

KHAI PHÓNG NĂNG LỰC TOÁN 11



NGUYỄN HOÀNG THANH

MỤC LỤC

Chương 1	Hàm số và phương trình lượng giác.	1
1	Góc lượng giác.....	1
1.1	Góc lượng giác.....	1
1.2	Đơn vị radian.....	2
1.3	Đường tròn lượng giác.....	3
2	Giá trị lượng giác của một góc lượng giác.....	6
2.1	Giá trị lượng giác của một góc lượng giác.....	6
2.2	Hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác của một góc lượng giác.....	7
3	Giá trị lượng giác của các góc liên kết.....	9
3.1	Hai góc đối nhau: α và $-\alpha$	9
3.2	Hai cung hơn kém nhau π : α và $\alpha + \pi$	9
3.3	Hai góc bù nhau: α và $\pi - \alpha$	9
3.4	Hai góc phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$	10
3.5	Bài tập.....	10
4	Các công thức lượng giác.....	12
4.1	Công thức cộng.....	12
4.2	Công thức góc nhân đôi.....	13
4.3	Công thức biến đổi tích thành tổng.....	14
4.4	Công thức biến đổi tổng thành tích.....	14
4.5	Bài tập.....	15
5	Hàm số lượng giác và đồ thị.....	17
5.1	Hàm số chẵn, hàm số lẻ.....	17
5.2	Hàm số tuần hoàn.....	17
5.3	Hàm số $y = \sin x$	17
5.4	Hàm số $y = \cos x$	18
5.5	Bài tập.....	18
5.6	Hàm số $y = \tan x$	19
5.7	Hàm số $y = \cot x$	19
6	Phương trình lượng giác cơ bản.....	22
6.1	Phương trình tương đương.....	22
6.2	Phương trình $\sin x = m$	22
6.3	Phương trình $\cos x = m$	23
6.4	Giải phương trình lượng giác bằng máy tính cầm tay.....	24
6.5	Bài tập luyện tập.....	24
7	Bài tập cuối chương.....	27
7.1	Câu hỏi trắc nghiệm.....	27
7.2	Bài tập tự luận.....	27
Chương 2	Dãy số. Cấp số cộng. Cấp số nhân.	29

1	Dãy Số	29
1.1	Dãy số là gì?	29
1.2	Cách xác định dãy số	30
1.3	Dãy số tăng, dãy số giảm	31
1.4	Dãy số bị chặn	32
1.5	Bài tập	32
2	Cấp số cộng	34
2.1	Cấp số cộng	34
2.2	Số hạng tổng quát của cấp số cộng	34
2.3	Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng	35
2.4	Bài tập	35
3	Cấp số nhân	38
3.1	Cấp số nhân	38
3.2	Số hạng tổng quát của cấp số nhân	39
3.3	Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân	39
3.4	Bài tập	40
4	Bài tập cuối chương	42
4.1	Câu hỏi trắc nghiệm	42
4.2	Bài tập tự luận	42
Chương 3 Giới hạn và hàm số liên tục.		43
1	Giới hạn của dãy số	43
1.1	Giới hạn của dãy số	43
1.2	Các phép toán về giới hạn hữu hạn của dãy số	43
1.3	Giới hạn hữu hạn của dãy số	43
1.4	Bài tập	44
1.5	Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn	45
1.6	Giới hạn vô cực	45
1.7	Bài tập	46
2	Giới hạn của hàm số	48
2.1	Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm	48
2.2	Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số	48
2.3	Bài tập	48
2.4	Giới hạn một phía	49
2.5	Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực	50
2.6	Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm	51
2.7	Bài tập	52
3	Hàm số liên tục	54
3.1	Hàm số liên tục tại một điểm	54
3.2	Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn	54
3.3	Tính liên tục của hàm số sơ cấp	55
3.4	Tổng, hiệu, tích, thương của hàm số liên tục	55
3.5	Ứng dụng của hàm số liên tục	55
3.6	Bài tập	56
4	Bài tập cuối chương	57
4.1	Câu hỏi trắc nghiệm	57
4.2	Bài tập tự luận	57
Chương 4 Đường thẳng và mặt phẳng. Quan hệ song song trong không gian.		59

1	Điểm, đường thẳng và mặt phẳng trong không gian	59
1.1	Mặt phẳng trong không gian	59
1.2	Các tính chất thừa nhận của hình học không gian	59
1.3	Cách xác định mặt phẳng	61
1.4	Hình chóp và hình tứ diện	62
1.5	Bài tập	63
1.6	Bài tập sách giáo khoa	65
2	Hai đường thẳng song song	67
2.1	Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian	67
2.2	Tính chất cơ bản về hai đường thẳng song song	68
2.3	Bài tập	69
2.4	Bài tập sách giáo khoa	71
3	Đường thẳng và mặt phẳng song song	73
3.1	Đường thẳng song song với mặt phẳng	73
3.2	Điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng	73
3.3	Tính chất cơ bản của đường thẳng và mặt phẳng song song	73
3.4	Mặt phẳng đi qua một trong hai đường thẳng chéo nhau và song song với đường còn lại	74
3.5	Bài tập	74
3.6	Bài tập sách giáo khoa	75
4	Hai mặt phẳng song song	77
4.1	Hai mặt phẳng song song	77
4.2	Bài tập	78
4.3	Định lý Thalès trong không gian	79
4.4	Hình lăng trụ và hình hộp	79
4.5	Bài tập sách giáo khoa	81
4.6	Bài tập và các dạng toán tổng hợp và nâng cao	82
5	Phép chiếu song song	85
5.1	Khái niệm phép chiếu song song	85
5.2	Các tính chất cơ bản của phép chiếu song song	85
5.3	Hình biểu diễn của một hình không gian	86
5.4	Bài tập	86
6	Bài tập cuối chương	88
6.1	Câu hỏi trắc nghiệm	88
6.2	Bài tập tự luận	88

Chương 5 Các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu ghép nhóm. 90

1	Số trung bình và một của mẫu số liệu ghép nhóm	90
1.1	Số liệu ghép nhóm	90
1.2	Số trung bình	91
1.3	Một	91
1.4	Bài tập	92
2	Trung vị và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm	94
2.1	Trung vị	94
2.2	Tứ phân vị	94
2.3	Bài tập	96
3	Bài tập cuối chương	97
3.1	Câu hỏi trắc nghiệm	97
3.2	Bài tập tự luận	97

HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Bài 1. Góc lượng giác

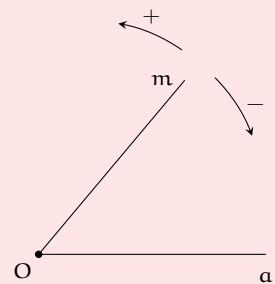
1.1 Góc lượng giác

1.1.1 Khái niệm góc lượng giác

Khái niệm:

Cho tia Oa . Khi xét chuyển động của một tia Om quanh gốc O của nó tính từ vị trí ban đầu Oa theo một chiều cố định, người ta quy ước chiều quay ngược chiều kim đồng hồ là chiều dương và chiều quay cùng chiều kim đồng hồ là chiều âm.

Một vòng quay theo chiều dương tương ứng với góc quay 360° , một vòng quay theo chiều âm tương ứng với góc quay -360° .

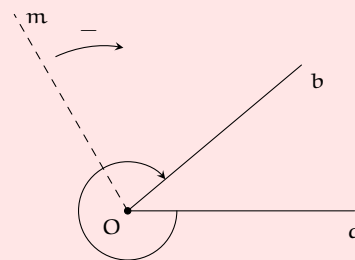
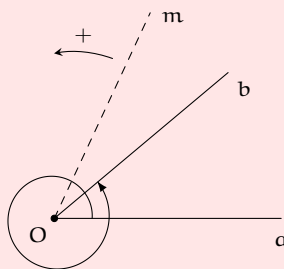


Khi tia Om quay:

- nửa vòng theo chiều dương thì ta nói Om quay góc $\frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$;
- $\frac{1}{6}$ vòng theo chiều dương thì ta nói Om quay góc $\frac{1}{6} \cdot 360^\circ = 60^\circ$;
- $\frac{5}{4}$ vòng theo chiều âm thì ta nói Om quay góc $\frac{5}{4} \cdot (-360^\circ) = -450^\circ$.

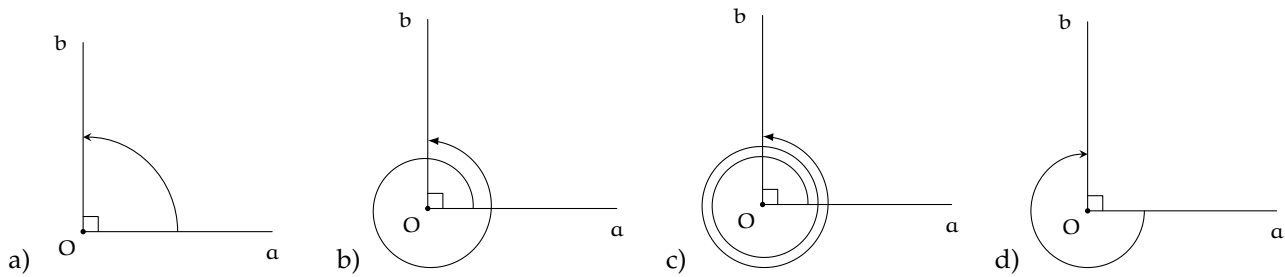
Khái niệm: Cho hai tia Oa, Ob .

- Nếu một tia Om quay quanh gốc O của nó theo một chiều cố định bắt đầu từ vị trí tia Oa và dừng ở vị trí tia Ob thì ta nói tia Om quét một **góc lượng giác** có tia đầu Oa , tia cuối Ob .
Ký hiệu: (Oa, Ob) .
- Khi tia Om quay một góc α , ta nói số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) bằng α .
Ký hiệu: $(Oa, Ob) = \alpha$.



Lưu ý: Với hai tia Oa và Ob cho trước, có vô số góc lượng giác có tia đầu Oa và tia cuối Ob .

Ví dụ 1. Xác định số đo của các góc lượng giác (Oa, Ob) trong hình sau



Lưu ý: Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu Oa và tia cuối Ob sai khác nhau một bội nguyên của 360° nên có công thức tổng quát là

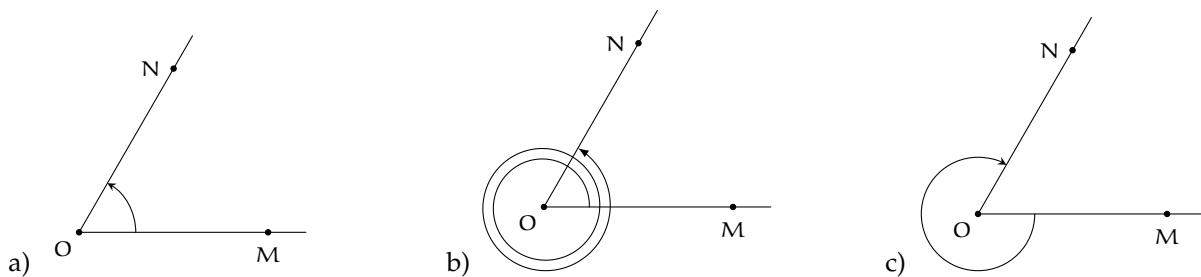
$$\text{sđ}(Oa, Ob) = \alpha^\circ + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

hoặc thường viết là

$$(Oa, Ob) = \alpha^\circ + k360^\circ.$$

với α° là số đo của một góc lượng giác bất kì có tia đầu Oa và tia cuối Ob . Chẳng hạn, trong hình đầu tiên của ví dụ trên thì $(Oa, Ob) = 90^\circ + k360^\circ$.

Ví dụ 2. Cho $\widehat{MON} = 60^\circ$. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong hình vẽ và viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (OM, ON) .

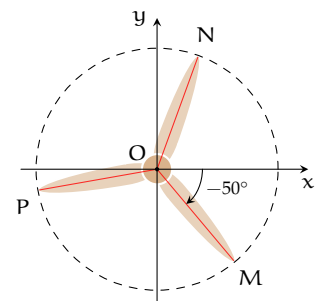


Ví dụ 3. Trong các khoảng thời gian từ 0 giờ đến 2 giờ 15 phút, kim phút quét một góc lượng giác là bao nhiêu độ?

1.1.2 Hệ thức Chasles (Sa-lơ)

Khái niệm: Với ba tia Oa, Ob và Oc bất kì, ta có $(Oa, Ob) + (Ob, Oc) = (Oa, Oc) + k360^\circ, \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Ví dụ 4. Trong hình bên, chiếc quạt có ba cánh được phân bố đều nhau. Viết công thức tổng quát đo số đo của các góc lượng giác (Ox, ON) và (Ox, OP) .

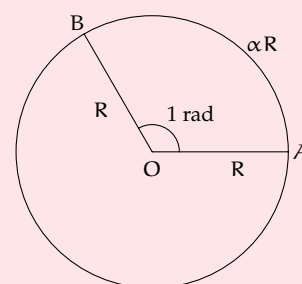


1.2 Đơn vị radian

Khái niệm: Trên đường tròn bán kính R tùy ý, góc ở tâm chắn một cung có độ dài đúng bằng R được gọi là một góc có số đo 1 radian (đọc là 1 ra-di-an, viết tắt là 1rad).

Trên đường tròn bán kính R , một góc ở tâm có số đo α rad thì chắn một cung có độ dài αR (Hình 10). Vì góc bẹt (180°) chắn nửa đường tròn với độ dài là πR , nên góc bẹt có số đo theo đơn vị radian là π . Khi đó ta viết

$$180^\circ = \pi \text{ rad.}$$



Hình 10

Suy ra, với $\pi \approx 3,14$, ta có $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0,0175 \text{ rad}$ và $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57,3^\circ$ (hay $57^\circ 17' 45''$).

Do đó ta có công thức chuyển đổi số đo góc từ đơn vị radian sang độ và ngược lại như sau:

$\alpha^\circ = \frac{\pi \alpha}{180} \text{ rad}$	$\alpha \text{ rad} = \left(\frac{180 \alpha}{\pi}\right)^\circ$
---	--

Ví dụ 5. Đổi các số đo góc sau đây từ radian sang độ hoặc ngược lại

- a) 45° . b) -60° . c) $\frac{2\pi}{5} \text{ rad}$. d) 3 rad .

Bài tập 1. Đổi số đo của các góc sau đây sang radian:

- a) 30° ; b) 45° ; c) 60° ; d) 120° ;
 e) 135° ; f) 180° ; g) 270° ; h) 360°
 i) -30° ; j) -45° ; k) -60° ; l) -120° ;
 m) -135° ; n) -160° ; o) 275° ; p) 185° .

Bài tập 2. Đổi số đo của các góc sau đây sang độ:

- a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{2}$; d) $\frac{\pi}{6}$;
 e) $\frac{2\pi}{3}$; f) $\frac{3\pi}{2}$; g) $\frac{5\pi}{4}$; h) $\frac{\pi}{12}$;
 i) $\frac{7\pi}{4}$; j) $\frac{5\pi}{6}$; k) -5 ; l) $\frac{13\pi}{9}$.

Lưu ý:

a) Khi ghi số đo của một góc theo đơn vị radian, người ta thường bỏ đi chữ rad sau số đo. Ví dụ, $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$ được viết là $\frac{\pi}{2}$, 2 rad được viết là 2 .

b) Với đơn vị radian, công thức số đo tổng quát của góc lượng giác ($O\alpha, O\beta$) là

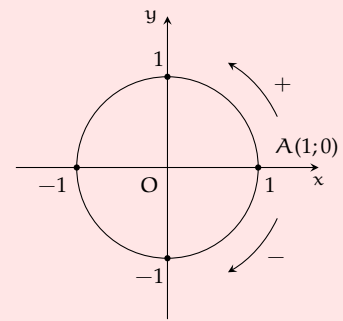
$$(O\alpha, O\beta) = \alpha + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

Trong đó α là số đo theo radian của một góc lượng giác bất kì có tia đầu $O\alpha$ và tia cuối $O\beta$. **Lưu ý:** không được viết $\alpha + k360^\circ$ hay $\alpha^\circ + k2\pi$ (vì không cùng đơn vị đo).

1.3 Đường tròn lượng giác

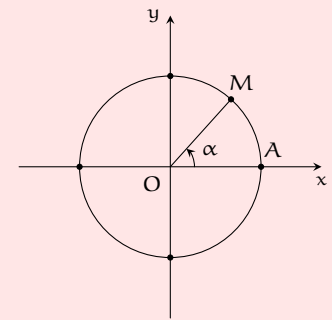
Khái niệm:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn tâm O bán kính bằng 1. Trên đường tròn này, chọn điểm A(1;0) làm gốc, chiều dương là chiều ngược chiều kim đồng hồ và chiều âm là chiều cùng chiều kim đồng hồ. Đường tròn cùng với gốc và chiều như trên được gọi là **đường tròn lượng giác**.



Hình 11

Cho số đo góc α bất kì. Trên đường tròn lượng giác, ta xác định được duy nhất một điểm M sao cho số đo góc lượng giác (OA, OM) bằng α (Hình 12). Khi đó điểm M được gọi là **điểm biểu diễn** của góc có số đo α trên đường tròn lượng giác.



Hình 12

Ví dụ 6. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các góc lượng giác có số đo là:

- | | | | |
|-------------------|-------------------|------------------|------------------------|
| a) 30° ; | b) 45° ; | c) 60° ; | d) 90° ; |
| e) 120° ; | f) 135° ; | g) 180° ; | h) 225° ; |
| i) 270° ; | j) -30° ; | k) -60° ; | l) -90° ; |
| m) -120° ; | n) -135° ; | o) 865° ; | p) $\frac{-7\pi}{3}$. |

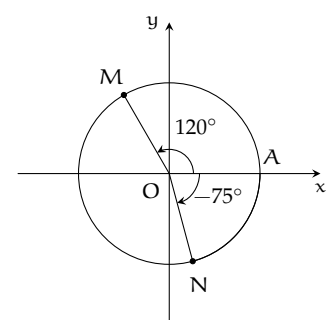
Bài tập 3. Biểu diễn các góc lượng giác sau trên đường tròn lượng giác:

- | | | | |
|-----------------------|-----------------------|-------------------------|------------------------|
| a) $\frac{\pi}{3}$; | b) $\frac{\pi}{4}$; | c) $\frac{\pi}{6}$; | d) $\frac{\pi}{2}$; |
| e) $\frac{2\pi}{3}$; | f) $\frac{3\pi}{4}$; | g) $\frac{-\pi}{3}$; | h) $\frac{-\pi}{4}$; |
| i) $\frac{-\pi}{6}$; | j) $\frac{-\pi}{2}$; | k) $\frac{-17\pi}{3}$; | l) $\frac{13\pi}{4}$. |

Bài tập 4. Góc lượng giác $\frac{31\pi}{7}$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc lượng giác nào sau đây?

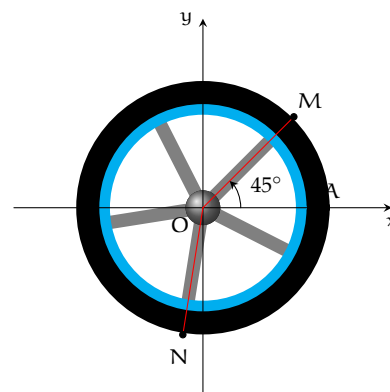
$$\frac{3\pi}{7}; \frac{10\pi}{7}; \frac{-25\pi}{7}.$$

Bài tập 5. Viết công thức số đo tổng quát của các góc lượng giác (OA, OM) và (OA, ON) trong hình bên.



Hình 14

Bài tập 6. Trong hình vẽ bên, mâm bánh xe ô tô được chia thành năm phần bằng nhau. Viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, ON) .



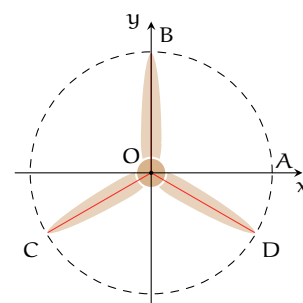
Hình 15

Bài tập 7. Trên đường tròn lượng giác, hãy biểu diễn các góc lượng giác có số đo có dạng là:

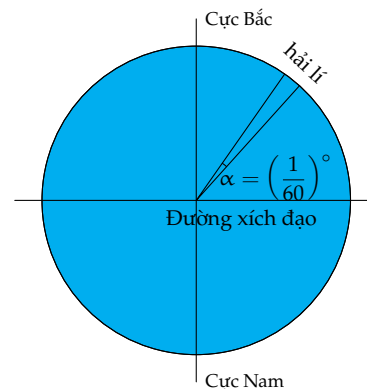
- a) $\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$; b) $k\frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$.

Bài tập 8. Vị trí các điểm B, C, D trên cánh quạt động cơ máy bay trong hình 16 có thể được biểu diễn cho các góc lượng giác nào sau đây?

$$\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}); \quad \frac{-\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}); \quad \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$



Bài tập 9. Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ của đường kinh tuyến (Hình 17). Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu kilômét, biết bán kính trung bình của Trái Đất là 6371 km. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Hình 17

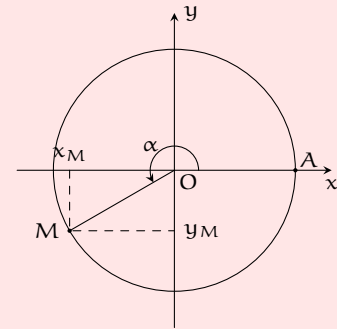
Bài 2. Giá trị lượng giác của một góc lượng giác

2.1 Giá trị lượng giác của một góc lượng giác

Khái niệm: Trên đường tròn lượng giác, gọi M là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α .

Khi đó:

- Tung độ y_M của M gọi là **sin** của α , kí hiệu $\sin \alpha$.
- Hoành độ x_M của M gọi là **côsin** của α , kí hiệu $\cos \alpha$.
- Nếu $x_M \neq 0$ thì tỉ số $\frac{y_M}{x_M} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gọi là **tang** của α , kí hiệu $\tan \alpha$.
- Nếu $y_M \neq 0$ thì tỉ số $\frac{x_M}{y_M} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gọi là **côtang** của α , kí hiệu $\cot \alpha$.



Các giá trị $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ và $\cot \alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của góc lượng giác α .

📌 Lưu ý:

- Ta gọi trục hoành là **trục côsin**, còn trục tung là **trục sin**.
- $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$;
 $\tan \alpha$ chỉ xác định với các góc $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);
 $\cot \alpha$ chỉ xác định với các góc $\alpha \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- Với mọi góc lượng giác α và số nguyên k , ta có

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + k2\pi) &= \sin \alpha; & \tan(\alpha + k\pi) &= \tan \alpha; \\ \cos(\alpha + k2\pi) &= \cos \alpha; & \cot(\alpha + k\pi) &= \cot \alpha. \end{aligned}$$

- Ta đã biết bảng giá trị lượng giác của một số góc α đặc biệt với $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ (hay $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) như sau:

độ	0°	30°	45°	60°	90°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\parallel$
$\cot \alpha$	$\parallel$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Ví dụ 1. Quan sát bảng trên và đọc giá trị lượng giác của các góc 30° , 45° , 60° và 90° .

Ví dụ 2. Tính các giá trị lượng giác của các góc

- a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{6}$; d) $\frac{\pi}{2}$;
e) $\frac{13\pi}{3}$; f) 405° ; g) 450° ; h) -45° .

Ví dụ 3. Em hãy xác định dấu của $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ và $\cot \alpha$ trong các trường hợp sau

- a) $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. b) $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$. c) $\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$. d) $\frac{3\pi}{2} \leq \alpha \leq 2\pi$.

Nếu chia đường tròn lượng giác thành 4 phần (I, II, III và IV) theo chiều ngược chiều kim đồng hồ, em hãy cho biết dấu của hàm số lượng giác khi α thuộc một trong các phần trên.

Ví dụ 4. Xác dấu các biểu thức sau

a) $A = \sin 40^\circ \cdot \cos(-290^\circ)$.

b) $B = \sin(-25^\circ) \cdot \cos 170^\circ$.

c) $C = \sin 225^\circ \cdot \tan 130^\circ \cdot \cot(-175^\circ)$.

d) $D = \cos 195^\circ \cdot \tan 269^\circ \cdot \cot(-98^\circ)$.

2.2 Hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác của một góc lượng giác

Công thức cần nhớ:

- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ với $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- $\tan x \cdot \cot x = 1$ với $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

- $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ với $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2.2.1 Bài tập tính toán

Ví dụ 5. Cho $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ với $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α .

Bài tập 1. Các đẳng thức sau có thể đồng thời xảy ra không?

a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$;

b) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\cot \alpha = \frac{1}{2}$;

c) $\tan \alpha = 3$ và $\cot \alpha = \frac{1}{3}$.

Bài tập 2. Tính các giá trị lượng giác của góc α , nếu:

a) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

b) $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ và $0 < \alpha < 90^\circ$;

c) $\tan \alpha = \sqrt{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

d) $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$ và $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Bài tập 3. Cho $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$. Hãy tính $\tan 15^\circ$, $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$.

Bài tập 4. Tính $\sin x$, $\cos x$, $\cot x$, biết

a) $\sin x = \frac{1}{2}$ và $90^\circ < x < 180^\circ$

b) $\sin x = -\frac{4}{5}$ và $270^\circ < x < 360^\circ$

Bài tập 5. Tính $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$, biết

a) $\cos x = \frac{3}{5}$ và $0^\circ < x < 90^\circ$

b) $\cos x = -\frac{5}{13}$ và $180^\circ < x < 270^\circ$

Bài tập 6. Tính $\sin x$, $\cos x$, $\cot x$, biết

a) $\tan x = \frac{3}{4}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

b) $\tan x = -\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Bài tập 7. Tính $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, biết

a) $\cot x = \frac{2}{3}$ và $0 < x < \frac{\pi}{2}$

b) $\cot x = -\sqrt{3}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Bài tập 8. Tính giá trị các biểu thức lượng giác

a) $\tan x = -2$. Tính $A_1 = \frac{5 \cot x + 4 \tan x}{5 \cot x - 4 \tan x}$ và $A_2 = \frac{2 \sin x + \cos x}{\cos x - 3 \sin x}$

b) $\cot x = 2$. Tính $B_1 = \frac{2}{\cos^2 x - \sin x \cos x}$ và $B_2 = \frac{3 \sin x - 2 \cos x}{5 \sin^3 x + 4 \cos^3 x}$

c) $\cos x = -\frac{4}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Tính $C_1 = \frac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x}$ và $C_2 = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

Bài tập 9. Tính giá trị các biểu thức lượng giác

a) $\sin x = \frac{2}{3}$ và $0 < x < 90^\circ$. Tính $M = \frac{\tan x - \cos x}{\cot x}$ và $N = \frac{\tan x \cos x}{\sin^2 x} - \cos x \cot x$

b) $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$. Tính $\sin x \cdot \cos x$, từ đó suy ra giá trị của $\sin x$, $\cos x$ khi $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

2.2.2 Bài tập rút gọn, chứng minh

Bài tập 10. Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha$;

b) $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$.

Bài tập 11. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$.

b) $2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$.

c) $3 - 4 \sin^2 = 4 \cos^2 x - 1$.

d) $\sin x \cdot \cot x + \cos x \cdot \tan x = \sin x + \cos x$.

e) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

f) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

g) $4 \cos^2 x - 3 = (1 - 2 \sin x) \cdot (1 + 2 \sin x)$.

h) $(1 + \cos x) \cdot (\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x) = \sin^2 x$.

i) $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x = 2 \sin^2 x - 1$.

j) $\sin^3 x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos^3 x = \sin x \cdot \cos x$.

Bài tập 12. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

b) $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = 1$.

c) $\left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) + \tan^2 x = 0$.

d) $\frac{1 + \sin^2 x}{1 - \sin^2 x} = 1 + 2 \tan^2 x$.

e) $\tan x \cdot \tan y = \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y}$.

f) $\tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1}{\cos x}$.

g) $(1 - \cos x)(1 + \cot^2 x) = \frac{1}{1 + \cos x}$.

h) $\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} - \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{4 \cot x}{\sin x}$.

Bài tập 13. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sin^4 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

b) $\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x$.

c) $\sin^2 x + \sin^2 x \cdot \cot^2 x$.

d) $(1 - \sin^2 x) \cdot \cot^2 x + 1 - \cot^2 x$.

e) $\frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$.

f) $\frac{\cos^2 x - \cot^2 x}{\sin^2 x - \tan^2 x}$.

g) $\frac{1 - \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x} - \cos^2 x$.

h) $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan x - \sin x \cdot \cos x}$.

Bài tập 14. Biến đổi các biểu thức sau thành tích

a) $\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - 1$.

b) $1 + \sin x + \cos x + \tan x$.

c) $\tan x - \cot x + \sin x + \cos x$.

d) $\cos x \cdot \tan^2 x - (1 + \cos x)$.

e) $3 \sin x + 2 \cos x - 3 \tan x - 2$.

f) $(3 - 4 \cos^2 x) - \sin x \cdot (2 \sin x + 1)$.

g) $\sin^2 x - 3 \cos^2 x + \sqrt{6} \cos x - \sqrt{2} \sin x$.

h) $\cos^2 x + \sin^3 x + \cos x$.

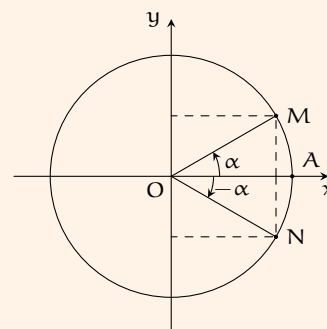
Bài 3. Giá trị lượng giác của các góc liên kết

3.1 Hai góc đối nhau: α và $-\alpha$

Công thức cần nhớ:

Các điểm biểu diễn của hai góc α và $-\alpha$ đối xứng qua trục Ox (Hình 7), nên ta có

- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
- $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$



Hình 7

Ví dụ 1. Điền giá trị thích hợp vào dấu ba chấm

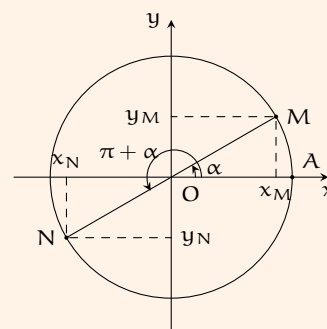
- a) $\sin(-30^\circ) = \dots$; b) $\cos(-45^\circ) = \dots$; c) $\tan(-60^\circ) = \dots$; d) $\cot(-45^\circ) = \dots$.

3.2 Hai cung hơn kém nhau π : α và $\alpha + \pi$

Công thức cần nhớ:

Các điểm biểu diễn của hai góc α và $\alpha + \pi$ đối xứng nhau qua gốc tọa độ O (Hình 8), nên ta có

- $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$
- $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$
- $\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$



Hình 8

Ví dụ 2. Tính các giá trị sau

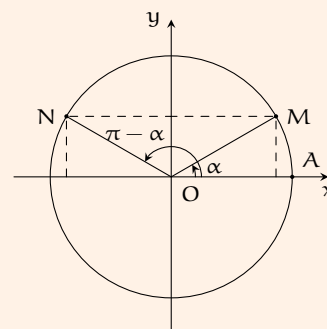
- a) $\sin 210^\circ$. b) $\cos 225^\circ$. c) $\tan 210^\circ$. d) $\cos 315^\circ$.
e) $\sin 13\pi$. f) $\cot \frac{7\pi}{6}$. g) $\cos \frac{11\pi}{3}$. h) $\sin \frac{17\pi}{3}$.

3.3 Hai góc bù nhau: α và $\pi - \alpha$

Công thức cần nhớ:

Các điểm biểu diễn của hai góc α và $\pi - \alpha$ đối xứng nhau qua trục Oy (Hình 9), nên ta có

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$



Hình 9

Ví dụ 3. Điền giá trị thích hợp vào chỗ trống

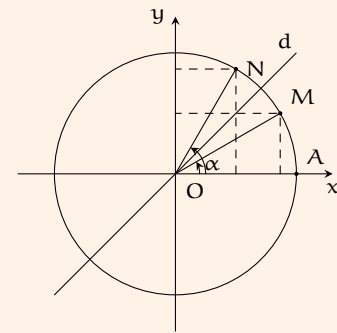
- a) $\sin 120^\circ = \sin \dots$; b) $\cos 130^\circ = -\cos \dots$; c) $\tan 155^\circ = -\tan \dots$; d) $\cot 35^\circ = -\cot \dots$;
e) $\sin 70^\circ = \sin \dots$; f) $\cos 10^\circ = -\cos \dots$; g) $\tan 85^\circ = -\tan \dots$; h) $\cot 175^\circ = -\cot \dots$.

