

SỐ PHỨC - PHẦN I

Nhân dịp mùa thi THPTQG 2020 sắp tới gần, ta thử nhìn nhận về các bài toán số phức thi ĐH - CĐ năm 2012, củng cố kiến thức và kỹ năng giải toán về số phức trong vài năm gần đây, góp phần giúp các em 2K2 đạt kết quả tốt hơn trong kỳ thi.

1. Các câu trích từ đề thi tuyển sinh Đại học - Cao đẳng năm 2012

Ví dụ 1. (BGD - Đề thi tuyển sinh Đại học 2012 - Khối A - A1 Câu 9b)

Cho số phức z thỏa mãn $\frac{5(\bar{z}+i)}{z+1} = 2-i$. Tính môđun của số phức $w = 1+z+z^2$.

Phân tích.

Trong câu này chúng ta củng cố kiến thức và luyện tập kỹ năng về

- Các phép toán cộng, trừ, nhân, chia số phức
- Số phức liên hợp, phần thực, phần ảo, môđun của số phức.

Nhiệm vụ đầu tiên là tìm ra số phức z , sau đó thế vào w , rút gọn và tính môđun. Hiện nay ta có thể hỗ trợ máy tính Casio để làm thay việc rút gọn và tính môđun, thậm chí cả việc tìm z .

Lời giải.

Cách 1. (Tự luận)

Điều kiện $z \neq -1$. Từ giả thiết suy ra $5\bar{z}+5i = 2-i+(2-i)z$ (1). Giả sử $z = a+bi, (a, b \in \mathbb{R})$ thì từ (1) ta có $5a-5bi+5i = 2-i+(2-i)(a+bi) = 2a+b+2bi-ai$

$$\Rightarrow (3a-b-2) + (a-7b+6)i = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3a-b-2=0 \\ a-7b+6=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=1 \Rightarrow z=1+i \text{ (Thỏa mãn)}.$$

$$\text{Khi đó } w = 1+z+z^2 = 2+i+(1+i)^2 = 2+3i \Rightarrow |w| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}.$$

$$\text{Vậy } z=1+i \text{ và } |w| = \sqrt{13}.$$

Cách 2. (Hỗ trợ máy tính - Trắc nghiệm)

$$\text{Từ (1) ta có: } (2-i)z-5\bar{z} = -2+6i \Rightarrow z = \frac{(-2+6i)(2+i)-(-2-6i)(-5)}{|2-i|^2-|-5|^2} = 1+i.$$

$$\text{Từ đó } |w| \text{ là } |1+\text{Ans}+\text{Ans}^2| = \sqrt{13}. \text{ (Công thức trên ta sẽ tìm hiểu ở VD 20).}$$

Ví dụ 2. (BGD - Đề thi tuyển sinh Đại học 2012 - Khối B Câu 9b)

Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$. Viết dạng lượng giác của z_1 và z_2 .

Phân tích.

Trong câu này chúng ta củng cố kiến thức và luyện tập kỹ năng về

- Định lý Viet

- Môđun của số phức
- Dạng lượng giác của số phức.

Lời giải.

Vì z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$ nên ta có: $z_1 \cdot z_2 = -4$, do đó $|z_1| = |z_2| = r = 2$. Bởi vậy ta đặt $z_1 = 2(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $z_2 = -2(\cos \varphi - i \sin \varphi)$ khi đó ta cũng có $z_1 + z_2 = 2\sqrt{3}i$ nên $4i \sin \varphi = 2\sqrt{3}i \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$.

Vậy $z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos \frac{4\pi}{3} - i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$.

Ví dụ 3. (BGD - Đề thi tuyển sinh Đại học 2012 - Khối D Câu 9a)

Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z + \frac{2(1+2i)}{1+i} = 7+8i$. Tìm môđun của số phức $w = z+1+i$.

Phân tích.

Trong câu này chúng ta củng cố kiến thức và luyện tập kỹ năng về

- Các phép toán cộng, trừ, nhân, chia số phức
- Số phức liên hợp, phần thực, phần ảo, môđun của số phức.

Lời giải.

Cách 1. (Tự luận)

Từ giả thiết suy ra

$$\begin{aligned} (2+i)z + \frac{2(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} &= 7+8i \Leftrightarrow (2+i)z + (1+2i)(1-i) = 7+8i \\ \Leftrightarrow (2+i)z + 3+i &= 7+8i \Leftrightarrow (2+i)z = 4+7i \Leftrightarrow z = \frac{4+7i}{2+i} = \frac{(4+7i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{15+10i}{5} \\ \Leftrightarrow z &= 3+2i. \text{ Từ đó ta có } w = z+1+i = 4+3i \Rightarrow |w| = \sqrt{4^2+3^2} = 5. \end{aligned}$$

Vậy $z = 3+2i$ và $|w| = 5$.

Cách 2. (Hỗ trợ máy tính - Trắc nghiệm)

Từ giả thiết $(2+i)z + \frac{2(1+2i)}{1+i} = 7+8i$ ta có (nhập máy): $z = \frac{7+8i}{2+i} - \frac{2(1+2i)}{(2+i)(1+i)} = 3+2i$.

Từ đó $|w|$ là $|\text{Ans}+1+i| = 5$.

Ví dụ 4. (BGD - Đề thi tuyển sinh Đại học 2012 - Khối D Câu 9b)

Giải phương trình $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$ trên tập hợp các số phức.

Phân tích.

Trong câu này chúng ta củng cố kiến thức và luyện tập kỹ năng về

- Các phép toán cộng, trừ, nhân, khai căn số phức
- Công thức nghiệm của phương trình bậc hai.

Lời giải.

Xét phương trình $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$ có $\Delta = 9(1+i)^2 - 4.5i = 9.2i - 20i = -2i$. Đến đây ta biểu diễn Δ thành bình phương của một số phức là $\Delta = (i\sqrt{2})^2$, từ đó ta có hai nghiệm:

$$z_1 = \frac{-3(1+i) - i\sqrt{2}}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{3+\sqrt{2}}{2}i, z_2 = \frac{-3(1+i) + i\sqrt{2}}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{3-\sqrt{2}}{2}i.$$

Ví dụ 5. (BGD - Đề thi tuyển sinh Cao đẳng 2012 - Khối A - A1 - B - D Câu 7a)

Cho số phức z thỏa mãn $(1-2i)z - \frac{2-i}{1+i} = (3-i)z$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ Oxy .

Phân tích.

Trong câu này chúng ta củng cố kiến thức và luyện tập kỹ năng về

- Các phép toán cộng, trừ, nhân, chia số phức
- Điểm biểu diễn số phức trên mặt phẳng tọa độ.

Lời giải.

Biến đổi phương trình tương đương với $(3-i)z - (1-2i)z = \frac{2-i}{1+i} \Leftrightarrow (2+i)z = \frac{2-i}{1+i}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2-i}{(1+i)(2+i)} = \frac{2-i}{1+3i} = \frac{(2-i)(1-3i)}{10} = \frac{-1-7i}{10}.$$

Vậy $z = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$ nên có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là $M\left(-\frac{1}{10}; -\frac{7}{10}\right)$.

Cách 2. (Hỗ trợ máy tính Casio)

Bài trên có dạng $Az - B = Cz \Leftrightarrow z = \frac{B}{A-C}$ nên trong **Mode 2** ta ghi

$3-i$ Sto A $\frac{2-i}{1+i}$ Sto B $1-2i$ Sto C và $\frac{B}{A-C}$ = ta được $-\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$.

Vậy $z = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$ nên có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là $M\left(-\frac{1}{10}; -\frac{7}{10}\right)$.

Ví dụ 6. (BGD - Đề thi tuyển sinh Cao đẳng 2012 - Khối A - A1 - B - D Câu 7b)

Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2z + 1 + 2i = 0$. Tính $|z_1| + |z_2|$.

Phân tích.

Trong câu này chúng ta củng cố kiến thức và luyện tập kỹ năng về

- Giải phương trình bậc hai trên tập số phức có hệ số phức
- Tính môđun của số phức.

Lời giải.

Phương trình $z^2 - 2z + 1 + 2i = 0$ có $\Delta' = 1^2 - (1 + 2i) = -2i = (i\sqrt{2})^2$ nên phương trình có hai nghiệm là: $z_1 = 1 - i\sqrt{2}, z_2 = 1 + i\sqrt{2}$. Do đó ta có $|z_1| + |z_2| = \sqrt{1 + (-\sqrt{2})^2} + \sqrt{1 + (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}$.

Qua đó các em thấy được nội dung kiến thức thi Đại học - Cao đẳng trước đây cũng nhẹ nhàng, đến bây giờ tuy có nâng cao vài phần nhưng các em cũng đừng lo lắng, miễn sao chúng ta nắm chắc kiến thức cơ bản thì cũng làm được bài. Cụ thể ta xét các câu số phức thi năm vừa qua ở mức VD - VDC có nội dung và đòi hỏi kỹ năng gì?

2. Một số câu trắc nghiệm gần đây

Ví dụ 7. (BGD - Đề thi chính thức THPTQG 2019 M101 C34)

Cho số phức z thỏa mãn $3(\bar{z} + i) - (2 - i)z = 3 + 10i$. Môđun của z bằng

A. 3.

B. 5.

C. $\sqrt{5}$.

D. $\sqrt{3}$.

Phân tích.

Trong câu này chúng ta thấy nội dung cũng giống như câu trong đề thi năm 2012

- Các phép toán cộng, trừ, nhân số phức
- Số phức liên hợp, phần thực, phần ảo, môđun của số phức.

Lời giải.

Cách 1. (Tự luận)

Giả sử $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = a - bi$. Từ giả thiết ta có:

$$3(a - bi + i) - (2 - i)(a + bi) = 3 + 10i \Leftrightarrow 3a - 3bi - 2a - b + ai - 2bi = 3 + 7i \\ \Leftrightarrow a - b - 3 + (a - 5b - 7)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - b - 3 = 0 \\ a - 5b - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases} \text{ do đó } z = 2 - i.$$

Vậy $|z| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$. **Chọn C.**

Cách 2. (Hỗ trợ máy tính - Trắc nghiệm)

$$\text{Từ giả thiết ta có: } (-2 + i)z + 3\bar{z} = 3 + 7i \Rightarrow z = \frac{(3 + 7i)(-2 - i) - (3 - 7i).3}{|2 - i|^2 - |3|^2} = 2 - i. (\text{Nhập máy})$$

Từ đó $|w|$ là $|\text{Ans}| = \sqrt{5}$. **Chọn C.** (Công thức trên ta sẽ tìm hiểu VD 20)

Ví dụ 8. (BGD - Đề thi chính thức THPTQG 2019 M101 C44)

Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn của các số phức $w = \frac{4+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{34}$

B. 26

C. 34.

D. $\sqrt{26}$.

Phân tích.

Trong câu này chúng ta thấy nội dung là: Tìm biểu diễn của w thông qua z .

- Các phép biến đổi đại số
- Biến đổi hình học tọa độ.

Lời giải.

Cách 1. (Tự luận - Biến đổi đại số)

Giả sử $w = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Ta có $w(1+z) = 4+iz \Rightarrow z(w-i) = 4-w \Rightarrow \sqrt{2}|w-i| = |w-4|$
 $\Rightarrow 2[x^2 + (y-1)^2] = (x-4)^2 + y^2 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 - 2y + 1) = x^2 - 8x + 16 + y^2$
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 8x - 4y - 14 = 0 \Leftrightarrow (x+4)^2 + (y-2)^2 = 34$, suy ra $R = \sqrt{34}$. **Chọn A.**

Cách 2. (Hỗ trợ máy tính - Trắc nghiệm)

Ta cho z ba giá trị khác nhau và tương ứng w có ba giá trị khác nhau và viết phương trình đường tròn có dạng: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ (1).

Vào **Mode 2** ghi $\frac{4+iX}{1+X}$ CALC nhập $-1-i$ ta có (1;5) thay vào (1): $2a+10b+c=-26$.

CALC nhập $-1+i$ ta có $(-1;-3)$ thay vào (1): $-2a-6b+c=-10$.

CALC nhập $1+i$ ta có $(\frac{7}{5}; \frac{-1}{5})$ thay vào (1): $14a-2b+5c=-10$.

Giải hệ ba ẩn ta được $a=4, b=-2, c=-14 \Rightarrow r = \sqrt{16+4+14} = \sqrt{34}$.

Nhận xét.

Vì tính chất $|u.v| = |u|.|v|$ được sử dụng khá nhiều nên GV có thể hướng dẫn các em chứng minh lại định lý như sau: Giả sử $u = a+bi, v = x+yi, (a, b, x, y \in \mathbb{R})$, ta chứng minh định lý bằng phép biến đổi tương đương:

$$|u.v| = |u|.|v| \Leftrightarrow |u.v|^2 = |u|^2 \cdot |v|^2 \Leftrightarrow (ax-by)^2 + (ay+bx)^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2x^2 + b^2y^2 + a^2y^2 + b^2x^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + a^2y^2 + b^2x^2 \text{ (Luôn đúng } \forall a, b, x, y \in \mathbb{R} \text{)}. \text{ Đpcm.}$$

Như vậy phần nào các em thấy được là: nội dung có nâng cao vài phần nhưng cũng không phải quá khó, miễn sao các em nắm chắc kiến thức cơ bản thì sẽ làm được bài.

Sau đây ta nghiên cứu một cách giải toán số phức bằng cách "Đặt ẩn phụ" xem thế nào?

Ví dụ 9. (THPT Chuyên Tiền Giang)

Cho số phức $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z+1+3i-|z|i=0$. Tính $S = a+3b$.

A. $S = \frac{7}{3}$.

B. $S = -5$.

C. $S = 5$.

D. $S = -\frac{7}{3}$.

Lời giải

Đặt $|z| = m \geq 0$, ta có $z = -1 + (m-3)i \Rightarrow |z| = \sqrt{1 + (m-3)^2} \Rightarrow m^2 = 1 + (m-3)^2$

$\Rightarrow 0 = 1 - 6m + 9 \Rightarrow m = \frac{5}{3}$, thay trở về ta có $z = -1 - \frac{4}{3}i \Rightarrow S = a + 3b = -5$. **Chọn B.**

Cách 2. (Tính trực tiếp)

Để cho gọn ta đặt $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = m \geq 0$, ta có: $z + 1 + 3i - |z|i = 0$ hay là

$$a + bi + 1 + 3i - mi = 0 \Leftrightarrow a + 1 + (b + 3 - m)i = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + 1 = 0 \\ b + 3 - m = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ (b + 3)^2 = m^2 = 1 + b^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ 6b + 9 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow S = a + 3b = -5.$$

Ví dụ 10. (THPT Kinh Môn - Hải Dương)

Số phức $z = a + bi$ (với a, b là số nguyên) thỏa mãn $(1-3i)z$ là số thực và $|\bar{z} - 2 + 5i| = 1$.

Khi đó $a + b$ là

A. 9.

B. 8.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Đặt $(1-3i)z = m \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \frac{m}{1-3i} = \frac{m}{10} + \frac{3m}{10}i = n + 3ni$. Ta cần tính $a + b = 4n; n \in \mathbb{Z}$. Thay z vào giả thiết thứ hai ta có

$$|n - 2 + (5 - 3n)i| = 1 \Rightarrow (n - 2)^2 + (5 - 3n)^2 = 1 \Rightarrow n = 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow P = 8. \text{ **Chọn B.**}$$

Cách 2. (Tính trực tiếp)

Ta có $(1-3i)z = (1-3i)(a+bi) = a + 3b + (b-3a)i$ là số thực nên $b = 3a$ do đó

$z = a + 3ai$ thế vào giả thiết thứ hai ta được $|a - 3ai - 2 + 5i| = 1$ suy ra

$$(a - 2)^2 + (5 - 3a)^2 = 1 \Rightarrow a = 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow P = a + b = 4a = 8.$$

Ví dụ 11. Cho số phức $z = a + bi$ (a, b là các số thực) thỏa mãn $z|z| + 2z + i = 0$. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b^2$.

A. $T = 4\sqrt{3} - 2$.

B. $T = 3 + 2\sqrt{2}$.

C. $T = 3 - 2\sqrt{2}$.

D. $T = 4 + 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Đặt $|z| = m \geq 0$, ta có $z(m+2) = -i \Rightarrow |z|(m+2) = 1 \Rightarrow m(m+2) = 1 \Rightarrow m = \sqrt{2} - 1$ thay trở về ta có $z = \frac{-i}{\sqrt{2}+1} = (1-\sqrt{2})i \Rightarrow T = a+b^2 = (1-\sqrt{2})^2 = 3-2\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Mời các em giải cách khác.

Ví dụ 12. (BGD - Đề thi chính thức 2017)

Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-3i|=5$ và $\frac{z}{z-4}$ là số thuần ảo?

A. 0.

B. 2.

C. Vô số.

D. 1.

Lời giải

Đặt $\frac{z}{z-4} = bi \Rightarrow (bi-1)z = 4bi \Rightarrow z = \frac{4bi}{bi-1}$, ta có $\left| \frac{4bi}{bi-1} - 3i \right| = 5 \Leftrightarrow \left| \frac{3b+(4b+3)i}{bi-1} \right| = 5$

$\Rightarrow 9b^2 + (4b+3)^2 = 25(b^2+1) \Rightarrow 24b = 16 \Rightarrow b = \frac{2}{3} \Rightarrow z = \frac{16}{13} - \frac{24}{13}i$. **Chọn D.**

Lời bình

Việc đặt ẩn phụ khi giải toán về số phức góp phần làm cho lời giải bớt cồng kềnh trong biến đổi, thậm chí là đi nhanh đến kết quả hơn.

Mời các em tính trực tiếp.

Ví dụ 13. (BGD - Đề tham khảo 2018)

Cho số phức $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i) = 0$ và $|z| > 1$. Tính $P = a+b$

A. -1.

B. -5.

C. 3.

D. 7.

Lời giải

Cách 1.

Đặt $|z| = m > 1$. Ta có $z = -2-i+m(1+i) = (m-2) + (m-1)i \Rightarrow m = \sqrt{(m-2)^2 + (m-1)^2}$

$\Rightarrow m^2 = 2m^2 - 6m + 5 \Rightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \Rightarrow m = 5$. Vậy $z = 3+4i \Rightarrow P = 7$. **Chọn D.**

Cách 2.

Biến đổi phương trình $|z| = \frac{z}{1+i} + \frac{2+i}{1+i} = \frac{1}{2}z(1-i) + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \Leftrightarrow 2|z| - 3 + i = (1-i)z$.

Đặt $|z| = m > 1 \Rightarrow \sqrt{(2m-3)^2 + 1} = \sqrt{2}m \Rightarrow 2m^2 - 12m + 10 = 0 \Rightarrow m = 5$

Thay trở về ta được $z = -2-i+5(1+i) = 3+4i \Rightarrow P = 7$.

Cách 3.

Đặt $|z| = m > 1$ khi đó ta có $a + bi + 2 + i - m(1 + i) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 - m = 0 \\ b + 1 - m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 1 \\ m = 1 + b > 1 \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} b = a + 1 > 0 \\ (b - 1)^2 + b^2 = (1 + b)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 1 > 0 \\ b^2 - 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow P = 7.$

Cách 4. (Trắc nghiệm)

Đặt $|z| = m > 1$, ta có $z + 2 + i = m(1 + i) \Rightarrow \begin{cases} a + 2 = m \\ b + 1 = m \end{cases} \Rightarrow a + b = 2m - 3 > -1$. Đến đây ta thử

+ Đáp án **C**: $2m - 3 = 3 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow z = 1 + 2i \Rightarrow 3 = m = |z| = \sqrt{5}$ (loại)

+ Đáp án **D**: Tô khoanh tròn!.

