADM) = AG$

Gọi $\{N\} = AG \cap SC$

$\Rightarrow$ Thiết diện khi cắt bởi hình chóp là tứ giác ADNM

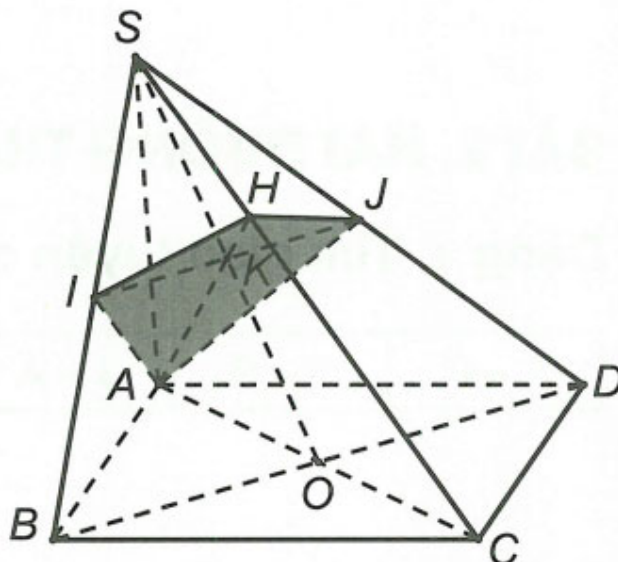
Câu 2:



Trong mp (ABCD) gọi $\{E\} = CD \cap MN$; $\{Q\} = PE \cap SD$

Gọi $\{F\} = BC \cap MN$; $\{R\} = PF \cap SB$. Suy ra thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) với hình chóp là ngũ giác MNQPR.

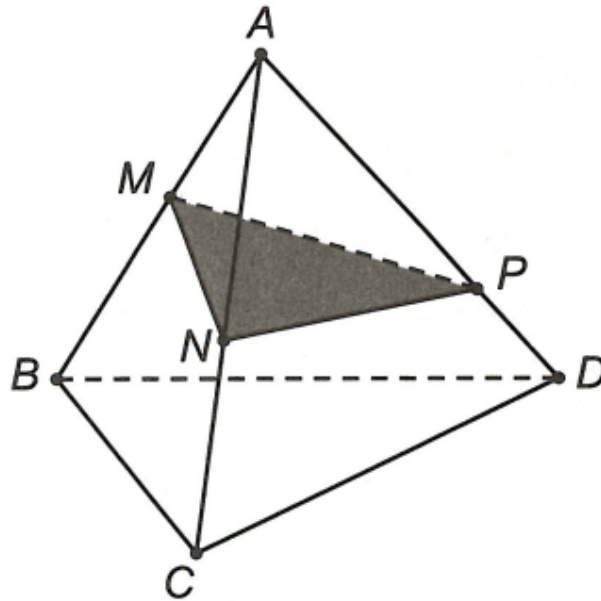
Câu 3:



Gọi $\{O\} = AC \cap BD$; $\{K\} = SO \cap IJ$; $\{H\} = AK \cap SC$

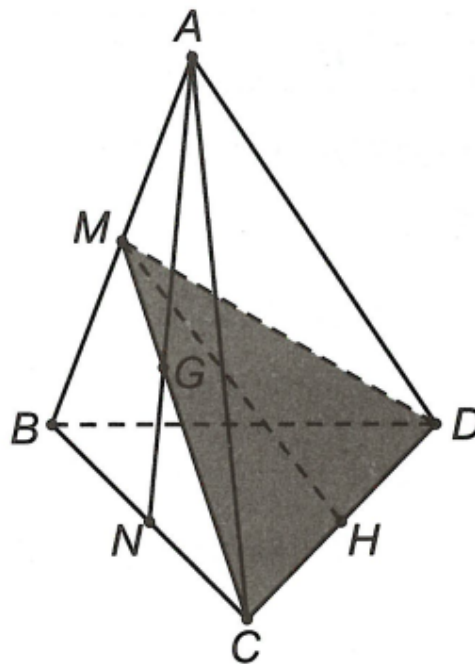
Khi đó thiết diện của mặt phẳng (AIJ) với hình chóp S.ABCD là tứ giác AIHJ

Câu 4:



Thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (MNP) là tam giác MNP

Câu 5:



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC suy ra $AN \cap MC = \{G\}$

(GCD) cắt đường thẳng AB tại điểm M.

Suy ra tam giác MCD là thiết diện của mặt phẳng (GCD) và tứ diện ABCD.

$\triangle ABD$ đều có M là trung điểm AB suy ra $MD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

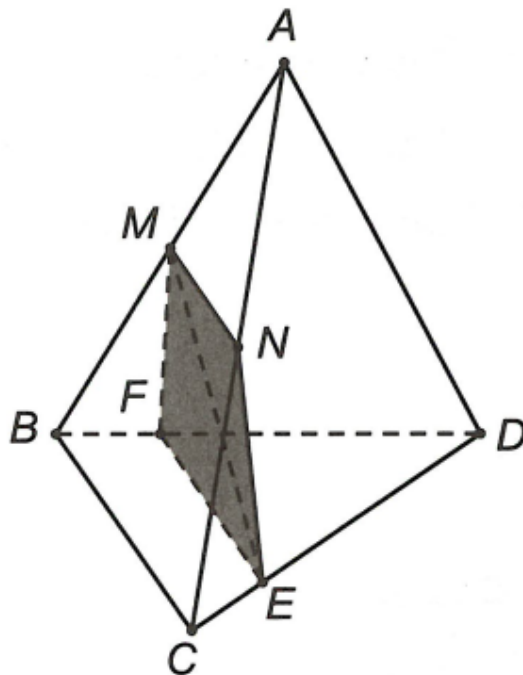
$\triangle ABC$ đều có N là trung điểm BC suy ra $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Gọi H là trung điểm CD $\Rightarrow MH \perp CD \Rightarrow S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2} \cdot MH \cdot CD$

$$\text{Với } MH = \sqrt{MC^2 - HD^2} = \sqrt{MC^2 - \frac{CD^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy } S_{\Delta MCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$$

Câu 6:



Tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác ABC $\Rightarrow MN \parallel BC$

Từ E kẻ đường thẳng d song song với BC và cắt BD tại F

$\Rightarrow EF \parallel BC$.

Do đó $MN \parallel EF$ suy ra bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng và MNEF là hình thang

Vậy hình thang MNEF là thiết diện cần tìm