3.4 Hai góc phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$

Công thức cần nhớ:

Các điểm biểu diễn của hai góc α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$ đối xứng nhau qua đường phân giác d của góc xOy (Hình 10) nên ta có

- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
- $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$



Hình 10

Ví dụ 4. Điền giá trị thích hợp vào chỗ trống

- a) $\sin 10^\circ = \cos \dots$; b) $\cos 40^\circ = \sin \dots$; c) $\tan 15^\circ = \cot \dots$; d) $\cot 35^\circ = \tan \dots$;
 e) $\sin 7^\circ = \cos \dots$; f) $\cos 12^\circ = \sin \dots$; g) $\tan 5^\circ = \cot \dots$; h) $\cot 1^\circ = \tan \dots$.

Ví dụ 5.

- a) Biểu diễn $\sin \frac{61\pi}{8}$ qua giá trị lượng giác có số đo từ 0 đến $\frac{\pi}{4}$.
 b) Biểu diễn $\tan 258^\circ$ qua giá trị lượng giác có số đo từ 0° đến 45° .

3.5 Bài tập

Bài tập 1. Cho $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. Tính $\sin\left(-\frac{15\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(13\pi + \alpha)$.

Bài tập 2. Diễn tả giá trị lượng giác của các góc sau bằng giá trị lượng giác của góc x

- a) $\sin(x - 90^\circ)$. b) $\cos(x - 180^\circ)$. c) $\sin(270^\circ - x)$. d) $\sin(x + 450^\circ)$.
 e) $\tan(360^\circ - x)$. f) $\sin(450^\circ + x)$. g) $\sin^2(270^\circ + x)$. h) $\cos^3(90^\circ + x)$.

Bài tập 3. Diễn tả giá trị lượng giác của các góc sau bằng giá trị lượng giác của góc x

- a) $\cot(x - \pi)$. b) $\tan(2\pi - x)$. c) $\sin(3\pi + x)$. d) $\cos(x - 7\pi)$.
 e) $\tan(x - 5\pi)$. f) $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$. g) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$. h) $\cot\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$.
 i) $\cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)$. j) $\tan\left(\frac{11\pi}{2} + x\right)$. k) $\sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right)$. l) $\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$.

Bài tập 4. Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $A = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(x - \pi)$.
 b) $B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.
 c) $C = 2\cos x + 3\cos(\pi - x) - \sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.
 d) $D = \sin(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

Bài tập 5. Rút gọn và tính giá trị các biểu thức sau

- a) $A = \sin 32^\circ \cdot \sin 148^\circ - \sin 302^\circ \cdot \sin 122^\circ$. b) $B = \sin 825^\circ \cdot \cos(-15^\circ) + \cos 75^\circ \cdot \sin(-555^\circ)$.

Bài tập 6. Rút gọn và tính giá trị các biểu thức sau

a) $A = \sin^2 28^\circ + \sin^2 36^\circ + \sin^2 54^\circ + \cos^2 152^\circ$

b) $B = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 90^\circ$

Bài tập 7. Rút gọn và tính giá trị các biểu thức sau

a) $A = \cot 15^\circ \cdot \cot 35^\circ \cdot \cot 55^\circ \cdot \cot 75^\circ$.

b) $B = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \dots \tan 80^\circ$.

c) $C = \tan 41^\circ \cdot \tan 42^\circ \cdot \tan 43^\circ \dots \tan 49^\circ$.

d) $D = \tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \tan 60^\circ + \dots + \tan 180^\circ$.

Bài tập 8. Biểu diễn các giá trị lượng giác sau qua các giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\frac{\pi}{4}$ hoặc từ 0° đến 45° và tính:

a) $\cot 135^\circ$;

b) $\cos \frac{21\pi}{6}$;

c) $\sin \frac{129\pi}{4}$;

d) $\tan 1020^\circ$.

Bài tập 9. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{1}{\tan \alpha + 1} + \frac{1}{\cot \alpha + 1}$;

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi + \alpha)$;

c) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(-\alpha + 6\pi) - \tan(\alpha + \pi) \cot(3\pi - \alpha)$.

Bài tập 10. Chứng minh rằng nếu A, B, C là ba góc của một tam giác thì

a) $\sin(A + 2B + C) = -\sin B$

b) $\tan(A + B + 2C) = \tan C$

c) $\sin \frac{A+B+3C}{2} = \cos C$

d) $\cot \frac{A-2B+C}{2} = \tan \frac{3B}{2}$

Bài tập 11. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\sin A = \sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B$.

b) $\cos A = \sin B \cdot \sin C - \cos B \cdot \cos C$.

c) $\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$.

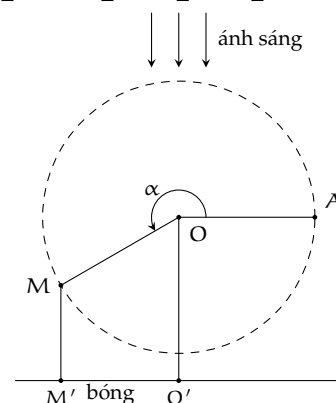
d) $\cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} - \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$.

e) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$.

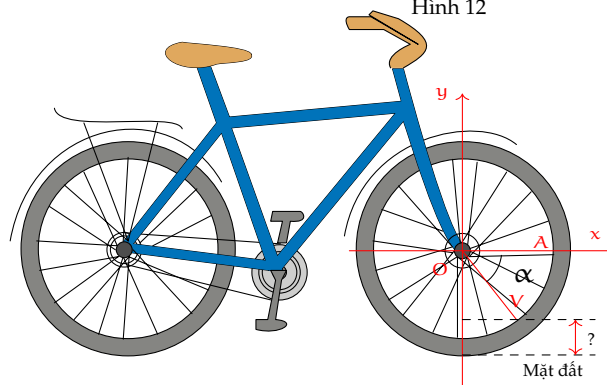
f) $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$.

g) $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1$.

h) $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}$.

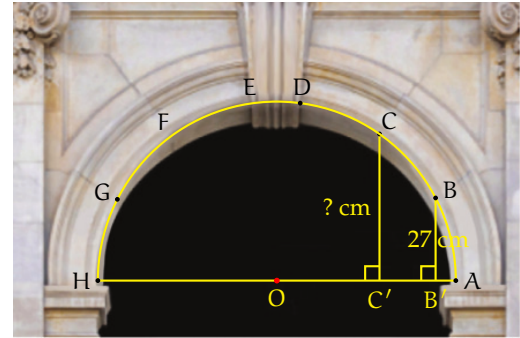
Bài tập 12. Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trục O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như Hình 12. Vị trí ban đầu của thanh là OA. Hỏi độ dài bóng O'M' của OM khi thanh quay được $3\frac{1}{10}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 15 cm? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Hình 12

Bài tập 13. Khi xe đạp di chuyển, van V của bánh xe quay quanh trục O theo chiều kim đồng hồ với tốc độ góc không đổi là 11 rad/s (hình bên). Ban đầu van nằm ở vị trí A. Hỏi sau một phút di chuyển, khoảng cách từ van đến mặt đất là bao nhiêu, biết bán kính OA = 58 cm? Giả sử độ dày của lốp xe không đáng kể. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Bài 4. Các công thức lượng giác

Trong kiến trúc, các vòm cổng bằng đá thường có hình nửa đường tròn để có thể chịu lực tốt. Trong hình bên, vòm cổng được ghép bởi sáu phiến đá hai bên tạo thành các cung AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH bằng nhau và một phiến đá chót ở đỉnh. Nếu biết chiều rộng cổng và khoảng cách từ điểm B đến đường kính AH, làm thế nào để tính được khoảng cách từ điểm C đến đường kính AH?



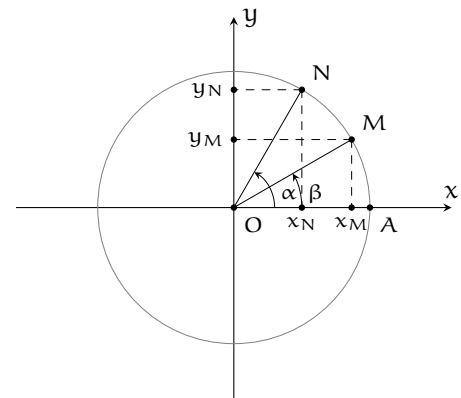
4.1 Công thức cộng

Quan sát hình bên. Từ hai cách tính tích vô hướng của hai véc-tơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON}$ sau đây

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = |\overrightarrow{OM}| \cdot |\overrightarrow{ON}| \cdot \cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \cos(\alpha - \beta),$$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = x_M x_N + y_M y_N.$$

hãy suy ra công thức $\cos(\alpha - \beta)$ theo các giá trị lượng giác α và β . Từ đó, hãy suy ra công thức $\cos(\alpha + \beta)$ bằng cách thay β bằng $-\beta$.



Công thức cần nhớ:

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha.$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha.$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$

$$\bullet \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

$$\bullet \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$

Ví dụ 1. Tính giá trị $\cos \frac{\pi}{12}$.

Bài tập 1. Tính $\sin \frac{\pi}{12}$ và $\tan \frac{\pi}{12}$.

Bài tập 2. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sin x \cdot \cos 5x - \cos x \cdot \sin 5x.$

b) $\sin 4x \cdot \cot 2x - \cos 4x.$

c) $\frac{\tan 3x - \tan x}{1 + \tan 3x \cdot \tan x}.$

d) $\frac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 2x \cdot \tan^2 x}.$

Bài tập 3. Tính giá trị các biểu thức sau

a) $A = \sin 12^\circ \cdot \cos 48^\circ + \cos 12^\circ \cdot \sin 48^\circ.$

b) $B = \cos 38^\circ \cdot \cos 22^\circ - \sin 38^\circ \cdot \sin 22^\circ.$

c) $C = \sin 36^\circ \cdot \cos 6^\circ - \sin 126^\circ \cdot \cos 84^\circ.$

d) $D = \sin 200^\circ \cdot \sin 310^\circ + \cos 340^\circ \cdot \cos 50^\circ.$

Bài tập 4. Tính giá trị các biểu thức sau

a) $E = \frac{\tan 25^\circ + \tan 20^\circ}{1 - \tan 25^\circ \cdot \tan 20^\circ}.$

b) $F = \frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ}.$

c) $G = \frac{\sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ + \sin 20^\circ \cdot \cos 10^\circ}{\cos 17^\circ \cdot \cos 13^\circ - \sin 17^\circ \cdot \sin 13^\circ}.$

d) $H = \frac{\sin 73^\circ \cdot \cos 3^\circ - \sin 87^\circ \cdot \cos 17^\circ}{\cos 132^\circ \cdot \cos 62^\circ + \cos 42^\circ \cdot \cos 28^\circ}.$

Bài tập 5. Cho $a - b = \frac{\pi}{3}$. Tính giá trị các biểu thức

a) $X = (\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2$.

b) $Y = (\cos a + \sin b)^2 + (\cos b - \sin a)^2$.

Bài tập 6. Tính giá trị các biểu thức sau

a) $A = \cos(x - 30^\circ)$ với $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ($0 < x < 90^\circ$).

b) $B = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ với $\sin x = -\frac{4}{5}$ ($\pi < x < \frac{3\pi}{2}$).

Bài tập 7. Cho a, b là các góc nhọn và $\tan a = \frac{1}{2}$, $\tan b = \frac{1}{3}$. Tính $a + b$.**Bài tập 8.** Cho $\sin a = \frac{4}{5}$ ($0 < a < 90^\circ$), $\sin b = \frac{8}{17}$ ($90^\circ < b < 180^\circ$). Tính $\cos(a + b)$, $\sin(a - b)$.**Bài tập 9.** Cho $\sin a = \frac{3}{4}$ ($\frac{\pi}{2} < a < \pi$), $\cot b = \frac{2}{5}$ ($\pi < b < \frac{3\pi}{2}$). Tính $\sin(a - b)$, $\tan(a + b)$.**Bài tập 10.** Thu gọn các biểu thức sau

a) $\sin x - \sqrt{3} \cos x$.

b) $a \sin x + b \cos x$ ($a^2 + b^2 \neq 0$).

c) $\cos 7x \cdot \cos 5x - \sqrt{3} \sin 2x + \sin 7x \cdot \sin 5x$.

d) $\sqrt{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Bài tập 11. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$.

c) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Bài tập 12. Rút gọn các biểu thức sau

a) $\frac{\cos(a + b) + \sin a \cdot \sin b}{\cos(a - b) - \sin a \cdot \sin b}$.

b) $\frac{2 \sin(a + b)}{\cos(a + b) + \cos(a - b)} - \tan b$.

Bài tập 13. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\sin x \cdot \sin(y - z) + \sin y \cdot \sin(z - x) + \sin z \cdot \sin(x - y) = 0$

b) $\cos x \cdot \sin(y - z) + \cos y \cdot \sin(z - x) + \cos z \cdot \sin(x - y) = 0$

4.2 Công thức góc nhân đôi

Công thức cần nhớ:

- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$.
- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.
- $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$.

Ví dụ 2. Tính giá trị $\sin \frac{\pi}{8}$.**Bài tập 14.** Tính $\cos \frac{\pi}{8}$ và $\tan \frac{\pi}{8}$.**Bài tập 15.** Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$.

b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

c) $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$.

d) $\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}$.

Bài tập 16. Cho $\sin x = \frac{5}{12}$ ($\frac{\pi}{2} < x < \pi$). Tính $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$.**Bài tập 17.** Cho $\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ($\pi < x < \frac{3\pi}{2}$). Tính $\tan x$, $\sin 2x$.

Bài tập 18. Cho $\sin 2x = \frac{4}{5}$ ($0 < x < \frac{\pi}{4}$). Tính $A = \sin x - \cos x$.

Bài tập 19. Cho $\tan x = \frac{3}{4}$ ($-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$). Tính $\tan 2x$, $\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, $\cos x$, $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

Bài tập 20. Cho $\tan x = 2 - \sqrt{3}$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$). Tính $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\tan 2x$, rồi suy ra x .

Bài tập 21. Rút gọn biểu thức

a) $(\sin x + \cos x)^2$.

b) $1 - 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

c) $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x$.

d) $\cos^4 2x - \sin^4 2x$.

4.3 Công thức biến đổi tích thành tổng

Công thức cần nhớ:

- $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$;
- $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$;
- $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$.

Ví dụ 3. Tính giá trị của biểu thức $\cos \frac{11\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12}$.

Bài tập 22. Tính giá trị của biểu thức $\sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{5\pi}{24}$ và $\sin \frac{7\pi}{8} \sin \frac{5\pi}{8}$.

Bài tập 23. Biến đổi thành tổng các biểu thức sau

a) $\sin 3x \cdot \sin x$.

b) $\sin 5x \cdot \cos 3x$.

c) $\sin \frac{3\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$.

d) $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{7\pi}{12}$.

e) $\sin(x + y) \cdot \cos(x - y)$.

f) $\sin(x + 30^\circ) \cdot \cos(x - 30^\circ)$.

g) $\sin 3x \cdot \cos x + \sin 4x \cdot \cos 2x$.

h) $\sin 2x \cdot \sin 6x - \cos x \cdot \cos 3x$.

i) $8 \cos x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$.

j) $4 \sin 2x \cdot \sin 5x \cdot \sin 7x - \sin 4x$.

Bài tập 24. Biến đổi thành tổng các biểu thức sau

a) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \frac{1}{2} \cos^2 x$.

b) $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos 2x$.

4.4 Công thức biến đổi tổng thành tích

Công thức cần nhớ:

a) $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$;

b) $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$;

c) $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$;

d) $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$.

Ví dụ 4. Tính $\sin \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}$.

Bài tập 25. Tính $\cos \frac{7\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}$.

Bài tập 26. Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

b) $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

c) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$.

d) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$.

Bài tập 27. Biến đổi thành tích

a) $\cos 3x + \cos x$.

b) $\sin 3x + \sin 2x$.

c) $\cos 4x - \cos x$.

d) $\sin 5x - \sin x$.

e) $1 + \sin 2x + \cos 2x$.

f) $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

g) $\cos 10x - \cos 8x - \cos 6x + 1$.

h) $\cos x + \cos y + \cos(x+y) + 1$.

Bài tập 28. Biến đổi thành tích các biểu thức sau

a) $\sqrt{3} - 2 \cos 2x$.

b) $\cos 3x + \cos x + 2 \cos 2x$.

c) $\sin 3x - 2 \sin 2x + \sin x$.

d) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

e) $\cos x + \sin 2x - \cos 3x$.

f) $\cos 5x + \cos 7x - \cos(\pi + 6x)$.

g) $\cos \left(\frac{\pi}{2} + 5x \right) + \sin x - \cos 3x$.

h) $\cos 7x + \sin 3x + \sin 2x - \cos 3x$.

i) $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x$.

j) $\cos 5x + 3 \cos 7x + 3 \cos 9x + \cos 11x$.

4.5 Bài tập**Bài tập 1.** Không dùng máy tính cầm tay, tính các giá trị lượng giác của các góc:

a) $\frac{5\pi}{12}$.

b) -55° .

Bài tập 2. Tính $\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right)$, $\cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$ biết $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.**Bài tập 3.** Tính các giá trị lượng giác của góc 2α , biết:

a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

b) $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$ và $\pi < \alpha < 2\pi$.

Bài tập 4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \alpha$;

b) $(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - \sin 2\alpha$.

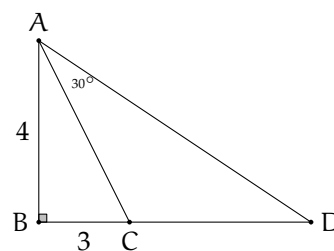
Bài tập 5. Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết:

a) $\cos 2\alpha = \frac{2}{5}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$;

b) $\sin 2\alpha = -\frac{4}{9}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$.

Bài tập 6. Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$.**Bài tập 7.**

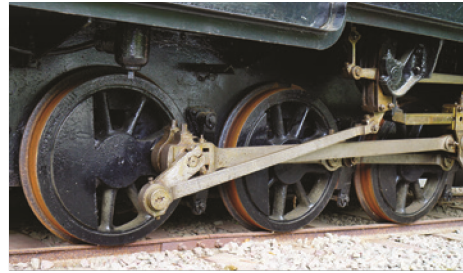
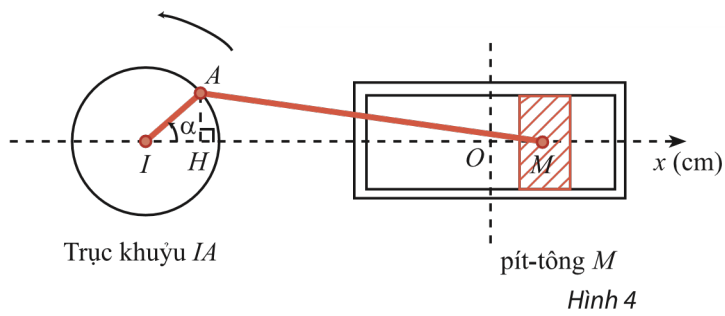
Trong hình bên, tam giác ABC vuông tại B và có hai cạnh góc vuông là $AB = 4$, $BC = 3$. Vẽ điểm D nằm trên tia đối của tia CB thỏa mãn $\widehat{CAD} = 30^\circ$. Tính $\tan \widehat{BAD}$, từ đó tính độ dài cạnh CD.



Bài tập 8. Trong Hình 4, pít-tông M của động cơ chuyển động tịnh tiến qua lại dọc theo xi-lanh làm quay trục khuỷu IA. Ban đầu I, A, M thẳng hàng. Cho α là góc quay của trục khuỷu, O là vị trí của pít-tông khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ và H là hình chiếu của A lên Ox. Trục khuỷu IA rất ngắn so với độ dài thanh truyền AM nên có thể xem như độ dài MH không đổi và gần bằng MA.

a) Biết $IA = 8$ cm, viết công thức tính tọa độ x_M của điểm M trên trục Ox theo α .

- b) Ban đầu $\alpha = 0$. Sau 1 phút chuyển động, $x_M = -3$ cm. Xác định x_M sau 2 phút chuyển động. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

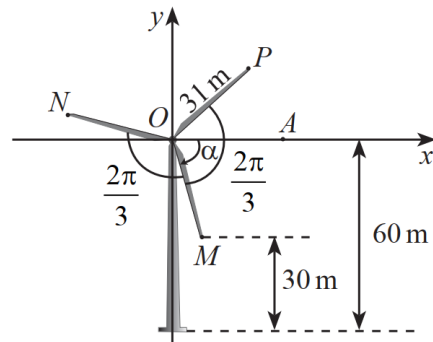


Bài tập 9. Trong Hình 5, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tua-bin gió. Biết các cánh quạt dài 31 m, độ cao của điểm M so với mặt đất là 30 m, góc giữa các cánh quạt là $\frac{2\pi}{3}$ và số đo góc (OA, OM) là α .

- a) Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$.
- b) Tính sin của các góc lượng giác (OA, ON) và (OA, OP) , từ đó tính chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét). Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Hình 5



Bài 5. Hàm số lượng giác và đồ thị

5.1 Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Khái niệm:

- Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathcal{D}$ được gọi là **hàm số chẵn** nếu với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = f(x)$.
- Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathcal{D}$ được gọi là **hàm số lẻ** nếu với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có $-x \in \mathcal{D}$ và $f(-x) = -f(x)$.

Chú ý:

- Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

Ví dụ 1. Xét tính chẵn, lẻ các hàm số sau

a) $y = x^2$;

b) $y = x^3 + x - 1$;

c) $y = x^4 - x^2 + 3$;

d) $y = \sqrt{x}$.

5.2 Hàm số tuần hoàn

Khái niệm:

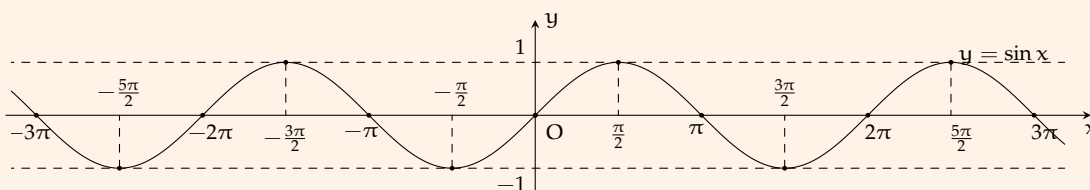
- Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định $\mathcal{D}$ được gọi là **hàm số tuần hoàn** nếu tồn tại một số T khác 0 sao cho với mọi $x \in \mathcal{D}$ ta có $x \pm T \in \mathcal{D}$ và $f(x + T) = f(x)$.
- Số T dương nhỏ nhất thoả mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là **chu kỳ** của hàm số tuần hoàn $y = f(x)$.

Chú ý:

- Đồ thị của hàm số tuần hoàn chu kỳ T được lặp lại trên từng đoạn giá trị của x có độ dài T .

5.3 Hàm số $y = \sin x$

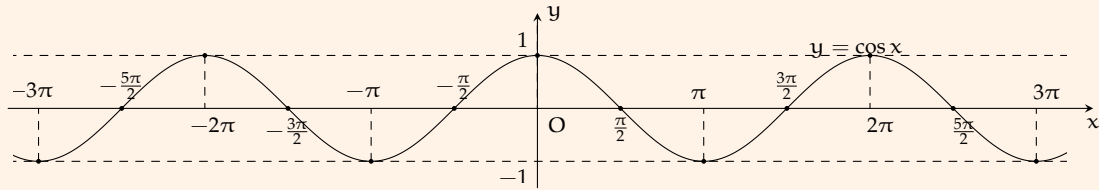
- Đồ thị



- Tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị $T = [-1; 1]$.
- Hàm số $y = f(x) = \sin x$ là hàm số lẻ nên đồ thị nhận gốc toạ độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = 2\pi$, nghĩa là $\sin(x + k2\pi) = \sin x$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

5.4 Hàm số $y = \cos x$

- Đồ thị



- Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị $T = [-1; 1]$.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung Oy làm trục đối xứng.
- Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = 2\pi$, nghĩa là $\cos(x + k2\pi) = \cos x$ với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

5.5 Bài tập

5.5.1 Tập xác định của hàm số

Lưu ý:

- Hàm số $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ xác định khi $Q(x) \neq 0$.
- Hàm số $y = \sqrt{f(x)}$ xác định khi $f(x) \geq 0$.
- Các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau

- a) $y = \sin \frac{1}{x-2}$, b) $y = \cos \sqrt{x-1}$, c) $y = \cos |x-1|$, d) $y = \sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,
- e) $y = \sin 3x$, f) $y = \cos \left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$, g) $y = \sin \left(\frac{3x+1}{x^2-1}\right)$, h) $y = \sin \sqrt{3x}$,
- i) $y = \frac{\sin x}{x^2-1}$, j) $y = \frac{\cos x}{x+1}$, k) $y = \frac{x^2+1}{x \sin x}$, l) $y = \frac{\sin x}{\cos(x-\pi)}$.

5.5.2 Tính chẵn lẻ của hàm số

Lưu ý: Tính chẵn, lẻ

- $\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D} \\ f(-x) = f(x), \forall x \in \mathcal{D} \end{cases}$ thì f là hàm số chẵn.
- $\begin{cases} \forall x \in \mathcal{D} \Rightarrow -x \in \mathcal{D} \\ f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathcal{D} \end{cases}$ thì f là hàm số lẻ.

Ví dụ 3. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = x \sin x$.

Bài tập 1. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

- a) $y = f(x) = 2 \cos 3x - 1$, b) $y = f(x) = x^3 + \sin x$,
- c) $y = f(x) = 3 \cos x + \sin^2 x$, d) $y = f(x) = \cos(x+1) + \cos(x-1)$.

5.5.3 Miền giá trị của hàm số

 **Lưu ý:** Miền giá trị

- Trên $\mathbb{R}$ ta có $-1 \leq \sin x, \cos x \leq 1$.
- Trên miền xác định, hàm số $y = \tan x, y = \cot x$ nhận giá trị trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 4. Tìm miền giá trị của hàm số $y = 2 \sin x - 3$.

Bài tập 2. Tìm miền giá trị của các hàm số sau

- a) $y = \sin 2x$, b) $y = 1 - \cos x$, c) $y = 2 \cos 3x$, d) $y = 2 \sin x - 1$,
e) $y = 2 + 3 \sin x$, f) $y = \sqrt{1 - \cos 4x}$, g) $y = \sin x + \cos x$, h) $y = 3 - 2 \cos^2 x$.

Bài tập 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

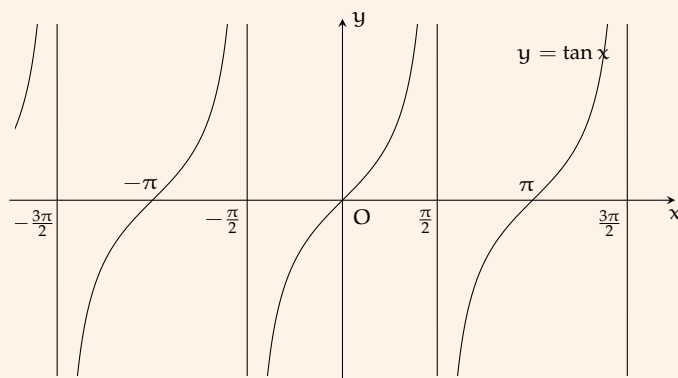
- a) $y = 3 + \sin x$, b) $y = 1 - 2 \sin x$, c) $y = 3 \cos x - 2$,
d) $y = 3 - 2|\sin 4x|$, e) $y = 3 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$, f) $y = \sqrt{2}(\sin x + \cos x)$.

Bài tập 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

- a) $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$, b) $y = \cos^2 x + \sin x + 1$, c) $y = 3 \cos x + 4 \sin x + 5$,
d) $y = 3 \sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x$, e) $y = 2 \cos(\sin x + \cos x) - 2$, f) $y = \frac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x - 2}$.

5.6 Hàm số $y = \tan x$

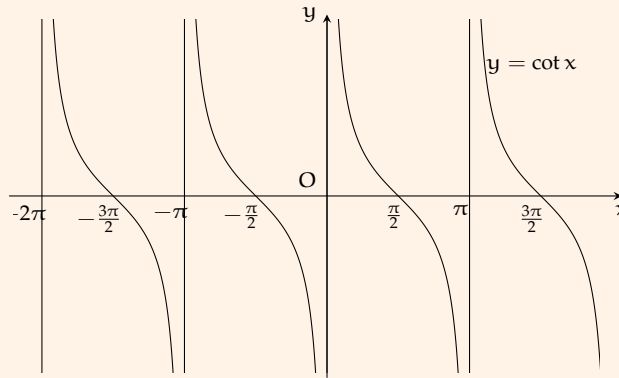
- Đồ thị



- Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, nghĩa là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
- Tập giá trị $T = \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ nên đồ thị của hàm số đối xứng qua gốc tọa độ O.
- Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \pi$.
- Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

5.7 Hàm số $y = \cot x$

- Đồ thị



- Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, nghĩa là $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Tập giá trị $T = \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ nên đồ thị của hàm số đối xứng qua gốc tọa độ O .
- Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \pi$.
- Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên các khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 5. Tìm tập xác định của các hàm số sau

- a) $y = \tan 2x$, b) $y = \cot 3x$, c) $y = \frac{\tan 2x}{1 + \cos^2 x}$, d) $y = \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{1 + \tan x}$,
- e) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, f) $y = \tan x + \cot 2x$, g) $y = \frac{\tan x - \cos x}{\sin x}$, h) $y = \frac{\cos 2x}{1 - \sin x} + \tan x$.
- i) $y = \frac{1}{\cos x}$; j) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; k) $y = \frac{1}{2 - \sin^2 x}$. l) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$.

Bài tập 6. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số lượng giác $y = \cos x$, $y = \tan x$.

Bài tập 7. Các hàm số dưới đây có là hàm số chẵn hay hàm số lẻ không?

- a) $y = 5 \sin^2 x + 1$; b) $y = \cos x + \sin x$; c) $y = \tan 2x$.

Bài tập 8. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và là hàm số lẻ. Xác định tính chẵn lẻ của hàm số $g(x)$ biết $g(x) = \frac{f(x)}{\cot x - 1} + \frac{f(x)}{\cot x + 1} - \cos 3x$.

Bài tập 9. Xét tính tuần hoàn của hàm số $y = \sin x$ và hàm số $y = \tan x$.

Bài tập 10. Chứng minh rằng các hàm số sau đều có tính chất $f(x + k\pi) = f(x)$ với $k \in \mathbb{Z}$

- a) $y = \cos 2x$, b) $y = \tan x$, c) $y = \cos^2 x$, d) $y = \sin 2x - 2 \tan x$.

Bài tập 11. Chứng minh các hàm số sau tuần hoàn với chu kỳ là π :

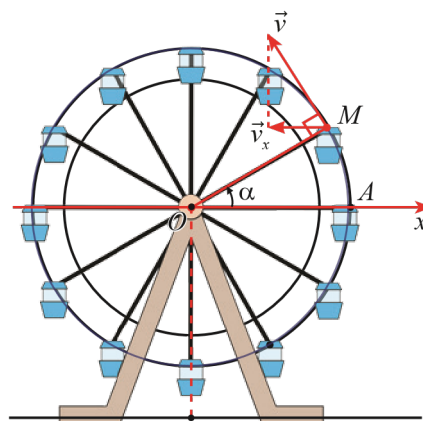
- a) $y = \sin 2x$, b) $y = \cot x$, c) $y = \cos 2x$, d) $y = \sin 2x + 3 \cos 2x$.

Bài tập 12. Nhiệt độ ngoài trời T (tính bằng $^{\circ}\text{C}$) vào thời điểm t giờ trong một ngày ở một thành phố được tính bởi công thức $T = 20 + 4 \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{5\pi}{6}\right)$. Để bảo quản các tác phẩm nghệ thuật, hệ thống điều hoà nhiệt độ của một bảo tàng sẽ được tự động bật khi nhiệt độ ngoài trời từ 22°C trở lên. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy xác định khoảng thời gian t trong ngày ($0 \leq t \leq 24$) hệ thống điều hoà được bật. (Theo <https://www.sciencedirect.com/science/article/>

Bài tập 13. Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \sin x$, xác định các giá trị $x \in [-\pi; \pi]$ thoả mãn $\sin x = \frac{1}{2}$.