Ví dụ 14. (THPT Chuyên Quang Trung - Bình Phước)

Tìm số phức z thỏa mãn $|z - 2| = |z|$ và $(z + 1)(\bar{z} - i)$ là số thực.

A. $z = 1 + 2i$.

B. $z = -1 - 2i$.

C. $z = 2 - i$.

D. $z = 1 - 2i$.

Lời giải

Giả sử $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ thì $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = m \geq 0$, ta có $|z - 2| = m \Rightarrow (a - 2)^2 + b^2 = m^2$

$\Rightarrow -4a + 4 = 0 \Rightarrow a = 1$, khi đó $z = 1 + bi$ và $(2 + bi)[1 - (1 + b)i]$ là số thực nên

$-2(1 + b) + b = 0 \Rightarrow b = -2$. Vậy $z = 1 - 2i$. **Chọn D.**

Cách 2.

Ta có thể dùng chức năng CALC để thử kiểm tra trước tiên $|z - 2| = |z|$ xem số nào thỏa mãn?

Ghi $|X - 2| = |X|$ CALC nhập các số phức. Loại **B** và **C**. Tiếp theo kiểm tra điều kiện thứ hai

Ghi $(2 + Bi)(1 - Bi - i)$ CALC nhập phần ảo 2 = thì loại **A**. Vậy **chọn D**.

Cách 3.

Giả sử $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ thì $(z + 1)(\bar{z} + 1 - i) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z + 1)(\bar{z} + 1) - (z + 1)(1 + i) \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (z + 1)(1 + i) = 1 + a + bi + i + ia - b \in \mathbb{R} \Rightarrow b + 1 + a = 0 \Rightarrow b = -1 - a$.

Mặt khác $|z - 2| = |z| \Rightarrow (a - 2)^2 + b^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a = 1$ do đó $b = -2$ và $z = 1 - 2i$.

Ví dụ 15. (THPT Chuyên Võ Nguyên Giáp – Quảng Bình)

Cho số phức z thỏa mãn $|z - |z|| = \sqrt{2}$. Biết rằng phần thực của z bằng a . Tính $|z|$ theo a bằng

A. $\frac{1}{1 - a}$.

B. $\frac{a - \sqrt{a^2 + 1}}{2}$.

C. $\frac{a + \sqrt{a^2 + 1}}{2}$.

D. $\frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}$.

Lời giải

Giả sử $z = a + bi$ thì $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = m \geq 0$, ta có $|z - m| = \sqrt{2} \Rightarrow (a - m)^2 + b^2 = 2$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - 2am + m^2 - 2 = 0 \Rightarrow m^2 - am - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}. \text{ Chọn D.}$$

Mời các em giải cách khác.

Ví dụ 16. (THPT Trần Phú – Hà Tĩnh)

Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 3i| = 3\sqrt{2}$ và $(z + 2i)^2$ là số thuần ảo?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Đặt $z + 1 - 3i = a + bi \Rightarrow z = a - 1 + (b + 3)i$ ta có $|z + 1 - 3i| = 3\sqrt{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 18$ (*) và

$$(z + 2i)^2 = [a - 1 + (b + 5)i]^2 \text{ là số thuần ảo nên } \Rightarrow (a - 1)^2 - (b + 5)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 6 \\ a = -b - 4 \end{cases}$$

+ TH 1: $a = b + 6$ thì $(b + 6)^2 + b^2 = 18 \Leftrightarrow b = -3$ (nghiệm kép).

+ TH 2: $a = -b - 4$ thì $(b + 4)^2 + b^2 = 18 \Leftrightarrow b^2 + 4b - 1 = 0$ (Hai nghiệm vô tỉ). **Chọn C.**

Ví dụ 17. (THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Hà Nội)

Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 5$ và $|z_1 - z_2| = 8$. Tìm môđun của số phức $w = z_1 + z_2 - 2 + 4i$.

A. $|w| = 6$.

B. $|w| = 16$.

C. $|w| = 10$.

D. $|w| = 13$.

Lời giải

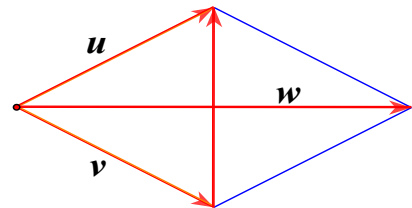
Cách 1. (Hình học)

Đặt $u = z_1 - 1 + 2i, v = z_2 - 1 + 2i$ thì khi đó $w = u + v$

và $|u| = |v| = 5$ nên $w = u + v$ sẽ là đường chéo hình

thoi, ngoài ra $|u - v| = |z_1 - z_2| = 8$

$$\text{Suy ra } |w| = |u + v| = 2\sqrt{5^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2} = 6. \text{ Chọn A.}$$



Ví dụ 18. (THPT Đặng Thúc Hứa – Nghệ An)

Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $(1 + i)z + \bar{z}$ là số thuần ảo và $|z - 2i| = 1$

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. Vô số.

Lời giải

Đặt $z - 2i = a + bi \Rightarrow z = a + (b + 2)i$, ta có $|z - 2i| = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$ (*) và

$$(1+i)z + \bar{z} = z + \bar{z} + iz = 2a - (b+2) + ai \text{ là số thuần ảo nên } \Rightarrow 2a - (b+2) = 0$$

$$\Rightarrow b = 2a - 2 \text{ thế vào (*) ta có } a^2 + (2a-2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=\frac{3}{5} \end{cases} \text{ Suy ra có 2 số phức. Chọn A.}$$

Lời bình. Bài trên ta đặt ẩn phụ chưa được trong sáng, nhưng cũng gọn gàng hơn một tí.

Sau đây ta xét thêm một số bài toán liên quan đến z và $\bar{z}$ như đã nói phần đầu.

Ví dụ 19. (SGD Bắc Giang)

Cho số phức z thỏa mãn $|z| - 2\bar{z} = -7 + 3i + z$. Tính $|z|$.

- A. 3. B. $\frac{13}{4}$. C. $\frac{25}{4}$. D. 5.

Lời giải

Giả sử $z = a + bi$ thì $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = m$, ta có $m = -7 + 3i + 2\bar{z} + z = 3a - 7 + (3-b)i$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 3a - 7 \\ 0 = 3 - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 9 = 9a^2 - 42a + 49 \\ b = 3, a \geq \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow a = 4, b = 3. \text{ Vậy } z = 4 + 3i \Rightarrow |z| = 5. \text{ Chọn D.}$$

Ví dụ 20. Biết $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là số phức thỏa mãn $(3-2i)z - 2i\bar{z} = 15 - 8i$. Tổng $a + b$ là

- A. $a + b = 5$. B. $a + b = -1$. C. $a + b = 9$. D. $a + b = 1$.

Lời giải

Cách 1.

Ta có $z = a + bi \Rightarrow \bar{z} = a - bi$. Theo đề bài ta có

$$(3-2i)(a+bi) - 2i(a-bi) = 15-8i \Leftrightarrow 3a - (4a-3b)i = 15-8i \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 15 \\ 4a-3b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases}$$

Vậy $a + b = 9$. **Chọn C.**

Cách 2.

Phương trình dạng $Az + B\bar{z} = C$, ta có $\overline{A \cdot \bar{z} + B \cdot z} = \bar{C} \Rightarrow \bar{z} = \frac{\bar{C}}{A} - \frac{\bar{B}}{A} \cdot z$ thay trở về

$$\Rightarrow Az + B\left(\frac{\bar{C}}{A} - \frac{\bar{B}}{A}z\right) = C \Rightarrow z = \frac{C\bar{A} - \bar{C}B}{A\bar{A} - B\bar{B}} = \frac{(15-8i)(3+2i) - (15+8i)(-2i)}{13-4}$$

$z = 5 + 4i \Rightarrow a + b = 9$. **Chọn C.**

Kết quả: Ban đầu là $Az + B\bar{z} = C$ và tính được $z = \frac{C\bar{A} - \bar{C}B}{A\bar{A} - B\bar{B}}$.

Ví dụ 21. (SGD Quảng Nam)

Tổng phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn $iz + (1-i)\bar{z} = -2i$ bằng

A. 2.

B. -2.

C. 6.

D. -6.

Lời giải

$$\text{Áp dụng công thức } Az + B\bar{z} = C \Rightarrow z = \frac{C\bar{A} - \bar{C}B}{A\bar{A} - B\bar{B}} = \frac{(-2i) \cdot (-i) - 2i \cdot (1-i)}{1-2} = 4 + 2i$$

Do đó $a = 4, b = 2 \Rightarrow a + b = 6$. **Chọn C.**

Mời các em giải theo cách 2.

Ví dụ 22. (THPT Chuyên Thái Bình)

Cho số phức z thỏa mãn: $z(1-2i) + \bar{z}i = 15+i$. Tìm modun của số phức z ?

A. $|z| = 5$.

B. $|z| = 4$.

C. $|z| = 2\sqrt{5}$.

D. $|z| = 2\sqrt{3}$.

Lời giải

$$\text{Áp dụng công thức } Az + B\bar{z} = C \Rightarrow z = \frac{C\bar{A} - \bar{C}B}{A\bar{A} - B\bar{B}} = \frac{(15+i) \cdot (1+2i) - (15-i) \cdot i}{5-1} = 3+4i$$

Do đó $|z| = 5$. **Chọn A.**

Mời các em giải theo cách 2.

3. Một số bài luyện tập

Câu 1. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2+3i| = 5$ và $\frac{z}{z-2}$ là số thuần ảo?

A. 2.

B. vô số.

C. 1.

D. 0.

Câu 2. (BGD - Đề thi chính thức 2017)

Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i| = 2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo?

A. 0.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Câu 3. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau: $|z-10+2i| = |z+2-14i|$ và $|z-1-10i| = 5$?

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. Vô số.

Câu 4. (BGD - Đề thi tham khảo 2017)

Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-i| = 5$ và z^2 là số thuần ảo?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 0.

Câu 5. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-(2+i)| = \sqrt{10}$ và $z\bar{z} = 25$?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Câu 6. (BGD - Đề thi chính thức 2018 M101 C30)

Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} + i)(z + 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- A. 1. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 7. Xét các số phức z thỏa mãn $z(\bar{z} - 2 + i) + 4i - 1$ là số thực. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường thẳng d . Diện tích tam giác giới hạn bởi đường thẳng d và hai trục tọa độ bằng

- A. 8. B. 4. C. 2. D. 10.

Câu 8. (BGD - Đề thi chính thức 2018 M101 C38)

Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 4 - i) + 2i = (5 - i)z$?

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Câu 9. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $(1 + i)z + \bar{z}$ là số thuần ảo và $|z - 2i| = 1$.

- A. 2. B. 1. C. 0. D. Vô số.

Câu 10. (BGD - Đề thi chính thức 2017)

Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 3i| = \sqrt{13}$ và $\frac{z}{z + 2}$ là số thuần ảo?

- A. 0. B. 2. C. Vô số. D. 1.

Câu 11. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2 + 2z\bar{z} + |\bar{z}|^2 = 8$ và $z + \bar{z} = 2$?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. Vô số.

Câu 12. (THPT Chuyên Thái Bình)

Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(2 + i)|z| = z - 1 + i(2z + 3)$. Tính $S = a + b$.

- A. $S = 1$. B. $S = -5$. C. $S = -1$. D. $S = 7$.

Câu 13. Biết số phức z có phần ảo khác 0 và thỏa mãn $|z - (2 + i)| = \sqrt{10}$ và $z\bar{z} = 25$. Điểm nào sau đây biểu diễn số phức z đã cho?

- A. $P(4; -3)$. B. $N(3; -4)$. C. $M(3; 4)$. D. $Q(4; 3)$.

Câu 14. (BGD - Đề thi chính thức 2018 M102 C49)

Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z - 3 - i) + 2i = (4 - i)z$?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 15. Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(z + 1 + i)(\bar{z} - i) + 3i = 9$ và $|\bar{z}| > 2$.

Tính $P = a + b$.

A. 2.

B. 1.

C. -3.

D. -1.

Câu 16. (THPT Ngô Quyền – Ba Vì)

Cho số phức z thỏa mãn: $(1+i)z - (2-i)\bar{z} = 3$. Tìm modun của số phức $w = \frac{i-2z}{1-i}$.

A. $\frac{\sqrt{122}}{5}$.

B. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{45}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{122}}{5}$.

Câu 17. Cho số phức z thỏa mãn $(2-3i)z + (4+i)\bar{z} + (1+3i)^2 = 0$. Gọi a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức z . Khi đó $2a-3b$ bằng

A. 1.

B. 4.

C. 11.

D. -19.

Câu 18. (BGD - Đề thi chính thức 2019 M102 C31)

Cho số phức z thỏa mãn $3(\bar{z}-i) - (2+3i)z = 7-16i$. Môđun của z bằng

A. $\sqrt{5}$.

B. 5.

C. $\sqrt{3}$.

D. 3.

Câu 19. Cho số phức z thỏa mãn $|z|=2$ và z không phải số thực. Số $\frac{1}{2-z}$ có phần thực bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 4.

D. Kết quả khác.

Câu 20. (SGD Thanh Hóa)

Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z-1+2i|=5$ và $|z_1-z_2|=8$. Tìm môđun của số phức $w = z_1 + z_2 - 2 + 4i$.

A. $|w|=6$.

B. $|w|=16$.

C. $|w|=10$.

D. $|w|=13$.

>>>>>>>>>

Như vậy trong **phần I** thì chúng ta ôn tập và củng cố những kiến thức cơ bản nhất về số phức, đồng thời rèn luyện một số kỹ năng giải toán nhất định, nhìn chung các bài toán ở mức 6 - 7 điểm.

Trong **phần II** chúng ta sẽ nghiên cứu các bài toán ở mức 8 - 9 - 10 điểm, có khá nhiều bài toán và có nội dung rộng hơn, bao gồm:

- Biểu diễn tập hợp số phức là đường thẳng, đường tròn (nâng cao).
- Các bài toán tương đối đơn giản về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.
- Các bài toán tính toán (nâng cao).
- Các bài toán nâng cao về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

SỐ PHỨC - PHẦN II (VD - VDC)

Qua các ví dụ trong **Phần I** thì chúng ta đã củng cố tương đối nhiều kiến thức cơ bản và rèn luyện một số kỹ năng giải toán về số phức. Trong **Phần II** này chúng ta tiếp tục nghiên cứu các bài toán nâng cao về số phức: trong đó liên quan đến khá nhiều kiến thức về hình học véc tơ và tọa độ trong mặt phẳng, ngoài ra cũng cần nhiều kiến thức về các bất đẳng thức Mincopxki và Bunhiacopxki.

1. Biểu diễn tập hợp số phức là đường thẳng hay đường tròn

Bài toán cho dạng: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện (α) . Tìm tập hợp biểu diễn của z trên mặt phẳng tọa độ Oxy (hoặc của số phức w thông qua z).

Cách giải là:

+ Chuyển về bài toán hình học tọa độ phẳng: Biểu diễn các điều kiện thông qua điểm và véc tơ.

+ Gọi $z = x + yi$ thế vào điều kiện (α) và biến đổi đại số. Hoặc biến đổi theo quan hệ biểu thức

Bản chất cả hai cách giải là như nhau.

Ví dụ 1. Cho các số phức z thỏa mãn $|z - i| = |z - 1 + 2i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = z + 2i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là

A. $2x - y - 2 = 0$.

B. $2x + y - 2 = 0$.

C. $x + 3y - 4 = 0$.

D. $x - 3y + 4 = 0$.

Lời giải

Cách 1. (Hình học)

Thế $z = w - 2i$ vào giả thiết ta có: $|w - 3i| = |w - 1|$. Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức w và $A(0; 3), B(1; 0)$ biểu diễn các số phức $z_1 = 3i, z_2 = 1$ trên mặt phẳng phức thì ta có $MA = MB$, nên tập hợp các điểm M là đường trung trực của AB có phương trình $x - 3y + 4 = 0$. **Chọn D.**

Cách 2. (Đại số)

Thế $z = w - 2i$ vào giả thiết ta có: $|w - 3i| = |w - 1|$. Gọi $w = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ khi đó ta có $|w - 3i| = |w - 1| \Rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = (x - 1)^2 + y^2 \Rightarrow 2x - 6y + 8 = 0 \Rightarrow x - 3y + 4 = 0$.

Cách 3. (Trắc nghiệm Casio)

Ta cũng gọi $w = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ (chỉ ngầm hiểu - không cần ghi), mà đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt nên ta vào **Mode 2** nhập hai cặp $(x; y)$ khác nhau của một đường thẳng thỏa mãn giả thiết. Ghi $|X + Yi - 3i| - |X + Yi - 1|$ CALC

- Phương án A: Ta nhập $x = 1, y = 0$. Loại A và do đó loại B.

- Phương án C: Ta nhập $x = 2, y = 0$ thì loại C.

Lời bình.

Các em cần luyện tập về viết phương trình đường thẳng qua 2 điểm, trung trực của đoạn thẳng. Sau đây ta luyện tập kỹ năng phép nhân số phức và số phức liên hợp.

Ví dụ 2. (BGD - Đề thi chính thức THPTQG 2018 M102 C33)

Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} + 3i)(z - 3)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- A. $\frac{9}{2}$. B. $3\sqrt{2}$. C. 3. D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow |z| = m; z \cdot \bar{z} = m^2$ khi đó ta có

$(\bar{z} + 3i)(z - 3) = m^2 - 3x + 3yi + 3xi - 3y - 9i$ là số thuần ảo nên $m^2 - 3x - 3y = 0$ suy ra

$x^2 + y^2 - 3x - 3y = 0$ là đường tròn có bán kính $r = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. **Chọn D.**

Ví dụ 3. Xét các số phức z thỏa mãn $(z + 2 - i)(\bar{z} - i) - 2i - 1$ là số thuần ảo. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn có diện tích bằng

- A. $S = 2\pi$. B. $S = 9\pi$. C. $S = 2\pi\sqrt{3}$. D. $S = 3\pi$.

Lời giải

Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow |z| = m; z \cdot \bar{z} = m^2$ khi đó ta có

$(z + 2 - i)(\bar{z} - i) - 2i - 1 = m^2 - 2 + 2x - (z + \bar{z})i - 4i - 2yi$ là số thuần ảo nên $m^2 - 2 + 2x = 0$ suy ra $x^2 + y^2 - 2 + 2x = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 + y^2 = 3$ là đường tròn có bán kính $r = \sqrt{3}$.

Vậy ta có $S = \pi r^2 = 3\pi$. **Chọn D.**

Ví dụ 4. (SGD Phú Thọ)

Cho số phức z thỏa mãn $(z + 3 - i)(\bar{z} + 1 + 3i)$ là một số thực. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường thẳng. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng đó bằng:

- A. $4\sqrt{2}$. B. 0. C. $2\sqrt{2}$. D. $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow |z| = m; z \cdot \bar{z} = m^2$ khi đó ta có

$(z + 3 - i)(\bar{z} + 1 + 3i) = m^2 + 6 + 4x - 4y - 2yi + 8i + 2xi$ là số thực nên $2x - 2y + 8 = 0$ và đây là

đường thẳng Δ và có $d(O, \Delta) = \frac{|8|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = 2\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Lời bình.

