

Lời giải đề thi KSCL THPT Bình Phú

LÊ PHÚC LỮ *, NGUYỄN THẾ BÌNH †

Ngày 1 tháng 6 năm 2020

Trong bài viết này, chúng tôi sẽ giải và phân tích chi tiết các câu trong đề thi thử THPT QG của trường THPT Bình Phú (tỉnh Bình Dương), thi vào ngày 23/05/2020 vừa qua. Đề này gần đây cũng được nhiều thầy cô đánh giá rằng chất lượng không ổn vì hình thức cũng như phân bố các câu không hợp lý. Qua quá trình giải các bài, nhóm tác giả cũng công nhận điều này. Cụ thể là khá nhiều câu phát biểu không rõ, muốn thêm bớt các ý cho "mẹo mực" hơn nhưng thành ra tối nghĩa, không ít câu bị sai đề; thậm chí đưa một bài Vật lý rất khó vào vị trí câu nhận biết của đề.

Tuy nhiên, cũng không thể không kể đến một số ý tưởng độc và lạ, cách đặt vấn đề thú vị và mới mẻ ở nhiều câu; có thể giúp các bạn thí sinh có mục tiêu 8+, 9+ có dịp thử thách thêm. Đó là các lý do chúng tôi thực hiện tài liệu này, và nhóm cũng chủ động điều chỉnh các câu bị sai sót, có vấn đề theo hướng hợp lý nhất có thể. Mong rằng tài liệu này ít nhiều cũng sẽ có giá trị cho các bạn học sinh chuẩn bị tham gia kỳ thi THPT QG 2020 sắp tới.

Câu 1. Hàm số nào dưới đây có nhiều cực trị nhất?

A. $y = x^2 + 2$.

B. $y = \ln(x) + 1$.

C. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$.

D. $y = x^4 - x^2 + 2x$.

Lời giải

Xét từng đáp án

A. Hàm số có $y' = 2x$ nên số cực trị là 1.

B. Hàm số không có cực trị.

C. Hàm số có $y' = x^2 + x - 2$ nên số cực trị là 2.

D. Hàm số có $y' = 4x^3 - 2x + 2$ nên số cực trị là 1.

Chọn **(C)**.

*ĐH KHTN TP HCM

†PTNK TP HCM khóa 17-20

Câu 2. Cho tích phân $\int_{-2}^1 xe^x dx = \frac{a}{e^b}$ (với a, b là các số nguyên). Giá trị của biểu thức $P = a^b + b^a$ bằng

A. 3.

B. 1.

C. 8.

D. 17.

Lời giải

Sử dụng nguyên hàm từng phần, ta có

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$$

nên dễ dàng tính được tích phân đã cho là $0e^1 - (-3)e^{-2} = \frac{3}{e^2}$. Do đó $a = 3, b = 2$ và $P = 3^2 + 2^3 = 17$. Chọn **(D)**.

Câu 3. Số $(2 + 2^{10})^{2020}$ viết trong hệ thập phân có bao nhiêu chữ số?

A. 6082.

B. 6083.

C. 2023.

D. 2024.

Lời giải

Giả sử $(2 + 2^{10})^{2020}$ có n chữ số, khi đó $10^{n-1} \leq (2 + 2^{10})^{2020} < 10^n$ nên

$$n - 1 \leq 2020 \log(2 + 2^{10}) \approx 6082,52 < n \Leftrightarrow \begin{cases} n - 1 & \leq 6082 \\ n & \geq 6083 \end{cases} \Leftrightarrow n = 6083.$$

Chọn **(B)**.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, có bao nhiêu mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O và cắt mặt cầu $(C) : x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 100y + 1000z - 10000 = 0$ tại nhiều hơn một điểm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. Vô số.

Lời giải

Với bất kỳ điểm nào trong không gian thì cũng đều tồn tại vô số mặt phẳng cắt (C) tại nhiều hơn một điểm. Ở đây, khi thay tọa độ $O(0; 0; 0)$ vào vế trái của phương trình, ta được $-10000 < 0$ chứng tỏ điểm O nằm trong mặt cầu, nhưng nó cũng không ảnh hưởng đến kết quả bài toán.

Chọn **(D)**.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ bậc ba có hai điểm cực trị là x_1 và x_2 . Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt khi $f(x_1) = 3$ và $f(x_2) = -3$?

A. 0.

B. 1.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Để $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt thì dựa vào sự tương giao giữa đồ thị $y = f(x)$ và $y = m$, ta cần có $-3 < m < 3$. Do đó có tất cả 5 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Chọn **(C)**.

Câu 6. Cho số phức $z = (1 - i)^{2020} + (1 + i)^{2020}$, điểm biểu diễn số phức liên hợp của z có tọa độ là?

A. $(2^{1010}; 0)$.

B. $(-2^{1010}; 0)$.

C. $(-2^{1011}; 0)$.

D. $(2^{1011}; 0)$.

Lời giải

Ta có

$$z = (1 - i)^{2020} + (1 + i)^{2020} = (-2i)^{1010} + (2i)^{1010} = -2^{1011}$$

Như vậy $\bar{z} = z = -2^{1011}$ có điểm biểu diễn là $(-2^{1011}; 0)$.

Chọn **(C)**.

Câu 7. Phương trình $2020\log_2 x = \log_{x^{2020}} 2$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Điều kiện xác định là $x > 0, x \neq 1$. Phương trình đã cho viết lại thành

$$2020\log_2 x = \frac{1}{2020}\log_x 2 \Leftrightarrow 2020^2\log_2 x = \frac{1}{\log_2 x} \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 = \frac{1}{2020^2}.$$

Do đó $\log_2 x = \frac{1}{2020}$ hoặc $\log_2 x = -\frac{1}{2020}$, vì thế nên phương trình có hai nghiệm thực phân biệt.

Chọn **(C)**.

Câu 8. Hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1} - 2^x$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2; 0]$ tại

- A. -2 . B. 0 . C. $-\frac{1}{2}$. D. -1 .

Lời giải

Ta có

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 2^x \cdot \ln 2 < 0$$

vì $x \in [-2; 0]$ kéo theo $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq 0$, trong khi $2^x \cdot \ln 2 > 0$. Do đó, hàm số này nghịch biến và $\max_{[-2; 0]} y = y(-2)$.

Chọn (A).

Câu 9. Mệnh đề nào sau đây là đúng:

- A. Với mọi $x \geq 0$ thì hàm số $y = \ln x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số $y = a$ với a cho trước có GTLN và GTNN đều bằng a .
C. Nếu hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì GTLN của hàm số bằng $f(x_0)$.
D. Phương trình $a^x = b$ luôn có nghiệm với mọi số thực a, b và b không âm.

Lời giải

Xét từng đáp án

- A. Hàm số $y = \ln x$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên loại.
B. Hàm số $y = a$ là hàm hằng nên giá trị không đổi, tức GTLN và GTNN bằng nhau và bằng a .
C. Giá trị cực đại của hàm không nhất thiết là GTLN nên loại.
D. Phản ví dụ: phương trình $a^x = 0$ không có nghiệm nên loại.

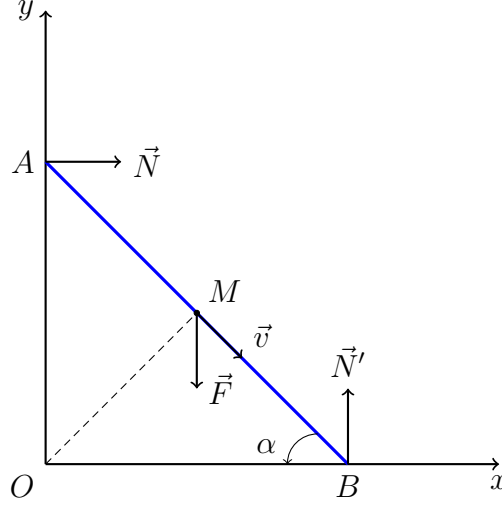
Chọn (B).

Câu 10. Một thanh AB có chiều dài là $2a$ ban đầu người ta giữ ở góc nghiêng $\alpha = \alpha_0$, một đầu tựa không ma sát với bức tường thẳng đứng. Khi buông thanh, nó sẽ trượt xuống dưới tác dụng của trọng lực. Góc sin α khi thanh rời khỏi bức tường bằng

- A. $\frac{2}{3} \sin \alpha_0$. B. $\frac{1}{3} \sin \alpha_0$. C. $\frac{2}{5} \sin \alpha_0$. D. $\frac{1}{5} \sin \alpha_0$.

Lời giải

Warning: Đây là một bài Vật lý khá thú vị!



Gọi M là khối tâm của thanh AB , ta có $OM \equiv \frac{AB}{2} = a$ nên quỹ đạo chuyển động của điểm M sẽ là một phần đường tròn tâm O bán kính a nên vận tốc $\vec{v}$ cùng phương với tiếp tuyến tại M của $(O; a)$.