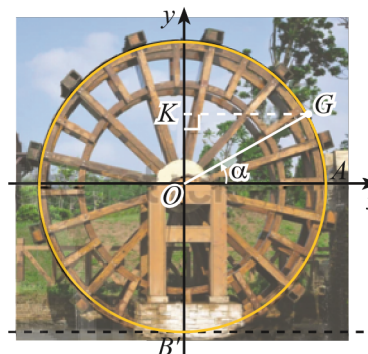
Bài tập 14. Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (Ox, OM)$ theo hàm số $v_x = 0,3 \sin \alpha$ (m/s) (Hình vẽ bên).

- Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x .
- Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng?

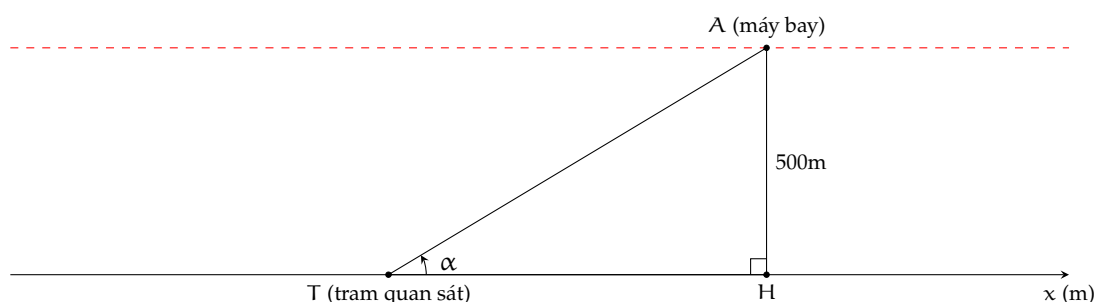


Bài tập 15. Khoảng cách từ tâm một guồng nước đến mặt nước và bán kính của guồng đều bằng 3 m. Xét gàu G của guồng. Ban đầu gàu G nằm ở vị trí A (Hình vẽ bên).

- Viết hàm số h biểu diễn chiều cao (tính bằng mét) của gàu G so với mặt nước theo góc $\alpha = (OA, OG)$.
- Guồng nước quay hết mỗi vòng trong 30 giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết ở các thời điểm t nào trong 1 phút đầu, khoảng cách của gàu đến mặt nước bằng 1,5 mét?

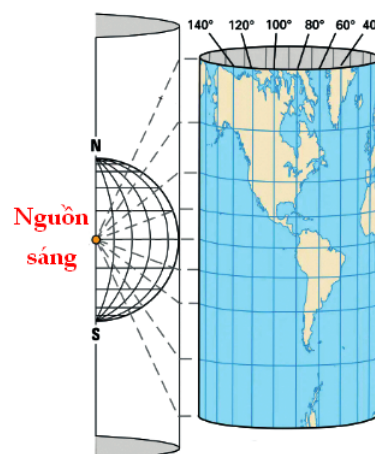


Bài tập 16. Trong hình vẽ bên dưới, một chiếc máy bay A bay ở độ cao 500 m theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H, α là góc lượng giác (Tx, TA) ($0 < \alpha < \pi$).



- Biểu diễn tọa độ x_H của điểm H trên trục Tx theo α .
- Dựa vào đồ thị hàm số cotang, hãy cho biết với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Bài tập 17. Trong Địa lí, phép chiếu hình trụ được sử dụng để vẽ một bản đồ phẳng như trong hình bên. Trên bản đồ phẳng lấy đường xích đạo làm trục hoành và kinh tuyến 0° làm trục tung. Khi đó tung độ của một điểm có vĩ độ φ° ($-90 < \varphi < 90$) được cho bởi hàm số $y = 20 \tan\left(\frac{\pi}{180} \varphi\right)$ (cm). Sử dụng đồ thị hàm số tang, hãy cho biết những điểm ở vĩ độ nào nằm cách xích đạo không quá 20 (cm) trên bản đồ. (Theo <https://geologyscience.com/geology/types-of-maps/>)



Bài 6. Phương trình lượng giác cơ bản

6.1 Phương trình tương đương

Khái niệm: Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

 **Lưu ý:**

- Để giải phương trình, ta thường biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các phép biến đổi tương đương. Ta có một số phép biến đổi tương đương thường sử dụng sau
 - Cộng hoặc trừ hai vế của phương trình với cùng một số hoặc cùng một biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.
 - Nhân hoặc chia hai vế của phương trình với cùng một số khác 0 hoặc cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0 mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.
- Để chỉ sự tương đương của các phương trình, người ta dùng kí hiệu “ $\Leftrightarrow$ ”.

Ví dụ 1. Phương trình $x^2 - 4 = 0$ tương đương với phương trình nào sau đây?

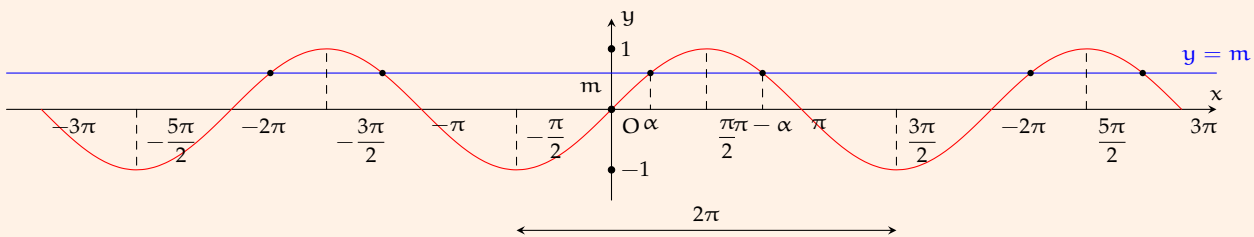
a) $2x^2 = 8$.

b) $x^2 - 4 + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2}$.

6.2 Phương trình $\sin x = m$

Xét phương trình $\sin x = m$.

- Điều kiện để phương trình có nghiệm $-1 \leq m \leq 1$.
- Nếu $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
- Nếu $\sin x = \sin \alpha^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \alpha^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.



 **Lưu ý:** Một số trường hợp đặc biệt

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Bài tập 1. Giải các phương trình sau

a) $\sin 2x = \sin 3x$.

b) $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$.

c) $\sin x = 0$.

d) $\sin x = 1$.

e) $\sin x = -1$.

f) $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

g) $\sin(3x + 2) = -\frac{3}{2}$.

h) $\sin(4x - 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

i) $\sin 5x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

j) $\sin(6x + 3) = -\frac{1}{2}$.

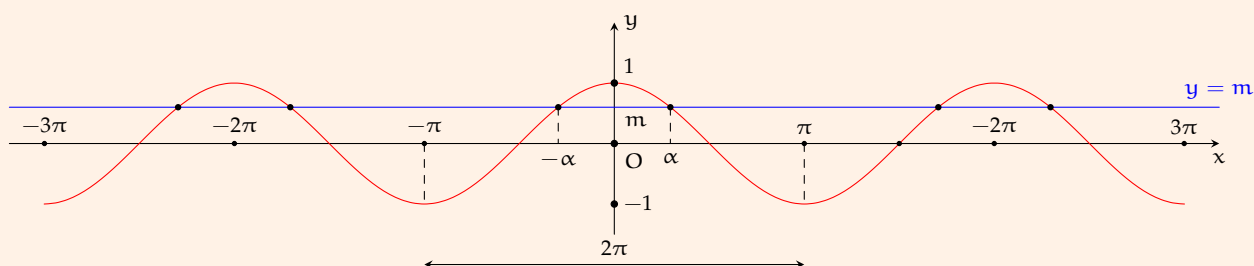
k) $\sin(7x - \sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

l) $\sin 8x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6.3 Phương trình $\cos x = m$

Xét phương trình $\cos x = m$.

- Điều kiện có nghiệm $-1 \leq m \leq 1$.
- Nếu $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$
- Nếu $\cos x = \cos \alpha^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha^\circ + k360^\circ \\ x = -\alpha^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$



Lưu ý: Một số trường hợp đặc biệt

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

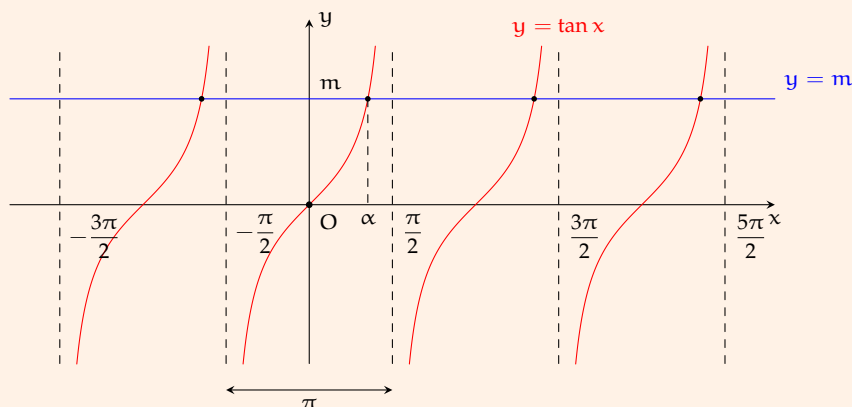
$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Bài tập 2. Giải các phương trình

- a) $\cos 2x = \cos(x + 60^\circ)$, b) $\cos 3x = \sin x$, c) $\cos x = -\frac{1}{2}$, d) $\cos 3x = \frac{1}{2}$,
e) $\cos(x + 10^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, f) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, g) $\cos(5x - 1) = 0$, h) $\cos(2x + 15^\circ) = 1$,
i) $\cos(x - 2) = -\frac{1}{2}$, j) $\cos 5x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, k) $\cos 7x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, l) $\cos(7x - \sqrt{2}) = -1$.

6.3.1 Phương trình $\tan x = m$

- Với mọi số thực m , phương trình $\tan x = m$ có nghiệm.
- Nếu $\tan x = \tan \alpha^\circ \Leftrightarrow x = \alpha^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$
- Nếu $\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

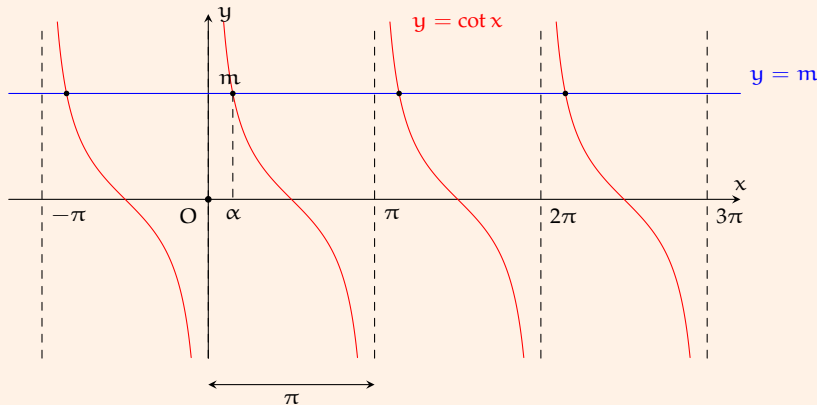


Bài tập 3. Giải các phương trình

a) $\tan 2x = \tan \frac{\pi}{11}$, b) $\tan x = 0$, c) $\tan x = 1$, d) $\tan x = \sqrt{3}$,
 e) $\tan 3x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, f) $\tan 5x = -1$, g) $\tan(4x + 5^\circ) = -\sqrt{3}$, h) $\tan(6x + 10^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

6.3.2 Phương trình $\cot x = m$

- Với mọi số thực m , phương trình $\cot x = m$ có nghiệm.
- Nếu $\cot x = \cot a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
- Nếu $\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = av + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.



Bài tập 4. Giải các phương trình

a) $\cot 3x = \cot \frac{\pi}{7}$, b) $\cot x = 0$, c) $\cot 3x = 1$, d) $\cot 4x = \sqrt{3}$,
 e) $\cot 5x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, f) $\cot(2x + 10^\circ) = -1$, g) $\cot x = -\sqrt{3}$, h) $\cot(3x - 1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

6.4 Giải phương trình lượng giác bằng máy tính cầm tay

Ta có thể giải phương trình lượng giác dạng $\sin x = m$, $\cos x = m$, $\tan x = m$ và $\cot x = m$ bằng máy tính cầm tay như trong ví dụ sau

Ví dụ 2. Sử dụng máy tính cầm tay để giải các phương trình sau

- a) $\sin x = -\frac{1}{2}$. Kết quả ghi theo đơn vị radian.
 b) $\cot x = 3$. Kết quả ghi theo đơn vị độ.

Lưu ý: Để giải phương trình $\cot x = m (m \neq 0)$, ta giải phương trình $\tan x = \frac{1}{m}$.

6.5 Bài tập luyện tập

Bài tập 5. Giải các phương trình

a) $\sin \left(x - \frac{\pi}{7} \right) = \sin \frac{2\pi}{7}$, b) $\sin 4x - \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 0$,
 c) $\cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = 0$, d) $2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{3} = 0$,
 e) $2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} = 0$, f) $2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{3} = 0$,
 g) $\sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + \sin x = 0$, h) $\sin \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) - \cos 2x = 0$,
 i) $\cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = 0$, j) $\sin \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) - \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$,

k) $\sin 3x = \sin (90^\circ - x),$

l) $\cos (3x + 45^\circ) = -\cos x,$

m) $\cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$

n) $\cos^2 x = 1.$

Bài tập 6. Giải các phương trình lượng giác sau

a) $\tan x = \tan 55^\circ.$

b) $\tan \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$

c) $\cot \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) = -1.$

d) $\cot 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

e) $\tan 2x = \tan \left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

f) $\cot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cot 3x.$

Bài tập 7. Giải các phương trình

a) $\sin 2x \cos 2x = 0.$

b) $\cos^2 x = \sin^2 x.$

c) $2 \cos^2 2x = 1.$

d) $8 \sin^3 x - 1 = 0.$

e) $3\sqrt{3} \tan^3 2x = 1.$

f) $3 \cos x = 1 + 4 \cos^3 x.$

g) $4 \sin^2 x - 1 = 0.$

h) $3 - 4 \cos^2 x = 0.$

Bài tập 8. Giải các phương trình

a) $4 \sin x \cos x \cos 2x = 0$

b) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

c) $(\sin x + \cos x)^2 - 1 = 0$

d) $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$

e) $(\cos x + 2)(2 \cos^2 x - \cos x - 1) = 0$

f) $\sin 2x + \sqrt{3} - 2 \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$

Bài tập 9. Giải các phương trình

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in [-\pi, \pi]$

b) $\sin \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right), x \in [0; \pi]$

Bài tập 10. Giải các phương trình

a) $\frac{\cos 2x}{\sin x} = 0.$

b) $\frac{\cos 2x}{\sin x} = 1.$

c) $\frac{\cos 3x}{\cos x} = 1.$

d) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0.$

Bài tập 11. Giải các phương trình

a) $\sin 2x \cos x = \cos x - \cos 2x \sin x.$

b) $\sin 4x \cos 3x = \sin x \cos 6x.$

c) $\cos 3x + \cos 7x = \sin 3x - \sin 7x.$

d) $\sin 3x - 4 \sin x \cos 2x = 0.$

e) $4\sqrt{3} \sin x \cos x \cos 2x = \sin 8x.$

f) $\sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0.$

Bài tập 12. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

a) $\cos (2x - 55^\circ) = 2m^2 + m,$

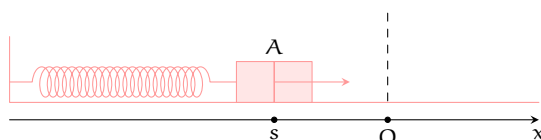
b) $m \cos x + 1 = 3 \cos x - 2m,$

c) $(4m - 1) \sin x + 2 = m \sin x - 3,$

d) $m(m + 1) \cos 2x = m^2 - m - 3 + m^2 \cos 2x.$

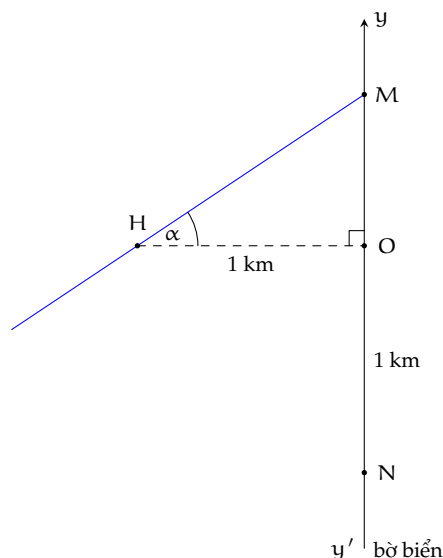
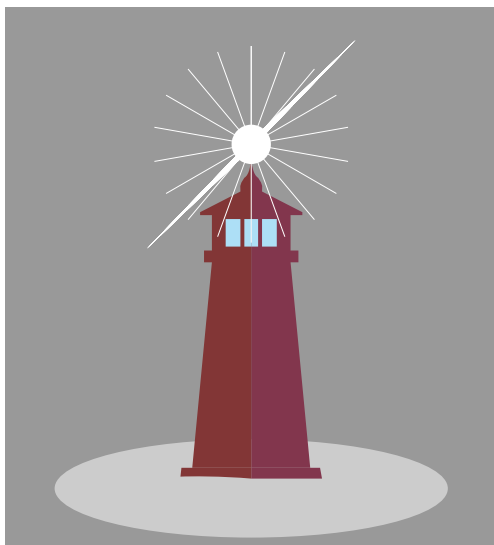
e) $\cos x = \frac{2m - 3}{4 - m},$

f) $\sin 2x - 1 = \frac{m + 1}{2m}.$

Bài tập 13. Tại các giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y = \cos x$ và $y = \sin x$ giao nhau?**Bài tập 14.** Trong hình dưới, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O. Tọa độ s (cm) của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10 \sin \left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$. Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3}$ cm ?(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)

Bài tập 15. Trong hình dưới, ngọn đèn trên hải đăng H cách bờ biển $y'y'$ một khoảng $HO = 1$ km. Đèn xoay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ $\frac{\pi}{10}$ rad/s và chiếu hai luồng ánh sáng về hai phía đối diện nhau. Khi đèn xoay, điểm M mà luồng ánh sáng của hải đăng rơi vào bờ biển chuyển động dọc theo bờ.

(Theo <https://www.mnhs.org/splitrock/learn/technology>)



- Ban đầu luồng sáng trùng với đường thẳng HO . Viết hàm số biểu thị tọa độ y_M của điểm M trên trục Oy theo thời gian t .
- Ngôi nhà N nằm trên bờ biển với tọa độ $y_N = -1$ (km). Xác định các thời điểm t mà đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà.

Bài 7. Bài tập cuối chương

7.1 Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Góc lượng giác nào tương ứng với chuyển động quay $3\frac{1}{5}$ vòng ngược chiều kim đồng hồ?

- A. $\frac{16\pi}{5}$. B. $\left(\frac{16}{5}\right)^\circ$. C. 1152° . D. 1152π .

Câu 2. Trong trường hợp nào dưới đây $\cos \alpha = \cos \beta$ và $\sin \alpha = -\sin \beta$?

- A. $\beta = -\alpha$. B. $\beta = \pi - \alpha$. C. $\beta = \pi + \alpha$. D. $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$.

Câu 3. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn. B. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
C. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số chẵn. D. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số chẵn.

Câu 4. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình lượng giác $\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ là

- A. $-\frac{\pi}{9}$. B. $-\frac{5\pi}{3}$. C. $-\frac{7\pi}{9}$. D. $-\frac{13\pi}{9}$.

Câu 5. Số nghiệm của phương trình $\tan x = 3$ trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{3}\right)$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 6. Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t) = 29 + 3 \sin \frac{\pi}{12}(t - 9)$$

với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là bao nhiêu độ C và vào lúc mấy giờ?

(Theo <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0168192385900139>)

- A. 32°C , lúc 15 giờ. B. 29°C , lúc 9 giờ. C. 26°C , lúc 3 giờ. D. 26°C , lúc 0 giờ.

7.2 Bài tập tự luận

Bài tập 1. Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 45 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều thuận. Sau 3 giây, quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

Bài tập 2. Cho $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính:

- a) $\sin \alpha$; b) $\sin 2\alpha$; c) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$.

Bài tập 3. Chứng minh đẳng thức lượng giác:

- a) $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$; b) $\cos^4 \alpha - \cos^4\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2\alpha$.

Bài tập 4. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin 2x = 0$ là bao nhiêu?

Bài tập 5. Giải các phương trình sau:

- a) $\sin 2x + \cos 3x = 0$ b) $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$; c) $\sin x + \sin 2x = 0$.

Bài tập 6. Độ sâu h (m) của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thủy triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0,8 \cos 0,5t + 4$.

(Theo <https://noc.ac.uk/files/documents/business/an-introduction-to-tidalmodelling.pdf>)

- a) Độ sâu của nước vào thời điểm $t = 2$ là bao nhiêu mét?
b) Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu 3,6 m để có thể di chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số côsin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thủy triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thủy. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Bài tập 7. Cho vận tốc v (cm/s) của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức $v = -3 \sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right)$.

(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)

Xác định các thời điểm t mà tại đó:

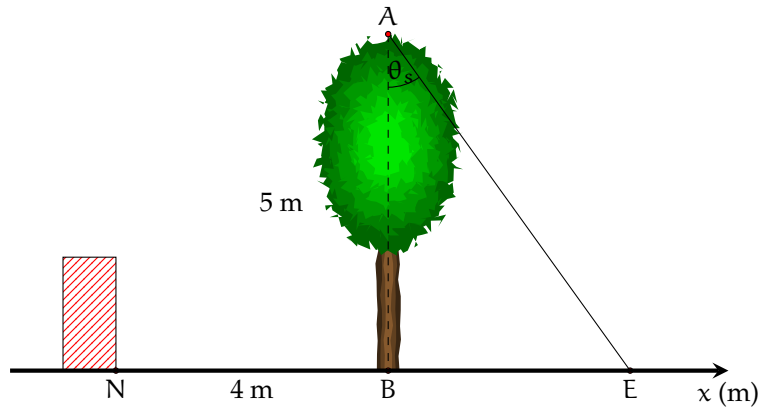
- a) Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất;
b) Vận tốc con lắc bằng 1,5 cm/s.

Bài tập 8. Trong hình vẽ, cây xanh AB nằm trên đường xích đạo được trồng vuông góc với mặt đất và có chiều cao 5 m. Bóng của cây là BE. Vào ngày xuân phân và hạ phân, điểm E di chuyển trên đường thẳng Bx. Góc thiên đỉnh $\theta_s = (\overline{AB}, \overline{AE})$ phụ thuộc vào vị trí của Mặt Trời và thay đổi theo thời gian trong ngày theo công thức

$$\theta_s(t) = \frac{\pi}{12}(t - 12) \text{ rad}$$

với t là thời gian trong ngày (theo đơn vị giờ, $6 < t < 18$).

(Theo <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/solar-hour-angle>)



- a) Viết hàm số biểu diễn toạ độ của điểm E trên trục Bx theo t.
b) Dựa vào đồ thị hàm số tang, hãy xác định các thời điểm mà tại đó bóng cây phủ qua vị trí tường rào N biết N nằm trên trục Bx với toạ độ là $x_N = -4$ (m). Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

- | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|
| 1. C | 2. A | 3. B | 4. A | 5. B | 6. C |
|------|------|------|------|------|------|

DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG. CẤP SỐ NHÂN

Bài 1. Dãy số

1.1 Dãy số là gì?

Khái niệm: Hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (hay gọi tắt là dãy số), nghĩa là

$$u : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n = u(n).$$

Dãy số trên được kí hiệu là (u_n) . Dạng khai triển của dãy số (u_n) là: $u_1; u_2; \dots; u_n; \dots$

 Lưu ý:

- $u_1 = u(1)$ gọi là số hạng đầu, $u_n = u(n)$ gọi là số hạng thứ n (hay số hạng tổng quát) của dãy số.
- Nếu $u_n = C$ với mọi n , ta nói (u_n) là dãy số không đổi.

Ví dụ 1. Cho hàm số:

$$u : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto u(n) = n^2.$$

Hàm số trên có là dãy số hay không? Nếu có, hãy tìm số hạng thứ nhất, thứ hai, thứ ba và số hạng tổng quát của dãy số.

Ví dụ 2. Cho hàm số:

$$v : \{1; 2; 3; 4; 5\} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto v(n) = 2n.$$

Tính $v(1), v(2), v(3), v(4), v(5)$.

Khái niệm: Hàm số u xác định trên tập hợp $M = \{1; 2; 3; \dots; m\}$ thì được gọi là một dãy số hữu hạn. Dạng khai triển của dãy số này là $u_1, u_2, \dots, u_m$, trong đó u_1 là số hạng đầu và u_m là số hạng cuối.

Ví dụ 3. Dãy gồm 10 số tự nhiên lẻ đầu tiên $1; 3; 5; \dots; 19$ có phải là dãy số hữu hạn không? Nếu có, tìm số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số.

Bài tập 1. Cho dãy số:

$$u : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n = n^3.$$

- Hãy cho biết dãy số trên là hữu hạn hay vô hạn.
- Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số đã cho.

Bài tập 2. Cho 5 hình tròn theo thứ tự có bán kính $1; 2; 3; 4; 5$.

- Viết dãy số chỉ diện tích của 5 hình tròn này.
- Tìm số hạng đầu và số hạng cuối của dãy số trên.

1.2 Cách xác định dãy số

Khái niệm: Thông thường một dãy số có thể được cho bằng các cách sau:

- Cách 1: Liệt kê các số hạng (với các dãy số hữu hạn).
- Cách 2: Cho công thức của số hạng tổng quát u_n .
- Cách 3: Cho hệ thức truy hồi, nghĩa là
 - Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu tiên);
 - Cho một công thức tính u_n theo u_{n-1} (hoặc theo vài số hạng đứng ngay trước nó).
- Cách 4: Cho bằng cách mô tả.

Ví dụ 4. Cho các dãy số (a_n) , (b_n) , (c_n) , (d_n) được xác định như sau:

- $a_1 = 0; a_2 = 1; a_3 = 2; a_4 = 3; a_5 = 4$.
- $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_n = c_{n-1} + 1 \end{cases} \quad (n \geq 2)$.
- $b_n = 2n$.
- d_n là chu vi của đường tròn có bán kính n .

Tìm bốn số hạng đầu tiên của các dãy số trên.

Ví dụ 5. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n-1}{3n+1}$.

- Tìm ba số hạng đầu tiên.
- Tính u_{50} và u_{99} .

Ví dụ 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases} \quad (n \geq 3)$. Tính u_5 .

Bài tập 3. Hãy viết 3 số hạng đầu của dãy số (u_n) cho bởi:

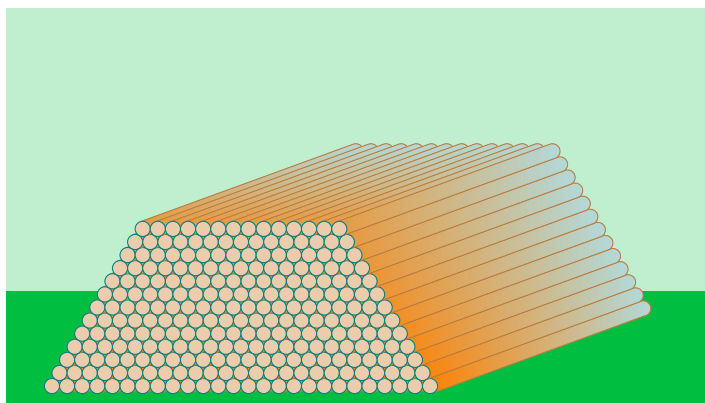
- $u_n = \frac{n + (-1)^n}{2n + 1}$.
- $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
- $(u_n): \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$.
- $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$.

Bài tập 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases} \quad (n \geq 1)$.

- Chứng minh $u_2 = 2 \cdot 3; u_3 = 2^2 \cdot 3; u_4 = 2^3 \cdot 3$.
- Dự đoán công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Bài tập 5. Một chồng cột gỗ được xếp thành các lớp, hai lớp liên tiếp hơn kém nhau 1 cột gỗ (Hình vẽ). Gọi u_n là số cột gỗ nằm ở lớp thứ n tính từ trên xuống và cho biết lớp trên cùng có 14 cột gỗ. Hãy xác định dãy số (u_n) bằng hai cách:

- Viết công thức số hạng tổng quát u_n .
- Viết hệ thức truy hồi.



1.3 Dãy số tăng, dãy số giảm

Ví dụ 7. Cho hai dãy số (a_n) và (b_n) được xác định như sau: $a_n = 3n + 1$; $b_n = -5n$.

a) So sánh a_n và a_{n+1} , $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) So sánh b_n và b_{n+1} , $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Khái niệm: Cho dãy số (u_n) ,

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu $u_{n+1} > u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu $u_{n+1} < u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 8. Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau

a) (a_n) với $a_n = \frac{1}{n}$;

b) (b_n) với $b_n = n^2$;

c) (c_n) với $c_n = (-2)^n$.

Ví dụ 9. Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau

a) (a_n) với $a_n = \frac{n}{n+1}$;

b) (b_n) với $b_n = n - n^2$.

Bài tập 6. Xét tính tăng, giảm của các dãy số sau

a) (u_n) với $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$;

b) (x_n) với $x_n = \frac{n+2}{4^n}$;

c) (t_n) với $t_n = (-1)^n \cdot n^2$.

Bài tập 7. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) có số hạng tổng quát:

a) $u_n = n^2 + 3n$.

b) $u_n = 2n^3 - 5n + 1$.

c) $u_n = n - 4n^2$.

d) $u_n = \frac{n}{n^2+2}$.

e) $u_n = n^3 - 3n^2 - 7$.

f) $u_n = \frac{n^2+n+1}{2n^2+1}$.

Bài tập 8. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) có số hạng tổng quát:

a) $u_n = \frac{n+1}{n}$.

b) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$.

c) $u_n = \frac{5n-1}{2n+3}$.

d) $u_n = \frac{n^2+1}{n}$.

e) $u_n = \frac{n^2+n+1}{n+1}$.

f) $u_n = \frac{-n^2+5n+2}{3n+1}$.

Bài tập 9. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) có số hạng tổng quát

a) $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

b) $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$.

c) $u_n = 3^n - n$.

d) $u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot n$.

e) $u_n = \frac{\sqrt{n}}{3^n}$.

f) $u_n = \frac{3^n}{n^2}$.

g) $u_n = \frac{n+1}{3^n}$.

h) $u_n = \frac{n^2}{4^n}$.

i) $u_n = \frac{2^n-1}{2^n+1}$.

Bài tập 10. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) sau

a) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

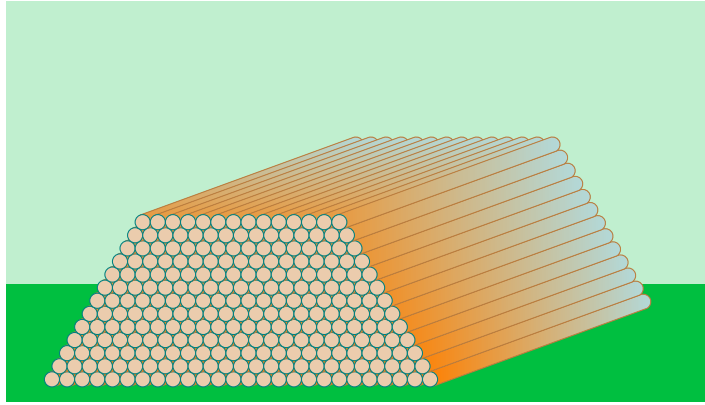
b) $u_n = n - \sqrt{n^2-1}$.

c) $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-1}{n}$.

Bài tập 11. Với giá trị nào của a thì dãy số $u_n = \frac{na+2}{n+1}$ là dãy số tăng? dãy số giảm?

Bài tập 12. Một chồng cột gỗ được xếp thành các lớp, hai lớp liên tiếp hơn kém nhau 1 cột gỗ.

- a) Gọi $u_1 = 25$ là số cột gỗ có ở hàng dưới cùng của chồng cột gỗ, u_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ dưới lên trên. Xét tính tăng, giảm của dãy số này.
- b) Gọi $v_1 = 14$ là số cột gỗ có ở hàng trên cùng của chồng cột gỗ, v_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ trên xuống dưới. Xét tính tăng, giảm của dãy số này.