Các ví dụ 3 và ví dụ 4 đòi hỏi chúng ta phải nhân phá ngoặc biểu thức khá dài và rất dễ bị sai số, khi nhân thông thường ta xem như $4 \times 4 = 16$ đơn thức khác nhau, bởi vậy ta cần sử dụng các tính chất của số phức hợp lý để nhằm và rút gọn bớt nhằm tránh độ phức tạp. Đó là các bài toán rất tốt để củng cố kiến thức và rèn luyện kỹ năng về số phức.

Sau đây là các ví dụ sử dụng tính chất của số phức và rèn luyện kỹ năng biến đổi.

Ví dụ 5. (THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình & THPT Chuyên Sơn La)

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \leq 2$. Trong mặt phẳng Oxy , tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích bằng

- A. $S = 9\pi$. B. $S = 12\pi$. C. $S = 16\pi$. D. $S = 25\pi$.

Lời giải

Biến đổi $|z - 3 + 4i| \leq 2 \Leftrightarrow |2z - 6 + 8i| \leq 4$. Từ đó ta có $w = 2z + 1 - i \Leftrightarrow w - 7 + 9i = 2z - 6 + 8i \Rightarrow |w - 7 + 9i| \leq 4$ nên tập hợp w là hình tròn bán kính $r = 4$ do đó $S = 16\pi$. **Chọn C.**

Ví dụ 6. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 5$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức w xác định bởi $w = (2 + 3i)\bar{z} + 3 + 4i$ là một đường tròn bán kính R . Tính R .

- A. $R = 5\sqrt{17}$. B. $R = 5\sqrt{10}$. C. $R = 5\sqrt{5}$. D. $R = 5\sqrt{13}$.

Phân tích.

Ta chú ý tính chất sau của số phức: $z = a + bi \Leftrightarrow \bar{z} = a - bi \Rightarrow |z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Mở rộng: $z - m = a - m + bi \Leftrightarrow \bar{z} - m = a - m - bi \Rightarrow |z - m| = |\bar{z} - m| = \sqrt{(a - m)^2 + b^2}, m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Biến đổi

$$w = (2 + 3i)\bar{z} - 2 - 3i + 5 + 7i \Leftrightarrow w - 5 - 7i = (2 + 3i)(\bar{z} - 1) \Rightarrow |w - 5 - 7i| = |(2 + 3i)(\bar{z} - 1)|$$

Từ đó ta có $|w - 5 - 7i| = |\bar{z} - 1| \cdot |2 + 3i| = 5\sqrt{13}$. **Chọn D.**

Ví dụ 7. Cho số phức z thỏa mãn $(z - 2 + i)(\bar{z} - 2 - i) = 25$. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w = 2\bar{z} - 2 + 3i$ là đường tròn tâm $I(a; b)$ và bán kính c . Giá trị của tích abc bằng

- A. 17. B. -17. C. 100. D. -100.

Phân tích.

Ta sẽ áp dụng tính chất: $\overline{\bar{z}} = z$ và $\overline{z - m} = \bar{z} - m, \forall m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Đặt $u = \bar{z} - 2 - i \Rightarrow \bar{u} = z - 2 + i$ thì từ giả thiết ta có $|\bar{u}| |u| = 25 \Rightarrow |u| = 5$ và biến đổi

$$w = 2\bar{z} - 2 + 3i = 2\bar{z} - 4 - 2i + 2 + 5i \Leftrightarrow w - 2 - 5i = 2(\bar{z} - 2 - i) = 2u. \text{ Từ đó ta được}$$

$|w - 2 - 5i| = 2|u| = 10$. Đến đây ta biểu diễn w là đường tròn có tâm $I(2; 5)$, bán kính $R = 10$.

Vậy $abc = 100$. **Chọn C.**

Lời bình.

Trên đây là bài toán ý tưởng lấy từ bài toán của **THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Hà Nội & THPT Nguyễn Quang Diệu - Đồng Tháp**, trong đó bài toán hỏi tổng $a + b + c$.

Ví dụ 8. Biết tập hợp điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn tâm $I(3;0)$, bán kính $R=1$, khi đó tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{i}{z-1}$ là đường tròn có bán kính r bằng

A. $r = \frac{1}{9}$.

B. $r = \frac{1}{3}$.

C. $r = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

D. $r = \sqrt{3}$.

Lời giải

Biến đổi $wz - w = i \Leftrightarrow w(z-3) = i - 2w \Rightarrow |w| = |2w - i|$ (Vì $|z-3|=1$). Từ đó gọi $w = x + yi$ thì $x^2 + y^2 = (2x)^2 + (2y-1)^2 \Rightarrow 3(x^2 + y^2) - 4y + 1 = 0$. Suy ra $r = \sqrt{0^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$.

Chọn B.

Lời bình.

Thoạt nhìn cách giải khá đơn giản, nhưng thực ra khá phức tạp, nếu ta dùng phép thế và quy đồng mẫu thức thì cũng là sử dụng tính chất "Môđun của một tích bằng tích các môđun", nghĩa là $|u.v| = |u| \cdot |v|$. Mà trong chương trình nâng cao các em Ban tự nhiên được học, nhưng các em Ban xã hội không được học, cho nên thực chất bài trên là bài toán khó, đó là một Hypebbol trong tập số phức. Bởi vậy, để sử dụng được tính chất đó thì chẳng khác nào ta đi chứng minh lại định lý trên. Sau đây ta giải theo cách 2 để thấy rõ độ phức tạp của bài toán.

Cách 2.

Gọi $z = a + bi, w = x + yi, (a, b, x, y \in \mathbb{R})$, ta có: $(a-3)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 6a - 8$.

Ngoài ra $(z-1)(\bar{z}-1) = (a-1+bi)(a-1-bi) = (a-1)^2 + b^2 = a^2 + b^2 - 2a + 1 = 4a - 7$. Khi đó

$$w = \frac{i}{z-1} = \frac{i(\bar{z}-1)}{(z-1)(\bar{z}-1)} = \frac{i(a-bi-1)}{4a-7} = \frac{b}{4a-7} + \frac{a-1}{4a-7}i = x + yi, \left(a \neq \frac{7}{4}\right).$$

Suy ra hệ $x = \frac{b}{4a-7}, y = \frac{a-1}{4a-7}$. Mục tiêu là $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2 = \text{const}$

do đó $\left(\frac{b}{4a-7} - m\right)^2 + \left(\frac{a-1}{4a-7} - n\right)^2 = r^2$. Ở đây có ba ẩn nên cần có ba phương trình.

+ Cho $a = 2, b = 0$ ta có $m^2 + (1-n)^2 = r^2$ (1).

+ Cho $a = 4, b = 0$ ta có $m^2 + \left(\frac{1}{3} - n\right)^2 = r^2$ (2).

+ Cho $a = 3, b = 1$ ta có $\left(\frac{1}{5} - m\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - n\right)^2 = r^2$ (3).

Lấy (2) trừ (1) ta có $\frac{4n}{3} - \frac{8}{9} = 0 \Rightarrow n = \frac{2}{3}$. Lấy (3) trừ (1) suy ra: $-\frac{2m}{5} + \frac{6m}{5} - \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow m = 0$.

Từ đó ta có $r = |1-n| = \frac{1}{3}$, phương trình đường tròn là $x^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$. **Chọn B.**

Định lý " $|u.v| = |u| \cdot |v|$ " được sử dụng rất nhiều do đó các em cần nắm vững để vận dụng.

Ví dụ 9. (SGD Thanh Hóa)

Gọi z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $|z - 5 - 3i| = 5$, sao cho $|z_1 - z_2| = 8$. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w = z_1 + z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình nào dưới đây?

A. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

B. $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 36$.

C. $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 16$.

D. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 9$.

Lời giải

Đặt $u = z_1 - 5 - 3i, v = z_2 - 5 - 3i \Rightarrow w = z_1 + z_2 = u + v + 10 + 6i \Rightarrow w - 10 - 6i = u + v$.

Mặt khác ta có $|u| = |v| = 5$ nên $u + v$ là đường chéo hình thoi, ngoài ra $u - v$ là đường chéo thứ hai, hơn nữa $|u - v| = |z_1 - z_2| = 8$ do đó $|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2) \Rightarrow |u + v| = 6$

Hay ta có $|w - 10 - 6i| = 6$. **Chọn B.**

Ví dụ 10. Xét số phức z có phần ảo khác 0 thỏa mãn $\frac{2z^2 - z + 2}{z^2 + z + 1}$ là số thực. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường tròn có bán kính r bằng

A. $r = 3$.

B. $r = 1$.

C. $r = \sqrt{3}$.

D. $r = \sqrt{2}$.

Phân tích.

Ta thấy biểu thức khá phức tạp nên cần rút gọn bớt theo hình thức phép chia đa thức.

Lời giải

Giải sử $z = x + yi$ ($y \neq 0$), ta có $\frac{2z^2 - z + 2}{z^2 + z + 1} = 2 - \frac{3z}{z^2 + z + 1} = 2 - \frac{3}{z + \frac{1}{z} + 1}$ là số thực khi

$$z + \frac{1}{z} + 1 \text{ là số thực} \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} \text{ là số thực, mà } z + \frac{1}{z} = x + yi + \frac{1}{x + yi} = \frac{(x + yi)(x^2 + y^2) + x - yi}{x^2 + y^2}.$$

Suy ra $y(x^2 + y^2) - y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$ (Vì $y \neq 0$). **Chọn B.**

Cách 2.

Vì thi trắc nghiệm nên ta chỉ cần xác định hai số phức thỏa mãn giả thiết và $|z - a - bi| = r$.

Đặt $\frac{2z^2 - z + 2}{z^2 + z + 1} = m \in \mathbb{R} \Rightarrow (2 - m)z^2 - (1 + m)z + 2 - m = 0$. Dễ thấy $m = 2$ không thỏa mãn

nên suy ra $z^2 - \frac{1 + m}{2 - m}z + 1 = 0$ và gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình thì theo định

lý Viet ta có $z_1 z_2 = 1 \Rightarrow |z_1| = |z_2| = 1$ đều thỏa mãn điều kiện $|z| = 1$. Vậy $r = 1$. **Chọn B.**

2. Các bài toán đơn giản tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

Đối với các bài toán vận dụng tương đối đơn giản về giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất thì các em cần có kỹ năng tốt về viết phương trình đường thẳng, đường tròn.

Ví dụ 11. (THPT Trần Hưng Đạo – Ninh Bình)

Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z+3i|=|z+2-i|$. Tìm số phức có môđun nhỏ nhất?

A. $z=1-2i$. B. $z=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$. C. $z=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$. D. $z=-1+2i$.

Lời giải

Cách 1. (Hình học)

Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức z và $A(0; -3), B(-2; 1)$ biểu diễn các số phức $z_1 = -3i, z_2 = -2 + i$ trên mặt phẳng phức thì $|z+3i|=|z+2-i| \Leftrightarrow MA=MB$, nên tập hợp các điểm M là đường trung trực của BA và có phương trình $d: 2x-4y=2$. Ta có $|z|=OM$ nhỏ nhất

khi OM là khoảng cách từ O đến d , ta có hệ $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+y=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{1}{5}, y=-\frac{2}{5}$. **Chọn C.**

Cách 2. (Đại số - Bất đẳng thức)

Gọi $z=a+bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow |z|=\sqrt{a^2+b^2}$, từ giả thiết ta có $a^2+(b+3)^2=(a+2)^2+(b-1)^2$

suy ra $1=a-2b \leq \sqrt{(1^2+(-2)^2)(a^2+b^2)} \Rightarrow |z| \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow |z|_{\min} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ đạt được tại

$$\begin{cases} a-2b=1 \\ -2a=b \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{5}, b=-\frac{2}{5}.$$

Cách 3. Đối với bài toán này ta có thể kiểm tra bằng máy tính **Casio** xem số phức nào thỏa mãn hai điều kiện thì chọn. Trong **Mode 2**

Điều kiện $|z+3i|-|z+2-i|=0$ ghi $|X+3i|-|X+2-i|$ CALC rồi nhập X là các số phức thì duy nhất đáp án C thỏa mãn. Do đó không cần kiểm tra điều kiện môđun nhỏ nhất.

Cách 4. (Đại số - Khảo sát)

Gọi $z=x+yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow |z|=\sqrt{x^2+y^2}$, từ giả thiết ta có $x^2+(y+3)^2=(x+2)^2+(y-1)^2$

suy ra $x=2y+1$ và do đó $|z|=\sqrt{(2y+1)^2+y^2}=\sqrt{5y^2+4y+1} \geq \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow |z|_{\min} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ đạt được

tại $y=-\frac{2}{5} \Rightarrow x=\frac{1}{5}$. (Sử dụng tam thức bậc hai hoặc **Mode 7**).

Ví dụ 12. Trong các số phức thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$. Tìm môđun nhỏ nhất của số phức $z+2i$.

A. $\sqrt{5}$ B. $3\sqrt{5}$. C. $3\sqrt{2}$. D. $3+\sqrt{2}$.

Lời giải

Đặt $z+2i=a+bi \Rightarrow z=a+(b-2)i$, ta cần tìm min của $T=\sqrt{a^2+b^2}$. Thay z vào giả thiết ta có $|a-2+(b-6)i|=|a+(b-4)i| \Rightarrow (a-2)^2+(b-6)^2=a^2+(b-4)^2 \Rightarrow a+b=6$.

Từ đó ta có $T=\sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{\frac{1}{2}(a+b)^2} = 3\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Cách 2. Mời các em giải theo phương pháp hình học hoặc khảo sát.

Cách 3. (Sử dụng công thức tính nhanh và Casio - Xem chứng minh phần Phụ lục. Tr47)

Đường thẳng có dạng $|z - A| = |z - B|$ và cần tính $\min |z - C|$ ta tham khảo công thức sau

$$\frac{|C - A|^2 - |C - B|^2}{2|A - B|}$$

Bấm CALC nhập $-2i = 2 + 4i = 2i$ ta được kết quả cần tìm (Nhập C trước).

Ví dụ 13. [THPT Nguyễn Quang Diệu - Đồng Tháp]

Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|$ và $w = iz + 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|w|$ bằng?

A. 2

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi $M(x; y)$ biểu diễn số phức z và $A(-2; 2), B(0; 4)$ biểu diễn các số phức $z_1 = -2 + 2i, z_2 = 4i$ trên mặt phẳng phức thì $|z + 2 - 2i| = |z - 4i| \Leftrightarrow MA = MB$, nên tập hợp các điểm M là đường trung trực của AB và có phương trình $d: 2x + 2y = 4$. Ta có $|w| = |iz + 1| = |z - i| = IM$, với $I(0; 1)$, suy ra IM nhỏ nhất khi IM là khoảng cách từ I đến d , ta

có $d(I, d) = \frac{|2 - 4|}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn B.**

Cách 2. Mời các em giải theo phương pháp đại số (Bất đẳng thức hoặc khảo sát).

Cách 3. (Công thức tính nhanh + Casio)

Biến đổi $|w| = |z - i|$, đường thẳng $|z + 2 - 2i| = |z - 4i|$, sử dụng công thức $\frac{|C - A|^2 - |C - B|^2}{2|A - B|}$

CALC nhập $i = -2 + 2i = 4i$ ta được kết quả cần tìm.

Ví dụ 14. Cho số phức z không phải số thuần ảo và thỏa mãn điều kiện $|z^2 + 4| = |z(z + 2i)|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + i|$ bằng

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Biến đổi $|z^2 + 4| = |z(z + 2i)| \Leftrightarrow |z - 2i| \cdot |z + 2i| = |z| \cdot |z + 2i| \Rightarrow |z - 2i| = |z|$

(vì $|z + 2i| > 0$). Đến đây ta sử dụng công thức tính nhanh $\frac{|C - A|^2 - |C - B|^2}{2|A - B|}$

CALC nhập $-i = 2i = 0$ ta được kết quả bằng 2. **Chọn A.**

Mời các em giải theo cách khác.

Ví dụ 15. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 2$. Tìm môđun lớn nhất của số phức z .

A. $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$.

B. $\sqrt{11 + 4\sqrt{5}}$

C. $\sqrt{6 + 4\sqrt{5}}$

D. $\sqrt{5 + 6\sqrt{5}}$.

Lời giải

Cách 1. (Đại số)

Đặt $z - 1 + 2i = a + bi \Rightarrow z = a + 1 + (b - 2)i$. Từ giả thiết ta có $a^2 + b^2 = 4$ (1).

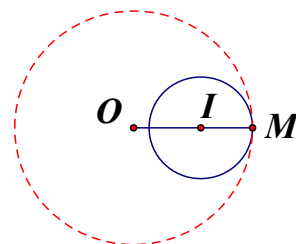
Khi đó theo (1) và bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$|z|^2 = (a+1)^2 + (b-2)^2 = 9 + 2a - 4b \leq 9 + \sqrt{(2^2 + (-4)^2)(a^2 + b^2)} = 9 + 4\sqrt{5}.$$

Hay ta có $|z|_{\max} = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$. **Chọn A.**

Cách 2. (Hình học)

Giả sử $z = x + yi \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = R \geq 0$. Vì tìm $|z|_{\max}$ nên xét $R > 0$. Từ giả thiết $|z - 1 + 2i| = 2$ là đường tròn tâm $I(1; -2)$ bán kính $r = 2$. Vậy để R lớn nhất thì hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau và $R = OI + r = \sqrt{5} + 2$



Ví dụ 16. [THPT Chuyên Phan Bội Châu]

Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 3i| = 1$. Giá trị lớn nhất của $|\bar{z} + 1 + i|$ là

A. $\sqrt{13} + 2$.

B. 4.

C. 6.

D. $\sqrt{13} + 1$.

Lời giải

Cách 1. (Đại số)

Đặt $z - 2 - 3i = a + bi \Rightarrow z = a + 2 + (b + 3)i$. Từ giả thiết ta có $a^2 + b^2 = 1$ (1).

Ta có $w = \bar{z} + 1 + i = a + 3 - (b + 2)i \Rightarrow |w|^2 = (a + 3)^2 + (b + 2)^2$, khi đó theo (1) và bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$|w|^2 = 14 + 6a + 4b \leq 14 + \sqrt{(6^2 + 4^2)(a^2 + b^2)} = 14 + 2\sqrt{13} = (\sqrt{13} + 1)^2$$

Suy ra $|w|_{\max} = \sqrt{13} + 1$. **Chọn D.**

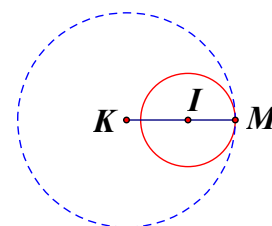
Cách 2. (Hình học)

Giả sử $z = x + yi \Rightarrow |w| = |\bar{z} + 1 + i| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = R \geq 0$.