Động năng quay và động năng tịnh tiến của M lần lượt là

$$\begin{cases} K_r = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{ma^2\frac{v^2}{a^2}}{2} = \frac{mv^2}{2} \\ K_t = \frac{mv^2}{2} \end{cases}$$

Thế năng của thanh tại góc lệch α là $V = mga \sin \alpha$, lúc mới buông thanh đang ở trạng thái nghỉ nên cơ năng bằng thế năng

$$W_0 = V_0 = mga \sin \alpha_0$$

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng

$$V + K = W_0$$

$$mga \sin \alpha + mv^2 = mga \sin \alpha_0$$

$$\Leftrightarrow v = \sqrt{ga(\sin \alpha_0 - \sin \alpha)}$$

Vận tốc của M theo phương Ox : $v_x = \sqrt{ga} \sqrt{(\sin \alpha_0 - \sin \alpha)} \sin \alpha$.

Thanh rời khỏi tường khi $\vec{N} = 0$ hay v_x đạt cực đại. Khảo sát hàm

$$f(\alpha) = \sqrt{(\sin \alpha_0 - \sin \alpha)} \sin \alpha$$

thấy $f(\alpha)$ đạt cực đại khi $\sin \alpha = \frac{2}{3} \sin \alpha_0$.

Chọn **A**.

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị m để phương trình

$$|x^4 - 2x^2 + 1| = 2^{|x|} + m$$

có nhiều nghiệm thực nhất?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Ta thấy rằng trước hết đồ thị $(C) : f(x) = (x^2 - 1)^2$ và $(C') : g(x) = 2^{|x|}$ chỉ có ba điểm chung.

- Nếu ta tịnh tiến (C') theo chiều dọc đi lên thì nó sẽ cắt đồ thị (C) chỉ ở hai điểm.
- Ngược lại, nếu tịnh tiến (C') theo chiều dọc xuống 1, 2 đơn vị thì nó sẽ cắt (C) tại 4 điểm, và đây cũng là số lượng tối đa. Nếu tịnh tiến thêm 3 đơn vị trở lên thì $(C), (C')$ sẽ không còn giao điểm nữa.

Để làm rõ hơn điều này, ta có thể dùng định lý hàm trung gian để chứng minh hai phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt (chọn các giá trị cụ thể thay để chỉ ra được 4 khoảng đổi dấu $(-2; -1), [-1; 0), (0; 1], (1; 2)$)

$$(x^2 - 1)^2 - 2^{|x|} + 1 = 0$$

và

$$(x^2 - 1)^2 - 2^{|x|} + 2 = 0.$$

Riêng $(x^2 - 1)^2 - 2^{|x|} + m = 0$ với $m \geq 3$ thì trên $x \in [-1; 1]$, ta có vế trái luôn dương do $2^{|x|} \leq 2$. Khi đó, phương trình chỉ có hai nghiệm nằm ngoài đoạn $[-1; 1]$ và không thỏa mãn yêu cầu.

Chọn **(B)**.

Câu 12. Cho tứ diện đều $SABC$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Cạnh của tứ diện bằng

A. a .

B. $2a$.

C. $\frac{a}{2}$.

D. $3a$.

Lời giải

Gọi b là cạnh của tứ diện.

Vì $SABC$ là tứ diện đều nên $SA \perp BC$ hay $\sin(\vec{SA}, \vec{BC}) = 1$ và có thể tích $V = \frac{\sqrt{2}}{12}b^3$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC

$$\begin{aligned} d(SA, BC) &= \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}]|}{|[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}]|} = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}]|}{SA \cdot BC \cdot \sin(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC})} \\ &= \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AC}]|}{b^2} = \frac{6V}{b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a. \end{aligned}$$

Như vậy

$$\frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{6V}{b^2} = \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{12}b^3}{b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}b \Leftrightarrow b = a.$$

Chọn **(A)**.

Câu 13. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 |x| + \log_3 |x| + \ln |x| > 0$ có dạng $(-\infty; a) \cup (b; +\infty)$. Tính giá trị của $P = a^2b + b$.

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 0.

Lời giải

Ta có

$$\log_2 |x| (1 + \log_3 2 + \ln 2) > 0 \Leftrightarrow \log_2 |x| > 0 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}.$$

(do $1 + \log_3 2 + \ln 2 > 0$). Khi đó $a = -1, b = 1$ nên $P = 2$.

Chọn **(A)**.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x - m)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P) : mx + 2y + 3mz = 0$. Tập hợp các giá trị m để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có ít nhất một điểm chung là một đoạn có dạng $[a; b]$. Tính $a + b + 20$.

A. -1.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

Ta thấy (S) có tâm là $I(m; 2; 3)$ và bán kính $R = 3$. Để (P) và (S) có ít nhất một điểm chung thì

$$d[I, (P)] \leq R \Leftrightarrow \frac{|m^2 + 4 + 9m|}{\sqrt{10m^2 + 4}} \leq 3.$$

Điều này tương đương với $(m^2 + 9m + 4)^2 \leq 9(10m^2 + 4)$ hay

$$\begin{aligned}(m^2 + 4)^2 + 18m(m^2 + 4) + 81m^2 &\leq 90m^2 + 36 \\ \Leftrightarrow (m^2 + 4)(m^2 + 18m + 4) &\leq 9(m^2 + 4) \\ \Leftrightarrow m^2 + 18m &\leq 5\end{aligned}$$

Do đó, dễ thấy a, b là nghiệm của phương trình $m^2 + 18m - 5 = 0$ và $a + b + 20 = -18 + 20 = 2$.

Chọn **(D)**.

Câu 15. Cho đa giác đều 60 đỉnh, tính xác suất để chọn ba đỉnh từ đa giác tạo thành một tam giác tù là

A. $\frac{3}{58}$.

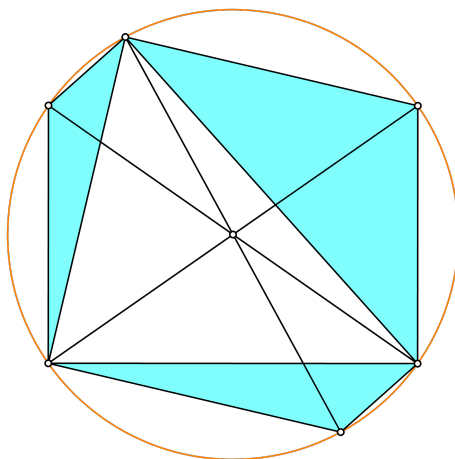
B. $\frac{42}{59}$.

C. $\frac{7}{590}$.

D. $\frac{45}{118}$.

Lời giải

Ta thấy rằng từ một tam giác nhọn lấy từ các đỉnh của đa giác đều, bằng cách vẽ ra ba đường kính qua ba đỉnh sẽ tương ứng thu được ba tam giác tù. Ngược lại, từ một tam giác tù, ta có tương ứng đúng một tam giác nhọn bằng cách thực hiện như thế. Do đó, số tam giác tù sẽ gấp 3 lần số tam giác nhọn.



Trong đa giác có 60 đỉnh, số tam giác vuông là 30×58 , suy ra số tam giác tù sẽ là

$$\frac{3}{4} \cdot (C_{60}^3 - 30 \times 58) = 24360.$$

Từ đó suy ra xác suất cần tính là $\frac{24360}{C_{60}^3} = \frac{42}{59}$.

Chọn **(B)**.

Bên dưới ta có một cách khác, rất "thú vị" như sau:

Cách khác. Đánh số các đỉnh của đa giác đều từ P_1 đến P_{60} ngược chiều kim đồng hồ. Gọi O là tâm của đa giác đều. Khi đó tam giác $P_m P_n P_k$ với $1 \leq m < n < k \leq 60$ là tam giác không tù khi và chỉ khi điểm O nằm trong tam giác $P_m P_n P_k$. Tức các góc $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ hợp bởi $\overrightarrow{OP_m}$ và $\overrightarrow{OP_n}$, $\overrightarrow{OP_n}$ và $\overrightarrow{OP_k}$, $\overrightarrow{OP_k}$ và $\overrightarrow{OP_m}$ theo ngược chiều kim đồng hồ đều không vượt quá π . Nói cách khác

$$\begin{cases} \varphi_1 = (n-m)\frac{2\pi}{60} \leq \pi \\ \varphi_2 = (k-n)\frac{2\pi}{60} \leq \pi \\ \varphi_3 = (m+60-k)\frac{2\pi}{60} \leq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \leq 30+m \\ k \leq 30+n \\ k \geq 30+m \end{cases} \quad (*)$$

Như vậy số các bộ (m, n, k) thỏa $(*)$ là số cách chọn 3 điểm tạo thành tam giác không tù. Vì $60 \geq k \geq 30+m$ nên $m \leq 30$

$$n(\bar{A}) = \sum_{m,n,k: (*)} 1$$

- $m = 30 \Rightarrow k = 60$ có $\sum_{n=31}^{59} 1 = 29$ cách chọn n .