1.4 Dãy số bị chặn

Khái niệm:

a) Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho

$$u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho

$$u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

c) Dãy số (u_n) được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, nghĩa là tồn tại các số M và m sao cho

$$m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Ví dụ 10. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n}$. So sánh các số hạng của dãy số với 0 và 1.

Ví dụ 11. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{2^n}$.

Ví dụ 12. Xét tính bị chặn của các dãy số sau

a) (a_n) với $a_n = \cos \frac{\pi}{n}$;

b) (b_n) với $b_n = \frac{n}{n+1}$.

Bài tập 13. Xét tính bị chặn của các dãy số (u_n) biết

a) $u_n = \sin n + \cos n$. b) $u_n = (-1)^n + \cos n$. c) $u_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n$. d) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

e) $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$. f) $u_n = \frac{n+4}{2n+1}$. g) $u_n = \frac{n^2+2n}{n^2+n+1}$. h) $u_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$.

1.5 Bài tập

Bài tập 1. Tìm u_2, u_3 và dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n của dãy số: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \end{cases} (n \geq 1).$

Bài tập 2. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$. Tìm u_1, u_2, u_3 và dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n .

Bài tập 3. Xét tính tăng, giảm của dãy số (y_n) với $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Bài tập 4. Xét tính bị chặn của các dãy số sau

a) (a_n) với $a_n = \sin^2 \frac{n\pi}{3} + \cos \frac{n\pi}{4}$;

b) (u_n) với $u_n = \frac{6n-4}{n+2}$.

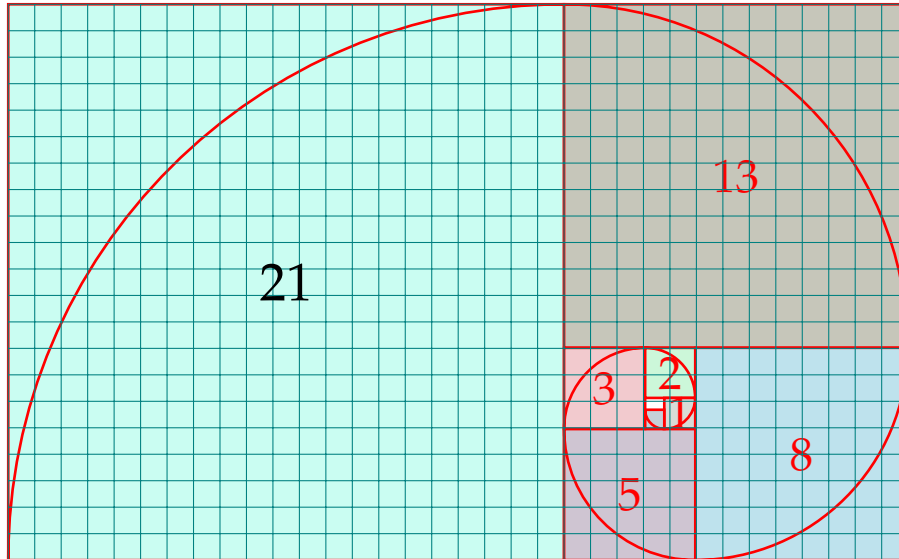
Bài tập 5. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$. Chứng minh (u_n) là dãy số tăng và bị chặn.

Bài tập 6. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{na+2}{n+1}$. Tìm giá trị của a để

a) (u_n) là dãy số tăng;

b) (u_n) là dãy số giảm.

Bài tập 7. Trên lưới ô vuông, mỗi ô cạnh 1 đơn vị, người ta vẽ 8 hình vuông và tô màu khác nhau như Hình vẽ. Tìm dãy số biểu diễn độ dài cạnh của 8 hình vuông đó từ nhỏ đến lớn. Có nhận xét gì về dãy số trên?



Bài 2. Cấp số cộng

2.1 Cấp số cộng

Khái niệm: Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hoặc hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số d không đổi, nghĩa là:

$$u_{n+1} = u_n + d \quad \text{với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Số d được gọi là **công sai** của cấp số cộng.

Ví dụ 1. Tìm cấp số cộng trong mỗi dãy số sau

a) 5; 10; 15; 20; 25; 30.

b) 1; 2; 4; 8.

c) 7; 7; 7; 7; 7.

Ví dụ 2. Cho cấp số cộng 3; 6; 9; 12; ... Tìm số hạng đầu, công sai và u_5 .

Ví dụ 3. Chứng minh mỗi dãy số sau là cấp số cộng. Xác định số hạng đầu và công sai của mỗi cấp số cộng đó.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 2n + 1$.

b) Dãy số (v_n) với $u_n = -3n + 5$.

Ví dụ 4. Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng. Tính b theo a và c .

Công thức cần nhớ: Nếu (u_n) là cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \quad (k \geq 2).$$

Bài tập 1. Chứng minh mỗi dãy số sau là cấp số cộng. Xác định công sai của mỗi cấp số cộng đó.

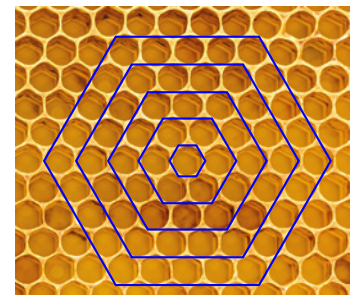
a) 3; 7; 11; 15; 19; 23.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = 9n - 9$.

c) Dãy số (v_n) với $v_n = an + b$, trong đó a và b là các hằng số.

Bài tập 2. Số đo ba góc của một tam giác vuông lập thành cấp số cộng. Tìm số đo ba góc đó.

Bài tập 3. Mặt cắt của một tổ ong có hình lưới tạo bởi các ô hình lục giác đều. Từ một ô đầu tiên, bước thứ nhất, các ong thợ tạo ra vòng 1 gồm 6 ô lục giác; bước thứ hai, các ong thợ tạo ra vòng 2 gồm 12 ô bao quanh vòng 1; bước thứ 3, các ong thợ tạo ra vòng 3 gồm 18 ô bao quanh vòng 2; cứ thế tiếp tục. Số ô trên các vòng theo thứ tự có tạo thành cấp số cộng không? Nếu có tìm công sai của cấp số cộng này.



2.2 Số hạng tổng quát của cấp số cộng

Công thức cần nhớ: Nếu một cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức

$$u_n = u_1 + (n - 1)d, \quad n \geq 1.$$

Ví dụ 5. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công sai $d = 9$.

Bài tập 4. Tìm số hạng tổng quát của các cấp số cộng sau

a) Cấp số cộng (a_n) có $a_1 = 5$ và $d = -5$;

b) Cấp số cộng (b_n) có $b_1 = 2$ và $b_{10} = 20$.

Bài tập 5. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng (c_n) có $c_4 = 80$ và $c_6 = 40$.

2.3 Tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng

Công thức cần nhớ: Giả sử (u_n) là một cấp số cộng có công sai d . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, khi đó

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \quad \text{hay} \quad S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}.$$

Ví dụ 6. Tính các tổng sau

- Tính tổng của 100 số nguyên dương đầu tiên.
- Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 + u_6 = 20$. Tính tổng 9 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.
- Cho cấp số cộng (v_n) có $S_3 = -3$ và $S_5 = -15$. Tính S_{50} .

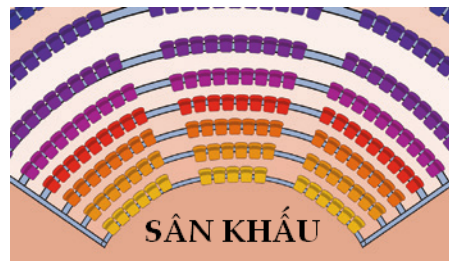
Bài tập 6. Tính tổng sau

- Tính tổng của 50 số tự nhiên chẵn đầu tiên.
- Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Tính tổng 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.
- Cho cấp số cộng (v_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$. Tính S_{20} .

Bài tập 7.

Một rạp hát có 20 hàng ghế xếp theo hình quạt. Hàng thứ nhất có 17 ghế, hàng thứ hai có 20 ghế, hàng thứ ba có 23 ghế, ... cứ thế tiếp tục cho đến hàng cuối cùng.

- Tính số ghế có ở hàng cuối cùng.
- Tính tổng số ghế có ở trong rạp.



2.4 Bài tập

Bài tập 1. Chứng minh dãy số hữu hạn sau là cấp số cộng: $1; -3; -7; -11; -15$.

Bài tập 2. Cho (u_n) là cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 4$ và công sai $d = -10$. Viết công thức số hạng tổng quát u_n .

Bài tập 3. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -3$ và công sai $d = 2$.

- Tìm u_{12} .
- Số 195 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số cộng đó?

Bài tập 4. Cho cấp số cộng có $u_6 = -5; d = 3$

- Tìm u_1, u_{10}, u_{21} .
- Số hạng thứ mấy bằng 25.
- Tính tổng 10 số hạng đầu tiên.
- Tính công thức số hạng tổng quát u_n theo n .
- Tính tổng n số hạng đầu tiên theo n .

Bài tập 5. Trong các dãy số sau đây, đã số nào là cấp số cộng? Tìm số hạng đầu và công sai của nó.

- $u_n = 3 - 4n$;
- $u_n = \frac{n}{2} - 4$;
- $u_n = 5^n$;
- $u_n = \frac{9 - 5n}{3}$.

Bài tập 6. Cho cấp số cộng (u_n)

- $-6; -\frac{14}{3}; -\frac{10}{3}; \dots$ Tìm u_{25}, S_{10} .
- $\sqrt{2} + 1; 2; 3 - \sqrt{2}; \dots$ Tìm u_{10}, S_{12} .

Bài tập 7. Hãy tính:

- Tổng 23 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) có $u_2 + u_{22} = 60$.
- Tổng 22 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) có $u_5 + u_{18} = 100$.

c) Tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) có $S_6 = 12$ và $S_{12} = 6$.

Bài tập 8. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{cases} u_3 - u_1 = 20 \\ u_2 + u_5 = 54; \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} u_2 + u_3 = 0 \\ u_2 + u_5 = 80; \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} u_5 - u_2 = 3 \\ u_8 \cdot u_3 = 24. \end{cases} \end{array}$$

Bài tập 9. Tìm số hạng đầu tiên và công sai của các cấp số cộng sau, biết:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \begin{cases} u_3 = -15 \\ u_{14} = 18 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_2 + u_5 = 7 \end{cases} & \text{c)} \begin{cases} S_4 = 15 \\ S_7 = 12 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases} \\ \text{e)} \begin{cases} u_6 = 8 \\ u_2^2 + u_4^2 = 16 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} u_2 + u_3 = -4 \\ u_1^2 + u_5^2 = 50 \end{cases} & \text{g)} \begin{cases} u_1 + u_3 + u_5 = -12 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = 8 \end{cases} & \text{h)} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 36 \end{cases} \end{array}$$

Bài tập 10. Hãy viết thêm 6 số xen giữa hai số 3 và 24 để được cấp số cộng tăng có 8 số hạng.

Bài tập 11. Cho cấp số cộng có 7 số hạng với công sai dương và số hạng thứ 4 bằng 11. Hãy tìm các số hạng còn lại của cấp số cộng đó biết hiệu của số hạng thứ 3 và số hạng thứ 5 bằng 6.

Bài tập 12. Số đo 3 góc của một tam giác vuông ABC lập thành một cấp số cộng. Hãy tìm 3 góc đó.

Bài tập 13. Tìm 3 cạnh của một tam giác vuông, biết chúng tạo thành một cấp số cộng và tam giác đó có chu vi là 60 đơn vị.

Bài tập 14. Chu vi của một đa giác là 158cm và số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 3$ cm. Biết độ dài cạnh lớn nhất của đa giác là 44cm. Tìm số cạnh của đa giác đó.

Bài tập 15. Tìm 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 14 và tổng bình phương của chúng bằng 94.

Bài tập 16. Tìm 5 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 25 và tổng bình phương của chúng bằng 165.

Bài tập 17. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai d . Chứng minh rằng:

$$\begin{array}{l} \text{a)} u_n - u_m = (n - m)d \text{ với } n, m \in \mathbb{N}^*. \\ \text{b)} } u_n + u_m = u_k + u_r, \text{ biết } n + m = k + r \text{ biết } (n, m, k, r \in \mathbb{N}^*). \end{array}$$

Bài tập 18. Cho 3 số a, b, c theo thứ tự lập thành 1 cấp số cộng. Chứng minh:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} a^2 + 8bc = (2b + c)^2. & \text{b)} a^2 + 2bc = c^2 + 2ab. \\ \text{c)} } 3(a^2 + b^2 + c^2) = 6(a - b)^2 + (a + b + c)^2. \end{array}$$

Bài tập 19. Cho a, b, c là 3 số dương. Chứng minh rằng:

$$\begin{array}{l} \text{a)} a^2, b^2, c^2 \text{ lập thành một cấp số cộng} \Leftrightarrow \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \text{ lập thành một cấp số cộng.} \\ \text{b)} } a, b, c \text{ lập thành một cấp số cộng} \Rightarrow a^2(b+c), b^2(c+a), c^2(a+b) \text{ lập thành một cấp số cộng.} \end{array}$$

Bài tập 20. Tìm x biết $2 + 5 + 8 + \dots + x = 950$ và là một số hạng của cấp số cộng: $2, 5, 8, \dots, x, \dots$

Bài tập 21. Giữa hai số -23 và 40 hãy đặt thêm 8 số nữa để được một cấp số cộng (u_n) . Tìm n để $\sqrt{2 - u_n} \leq \sqrt{11}$.

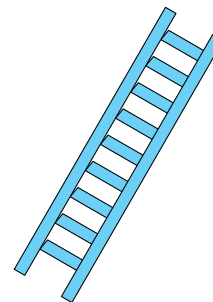
Bài tập 22. Cho cấp số cộng (u_n) , biết $S_n = 4n^2 - 3n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm n để $S_n - u_n \leq 7$.

Bài tập 23. Biết dãy số $1, a, b$ là cấp số cộng có công sai d_1 và dãy số $1, a^2, b^2 - 2$ cũng là cấp số cộng có công sai d_2 . Tính: $d_1 + d_2$.

Bài tập 24. Cho một hình vuông có cạnh bằng 1, người ta nối trung điểm các cạnh liên tiếp để được một hình vuông, tiếp tục làm như thế đối với hình vuông mới (như hình vẽ bên dưới). Tính tổng diện tích các hình vuông liên tiếp.

Bài tập 25. Một người muốn mua một thanh gỗ đủ để cắt ra làm các thanh ngang của một cái thang. Biết rằng chiều dài các thanh ngang của cái thang đó (từ bậc dưới cùng) lần lượt là 45 cm, 43 cm, 41 cm, ..., 31 cm.

- Cái thang đó có bao nhiêu bậc?
- Tính chiều dài thanh gỗ mà người đó cần mua, giả sử chiều dài các mối nối (phần gỗ bị cắt thành mùn cưa) là không đáng kể.



Bài tập 26. Khi một vận động viên nhảy dù nhảy ra khỏi máy bay, giả sử quãng đường người ấy rơi tự do (tính theo feet) trong mỗi giây liên tiếp theo thứ tự trước khi bung dù lần lượt là: 16; 48; 80; 112; 144; ... (các quãng đường này tạo thành cấp số cộng).

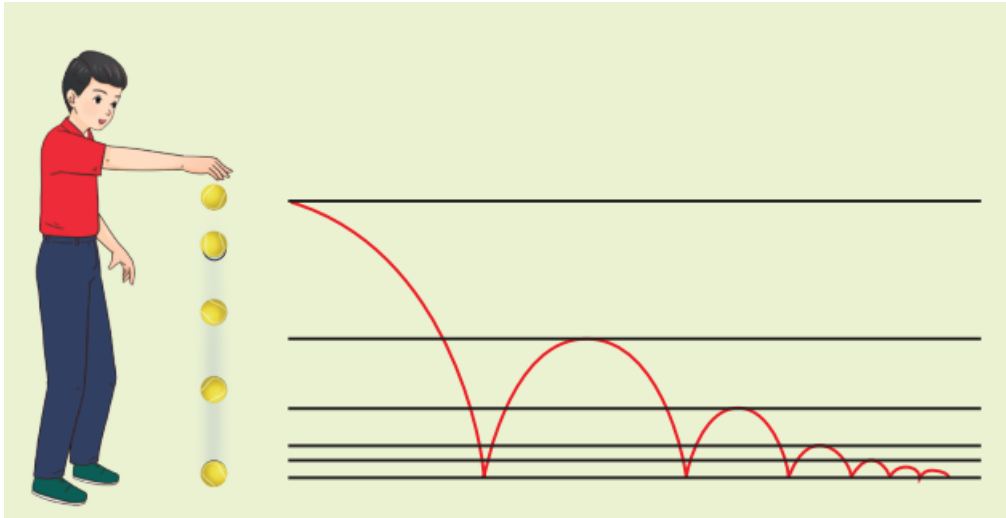
- Tính công sai của cấp số cộng trên.
- Tính tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên.



Bài tập 27. Ở một loài thực vật lưỡng bội, tính trạng chiều cao cây do hai gene không alen là A và B cùng quy định theo kiểu tương tác cộng gộp. Trong kiểu gene nếu cứ thêm một alen trội A hay B thì chiều cao cây tăng thêm 5 cm. Khi trưởng thành, cây thấp nhất của loài này với kiểu gene aabb có chiều cao 100 cm. Hỏi cây cao nhất với kiểu gene AABB có chiều cao bao nhiêu?

Bài 3. Cấp số nhân

Từ khóa: Cấp số nhân; Công bội; Tổng n số hạng đầu tiên



- Một quả bóng rơi từ một vị trí có độ cao 120 cm. Khi chạm đất, nó luôn nảy lên độ cao bằng một nửa độ cao của lần rơi trước đó.
- Gọi $u_1 = 120$ là độ cao của lần rơi đầu tiên và $u_2; u_3; \dots; u_n; \dots$ là độ cao của các lần rơi kế tiếp. Tìm 5 số hạng đầu tiên của dãy (u_n) và tìm điểm đặc biệt của dãy số đó.

3.1 Cấp số nhân

Bài toán mở đầu:

- Tính thương của hai số hạng liên tiếp trong dãy số: 2; 4; 8; 16; 32; 64.
- Tìm điểm giống nhau của các dãy số sau:
 - 3; 6; 12; 24; 48.
 - $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}$.
 - $2; -6; 18; -54; 162; -486$.

Khái niệm: Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số q không đổi, nghĩa là

$$u_{n+1} = u_n \cdot q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$

Số q được gọi là **công bội** của cấp số nhân.

Ví dụ 1. Tìm số hạng đầu và công bội của các cấp số nhân sau:

- 3; 6; 12; 24; 48; ...;
- $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$;
- 9; 9; 9; 9; 9; ...

Ví dụ 2. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân? Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

- 1; 11; 121; 12321; 1234321;
- $1; -1; 1; -1; 1$;
- 4; 8; 12; 16.

Ví dụ 3. Cho cấp số nhân: 1; 10; 100; 1000; 10000. Biểu diễn số hạng 10 và 100 theo hai số hạng kề nó.

Lưu ý: Chú ý: Dãy số (u_n) là cấp số nhân thì $u_n^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1}$ với $n \geq 2$.

Bài tập 1. Trong các dãy số (u_n) dưới đây, dãy số nào là một cấp số nhân

- $u_n = 3(-2)^n$
- $u_{n+1} = 2u_n$
- $u_n = 4^{n+1}$
- $u_n = \frac{n}{3^n}$

Công thức cần nhớ: Giả sử (u_n) là một cấp số nhân có công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, khi đó

$$S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

 **Lưu ý:** Chú ý: Khi $q = 1$ thì $S_n = n \cdot u_1$.

Ví dụ 5. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 2$.

Bài tập 14. Tính tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) trong các trường hợp sau:

a) $u_1 = 10^5, q = 0,1, n = 5$;

b) $u_1 = 10, u_2 = -20, n = 5$.

Bài tập 15. Trong bài toán ở đầu bài học, tính tổng các độ cao của quả bóng sau 10 lần rơi đầu tiên.

3.4 Bài tập

Bài tập 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân?

a) $u_n = 3(-2)^n$;

b) $u_n = (-1)^{n+1} \cdot 7^n$;

c) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3. \end{cases}$

Bài tập 2. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) , biết:

a) $\begin{cases} u_5 - u_1 = 15 \\ u_4 - u_2 = 6; \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325. \end{cases}$

Bài tập 3.

a) Số đo bốn góc của một tứ giác lập thành cấp số nhân. Tìm số đo của bốn góc đó biết rằng số đo của góc lớn nhất gấp 8 lần số đo của góc nhỏ nhất.

b) Viết sáu số xen giữa các số -2 và 256 để được cấp số nhân có tám số hạng. Nếu viết tiếp thì số hạng thứ 15 là bao nhiêu?

Bài tập 4. Ba số $\frac{2}{b-a}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b-c}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Bài tập 5. Tính các tổng sau:

a) $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}$;

b) $S_n = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99 \dots 9}_{n \text{ chữ số } 9}$.

Bài tập 6. Số đo 4 góc của một tứ giác lập thành một cấp số nhân. Hãy tìm 4 góc đó biết rằng số đo của góc lớn nhất gấp 8 lần số đo của góc bé nhất.

Bài tập 7. Tìm 4 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng tổng 3 số hạng đầu là $\frac{148}{9}$, đồng thời theo thứ tự đó chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng.

Bài tập 8. Một cấp số cộng và một cấp số nhân có số hạng thứ nhất bằng 5, số hạng thứ 2 của cấp số cộng lớn hơn số hạng thứ 2 của cấp số nhân là 10, còn các số hạng thứ 3 bằng nhau. Tìm các cấp số đó.

Bài tập 9. Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Đồng thời chúng lần lượt là số hạng đầu, số hạng thứ 3 và số hạng thứ 9 của một cấp số cộng. Hãy tìm 3 số đó, biết rằng tổng của chúng bằng 13.

Bài tập 10. Cho ba số x, y, z theo thứ tự lập thành cấp số nhân và có tổng là 26. Nếu cộng thêm lần lượt 1, 6, 3 cho ba số thì 3 số mới theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm ba số x, y, z .

Bài tập 11. Cho a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng:

a) $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$

b) $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$

c) $(ab + bc + ca)^3 = abc(a + b + c)^3$

d) $a^2b^2c^2 \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) = a^3 + b^3 + c^3$

Bài tập 12. Tính tổng:

a) $1 + 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n$

b) $9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots9}_{n \text{ chữ số } 9}$

c) $1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11\dots1}_{n \text{ chữ số } 1}$

d) $6 + 6 + 666 + \dots + \underbrace{66\dots6}_{n \text{ chữ số } 6}$

Bài tập 13. Xét dãy (u_n) xác định bởi $u_1 = a$ và $u_{n+1} = \frac{12}{u_n}$ (a là số thực $\neq 0$). Hãy xác định các giá trị của a để dãy số (u_n) là một cấp số nhân.

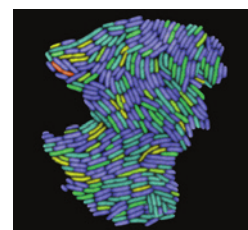
Bài tập 14. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = 4u_n + 9$. Chứng minh rằng: Dãy số (v_n) xác định bởi: $v_n = u_n + 3$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội.

Bài tập 15. Độ dài 3 cạnh của tam giác ABC lập thành một cấp số nhân. Chứng minh tam giác đó có 2 góc không quá 60° .

Bài tập 16. Tìm cấp số nhân (u_n) biết tổng của 4 số hạng đầu là 14, tổng của số hạng thứ 4, thứ 5, thứ 6 là $\frac{21}{2}$, với công bội q dương.

Bài tập 17. Ba số có tổng là 217 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân hoặc là các số hạng thứ 2, thứ 9 và thứ 44 của một cấp số cộng. Hỏi phải lấy bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng để tổng của chúng là 820.

Bài tập 18. Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong phòng thí nghiệm, cứ mỗi phút số lượng lại tăng lên gấp đôi số lượng đang có. Từ một vi khuẩn ban đầu, hãy tính tổng số vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 20 phút.



Bài tập 19. Giả sử một thành phố có dân số năm 2022 là khoảng 2,1 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là 0,75%.

- Dự đoán dân số của thành phố đó vào năm 2032;
- Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như trên thì ước tính vào năm nào dân số của thành phố đó sẽ tăng gấp đôi so với năm 2022?

Bài tập 20. Trong trò chơi mạo hiểm nhảy bungee, mỗi lần nhảy, người chơi sẽ được dây an toàn có tính đàn hồi kéo nảy ngược lên 60% chiều sâu của cú nhảy. Một người chơi bungee thực hiện cú nhảy đầu tiên có độ cao nảy ngược lên là 9 m.

- Tính độ cao nảy ngược lên của người đó ở lần nảy thứ ba;
- Tính tổng các độ cao nảy ngược lên của người đó trong 5 lần nảy đầu.



Bài 4. Bài tập cuối chương

4.1 Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{3^n - 1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) lần lượt là

- A. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{27}$. B. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{26}$. C. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{25}$. D. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{28}$.

Câu 2. Cho dãy số: $\frac{1}{3}; \frac{1}{3^2}; \frac{1}{3^3}; \frac{1}{3^4}; \frac{1}{3^5}; \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là

- A. $u_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{n+1}}$. B. $u_n = \frac{1}{3^{n+1}}$. C. $u_n = \frac{1}{3^n}$. D. $u_n = \frac{1}{3^{n-1}}$.

Câu 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n+1}{n+2}$. Phát biểu nào sau đây đúng?

- A. Dãy số tăng và bị chặn. B. Dãy số giảm và bị chặn.
C. Dãy số giảm và bị chặn dưới. D. Dãy số giảm và bị chặn trên.

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 , công sai d . Khi đó, với $n \geq 2$ ta có

- A. $u_n = u_1 + d$. B. $u_n = u_1 + (n+1)d$. C. $u_n = u_1 - (n-1)d$. D. $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và $u_2 = -1$. Khi đó

- A. $u_3 = 4$. B. $u_3 = 2$. C. $u_3 = -5$. D. $u_3 = 7$.

Câu 6. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -1$ và công sai $d = 3$. Khi đó S_5 bằng

- A. 11. B. 50. C. 10. D. 25.

Câu 7. Có bao nhiêu số thực x để $2x-1; x; 2x+1$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 8. Một tam giác có số đo các góc lập thành cấp số nhân có công bội $q = 2$. Số đo các góc của tam giác đó lần lượt là

- A. $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{5}; \frac{2\pi}{5}; \frac{4\pi}{5}$. C. $\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{6}; \frac{4\pi}{6}$. D. $\frac{\pi}{7}; \frac{2\pi}{7}; \frac{4\pi}{7}$.

4.2 Bài tập tự luận

Bài tập 1. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$.

Bài tập 2. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) biết:

- a) $\begin{cases} 5u_1 + 10u_5 = 0 \\ S_4 = 14; \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170. \end{cases}$

Bài tập 3. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n) biết:

- a) $\begin{cases} u_5 = 96 \\ u_6 = 192; \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_4 + u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$

Bài tập 4. Giả sử quần thể động vật này ở thời điểm ban đầu có 110000 cá thể, quần thể này có tỉ lệ sinh là 12%/năm, xuất cư 2%/năm, tử vong 8%/năm. Dự đoán số cá thể của quần thể đó sau 2 năm.

Bài tập 5. Một cây đàn organ có tần số âm thanh các phím liên tiếp tạo thành một cấp số nhân. Cho biết tần số phím La trung là 400 Hz và tần số của phím La cao cao hơn 12 phím là 800 Hz (nguồn: <https://vi.wikipedia.org/wiki/Organ>). Tìm công bội của cấp số nhân nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Bài tập 6. Dân số Việt Nam năm 2020 là khoảng 97,6 triệu người (theo Niên giám thống kê năm 2020). Nếu trung bình mỗi năm tăng 1,14% thì ước tính dân số Việt Nam năm 2040 là khoảng bao nhiêu người (làm tròn kết quả đến hàng trăm nghìn)?

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

- | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1. B | 2. C | 3. A | 4. D | 5. C | 6. D | 7. B | 8. D |
|------|------|------|------|------|------|------|------|

GIỚI HẠN VÀ HÀM SỐ LIÊN TỤC

Bài 1. Giới hạn của dãy số

1.1 Giới hạn của dãy số

Giới thiệu: Nếu $u_n \rightarrow L$ khi $n \rightarrow \infty$ thì ta nói dãy u_n có giới hạn là L khi $n \rightarrow \infty$. Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$ (hay còn viết gọn là $\lim u_n = L$).

- Nếu $L = 0$ thì ta gọi là giới hạn 0 của dãy số,
- Nếu $L = a$ là một số hữu hạn ta gọi là giới hạn hữu hạn của dãy,
- Nếu $L = \infty$ thì ta gọi là giới hạn vô cực.

1.2 Các phép toán về giới hạn hữu hạn của dãy số

Công thức cần nhớ: Cho $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$ và c là hằng số. Khi đó

- | | |
|---|---|
| a) $\lim (u_n + v_n) = a + b.$ | b) $\lim (u_n - v_n) = a - b.$ |
| c) $\lim (c \cdot u_n) = c \cdot a.$ | d) $\lim (u_n \cdot v_n) = a \cdot b.$ |
| e) $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} \ (b \neq 0).$ | f) Nếu $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}.$ |

1.3 Giới hạn hữu hạn của dãy số

1.3.1 Giới hạn 0 của dãy số

Khái niệm: Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ nhỏ hơn một số dương bất kì cho trước, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$. Ta còn viết $\lim u_n = 0$.

Công thức cần nhớ: Một số giới hạn cơ bản

- $\lim \frac{1}{n} = 0.$
- $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, với k nguyên dương bất kì.
- $\lim q^n = 0$, với q là số thực thoả mãn $|q| < 1$.

Ví dụ 1. Áp dụng giới hạn cơ bản, tìm $\lim \frac{1}{(\sqrt{3})^n}.$

Bài tập 1. Tìm các giới hạn sau

- | | | | |
|--------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|--|
| a) $\lim \frac{1}{n^2}.$ | b) $\lim \left(\frac{1}{n}\right)^2.$ | c) $\lim \left(\frac{1}{4}\right)^n.$ | d) $\lim \left(-\frac{3}{4}\right)^n.$ |
|--------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|--|

1.3.2 Giới hạn hữu hạn của dãy số

Khái niệm: Ta nói dãy số (u_n) có **giới hạn hữu hạn** là số a (hay u_n dần tới a) khi n dần tới dương vô cực, nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - a) = 0$. Khi đó, ta viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ hay $\lim u_n = a$ hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$.

 **Lưu ý:** Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$.

1.4 Bài tập

1.4.1 Khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

 **Lưu ý:**

- Một giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(n)}{v(n)}$ được gọi là dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$, nếu $u(n) \rightarrow \infty$ và $v(n) \rightarrow \infty$ khi $n \rightarrow \infty$.
- Để tính giới hạn này ta phải khử (làm mất) dạng vô định bằng cách, tại tử và mẫu số ta rút n có lũy thừa cao nhất làm thừa số, sau đó rút gọn và tính.

Ví dụ 2. Dùng định nghĩa, tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{n^2}$.