Vì tìm $|w|_{\max}$ nên xét $R > 0$ và là đường tròn tâm $K(-1; 1)$. Từ

giả thiết $|z - 2 - 3i| = 1$ là đường tròn tâm $I(2; 3)$ bán kính

$r = 1$. Vậy để R lớn nhất thì hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau và $R = KI + r = \sqrt{13} + 1$



Ví dụ 17. Cho số phức z thỏa mãn $|2z - 3 - 4i| = 10$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Khi đó $M - m$ bằng

A. 5.

B. 15.

C. 10.

D. 20.

Lời giải

Cách 1. (Đại số)

Trước hết ta tìm min, max của $|2z|$. Đặt $2z - 3 - 4i = a + bi \Rightarrow 2z = a + 3 + (b + 4)i$ và $a^2 + b^2 = 100$ (1). Khi đó từ (1) ta có $|2z|^2 = (a + 3)^2 + (b + 4)^2 = 125 + 2(3a + 4b)$ (2).

Mặt khác $|3a + 4b| \leq \sqrt{(3^2 + 4^2)(a^2 + b^2)} = 50 \Rightarrow -50 \leq 3a + 4b \leq 50$ (3). Từ đây và từ (2) suy ra $125 - 100 \leq |2z|^2 \leq 125 + 100 \Leftrightarrow 5 \leq |2z| \leq 15 \Rightarrow 2(M - m) = 15 - 5 = 10 \Rightarrow M - m = 5$.

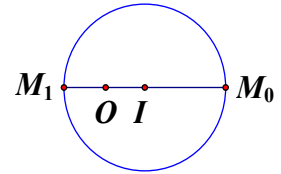
Chọn A.

Cách 2. (Hình học)

Biến đổi $|2z - 3 - 4i| = 10 \Leftrightarrow \left|z - \frac{3}{2} - 2i\right| = 5$ và gọi $M(z) = M(x; y)$

thì ta có M thuộc đường tròn tâm $I\left(\frac{3}{2}; 2\right)$, bán kính là $r = 5$ nên

$|z| = OM$ có giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất khi M là giao điểm của đường thẳng OI với đường tròn nên hiệu $M - m = OM_0 - OM_1 = 2OI = 5$. **Chọn A.**



Lời bình.

Cần nhận xét được vị trí của O đối với đường tròn tâm I hoặc là $\min|z| = |OI - r|$.

Ví dụ 18. [THPT Chuyên ĐHKHTN - Huế]

Trong các số phức z thỏa mãn $|z + 3 + 4i| = 2$, gọi z_0 là số phức có mô đun nhỏ nhất. Khi đó

A. Không tồn tại số phức z_0 .

B. $|z_0| = 2$.

C. $|z_0| = 7$.

D. $|z_0| = 3$.

Lời giải

Cách 1. (Trắc nghiệm tính nhanh)

Thay $z = 0$ vào vế trái của giả thiết rồi trừ về phải.

Ghi $|3 + 4i| - 2$ bắm = ta có $|z_0|_{\min} = 3$. **Chọn D.**

Mời các em giải theo các phương pháp khác.

Ví dụ 19. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 3$. Tìm mô đun lớn nhất của số phức $z - 2i$.

A. $\sqrt{26 + 6\sqrt{17}}$.

B. $\sqrt{26 - 6\sqrt{17}}$.

C. $\sqrt{26 + 8\sqrt{17}}$.

D. $\sqrt{26 - 4\sqrt{17}}$.

Lời giải

Cách 1. (Đại số)

Đặt $z - 1 + 2i = a + bi \Rightarrow z = a + 1 + (b - 2)i$, khi đó $w = z - 2i = a + 1 + (b - 4)i$

$\Rightarrow |w|^2 = (a + 1)^2 + (b - 4)^2$. Mặt khác từ giả thiết ta có $|a + bi| = 3 \Rightarrow a^2 + b^2 = 9$ nên

$|w|^2 = 26 + 2a - 8b \leq 26 + \sqrt{(2^2 + (-8)^2)(a^2 + b^2)} = 26 + 6\sqrt{17} = (3 + \sqrt{17})^2$.

Suy ra $|w|_{\max} = \sqrt{17} + 3$. **Chọn A.**

Cách 2. Mời các em giải theo phương pháp hình học.

Cách 3. (Trắc nghiệm tính nhanh)

Cho $z - 2i = 0 \Rightarrow z = 2i$ thay vào vế trái của giả thiết rồi cộng về phải.

Ghi $|2i - 1 + 2i| + 3$ bắm = ta có $|w|_{\max} = 3 + \sqrt{17}$.

Lời bình.

Các em xem lại các ví dụ 15; 16; 17; 18. Sau đây ta xét bài toán có sự "biến tấu" một ít.

Ví dụ 20. [SGD TPHCM]

Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 2$. Khi đó $|2z + 1 - i|$ có giá trị lớn nhất là:

- A. $16 + \sqrt{74}$. B. $2 + \sqrt{130}$. C. $4 + \sqrt{74}$. D. $4 + \sqrt{130}$.

Phân tích.

Bài toán quy về xét khoảng cách từ điểm A đến điểm M thuộc đường tròn.

Lời giải

Biến đổi $|z - 3 + 4i| = 2 \Leftrightarrow |2z - 6 + 8i| = 4 \Rightarrow M(2z) \in (C)$ tâm $I(6; -8)$, $R = 4$.

Xét điểm $A(-1; 1)$ thì $|2z + 1 - i| = AM$ và lớn nhất khi $AM = R + AI = 4 + \sqrt{130}$. **Chọn D.**

Lời bình. Để tính nhanh, trong **Mode 2** ta ghi $|X - 6 + 8i| + 4$ Calc nhập $-1 + i$ bấm = là được.

Ví dụ 21. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3| = 2|z|$ và $\min \left| z + \frac{3}{2} + 2i \right| = a + b\sqrt{2}$. Tính $2a + b$.

- A. -1 . B. $2\sqrt{2}$. C. -2 . D. 4 .

Lời giải

Gọi M biểu diễn $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Từ $|z - 3| = 2|z| \Rightarrow (x - 3)^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow (x + 3)^2 + y^2 = 18$. Quỹ tích M là đường tròn tâm $I(-3; 0)$, bán

kính $R = 3\sqrt{2}$. Gọi $A\left(-\frac{3}{2}; -2\right)$ thì $\left| z + \frac{3}{2} + 2i \right| = AM$. Dễ thấy điểm A nằm ở miền trong

đường tròn (C) nên $AM_{\min} = R - AI = -\frac{5}{2} + 3\sqrt{2} \Rightarrow 2a + b = -2$. **Chọn C.**

Ví dụ 22. [THPT Chuyên Sơn La]

Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 + 2i| = \sqrt{5}$ và $w = z + 1 + i$ có môđun lớn nhất. Số phức z có môđun bằng:

- A. $2\sqrt{5}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $\sqrt{6}$. D. $5\sqrt{2}$.

Lời giải

Cách 1. (Đại số)

Đặt $z - 1 + 2i = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow z = x + 1 + (y - 2)i$ và ta có: $x^2 + y^2 = 5$ (1).

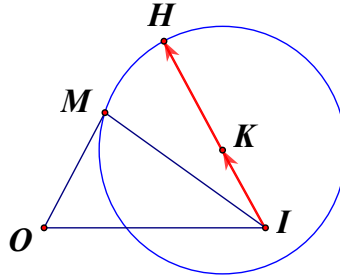
Khi đó $w = x + 2 + (y - 1)i \Rightarrow |w|^2 = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 10 + 4x - 2y$ (theo (1))

Suy ra $|w|^2 = 10 + 4x - 2y \leq 10 + \sqrt{(4^2 + 2^2)}(x^2 + y^2) = 10 + 10$.

Giải điều kiện tìm x, y : $\begin{cases} 4x - 2y = 10 \\ -2x = 4y \end{cases}$ có $x = 2, y = -1$ nên $z = 3 - 3i \Rightarrow |z| = 3\sqrt{2}$. **Chọn B.**

Cách 2. (Hình học véc tơ)

Gọi $K(1; -2)$, $I(-1; -1) \Rightarrow \overrightarrow{IK} = (2; -1)$. Để IM lớn nhất thì vị trí M cần tìm tại H sao cho $\overrightarrow{IH} = (t+1)\overrightarrow{IK}$, $t = \frac{IK+R}{IK} - 1 = 1 \Rightarrow \overrightarrow{IH} = (4; -2) \Rightarrow H(3; -3)$. Suy ra $OH = |z| = 3\sqrt{2}$.

**Cách 3. (Hình học tổng hợp)**

Tính $\cos \alpha = \frac{OI^2 + IK^2 - OK^2}{2OI.IK} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ suy ra $OH = |z| = \sqrt{OI^2 + IH^2 - 2OI.IH.\cos \alpha}$ thay số
 $|z| = \sqrt{2 + 20 - 2.2\sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}} = 3\sqrt{2}$.

Cách 4. (Hình học véc tơ)

Gọi $K(1; -2)$, $A(1; 1)$ và ta có: $w = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OK}) + \overrightarrow{KM} = \vec{u} + \overrightarrow{KM}$, để $|w|_{\max}$ thì ta chọn sao cho $\overrightarrow{KM}$ cùng hướng $\vec{u}$, do đó $w = (t+1)\vec{u}$. Với $\vec{u} = (2; -1) \Rightarrow \overrightarrow{KM} = t(2; -1)$.
 $\Rightarrow t = 1 \Rightarrow |w|_{\max} = 2|\vec{u}| = 2\sqrt{5}$ và $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OK} + \vec{u} = (1; -2) + (2; -1) = (3; -3) \Rightarrow |z| = 3\sqrt{2}$.

Ví dụ 23. Biết số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $T = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $|z|$.

A. $|z| = \sqrt{33}$.

B. $|z| = 50$.

C. $|z| = \sqrt{10}$.

D. $|z| = 5\sqrt{2}$.

Phân tích.

Bài toán quy về xét vị trí điểm M thuộc giao của đường tròn và đường thẳng.

Lời giải**Cách 1. (Hình học tọa độ)**

Gọi $M(z) = M(x; y)$ thì M thuộc đường tròn (C), tâm I(3; 4), $R = \sqrt{5}$ và ta có:

$$T = (x+2)^2 + y^2 - x^2 - (y-1)^2 = 4x + 2y + 3 \Leftrightarrow d: 4x + 2y + 3 - T = 0. \text{ Để } T \text{ lớn nhất}$$

thì d tiếp xúc với đường tròn (C), khi đó $\overrightarrow{IM} = t(4; 2) \Rightarrow t = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (2; 1)$

(lấy $t > 0$). Ta có M(5; 5) nên $|z| = OM = 5\sqrt{2}$. **Chọn D.**

Cách 2. (Hình học véc tơ)

Gọi $M(z) = M(x; y)$ thì M thuộc đường tròn (C), tâm $I(3; 4)$, $R = \sqrt{5}$.

Gọi $A(-2; 0), B(0; 1)$ thì $T = MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{BA} \cdot (2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})$.

Đến đây ta chỉ cần xác định vị trí M sao cho $\overrightarrow{MI}$ và $\overrightarrow{BA}$ cùng hướng.

Hay $\overrightarrow{MI} = t(-2; -1), t > 0 \Rightarrow t = \frac{R}{\sqrt{5}} = 1 \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (2; 1) \Rightarrow M(5; 5) \Rightarrow |z| = 5\sqrt{2}$.

Cách 3. (Đại số - Khái quát)

Đặt $z - 3 - 4i = a + bi \Rightarrow z = a + 3 + (b + 4)i$ & $a^2 + b^2 = 5$. Thế z vào T ta có

$$T = (a + 5)^2 + (b + 4)^2 - [(a + 3)^2 + (b + 3)^2] = 4a + 2b + 5 \leq \sqrt{20(a^2 + b^2)} + 5 = 15.$$

Dấu bằng tại $a = 2, b = 1 \Rightarrow z = 5 + 5i \Rightarrow |z| = 5\sqrt{2}$.

Ví dụ 24. [THPT Chuyên Đại học Vinh]

Xét các số phức z, w thỏa mãn $|w - i| = 2, z + 2 = iw$. Gọi z_1, z_2 lần lượt là các số phức mà tại đó $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất. Môđun $|z_1 + z_2|$ bằng:

A. $3\sqrt{2}$

B. 3

C. 6

D. $6\sqrt{2}$.

Phân tích.

Bài toán gây nhiều khó khăn trong giả thiết nên có thể khiến một số em lúng túng, tuy nhiên ta vẫn quy về đường tròn. $w = \frac{z + 2}{i}$

Lời giải

Viết lại thế vào giả thiết $\left| \frac{z + 2}{i} - i \right| = 2 \Leftrightarrow |z + 3| = 2$.

Biểu diễn của z là đường tròn có tâm $I(-3; 0)$ thuộc trục hoành nên:

$$OM_{\min} = OI - r = 1 \Leftrightarrow z_1 = -1 \text{ và } OM_{\max} = OI + r = 5 \Leftrightarrow z_2 = -5 \text{ suy ra } |z_1 + z_2| = |-6| = 6.$$

Chọn C.

Mời các em giải theo phương pháp đại số (Gợi ý: Chuyển độ phức tạp của đường tròn sang đường thẳng).

Ví dụ 25. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|\overline{z_1} + 5 + 2i| = 2$ và $|z_2 - 1 - 6i| = 3$. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$. Khi đó $a^2 + b^2$ bằng

A. 77

B. 144

C. 145

D. 154.

Phân tích.

Bài toán cho M và N thuộc hai đường tròn. Cần xét min, max của đoạn MN.

Lời giải.

Ta viết lại $|\overline{z_1} + 5 + 2i| = 2 \Leftrightarrow |z_1 + 5 - 2i| = 2$ nên $M(z_1) \in (C_1)$ tâm $I(-5; 2), R_1 = 2$.

Tương tự $N(z_2) \in (C_2)$ tâm $K(1; 6), R_2 = 3$. Gọi $IK = h = 2\sqrt{13} > R_1 + R_2 = m = 5$.

Ta có: $b = MN_{\min} = h - m$; $a = MN_{\max} = h + m$ suy ra $a^2 + b^2 = (h - m)^2 + (h + m)^2$ thay số

$$a^2 + b^2 = 2(h^2 + m^2) = 2(52 + 25) = 154. \text{ Chọn D.}$$

Ví dụ 26. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 2i| = 3$ và $|z_2 + 2 + 2i| = |z_2 + 2 + 4i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z_1 - z_2|$ bằng.

A. $P = 1$.

B. $P = 2$.

C. $P = 3$.

D. $P = 4$.

Phân tích.

Bài toán cho M thuộc đường tròn, N thuộc đường thẳng. Tìm min của MN.

Lời giải

Cách 1. (Trắc nghiệm Casi0)

Ta có $P_{\min} = |z_1 - z_2|_{\min} = d(I, \Delta) - R$ nên sử dụng công thức tính nhanh

$$\frac{|C - A|^2 - |C - B|^2}{2|A - B|} - 3 \text{ Calc nhập } 2i = -2 - 2i = -2 - 4i = \text{ta có } P = 2. \text{ Chọn B.}$$

Mời các em giải theo cách khác.

Ví dụ 27. [THPT Chuyên ĐH Vinh]

Cho số phức z thỏa mãn z không phải số thực và $w = \frac{z}{2 + z^2}$ là số thực. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z + 1 - i|$ là?

A. $2\sqrt{2}$.

B. 8.

C. $\sqrt{2}$.

D. 2.

Lời giải.

$$\text{Viết lại } w = \frac{z}{2 + z^2} = \frac{1}{\frac{2}{z} + z} \text{ là số thực} \Leftrightarrow z + \frac{2}{z} \text{ là số thực.}$$

$$\text{Đặt } z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow z + \frac{2}{z} = \frac{(x^2 + y^2)(x + yi) + 2x - 2yi}{x^2 + y^2} \text{ là số thực nên}$$

$$(x^2 + y^2)y = 2y, y \text{ khác } 0 \text{ nên } x^2 + y^2 = 2, \text{ khi đó } P = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} \text{ hay}$$

$$P = \sqrt{4 + 2(x - y)} \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow P_{\max} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 1, y = -1 \Rightarrow z = 1 - i. \text{ Chọn A.}$$

Ví dụ 28. Cho số phức z thỏa mãn $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 3$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là:

A. 3

B. 5

C. $\sqrt{13}$

D. $\sqrt{5}$.

Lời giải.

$$\text{Đặt } z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}); |z| = m \geq 0, \text{ ta có } \left|z^2 + 1\right| = 3|z| \Rightarrow (x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2 = 9m^2$$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 + 1 + 2x^2y^2 + 2(x^2 - y^2) = 9m^2 \Rightarrow m^4 + 1 + 2(2x^2 - m^2) = 9m^2$$

$$\Rightarrow 4x^2 = -m^4 + 11m^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{11 - 3\sqrt{13}}{2} \leq m^2 \leq \frac{11 + 3\sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{13} - 3}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{13} + 3}{2}$$

Suy ra $|z|_{\min} + |z|_{\max} = \sqrt{13}$. **Chọn C.**

(Các cực trị đạt được tại $x = 0$ hay z là số thuần ảo)

Ví dụ 29. [Hội 8 Trường Chuyên]

Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z - (2+i)\bar{z} = 2i$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng

- A.** 1. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** 2. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Viết lại giả thiết $(2-i)z = (2+i)\bar{z} + 2i$

$$\Leftrightarrow (2-i)z + (2+i)z = (2+i)(z + \bar{z}) + 2i \Leftrightarrow 2z = (2+i)x + i \Rightarrow 2|z| = \sqrt{4x^2 + (x+1)^2}$$

$$\Rightarrow |z| = \frac{1}{2}\sqrt{5x^2 + 2x + 1} \geq \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow |z|_{\min} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ đạt được tại } x = -\frac{1}{5}. \text{ **Chọn D.}**$$

Lời bình.

Bài trên quy về khảo sát hàm số. Ta có thể xem thêm ví dụ sau

Ví dụ 30. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z^2 - z| + |z^2 + z + 1|$ với z là số phức thỏa mãn $|z| = 1$.

- A.** $\max P = \frac{13}{4}$ **B.** $\max P = \frac{9}{4}$ **C.** $\max P = \frac{13}{3}$ **D.** $\max P = \frac{11}{3}$

Lời giải.

Trước hết gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ và ta có $|z^2 - z| = |z - 1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{2-2x}$.

$$\text{Lại có } |z^2 + z + 1| = |z| \left| z + \frac{1}{z} + 1 \right| = |z + \bar{z} + 1| = |2x + 1|.$$

Suy ra $P = |2x + 1| + \sqrt{2-2x} = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} + \sqrt{2-2x}, x \in [-1; 1]$. Xét $x \neq -\frac{1}{2}, x \neq 1$ thì:

$$P' = \frac{4x+2}{\sqrt{4x^2+4x+1}} - \frac{1}{\sqrt{2-2x}} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{2-2x} = 1 \Rightarrow x = \frac{7}{8} \text{ do đó } \max P = \frac{13}{4}. \text{ **Chọn A.}**$$

Lời bình.

Khi đưa về $P = |2x + 1| + \sqrt{2-2x}, x \in [-1; 1]$ thì ta có thể vào **Mode 7** để khảo sát các giá trị của

P với bước nhảy $\text{Step} = \frac{2}{16}$. Từ đó suy ra $\max P$.