- $m \leq 29 \Rightarrow$ có

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{29} \sum_{n=m+1}^{30+m} \sum_{k=\max(n+1, 30+m)}^{\min(60, 30+n)} 1 &= \sum_{m=1}^{29} \sum_{n=m+1}^{29+m} \sum_{k=30+m}^{\min(60, 30+n)} 1 + \sum_{m=1}^{29} \sum_{k=31+m}^{60} 1 \\ &= \sum_{m=1}^{29} \sum_{n=m+1}^{29+m} \min(31-m, 1+n-m) + \sum_{m=1}^{29} (30-m) \\ &= \sum_{m=1}^{29} \sum_{n=m+1}^{30} (1+n-m) + \underbrace{\sum_{m=2}^{29} \sum_{n=31}^{29+m} (31-m)}_{=\sum_{m=2}^{29} (m-1)(31-m)=4466} + 435 \\ &= \underbrace{\sum_{m=1}^{29} \left((30-m)(1-m) + \frac{30 \cdot 31}{2} - \frac{m(m+1)}{2} \right)}_{=4930} + 4901 \\ &= 9831 \end{aligned}$$

Như vậy $n(\bar{A}) = 9831 + 29 = 9860 \Rightarrow n(A) = n(\Omega) - n(\bar{A}) = C_{60}^3 - 9860$. Xác suất cần tìm

$$p = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{60}^3 - 9860}{C_{60}^3} = \frac{42}{59}$$

Câu 16. Cho nguyên hàm

$$\int x^2 \cdot \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\dots \sqrt[10]{x^\pi}}}} dx$$

(biểu thức có xét các dấu căn lồng nhau từ bậc 2 đến bậc 10) có dạng $\frac{ax^{b+\frac{c\pi}{d}}}{m+n\pi} + C$ với $a, b, c, d, m, n \in \mathbb{Z}$ và $\frac{c}{d}$ tối giản. Tính giá trị của $P = (a-d)m + b - cn$.

A. -1.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

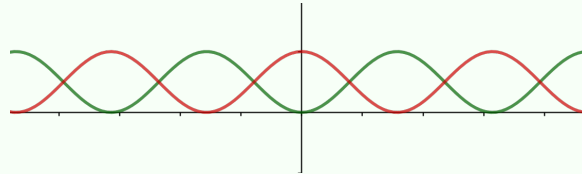
Ta biết rằng với $m, n \in \mathbb{Z}^+$ thì $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$ với mọi $x > 0$ nên ta rút gọn biểu thức dưới dấu nguyên hàm thành $x^2 \cdot \sqrt[10!]{x^\pi} = x^{2+\frac{\pi}{10!}}$ nên nguyên hàm ở đây chính là

$$\frac{x^{3+\frac{\pi}{10!}}}{3+\frac{\pi}{10!}} = \frac{10!x^{3+\frac{\pi}{10!}}}{3 \cdot 10! + \pi}$$

nên $a = d = 10!, b = 3, c = 1, m = 3 \cdot 10!, n = 1$. Suy ra $P = 2$.

Chọn **(D)**.

Câu 17. Trong hình bên dưới có vẽ sẵn đồ thị của hai hàm số liên tục $f(x), g(x)$.



Hỏi hai hàm số đó có thể là các hàm nào trong các cặp sau đây?

A. $\sin^2 x, \cos^2 x$.

B. $|\sin x|, |\cos x|$.

C. $\sin |x|, \cos |x|$.

D. $\sin x, \cos x$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta thấy rằng $f(x), g(x) \geq 0$ với mọi x nên chỉ có thể là câu A hoặc B. Tuy nhiên, từ đồ thị của $\sin x, \cos x$, để suy ra đồ thị của $|\sin x|, |\cos x|$, ta thực hiện lấy đối xứng qua trục hoành nên tại các nghiệm của $\sin x = 0, \cos x = 0$, đồ thị "nhọn" chứ không cong như hình vẽ.

Do đó, đồ thị trên chính là của $\sin^2 x, \cos^2 x$

Chọn **(A)**.

Câu 18. Cho tam giác ABC , có ba cạnh a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tính giá trị biểu thức $P = \cot\left(\frac{A}{2}\right) \cot\left(\frac{C}{2}\right)$

A. -1 .

B. 1 .

C. -3 .

D. 3 .

Lời giải

Vì a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên $a + c = 2b \Rightarrow p = \frac{3}{2}b$, áp dụng định lý cotang, ta có

$$\begin{cases} \cot\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{p-a}{\sqrt{\frac{1}{p}(p-a)(p-b)(p-c)}} \\ \cot\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{p-c}{\sqrt{\frac{1}{p}(p-a)(p-b)(p-c)}} \end{cases}$$

hay

$$P = \frac{(p-a)(p-c)}{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = \frac{p}{p-b} = \frac{3b/2}{3b/2-1} = 3.$$

Chọn (D).

Câu 19. Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông có cạnh huyền bằng 2, thể tích khối nón tạo thành

A. $\frac{\pi}{3}$.

B. $\frac{2\pi}{3}$.

C. π .

D. 2π .

Lời giải

Theo giả thiết thì hình nón có $R = 1, h = 1$ nên $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi}{3}$.

Chọn (A).

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là tứ giác lồi có hai đường chéo vuông góc nhau, mặt bên (SAD) là tam giác đều và $AD = 2, AC = 3, BD = 4$. Biết rằng thể tích khối chóp bằng $2\sqrt{3}$, xác định góc tạo bởi (SAD) và mặt đáy.

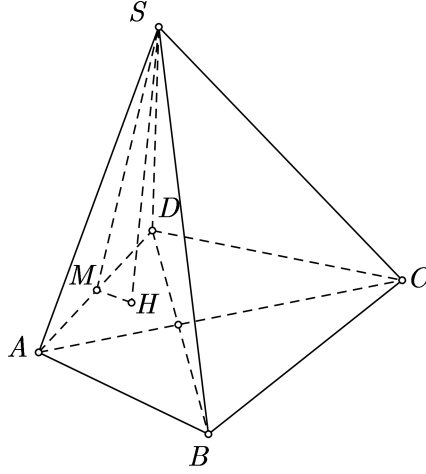
A. 30° .

B. 60° .

C. 90° .

D. 120° .

Lời giải



Do tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc nhau nên $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$. Từ đó suy ra chiều cao h của hình chóp là $h = \frac{3V}{S} = \sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm AD thì $SM = \sqrt{3} = h$. Điều này chứng tỏ $(SAD) \perp (ABCD)$.
 Chọn **(C)**.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d_1 là giao tuyến của hai mặt phẳng $x + y - 2 = 0, y + z = 2$. Có bao nhiêu mặt phẳng (P) chứa d_1 và tạo với $d_2 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{-1}$ một góc 60° ?

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Vì d_1 là giao tuyến của hai mặt phẳng $x + y - 2 = 0$ và $y + z = 2$ nên có một vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = [(1; 1; 0), (0; 1; 1)] = (1; -1; 1)$. Ngoài ra $(0; 2; 0)$ là điểm chung của hai mặt phẳng $x + y - 2 = 0$ và $y + z = 2$ nên $(0; 2; 0) \in d_1$, suy ra

$$d_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$$

Gọi $\vec{n}(a; b; c)$ là một vector pháp tuyến của $(P) : ax + by + cz + d = 0$, ta có

$$\begin{cases} d_1 \subset (P) \\ \widehat{(d_2, (P))} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b + d = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}_2|} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -2b \\ a - b + c = 0 \\ \frac{|2a + b - c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Biến đổi ta được

$$\begin{cases} a + c = b = -\frac{d}{2} \\ |a| = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{a^2 + (a+c)^2 + c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{c}{a} = -1 \\ b = d = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} c = 0 \\ a = b = -\frac{d}{2} \end{cases}$$

Ta được hai mặt phẳng thoả là $x - z = 0$ và $x + y - 2 = 0$.

Chọn **(C)**.

Câu 22. Trong không gian cho hai đường thẳng

$$d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$$

và $d_2 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{m}$. Tính tổng các giá trị m thoả mãn góc giữa d_1, d_2 là 60° .

A. -2 .

B. $8\sqrt{3}$.

C. $\frac{13}{2}$.

D. 12 .

Lời giải

Vector chỉ phương của hai đường thẳng này là $\vec{u}_1 = (1; 2; 1)$, $\vec{u}_2 = (1; 1; m)$ nên

$$\cos 60^\circ = \frac{|1 + 2 + m|}{\sqrt{6}\sqrt{m^2 + 2}} \Leftrightarrow \frac{3}{2}(m^2 + 2) = (m + 3)^2 \Leftrightarrow m = 6 \pm 4\sqrt{3}.$$

Do đó, tổng cần tính là 12 .

Chọn **(C)**.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - m^2x$ với tham số m . Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $f(x)$ có giá trị cực đại thuộc $\left[-\frac{2}{3}; 18\right]$?