Bài tập 2. Tính các giới hạn sau

- | | | | |
|--|---|--|--|
| a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{2n-1}$ | b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n}{n^2+1}$ | c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ | d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-4n}{n}\right)$ |
| e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ | f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right)$ | g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1}$ | h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n}$ |
| i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+5}{2n-3}$ | j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{7-6n}$ | k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+n}{n^2}$ | l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+1}$ |

Bài tập 3. Tính các giới hạn sau

- | | | | |
|---|---|--|--|
| a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n}{3n^2+n+1}$ | b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n-2n^2}{2-n+n^2}$ | c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2+1}}{n}$ | d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+3}}{n}$ |
| e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}+1}{2n}$ | f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+\sqrt{n}-2}{n^2+n}$ | g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2+n\sqrt{n}-1}{2n^2-1}$ | h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n+1}{(2n+1)^2}$ |
| i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-n+1}{(n-1)(3n+1)}$ | j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} - 1\right)$ | k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3-3n^2+7}{n^3-5n^2}$ | l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4+n^2+6}{-n^4+n+2}$ |

Bài tập 4. Tính các giới hạn sau

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-n+1}{(1+2n)^2(n+5)}$ | b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(3n-2)^3}{(n+2)^4}$ | c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)(n^2-3)}{(1+n)(n^3+2)}$ |
| d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(n-3)(3n-4)}{(6n-1)^3}$ | e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4+3n^3+4n^2+1}{(-n-2)(n^3+5)}$ | f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4-n^2+1}{(2n+1)(3-n)(n^2+2)}$ |
| g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n^4+(n+1)^5}{n^6-3n^3+2}$ | h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^{10}(n+1)^2-n^{11}}{n^{12}+n^6+2}$ | i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n}(3+2\sqrt{n})}{(n+1)(n+2)}$ |

Bài tập 5. Tính các giới hạn sau

- | | | |
|--|---|--|
| a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n-3^n}{4^n}$ | b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2^n}{1-2^n}$ | c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n-4^n}{3^n+4^n}$ |
| d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5^n}}{3^n+1}$ | e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \cdot 2^n}{2 \cdot 3^n+4^n}$ | f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 3^n-5^n}{3 \cdot 2^n+5 \cdot 4^n}$ |
| g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n-4^n}{3^{n+1}+5^{n+1}}$ | h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n-(-5)^{n+2}}{2^{n+1}+6^n}$ | i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^n+7^{n+1}}{2 \cdot 5^n+7^n}$ |
| j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 2^n-3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$ | k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}-3^n+11}{3^{n+2}+2^{n+3}-4}$ | l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3^n+2^{n+1}}{5^n+3^{n+1}}}$ |

1.4.2 khử dạng vô định $\infty - \infty$

Lưu ý: Thông thường, tính giới hạn dạng $\infty - \infty$ ta chuyển dạng này về dạng $\frac{\infty}{\infty}$ bằng cách nhân, chia cho đại lượng liên hiệp của mẫu, rồi tính.

Bài tập 6. Tính các giới hạn sau

- a) $\lim (\sqrt{n^2+1} - n)$ b) $\lim (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ c) $\lim n (n - 2\sqrt{n+1})$
- d) $\lim \sqrt{n} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$ e) $\lim (\sqrt{2n^2+3} - \sqrt{n^2+1})$ f) $\lim (\sqrt{n^2+3n} - n + 2)$
- g) $\lim (\sqrt[3]{n^2-n^3} + n)$ h) $\lim (n + 2 - \sqrt[3]{n^3+2n})$ i) $\lim (1 + n^2 - \sqrt{n^4+3n+1})$

1.5 Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Khái niệm: Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thoả mãn $|q| < 1$ được gọi là **cấp số nhân lùi vô hạn**. Cấp số nhân lùi vô hạn này có tổng là

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1-q}.$$

Ví dụ 3. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots + \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \dots$.

Ví dụ 4. Biết rằng có thể coi số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,666\dots$ là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn:

$$0,666\dots = 0,6 + 0,06 + 0,006 + \dots = 0,6 + 0,6 \cdot \frac{1}{10} + 0,6 \cdot \frac{1}{10^2} + \dots$$

Hãy viết $0,666\dots$ dưới dạng phân số.

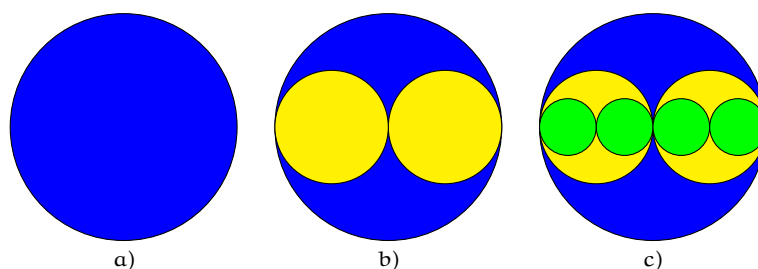
Bài tập 7. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \dots$.

Bài tập 8. Tính các tổng sau

a) $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \dots$ b) $S = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} + \dots$

Bài tập 9. Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính R (cm) như Hình 3a. Tiếp theo, cắt hai hình tròn

bán kính $\frac{R}{2}$ rồi chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình 3b. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\frac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như Hình 3c. Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn.



Hình 3

1.6 Giới hạn vô cực

Khái niệm:

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu u_n lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.
- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\lim (-u_n) = +\infty$, kí hiệu $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Lưu ý: Ta có các kết quả sau:

- a) Nếu $\lim u_n = +\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = 0$.
- b) Nếu $\lim u_n = 0$ và $u_n > 0$ với mọi n thì $\lim \frac{1}{u_n} = +\infty$.
- c) $\lim u_n = +\infty$ khi và chỉ khi $\lim (-u_n) = -\infty$.

Ví dụ 5. Tìm giới hạn $\lim q^n$ với $q > 1$.

Lưu ý:

a) $\lim n^k = +\infty$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 1$).

b) $\lim q^n = +\infty$ ($q > 1$).

Bài tập 10. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{n^2 - 1}{n + 1}$ b) $\lim \frac{3n - n^3}{2n + 15}$ c) $\lim \frac{n^4 - 2n^2 + 1}{2n^3 + n^2 + 7}$ d) $\lim \frac{2n^2 - 15n + 11}{\sqrt{3n^2 - n + 3}}$

Bài tập 11. Tính các giới hạn sau

a) $\lim (n^2 + 2n)$ b) $\lim (-2n^4 + 1)$ c) $\lim \sqrt{5n - 9}$ d) $\lim \sqrt{2n^2 - n + 3}$

e) $\lim \sqrt[3]{7n^2 - n^3}$ f) $\lim (2^n - 32)$ g) $\lim (3^n - 2^n)$ h) $\lim (4 \cdot 3^n - 5^{n+1})$

1.7 Bài tập

Bài tập 1. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{-2n + 1}{n}$ b) $\lim \frac{\sqrt{16n^2 - 2}}{n}$ c) $\lim \frac{4}{2n + 1}$ d) $\lim \frac{n^2 - 2n + 3}{2n^2}$

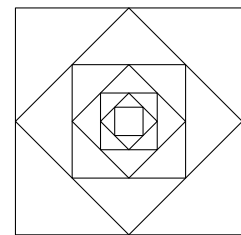
Bài tập 2. Tính tổng của các cấp số nhân lùi vô hạn sau

a) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \dots$ b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \dots$

Bài tập 3. Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn 0,444... dưới dạng một phân số.

Bài tập 4.

Từ hình vuông đầu tiên có cạnh bằng 1 (đơn vị độ dài), nối các trung điểm của bốn cạnh để có hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh của hình vuông thứ hai để được hình vuông thứ ba. Cứ tiếp tục làm như thế, nhận được một dãy hình vuông (xem Hình 5).

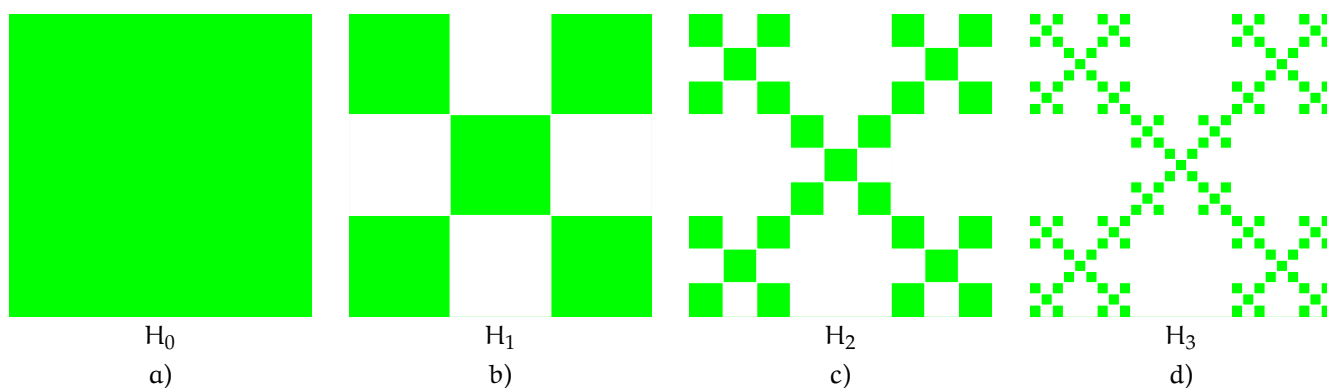


Hình 5

- a) Ký hiệu a_n là diện tích của hình vuông thứ n và S_n là tổng diện tích của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính a_n , S_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) và tìm $\lim S_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng diện tích của các hình vuông).
- b) Ký hiệu p_n là chu vi của hình vuông thứ n và Q_n là tổng chu vi của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính p_n và Q_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) và tìm $\lim Q_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng chu vi của các hình vuông).

Bài tập 5. Xét quá trình tạo ra hình có chu vi vô cực và diện tích bằng 0 như sau:

Bắt đầu bằng một hình vuông H_0 cạnh bằng 1 đơn vị độ dài (xem Hình 6a). Chia hình vuông H_0 thành chín hình vuông bằng nhau, bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_1 (xem Hình 6b). Tiếp theo, chia mỗi hình vuông của H_1 thành chín hình vuông, rồi bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_2 (xem Hình 6c). Tiếp tục quá trình này, ta nhận được một dãy hình H_n ($n = 1, 2, 3, \dots$).



Hình 6

Ta có: H_1 có 5 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3}$;

H_2 có $5 \cdot 5 = 5^2$ hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}; \dots$

Từ đó, nhận được H_n có 5^n hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3^n}$.

a) Tính diện tích S_n của H_n và tính $\lim S_n$.

b) Tính chu vi p_n của H_n và tính $\lim p_n$.

(Quá trình trên tạo nên một hình, gọi là một fractal, được coi là có diện tích $\lim S_n$ và chu vi $\lim p_n$).

Bài tập 6. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \frac{3n - \sqrt{9n^2 + 1}}{n - \sqrt{n^2 + 2n}}$

b) $\lim \frac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n + 1}}{3n + 2}$

c) $\lim \frac{\sqrt{n^2 + 3n - 1} - \sqrt{2n + 3}}{2n + 1}$

d) $\lim \frac{n + 3 - \sqrt{n^2 + n}}{\sqrt{4n^2 + 5} - 2n + 1}$

e) $\lim \frac{\sqrt[3]{n^3 - n} - n}{\sqrt{n^2 + 2} - n + 4}$

f) $\lim \frac{n^2 + \sqrt[3]{1 - n^6}}{\sqrt{n^4 + 1} - n^2}$

Bài tập 7. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$

b) $\lim \frac{1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2n}{1 + n^3}$

c) $\lim \frac{n\sqrt{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}}{3n^2 + n - 2}$

d) $\lim \frac{1 - 2 + 3 - \dots + (2n-1) - 2n}{\sqrt{2n^2 + 1}}$

e) $\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right)$

f) $\lim \frac{2 + 7 + 14 + \dots + (n^2 + 2n - 1)}{1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \dots + n \cdot (3n - 1)}$

g) $\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} \right)$

h) $\lim \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+2)} \right)$

i) $\lim \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n} \right)$

j) $\lim \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \left(1 - \frac{1}{4^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$

k) $\lim \frac{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n}{3^n}$

l) $\lim \left(\frac{1}{2\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \right)$

Bài 2. Giới hạn của hàm số

Giới thiệu: Nếu $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow a$ thì L được gọi là giới hạn của $f(x)$ khi x tiến tới a . Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

2.1 Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

Khái niệm: Cho điểm x_0 thuộc khoảng K và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc $K \setminus \{x_0\}$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn hữu hạn** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.

2.2 Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số

Công thức cần nhớ:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$. $\lim_{x \rightarrow x_0} x^k = x_0^k$, k là số nguyên dương;
- $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ (c là hằng số);
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ($c \in \mathbb{R}$, nếu tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$).
- Cho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó:
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$.
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$.
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$.
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ (với $M \neq 0$).
- Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.
(Dấu của $f(x)$ được xét trên khoảng tìm giới hạn, $x \neq x_0$).

2.3 Bài tập

2.3.1 Tính trực tiếp bằng cách thế số

 **Lưu ý:** Nếu $f(a) \neq 0$ thì $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Bài tập 1. Sử dụng quy tắc thế số tính các giới hạn sau

- | | | | |
|--|---|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 2} 2x$. | b) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2$. | c) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 5x - 2)$. | d) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 1}$. |
| e) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 2)$. | f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 2}{2x + 1}$. | g) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan x$. | h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$. |

2.3.2 Dạng vô định $\frac{0}{0}$

 **Lưu ý:**

- Khi tính $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, mà khi thế số ta được $f(x_0) = 0$ và $g(x_0) = 0$ thì giới hạn được xem là dạng vô định $\frac{0}{0}$.
- Để tính giới hạn này ta phải khử dạng vô định, bằng cách biến đổi xuất hiện thừa số $(x - x_0)$ ở cả tử và mẫu số, sau đó giản ước, thu gọn và tính.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$. Tìm $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

Bài tập 2. Tính các giới hạn sau

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}. & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}. & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}. & \text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}. \\ \text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}. & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}. & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}. & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 5x + 2}. \end{array}$$

Bài tập 3. Tính các giới hạn sau

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 2x^2}. & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-2)^3 + 8}{x}. & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 11x + 18}. \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^2 + 11x + 10}. & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 2x - 8}{x^2 - 3x + 2}. & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}. \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right). & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 4} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right). & \text{i) } \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{2x-3}{x+2} - \frac{x-26}{4-x^2} \right). \end{array}$$

2.4 Giới hạn một phía

Khái niệm:

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn bên phải** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.
- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$. Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn bên trái** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

Công thức cần nhớ:

a) Ta thừa nhận các kết quả sau:

- $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.
- Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ thì không tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

b) Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số ở (2.2) vẫn đúng khi ta thay $x \rightarrow x_0$ bằng $x \rightarrow x_0^+$ hoặc $x \rightarrow x_0^-$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < 0 \\ 1 & \text{khi } x > 0. \end{cases}$

- a) Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.
- b) Có tồn tại $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

Bài tập 4. Tìm các giới hạn một bên của các hàm số sau

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x - 1}. & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - 2x^2}{x - 3}. & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right). \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x^2 - 4} \right). & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2 - x|}{x^2 - 4x + 4}. & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}. \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{2 - x}}. & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|3x + 6|}{x + 2}. & \text{i) } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 5x + 4}{|x + 1|}. \\ \text{j) } \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x|x + 2|}{x^2 + 3x + 2}. & \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{3x^2 + x^4}}{2x}. & \text{l) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\sqrt{x} - x}{\sqrt{2x + x}}. \end{array}$$

Bài tập 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{khi } x \leq -1 \\ x^2+2 & \text{khi } x > -1 \end{cases}$. Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (nếu có).

Bài tập 6. Xét sự tồn tại giới hạn

a) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 1 \\ -x^2+4, & x \geq 1 \end{cases}$. Tính các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

b) Cho hàm số $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Tính các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Bài tập 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{27(x^2-4x+3)}{x^3-27} & (x > 3) \\ ax-4 & (x \leq 3) \end{cases}$. Tìm a để $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ tồn tại.

Bài tập 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax+1 & (x < 1) \\ x^2-a & (x \geq 1) \end{cases}$. Tìm a để hàm số có giới hạn khi $x \rightarrow 1$.

Bài tập 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-1} & (x > 1) \\ 2mx+3 & (x \leq 1) \end{cases}$. Tìm m để $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ tồn tại.

2.5 Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

Khái niệm:

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.
Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn hữu hạn** là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow +\infty$.
- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.
Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn hữu hạn** là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow -\infty$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$. Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Công thức cần nhớ:

a) Với c là hằng số và k là số nguyên dương, ta luôn có:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$$

b) Các phép toán trên giới hạn hàm số ở (2.2) vẫn đúng khi thay $x \rightarrow x_0$ bằng $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$.

Ví dụ 4. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-3x^2}{x^2+2x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x+1}$.

 **Lưu ý:** Tính $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ta thực hiện như tính giới hạn dãy số.

Bài tập 10. Tính giới hạn hàm số

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{1-3x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}}$.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-5)(1-x)^2}{3x^3-x+1}$.

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x^2+1)(x^3+2)}{x^6}$.

Bài tập 11. Tính giới hạn hàm số

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{1-x+4x^2}-x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2+5x-1}}{7x-3}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-1)\sqrt{x^2-3}}{x-5x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+2}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+1}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-2x)\sqrt{\frac{3x-1}{x^3+1}}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)\sqrt{\frac{4x+1}{(x-1)(x^2+2x)}}$

Bài tập 12. Tính giới hạn hàm số

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-5x+4}{|x^2-1|}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| + \sqrt{x^2+x}}{x+10}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-2|5-x|+1}{|2x^2-5|+4|x+1|-1}$

2.5.1 Khử dạng vô định $\infty - \infty$ **Lưu ý:**

- Nhân liên hiệp, đưa về dạng $\frac{\infty}{\infty}$.
- Khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$.

Bài tập 13. Tính các giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2-4x})$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1}+2x)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2-x}-2x)$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^2+1}+x\sqrt{3})$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1})$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x\sqrt{4x^2+1}+2x^2)$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$

Bài tập 14. Một cái hồ đang chứa 200 m³ nước mặn với nồng độ muối 10 kg/m³. Người ta ngọt hóa nước trong hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với vận tốc 2 m³/phút.

- Viết biểu thức C(t) biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.
- Tìm giới hạn $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ và giải thích ý nghĩa.

2.6 Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm

Giới thiệu: Nếu $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = \text{const}$ (hằng số) và $\lim_{x \rightarrow a} v(x) = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow a} \frac{u(x)}{v(x)} = \infty$. Lưu ý tùy trường hợp cho kết quả là $+\infty$ hay $-\infty$.

Khái niệm: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

- Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn bên phải** là $+\infty$ khi x dần tới x_0 về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow +\infty$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ hay $f(x) \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow x_0^+$.
- Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn bên phải** là $-\infty$ khi x dần tới x_0 về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow -\infty$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$ hay $f(x) \rightarrow -\infty$ khi $x \rightarrow x_0^+$.

Công thức cần nhớ:

- Ta có các giới hạn thường dùng như sau:

- $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty$ ($a \in \mathbb{R}$);
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương;

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ với k là số chẵn;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ với k là số lẻ.

b) Các giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa như trên.

c) Các phép toán trên giới hạn hàm số của (2.2) chỉ áp dụng được khi tất cả các hàm số được xét có giới hạn hữu hạn. Với giới hạn vô cực, ta có một số quy tắc sau đây.

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = +\infty$ (hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = -\infty$) thì $\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x) \cdot g(x)]$ được tính theo quy tắc cho bởi bảng sau:

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x) \cdot g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng khi thay x_0^+ thành x_0^- (hoặc $+\infty$, $-\infty$).

Ví dụ 5. Tính các giới hạn sau:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-2x}{x-2}$. b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)$. c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3}$. d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 1)$.

Bài tập 15. Tìm các giới hạn sau:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2}$. b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1}$. c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x^2)$. d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{3-x}$.

2.7 Bài tập

Bài tập 16. Tìm các giới hạn sau

- a) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 7x + 4)$. b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9}$. c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3-\sqrt{x+8}}{x-1}$.

Bài tập 17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{khi } x < 1 \\ x & \text{khi } x \geq 1. \end{cases}$

Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (nếu có).

Bài tập 18. Tìm các giới hạn sau:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x+3}{2x}$. b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{3x+1}$. c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

Bài tập 19. Trong hồ có chứa 6000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút.

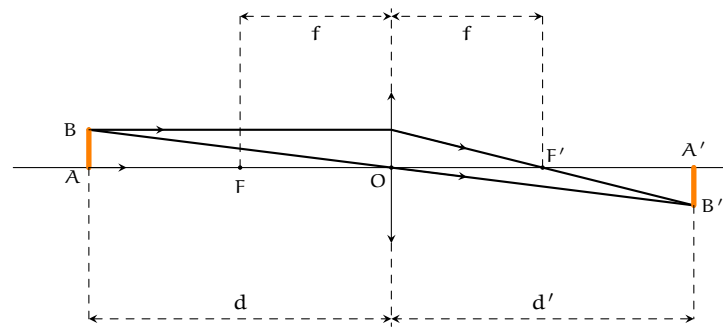
- a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là

$$C(t) = \frac{30t}{400+t} \text{ (gam/lít)}.$$

- b) Nồng độ muối trong hồ như thế nào nếu $t \rightarrow +\infty$.

Bài tập 20. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là $f > 0$ không đổi. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ vật thật và ảnh của nó tới quang tâm O của thấu kính (xem hình bên dưới). Ta có công thức: $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$ hay $d' = \frac{df}{d-f}$.

Xét hàm số $g(d) = \frac{df}{d-f}$. Tìm các giới hạn sau đây và giải thích ý nghĩa.



a) $\lim_{d \rightarrow f^+} g(d).$

b) $\lim_{d \rightarrow +\infty} g(d).$

Bài 3. Hàm số liên tục

3.1 Hàm số liên tục tại một điểm

Khái niệm:

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- Khi hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại điểm x_0 thì ta nói $f(x)$ gián đoạn tại điểm x_0 và x_0 được gọi là điểm gián đoạn của hàm số $f(x)$.

Lưu ý: Để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì phải có cả ba điều sau

- Hàm số xác định tại x_0 .
- Tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ tại điểm $x_0 = 2$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{khi } x > 0 \\ 2x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

Bài tập 1. Xét sự liên tục của hàm số $f(x)$ tại điểm x_0 cho trước.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, & x \neq -2 \\ -4, & x = -2 \end{cases}$ tại $x_0 = -2$.

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$.

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$ tại $x_0 = 2$.

d) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x^2}, & x \neq 0 \end{cases}$ tại $x_0 = 0$.

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$.

f) $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$ tại $x_0 = 0$.

Bài tập 2. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0 cho trước.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & x \neq 2 \\ (a + 1)x - 3, & x = 2 \end{cases}$ tại $x_0 = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^2 - 1}, & x > 1 \\ ax + 2, & x \leq 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$

Bài tập 3. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0 cho trước.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x + 5}}, & x \neq 4 \\ 1 - 3a, & x = 4 \end{cases}$ tại $x_0 = 4$.

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}}{x}, & x < 0 \\ a + \frac{4 - x}{x + 2}, & x \geq 0 \end{cases}$ tại $x_0 = 0$.

3.2 Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

Khái niệm:

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a; b)$ nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm trong khoảng ấy.
- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[a; b]$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$

nếu $f(x)$ liên tục tại trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ trên đoạn $[-1; 1]$.

3.3 Tính liên tục của hàm số sơ cấp

Khái niệm:

- Hàm số đa thức $P(x)$, các hàm số lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, hàm số căn thức $y = \sqrt{P(x)}$, các hàm số lượng giác $y = \tan x$, $y = \cot x$ liên tục trên các khoảng của tập xác định của chúng. Trong đó, $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức.

Lưu ý: Hàm số thuộc những loại trên được gọi chung là hàm số sơ cấp. Khi nói xét tính liên tục của một hàm số mà không nói gì thêm thì ta xét tính liên tục của hàm số đó trên những khoảng của tập xác định của chúng.

Ví dụ 3. Xét tính liên tục của các hàm số sau

a) $y = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 2$.

b) $y = \frac{3x^2 + x - 1}{x - 2}$.

3.4 Tổng, hiệu, tích, thương của hàm số liên tục

Khái niệm: Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0 .
- Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

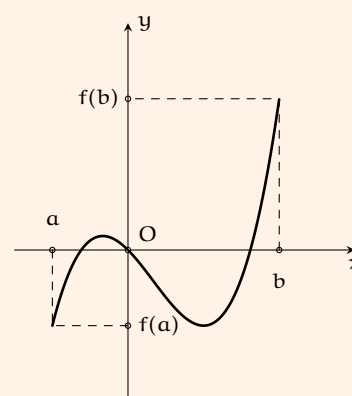
Ví dụ 4. Xét tính liên tục của hàm số $y = \frac{\sin x}{x+1}$.

3.5 Ứng dụng của hàm số liên tục

Công thức cần nhớ:

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ là một đường liền, có điểm đầu, điểm cuối như hình vẽ bên. Nếu hai điểm này nằm về hai phía so với trục hoành thì đường liền nói trên luôn cắt trục hoành tại ít nhất một điểm. Điều này có thể được phát biểu dưới dạng như sau:

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì luôn tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.



Bài tập 4. Chứng minh rằng phương trình

a) $3x^3 + 2x - 2 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm.

b) $2x^3 - 5x^2 + x + 1 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm.

c) $x^3 - 3x + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

d) $x^3 - 2x^2 + 3x = 7$ có nghiệm lớn hơn 2.

Bài tập 5. Chứng minh rằng phương trình

- a) $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm thuộc khoảng $(-1; 1)$.
 b) $x^5 + x^3 - 4x + 1 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm thuộc khoảng $(-2; 1)$.
 c) $x^5 + 7x^4 - 8x^3 - 9x^2 + 11x + 2 = 0$ có nghiệm.

Bài tập 6. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 2}{2x + 2}$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một điểm $c \in (0; 2)$ sao cho $f(c) = -0,8$.

Bài tập 7. Chứng minh các phương trình luôn có nghiệm.

- a) $m(x-1)^5(x-2) + 2x - 3 = 0$.
 b) $(m^2 + m + 1)x^3 + 2x - 2 = 0$.
 c) $(x-1)(x-3) - m(x+1)(x-2) = 0$.
 d) $m(x^2 + 3)(x^2 - 4) + 2x + 1 = 0$.
 e) $x^4 + mx^2 - 3mx - 79 = 0$.
 f) $(m^4 + m + 2)(x^3 - 8) + 6x + 1 = 0$.
 g) $(m^2 + 2m + 2011)x^{2011} + 2x - 2 = 0$.
 h) $(m^2 + 1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$.

Bài tập 8. Cho phương trình $x^{10} + (m^4 + m + 1)x^{2011} - 1024 = 0$. Chứng minh phương trình trên luôn có ít nhất một nghiệm dương với mọi giá trị của tham số m .

Bài tập 9. Chứng minh các phương trình luôn có nghiệm.

- a) $\cos x + m \cos 2x = 0$.
 b) $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = m$.

3.6 Bài tập

Bài tập 10. Xét tính liên tục của hàm số:

- a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 1 - x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ tại điểm $x = 0$.
 b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại điểm $x = 1$.

Bài tập 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ a & \text{khi } x = -2 \end{cases}$

Tìm a để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài tập 12. Xét tính liên tục của các hàm số sau

- a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$.
 b) $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$.
 c) $h(x) = \cos x + \tan x$.

Bài tập 13. Cho hàm số $f(x) = 2x - \sin x$, $g(x) = \sqrt{x - 1}$.

Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x) \cdot g(x)$ và $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Bài tập 14. Một bãi đậu xe ô-tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$C(x) = \begin{cases} 60.000 & \text{khi } 0 < x \leq 2 \\ 100.000 & \text{khi } 2 < x \leq 4 \\ 200.000 & \text{khi } 4 < x \leq 24 \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

Bài tập 15. Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm của nó là

$$F(r) = \begin{cases} \frac{GM}{R^3} & \text{khi } 0 < r \leq R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{khi } r \geq R \end{cases}, \text{ trong đó } M \text{ là khối lượng, } R \text{ là bán kính của Trái Đất, } G \text{ là hằng số hấp dẫn.}$$

Hàm số $F(r)$ có liên tục trên $(0; +\infty)$ không?

Bài 4. Bài tập cuối chương

4.1 Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n^2}$ bằng

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Câu 2. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $M = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots$ bằng

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{6}{5}$.

Câu 3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ bằng

- A. 0. B. 6. C. 3. D. 1.

Câu 4. Hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + m & \text{khi } x \geq 2 \\ 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$ khi

- A. $m = 3$. B. $m = 5$. C. $m = -3$. D. $m = -5$.

Câu 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x}$ bằng

- A. 2. B. -1. C. 0. D. 1.

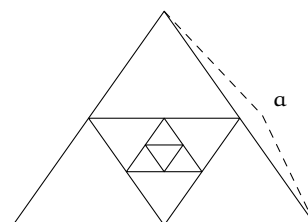
4.2 Bài tập tự luận

Bài tập 1. Tính các giới hạn sau

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{n}$. b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2}}{n}$.
c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3n+1}$. d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+2)}{n^2}$.

Bài tập 2.

Cho tam giác đều có cạnh bằng a , gọi là tam giác H_1 . Nối các trung điểm của H_1 để tạo thành tam giác H_2 . Tiếp theo, nối các trung điểm của H_2 để tạo thành tam giác H_3 (Hình bên). Cứ tiếp tục như vậy, nhận được dãy tam giác $H_1, H_2, H_3, \dots$. Tính tổng chu vi và tổng diện tích các tam giác của dãy.



Bài tập 3. Tìm các giới hạn sau

- a) $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - x + 2)$. b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$. c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x+7}}{x-2}$.

Bài tập 4. Tìm các giới hạn sau

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+2}{x+1}$. b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x^2}$.

Bài tập 5. Tìm các giới hạn sau

- a) $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{x-4}$. b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{2-x}$.

Bài tập 6. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} & \text{khi } x \geq 0 \\ 2 \cos x & \text{khi } x < 0. \end{cases}$

Bài tập 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5} & \text{khi } x \neq 5 \\ a & \text{khi } x = 5. \end{cases}$

Tìm a để hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Bài tập 8. Trong một phòng thí nghiệm, nhiệt độ trong tủ sấy được điều khiển tăng từ 10°C , mỗi phút tăng 2°C trong 60 phút, sau đó giảm mỗi phút 3°C trong 40 phút. Hàm số biểu thị nhiệt độ (tính theo $^\circ\text{C}$) trong tủ theo thời gian t (tính theo phút) có dạng

$$T(t) = \begin{cases} 10 + 2t & \text{khi } 0 \leq t \leq 60 \\ k - 3t & \text{khi } 60 < t \leq 100 \end{cases} \quad (k \text{ là hằng số}).$$

Biết rằng, $T(t)$ là hàm liên tục trên tập xác định. Tìm giá trị của k .

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

- | | | | | |
|------|------|------|------|------|
| 1. B | 2. C | 3. B | 4. D | 5. A |
|------|------|------|------|------|

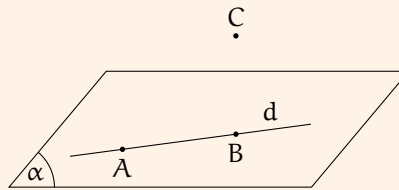
Chương 4

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1. Điểm, đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

1.1 Mặt phẳng trong không gian

Giới thiệu:



- Mặt phẳng là một đối tượng của toán học không có giới hạn. Mặt phẳng là một mặt hai chiều phẳng mở rộng vô hạn.
- Trong đời sống chúng ta thì mặt hồ nước (lặng), nền nhà, trần nhà, mặt bàn, tờ giấy phẳng, ... là các mặt phẳng.
- Trong chương trình toán học lớp 11, thì hình tam giác, tứ giác, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông, ... là các biểu diễn của mặt phẳng.
- Hình vẽ trên biểu diễn hai điểm A, B và đường thẳng (d) đi qua hai điểm A và B cùng nằm trong mặt phẳng (α).
 - Nếu điểm A thuộc mặt phẳng (α) thì ta nói A nằm trên (α) hay (α) chứa A, hay (α) đi qua A và kí hiệu là $A \in (\alpha)$.
 - Nếu điểm C không thuộc mặt phẳng (α) thì ta nói C nằm ngoài (α) hay (α) không chứa C và kí hiệu là $C \notin (\alpha)$.
 - Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (α) ta nói (α) chứa d kí hiệu $d \subset (\alpha)$.
 - Đường thẳng d đi qua hai điểm A, B nằm trong (α) thì $d \subset (\alpha)$.

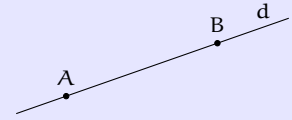
Các kí hiệu thường dùng để biểu diễn điểm, đường thẳng và mặt phẳng

- Điểm: A, B, C, ...
- Đường thẳng: a, b, d, Δ , ...
- Mặt phẳng: (ABC), (P), (α), ...
- Quan hệ điểm, đường và mặt
$$\begin{cases} A \in d \\ d \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow A \in (\alpha).$$

1.2 Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

Tính chất cần nhớ:

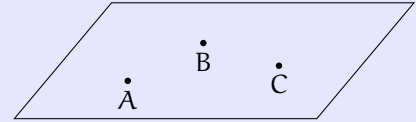
Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.



Ví dụ 1. Cho ba điểm phân biệt M, N, P không thẳng hàng. Có bao nhiêu đường thẳng đi qua hai trong ba điểm đã cho?