Ví dụ 31. Cho các số phức thỏa mãn $|2z + 5 - 4i| = |2z + 3 + 4i|$. Giá trị nhỏ nhất của

$$|z + 1 + 4i| + |z - 1 - i| \text{ là}$$

A. 5

B. $\sqrt{29}$.

C. $\sqrt{41}$

D. $\sqrt{10}$.

Lời giải

Cách 1. (Đại số)

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$, ta có $|2x + 5 + (2y - 4)i| = |2x + 3 + (2y + 4)i|$

$$\Rightarrow x = 4y - 2 \text{ hay } z = 4y - 2 + yi \text{ thế vào } T \text{ ta có } T = |4y - 1 + (y + 4)i| + |4y - 3 + (y - 1)i|$$

$$T = \sqrt{17y^2 + 17} + \sqrt{17y^2 - 26y + 10} = \sqrt{(\sqrt{17}y)^2 + (\sqrt{17})^2} + \sqrt{\left(\frac{13}{\sqrt{17}} - \sqrt{17}y\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2}$$

$$\text{Suy ra } T \geq \sqrt{\left(\frac{13}{\sqrt{17}}\right)^2 + \left(\sqrt{17} + \frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2} = \sqrt{\frac{170}{17} + 17 + 2} = \sqrt{29}. \text{ Chọn B.}$$

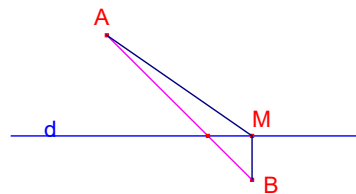
Cách 2. (Hình học tọa độ)

Giả sử M biểu diễn $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có

$$|2x + 5 + (2y - 4)i| = |2x + 3 + (2y + 4)i| \Rightarrow M \in d : x - 4y + 2 = 0.$$

Gọi $A(-1; -4), B(1; 1)$ thì ta cần tìm min $(MA + MB)$, vì A và B khác phía đối với d bởi thế

$$\min(MA + MB) = AB = \sqrt{29}.$$



Qua các ví dụ trên thì hy vọng các em củng cố kiến thức và luyện tập kỹ năng về min, max.

3. Các bài toán tính toán

Để thực hiện tính toán thì:

+ Thông thường ta xem số phức là giao của hai hay nhiều tập hợp biểu diễn số phức đó.

+ Hoặc các phép biến đổi đại số (giải hệ phương trình). *Phép đặt ẩn phụ coi như xuyên suốt cả phần II này, đặc biệt ở phần nâng cao (Mục 4).*

Ví dụ 32. Tìm môđun của số phức z , biết $z - 4 = (1 + i)|z| - (4 + 3z)i$.

A. $|z| = \frac{1}{2}$.

B. $|z| = 2$.

C. $|z| = 4$.

D. $|z| = 1$.

Lời giải

Đặt $|z| = m \geq 0$. Khi đó từ giả thiết ta có: $z - 4 = m(1 + i) - 4i - 3iz$

$$\Leftrightarrow (1 + 3i)z = m + 4 + (m - 4)i \text{ suy ra } \sqrt{10}m = \sqrt{(m + 4)^2 + (m - 4)^2} \Rightarrow 10m^2 = 2m^2 + 32$$

$$\text{Suy ra } m^2 = 4 \Rightarrow m = 2. \text{ Chọn B.}$$

Ví dụ 33. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 1, |z_2| = 2$ và $|z_1 + z_2| = 3$. Giá trị của $|z_1 - z_2|$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. -1.

Lời giải

Cách 1. (Hình học)

Sử dụng công thức $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ (công thức hình bình hành), khi đó

$$|z_1 - z_2|^2 + 9 = 2(1 + 4) \Rightarrow |z_1 - z_2| = 1. \text{ Chọn B.}$$

Lời bình.

Thực chất công thức hình bình hành được suy ra từ công thức đường trung tuyến trong tam giác. Để củng cố ta chứng minh lại như sau:

Giả sử hình bình hành có độ dài hai cạnh a, b và hai đường chéo là m, n thì:

$$\left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{n^2}{4} \Leftrightarrow m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2) \text{ ta có điều phải chứng minh.}$$

Cách 2. (Đại số)

$$\text{Gọi } z_1 = a + bi, z_2 = c + di \text{ khi đó ta có } \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 4 \\ (a + c)^2 + (b + d)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow ac + bd = 2. \text{ Từ đó:}$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - 2(ac + bd) = 1 \Rightarrow |z_1 - z_2| = 1.$$

Ví dụ 34. Cho số phức $z = a + bi, (a, b \neq 0)$ thỏa mãn $z + 4\bar{z} = \left(\frac{5}{3} - 2\sqrt{2}i\right)|z|$. Tính $S = \frac{2a + b}{2a - b}$.

A. $S = -2\sqrt{2} - 3$

B. $S = 2\sqrt{2} - 2$

C. $S = 2 - 2\sqrt{2}$

D. $S = 2\sqrt{2} + 3$.

Lời giải:

$$\text{Đặt } |z| = m > 0, \text{ ta có } z + 4\bar{z} = \frac{5}{3}m - 2m\sqrt{2}i \Rightarrow \begin{cases} 5a = \frac{5}{3}m \\ -3b = -2m\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3}m \\ b = \frac{2\sqrt{2}}{3}m \end{cases} \text{ và do đó:}$$

$$S = \frac{2a + b}{2a - b} = \frac{(2 + 2\sqrt{2})m}{(2 - 2\sqrt{2})m} = -3 - 2\sqrt{2}. \text{ Chọn A.}$$

Ví dụ 35. (THPT Chuyên Đại học Vinh)

Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z - 1|^2 + |z - \bar{z}|i + (z + \bar{z})i^{2019} = 1$?

A. 4

B. 2

C. 1

D. 3.

Lời giải

Ta chú ý là $i^{2019} = i^3 \cdot i^{2016} = -i \cdot (i^4)^{504} = -i$, giả sử $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ và đặt $|z - 1|^2 = m$

$$\text{thì từ giả thiết ta có } m+2|b|i-2ai=1 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ |b|=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1)^2+a^2=1 \\ |b|=a \end{cases}$$

$\Rightarrow (a;b) \in \{(0;0), (2;2), (2;-2)\}$. **Chọn D.**

Ví dụ 36. Cho số phức $z=1+i$. Biết rằng các số phức $z_1=a+5i$, $z_2=b$ (trong đó $a,b \in \mathbb{R}, b>1$)

thỏa mãn $\sqrt{3}|z-z_1|=\sqrt{3}|z-z_2|=|z_1-z_2|$. Tính $b-a$.

A. $b-a=5\sqrt{3}$. **B.** $b-a=2\sqrt{3}$. **C.** $b-a=4\sqrt{3}$. **D.** $b-a=3\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có $\sqrt{3}|z-z_1|=\sqrt{3}|z-z_2| \Leftrightarrow |1-a-4i|=|1-b+i| \Rightarrow (1-a)^2+16=(1-b)^2+1$.

Đặt $1-a=m$ và $1-b=n$ ta được $n^2-m^2=15$ (1). Mặt khác ta cũng có

$$3[(1-b)^2+1]=(a-b)^2+25 \Leftrightarrow 3(n^2+1)=(m-n)^2+25=m^2+n^2-2mn+25 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta có $3n^2=2n^2-2mn+7 \Rightarrow n^2+2mn=7$ suy ra $15(n^2+2mn)=7(n^2-m^2)$

$$\Rightarrow 15+30 \cdot \frac{m}{n}=7-7\left(\frac{m}{n}\right)^2 \Rightarrow \frac{m}{n}=-4 \cup \frac{m}{n}=-\frac{2}{7}. \text{ Thế vào (1) thì chỉ có cặp } \frac{m}{n}=-\frac{2}{7} \text{ thỏa}$$

mãn và $m=\frac{2}{\sqrt{3}}, n=-\frac{7}{\sqrt{3}}$ (vì $1-b=n<0$). Cuối cùng $b-a=m-n=\frac{9\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$. **Chọn D.**

Lời bình.

Bài toán quy về đại số, không có ý nghĩa rèn luyện về số phức bao nhiêu.

Ví dụ 37. (THPT Chuyên Tuyên Quang)

Cho số phức z thỏa mãn $|z+\sqrt{15}|+|z-\sqrt{15}|=8$ và $|z+\sqrt{15}i|+|z-\sqrt{15}i|=8$. Tính $|z|$.

A. $|z|=\frac{4\sqrt{34}}{17}$ **B.** $|z|=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **C.** $|z|=\frac{4}{5}$ **D.** $|z|=\frac{5}{4}$.

Lời giải

Cách 1. (Hình học)

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z , $F_1(-\sqrt{15};0), F_2(\sqrt{15};0)$ thì giả thiết:

$$|z+\sqrt{15}|+|z-\sqrt{15}|=8 \Leftrightarrow MF_1+MF_2=8=2a \text{ nên } M \text{ thuộc elip có phương trình}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (1). \text{ Hoàn toàn tương tự } M \text{ thuộc elip } \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad (2). \text{ Quy đồng và cân bằng ta có}$$

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2x^2+b^2y^2 \Rightarrow x^2=y^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2(a^2-c^2)}{2a^2-c^2}. \text{ Ta chỉ việc thay số:}$$

$$a^2=16, c^2=15 \Rightarrow x^2=\frac{16(16-15)}{32-15}=\frac{16}{17} \Rightarrow |z|=|x|\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{34}}{17}. \text{ Chọn A.}$$

Lời bình. Thực chất bài toán kiểm tra kiến thức và kỹ năng về elip.

Cách 2. (Đại số)

Biến đổi $|z + i\sqrt{15}| + |z - i\sqrt{15}| = 8 \Leftrightarrow |iz - \sqrt{15}| + |iz + \sqrt{15}| = 8$ như thế hai số phức z và iz đều có cùng tính chất. Ngoài ra $|z + \sqrt{15}| + |z - \sqrt{15}| = 8 \Leftrightarrow |\bar{z} + \sqrt{15}| + |\bar{z} - \sqrt{15}| = 8$ như thế các số phức z và $\bar{z}$ có cùng tính chất, vậy ta chọn $z = x - xi$ là thỏa mãn và có:

$$|z + \sqrt{15}|^2 + |z - \sqrt{15}|^2 + 2|z^2 - 15| = 64 \Rightarrow 2(|z|^2 + 15) + 2|-2x^2i - 15| = 64$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 15 + \sqrt{4x^4 + 225} = 32 \Rightarrow \sqrt{4x^4 + 225} = 17 - 2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{16}{17} \Rightarrow |z| = |x|\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{34}}{17}.$$

Cách 3. Cách giải trên có thể một số em còn băn khoăn, sau đây ta có thể giải như sau

Theo giả thiết thứ nhất suy ra $|z + \sqrt{15}|^2 + |z - \sqrt{15}|^2 + 2|z^2 - 15| = 64$ (1).

Theo quy tắc hình bình hành thì $|z + \sqrt{15}|^2 + |z - \sqrt{15}|^2 = 2(|z|^2 + |\sqrt{15}|^2)$ thế vào (1) ta có

$$|z^2 - 15| + |z|^2 = 17 \quad (2). \text{ Hoàn toàn lập lại với giả thiết thứ hai: } |z^2 + 15| + |z|^2 = 17 \quad (3).$$

Đặt $z^2 = a + bi$ thì từ (2) và (3) suy ra $|z^2 - 15| = |z^2 + 15|$ hay

$$(a - 15)^2 + b^2 = (a + 15)^2 + b^2 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow z^2 = bi \text{ thay trở về (2) ta được}$$

$$|bi - 15| + |b| = 17 \Rightarrow b^2 + 225 = (17 - |b|)^2 \Rightarrow |b| = \frac{32}{17} \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{32}{17}} = \frac{4\sqrt{34}}{17}.$$

Ví dụ 38. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $(1+i)|z+4-2i| + (1-i)|z| = 6+4i$?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Ta chia cả hai vế cho $1+i$ và được $|z+4-2i| - |z|i = 5-i$. Giả sử $z = a+bi, (a, b \in \mathbb{R})$ và đặt

$|z+4-2i| = m; |z| = n$ thì ta có $m = 5 + (n-1)i \Rightarrow m = 5, n = 1$ hay ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} |z+4-2i| = 5 \\ |z| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+4)^2 + (b-2)^2 = 25 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (a; b) \in \left\{ (0; -1), \left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5} \right) \right\}. \text{ Chọn A.}$$

Ví dụ 39. (THTT Số 3-486)

Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = |z + \bar{z}| = 1$?

A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Giả sử $z = a+bi, (a, b \in \mathbb{R})$ thì ta có $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$ & $2|a| = 1$ hay ta có hệ điều kiện:

$$a = \pm \frac{1}{2} \text{ \& } a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}, b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 40. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1+3i|-|z-5|=5$ và $\left|z^2-\left(\overline{z}\right)^2\right|=4$.

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Giả sử $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ thì từ $\left|z^2 - (\overline{z})^2\right| = 4 \Rightarrow |4xyi| = 4 \Rightarrow |xy| = 1$ (1). Mặt khác điều kiện thứ nhất là $|z-1+3i| = |z-5| + 5$. Gọi $M(x; y), I(1; -3), K(5; 0)$ thì $KI = 5$ và điều kiện trở thành $MI = MK + KI$ hay K thuộc đoạn MI , phương trình KI là: $x = 5 + 4t, y = 3t$ nên ta có $5|t+1| = 5|t| + 5$ (đúng với $t > 0$). Thay vào (1) ta có nghiệm duy nhất $t = \frac{-15 + \sqrt{273}}{24}$.

Vậy chọn D.

Ví dụ 41. (THPT Quỳnh Lưu 1 – Nghệ An)

Giả sử z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $|(2+i)z|z - (1-2i)z| = |1+3i|$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Tính $M = |2z_1 + 3z_2|$.

A. $M = 19$.

B. $M = 25$.

C. $M = 5$.

D. $M = \sqrt{19}$.

Lời giải

Ta chia cả hai vế cho $|2+i|$ và được $|z|z + iz| = |1+i| = \sqrt{2}$. Đặt $|z| = m \geq 0$ thì ta có $m|m+i| = \sqrt{2} \Rightarrow m^2(m^2+1) = 2 \Rightarrow m = 1$ hay ta có $|z| = 1$, nói cách khác hai số z_1, z_2 cùng thuộc đường tròn tâm O , bán kính $R = 1$. Gọi A, B biểu diễn các số z_1, z_2 thì từ $|z_1 - z_2| = 1$ suy ra OAB là tam giác đều. Không giảm tổng quát chọn $A(1; 0), B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Thì $M = \left|2(1+0i) + 3\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \left|\frac{7+i3\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{19}$. **Chọn D.**

Ví dụ 42. Cho số z thỏa mãn các điều kiện $|z+8-3i| = |z-i|$ và $|z+8-7i| = |z+4-i|$. Tìm số phức $w = z + 7 - 3i$.

A. $w = 3 - i$.

B. $w = 13 - 6i$.

C. $w = 1 + i$.

D. $w = 4 + 3i$.

Lời giải

Gọi $w = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow z = x - 7 + (y + 3)i$ thế vào điều kiện thứ nhất ta có:

$$|x+1+yi| = |x-7+(y+2)i| \Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = (x-7)^2 + (y+2)^2 \Rightarrow 4x - y = 13 \quad (1).$$

Thế vào điều kiện thứ hai ta có: $|x+1+(y-4)i| = |x-3+(y+2)i|$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-4)^2 = (x-3)^2 + (y+2)^2 \Rightarrow 2x - 3y = -1 \quad (2).$$

Giải hệ (1) và (2) ta có $x = 4, y = 3$ hay $w = 4 + 3i$. **Chọn D.**

Lời bình. Bài trên ta có thể dùng Casio để kiểm tra đáp án.

Ví dụ 43. (THPT Trần Hưng Đạo - Ninh Bình)

Cho các số phức z_1, z_2 khác nhau thỏa mãn: $|z_1| = |z_2|$. Chọn phương án đúng:

- A. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = 0$. B. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số phức với phần thực và phần ảo đều khác 0.
C. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số thực. D. $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ là số thuần ảo.

Lời giải

Gọi $z_1 = 2 + i, z_2 = 2 - i$ thì ta có $|z_1| = |z_2| = \sqrt{5}$ và $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = \frac{4}{2i} = -2i$. **Tô đáp án D!**

Ví dụ 44. Cho tập hợp các số phức z thỏa $|2z - i| = |2 + iz|$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức trong tập hợp đó sao cho $|z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2|$.

- A. $P = \sqrt{3}$. B. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $P = \sqrt{2}$. D. $P = 2$.

Lời giải.

Viết lại điều kiện $|2z - i| = |2 + iz| \Leftrightarrow |2z - i| = |2i - z|$. Gọi $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ thế vào điều kiện ta có:

$$|2a + (2b - 1)i| = |a + (b - 2)i| \Rightarrow 4a^2 + (2b - 1)^2 = a^2 + (b - 2)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$$

Hay là $|z_1| = |z_2| = 1$, sử dụng quy tắc hình bình hành ta có:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = 4 \Rightarrow |z_1 + z_2|^2 = 3 \Rightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{3}. \text{ Chọn A.}$$

Ví dụ 45. (THPT Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình)

Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3, |z_2| = 4, |z_1 - z_2| = \sqrt{41}$. Xét số phức

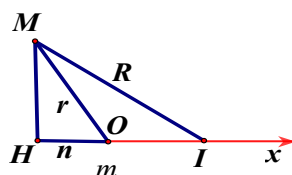
$z = \frac{z_1}{z_2} = a + bi (a, b \in \mathbb{R})$. Khi đó $|b|$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{8}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải.

Theo giả thiết suy ra $|z| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{3}{4}$ và $\left| \frac{z_1}{z_2} - 1 \right| = \frac{\sqrt{41}}{4} \Leftrightarrow |z - 1| = \frac{\sqrt{41}}{4}$. Như thế z thuộc giao của

hai đường tròn tâm O bán kính $r = \frac{3}{4}$ và đường tròn tâm $I(1; 0)$ bán kính $R = \frac{\sqrt{41}}{4}$.



Kẻ MH vuông góc với OI , đặt $OH = n$, $HI = m$, ta có: $\begin{cases} m - n = 1 \\ m^2 - n^2 = R^2 - r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - n = 1 \\ m + n = R^2 - r^2 \end{cases}$

Suy ra $n = \frac{R^2 - 1 - r^2}{2} = -a \Rightarrow |b| = \sqrt{r^2 - n^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{R^2 - 1 - r^2}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$. **Chọn D.**

Ví dụ 46. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2 + 3i| = |z - 2 - 3i|$. Biết $|z - 1 - 2i| + |z - 7 - 4i| = 6\sqrt{2}$ và $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z , khi đó x thuộc khoảng nào?

- A.** $(0; 2)$. **B.** $(1; 3)$. **C.** $(4; 8)$. **D.** $(2; 4)$.

Lời giải.

Theo giả thiết suy ra $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \Rightarrow y = 0$ và $z = x$. Như thế z là số thực, thay vào giả thiết thứ hai, ta có $\sqrt{(x - 1)^2 + 4} + \sqrt{(x - 7)^2 + 16} = 6\sqrt{2}$.