A. 6 .

B. 8 .

C. 10 .

D. 2 .

Lời giải

Ta có $y' = x^2 - m^2$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm m$. Ta xét các trường hợp sau:

1. Nếu $m > 0$ thì dễ thấy $x_{CD} = -m$ và $y_{CD} = -\frac{m^3}{3} + m^3 = \frac{2m^3}{3}$. Ta cần có

$$-\frac{2}{3} \leq \frac{2m^3}{3} \leq 18 \Leftrightarrow -1 \leq m^3 \leq 27 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3.$$

Do $m > 0$ nên có ba giá trị thoả mãn là $1, 2, 3$.

2. Nếu $m < 0$ thì thực hiện tương tự, có ba giá trị thỏa mãn là $-1, -2, -3$.

Vì thế nên có tất cả 6 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Chọn **(A)**.

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + m^3x + m^2 + 2m$, gọi $A(a; b)$ là điểm uốn của đồ thị $f(x)$. Giá trị lớn nhất của b khi m thuộc $\left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$ bằng

- A.** 5. **B.** 2. **C.** $\frac{49}{12}$. **D.** $-\frac{71}{108}$.

Lời giải

Vì $A(a; b)$ là điểm uốn của $f(x)$ nên $a = \frac{-\frac{1}{2}}{3 \cdot \frac{1}{3}} = -\frac{1}{2}$, vậy

$$b = f(a) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}m^3 + m^2 + 2m + \frac{1}{12} := g(m)$$

Ta có $g'(m) = 0 \Leftrightarrow m = 2 \vee m = -\frac{2}{3}$ xét các điểm cực trị và biên

$$\begin{cases} \lim_{m \rightarrow +\infty} g(m) &= -\infty \\ g(2) &= \frac{49}{12} \\ g\left(-\frac{2}{3}\right) &= -\frac{71}{108} \end{cases} \Rightarrow \max_{[-\frac{2}{3}; +\infty)} g(m) = \frac{49}{12}$$

Chọn **(C)**.

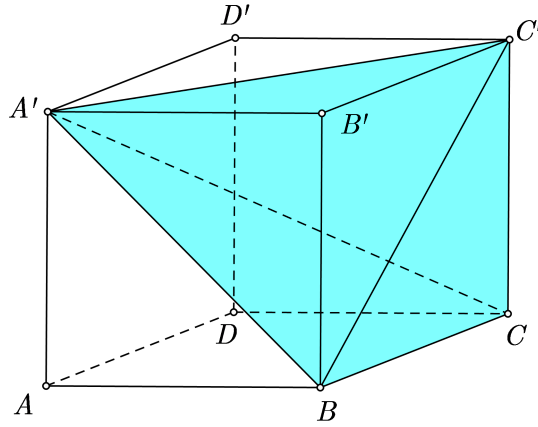
Câu 25. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích mặt cầu ngoại tiếp là $\frac{a^3\pi\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích khối tứ diện $C'BCA'$.

- A.** $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** $2a^3$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Gọi x là cạnh của hình lập phương thì $R = \frac{AC'}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Khi đó, ta có

$$\frac{4}{3}\pi \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{2}.$$



Giải ra được $x = a$. Từ đây dễ dàng tính được $V_{A'.BCC'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^3 = \frac{a^3}{6}$.

Chọn **(B)**.

Câu 26. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\log_b a = 2$. Tính $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} (\sqrt[3]{ab})$.

A. $\frac{2}{3}$.

B. $-\frac{10}{9}$.

C. $\frac{2}{5}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Theo giả thiết thì $a = b^2$ nên thay vào biểu thức cần tính, ta có

$$\log_{\frac{\sqrt{b}}{b^2}} (\sqrt[3]{b^2 b}) = \log_{b^{\frac{1}{2}-2}} (b^{\frac{2}{3}+1}) = \log_{b^{-\frac{3}{2}}} (b^{\frac{5}{3}}) = \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{10}{9}.$$

Chọn **(B)**.

Câu 27. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\log_2 x + \log_2 y = \log_4(x + y)$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$ khi biểu thức $P = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{8}$.

D. 0.

Lời giải

Ta có

$$\log_2 x + \log_2 y = \log_4(x + y) \Leftrightarrow 4^{\log_2 x + \log_2 y} = x + y \Leftrightarrow x^2 y^2 = x + y$$

Mà $x + y = x^2 y^2 \leq \left(\frac{(x+y)^2}{4} \right)^2 = \frac{(x+y)^4}{16} \Leftrightarrow x + y \geq \sqrt[3]{16}$ như vậy

$$x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \geq \frac{\sqrt[3]{256}}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y$ hay $\frac{x}{y} = 1$.

Chọn **(B)**.

Câu 28. Cho ba số $\ln(2^{|x+10|})$, $\ln(8^{x^2})$ và $\ln(4^{|x+4|})$ lập thành cấp số cộng theo thứ tự đó. Tính tổng tất cả các giá trị có thể có của x .

A. $\frac{1}{2}$.

B. 1.

C. $\frac{1}{8}$.

D. 0.

Lời giải

Ta biết rằng a, b, c lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi $a + c = 2b$. Do đó, ta cần có

$$\begin{aligned} \ln 2^{|x+10|} + \ln 4^{|x+4|} &= 2 \cdot \ln 8^{x^2} \\ \Leftrightarrow \ln 2^{|x+10|+2|x+4|} &= \ln^{3x^2+1} \\ \Leftrightarrow |x+10| + 2|x+4| &= 3x^2 + 1. \end{aligned}$$

Ta xét các trường hợp sau

- Nếu $x \geq -4$ thì đưa về $3x^2 + 1 = 3x + 28$, giải ra được $x = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}$, thỏa mãn điều kiện.
- Nếu $x \leq -10$ thì ta đưa về $3x^2 + 1 = -(3x + 28)$, phương trình vô nghiệm.
- Nếu $-10 < x < -4$ thì $3x^2 + 1 = x + 10 - 2(x + 4)$, giải ra được $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$, không thỏa.

Vậy tổng cần tính là $\frac{1 + \sqrt{37}}{2} + \frac{1 - \sqrt{37}}{2} = 1$.

Chọn **(B)**.

Câu 29. Gọi (C) là hình biểu diễn tập hợp các số phức z có phần thực không âm trong mặt phẳng tọa độ Oxy thỏa mãn $|2z - \bar{z}| \leq 3$. Tính diện tích của hình (C) .

A. 3π .

B. $\frac{3}{2}\pi$.

C. $\frac{3}{4}\pi$.

D. 6π .

Lời giải

Đặt $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ và $x \geq 0$. Ta có $2z - \bar{z} = 2(x + yi) - (x - yi) = x + 3yi$ nên

$$|2z - \bar{z}| \leq 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (3y)^2} \leq 3 \Leftrightarrow x^2 + 9y^2 \leq 9 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1.$$

Do đó, (C) là một elip. Áp dụng công thức tính diện tích elip cho bởi phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ là πab , ta có ngay $S_{(C)} = 6\pi$.

Chọn **(D)**.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}$, điểm nào dưới đây có khoảng cách đến đường thẳng d_1 bằng $\frac{4\sqrt{42}}{7}$

- A.** $M(4; 5; 0)$. **B.** $N(-1; -4; 1)$. **C.** $P(0; 1; 5)$. **D.** $K(1; 5; 4)$.

Lời giải

Ta có $I(1; 1; 0) \in d_1$ và $\vec{u}(-2; 1; 3)$ là vector chỉ phương của d_1

A. $\vec{IM}(3; 4; 0) \Rightarrow d(M, d_1) = \frac{|\vec{IM}, \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{1211}}{7}.$

B. $\vec{IN}(-2; -5; 1) \Rightarrow d(N, d_1) = \frac{|\vec{IN}, \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{4\sqrt{91}}{7}.$

C. $\vec{IP}(-1; 0; 5) \Rightarrow d(P, d_1) = \frac{|\vec{IP}, \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{5\sqrt{42}}{14}.$

D. $\vec{IK}(0; 4; 4) \Rightarrow d(K, d_1) = \frac{|\vec{IK}, \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{4\sqrt{42}}{7}.$

Chọn **(D)**.

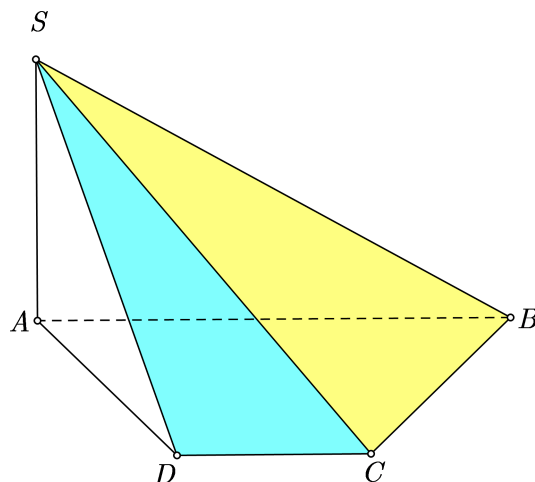
Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AB = 2a$ và $SA = a\sqrt{3}$ vuông góc với đáy. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(SBC), (SCD)$.