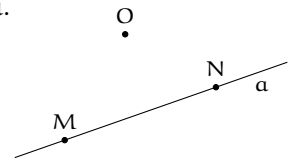
Tính chất cần nhớ:

Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.



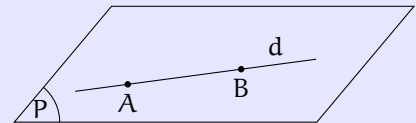
Mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng được kí hiệu là mặt phẳng (ABC) .

Ví dụ 2. Cho đường thẳng a đi qua hai điểm phân biệt M, N và điểm O không thuộc a . Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua ba điểm M, N, O ?



Tính chất cần nhớ:

Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.



Ví dụ 3. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và một điểm M nằm trên đường thẳng BC . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C . Chứng tỏ rằng $M \in (P)$.

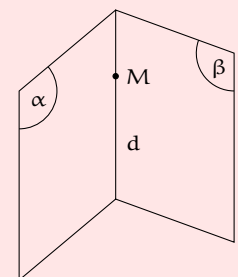
Tính chất cần nhớ: Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó đồng phẳng, còn nếu không có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói chúng không đồng phẳng.

Ví dụ 4. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trên một mặt phẳng. Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua ba trong bốn điểm đã cho?

Khái niệm: Giao tuyến hai mặt phẳng

Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.



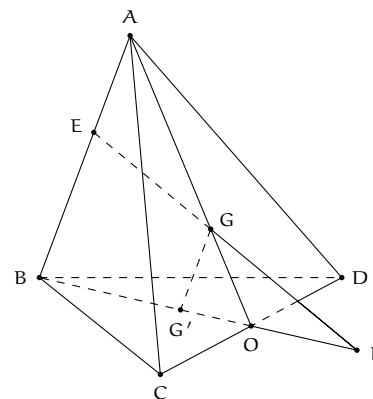
Đường thẳng d chung của hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là giao tuyến của (P) và (Q) , kí hiệu $d = (P) \cap (Q)$.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC và một điểm O không thuộc mặt phẳng (ABC) . Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (OAB) và (ABC) .

Tính chất cần nhớ: Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.

Ví dụ 6. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trên một mặt phẳng.

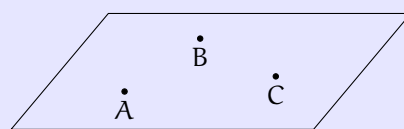
- Gọi O là trung điểm của CD , G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ACD và BCD . Chứng minh $GG' \parallel AB$.
- Cho điểm E trên AB sao cho EG cắt mặt phẳng đi qua ba điểm B, C, D tại F . Chứng minh bốn điểm B, G', O, F thẳng hàng.



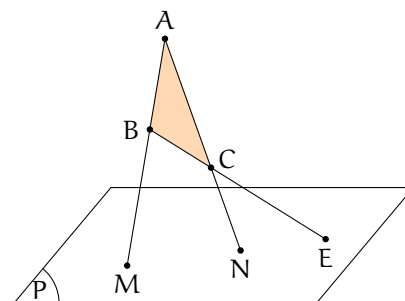
1.3 Cách xác định mặt phẳng

Tính chất cần nhớ:

- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa ba điểm không thẳng hàng.
- Mặt phẳng xác định bởi ba điểm A, B, C không thẳng hàng kí hiệu là $mp(ABC)$ hay (ABC) .

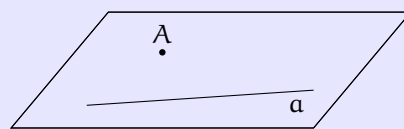


Ví dụ 7. Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và không nằm trong mặt phẳng (P) . Biết ba đường thẳng AB, AC, BC lần lượt cắt (P) tại các điểm M, N, E . Ba điểm M, N, E có thẳng hàng không? Giải thích.

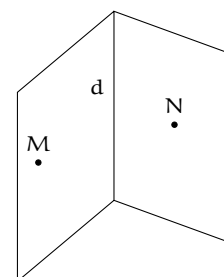


Tính chất cần nhớ:

- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó.
- Mặt phẳng xác định bởi điểm A và đường thẳng a không qua điểm A kí hiệu là $mp(A, a)$ hay (A, a) .

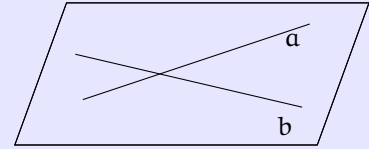


Ví dụ 8. Với đường thẳng d và hai điểm M, N phân biệt không thuộc d , ta xác định được bao nhiêu mặt phẳng?

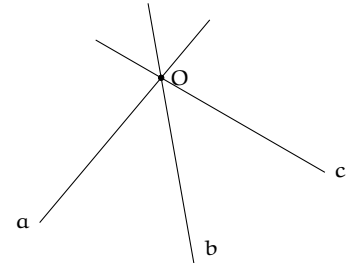


Tính chất cần nhớ:

- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.
- Mặt phẳng xác định bởi điểm hai đường thẳng a, b cắt nhau kí hiệu là $mp(a, b)$.



Ví dụ 9. Với ba đường thẳng a, b, c không cùng nằm trong một mặt phẳng và cùng đi qua một điểm O , ta xác định được bao nhiêu mặt phẳng?



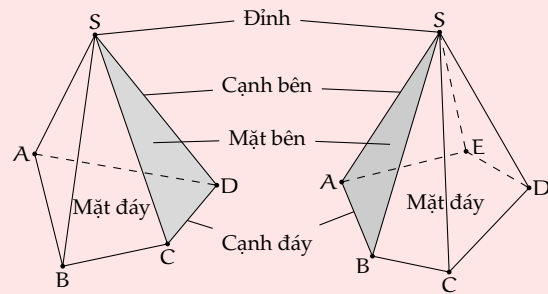
1.4 Hình chóp và hình tứ diện

Khái niệm: Cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$ nằm trong mặt phẳng (α) và điểm S không thuộc (α) . Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$. Hình tạo bởi n tam giác đó và đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ được gọi là hình chóp, kí hiệu $S.A_1A_2 \dots A_n$.

Trong hình chóp $S.A_1A_2 \dots A_n$, ta gọi:

- Điểm S là **đỉnh**;
- Các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$ là các **mặt bên**;
- Đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ là **mặt đáy**;
- Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$ là các **cạnh bên**;
- Các cạnh của đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ là các **cạnh đáy**.

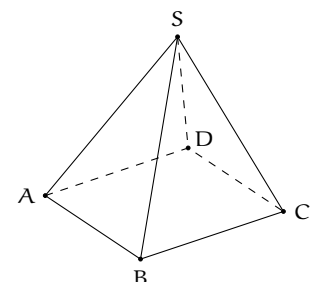
Ta gọi hình chóp có đáy tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... lần lượt là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, ...



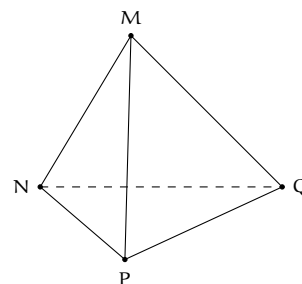
Lưu ý:

- Hình chóp tam giác còn gọi là tứ diện.
- Hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều được gọi là hình tứ diện đều.
- Một tứ diện có thể xem như là một hình chóp tam giác với đỉnh là một đỉnh tùy ý của tứ diện và đáy là mặt của tứ diện không chứa đỉnh đó.

Ví dụ 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ (Hình vẽ bên). Gọi tên các mặt bên, mặt đáy, cạnh bên, cạnh đáy của hình chóp $S.ABCD$.



Ví dụ 11. Gọi tên các mặt, các cặp cạnh đối diện của tứ diện MNPQ.



Ví dụ 12. Cho tứ diện SABC. Gọi M và N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh AB và BC sao cho MN không song song với AC.

- Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC).
- Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (SMN) và (SAC); (SAN) và (SCM).

1.5 Bài tập

1.5.1 Tìm giao tuyến hai mặt phẳng

Lưu ý: Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, ta tìm hai điểm chung của 2 mặt phẳng đó. Đường thẳng nối hai điểm chung đó là giao tuyến của hai mặt phẳng.

Bài tập 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tứ giác không có cặp cạnh đối song song. Điểm M thuộc cạnh SA. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

- (SAC) và (SBD)
- (SAC) và (MBD)
- (SAB) và (SCD)
- (MBC) và (SAD)

Bài tập 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tứ giác ABCD. Lấy điểm M thuộc miền trong tam giác SCD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

- (SBM) và (SCD)
- (ABM) và (SCD)
- (ABM) và (SAC)

Bài tập 3. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC

- Tìm giao tuyến của (IBC) và (JAD)
- Gọi M là điểm nằm trên đoạn AB, N là điểm nằm trên đoạn AC. Tìm giao tuyến của (IBC) và (DMN).

Bài tập 4. Cho tứ diện SABC. Gọi M, N lần lượt là 2 điểm trên đoạn SB và SC sao cho MN không song song với BC.

- Tìm giao tuyến (AMN) và (ABC)
- Tìm giao tuyến (ABN) và (ACM).

Bài tập 5. Cho hình chóp S.ABCD có AB cắt CD tại E; AC cắt BD tại F.

- Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD)
- Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD)
- Tìm giao tuyến của (SEF) và (SAD)
- Tìm giao tuyến của (SEF) và (SBC)

Bài tập 6. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BC; K là một điểm trên cạnh BD sao cho $KD < KB$

- Tìm giao tuyến của (IJK) và (ACD)
- Tìm giao tuyến của (IJK) và (ABD)

Bài tập 7. Cho tứ diện ABCD. Gọi M là điểm bên trong tam giác ABD, N là điểm bên trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

- (AMN) và (BCD)
- (DMN) và (ABC)

Bài tập 8. Cho tứ diện ABCD. Gọi O là điểm bên trong tam giác BCD, M là điểm trên AO

- Tìm giao tuyến của (MCD) với (ABC) và (ABD)
- Gọi I, J là hai điểm trên BC và BD. Tìm giao tuyến của (IJM) và (ACD)

Bài tập 9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD; P là điểm trên SC và $SP > PC$. Tìm giao tuyến của (MNP) với các mặt (SAC), (SAB), (SAD), (ABCD).

Bài tập 10. Cho tứ diện ABCD. Gọi O là điểm bên trong tam giác BCD, M thuộc cạnh AB.

- Dựng đường thẳng qua M, cắt AO và CD.
- N là một điểm trên BC và ON không song song với BD. Dựng đường thẳng qua N, cắt AO và DM.

1.5.2 Giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

📌 **Lưu ý:** Muốn tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng, ta có hai phương pháp:

- a) **Phương pháp 1:** Tìm đường thẳng trong mặt phẳng cắt đường thẳng đã cho.
- b) **Phương pháp 2:**
 - Bước 1: chọn mặt phẳng phụ chứa đường thẳng đã cho.
 - Bước 2: tìm giao tuyến của mặt phẳng phụ với mặt phẳng đã cho.
 - Bước 3: giao điểm cần tìm là giao điểm của giao tuyến với đường thẳng đã cho.

Bài tập 11. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt nằm trên AB và AD với $IB = 2IA$ và $AD = 2AJ$. Tìm giao điểm của IJ với (BCD).

Bài tập 12. Cho tứ diện SABC, M là điểm thuộc tia đối của tia SA, O là điểm nằm trong tam giác ABC. Tìm các giao điểm sau:

- a) BC và (SOA)
- b) MO và (SBC)
- c) AB và (MOC)
- d) SB và (MOC)

Bài tập 13. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thang có đáy lớn AD.

- a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD)
- b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, CD. Tìm giao điểm K của MN và (SBD).

Bài tập 14. Cho hình chóp S.ABCD, M và N tương ứng là các điểm thuộc cạnh SC và BC. Tìm giao điểm của SD với (AMN).

Bài tập 15. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J, K lần lượt là các điểm trên các cạnh AB, BC, CD sao cho $AB = 3AI$, $2BC = 3BJ$, $4CD = 5CK$. Tìm giao điểm của (IJK) với AD.

Bài tập 16. Cho tứ diện ABCD có các điểm M và N là trung điểm AC và BC. Lấy điểm K thuộc đoạn BD (K không là trung điểm của BD). Tìm giao điểm của AD và (MNK).

Bài tập 17. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang (đáy nhỏ AB). Gọi M là điểm thuộc BD sao cho $MB = 3MD$ và G là trọng tâm tam giác SAD. Tìm các giao điểm của GM với (SAC).

Bài tập 18. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một tứ giác lồi và không có cặp cạnh đối nào song song. Lấy điểm M trên cạnh SC và điểm N trên cạnh SD

- a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (NBC)
- b) Tìm giao điểm của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD)

Bài tập 19. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm SB, G là trọng tâm tam giác SAD.

- a) Tìm giao điểm I của GM với (ABCD). Chứng minh I nằm trên CD và $IC = 2ID$.
- b) Tìm giao điểm J của (OMG) và AD.
- c) Tìm giao điểm K của (OMG) và SA.

Bài tập 20. Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm I và lấy điểm J, K lần lượt thuộc miền trong tam giác BCD và ACD

- a) Tìm giao điểm của JK với (ABC)
- b) Tìm giao tuyến của (IJK) với các mặt của tứ diện ABCD.

Bài tập 21. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang, cạnh đáy lớn là AB. Gọi I, J, K là ba điểm trên SA, AB, BC.

- a) Tìm giao điểm của IK với (SBD)
- b) Tìm giao điểm của mặt (IJK) với SD và SC.

1.5.3 Chứng minh 3 điểm thẳng hàng và 3 đường đồng quy

Lưu ý:

- a) Muốn chứng minh 3 đường thẳng đồng quy, ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng này thuộc đường thẳng kia.
- b) Muốn chứng minh 3 điểm thẳng hàng, ta chứng minh 3 điểm đó thuộc cùng hai mặt phẳng.

Bài tập 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang (AD là đáy lớn). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC và $O = AC \cap BD$.

- a) Tìm giao tuyến của (ABN) và (SCD)
- b) Tìm giao điểm P của DN và (SAB)
- c) Gọi $K = AN \cap DM$. Chứng minh 3 điểm S, K, O thẳng hàng.

Bài tập 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AD . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SB, SC .

- a) Tìm giao điểm Q của SD và (MNP)
- b) Gọi $E = MN \cap PQ, F = AB \cap CD$. Chứng minh S, E, F thẳng hàng.

Bài tập 24. Cho tứ diện $SABC$. Trên SA, SB, SC lấy các điểm D, E, F sao cho DE cắt AB tại I, EF cắt BC tại J, FD cắt CA tại K . Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Bài tập 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SC .

- a) Tìm giao điểm R của SD và (BQP)
- b) Gọi M là giao điểm của PR và AD, N là giao điểm của QR và CD . Chứng minh ba điểm B, M, N thẳng hàng.

Bài tập 26. Cho tứ giác $ABCD$ nằm trong mặt phẳng (α) , điểm S nằm ngoài (α) . Lấy một điểm M trên cạnh SC .

- a) Tìm giao điểm N của SD và (ABM)
- b) Giả sử AB và CD cắt nhau. Khi đó hãy chứng tỏ ba đường thẳng AB, CD, MN đồng quy.

1.6 Bài tập sách giáo khoa

Bài tập 27. Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD . Lấy M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SC .

- a) Chứng minh đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng (SAC) .
- b) Chứng minh O là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) .

Bài tập 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC .

- a) Tìm giao điểm I của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD) . Chứng minh $IA = 2IM$.
- b) Tìm giao điểm E của đường thẳng SD và mặt phẳng (ABM) .
- c) Gọi N là một điểm tùy ý trên cạnh AB . Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) .

Bài tập 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD ; M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD ; P thuộc đoạn SC và không là trung điểm của SC .

- a) Tìm giao điểm E của đường thẳng SO và mặt phẳng (MNP) .
- b) Tìm giao điểm Q của đường thẳng SA và mặt phẳng (MNP) .
- c) Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD . Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Bài tập 30. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F, G lần lượt là ba điểm trên ba cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I ($I \neq C$), EG cắt AD tại H ($H \neq D$).

- a) Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (EFG) và (BCD) ; (EFG) và (ACD) .
- b) Chứng minh ba đường thẳng CD, IG, HF cùng đi qua một điểm.

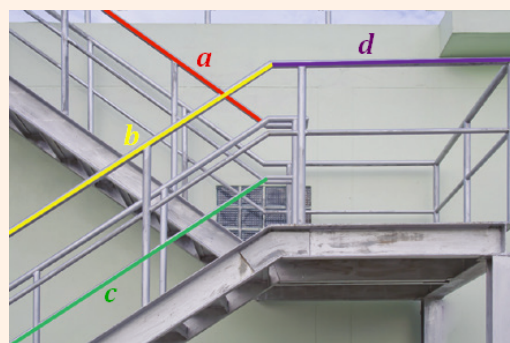
Bài tập 31. Thước laser phát ra tia laser, khi tia này quay sẽ tạo ra mặt phẳng ánh sáng. Giải thích tại sao các thước kẻ laser lại giúp người thợ xây dựng kẻ được đường thẳng trên tường hoặc sàn nhà.



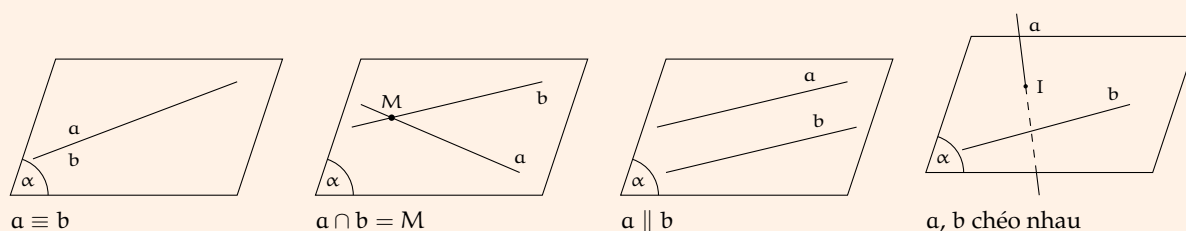
Bài 2. Hai đường thẳng song song

Giới thiệu: Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng
Quan sát các cặp đường thẳng a và b , b và c , c và d trong hình bên, ta thấy

- Đường thẳng a và b không có điểm chung.
- Đường thẳng b và c song song.
- Đường thẳng c và d cắt nhau.



2.1 Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian



Hình 3.

- **Trường hợp 1:** Có một mặt phẳng chứa a và b . Khi đó ta nói a và b *đồng phẳng*. Theo kết quả của hình học phẳng, có ba khả năng sau đây xảy ra: $a \equiv b$, $a \cap b = M$ và $a \parallel b$.
- **Trường hợp 2:** Không có mặt phẳng nào chứa cả a và b . Khi đó ta nói hai đường thẳng a và b *chéo nhau* hay *a chéo với b*.

Khái niệm:

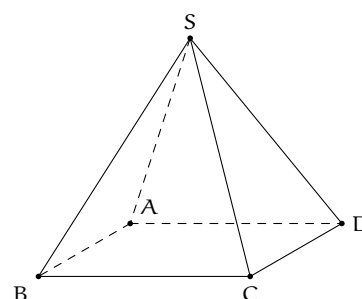
- Hai đường thẳng gọi là **song song** nếu chúng nằm trong cùng một mặt phẳng và không có điểm chung.
- Hai đường thẳng gọi là **chéo nhau** nếu chúng không đồng phẳng.

📌 Lưu ý:

- Cho hai đường thẳng song song a và b . Có duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó, kí hiệu $mp(a, b)$.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây:

- a) AB và CD ; b) SA và SC ; c) SA và BC .

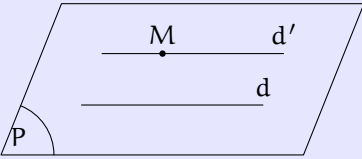


Hình 5.

2.2 Tính chất cơ bản về hai đường thẳng song song

Tính chất cần nhớ:

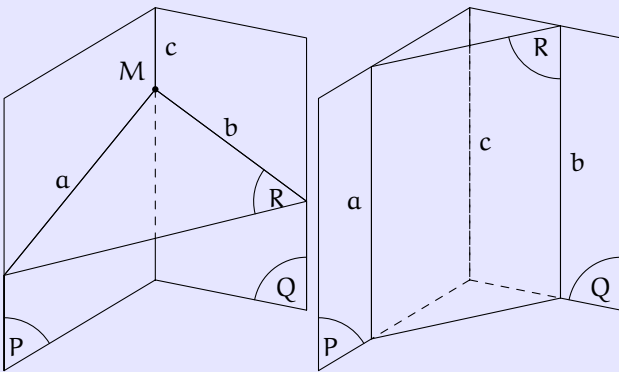
Định lý 1. Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.



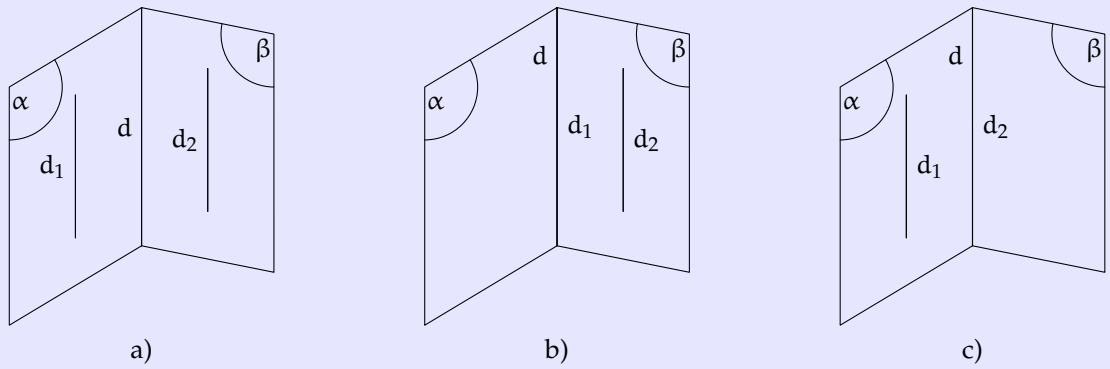
Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$. Vẽ hình thang $ADMS$ có hai đáy là AD và MS . Gọi d là đường thẳng trong không gian đi qua S và song song với AD . Chứng minh đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (SAD) .

Tính chất cần nhớ:

Định lý 2. Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

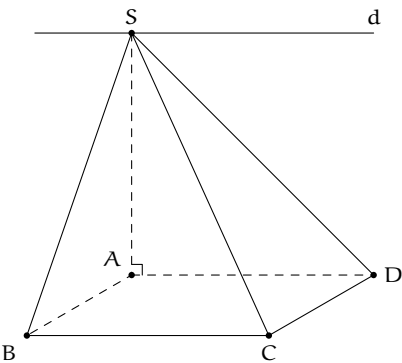


Hệ quả 1. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



Hình 11

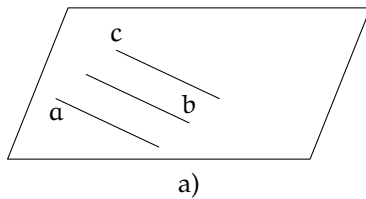
Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .



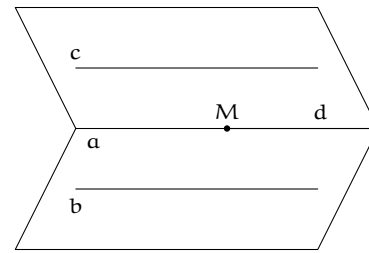
Hình 12

Ví dụ 4. Trong không gian, cho ba đường thẳng a, b, c không đồng phẳng, a và b cùng song song với c . Gọi M là

điểm thuộc a , d là giao tuyến của $mp(a, c)$ và $mp(M, b)$.



a)



b)

Hình 13.

Tính chất cần nhớ:

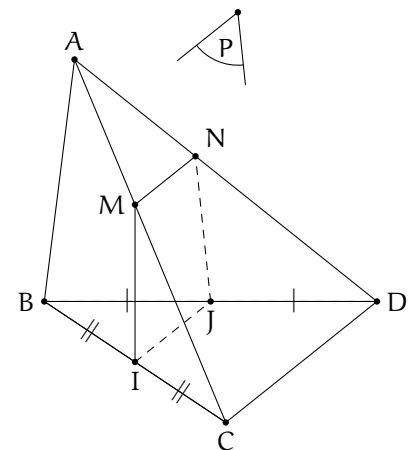
Định lý 3. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Lưu ý: Khi hai đường thẳng phân biệt a, b cùng song song với đường thẳng c thì ta có thể kí hiệu là $a \parallel b \parallel c$ và gọi là ba đường thẳng song song.

Ví dụ 5. Gọi M, N, P, Q, R, S là trung điểm các cạnh của tứ diện $ABCD$ như Hình 14. Chứng minh rằng các đoạn thẳng MN, PQ, RS có cùng trung điểm.

Ví dụ 6. Cho tứ diện $ABCD$ có I và J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và BD . Gọi (P) là mặt phẳng đi qua I, J và cắt hai cạnh AC và AD lần lượt tại M và N .

- Chứng minh $IJNM$ là một hình thang.
- Tìm vị trí của điểm M để $IJNM$ là hình bình hành.

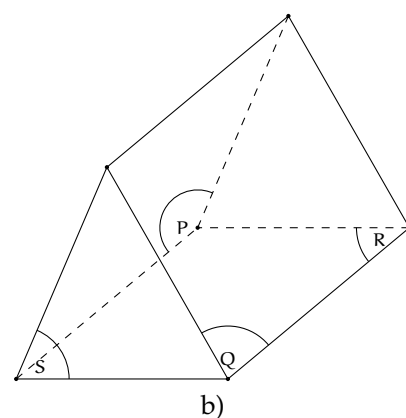


Ví dụ 7. Một chiếc lều (Hình a) được minh họa như Hình b.

- Tìm ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến song song.
- Tìm ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến đồng quy.



a)



b)

2.3 Bài tập

Bài tập 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm của BD và CD . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (ABC)

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang đáy AB . Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

Bài tập 3. Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD . Tìm giao tuyến của (AIJ) và (ACD)

Bài tập 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, AD, AC, BD .

- Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.
- Chứng minh ba đoạn MP, NQ, RS cắt nhau tại trung điểm của mỗi đoạn.

Bài tập 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm của AB, BC . Lấy Q thuộc AD và gọi P là giao điểm của CD và MN . Chứng minh $PQ \parallel MN$ và $PQ \parallel AC$.

Bài tập 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, H lần lượt là trung điểm của SA, SB, BC .

- Chứng minh rằng $MN \parallel CD$ và $NH \parallel SC$.
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNH) và $(ABCD)$.
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MDH) và (NAC) .

Bài tập 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi H, K, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD .

- Chứng minh $HKEF$ là hình bình hành.
- Tìm giao tuyến của (SHK) và (SCD)
- Tìm giao tuyến của (SEK) và (SAD)
- Gọi M là điểm bất kỳ trên BC . Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng $(ABCD)$ và (HKM) .

Bài tập 8. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thang có đáy lớn AB . Gọi E, F lần lượt là trung điểm SA, SB .

- Chứng minh $EF \parallel CD$
- Tìm giao điểm P của SC với (AFD)
- Gọi I là giao điểm của AF và DP . Chứng minh $SI \parallel AB \parallel CD$.
- Hình tính của tứ giác $SABI$.

Bài tập 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm nằm trên BC, SC, SD, AD sao cho $MN \parallel BS, NP \parallel CD, MQ \parallel CD$.

- Chứng minh $PQ \parallel SA$
- Gọi K là giao điểm của MN và PQ . Chứng minh $SK \parallel AD \parallel BC$.

Bài tập 10. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của CD ; I là một điểm thuộc cạnh AD ; (α) là mặt phẳng đi qua M , (α) song song với CI và BD , đồng thời cắt các cạnh AD, AB, BC lần lượt tại N, P, Q .

- Chứng minh $MN \parallel CI$
- $MNPQ$ là hình gì? Chứng minh.
- Gọi R là giao điểm của MP và NQ . Chứng minh R chạy trên một đường thẳng cố định khi I di động trên cạnh AD .

Bài tập 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC

- Tìm giao tuyến (d) của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) .
- Tìm giao điểm của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD) .
- Gọi N là giao điểm của SD và mặt phẳng (ABM) . Chứng minh (d), AN, BM đồng quy.

Bài tập 12. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AB và AC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

- a) Chứng minh $MN \parallel BC$
- b) Chứng minh giao tuyến của (MND) và (BCD) song song với BC .

Bài tập 13. Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm P, Q là trung điểm của AB và CD . Điểm R thuộc BC sao cho $BR = 2RC$. Gọi S là giao điểm của AD và (PQR) . Chứng minh $AS = 2SD$.

Bài tập 14. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và không nằm trong cùng một mặt phẳng. Điểm M nằm trên đường chéo AC và điểm N nằm trên đường chéo BF với $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}$

- a) Chứng minh DM và EN đồng quy tại trung điểm I của AB
- b) Chứng minh rằng $MN \parallel DE$

Bài tập 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC và N là trung điểm của OB (O là giao điểm của BD và AC).

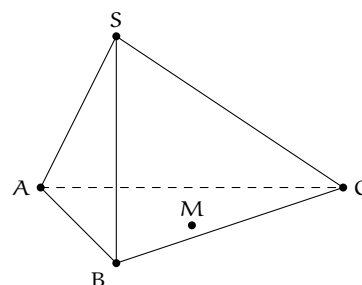
- a) Tìm giao điểm I của SD và (AMN)
- b) Tính tỷ số $\frac{SI}{ID}$.

2.4 Bài tập sách giáo khoa

Bài tập 16. Cho hai đường thẳng song song a và b . Mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- a) Một đường thẳng c cắt a thì cũng cắt b .
- b) Một đường thẳng c chéo với a thì cũng chéo với b .

Bài tập 17. Cho hình chóp $S.ABC$ và điểm M thuộc miền trong tam giác ABC (Hình 17). Qua M , vẽ đường thẳng d song song với SA , cắt (SBC) tại N . Trên hình vẽ, hãy chỉ rõ vị trí của điểm N và xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (CMN) .



Hình 17

Bài tập 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

- a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (SAB) .
- b) Lấy một điểm M trên đoạn SA (M khác S và A), mặt phẳng (BCM) cắt SD tại N . Tứ giác $CBMN$ là hình gì?

Bài tập 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I là trung điểm của SD . Hai mặt phẳng (IAC) và (SBC) cắt nhau theo giao tuyến Cx . Chứng minh rằng $Cx \parallel SB$.

Bài tập 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, AC và BD cắt nhau tại O . Gọi I là trung điểm của SO . Mặt phẳng (ICD) cắt SA, SB lần lượt tại M, N .

- a) Hãy nói cách xác định hai điểm M và N . Cho $AB = a$. Tính MN theo a .
- b) Trong mặt phẳng $(CDMN)$, gọi K là giao điểm của CN và DM . Chứng minh $SK \parallel BC \parallel AD$.

Bài tập 21. Chỉ ra các đường thẳng song song trong mỗi hình sau. Tìm thêm một số ví dụ khác về các đường thẳng song song trong thực tế.



a)



b)



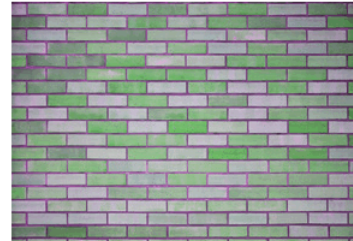
c)



d)



e)

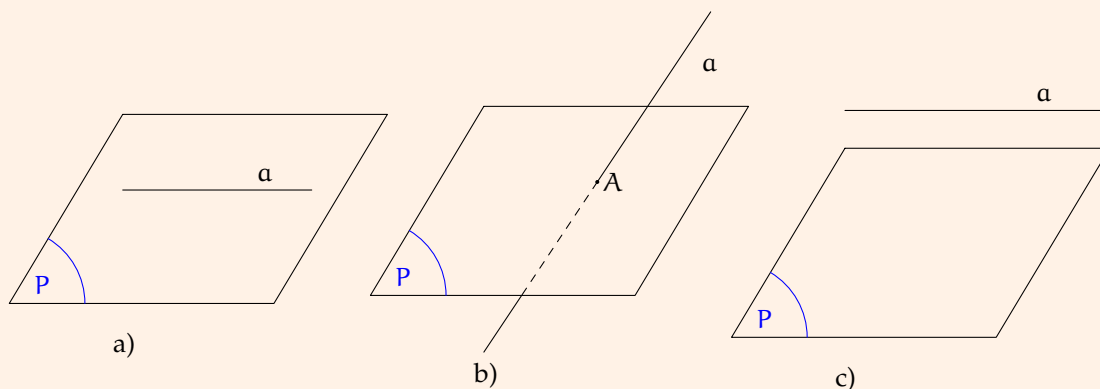


g)

Bài 3. Đường thẳng và mặt phẳng song song

3.1 Đường thẳng song song với mặt phẳng

Giới thiệu: Hình vẽ sau thể hiện 3 vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng trong không gian. Em hãy đặt tên cho từng trường hợp?