Áp dụng Bất đẳng thức Mincopxki ta có $6\sqrt{2} = \sqrt{(x - 1)^2 + 2^2} + \sqrt{(7 - x)^2 + 4^2} \geq \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ như thế dấu bằng xảy ra và $\frac{x - 1}{7 - x} = \frac{2}{4} \Leftrightarrow x = 3$. **Chọn D.**

Ví dụ 47. (THPT Lê Lai - Thanh Hóa)

Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 2i| = |\bar{z} + 3 + 4i|$ và $\frac{z - 2i}{z + i}$ là một số thuần ảo?

- A.** 0 **B.** Vô số **C.** 1 **D.** 2.

Lời giải.

Giả sử $z = x + yi$, $(x, y \in \mathbb{R})$. Theo bài ra ta có: $|x + 1 + (y - 2)i| = |x + 3 + (4 - y)i|$
 $\Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = (x + 3)^2 + (y - 4)^2 \Leftrightarrow y = x + 5$ hay ta có $z = x + (x + 5)i$.

Số phức $w = \frac{z - 2i}{z + i} = \frac{x + (x + 3)i}{x - (x + 6)i} = \frac{x^2 - (x + 3)(x + 6) + x(2x + 9)i}{x^2 + (x + 6)^2}$ là số thuần ảo nên

$x^2 - (x + 3)(x + 6) = 0 \Leftrightarrow -9x - 18 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow z = -2 + 3i$. **Chọn C.**

Ví dụ 48. [THPT Chuyên Thái Nguyên]

Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn phương trình $\frac{(|z| - 1)(1 + iz)}{z - \frac{1}{\bar{z}}} = i$. Tính $a^2 + b^2$.

- A.** $3 + 2\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $3 - 2\sqrt{2}$. **D.** $2 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải.

Để thấy z khác 0, đặt $|z| = m > 0$ và ta có: $\frac{(m - 1)(1 + iz)\bar{z}}{z\bar{z} - 1} = i \Rightarrow \frac{(m - 1)(\bar{z} + m^2 i)}{m^2 - 1} = i$

$\Rightarrow \bar{z} + m^2 i = i(m + 1) \Rightarrow a + (m^2 - b)i = i(m + 1) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ m^2 - b = m + 1 \end{cases} \Rightarrow b^2 - b = |b| + 1$

(Vì m khác 1 nên $b > 0$), do đó $b^2 - 2b = 1 \Rightarrow b = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow b^2 = 3 + 2\sqrt{2}$. **Chọn A.**

Ví dụ 49. (THPT Chuyên Tuyên Quang)

Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 2019^{2018} = 0$. Giá trị $|z_1| + |z_2|$ bằng

- A. 2019^{1009} . B. 2019^{2010} . C. 2019^{2019} . D. 2.2019^{1009} .

Lời giải

Theo định lý Viet ta có $z_1 z_2 = 2019^{2018} \Rightarrow |z_1| = |z_2| = \sqrt{2019^{2018}} = 2019^{1009}$ suy ra

$|z_1| + |z_2| = 2.2019^{1009}$. **Tô đáp án D!**

Ví dụ 50. Trên tập hợp số phức, cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$ với $b, c \in \mathbb{R}$. Biết rằng hai nghiệm của phương trình là $w + 3$ và $2w - 15i + 9$ với w là một số phức. Tính $S = b^2 - 2c$

- A. $S = -32$. B. $S = 1608$. C. $S = 1144$. D. $S = -64$.

Lời giải

Gọi $w = x + yi$, vì $z_1 + z_2 = -b$ là số thực nên $3x + 12 + (3y - 15)i$ là số thực, suy ra $y = 5$.

Chú ý rằng $z_1 = \overline{z_2}$ nên $x + 3 = 2x + 9 \Rightarrow x = -6$. Do đó $z_1 = -3 + 5i, z_2 = -3 - 5i$.

Vậy $S = b^2 - 2c = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 = 36 - 68 = -32$. **Chọn A.**

Ví dụ 51. Cho a là số thực, phương trình $z^2 + (a - 2)z + 2a - 3 = 0$ có 2 nghiệm z_1, z_2 . Gọi M, N là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Biết tam giác OMN có một góc bằng 120° , tính tổng các giá trị của a .

- A. -6 . B. 6 . C. -4 . D. 4 .

Lời giải

Theo định lý Viet thì $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2a - 3}$, giả thiết OMN là tam giác có một góc bằng 120° , nên OMN là nửa hình thoi, suy ra $|z_1 + z_2| = |z_1| = |z_2| \Rightarrow |a - 2| = \sqrt{2a - 3} \Rightarrow (2 - a)^2 = 2a - 3$.

$\Rightarrow a^2 - 6a + 7 = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 = 6$. **Chọn B.**

Ví dụ 52. [SGD TPHCM]

Cho a, b, c là các số thực sao cho phương trình $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ có ba nghiệm phức lần lượt là $z_1 = w + 3i; z_2 = w + 9i; z_3 = 2w - 4$, trong đó w là một số phức nào đó. Tính giá trị của $P = |a + b + c|$.

- A. $P = 36$. B. $P = 208$. C. $P = 136$. D. $P = 84$.

Lời giải

Áp dụng định lý Viet ta có $z_1 + z_2 + z_3 = -a \in \mathbb{R} \Rightarrow 4w - 4 + 12i \in \mathbb{R}$. Đặt $w = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ thì suy ra $4y + 12 = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow w = x - 3i$ (1).

Thay (1) vào giả thiết ta được $z_1 = x; z_2 = x + 6i; z_3 = 2x - 4 - 6i$.

Ta lại có $z_2 = \overline{z_3}$ nên $x = 2x - 4 \Rightarrow x = 4$ do đó $z_1 = 4; z_2 = 4 + 6i; z_3 = 4 - 6i$.

Tiếp theo ta có $a = -(z_1 + z_2 + z_3) = -12, c = -z_1 z_2 z_3 = -208, b = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = 84$.

Vậy $P = |a + b + c| = 136$. **Chọn C.**

Lời bình.

Để tính nhanh ta ghi: $|A + B + C + ABC - AB - BC - CA|$ **Calc nhập** $A = z_1, B = z_2, C = z_3$.

Chú ý rằng trong tập $\mathbb{C}$ thì phương trình bậc 3 luôn có ít nhất 1 nghiệm thực.

Ví dụ 53. [Cụm 6 TPHCM]

Cho số phức $z = x + yi; x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $z^3 = 18 + 26i$. Tính $T = (z - 2)^2 + (4 - z)^2$.

A. 0.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Ta có $T = (z - 2)^2 + (4 - z)^2 = 2z^2 - 12z + 20$; $T = 0 \Leftrightarrow z = 3 + i, z = 3 - i$ có ít nhất nghiệm $z = 3 + i$ thỏa mãn $z^3 = 18 + 26i$. Vậy $T = 0$. **Chọn A.**

Cách 2. Ta có thể đi giải phương trình bậc ba hay khai căn bậc ba để tìm nghiệm z như sau:

Ta có $(x + yi)^3 = x^3 + (yi)^3 + 3xyi(x + yi) = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i = 18 + 26i$

Mà z là số thực hoặc thuần ảo đều không thỏa mãn, nên suy ra

$$\frac{x^3 - 3xy^2}{3x^2y - y^3} = \frac{18}{26} = \frac{9}{13} \Rightarrow \frac{t^3 - 3t}{3t^2 - 1} = \frac{9}{13} \Rightarrow 13t^3 - 27t^2 - 39t + 9 = 0 \Rightarrow (t - 3)(13t^2 + 39t - 3) = 0$$

Ta chỉ cần nghiệm $t = 3 \Rightarrow x = 3y \Rightarrow z = y(3 + i), y \neq 0$ thay vào $T = 0$.

Cách 3. (Sử dụng máy tính Casio)

Trong **Mode 2** ghi $18 + 26i$ bấm = để lưu. Sau đó bấm $\sqrt[3]{|Ans|} \angle \frac{\arg(Ans)}{3}$ bấm = ta được

(Ngầm hiểu) $\sqrt[3]{18 + 26i} = 3 + i$ tiếp tục bấm $(Ans - 2)^2 + (4 - Ans)^2 =$ kết quả bằng 0.

Ví dụ 54. Cho biết có hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $z^2 = 119 - 120i$. Tính $|z_1 - z_2|^2$.

A. 169.

B. 114244.

C. 338.

D. 676.

Phân tích.

Bài toán quy về tìm bình phương của số phức hay là khai căn bậc hai của số phức.

Lời giải

Ta có $119 - 120i = 119 - 2.60i = a^2 - b^2 - 2abi$, trong đó $\begin{cases} a^2 - b^2 = 119 \\ ab = 60 \end{cases}$. Dùng phép thế ta có

$$a^2 - \frac{3600}{a^2} = 119 \Rightarrow a^2 = 144 \Rightarrow b^2 = 25 \text{ nên } z^2 = (12 - 5i)^2 \Rightarrow z_1 = 12 - 5i, z_2 = -12 + 5i$$

Vậy $|z_1 - z_2|^2 = |24 - 10i|^2 = 576 + 100 = 676$. **Chọn D.**

Cách 2. (Sử dụng máy tính Casio)

Trong **Mode 2** ghi 119 - 120i bấm = để lưu. Sau đó bấm $\sqrt{|\text{Ans}|} \angle \frac{\arg(\text{Ans})}{2}$ bấm = ta được

(Ngầm hiểu) căn bậc hai của 119 - 120i là 12 - 5i tiếp tục bấm $|2\text{Ans}|^2 =$ kết quả bằng 676.

Ví dụ 55. Cho z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau và thỏa mãn $\frac{z_1}{z_2^2} \in \mathbb{R}$ và $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{3}$. Tính môđun của số phức z_1 .

A. $|z_1| = \sqrt{5}$.

B. $|z_1| = 3$.

C. $|z_1| = 2$.

D. $|z_1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải:

Trước hết gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow |2yi| = 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$ và ta có

$$\frac{z_1}{z_2^2} = m \neq 0 \Rightarrow z_1 = mz_2^2 = m(x^2 - 3 \pm 2x\sqrt{3}i) = x \mp i\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} m(x^2 - 3) = x \\ 2mx = \pm 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2 - 3 = \pm 2x^2 \Rightarrow x = \pm 1$. Từ đó $z = \pm 1 \pm i\sqrt{3} \Rightarrow |z| = 2$. **Chọn C.**

Ví dụ 56. Cho z_1, z_2 là các số phức thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$ và $|z_1 - 2z_2| = \sqrt{6}$. Tính giá trị của biểu thức $P = |2z_1 + z_2|$.

A. $P = 2$.

B. $P = \sqrt{3}$.

C. $P = 3$.

D. $P = 1$.

Lời giải

Chọn $z_2 = i$, ta phải xác định z_1 , hay là tìm z thỏa $|z| = 1, |z - 2i| = \sqrt{6}$ và tính $P = |2z + i|$.

Đặt $z = a + bi$ ta có: $a^2 + b^2 = 1$ và $a^2 + (b - 2)^2 = 6$ suy ra $a^2 + b^2 - 4b + 4 = 6 \Rightarrow b = -\frac{1}{4}$.

Khi đó: $P^2 = 4a^2 + (2b + 1)^2 = 4(a^2 + b^2) + 4b + 1 = 4 \Rightarrow P = 2$. **Chọn A.**

Cách 2. Ta có thể giải tổng quát bởi các biến a, b, c, d cũng đi đến kết quả.

Giả sử $z_1 = a + bi, z_2 = c + di, (a, b, c, d \in \mathbb{R})$ thì $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$ và

$$(a - 2c)^2 + (b - 2d)^2 = 6 \Rightarrow (a^2 + b^2) - 4(ac + bd) + 4(c^2 + d^2) = 6 \Rightarrow ac + bd = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{Khi đó } P = |2z_1 + z_2| = \sqrt{4(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) + 4(ac + bd)} = \sqrt{5 - 1} = 2.$$

Cách 3. Ta có thể luyện tập cách giải với số phức liên hợp là $z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2} = 1$ và:

$$(z_1 - 2z_2)(\overline{z_1} - 2\overline{z_2}) = 6 \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} - 2(z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1}) + 4z_2 \cdot \overline{z_2} = 6 \Rightarrow 2(z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1}) = -1.$$

$$\text{Khi đó } P^2 = (2z_1 + z_2)(2\overline{z_1} + \overline{z_2}) = 4z_1 \cdot \overline{z_1} + 2(z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1}) + z_2 \cdot \overline{z_2} = 4 - 1 + 1 = 4 \Rightarrow P = 2.$$

Các em có thể so sánh cách 2 và cách 3 để luyện tập tư duy trừu tượng!

Ví dụ 57. (THPT Chu Văn An – Hà Nội)

Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn điều kiện $|4z_1z_2 + 16z_2z_3 + 9z_1z_3| = 48, |z_1| = 4, |z_2| = 3$ và $|z_3| = 2$. Giá trị của biểu thức $P = |z_1 + z_2 + z_3|$ bằng:

A. 1.

B. 8.

C. 2.

D. 6.

Lời giải

$$\text{Ta có } |4z_1z_2 + 16z_2z_3 + 9z_1z_3| = 48 \Rightarrow \frac{|4z_1z_2 + 16z_2z_3 + 9z_1z_3|}{|z_1z_2z_3|} = \frac{48}{24}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{4}{z_3} + \frac{16}{z_1} + \frac{9}{z_2} \right| = 2 \Rightarrow |\overline{z_3} + \overline{z_1} + \overline{z_2}| = 2 \Rightarrow P = |z_1 + z_2 + z_3| = 2. \text{ Chọn C.}$$

Ví dụ 58. (THPT Can Lộc - Hà Tĩnh)

Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z + 2w| = 3, |2z + 3w| = 6$ và $|z + 4w| = 7$. Tính giá trị của biểu thức $P = z\overline{w} + \overline{z}w$.

A. $P = -14i$.

B. $P = -28i$.

C. $P = -14$.

D. $P = -28$.

Phân tích.

Ở đây ta thấy có 4 ẩn là $z; w; \overline{z}; \overline{w}$ nhưng chỉ có ba điều kiện. Tuy nhiên chúng có mối liên hệ đặc biệt là $z\overline{z} = |z|^2; w\overline{w} = |w|^2$.

Lời giải

Đặt $m = z\overline{z}; n = w\overline{w}$. Ta có:

$$(z + 2w)(\overline{z} + 2\overline{w}) = 9 \Rightarrow m + 2(z\overline{w} + \overline{z}w) + 4n = 9 \Rightarrow m + 2P + 4n = 9 \quad (1)$$

$$(2z + 3w)(2\overline{z} + 3\overline{w}) = 36 \Rightarrow 4m + 6P + 9n = 36 \quad (2).$$

$$(z + 4w)(\overline{z} + 4\overline{w}) = 49 \Rightarrow m + 4P + 16n = 49 \quad (3). \text{ Giải hệ trên ta có } P = -28. \text{ Chọn D.}$$

Lời bình.

Các biểu thức gần giống phép bình phương, tuy nhiên ở đây ta nhân liên hợp.

Ví dụ 59. Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.

B. $|z_1 + z_2 + z_3| < |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.

C. $|z_1 + z_2 + z_3| > |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.

D. $|z_1 + z_2 + z_3| \neq |z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1|$.

Lời giải

Ta có $P = |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3| \Rightarrow P = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^3 \cdot \frac{|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3|}{|z_1 z_2 z_3|} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^3 \cdot \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right|$.

Hay $P = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot |\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot |z_1 + z_2 + z_3| = 0$. **Chọn A.**

Ví dụ 60. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-1| = \sqrt{2}$ và $|z+i| + |z-2-i| = 4$?

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Đặt $z-1 = a+bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow z = a+1+bi$, từ giả thiết ta có $a^2 + b^2 = 2$ (1).

Thế vào điều kiện thứ hai và sử dụng (1), ta có:

$$4 = |a+1+(b+1)i| + |a-1+(b-1)i| = \sqrt{(a+1)^2 + (b+1)^2} + \sqrt{(a-1)^2 + (b-1)^2}$$

$$4 = \sqrt{4+2(a+b)} + \sqrt{4-2(a+b)} \leq \sqrt{(1^2+1^2)[4+2(a+b)+4-2(a+b)]} = 4.$$

Dấu "=" xảy ra khi $4+2(a+b) = 4-2(a+b) \Leftrightarrow a+b = 0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $a=1; b=-1 \cup a=-1, b=1$. **Chọn D.**

Ví dụ 61. Cho hai số phức z, w thỏa mãn $|z|=3$ và $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w}$. Khi đó $|w|$ bằng:

A. 3.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z+w} \Rightarrow (z+w)^2 = zw \Rightarrow \left(1 + \frac{w}{z}\right)^2 = \frac{w}{z} \Rightarrow (1+t)^2 = t \Rightarrow t^2 + t + 1 = 0$.

Ta có $|t_1| = |t_2| = 1$, suy ra $|w| = |t| \cdot |z| = 3$. **Chọn A.**

Ví dụ 62. [THPT Chuyên Sơn La]

Gọi A, B là hai điểm biểu diễn hình học số phức theo thứ tự z_1, z_2 khác 0 và thỏa mãn đẳng thức $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$. Với O là gốc tọa độ thì ba điểm O, A, B tạo thành tam giác gì?

A. Vuông cân.

B. Cân, không đều

C. Đều

D. Vuông, không cân.

Lời giải

Từ giả thiết ta có: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + 1 = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow t^2 - t + 1 = 0$ suy ra: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z_1 = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} z_2$.

Do đó $|z_1| = |z_2|$ nên $OA = OB$ suy ra OAB cân tại O .

Mặt khác $z_1 - z_2 = \left(\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} - 1\right) z_2 \Rightarrow |z_1 - z_2| = \left|\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} - 1\right| \cdot |z_2| = \left|\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right| \cdot |z_2| = |z_2|$

Nên $AB = OA = OB$ hay tam giác OAB đều. **Chọn C.**

Ví dụ 63. [SGD TPHCM]

Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 6, |z_2| = 2$. Gọi M, N là các điểm biểu diễn cho z_1 và iz_2 . Biết $\widehat{MON} = 60^\circ$. Tính $T = |z_1^2 + 9z_2^2|$.

- A. $T = 18$. B. $T = 24\sqrt{3}$. C. $T = 36\sqrt{2}$. D. $T = 36\sqrt{3}$.

Lời giải**Cách 1. (Hình học)**

Đặt $z_1 = u; 3iz_2 = v \Rightarrow |u| = 6 = |v|$. Ta có $T = |z_1 - 3iz_2| \cdot |z_1 + 3iz_2| = |u - v| \cdot |u + v|$. Mà $\widehat{MON} = 60^\circ$ nên $u + v$ là đường chéo hình thoi, $u - v$ là đường chéo thứ hai, có $|u|; |v|$ và $|u - v|$ tạo thành tam giác đều. Sử dụng công thức hình bình hành ta có:

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2) \Rightarrow |u + v| = |u|\sqrt{3} \text{ và } T = |u|^2 \sqrt{3} = 36\sqrt{3}. \text{ Chọn D.}$$

Ví dụ 64. [Hội 8 Trường Chuyên]

Có bao nhiêu số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{Z}$) thỏa mãn $|z + i| + |z - 3i| = |z + 4i| + |z - 6i|$ và $|z| \leq 10$?

- A. 12 B. 2. C. 10. D. 5.