- A.** 90° . **B.** 45° . **C.** 30° . **D.** 60° .

Lời giải

Ta có $AD = DC = CB = a$. Gọi α là góc tạo bởi (SBC) , (SCD) thì rõ ràng ta có

$$\sin \alpha = \frac{d[B, (SCD)]}{d[B, SC]}.$$



Vì $AB \parallel CD$ nên

$$d[B, (SCD)] = d[A, (SCD)] = \frac{AS \cdot AD}{\sqrt{AS^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có $\angle ACB = 90^\circ$ nên $CB \perp AC$, mà $CB \perp SA$ nên $CB \perp (SAC)$, kéo theo $\angle SCB = 90^\circ$. Suy ra $d[B, SC] = CB = a$. Do đó $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ nên góc cần tìm là 60° .

Chọn **(D)**.

Câu 32. Tập hợp các điểm có tọa độ nguyên thuộc $(C) : y = \frac{1}{6}x^2(x+5)$ có dạng $A(ak+b, c(dk+1)^2(k+1))$ và $B(mk, nk^2(pk+q))$ với $a, b, c, d, m, n, p, q \in \mathbb{Z}^+$ và $k \in \mathbb{Z}$. Tính tổng các số $a+b+c+d+m+n+p+q$.

A. 17.

B. 20.

C. 37.

D. 43.

Lời giải

Ta thấy để $y \in \mathbb{Z}$ thì x chia hết cho 6 hoặc x chia 6 dư 1.

1. Nếu x chia 6 dư 1 thì đặt $6k+1$, thay vào ta tính được $y = (6k+7)^2(k+1)$. Do đó, $a = d = 6, b = c = 1$.
2. Nếu x chia hết cho 6 thì đặt $x = 6k$ thì $y = 6k^2(6k+5)$. Do đó $m = n = p = 6, q = 5$.

Vì thế nên tổng cần tính là 37.

Chọn **(C)**.

Câu 33. Cho hàm số $y = \frac{2x+m}{x-1}$, có đồ thị là (S) . Hỏi có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị (S) sao cho tổng khoảng cách từ điểm đó đến hai tiệm cận đạt giá trị nhỏ nhất là 12?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Dễ thấy đồ thị hàm số y có một tiệm cận đứng là $x = 1$ và một tiệm cận ngang $y = 2$ với $m \neq -2$. Gọi $A\left(x; \frac{2x+m}{x-1}\right)$ là điểm cần tìm, ta có tổng khoảng cách từ A đến hai tiệm cận là

$$d = |x-1| + \left| \frac{2x+m}{x-1} - 2 \right| = |x-1| + \left| \frac{m+2}{x-1} \right|$$

Theo bất đẳng thức Cauchy thì

$$d \geq 2\sqrt{|m+2|} = d_{\min} = 12 \Leftrightarrow m = 34 \vee m = -38$$

Dấu bằng xảy ra khi $(x-1)^2 = |m+2|$, luôn có 2 nghiệm phân biệt với $m = 34$ và $m = -38$.

Chọn **(B)**.

Câu 34. Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $2^{x+y} = \log_2(4x^2 + y^2)$?

A. 1.

B. 2.

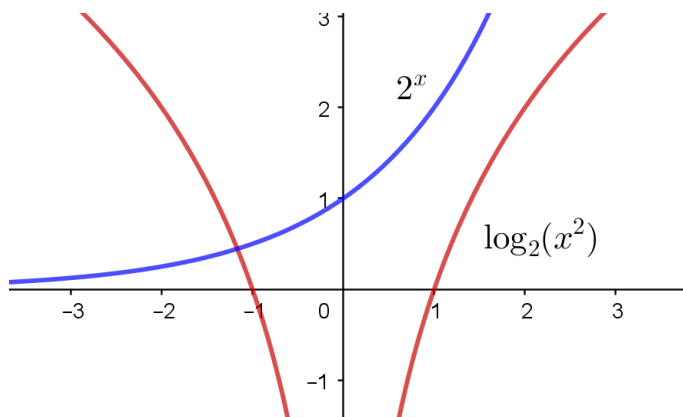
C. 3.

D. Vô số.

Lời giải

Ta xét các trường hợp:

- Nếu $x = 0$ thì $2^y = \log_2(y^2)$. Bằng cách vẽ đồ thị hai hàm số này, ta thấy phương trình có nghiệm nên $x = 0$ thỏa mãn.



- Nếu $x \neq 0$, xét hàm số biến y là $f(y) = 2^{x+y} - \log_2(4x^2 + y^2)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Ta có

$$f(-x) = 1 - \log_2(5x^2) < 0 \text{ do } 5x^2 \geq 5, \forall x \in \mathbb{Z} \text{ và } \lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = +\infty.$$

Do đó, phương trình $f(y) = 0$ luôn có nghiệm thuộc $(-x, +\infty)$.

Vì thế nên tồn tại vô số giá trị nguyên x thỏa mãn đề bài.

Chọn **(D)**.

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = |\bar{z} - 1 + 2i|$, số phức có mô đun nhỏ nhất có dạng $z = \frac{a}{b} + ci$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $a + b - c$.

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. -2.

Lời giải

Ta có

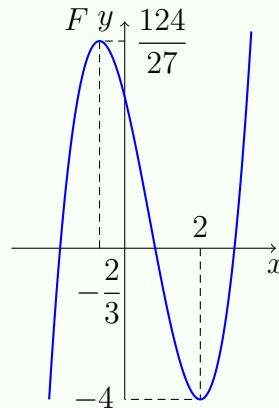
$$|\bar{z} - 1 + 2i| = |\overline{\bar{z} - 1 + 2i}| = |z + (-1 + 2i)| = |z - (1 + 2i)|.$$

Như thế, các số phức z thỏa mãn đề bài có điểm biểu diễn thuộc trung trực của $O(0; 0)$ và $A(1; 2)$. Vì thế, $|z|$ nhỏ nhất khi z có điểm biểu diễn là trung điểm $B\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ của

OA , tức là $z = \frac{1}{2} + i$ nên $a = 1, b = 2, c = 1$.

Chọn **(B)**.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ đi qua điểm $F\left(-\frac{2}{3}; \frac{124}{27}\right)$ và có đồ thị như sau:



Hỏi có bao nhiêu m để phương trình $f(2^{\ln x} - 1) = m$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 10.

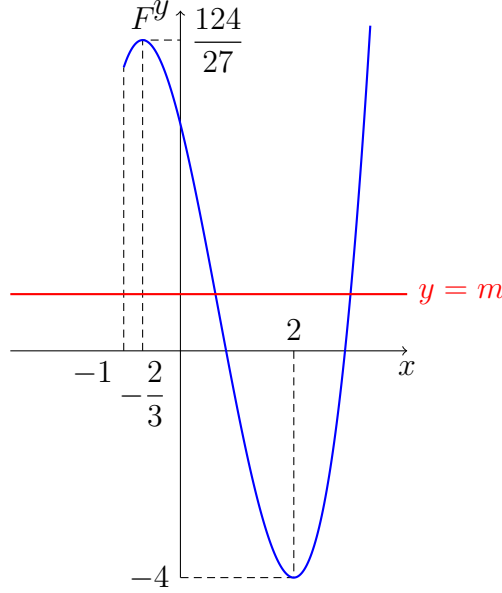
B. 9.

C. 8.

D. 7.

Lời giải

Đặt $t = 2^{\ln x} - 1 > -1$, phương trình trở thành $f(t) = m$, dựa vào đồ thị của $f(x)$



Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại ít nhất hai điểm khi và chỉ khi $-4 < m < \frac{124}{27}$ hay $m \in (-4; \frac{124}{27}]$. Như vậy có 8 giá trị m nguyên thỏa.

Chọn **(C)**.

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = \ln x$, gọi $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ và $F(1) = -1$. Tính diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi đường cong $y = F(x)f(x)f''(x)$, $y = 0$ và hai đường $x = 1$, $x = e$.

- A.** $3 - e$. **B.** $e - 1$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Ta có $F(x) = \int \ln x dx = x \ln x - x + C$, thay $x = 1$ vào tính được $C = 0$. Ngoài ra $f'(x) = \frac{1}{x}$ và $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ nên ta tính được

$$F(x)f(x)f''(x) = -(x \ln x - x) \frac{\ln x}{x^2} = \frac{\ln x(1 - \ln x)}{x}.$$

Diện tích cần tính là

$$S = \int_1^e \left| \frac{\ln x(1 - \ln x)}{x} \right| dx = \int_1^e \frac{\ln x(1 - \ln x)}{x} dx = \int_0^1 t(1 - t) dt = \frac{1}{6}.$$

Chọn (D).