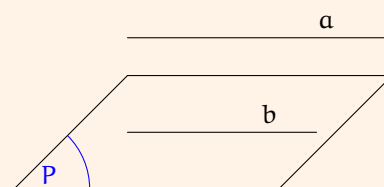
Hình 2

Khái niệm: Đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) nếu chúng không có điểm chung.

3.2 Điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng

Công thức cần nhớ:

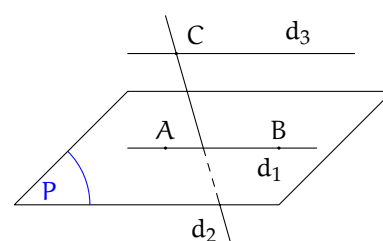
Định lý 1. Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng b nào đó nằm trong (P) thì a song song với (P) .



Hình 6

Ví dụ 1. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABMN$ không đồng phẳng. Xác định vị trí tương đối của mặt phẳng $(ABMN)$ lần lượt với các đường thẳng CD , BD và BN .

Ví dụ 2. Cho hai điểm A, B cùng thuộc mặt phẳng (P) và một điểm C không thuộc (P) . Vẽ đường thẳng d_1 đi qua A, B ; d_2 đi qua A, C ; d_3 đi qua C và song song với AB (Hình 7). Tìm số điểm chung của mỗi đường thẳng vừa vẽ với (P) . Xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) lần lượt đối với các đường thẳng d_1, d_2, d_3 .



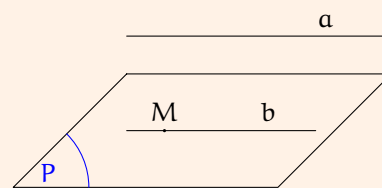
Hình 7

3.3 Tính chất cơ bản của đường thẳng và mặt phẳng song song

Công thức cần nhớ:

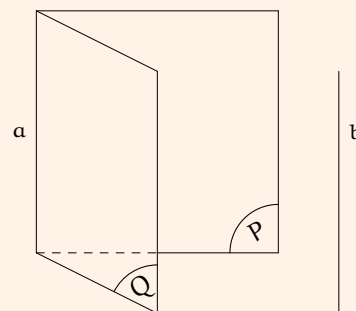
Định lý 2. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Nếu mặt phẳng (Q) chứa a , cắt (P) theo giao tuyến b thì a song song với b .

Hệ quả 1. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Nếu qua điểm M thuộc (P) ta vẽ đường thẳng b song song với a thì b phải nằm trong (P) .



Hình 12

Hệ quả 2. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



Hình 13

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có M và N lần lượt là trọng tâm của tam giác ACD và BCD . Chứng minh đường thẳng MN song song với các mặt phẳng (CAB) và (DAB) .

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có M là trung điểm của AB . Gọi (P) là mặt phẳng chứa CB và song song với SA , (Q) là mặt phẳng chứa CM và song song với SA .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) .
- Vẽ đường thẳng b qua B và $b \parallel SA$. Chứng minh $b \subset (P)$.

3.4 Mặt phẳng đi qua một trong hai đường thẳng chéo nhau và song song với đường còn lại.

Công thức cần nhớ:

Định lý 3. Nếu a và b là hai đường thẳng chéo nhau thì qua a , có một và chỉ một mặt phẳng song song với b .

Ví dụ 5. Cho tứ diện $ABCD$.

- Nêu cách vẽ mặt phẳng (P) chứa AB và song song với CD . Ta có thể vẽ bao nhiêu mặt phẳng (P) như vậy?
- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (BCD) .

3.5 Bài tập

Bài tập 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD . Chứng minh rằng MN song song với các mặt phẳng (ABC) và (ABD) .

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD .

- Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD) .
- Gọi E là trung điểm của SA . Chứng minh SB và SC đều song song với mặt phẳng (MNE) .

Bài tập 3. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm $\triangle ABC$, $M \in CD$ với $MC = 2MD$.

- Chứng minh $MG \parallel (ABD)$.
- Tìm $(ABD) \cap (BGM)$.
- Tìm $(ABD) \cap (AGM)$.

Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD . Chứng minh rằng:

- a) $BC \parallel (SAD)$. b) $AD \parallel (SBC)$. c) $MN \parallel (ABCD)$.
 d) $MN \parallel (SBC)$. e) $MO \parallel (SCD)$. f) $NO \parallel (SBC)$.

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có tâm O . Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE$, I là trung điểm AD .

- a) Chứng minh $OI \parallel (SAB)$ và $OI \parallel (SCD)$.
 b) Tìm giao điểm P của IE và (SBC) . Chứng minh $GE \parallel (SBC)$.

Bài tập 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD .

- a) Chứng minh $MN \parallel (SBC)$ và $MN \parallel (SAD)$.
 b) Gọi P là trung điểm cạnh SA . Chứng minh $SB \parallel (MNP)$ và $SC \parallel (MNP)$.
 c) Gọi G, I là trọng tâm của tam giác ABC và SBC . Chứng minh $GI \parallel (PAM)$.

Bài tập 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang đáy lớn AB , với $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , I là trung điểm của SA , G là trọng tâm của tam giác SBC và E là một điểm trên cạnh SD sao cho $3SE = 2SD$. Chứng minh:

- a) $DI \parallel (SBC)$. b) $GO \parallel (SCD)$. c) $SB \parallel (ACE)$.

Bài tập 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N là trung điểm của các cạnh AB, AD .

Gọi I, J thuộc SM, SN sao cho $\frac{SI}{SM} = \frac{SJ}{SN} = \frac{2}{3}$. Chứng minh

- a) $MN \parallel (SBD)$. b) $IJ \parallel (SBD)$. c) $SC \parallel (IJO)$.

Bài tập 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G và P lần lượt là trọng tâm của tam giác ACD và ABC . Chứng minh rằng $GP \parallel (BCD)$, $GP \parallel (ABD)$.

Bài tập 10. Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm của tam giác ABD và I là điểm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh $IG \parallel (ACD)$.

3.6 Bài tập sách giáo khoa

Bài tập 11. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo. Cho M là trung điểm của SC .

- a) Chứng minh đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SAB) .
 b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD) .

Bài tập 12. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không nằm trong cùng một mặt phẳng. Gọi O và O' lần lượt là tâm của $ABCD$ và $ABEF$.

- a) Chứng minh đường thẳng OO' song song với các mặt phẳng $(CDFE)$, (ADF) và (BCE) .
 b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và BE . Chứng minh $MN \parallel (CDFE)$.
 c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMN) và $(ABCD)$.

Bài tập 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và một điểm M di động trên cạnh AD . Một mặt phẳng (α) qua M , song song với CD và SA , cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q .

- a) $MNPQ$ là hình gì?
 b) Gọi $I = MQ \cap NP$. Chứng minh rằng I luôn luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di động trên AD .

Bài tập 14. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh AB . Gọi (α) là mặt phẳng qua M , song song với hai đường thẳng BC và AD . Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (α) với các cạnh AC, CD và DB .

- a) Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.
 b) Trong trường hợp nào thì $MNPQ$ là hình thoi?

Bài tập 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB . Gọi M là trung điểm của CD , (P) là mặt phẳng qua M song song với SA và BC . Tìm giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$.

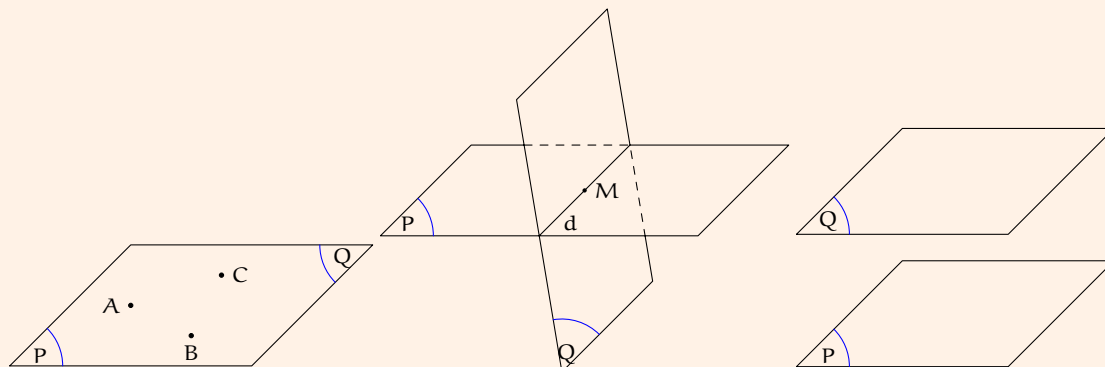
Bài tập 16. Mô tả vị trí tương đối của các đường thẳng a, b, c, d, e với mặt phẳng (P) là mặt trước của toà nhà trong hình dưới đây.



Bài 4. Hai mặt phẳng song song

4.1 Hai mặt phẳng song song

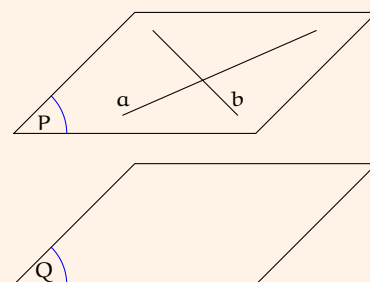
Giới thiệu: Hai mặt phẳng trong không gian có các vị trí tương đối sau: Trùng nhau, cắt nhau và song song



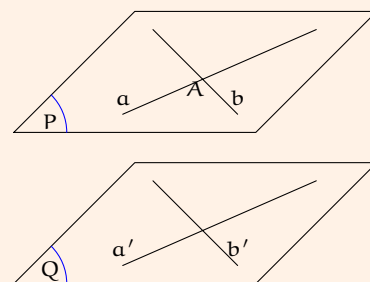
Khái niệm: Hai mặt phẳng được gọi là **song song** nếu chúng không có điểm chung.

Công thức cần nhớ:

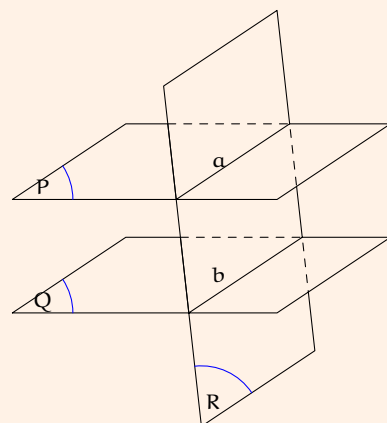
Định lí 1. Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và hai đường thẳng đó cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).



Định lí 2. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.



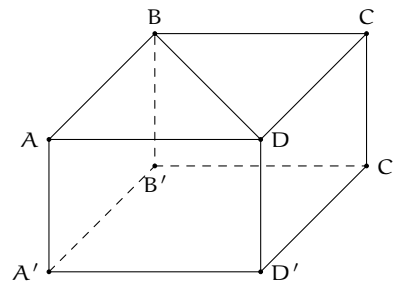
Định lí 3. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Nếu (R) cắt (P) thì cắt (Q) và hai giao tuyến của chúng song song với nhau.



Ví dụ 1. Hộp giấy có các mặt là hình chữ nhật ở Hình 3a được vẽ lại với các đỉnh là $A, B, C, D, A', B', C', D'$ như Hình 3b. Quan sát hộp giấy và chỉ ra các cặp mặt phẳng song song với nhau ở Hình 3b.

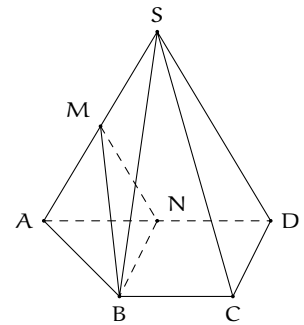


Hình 3a



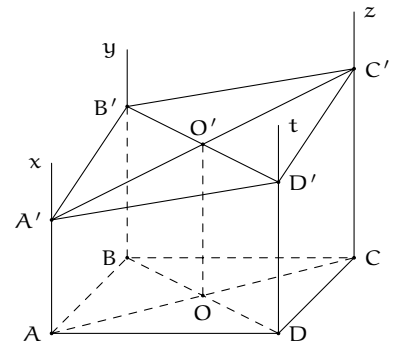
Hình 3b

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ đáy lớn AD và $AD = 2BC$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và AD . Chứng minh rằng hai mặt phẳng (BMN) và (SCD) song song với nhau.



Ví dụ 3. Trong mặt phẳng (P) , cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các nửa đường thẳng song song với nhau, nằm về một phía đối với (P) và lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D . Một mặt phẳng (P') cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D' .

- Chứng minh $mp(AA', BB')$ song song với $mp(CC', DD')$.
- Chứng minh tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.
- Gọi O và O' lần lượt là giao điểm của hai đường chéo của $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Chứng minh $OO' \parallel AA'$.



4.2 Bài tập

4.2.1 Chứng minh hai mặt phẳng song song

Lưu ý: Cách chứng minh hai mặt phẳng song song, ta cần chỉ ra

$$\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ b \parallel (\alpha) \\ a, b \subset (\beta) \\ a \cap b = A \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$

Bài tập 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P là trung điểm của AB, AC, AD . Chứng minh $(MNP) \parallel (BCD)$.

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P là trung điểm của SA, SB, SC . Chứng minh $(MNP) \parallel (ABCD)$.

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABC$. Các điểm I, J, K lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB, SBC, SCA . Chứng minh rằng $(IJK) \parallel (ABC)$.

Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P là trung điểm của AD, BC, SA . Chứng minh $(MNP) \parallel (SCD)$.

Bài tập 5. Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm ở hai mặt phẳng khác nhau. Chứng minh rằng $(ADF) \parallel (BCE)$.

Bài tập 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC . Gọi M, N là 2 điểm trên cạnh SA sao cho $SM = MN = NA$.

- Chứng minh $GM \parallel (SBC)$
- Gọi D là điểm đối xứng của A qua G . Chứng minh $(MCD) \parallel (NBG)$

Bài tập 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I, H, K lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC . Gọi M là giao điểm của AH và DK , N là giao điểm của DI và CH .

- Chứng minh $(IHK) \parallel (ABCD)$
- Chứng minh $(SMN) \parallel (IHK)$

Bài tập 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm trên AD . Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với AB và SC . Chứng minh $(\alpha) \parallel (SDC)$.

Bài tập 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi J là trung điểm SD và $O = AC \cap BD$.

- Tìm giao điểm của đường thẳng SA với mặt phẳng (BCJ)
- Gọi E, F, Q lần lượt là trung điểm của AD, DE, OA . Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (SQE) và (SCF) .
- Gọi M là điểm thuộc đoạn SC sao cho $MC = 3MS$. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (MFJ) và (SQE) song song với nhau.

Bài tập 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông và ΔSAB đều. Lấy một điểm M trên BC và điểm K trên SA sao cho $BM = AK$.

- Chứng minh $MK \parallel (SCD)$
- Mặt phẳng (α) qua M và song song với AB, SB . Mặt phẳng (α) cắt SC, SD, AD theo thứ tự tại N, P, Q . Chứng minh $MNPQ$ là hình thang.
- Tìm vị trí của M để $NK \parallel (ABCD)$.

Bài tập 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD .

- Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$
- Gọi P và Q là trung điểm của AB và ON . Chứng minh $PQ \parallel (SBC)$.

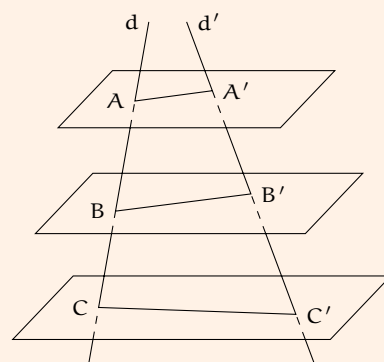
Bài tập 12. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O . Gọi H, K, I lần lượt là trung điểm của SA, CD, KS

- Chứng minh $(OHK) \parallel (SBC)$
- Gọi J là điểm trên $(ABCD)$ và cách đều AB, CD . Chứng minh $IJ \parallel (SAB)$
- Giả sử tam giác SAD, ABC đều cân tại A . Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của tam giác ACD và SAB . Chứng minh $EF \parallel (SAD)$.

4.3 Định lý Thalès trong không gian

Công thức cần nhớ:

Định lý 4. Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



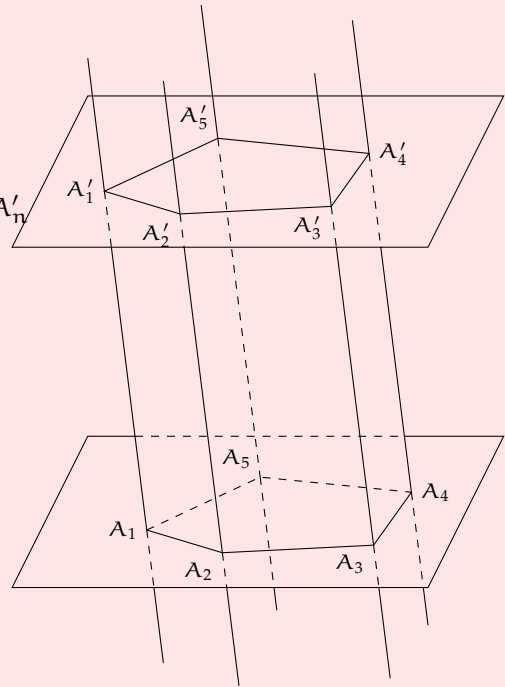
Ví dụ 4. Cho ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ đôi một song song. Hai đường thẳng d và d' cắt ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại A, B, C và A', B', C' . Cho $AB = 3, BC = 7, A'C' = 20$. Tính các độ dài $A'B', B'C'$.

4.4 Hình lăng trụ và hình hộp

Khái niệm: Cho hai mặt phẳng (P) và (P') song song với nhau. Trên (P) cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$. Qua các đỉnh của đa giác này, ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (P') lần lượt tại $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$. Hình tạo bởi các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, \dots, A_nA_1A'_1A'_n$ và hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n, A'_1A'_2 \dots A'_n$ gọi là hình lăng trụ, kí hiệu $A_1A_2 \dots A_n \cdot A'_1A'_2 \dots A'_n$.

Trong hình lăng trụ $A_1A_2 \dots A_n, A'_1A'_2 \dots A'_n$, ta gọi

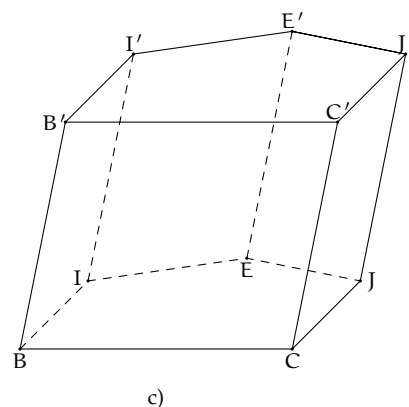
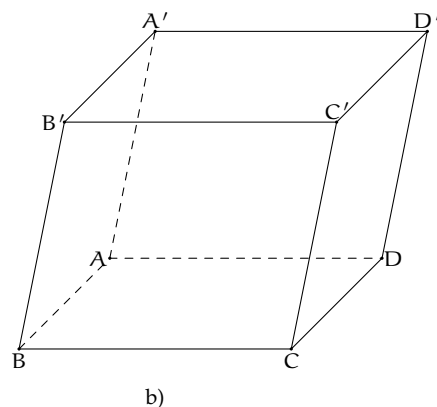
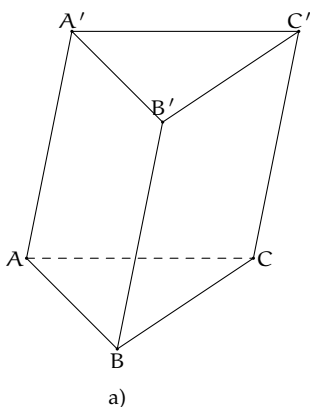
- Hai đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ và $A'_1A'_2 \dots A'_n$ là hai **mặt đáy** nằm trên hai mặt phẳng song song.
- Các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n, A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ là các **đỉnh**.
- Các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, \dots, A_nA_1A'_1A'_n$ là các **mặt bên**.
- Các đoạn thẳng $A_1A'_1, A_2A'_2, \dots, A_nA'_n$ là các **cạnh bên**.
- Các cạnh bên song song và bằng nhau.
- Các cạnh của hai đa giác đáy là các **cạnh đáy**. Các cạnh đáy tương ứng song song và bằng nhau.



Lưu ý: Hình lăng trụ có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... tương ứng được gọi là hình lăng trụ tam giác, hình lăng trụ tứ giác, hình lăng trụ ngũ giác, ...

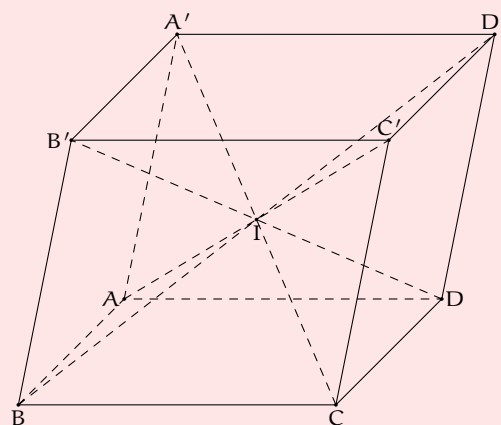
Ví dụ 5. Thực hiện theo các yêu cầu sau

- Gọi tên các hình lăng trụ trong các hình sau đây.
- Gọi tên các thành phần của hình lăng trụ trong hình đầu tiên.



Khái niệm: Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành. Trong một hình hộp ta có

- Sáu mặt là sáu hình bình hành. Mỗi mặt đều có một mặt song song với nó.
- Hai mặt như thế gọi là hai mặt đối diện.
- Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là đường chéo.
- Bốn đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.



Ví dụ 6. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Chứng minh (BDA') và $(B'D'C)$ là các mặt phẳng song song.

4.5 Bài tập sách giáo khoa

Bài tập 13. Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành $ABCD$. Ta dựng các nửa đường thẳng song song với nhau và nằm về một phía đối với (P) lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D . Một mặt phẳng (Q) cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D' . Chứng minh rằng

$$AA' + CC' = BB' + DD'.$$

Bài tập 14. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm của hai đường chéo. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD .

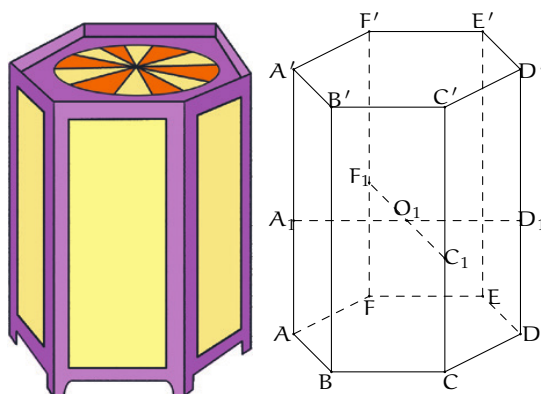
- Chứng minh rằng $(OMN) \parallel (SBC)$.
- Gọi E là trung điểm của AB và F là một điểm thuộc ON . Chứng minh EF song song với (SBC) .

Bài tập 15. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N' .

- Chứng minh $(CBE) \parallel (ADF)$.
- Chứng minh $(DEF) \parallel (MNN'M')$.

Bài tập 16. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác $B'D'A$ và BDC' . Chứng minh G và G' chia đoạn $A'C$ thành ba phần bằng nhau.

Bài tập 17. Để làm một khung lồng đèn kéo quân hình lăng trụ lục giác $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$, Bình gắn hai thanh tre A_1D_1, F_1C_1 song song với mặt phẳng đáy và cắt nhau tại O_1 (hình bên dưới).



- Xác định giao tuyến của mặt phẳng (A_1D_1, F_1C_1) với các mặt bên của lăng trụ.
- Cho biết $A'A_1 = 6AA_1$ và $AA' = 70$ cm, tính CC_1 và C_1C' .

Bài tập 18. Chỉ ra các mặt phẳng song song trong mỗi hình sau. Tìm thêm một số ví dụ khác về các mặt phẳng song song trong thực tế.



4.6 Bài tập và các dạng toán tổng hợp và nâng cao

Bài tập 19 (HKI 2011-2012 PTNK). Hình chóp $S.ABCD$ có O là tâm hình bình hành $ABCD$, điểm M thuộc cạnh SA sao cho $SM = 2MA$, N là trung điểm của AD .

- Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (SAD) và (MBC) .
- Tìm giao điểm I của SB và (CMN) ; giao điểm J của SA và (ICD) .
- Chứng minh ID, JC và SO đồng quy tại E . Tính tỷ số $\frac{SE}{SO}$

Bài tập 20 (HKI 2010-2011 THPT). Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD và K là điểm trên cạnh SB sao cho $SK = 2KB$

- Xác định giao tuyến (d_1) của (SBC) và (SAD) , giao tuyến (d_2) của (SBC) và (KMN)
- ĐM cắt (SBC) tại I . Tứ giác $ISDA$ là hình gì?
- Gọi J là giao điểm của (d_2) và SC . Tính tỷ số $\frac{S_{\Delta SNJ}}{S_{\Delta SDC}}$.

Bài tập 21 (HKI 2012-2013 THPT). Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình thang có đáy lớn là AB .

- Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (SAB) .
- Gọi Q là trung điểm SD , lấy $M \in SA$ sao cho $SA = 3SM$. Mặt phẳng (α) chứa MQ và song song AB , lần lượt cắt SB, SC tại N và K . Tứ giác $MNKQ$ là hình gì, vì sao? Tính tỷ số diện tích $\frac{S_{\Delta KNS}}{S_{\Delta BCS}}$
- Gọi I là giao điểm của AD và BC . Chứng minh rằng: MQ, NK, SI đồng quy.

Bài tập 22 (HKI 2011-2012 Lê Quý Đôn). Cho hình chóp $S.ABCD$ biết đáy là hình thang, có đáy lớn AD bằng 2 lần đáy nhỏ BC và O là giao điểm của AC và BD . Gọi E, F lần lượt là trung điểm SA và SD . Điểm G là trọng tâm tam giác SDC .

- Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD) ; (SAD) và (SBC) .
- Mặt phẳng (α) qua EF và song song SB , cắt CD và AB lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng $EQ \parallel SB$. Tứ giác $EFQP$ là hình gì?
- Chứng minh rằng $BE \parallel (SCD)$ và $GO \parallel (SBC)$.
- Tìm giao điểm M của SB và (CDE) . Chứng minh rằng $\frac{S_{\Delta SME}}{S_{\Delta SMF}} = \frac{S_{\Delta SBA}}{S_{\Delta SBD}}$

Bài tập 23 (HKI 2011-2012 PTNK). Hình chóp $S.ABCD$ có O là tâm của hình bình hành $ABCD$, điểm M thuộc cạnh SA sao cho $SM = 2MA$, N là trung điểm của AD .

- Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (SAD) và (MBC)
- Tìm giao điểm I của SB và (CMN) ; giao điểm J của SA và (ICD) .
- Chứng minh ID, JC và SO đồng quy tại E . Tính tỷ số $\frac{SE}{SO}$

Bài tập 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn $AB = 2a$, cạnh $AD = CD = a$. Mặt bên SAB là tam giác đều. Gọi M là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AM = x$, $(0 < x < a)$ và (α) là mặt phẳng qua M , song song với 2 cạnh SA và AB , cắt các cạnh BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q .

- Nêu rõ cách xác định thiết diện MNPQ của mặt phẳng (α) với hình chóp đã cho.
- Chứng minh thiết diện MNPQ là hình thang cân.
- Gọi I là giao điểm của MQ và NP. Chứng minh rằng khi điểm M di động trên đoạn AD thì điểm I luôn di động trên một đường thẳng cố định.

Bài tập 25. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang (đáy lớn AD).

- Tìm giao tuyến của các mặt phẳng (SAC) và (SBD), (SAD) và (SBC).
- Gọi M là trung điểm của SD. Tìm giao điểm K của AM và mặt phẳng (SBC). Tìm thiết diện của mặt phẳng (MAB) với hình chóp S.ABCD.
- Gọi G, H, I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD, SCD, SAB, SBC. Chứng minh $GH \parallel IJ$.

Bài tập 26. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang (đáy lớn AD). Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm AB, CD, SA

- Dựng thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và hình chóp S.ABCD
- Chứng minh rằng SC song song với (MNE). Gọi F là giao điểm (MNE) với SD. Đường thẳng AF có song song với mặt phẳng (SBC) không?
- Cho M, N là hai điểm cố định nằm lần lượt trên hai cạnh AB, CD sao cho MN song song với AD và E, F là hai điểm lần lượt di động trên các cạnh SA, SD sao cho EF song song với AD. Gọi I là giao điểm của ME và NF thì I di động trên đường nào?

Bài tập 27. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm BC, CD, DB

- Chứng minh rằng các mặt phẳng (ADI), (ABJ) và (ACK) có chung một đường thẳng.
- Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Xác định thiết diện của tứ diện với (KGE).

Bài tập 28. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a , $SA = SB = a$, $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = x$, ($0 < x < a$)

- Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MEF)? Thiết diện là hình gì?
- Tính diện tích thiết diện theo a và x .
- Tìm vị trí điểm M để diện tích thiết diện đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài tập 29. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a . Gọi M, P là hai điểm di động trên các cạnh AD và BC sao cho $AM = CP = x$, ($0 < x < a$). Một mặt phẳng qua MP và song song với CD cắt tứ diện theo một thiết diện.

- Chứng minh thiết diện thông thường là hình thang cân.
- Tìm x để diện tích thiết diện là nhỏ nhất.

Bài tập 30. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành với $AB = a$, $AD = 2a$ và $\triangle SAB$ vuông cân tại đỉnh A. Điểm M di động trên AD với $AM = x$. Mặt phẳng (α) qua M và song song với mặt phẳng (SAB), cắt BC, SC, SD lần lượt tại N, P, Q.

- Chứng minh MNPQ là hình thang vuông.
- Tính diện tích MNPQ theo a, x . Tính x để diện tích này bằng $\frac{3a^2}{8}$.
- Tìm tập hợp các giao điểm I của MQ và NP khi M di động trên AD.

Bài tập 31. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành, hai điểm M và P lần lượt di động trên AD và SC sao cho $\frac{MA}{MD} = \frac{PS}{PC} = x$, ($x > 0$).

- Chứng minh MP luôn song song với một mặt phẳng Q cố định.
- Mặt phẳng qua M song song với mặt phẳng (Q) cắt hình chóp S.ABCD theo một thiết diện và cắt BD tại J. Chứng minh IJ có phương không đổi. Tìm x để $PJ \parallel (SAD)$.

Bài tập 32. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a . Các điểm M, N lần lượt trên AD', DB sao cho $AM = DN = x, (0 < x < a\sqrt{2})$.

- Chứng minh khi x biến thiên, đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.
- Chứng minh rằng khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $MN \parallel A'C$.

Bài tập 33. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $AB, B'C', DD'$.

- Chứng minh (MNP) song song với các mặt phẳng $(AB'D')$ và (BDC') .
- Xác định thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (MNP) . Thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện của nó.

Bài tập 34. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Các mặt bên $ABB'A', ACC'A'$ là hình vuông. Gọi I, J là tâm các mặt bên nói trên và O là tâm đường ngoại tiếp tam giác ABC .

- Chứng minh $IJ \parallel (ABC)$.
- Xác định thiết diện của hình lăng trụ với mặt phẳng (IJD) . Chứng minh thiết diện là hình thang cân. Tính diện tích của nó theo a .

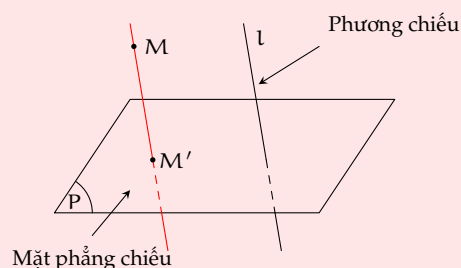
Bài 5. Phép chiếu song song

5.1 Khái niệm phép chiếu song song

Phép chiếu song song thường được dùng để biểu diễn các hình trong không gian lên một mặt phẳng.