Lời giải**Cách 1. (Hình học)**

Viết lại giả thiết $|iz - 1| + |iz + 3| = |iz - 4| + |iz + 6|$ và đặt $iz + 1 = w \Leftrightarrow iz = w - 1$

Như thế có bao nhiêu số phức $|w - 1| \leq 10$ (*) thì có bấy nhiêu số z . Khi đó giả thiết là

$|w - 2| + |w + 2| = |w - 5| + |w + 5|$ (1). Trước hết ta có $|5 - w| + |w + 5| \geq |5 - w + 5 + w| = 10$. Dấu bằng xảy ra khi $w = 5 \cup w = -5$ thỏa mãn (1) và (*).

Bây giờ ta xét $|5 - w| + |w + 5| = 2m > 10 \Rightarrow m > 5$ và gọi $w = x + yi, (x, y \in \mathbb{Z})$ khi đó (1) xem

như biểu diễn của hai Elip (Trục thay đổi) là: $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{m^2 - 4} = \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{m^2 - 25} = 1$ (2).

Từ (2) suy ra $\frac{y^2}{m^2 - 4} = \frac{y^2}{m^2 - 25} \Leftrightarrow y^2 \left(\frac{1}{m^2 - 4} - \frac{1}{m^2 - 25} \right) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ suy ra $w = x \in \mathbb{Z}$.

Như vậy thì: $\begin{cases} |x - 1| \leq 10 \\ |x| = m > 5 \end{cases} \Rightarrow x \in \{-9; -8; -7; -6; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$ có 10 số.

Cả hai trường hợp thì có 12 số. **Chọn A.**

Lời bình. Theo cách trên thì ta chuyển đổi Elip từ trục ảo sang trục thực cho quen thuộc.

Cách 2. (Đại số)

Đặt $u = z - i \Leftrightarrow z = u + i$ ta viết lại giả thiết: $|u + 2i| + |u - 2i| = |u + 5i| + |u - 5i|$ (1).

Ta có $|z| = |u + i| \leq 10$ và giả sử $u = x + yi \Rightarrow |x| \leq 10; |y + 1| \leq 10, (x, y \in \mathbb{Z})$.

Đặt $x^2 + y^2 = m$ thì từ (1) ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + (y+2)^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2} &= \sqrt{x^2 + (y+5)^2} + \sqrt{x^2 + (y-5)^2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{m+4+4y} + \sqrt{m+4-4y} &= \sqrt{m+25+10y} + \sqrt{m+25-10y} \\ \Leftrightarrow \sqrt{m+4+4y}\sqrt{m+4-4y} &= 21 + \sqrt{m+25+10y}\sqrt{m+25-10y} \\ \Leftrightarrow \sqrt{(m+4)^2 - 16y^2} &= 21 + \sqrt{(m+25)^2 - 100y^2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 16 + 8(x^2 - y^2)} &= 21 + \sqrt{m^2 + 625 + 50(x^2 - y^2)}. \text{ Lại đặt } x^2 - y^2 = n < 0 \text{ thì} \\ \Rightarrow \sqrt{m^2 + 16 + 8n} - \sqrt{m^2 + 625 + 50n} &= 21 \quad (2) \Rightarrow \frac{-29 - 2n}{\sqrt{m^2 + 16 + 8n} + \sqrt{m^2 + 625 + 50n}} = 1 \\ \Rightarrow \sqrt{m^2 + 16 + 8n} + \sqrt{m^2 + 625 + 50n} &= -29 - 2n \quad (3)\end{aligned}$$

Từ (2) và (3) suy ra $\sqrt{m^2 + 16 + 8n} = -4 - n \Rightarrow m^2 + 16 + 8n = 16 + 8n + n^2, n \leq -4$

$$\Rightarrow m^2 = n^2 \Rightarrow m = -n \Rightarrow x^2 + y^2 = -x^2 + y^2 \Rightarrow x = 0, -y^2 \leq -4 \text{ và theo (3)} -y^2 < -\frac{29}{2}$$

$$\Rightarrow x = 0, |y| > \sqrt{\frac{29}{2}}, \text{ và } |y+1| \leq 10 \text{ thử trực tiếp ta có } y \in \{-11; -10; \dots; -5; 5; 6; \dots; 9\}. \text{ Chọn A.}$$

Lời bình. Giải cách 2 như thế chẳng khác gì tự luận - Thời gian thiếu quá!

Ví dụ 65. Tìm mô đun của số phức z , biết $z = 1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \dots + 2019i^{2018}$.

A. $\sqrt{2034145}$ B. $\sqrt{2038181}$ C. $\sqrt{2040200}$ D. $\sqrt{2042221}$.

Lời giải

$$\text{Gọi } f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2019} = \frac{x^{2020} - 1}{x - 1}, (x \neq 1)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 2019x^{2018} = \frac{2019 \cdot x^{2020} - 2020 \cdot x^{2019} + 1}{(x-1)^2}$$

$$\text{Từ đó } z = f'(i) = \frac{2020 + 2020i}{-2i} = -1010 + 1010i \Rightarrow |z| = \sqrt{2040200}. \text{ Chọn C.}$$

Lời bình.

Trên đây ta tìm hiểu các ví dụ có tính điển hình và phổ biến, tuy nhiên ta chưa thể tìm hiểu được các bài toán vận dụng khai triển Newton và Đại số tổ hợp hay các lũy thừa bậc cao của số phức hoặc là dạng lượng giác nâng cao. Do đó nếu cần thì các em tự tìm hiểu thêm.

4. Các bài toán VDC tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

Đối với các bài toán vận dụng cao thì các em cần có kỹ năng tốt về biểu diễn tương quan giữa các độ dài đoạn thẳng, nắm vững hơn các kiến thức về ba đường Conic (Hình học 10). Mặt khác cũng thường xuyên sử dụng các bất đẳng thức Mincopxki và Bunhiacopxki. Ngoài ra các em có thể đại số hóa bài toán để khảo sát hàm số. Tuy nhiên vì thời gian thi trắc nghiệm có hạn nên cũng không phải là các bài toán quá khó, vì vậy các em hãy yên tâm.

Ví dụ 66. Cho số thực z_1 và số phức z_2 thỏa mãn $|z_2 - 2i| = 1$ và $\frac{z_2 - z_1}{1+i}$ là số thực. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$. Tính $T = a + b$.

- A.** $T = 4$. **B.** $T = 4\sqrt{2}$. **C.** $T = 3\sqrt{2} + 1$. **D.** $T = \sqrt{2} + 3$.

Lời giải

Chọn $z_1 = x \in \mathbb{R}$, đặt $\frac{z_2 - z_1}{1+i} = m \in \mathbb{R} \Rightarrow z_2 - z_1 = m(1+i) \Rightarrow |z_2 - z_1| = |m|\sqrt{2}$ & $z_2 = x + m + mi$

thế vào giả thiết thứ nhất: $|x + m + (m-2)i| = 1 \Rightarrow (x+m)^2 + (m-2)^2 = 1$ suy ra :

$$(x+m)^2 = 1 - (m-2)^2 \geq 0 \Rightarrow |m-2| \leq 1 \Rightarrow 1 \leq m \leq 3.$$

Khi đó $\sqrt{2} \leq |z_1 - z_2| \leq 3\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}, b = \sqrt{2}$. **Chọn B.**

Ví dụ 67. [THPT Chuyên Thái Bình]

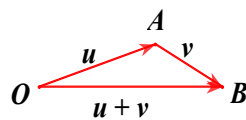
Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 2 - i| - |z - 2 - 3i| = 2\sqrt{5}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$

- A.** $|z|_{\min} = \sqrt{5}$ **B.** $|z|_{\min} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ **C.** $|z|_{\min} = \sqrt{13}$ **D.** $|z|_{\min} = 2\sqrt{5}$

Lời giải

Đặt $z - 2 - 3i = u \Leftrightarrow z = u + 2 + 3i$ ta viết lại giả thiết: $|u + 4 + 2i| = |u| + 2\sqrt{5}$ (1).

Từ (1) ta lại có: $|u| + 2\sqrt{5} = |u + 4 + 2i| \leq |u| + |4 + 2i| = |u| + 2\sqrt{5}$ do đó dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $u = k(4 + 2i), k \geq 0$



Thay trở về (1) ta được: $2\sqrt{5}|k+1| = 2\sqrt{5}(|k|+1) \Rightarrow |k+1| = |k|+1$ (đúng $\forall k \geq 0$).

Hiển nhiên ta tìm min nên chọn $k = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow |z|_{\min} = |2 + 3i| = \sqrt{13}$. **Chọn C.**

Ví dụ 68. Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z-2i}{z+3-i} \right| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+3-2i|$ bằng

- A.** $\frac{2\sqrt{10}}{5}$. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Phân tích.

Quan sát biểu thức của bài toán thì ta có thể quy về đường thẳng và đường tròn.

Lời giải

Cách 1. (Đại số)

Đặt $z + 3 - 2i = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow z = a - 3 + (b + 2)i$. Ta cần tìm min của $T = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Mặt khác ta có $\left| \frac{z - 2i}{z + 3 - i} \right| = 1 \Rightarrow |z - 2i| = |z + 3 - i| \Rightarrow (a - 3)^2 + b^2 = a^2 + (b + 1)^2$ suy ra

$$4 = 3a + b \leq \sqrt{(3^2 + 1^2)(a^2 + b^2)} \Rightarrow T \geq \frac{2\sqrt{10}}{5}. \text{ Chọn A.}$$

Cách 2. (Hình học tọa độ)

Đặt $|z + 3 - 2i| = R \geq 0$, trước hết xét $R > 0$, khi đó $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$ biểu diễn bởi $M(x; y)$ thuộc đường tròn tâm $I(-3; 2)$, bán kính R .

Mặt khác ta có $\left| \frac{z - 2i}{z + 3 - i} \right| = 1 \Rightarrow |z - 2i| = |z + 3 - i| \Rightarrow x^2 + (y - 2)^2 = (x + 3)^2 + (y - 1)^2$ suy ra

$3x + y + 3 = 0$ là đường thẳng Δ nên IM nhỏ nhất khi IM vuông góc với Δ tại M .

$$R = d(I, \Delta) = \frac{|-9 + 2 + 3|}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}, \text{ chứng tỏ } I \notin \Delta. \text{ Chọn A.}$$

Cách 3. (Trắc nghiệm - Công thức tính nhanh)

Ta có $|w| = |z + 3 - 2i|$ và đường thẳng là $|z - 2i| = |z + 3 - i|$ khi đó trong **Mode 2** ta ghi

$$\frac{|X - A|^2 - |X - B|^2}{2|A - B|} \text{ CALC nhập } -3 + 2i = 2i = -3 + i \text{ ta có kết quả cần tìm.}$$

Ví dụ 69. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 + i| + |z + 2 - 3i| = 5$ và $w = z - i$. Gọi T là giá trị lớn nhất của $|w|$. Tìm T .

- A. $T = \sqrt{5}$. B. $T = 2\sqrt{5}$. C. $T = 2\sqrt{2}$. D. $T = \frac{2}{5}$.

Lời giải

Thế $z = w + i$ vào giả thiết ta có $|w - 1 + 2i| + |w + 2 - 2i| = 5$ (1).

Gọi M là điểm biểu diễn số phức w và $F_1(1; -2), F_2(-2; 2)$ biểu diễn các số

$z_1 = 1 - 2i, z_2 = -2 + 2i$ khi đó từ (1) ta có $MF_1 + MF_2 = 5$. Mà ta có $F_1F_2 = 5 \Rightarrow M \in F_1F_2$.

Bởi vậy $|w|_{\max} \Leftrightarrow OM_{\max} \Leftrightarrow OM = OF_2 = 2\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Lời bình.

Nếu $MF_1 + MF_2 > F_1F_2$ thì ta vẫn đưa về Elip và giải bình thường. Tuy nhiên bài toán cho trường hợp đặc biệt nên ta cũng xem xét để giải nhanh hơn.

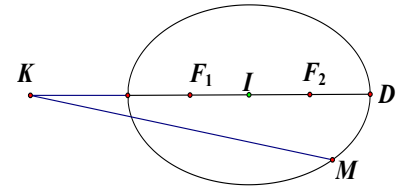
Ví dụ 70. Cho $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $|z - 2 + 3i| + |z + 2 + i| = 4\sqrt{5}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|z - 6 + 5i|$?

- A. $4\sqrt{5}$ B. $5\sqrt{5}$ C. $6\sqrt{5}$ D. $7\sqrt{5}$.

Lời giải:

Gọi $M(x; y)$ biểu diễn z , $F_1(2; -3)$, $F_2(-2; -1)$, $K(6; -5)$ thì $MF_1 + MF_2 = 4\sqrt{5} > F_1F_2 = 2\sqrt{5}$ như thế quỹ tích M là một Elip. Nhận xét rằng F_1 là trung điểm của KF_2 và ta cần tính độ dài lớn nhất của KM , khi đó vị trí cần tìm tại D , mà sao cho $DF_1 + DF_2 = 2F_1F_2$ (không đổi) nên suy ra

$$DF_2 = \sqrt{5}. \text{ Vậy } |KM|_{\max} = KD = 5\sqrt{5}. \text{ Chọn B.}$$



Ví dụ 71. [BGD - Đề minh họa số 3 2017]

Xét các số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $|z - 1 + i|$. Tính $P = m + M$.

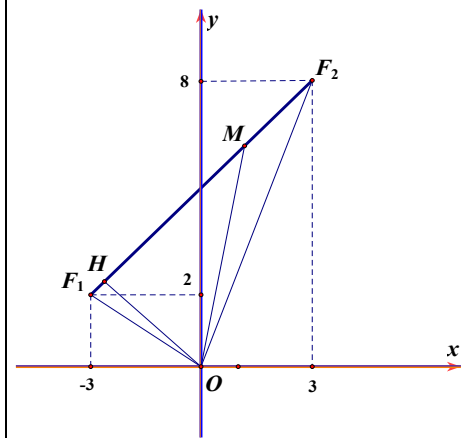
A. $P = \sqrt{13} + \sqrt{73}$ **B.** $P = \frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$ **C.** $5\sqrt{2} + \sqrt{73}$ **D.** $P = \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$

Lời giải.

Đặt $z - 1 + i = u \Rightarrow z = u + 1 - i$, ta cần tìm $|u|_{\min}$ và $|u|_{\max}$. Thế z vào giả thiết ta có:

$|u + 3 - 2i| + |u - 3 - 8i| = 6\sqrt{2}$. Gọi $M(x; y)$ biểu diễn u và $F_1(-3; 2)$, $F_2(3; 8)$ thì ta có $\overline{F_1F_2} = (6; 6)$ và $MF_1 + MF_2 = F_1F_2 = 6\sqrt{2}$, do đó M thuộc đoạn F_1F_2 . Phương trình F_1F_2 là $x - y + 5 = 0$, từ đó suy ra

$$|u|_{\min} = OH = d(O, F_1F_2) = \frac{5\sqrt{2}}{2}; |u|_{\max} = OF_2 = \sqrt{73}.$$



Chọn B.

Ví dụ 72. Trong các số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = 2$ có hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 1$.

Giá trị nhỏ nhất của $|z_1|^2 - |z_2|^2$ bằng

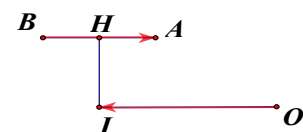
A. -10 **B.** $-4 - 3\sqrt{5}$ **C.** -5 **D.** $-6 - 2\sqrt{5}$.

Lời giải:

Ký hiệu $P = |z_1|^2 - |z_2|^2$, giả sử M biểu diễn z , A, B biểu diễn z_1, z_2 và $I(3; 4)$ là tâm đường tròn. Gọi H là trung điểm AB . Ta có $AB = 1$, $OI = 5$ và:

$$P = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{BA} \cdot 2\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IH}).$$

$P = 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{OI}$ nên ta chỉ cần $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{OI}$ ngược hướng nhau và khi đó $P_{\min} = -2AB \cdot OI = -10$. **Chọn A.**



Mời các em giải theo phương pháp đại số.

Lời bình.

Đôi khi ta xem như Elip (thay đổi) hoặc đường tròn (thay đổi) và nhìn nhận theo cách mở rộng xem như elip ảo hay đường tròn ảo để giải toán nhanh hơn

Ví dụ 73. Cho số phức z thỏa mãn $|z-1-2i|+|z-4-6i|=9$. Giá trị lớn nhất của $|z-10-14i|$ là

A. 17.

B. 20.

C. 15.

D. 12.

Lời giải

Cách 1. (Hình học véc tơ)

Gọi $M(z) = M(x; y)$ thì M thuộc elip (E), tâm $I\left(\frac{5}{2}; 4\right)$, $a = \frac{9}{2}$, $c = \frac{5}{2}$.

Gọi $A(10; 14)$ thì $|z-10-14i| = AM$. Vậy ta chỉ cần xác định vị trí M sao cho $\overrightarrow{IM}$ và $\overrightarrow{AI}$ cùng hướng hay $\overrightarrow{IM} = t\left(-\frac{15}{2}; -10\right)$, $t > 0 \Rightarrow M\left(\frac{5}{2} - \frac{15}{2}t; 4 - 10t\right)$.

Do đó ta có $\sqrt{\left(\frac{3}{2} - \frac{15}{2}t\right)^2 + (2-10t)^2} + \sqrt{\left(-\frac{3}{2} - \frac{15}{2}t\right)^2 + (-2-10t)^2} = 9$.

$\frac{5}{2}(|1-5t| + |1+5t|) = 9 \Rightarrow t = \frac{9}{25}$. Vậy $AM_{\max} = |t+1| \cdot AI = \frac{34}{25} \cdot \frac{25}{2} = 17$. **Chọn A.**

Ví dụ 74. Cho số phức z thỏa mãn $|(z+2)i+1|+|(\bar{z}-2)i-1|=10$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính tổng $S = M + m$.

A. $S = 9$.

B. $S = 8$.

C. $S = 2\sqrt{21}$.

D. $S = 2\sqrt{21} - 1$.

Lời giải

Chia hai vế cho $|i|$ ta được: $|z+2-i|+|\bar{z}-2+i|=10 \Rightarrow |z+2-i|+|z-2-i|=10$ (1).

Gọi $A(-2; 1)$, $B(2; 1)$, $K(0; 1)$. Suy ra $MA+MB=2a=10$; $AB=2c=4$. Chú ý là $\overrightarrow{OK} \perp \overrightarrow{AB}$

Điểm M chạy trên một đường tròn ảo với tâm $O(0; 0)$ và bán kính $|z|=r$. vị trí M cần tìm sao

cho $\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{KO} = t(0; 1) \Rightarrow |t| = \frac{r}{1} = r \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \pm(0; t)$ hay là $x = 0$ và z có dạng $z = \pm ti$ thay

vào (1) suy ra $2\sqrt{(t-1)^2 + 4} = 10$ hay ta có $t = 1 \pm \sqrt{21}$

$\Rightarrow M = 1 + \sqrt{21}, m = -1 + \sqrt{21} \Rightarrow S = 2\sqrt{21}$. **Chọn C.**

Ví dụ 75. Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z+2+3i| = \sqrt{2}$. Tính $P = a + b$ khi $|z+2-5i|+|z-6+3i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P = 3$

B. $P = -3$

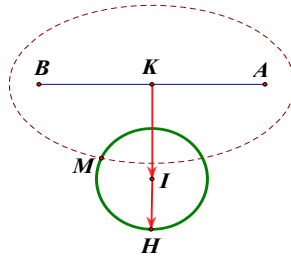
C. $P = 7$

D. $P = -7$

Lời giải

$M \in (C)$ có tâm $I(-2; -3)$, $R = \sqrt{2}$. Gọi $A(-2; 5)$, $B(6; -3)$, $K(2; 1)$ là trung điểm AB .