Câu 38. Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình bình hành với $\angle DAB = 45^\circ$. Các đường chéo AC', DB' lần lượt tạo với đáy góc $45^\circ, 60^\circ$. Biết rằng chiều cao khối lăng trụ bằng $2a$, tính thể tích của khối lăng trụ này.

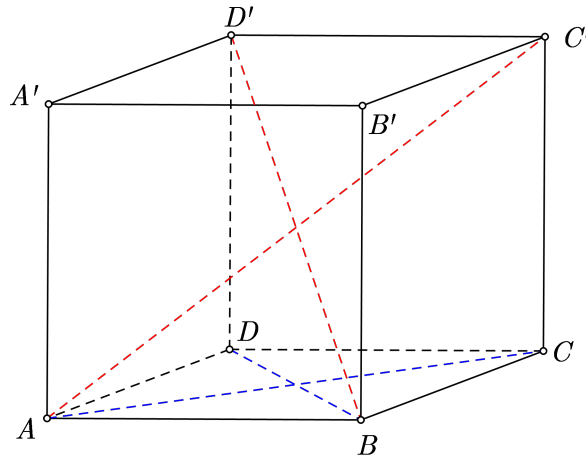
A. $\frac{2}{3}a^3$.

B. $\frac{4}{3}a^3$.

C. $\frac{a^3}{4}$.

D. a^3 .

Lời giải



Theo giả thiết thì $\angle C'AC = 45^\circ, \angle D'BD = 60^\circ$ và $CC' = DD' = 2a$ nên ta tính ngay được $AC = 2a, BD = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Đặt $AB = x, AD = y$ thì theo định lý cosin, ta có

$$x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy = \frac{4a^2}{3}$$

và

$$x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy = 4a^2.$$

Trừ hai vế, ta tính được $2\sqrt{2}xy = \frac{8}{3}a^2$ nên $xy = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^2$ và

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD} = xy \cdot \sin 45^\circ = \frac{2a^2}{3}.$$

Từ đó diện tích đáy của lăng trụ là $V = 2a \cdot \frac{2a^2}{3} = \frac{4a^3}{3}$.

Chọn (B).

Câu 39. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$, biết khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC) bằng $2a$. Tìm giá trị góc giữa hai mặt bên và mặt đáy của khối chóp sao cho thể tích của khối chóp nhỏ nhất

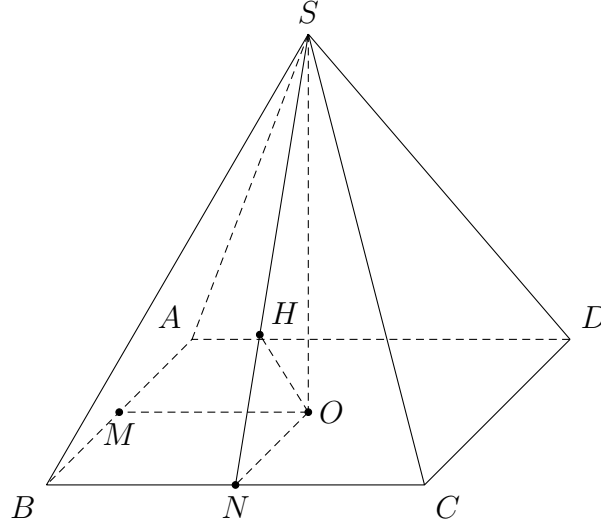
A. 0° .

B. 90° .

C. $\arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$.

D. $\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Lời giải



Gọi O, M, N, H lần lượt là tâm của hình vuông $ABCD$, trung điểm AB và BC , hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (SBC) . Ta có

$$\frac{d(A, (SBC))}{d(M, (SBC))} = \frac{AB}{MB} = 2 \Rightarrow d(M, (SBC)) = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$$

Mà

$$OM \parallel BC \Rightarrow OM \parallel (SBC) \Rightarrow OH = d(O, SBC) = d(M, (SBC)) = a$$

Như vậy

$$\frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow \frac{4}{AB^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{a^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{2}{AB^2} + \frac{2}{AB^2} + \frac{1}{OS^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{4}{AB^4 \cdot OS^2}} \Leftrightarrow AB^2 \cdot OS \geq 6a^3\sqrt{3}$$

Mà thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$$V = \frac{1}{3} \cdot AB^2 \cdot OS \geq 2a^3\sqrt{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{\sqrt{2}}{AB} = \frac{1}{OS} \Rightarrow \frac{OS}{ON} = \sqrt{2}$, góc giữa mặt bên và đáy là

$$((SBC), (ABCD)) = \widehat{ONS} = \arctan \frac{OS}{ON} = \arctan \sqrt{2} = \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Chọn **(D)**.

Câu 40. Cho các số $a > 1 > b > 0$ thỏa mãn

$$11 \cdot \log_a x \log_b x - 8 \log_a x - 20 \log_b x = -110.$$

Biết rằng phương trình này có tích hai nghiệm là 1. Khi đó, kết luận nào sau đây là đúng?

A. $ab^2 = 1$.

B. $a^5 b^2 = 1$.

C. $a^2 b^5 = 1$.

D. $ab = 1$.

Lời giải

Do phương trình có tích hai nghiệm là 1 nên đặt các nghiệm đó là $u, \frac{1}{u}$ với $u > 1$. Thay vào đẳng thức đã cho (chú ý rằng $\log \frac{1}{u} = -\log u$), ta có

$$\begin{cases} 11 \cdot \log_a u \log_b u - 8 \log_a u - 20 \log_b u = -110 \\ 11 \cdot \log_a u \log_b u + 8 \log_a u + 20 \log_b u = -110 \end{cases}.$$

Suy ra $\begin{cases} \log_a u \cdot \log_b u = -10 \\ 8 \log_a u + 20 \log_b u = 0 \end{cases}$, giải ra được

$$(\log_a u, \log_b u) = (-5; 2), (5, -2).$$

Vì $a > 1 > b > 0$ nên $\log_a u = 5, \log_b u = -2$, ta có $u = a^5 = b^{-2}$ hay $a^5 b^2 = 1$.

Chọn **(B)**.

Câu 41. Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{a+k} < e < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{b+k}$ với mọi số k nguyên dương. Biết giá trị nhỏ nhất của $|a - b|$ có dạng $\frac{p}{q} - \frac{m}{\ln n}$ với $m, n, p, q \in \mathbb{Z}^+$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m + n > p + q$.

B. $mq > np$.

C. $m + p = n + q$.

D. $2p = m + n + q$.

Lời giải

Ta biết giới hạn cơ bản $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ và bản thân hàm số $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ với $x \geq 1$ là hàm tăng, bị chặn trong $[2; e]$. Tuy nhiên, các kết quả này lại không cần sử dụng ở bài này và nếu đi theo hướng này sẽ bị bế tắc.

Ta viết lại bất đẳng thức đã cho thành

$$(a+k)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)<1<(b+k)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

Suy ra

$$a<\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}-k \text{ và } b>\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}-k.$$

Ta đưa về bài toán khảo sát hàm số $f(x)=\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x$ với $x\in[1;+\infty)$. Ta có

$$f'(x)=-\frac{1}{(x^2+x)\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1<0$$

nên $f(x)$ nghịch biến. Do đó $\max f(x)=f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1$ và

$$\begin{aligned} f(x) &> \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - x \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} \end{aligned}$$

Để tính giới hạn L này, ta sử dụng quy tắc L'Hospital $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ với dạng vô định $f(0)=g(0)=0$. Khi đó,

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(x+1)^2}} = \frac{1}{2}.$$

Vì thế nên $a \leq \frac{1}{2}$ và $b \geq \frac{1}{\ln 2} - 1$. Do đó

$$|a-b| \leq \left| \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{\ln 2} - 1 \right) \right| = \frac{3}{2} - \frac{1}{\ln 2}$$

nên $m=1, n=2, p=3, q=2$.

Chọn **C**.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ là đa thức thỏa mãn $f(x) + \frac{1}{x}f'(x^2) + f''(x) = x^2 + 2x - 2$.

Biết $f(-2) = 0, f(0) = f'(-2) = -4$. Tính $\int_0^{-2} f(x) \, dx$.

A. $\frac{16}{3}$.

B. $\frac{8}{3}$.

C. $\frac{32}{3}$.

D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Để thấy rằng $f(x)$ phải có bậc là 2. Ta đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Nhân hai vế phương trình cho x ta được phương trình tương đương

$$\begin{aligned} xf(x) + f'(x^2) + xf''(x) &= x^3 + 2x^2 - 2x \\ \Leftrightarrow ax^3 + (b+2a)x^2 + (c+2a)x + b &= x^3 + 2x^2 - 2x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + 2a = 2 \\ c + 2a = -2 \\ b = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^2 - 4 \end{aligned}$$

Như vậy $\int_0^{-2} f(x) dx = \frac{16}{3}$.

Chọn **(A)**.