Khái niệm:

Trong không gian, cho mặt phẳng (P) và đường thẳng l cắt (P). Với mỗi điểm M trong không gian, vẽ một đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với l . Đường thẳng này cắt (P) tại M' . Phép cho tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' trong (P) được gọi là phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương l .



- Mặt phẳng (P) được gọi là **mặt phẳng chiếu** và đường thẳng l được gọi là **phương chiếu** của phép chiếu song song nói trên.
- Phép chiếu song song theo phương l còn được gọi tắt là **phép chiếu theo phương l** .
- Điểm M' gọi là **ảnh** của điểm M qua phép chiếu theo phương l .
- Cho hình $\mathcal{H}$ trong không gian. Ta gọi tập hợp $\mathcal{H}'$ các ảnh M' của tất cả những điểm M thuộc $\mathcal{H}$ qua phép chiếu song song theo phương l là hình chiếu song song của $\mathcal{H}$ lên mặt phẳng (P).

5.2 Các tính chất cơ bản của phép chiếu song song

Tính chất cần nhớ:

Tính chất 1. Hình chiếu song song của một đường thẳng là một đường thẳng. Hình chiếu song song của một đoạn thẳng là một đoạn thẳng. Hình chiếu song song của một tia là một tia.

Tính chất 2. Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

Tính chất 3.

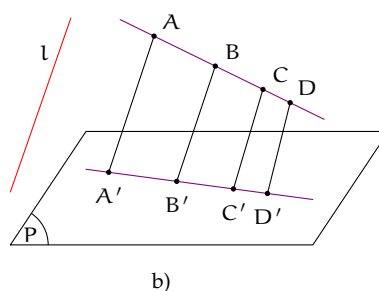
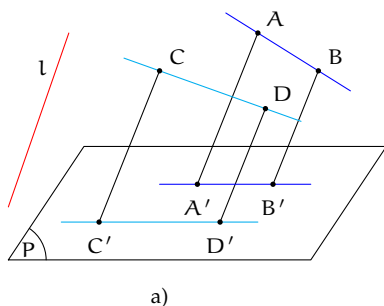
- Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

Ví dụ 1.

a) Tìm hình chiếu song song của đoạn thẳng AC, tia AB và đường thẳng AD trong Hình b).

b) Quan sát Hình a) và so sánh hai tỉ số $\frac{AB}{CD}, \frac{A'B'}{C'D'}$.

c) Quan sát Hình b) và so sánh hai tỉ số $\frac{DA}{DB}, \frac{D'A'}{D'B'}$.



5.3 Hình biểu diễn của một hình không gian

Khái niệm: Hình biểu diễn của một hình $\mathcal{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của $\mathcal{H}$ trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

Lưu ý: Dựa theo tính chất của phép chiếu song song, ta phải tuân theo một số quy tắc khi vẽ hình biểu diễn, chẳng hạn như

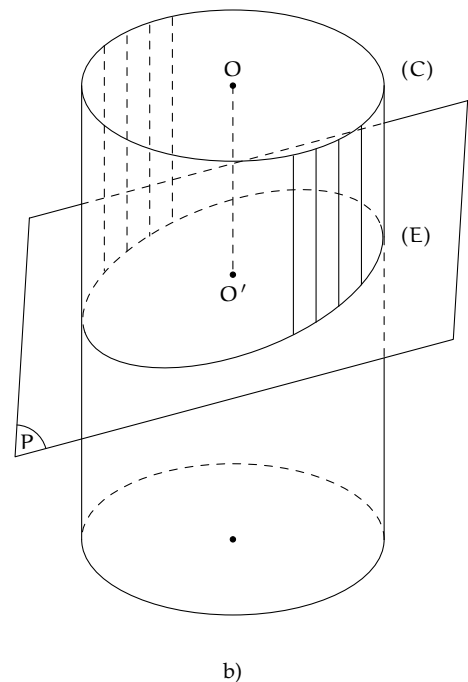
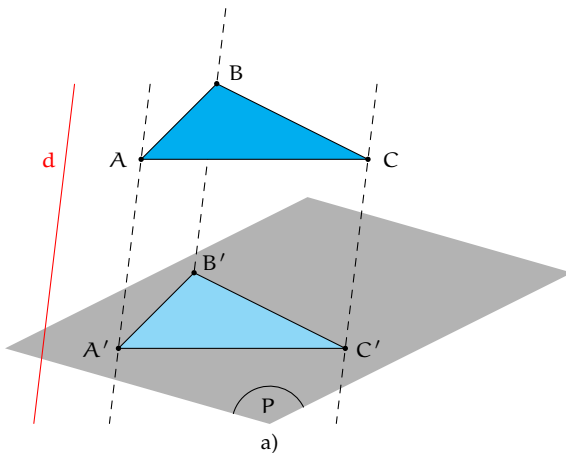
- Nếu trên hình $\mathcal{H}$ có hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) thì chúng được biểu diễn bằng hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) và tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng này phải bằng tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng tương ứng trên hình $\mathcal{H}$.
- Nếu hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu thì
 - Hình biểu diễn của một đường tròn thường là một elip.
 - Hình biểu diễn của một tam giác (vuông, cân, đều) là một tam giác.
 - Hình biểu diễn của hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành.

Ví dụ 2. Quan sát bên dưới và tìm hình biểu diễn của

a) đoạn thẳng AB.

b) tam giác ABC.

c) đường tròn (C) tâm O.



Ví dụ 3. Vẽ hình biểu diễn và nêu nhận xét về hình biểu diễn của các mặt của các hình sau

a) Hình hộp.

b) Lăng trụ có đáy là lục giác đều.

c) Tứ diện.

5.4 Bài tập

Bài tập 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó.
- Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó.
- Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
- Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.

Bài tập 2. Vẽ hình biểu diễn của một lục giác đều.

Bài tập 3. Vẽ hình biểu diễn của một hình vuông nội tiếp trong một hình tròn.

Bài tập 4. Cho hai điểm A, B nằm ngoài mặt phẳng (α) và đường thẳng d cắt (α) . Giả sử đường thẳng AB cắt (α) tại điểm O . Gọi A' và B' lần lượt là hình chiếu song song của A và B trên (α) theo phương của đường thẳng d . Ba điểm O, A', B' có thẳng hàng không? Vì sao? Chọn d sao cho

a) $A'B' = AB$.

b) $A'B' = 2AB$.

Bài tập 5. Vẽ hình biểu diễn của

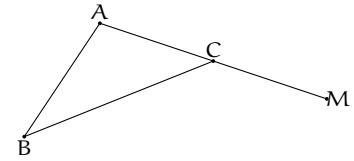
- a) Hình lăng trụ có đáy là tam giác đều.
- b) Hình lăng trụ có đáy là lục giác đều.
- c) Hình hộp.

Bài 6. Bài tập cuối chương

6.1 Câu hỏi trắc nghiệm

Câu 1. Cho tam giác ABC. Lấy điểm M trên cạnh AC kéo dài (Hình bên). Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

- A. $M \in (ABC)$. B. $C \in (ABM)$. C. $A \in (MBC)$. D. $B \in (ACM)$.



Câu 2. Cho tứ diện ABCD với I và J lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Bốn điểm I, J, B, C đồng phẳng. B. Bốn điểm I, J, A, C đồng phẳng.
C. Bốn điểm I, J, B, D đồng phẳng. D. Bốn điểm I, J, C, D đồng phẳng.

Câu 3. Cho hình chóp S.ABCD có AC cắt BD tại M, AB cắt CD tại N. Trong các đường thẳng sau đây, đường nào là giao tuyến của (SAC) và (SBD)?

- A. SM. B. SN. C. SB. D. SC.

Câu 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD. Trong các đường thẳng sau, đường nào **không song song** với IJ?

- A. EF. B. CD. C. AD. D. AB.

Câu 5. Cho hình bình hành ABCD và một điểm S không nằm trong mặt phẳng (ABCD). Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là một đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

- A. AB. B. AC. C. BC. D. SA.

Câu 6. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng 10. M là điểm trên SA sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và CD, cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là

- A. $\frac{400}{9}$. B. $\frac{200}{3}$. C. $\frac{40}{9}$. D. $\frac{200}{9}$.

Câu 7. Quan hệ song song trong không gian có tính chất nào trong các tính chất sau?

- A. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (P) đều song song với (Q).
B. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (P) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (Q).
C. Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.
D. Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

Câu 8. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AA', A'C', BC. Ta có

- A. (MNP) $\parallel$ (BCA). B. (MNQ) $\parallel$ (A'B'C'). C. (NQP) $\parallel$ (CAB). D. (MPQ) $\parallel$ (ABA').

6.2 Bài tập tự luận

Bài tập 1. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và A'B' và O là một điểm thuộc miền trong của mặt bên CC'D'D. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (OMN) với các mặt của hình hộp.

Bài tập 2. Cho hình chóp S.ABCD với ABCD là hình thoi cạnh a, tam giác SAD đều, M là điểm trên cạnh AB, (α) là mặt phẳng qua M và (α) $\parallel$ (SAD) cắt CD, SC, SB lần lượt tại N, P, Q.

- a) Chứng minh rằng MNPQ là hình thang cân.
b) Đặt $AM = x$, tính diện tích MNPQ theo a và x.

Bài tập 3. Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng chéo nhau a, b cắt (α) tại A và B. Gọi d là đường thẳng thay đổi luôn luôn song song với (α) và cắt a tại M, cắt b tại N. Qua điểm N dựng đường thẳng song song với a cắt (α) tại điểm C.

- a) Tứ giác MNCA là hình gì?
b) Chứng minh rằng điểm C luôn luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

Bài tập 4. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc các đường chéo AC và BF sao cho $MC = 2MA$; $NF = 2NB$. Qua M, N kẻ các đường thẳng song song với AB , cắt các cạnh AD, AF lần lượt tại M_1, N_1 . Chứng minh rằng

- a) $MN \parallel DE$;
- b) $M_1N_1 \parallel (DEF)$;
- c) $(MNN_1M_1) \parallel (DEF)$.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1. D	2. D	3. A	4. C	5. A	6. A	7. A	8. D
------	------	------	------	------	------	------	------

Chương 5

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Bài 1. Số trung bình và một của mẫu số liệu ghép nhóm

1.1 Số liệu ghép nhóm

Khái niệm: Mẫu số liệu ghép nhóm thường được trình bày dưới dạng bảng thống kê có dạng như sau:

Bảng 1: Bảng tần số ghép nhóm

Nhóm	$[u_1; u_2)$	$[u_2; u_3)$	...	$[u_k; u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	...	n_k

- Bảng trên gồm k nhóm $[u_j; u_{j+1})$ với $1 \leq j \leq k$, mỗi nhóm gồm một số giá trị được ghép theo một tiêu chí xác định.
- Cỡ mẫu $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.
- Giá trị chính giữa mỗi nhóm được dùng làm giá trị đại diện cho nhóm ấy. Ví dụ nhóm $[u_1; u_2)$ có giá trị đại diện là $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$.
- Hiệu $u_{j+1} - u_j$ được gọi là độ dài của nhóm $[u_j; u_{j+1})$.

Ví dụ 1. Tính giá trị đại diện và độ dài của mỗi nhóm trong mẫu số liệu sau

Khoảng tuổi	$[20; 30)$	$[30; 40)$	$[40; 50)$	$[50; 60)$	$[60; 70)$
Số khách hàng nữ	3	9	6	4	4

📌 Lưu ý: Một số quy tắc ghép nhóm của mẫu số liệu

Mỗi mẫu số liệu có thể được ghép nhóm theo nhiều cách khác nhau nhưng thường tuân theo một số quy tắc sau:

- Sử dụng từ $k = 5$ đến $k = 20$ nhóm. Cỡ mẫu càng lớn thì cần càng nhiều nhóm số liệu. Các nhóm có cùng độ dài bằng L thoả mãn $R < k \cdot L$, trong đó R là khoảng biến thiên, k là số nhóm.
- Giá trị nhỏ nhất của mẫu thuộc vào nhóm $[u_1; u_2)$ và càng gần u_1 càng tốt. Giá trị lớn nhất của mẫu thuộc nhóm $[u_k; u_{k+1})$ và càng gần u_{k+1} càng tốt.

Ví dụ 2. Cân nặng của 28 học sinh nam lớp 11 được cho như sau:

55,4 62,6 54,2 56,8 58,8 59,4 60,7 58 59,5 63,6 61,8 52,3 63,4 57,9
49,7 45,1 56,2 63,2 46,1 49,6 59,1 55,3 55,8 45,5 46,8 54 49,2 52,6

Hãy chia mẫu dữ liệu trên thành 5 nhóm, lập bảng tần số ghép nhóm và xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm.

- Các đầu mút của các nhóm có thể không là giá trị của mẫu số liệu.
- Ta hay gặp các bảng số liệu ghép nhóm là số nguyên, chẳng hạn như bảng thống kê số lỗi chính tả trong bài kiểm tra giữa học kỳ 1 môn Ngữ Văn của học sinh khối 11 như sau:

Số lỗi	$[1; 2]$	$[3; 4]$	$[5; 6]$	$[7; 8]$	$[9; 10]$
Số bài	122	75	14	5	2

Bảng số liệu này không có dạng như Bảng 1. Để thuận lợi cho việc tính các số đặc trưng cho bảng số

liệu này, người ta hiệu chỉnh về dạng như Bảng 1 bằng cách thêm và bớt 0,5 đơn vị vào đầu mút bên phải và bên trái của mỗi nhóm số liệu như sau:

Số lỗi	[0,5; 2,5)	[2,5; 4,5)	[4,5; 6,5)	[6,5; 8,5)	[8,5; 10,5)
Số bài	122	75	14	5	2

Ví dụ 3. Một cửa hàng đã thống kê số ba lô bán được mỗi ngày trong tháng 9 với kết quả cho như sau:

12	29	12	19	15	21	19	29	28	12	15	25	16	20	29
21	12	24	14	10	12	10	23	27	28	18	16	10	20	21

Hãy chia mẫu số liệu trên thành 5 nhóm, lập bảng tần số ghép nhóm, hiệu chỉnh bảng tần số ghép nhóm và xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm.

1.2 Số trung bình

Khái niệm: Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\bar{x}$, được tính như sau

$$\bar{x} = \frac{n_1c_1 + n_2c_2 + \dots + n_kc_k}{n},$$

trong đó $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Ý nghĩa của số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm: Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho số trung bình của mẫu số liệu gốc. Nó thường dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

Ví dụ 4. Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở mỗi lô hàng A và B được cho ở bảng sau:

Cân nặng (g)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số quả cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

- Hãy ước lượng cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A và lô hàng B.
- Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng nào nặng hơn?

1.3 Mốt

Khái niệm: Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là nhóm có tần số lớn nhất.

Giả sử nhóm chứa mốt là $[u_m; u_{m+1})$, khi đó mốt của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu là M_0 , được xác định bởi công thức

$$M_0 = u_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} \cdot (u_{m+1} - u_m).$$

Nếu không có nhóm kề trước của nhóm chứa mốt thì $u_{m-1} = 0$. Nếu không có nhóm kề sau của nhóm chứa mốt thì $n_{m+1} = 0$.

Ví dụ 5. Một công ty xây dựng khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua nhà ở mức giá nào. Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau

Mức giá (triệu đồng/m ²)	[10; 14)	[14; 18)	[18; 22)	[22; 26)	[26; 30)
Số khách hàng	54	78	120	45	12

- Tìm mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- Công ty nên xây nhà ở mức giá nào để nhiều người có nhu cầu mua nhất?

Ví dụ 6. Số cuộc gọi điện thoại một người thực hiện mỗi ngày trong 30 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên được thống kê trong bảng sau:

Số cuộc gọi	[3; 5]	[6; 8]	[9; 11]	[12; 14]	[15; 17]
Số ngày	5	13	7	3	2

- a) Tìm một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- b) Hãy dự đoán xem khả năng người đó thực hiện bao nhiêu cuộc gọi mỗi ngày là cao nhất.

Ý nghĩa của một của mẫu số liệu ghép nhóm

- Một của mẫu số liệu không ghép nhóm là giá trị có khả năng xuất hiện cao nhất khi lấy mẫu. Một của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm M_0 xấp xỉ với một của mẫu số liệu không ghép nhóm. Các giá trị nằm xung quanh M_0 thường có khả năng xuất hiện cao hơn các giá trị khác.
- Một mẫu số liệu ghép nhóm có thể có nhiều nhóm chứa một và nhiều một.

1.4 Bài tập

Bài tập 1. Anh Văn ghi lại cự li 30 lần ném lao của mình ở bảng sau (đơn vị: mét):

72,1	72,9	70,2	70,9	72,2	71,5	72,5	69,3	72,3	69,7
72,3	71,5	71,2	69,8	72,3	71,1	69,5	72,2	71,9	73,1
71,6	71,3	72,2	71,8	70,8	72,2	72,2	72,9	72,7	70,7

- a) Tính cự li trung bình của mỗi lần ném.
- b) Tổng hợp lại kết quả ném của anh Văn vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Cự li (m)	[69,2; 70)	[70; 70,8)	[70,8; 71,6)	[71,6; 72,4)	[72,4; 73,2)
Số lần	?	?	?	?	?

- c) Hãy ước lượng cự li trung bình mỗi lần ném từ bảng tần số ghép nhóm trên.
- d) Khả năng anh Văn ném được khoảng bao nhiêu mét là cao nhất?

Bài tập 2. Người ta đếm số xe ô tô đi qua một trạm thu phí mỗi phút trong khoảng thời gian từ 9 giờ đến 9 giờ 30 phút sáng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau:

15	16	13	21	17	23	15	21	6	11	12	23	19	25	11
25	7	29	10	28	29	24	6	11	23	11	21	9	27	15

- a) Tính số xe trung bình đi qua trạm thu phí trong mỗi phút.
- b) Tổng hợp lại số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Số xe	[6; 10]	[11; 15]	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]
Số lần	?	?	?	?	?

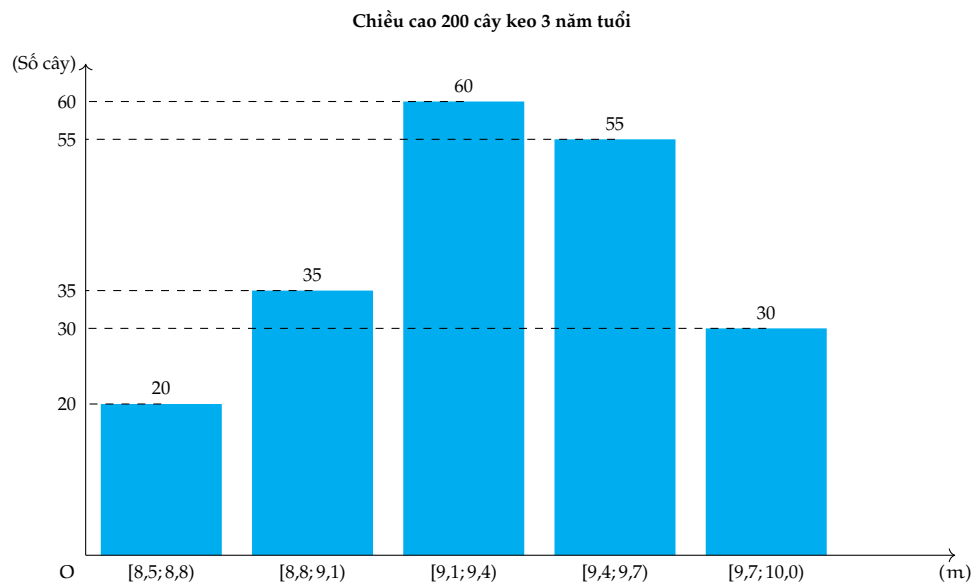
- c) Hãy ước lượng trung bình số xe đi qua trạm thu phí trong mỗi phút từ bảng tần số ghép nhóm trên.

Bài tập 3. Một thư viện thống kê số lượng sách được mượn mỗi ngày trong ba tháng ở bảng sau:

Số sách	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]	[36; 40]	[41; 45]	[46; 50]
Số ngày	3	6	15	27	22	14	5

Hãy ước lượng số trung bình và một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Bài tập 4. Kết quả đo chiều cao của 200 cây keo 3 năm tuổi ở một nông trường được biểu diễn ở biểu đồ dưới đây.



Hãy ước lượng số trung bình và một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Bài 2. Trung vị và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

2.1 Trung vị

Khái niệm: Công thức xác định trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- Gọi n là cỡ mẫu.
- Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa trung vị;
- n_m là tần số của nhóm chứa trung vị;
- $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}$.

Khi đó

$$M_e = u_m + \frac{\frac{n}{2} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m).$$

Ví dụ 1. Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả bơ ở một lô hàng cho trong bảng sau:

Cân nặng (g)	[150; 155)	[155; 160)	[160; 165)	[165; 170)	[170; 175)
Số quả bơ	1	7	12	3	2

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Ví dụ 2. Trong tuần lễ bảo vệ môi trường, các học sinh khối 11 tiến hành thu nhặt vỏ chai nhựa để tái chế. Nhà trường thống kê kết quả thu nhặt vỏ chai của học sinh khối 11 ở bảng sau:

Số vỏ chai nhựa	[11; 15]	[16; 29]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]
Số học sinh	53	82	48	39	18

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Ý nghĩa của trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Từ dữ liệu ghép nhóm nói chung không thể xác định chính xác trung vị của mẫu số liệu gốc. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho mẫu số liệu gốc và có thể lấy làm giá trị đại diện cho mẫu số liệu.

Ví dụ 3. Trong một hội thao, thời gian chạy 200 m của một nhóm các vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian (giây)	[21; 21,5)	[21,5; 22)	[22; 22,5)	[22,5; 23)	[23; 23,5)
Số vận động viên	5	12	32	45	30

Dựa vào bảng số liệu trên, ban tổ chức muốn chọn ra khoảng 50% số vận động viên chạy nhanh nhất để tiếp tục thi vòng 2. Ban tổ chức nên chọn các vận động viên có thời gian chạy không quá bao nhiêu giây?

2.2 Tứ phân vị

Khái niệm: Công thức xác định tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_2 , cũng chính là trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Để tìm tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_1 , ta thực hiện như sau:

- Giả sử nhóm $[u_m; u_{m+1})$ chứa tứ phân vị thứ nhất;
- n_m là tần số của nhóm tứ phân vị thứ nhất;
- $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{m-1}$.

Khi đó

$$Q_1 = u_m + \frac{\frac{n}{4} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m).$$

Tương tự, để tìm tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_3 , ta thực hiện như sau:

- Giả sử nhóm $[u_j; u_{j+1})$ chứa tứ phân vị thứ ba;
- n_j là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ ba;
- $C = n_1 + n_2 + \dots + n_{j-1}$.

Khi đó

$$Q_3 = u_j + \frac{\frac{3n}{4} - C}{n_j} \cdot (u_{j+1} - u_j).$$

Ví dụ 4. Thời gian luyện tập trong một ngày (tính theo giờ) của một số vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian luyện tập (giờ)	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Số vận động viên	3	8	12	12	4

Hãy xác định các tứ phân vị của mẫu số liệu đã cho.

Huấn luyện viên muốn xác định nhóm gồm 25% các vận động viên có số giờ luyện tập cao nhất. Hỏi huấn luyện viên nên chọn các vận động viên có thời gian luyện tập từ bao nhiêu giờ trở lên vào nhóm này?

Nếu tứ phân vị thứ k là $\frac{1}{2}(x_m + x_{m+1})$, trong đó x_m và x_{m+1} thuộc hai nhóm liên tiếp, ví dụ như $x_m \in [u_{j-1}; u_j)$ và $x_{m+1} \in [u_j; u_{j+1})$ thì ta lấy $Q_k = u_j$.

Ví dụ 5. Một hãng xe ô tô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau 2 năm sử dụng đầu tiên ở bảng sau:

Số lần gặp sự cố	[1; 2]	[3; 4]	[5; 6]	[7; 8]	[9; 10]
Số xe	17	33	25	20	5

- Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- Một người cho rằng có trên 25% xe của hãng gặp không ít hơn 4 sự cố về động cơ trong 2 năm sử dụng đầu tiên. Nhận định trên có hợp lý không?

Ý nghĩa của tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- Ba điểm tứ phân vị chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự không giảm thành bốn phần đều nhau.
- Giống như với trung vị, nói chung không thể xác định chính xác các điểm tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.
- Bộ ba tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và được sử dụng làm giá trị đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.
- Tứ phân vị thứ nhất và thứ ba đo xu thế trung tâm của nửa dưới (các dữ liệu nhỏ hơn Q_2) và nửa trên (các dữ liệu lớn hơn Q_2) của mẫu số liệu.

Ví dụ 6. Một người thống kê lại thời gian thực hiện các cuộc gọi điện thoại của người đó trong một tuần ở bảng sau:

Thời gian (đơn vị: giây)	[0; 60)	[60; 120)	[120; 180)	[180; 240)	[240; 300)	[300; 360)
Số cuộc gọi	8	10	7	5	2	1

Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Ví dụ 7. Một phòng khám thống kê số bệnh nhân đến khám bệnh mỗi ngày trong tháng 4 năm 2022 ở bảng sau:

Số bệnh nhân	[1; 10]	[11; 20]	[21; 30]	[31; 40]	[41; 50]
Số ngày	7	8	7	6	2

- Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.
- Quản lý phòng khám cho rằng có khoảng 25% số ngày khám có nhiều hơn 35 bệnh nhân đến khám. Nhận định trên có hợp lý không?

2.3 Bài tập

Bài tập 1. Lương tháng của một số nhân viên văn phòng được ghi lại như sau (đơn vị: triệu đồng):

12,5	9,6	11,7	12,7	10,0	10,0	12,2	9,8	10,9	6,7	13,6	9,2
13,1	6,5	10,7	8,9	11,2	13,2	8,3	11,1	11,9	8,4	6,7	13,8

- a) Tìm tứ phân vị của dãy số liệu trên.
b) Tổng hợp lại dãy số liệu trên dựa vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Lương tháng (triệu đồng)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)
Số nhân viên	?	?	?	?

- c) Hãy ước lượng tứ phân vị của số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên.

Bài tập 2. Số điểm một cầu thủ bóng rổ ghi được trong 20 trận đấu được cho ở bảng sau:

25	23	21	13	8	14	15	18	22	11
24	12	14	14	18	6	8	25	10	11

- a) Tìm tứ phân vị của dãy số liệu trên.
b) Tổng hợp lại dãy số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Điểm số	[6; 10]	[11; 15]	[16; 20]	[21; 25]
Số trận	?	?	?	?

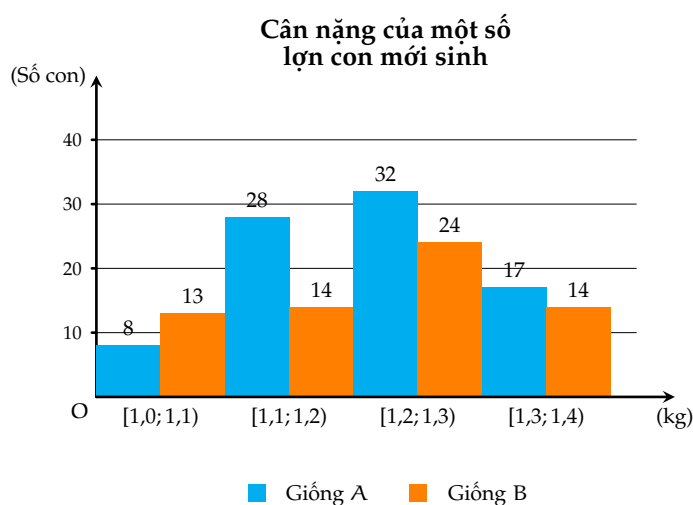
- c) Hãy ước lượng tứ phân vị của số liệu từ bảng tần số ghép nhóm trên.

Bài tập 3. Kiểm tra điện lượng của một số viên pin tiểu do một hãng sản xuất thu được kết quả như sau:

Điện lượng (nghìn mAh)	[0,9; 0,95)	[0,95; 1,0)	[1,0; 1,05)	[1,05; 1,1)	[1,1; 1,15)
Số viên pin	10	20	35	15	5

Hãy ước lượng số trung bình, một và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Bài tập 4. Cân nặng của một số lợn con mới sinh thuộc hai giống A và B được cho ở biểu đồ dưới đây (đơn vị: kg).



- a) Hãy so sánh cân nặng của lợn con mới sinh giống A và giống B theo số trung bình và trung vị.
b) Hãy ước lượng tứ phân vị thứ nhất và thứ ba của cân nặng lợn con mới sinh giống A và của cân nặng lợn con mới sinh giống B.

Bài 3. Bài tập cuối chương

3.1 Câu hỏi trắc nghiệm

Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một cửa hàng được ghi lại ở bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	[5;7)	[7;9)	[9;11)	[11;13)	[13;15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Câu 1. Số trung bình của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. [7;9). B. [9;11). C. [11;13). D. [13;15).

Câu 2. Trung vị của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. [7;9). B. [9;11). C. [11;13). D. [13;15).

Câu 3. Một của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

- A. [7;9). B. [9;11). C. [11;13). D. [13;15).

Câu 4. Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau

- A. 7. B. 7,6. C. 8. D. 8,6.

Câu 5. Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau

- A. 10. B. 11. C. 12. D. 13.

3.2 Bài tập tự luận

Câu 6. Thống kê điểm trung bình môn Toán của một số học sinh lớp 11 được cho ở bảng sau:

Khoảng điểm	[6,5;7)	[7;7,5)	[7,5;8)	[8;8,5)	[8,5;9)	[9;9,5)	[9,5;10)
Tần số	8	10	16	24	13	7	4

Hãy ước lượng số trung bình, tứ phân vị và một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Câu 7. Để kiểm tra thời gian sử dụng pin của một chiếc điện thoại mới, chị An thống kê thời gian sử dụng điện thoại của mình từ lúc sạc đầy pin cho đến khi hết pin ở bảng sau:

Thời gian sử dụng (giờ)	[7;9)	[9;11)	[11;13)	[13;15)	[15;17)
Số lần	2	5	7	6	3

a) Hãy ước lượng thời gian sử dụng trung bình từ lúc chị An sạc đầy pin điện thoại cho tới khi hết pin.

b) Chị An cho rằng có khoảng 25% số lần sạc điện thoại chỉ dùng được 10 giờ. Nhận định của chị An có hợp lý không?

Câu 8. Tổng số lượng mưa trong tháng 8 đo được tại một trạm quan trắc đặt tại Vũng Tàu từ năm 2002 đến năm 2020 được ghi lại như dưới đây (đơn vị: mm)

121,8 158,3 334,9 200,9 165,6 161,5 194,3 220,7 189,8 243,2
165,9 165,9 134 173 169, 189, 254 168 255

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

a) Xác định số trung bình, tứ phân vị và một của mẫu số liệu trên.

b) Hoàn thiện bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Tổng lượng mưa trong tháng 8 (mm)	[120;175)	[175;230)	[230;285)	[285;340)
Số năm	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng số trung bình, tứ phân vị và một của mẫu số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên.

Câu 9. Bảng sau thống kê số ca nhiễm mới SARS-CoV-2 mỗi ngày trong tháng 12/2021 tại Việt Nam.

Ngày	Số ca	Ngày	Số ca	Ngày	Số ca	Ngày	Số ca
1	15 139	9	15 965	17	15 685	25	16 046
2	14 295	10	15 474	18	16 363	26	15 667
3	14 254	11	16 830	19	16 586	27	15 310
4	14 598	12	15 264	20	15 420	28	14 866
5	14 927	13	16 035	21	16 806	29	14 299
6	15 215	14	15 871	22	17 044	30	20 454
7	14 433	15	16 192	23	16 860	31	17 004
8	15 223	16	15 720	24	16 633		

(Nguồn: worldmeters.info)

- a) Xác định số trung bình và tứ phân vị của mẫu số liệu trên. Mẫu số liệu có bao nhiêu có bao nhiêu giá trị ngoại lệ?
- b) Hoàn thiện bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Số ca (nghìn)	[14; 15,5)	[15,5; 17)	[17; 18,5)	[18,5; 20)	[20; 21,5)
Số ngày	?	?	?	?	?

- c) Hãy ước lượng số trung bình và tứ phân vị của mẫu số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1. B 2. B 3. B 4. C 5. B