Câu 43. Cho hàm số

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \frac{\sqrt{\frac{b-a}{a}} \sin x}{\sqrt{1 + \frac{b-a}{a} \sin^2 x}} \sqrt{b + a \cot^2 x}$$

với $b > a > 0$ và $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Tính giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{5}} 2f(x)dx$?

A. $\frac{2\pi}{5}$.

B. $\frac{3\pi}{10}$.

C. 1.

D. π .

Lời giải

Đặt $\sqrt{\frac{b-a}{a}} \sin x = \tan y$ thì $y \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên

$$\frac{\sqrt{\frac{b-a}{a}} \sin x}{\sqrt{1 + \frac{b-a}{a} \sin^2 x}} = \frac{\tan y}{\sqrt{1 + \tan^2 y}} = \sin y.$$

Ngoài ra,

$$\frac{\sqrt{b + a \cot^2 x}}{\sqrt{b-a}} = \sqrt{\frac{b-a + a(\cot^2 x + 1)}{b-a}} = \sqrt{\frac{a}{b-a} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} + 1} = \sqrt{\frac{1}{\tan^2 y} + 1}.$$

Do đó ta đưa về $g(y) = \sqrt{\frac{1}{\tan^2 y} + 1} \cdot \sin y = 1$. Vì thế nên $f(x)$ là hàm hằng 1, thay

vào tích phân cần tính, ta được $\int_0^{\frac{\pi}{5}} 2f(x)dx = \frac{2\pi}{5}$.

Chọn **(A)**.

Câu 44. Cho ba hàm số $f(x), g(x), h(x)$ liên tục trên từng khoảng xác định và thỏa mãn

$$I = \int \left[\sin x \left(e^{-\ln x} + \frac{\ln x^2 + 2}{1 - \cos 2x} + \ln x \cdot \cot x - \frac{2x \cos x \cdot \ln x}{2\sin^3 x} \right) \right] dx$$

có dạng $f(x) \cdot g(x) + \frac{f(x) \cdot h(x)}{g(x)} + C$. Tính đạo hàm $f(h(g(x)))$ tại $x = \frac{\pi}{6}$.

A. 0.

B. 1.

C. $\sqrt{3}$.

D. -1 .

Lời giải

Nhân phân phối $\sin x$ vào, chú ý rằng $e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$, $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$, $\sin x \cot x = \cos x$, ta chia tích phân đã cho thành hai tích phân như sau

$$I_1 = \int \left(\frac{\sin x}{x} + \ln x \cdot \cos x \right) dx$$

và

$$I_2 = \int \left(\frac{1 + \ln x}{\sin x} - \frac{x \cos x \ln x}{\sin^2 x} \right) dx.$$

Từ đó ta tính được

$$I_1 = \ln x \cdot \sin x + C_1 \text{ và } I_2 = \frac{x \ln x}{\sin x} + C_2$$

(thực ra đây là bài tính ngược đạo hàm $(uv)' = u'v + v'u$). Suy ra

$$I = \ln x \cdot \sin x + \frac{x \ln x}{\sin x} + C$$

và tương ứng với $f(x) = \ln x, g(x) = \sin x, h(x) = x$.

Do đó $f(h(g(x))) = \ln(\sin x)$ nên đạo hàm của hàm này là $\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$ và giá trị cần tính là $\cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

Chọn **(C)**.

Câu 45. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Gọi B', D' lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SD . Mặt phẳng $(AB'D')$ cắt SC tại C' . Tính thể tích khối $ABCDB'C'D'$

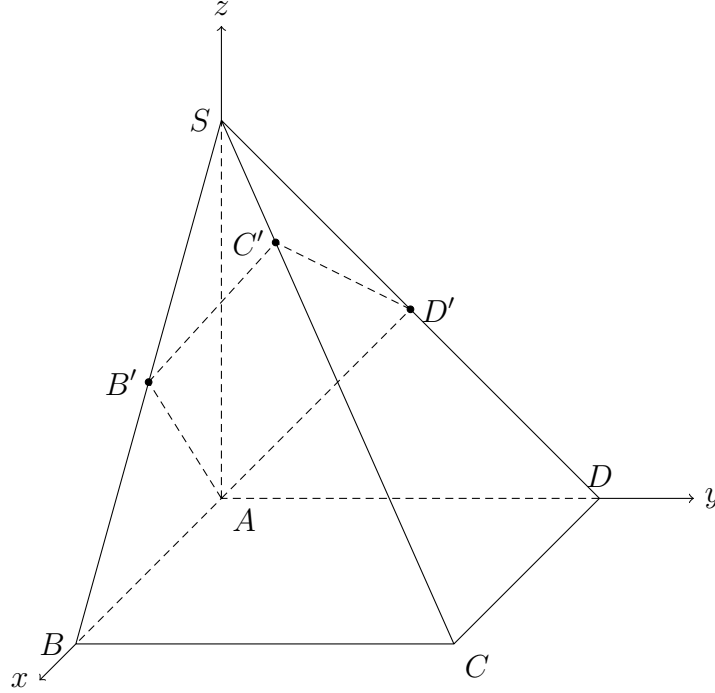
A. $\frac{16}{45}a^3$.

B. $\frac{1}{3}a^3$.

C. $\frac{14}{45}a^3$.

D. $\frac{2}{3}a^3$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ với $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 0)$, $D(0; 1; 0)$ và $S(0; 0; 2)$, vì B' và D' là hình chiếu của B và D trên các cạnh SB , SD nên

$$B'(4/5; 0; 2/5), D'(0; 4/5; 2/5)$$

Lập phương trình mặt phẳng $(AB'D')$ được

$$(AB'D') : x + y - 2z = 0$$

Lập phương trình đường thẳng SC được

$$SC : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$$

Giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng $(AB'D')$ là điểm $C'(2/3; 2/3; 2/3)$.
Thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$ là

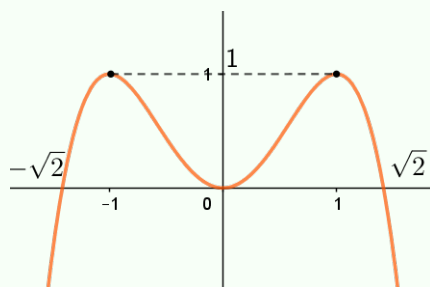
$$V_{S.AB'C'D'} = \frac{1}{3} S_{AB'C'D'} \cdot d(S, (AB'D')) = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{B'D'}]| \cdot \frac{|4|}{\sqrt{6}} = \frac{16}{45}$$

Như vậy thể tích khối $ABCD B'C'D'$ là

$$V_{ABCD B'C'D'} = V_{S.ABCD} - V_{S.AB'C'D'} = \frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot 2 - \frac{16}{45} = \frac{14}{45}$$

Chọn **(C)**.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như sau.



Hỏi phương trình $f(x) = -\sqrt{|f(f(x))|} + 3$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Từ đồ thị đã cho, ta dễ dàng tìm được hàm số tương ứng là $f(x) = -x^4 + 2x^2$. Trong phương trình đã cho, đặt $t = f(x)$ thì khi đó $f(x) \leq 1, \forall x$ nên $3 - t > 0$.

Ta có $t = -\sqrt{|f(t)|} + 3$ hay $|f(t)| = (t - 3)^2$ hay

$$\begin{cases} -t^4 + 2t^2 = (t - 3)^2 \\ t^4 - 2t^2 = (t - 3)^2 \end{cases}.$$

Dễ thấy phương trình trên vô nghiệm, còn phương trình dưới có 2 nghiệm mà một nghiệm $x_1 > 1$ và $x_2 < 1$. Với nghiệm $x_1 > 1$, ta thấy $f(x) = x_1$ vô nghiệm. Với nghiệm $x_2 < 1$, ta thấy $f(x) = x_2$ có hai nghiệm phân biệt. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt. Chọn **(B)**.

Câu 47. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N là trung điểm $BC, A'B'$. Mặt phẳng (MND') chia khối lập phương thành hai khối đa diện, trong đó gọi khối chứa điểm C là (H) . Biết rằng tồn tại một khối cầu tâm I , bán kính R không đổi ngoại tiếp hình lập phương đã cho. Một khối nón có thể tích lớn nhất nội tiếp khối cầu này có chiều cao h và bán kính r . Tính h theo R biết rằng $V_{(H)} = \frac{55}{144}a^3$.

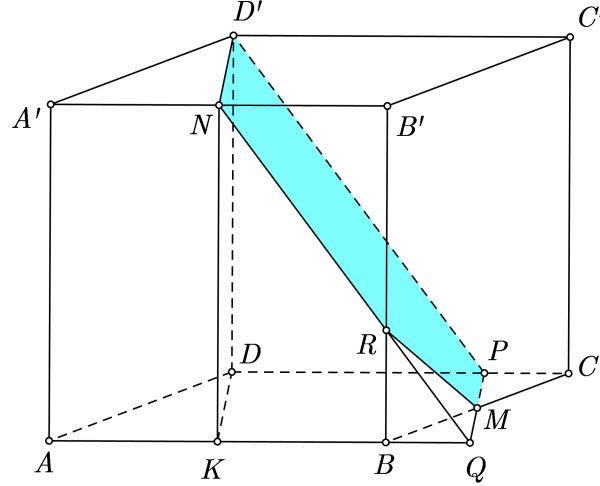
A. $\sqrt{3}a$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{8}$.

C. $2\sqrt{3}a$.

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

Lời giải



Lấy $P \in CD$ sao cho $CD = 4CP$ thì dễ thấy $MP \parallel D'N$. Đặt $Q = PM \cap AB$ và $R = NQ \cap BB'$ thì thiết diện tạo bởi (MND') với hình lập phương là $MRND'P$. Ta cũng có $BA = 4BQ$ và $B'R = 2BR$. Đặt x là cạnh của hình lập phương đã cho.

Trước hết, ta có $V_{R.BQM} = \frac{BM \cdot BR \cdot BQ}{6} = \frac{x^3}{144}$. Gọi K là trung điểm AB thì $ND' \parallel DK \parallel QP$ nên $AKD.A'ND'$ là hình lăng trụ đứng với $V_1 = \frac{x^2}{4} \cdot x = \frac{x^3}{4}$.

Ta thấy $NKQ.D'DP$ là lăng trụ có đáy là tam giác vuông NKQ và khoảng cách hai đáy là x nên thể tích của nó là $V_2 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{3}{4}x \cdot x = \frac{3x^3}{8}$. Từ đó ta dễ dàng tính được

$$V_{(H)} = x^3 - \left(V_1 + V_2 - \frac{x^3}{144} \right) = \frac{55x^3}{144}.$$

Do đó $x = a$. Khi đó ta cũng có $R = \frac{AC'}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét bài toán trung gian tìm thể tích khối nón lớn nhất nội tiếp mặt cầu. Ta có $h = R \pm \sqrt{R^2 - r^2}$ nhưng để $V_{\max}$ thì $h = R + \sqrt{R^2 - r^2}$ nên

$$V = \frac{1}{3}\pi hr^2 = \frac{\pi}{3}r^2(R + \sqrt{R^2 - r^2}).$$

Khảo sát hàm số $f(r) = r^2 \left(R + \sqrt{R^2 - r^2} \right)$ trên $(0; R]$, ta có được

$$f(r) \leq f\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}R\right) = \frac{32}{27}R^3.$$

Đẳng thức xảy ra khi $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$ hay

$$h = \frac{4R}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Chọn (D).

Câu 48. Cho phương trình $\sqrt{16^{|x+2|+m}} + \sqrt{4^{|x+1|+2m} + 1} - \sqrt{2^{|x|+3m} + 2} = 0$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2020; 2020]$ để phương trình đã cho vô nghiệm?

A. 1010.

B. 1011.

C. 2021.

D. 2022.

Lời giải

Giả sử $f(x) = \sqrt{16^{|x+2|+m}} + \sqrt{4^{|x+1|+2m} + 1} - \sqrt{2^{|x|+3m} + 2}$

- Xét $m \geq 0$, ta có

$$f(x) > 4^{|x+2|} \cdot 4^m + 2^{|x+1|} \cdot 4^m - \sqrt{2^{|x|+3m} + 2} = 4^m (4^{|x+2|} + 2^{|x+1|} - \sqrt{2^{|x|-m} + 2^{1-4m}})$$

Ta chứng minh $4^m (4^{|x+2|} + 2^{|x+1|} - \sqrt{2^{|x|-m} + 2^{1-4m}}) > 0$, bất phương trình tương đương

$$4^{|x+2|} + 2^{|x+1|} - \sqrt{2^{|x|-m} + 2^{1-4m}} > 0$$

Vì vế trái đồng biến trên theo m nên ta chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn (khi $m = 0$)

$$4^{|x+2|} + 2^{|x+1|} - \sqrt{2^{|x|} + 2} > 0 \Leftrightarrow (4^{|x+2|} + 2^{|x+1|})^2 > 2^{|x|} + 2$$

Mà $2|x+2| + |x+1| - |x| \geq -1 \Rightarrow 2^{2|x+2|+|x+1|-|x|} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 3 \cdot 2^{2|x+2|+|x+1|} > 2^{|x|}$.

Dễ thấy $2^{2|x+2|+|x+1|} \geq 2$, cộng vế theo vế suy ra $4 \cdot 2^{2|x+2|+|x+1|} > 2^{|x|} + 1$, ta có điều phải chứng minh.

Như vậy nếu $m \geq 0$ thì $f(x) > 0$ nên phương trình vô nghiệm

- Xét $m \leq -1$, ta có $1 \leq 16 \cdot 4^{2m}$ nên

$$\begin{aligned} f(-2) &= 4^m + \sqrt{4^{2m+1} + 1} - \sqrt{2^{2+3m} + 2} \leq 4^m + 4^m \sqrt{20} - \sqrt{2^{2+3m} + 2} \\ &= 4^m \underbrace{(1 + \sqrt{20} - \sqrt{2^{2-m} + 2^{1-4m}})}_{\text{nghịch biến theo } m} \end{aligned}$$

Mà $m = -1$ thì $1 + \sqrt{20} - \sqrt{2^{2-m} + 2^{1-4m}} < 0$ nên $f(-2) < 0$, hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên $f(x)$ có nghiệm trên $(-2; +\infty)$.

Kết luận: để $f(x)$ vô nghiệm thì $m \geq 0 \Rightarrow$ có 2021 giá trị m thỏa.

Chọn (C).

Câu 49. Từ các chữ số $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, viết ngẫu nhiên một số có 8 chữ số đôi một khác nhau có dạng $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}$. Tính xác suất để có các ràng buộc $a_1 + 3 \leq a_2 + a_3 < a_4 - 4 \leq a_5 + a_6 \leq a_7 + a_8$.

A. $\frac{1}{1512}$.

B. $\frac{1}{756}$.

C. $\frac{1}{6048}$.

D. $\frac{1}{378}$.

Lời giải

Trước hết, ta tính được không gian mẫu là

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1088640.$$

Ta có $a_1 + 3 < a_4 - 4$ nên $a_1 + 8 \leq a_4$, mà $a_1 \neq 0$ nên suy ra chỉ có thể xảy ra $(a_1, a_4) = (1, 9)$.

Ta viết lại điều kiện $4 \leq a_2 + a_3 < 5 \leq a_5 + a_6 \leq a_7 + a_8$. Từ đây dễ thấy $a_2 + a_3 = 4$ nên chỉ có thể là $(a_2, a_3) \in \{(0, 4), (4, 0)\}$. Từ đây, ta có $a_5, a_6, a_7, a_8 \in \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$.

Chọn ra trong tập này 4 số bất kỳ thì có $C_6^4 = 15$ cách; ứng với mỗi cách đó, ta chia ra hai nhóm 2 phần tử thì tổng thu được luôn không nhỏ hơn 5 và có $C_4^2 = 6$ cách (nhóm có tổng lớn hơn sẽ được gán cho cặp a_7, a_8). Từ đó ta có số cách chọn và hoán vị cho các số này là $C_6^4 \cdot C_4^2 \cdot (2!)^2 = 360$.

Do đó, tổng số lượng các số thỏa mãn là $2 \cdot 360 = 720$. Vậy xác suất cần tính là $\frac{720}{1088640} = \frac{1}{1512}$.

Chọn **(A)**.

Câu 50. Xét tập hợp S là các tam thức bậc hai biến x có dạng sau $ax^2 + bx + c, ax^2 + bx, ax^2 + c, ax^2$ với $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Lấy ngẫu nhiên một tam thức bậc hai thuộc S . Xét phân số tối giản $\frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}^+$ là xác suất để lấy được tam thức bậc hai $f(x)$ mà khi lấy các hệ số của x trong $f(x)$ theo bậc giảm dần ghép thành một số thì số đó chia hết cho 21. Tính $m + n$.

A. 1050.

B. 950.

C. 939.

D. 943.

Lời giải

Trước hết, dễ dàng tính được

$$|S| = 9^3 + 2 \cdot 9^2 + 9 = 900.$$

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $f(x) = ax^2 + bx + c$ thì ta cần xét bội của 21 có dạng $\overline{abc}$ mà $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Ta liệt kê ra được có 35 số (trong 42 số, ta loại đi các số có dạng $a0c, ab0$ chia hết cho 21).
- Nếu $f(x) = ax^2 + bx$ thì có các trường hợp $(a, b) = (2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4)$ thỏa mãn. Tương tự với $f(x) = ax^2 + c$.
- Nếu $f(x) = ax^2$ thì không có trường hợp nào thỏa mãn. Vì thế nên có tất cả $35 + 2 \cdot 4 = 43$ trường hợp.

Do đó xác suất cần tính là $\frac{43}{900}$ hay $m + n = 943$.

Chọn **(D)**.