Ta có $MA + MB = 2m; AB = 2c$. Chú ý là $\overrightarrow{IK} \perp \overrightarrow{AB}$.



Điểm M chạy trên một elip ảo (trục lớn $2m$ thay đổi). Vị trí của M tại H , sao cho

$$\overrightarrow{IH} = t\overrightarrow{KI} = t(-4; -4) \Rightarrow t = \frac{R}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \overrightarrow{IH} = (-1; -1) \Rightarrow H(-3; -4).$$

Hay ta có $z = -3 - 4i \Rightarrow P = a + b = -7$. **Chọn D.**

Ví dụ 76. (BGD - Đề tham khảo THPTQG 2017-2018)

Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 4 - 3i| = \sqrt{5}$. Tính $P = a + b$ khi $|z + 1 - 3i| + |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P = 10$.

B. $P = 4$.

C. $P = 6$.

D. $P = 8$.

Lời giải

Đặt $z - 4 - 3i = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z = x + 4 + (y + 3)i$, khi đó ta có: $x^2 + y^2 = 5$ (1).

$$\text{Thế } z \text{ vào } T = |x + 5 + yi| + |x + 3 + (y + 4)i| = \sqrt{(x + 5)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 3)^2 + (y + 4)^2}$$

$$\text{Sử dụng (1) ta có } T = \sqrt{30 + 10x} + \sqrt{30 + 6x + 8y} \leq \sqrt{(1 + 1)(60 + 16x + 8y)}$$

Lại có $2x + y \leq \sqrt{(2^2 + 1^2)(x^2 + y^2)} = 5$ nên $T \leq \sqrt{2(60 + 40)} = 10\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $x = 2, y = 1$. Khi đó $z = 6 + 4i$ nên $a = 6, b = 4$ và $P = 10$. **Chọn A.**

Ví dụ 77. [THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa]

Cho tập hợp số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z-1}{z+3i} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Tìm max của $P = |z + i| + 2|z - 4 + 7i|$.

A. 8.

B. 20.

C. $2\sqrt{5}$.

D. $4\sqrt{5}$.

Phân tích.

Bài toán có thể quy về điểm M thuộc đường tròn và cần tìm max của $MA + 2MB$.

Lời giải

$$\text{Gọi } z = x + yi \text{ với } x, y \in \mathbb{R}, \text{ ta có: } \left| \frac{z-1}{z+3i} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}|z-1| = |z+3i|$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+3)^2} \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 20. \text{ Đặt}$$

$$x = 2 + 2\sqrt{5} \cos t, y = 3 + 2\sqrt{5} \sin t, t \in [0; 2\pi]. \text{ Ta biến đổi } P = |z + i| + 2|z - 4 + 7i| \text{ và}$$

$$\text{thay biến thì } P = \sqrt{(2+2\sqrt{5}\cos t)^2 + (4+2\sqrt{5}\sin t)^2} + 2\sqrt{(-2+2\sqrt{5}\cos t)^2 + (-4+2\sqrt{5}\sin t)^2}$$

$$P = \sqrt{40+8\sqrt{5}(\cos t+2\sin t)} + 2\sqrt{40-8\sqrt{5}(\cos t+2\sin t)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có $P \leq \sqrt{(1^2+2^2)(40+40)} = 20$. **Chọn B.**

Ví dụ 78. (THPT Kim Liên – Hà Nội)

Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - 3 - 2i| = 2$. Tính $a + b$ khi $|z + 1 - 2i| + 2|z - 2 - 5i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $4 - \sqrt{3}$.

B. $2 + \sqrt{3}$.

C. 3.

D. $4 + \sqrt{3}$.

Phân tích.

Bài toán cho điểm M thuộc đường tròn và cần tìm min của $MA + 2MB$.

Lời giải

Đặt $z - 3 - 2i = x + yi$, ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z = x + 3 + (y + 2)i$. Theo giả thiết ta có $x^2 + y^2 = 4$ (1).

Mặt khác $T = |z + 1 - 2i| + 2|z - 2 - 5i| = |x + 4 + yi| + 2|x + 1 + (y - 3)i|$ hay

$$T = \sqrt{(x+4)^2 + y^2} + 2\sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} \quad (2).$$

Cách 1. (Trắc nghiệm Casio)

Áp dụng (1), khai triển thì $T = 2\sqrt{5+2x} + 2\sqrt{14+2x-6y}$, để tìm giá trị nhỏ nhất thì mục

tiêu là $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-2; 0], y = \sqrt{4-x^2}$ thế vào T , ta có:

$$T = 2\left(\sqrt{5+2x} + \sqrt{14+2x-6\sqrt{4-x^2}}\right) \text{ vào Mode 7 khảo sát thì } T_{\min} = 6 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = \sqrt{3}.$$

Suy ra $a + b = x + y + 5 = 4 + \sqrt{3}$. **Chọn D.**

Cách 2. (Đại số)

Áp dụng (1) ta biến đổi $(x+4)^2 + y^2 = 20 + 8x = 4(5+2x) = 4[(x+1)^2 + y^2]$ thay trở về (2)

$$\text{ta có } T = 2\left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (3-y)^2}\right) \geq 2(|y| + |3-y|) \geq 2|y+3-y| = 6.$$

$$\text{Dấu bằng có khi } \begin{cases} x = -1, x^2 + y^2 = 4 \\ y(3-y) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1, y = \sqrt{3} \Rightarrow a + b = x + y + 5 = 4 + \sqrt{3}. \text{ **Chọn D.**}$$

Lời bình.

So sánh với bài 75, 76 ta thấy các hệ số đoạn thẳng là 1: 1 và yêu cầu tìm max, trong khi bài này thì hệ số các đoạn thẳng là 1: 2 và yêu cầu tìm min. Ngoài ra khác với bài 77.

Bất đẳng thức trên thì khác bất đẳng thức Mincopxki.

Ví dụ 79. (THPT Chuyên Đại học Vinh)

Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 2, |iw - 2 + 5i| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $|z^2 - wz - 4|$ bằng:

- A. 4 B. $2(\sqrt{29} - 3)$ C. 8 D. $2(\sqrt{29} - 5)$.

Phân tích.

Biểu thức cuối khá phức tạp nên ta tìm cách đơn giản nó và có xuất hiện số 4 liên quan đến z .

Lời giải

Trước hết chia cả hai vế trong giả thiết thứ hai cho $|i|$ và có: $|w + 5 + 2i| = 1$ (1).

Giả sử $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Đặt $P = |z^2 - wz - 4| = |z^2 - wz - z \cdot \bar{z}| = |z| |z - w - \bar{z}| = 2 |z - w - \bar{z}|$

$\Rightarrow P = 2 |2yi - w| = 2 |w - 2yi|$, lại đặt $w - 2yi = u \Rightarrow w = u + 2yi$ và ta cần tìm min của

$P = 2 |u|$. Thế w vào (1) ta có $|u + 5 + (y + 2)i| = 1$ (2).

Chú ý rằng $|z| = 2 \Rightarrow y \in [-2; 2]$ và xem y là tham số, hiển nhiên cho $y = -2, u = -4$ thì thỏa mãn điều kiện (2) $\Rightarrow P_{\min} = 2 |-4| = 8$. Vậy chọn C.

Lời bình. Tại sao ta chọn $y = -2$ và $u = -4$ mà không chọn số khác? Một lý do là: Môđun của số phức là độ dài của véc tơ, nhìn chung thì xem như là cạnh huyền của tam giác vuông có hai cạnh là $|x|$ và $|y|$ cho nên tuân thủ theo định lý Pythagore. Nhưng nếu ta triệt tiêu một thành phần y thì độ dài sẽ giảm đi, tiếp theo xem u như số thực là xong.

Qua đây các em có thể định hướng giải toán số phức như sau:

- + Hoặc chuyển độ phức tạp từ A sang B, rồi tập trung giải quyết B (Và ngược lại).
- + Trong trường hợp bất khả kháng thì dẫn cả A và B về điểm chung C.

Cụ thể ta thử chuyển từ (1) sang (2) xem thế nào? Sau khi giản ước ta có: $P = 2 |w - 2yi|$.

Từ (1) ta đặt $w + 5 + 2i = a + bi \Rightarrow w = a - 5 + (b + 2)i$, ta có $a^2 + b^2 = 1$. Thế w vào P ta có:

$P = 2 |a - 5 + 2(b + 1 - y)i|$ như thế ta có ba tham số a, b, y mà $y \in [-2; 2], b \in [-1; 1]$.

Số y tự do hơn (lỏng hơn, tập hợp rộng hơn), nên với b cho tùy ý $b \in [-1; 1]$ thì ta luôn chọn được $y = b + 1$, khi đó ta triệt tiêu được phần ảo, và $P = 2 |a - 5|$ mà $a \in [-1; 1]$, bởi vậy trước đây ta cho $b = 0$ thì chọn $y = 1$ và bây giờ có thể lấy $a = 1$ thì $P_{\min} = 2 |1 - 5| = 8$. Rõ ràng ta chỉ cần lập luận mà không cần khảo sát gì.

Ví dụ 80. Cho các số phức w, z thỏa mãn $|w + i| = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ và $5w = (2 + i)(z - 4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |z - 1 - 2i| + |z - 5 - 2i|$ bằng

- A. $6\sqrt{7}$. B. $4 + 2\sqrt{13}$. C. $2\sqrt{53}$. D. $4\sqrt{13}$.

Phân tích.

Đề bài cho tương đối "zích zắc" tức là gây nhiễu, nhưng tập trung hỏi về P và liên quan đến z nên ta dùng phép thế để khử w . Sau đó là chọn phương án: Đơn giản đường tròn hoặc P .

Lời giải

$$\text{Rút } w \text{ và thế vào giả thiết ta có } \left| \frac{1}{5}(2+i)(z-4)+i \right| = \frac{3\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \left| z-4+\frac{5i}{2+i} \right| = \frac{3\sqrt{5}}{|2+i|}$$

$$\Leftrightarrow |z-3+2i| = 3. \text{ Đặt } z-3+2i = a+bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow z = a+3+(b-2)i \text{ và ta có:}$$

$$a^2 + b^2 = 9 \quad (1). \text{ Thế } z \text{ vào } P \text{ ta có: } P = |a+2+(b-4)i| + |a-2+(b-4)i| \text{ và kết hợp (1) ta có}$$

$$P = \sqrt{(a+2)^2 + (b-4)^2} + \sqrt{(a-2)^2 + (b-4)^2} = \sqrt{29+4a-8b} + \sqrt{29-4a-8b} \text{ suy ra}$$

$$P \leq \sqrt{2(58-16b)} \leq \sqrt{2(58-16 \cdot (-3))} = 2\sqrt{53}. \text{ Dấu bằng có tại } a = 0, b = -3. \text{ Chọn C.}$$

Cách 2.

Nếu đơn giản P thì ta đặt $u = z-3-2i \Rightarrow z = u+3+2i$ khi đó P trở thành:

$$P = |u+2| + |u-2| \text{ và đường tròn trở thành } |u+4i| = 3. \text{ Xét } M(x; y) \text{ biểu diễn } u \text{ và các điểm } A(-2; 0), B(2; 0), I(0; -4) \text{ thì } P = MA + MB, M \text{ di chuyển trên đường tròn tâm } I, r = 3.$$

Dễ thấy Oy là trục đối xứng của đường tròn và là trung trực của AB , nên P lớn nhất tại

$$x = 0, y = -7 \text{ là giao của Oy và đường tròn và } P_{\max} = 2\sqrt{2^2 + 7^2} = 2\sqrt{53} \text{ (các em tự vẽ hình).}$$

Nhận xét.

Từ các ví dụ trên thì các em nắm được những gì? Nhìn chung là: Quy về xét vị trí tương đối giữa các đường (thẳng, tròn, elip, ..), trong đó yêu cầu min, max. Nói chung ta đặt ẩn phụ để chuyển độ phức tạp về một đường, dù giải theo PP hình học hay đại số thì có cùng bản chất.

Phép đặt ẩn phụ như trên thực chất là phép tịnh tiến, có điều ta không nói rõ làm tăng rắc rối.

Ví dụ 81. Tìm số phức z thỏa mãn $|z-1-i| = 5$ và biểu thức $T = |z-7-9i| + 2|z-8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $z = 5-2i$.

B. $z = 1+6i$.

C. $z = -2-3i$.

D. $z = 4+5i$.

Phân tích.

Bài toán cho điểm M thuộc đường tròn và cần tìm min của $MA + 2MB$.

Lời giải

$$\text{Đặt } z-1-i = a+bi, (a, b \in \mathbb{R}) \Rightarrow z = a+1+(b+1)i. \text{ Ta có } a^2 + b^2 = 25 \quad (1).$$

$$\text{Thế } z \text{ vào } T \text{ ta có } T = |a-6+(b-8)i| + 2|a+1+(b-7)i|$$

$$\text{Hay } T = \sqrt{(a-6)^2 + (b-8)^2} + 2\sqrt{(a+1)^2 + (b-7)^2}. \text{ Sử dụng (1) ta biến đổi xuất hiện số 2}$$

$$(a-6)^2 + (b-8)^2 = 125 - 12a - 16b = 4\left(\frac{125}{4} - 3a - 4b\right) = 4\left[\left(\frac{3}{2} - a\right)^2 + (b-2)^2\right] \text{ suy ra}$$

$$T = 2\left(\sqrt{\left(\frac{3}{2} - a\right)^2 + (b-2)^2} + \sqrt{(a+1)^2 + (7-b)^2}\right) \geq 2\sqrt{\left(\frac{3}{2} + 1\right)^2 + (7-2)^2} = 5\sqrt{5}.$$

Dấu bằng có khi $\frac{3/2 - a}{a+1} = \frac{b-2}{7-b}$, $a^2 + b^2 = 25$ nên $a = 0$, $b = 5$ và khi đó $z = 1 + 6i$. **Chọn B.**

Lời bình.

Bài trên ta có thể dùng Casio để thử đáp án, nhưng thay đổi câu hỏi như bài 76 thì không thử được. Các em xem lại bài 76 và so sánh với bài này để tìm ra điểm chung và điểm riêng, xem lại phương pháp chủ đạo để giải toán.

Để củng cố cách giải, xem xét sự thay đổi giả thiết và yêu cầu bài toán, ta xét thêm vài ví dụ

Ví dụ 82. Xét các số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z + 2 + 3i| = \sqrt{2}$. Tính $P = a + b$ khi

$|z + 2 - 5i| + |z - 6 + 3i|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P = 3$

B. $P = -3$

C. $P = 7$

D. $P = -7$.

Phân tích.

Cho đường tròn. Tìm z_0 để tổng $MA + MB$ đạt max (Đã giải ở VD 75).

Lời giải

Đặt $z + 2 + 3i = x + yi \Rightarrow z = x - 2 + (y - 3)i$ và ta có: $x^2 + y^2 = 2$. Thế z vào T ta có

$$T = |x + (y - 8)i| + |x - 8 + yi| = \sqrt{x^2 + (y - 8)^2} + \sqrt{(x - 8)^2 + y^2}$$

$$\text{Hay } T = \sqrt{66 - 16y} + \sqrt{66 - 16x} \leq \sqrt{2(132 - 16x - 16y)} \leq \sqrt{2(132 + 32)} = 2\sqrt{82}.$$

Dấu bằng có khi $x = y = -1$, khi đó $z = -3 - 4i$ nên $P = -7$. **Chọn D.**

Ví dụ 83. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| + |z - 4 - 6i| = 9$. Giá trị lớn nhất của $|z - 10 - 14i|$ là

A. 17.

B. 20.

C. 15.

D. 12.

Phân tích.

Cho M thuộc Elip và điểm A. Tìm max MA (Đã giải ở VD 73).

Lời giải

Đặt $z - 10 - 14i = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thì ta có $|a + 9 + (b + 12)i| + |a + 8 + (b + 6)i| = 9$ hay ta có

$$\sqrt{(a + 9)^2 + (b + 12)^2} + \sqrt{(a + 6)^2 + (b + 8)^2} = 9 \text{ và cần tìm max } \sqrt{a^2 + b^2} = m.$$

Viết lại: $9 = \sqrt{m^2 + 225 + 6(3a + 4b)} + \sqrt{m^2 + 100 + 4(3a + 4b)}$ (1).

Ta có $|3a + 4b| \leq \sqrt{25(a^2 + b^2)} = 5m \Rightarrow -5m \leq 3a + 4b \leq 5m$ (2), do đó kết hợp (1) suy ra

$$9 \geq \sqrt{m^2 + 225 - 30m} + \sqrt{m^2 + 100 - 20m} = |m - 15| + |m - 10| = 2m - 25, (m > 15) \Rightarrow m \leq 17.$$

Vậy $\max \sqrt{a^2 + b^2} = m = 17$. **Chọn A.**

Ví dụ 84. Cho $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $|2z + 1 - 3i| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z - 1| + 3|z + 1 - 2i|$?

A. $4\sqrt{2}$

B. $4\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{2}$

D. 4.

Phân tích.

Cho đường tròn. Tìm max của $MA + 3MB$. Lưu ý là các hệ số khác nhau, số lẻ không đẹp.

Lời giải.

Đặt $2z + 1 - 3i = x + yi \Rightarrow 2z = x - 1 + (y + 3)i$ và ta có: $x^2 + y^2 = 2$. Khi đó

$$2P = |2z - 2| + 3|2z + 2 - 4i| = |x - 3 + (y + 3)i| + 3|x + 1 + (y - 1)i|$$

$$2P = \sqrt{(x - 3)^2 + (y + 3)^2} + 3\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{20 - 6(x - y)} + 3\sqrt{4 + 2(x - y)}$$

$$2P = \sqrt{20 - 6(x - y)} + \sqrt{3}\sqrt{12 + 6(x - y)} \leq \sqrt{(1 + 3)(20 + 12)} = 8\sqrt{2} \Rightarrow P_{\max} = 4\sqrt{2}. \text{ **Chọn A.**}$$

Ví dụ 85. [THPT Lê Hồng Phong]

Cho số phức z và w thỏa mãn $z + w = 3 + 4i$ và $|z - w| = 9$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z| + |w|$.

A. $\sqrt{176}$.

B. 14.

C. 4.

D. $\sqrt{106}$.

Phân tích.

Hình thức thay đổi nhưng vẫn quy về đường tròn. Tìm max của $MA + MB$.

Lời giải

Cách 1.

Thế $w = 3 + 4i - z$ vào giả thiết thứ hai ta có: $|2z - 3 - 4i| = 9$. Hơn nữa viết lại

$$2T = |2z| + |2z - 6 - 8i|. \text{ Đặt } 2z - 3 - 4i = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}) \text{ thì ta có: } a^2 + b^2 = 81 \text{ (1).}$$

Khi đó $2T = |a + 3 + (b + 4)i| + |a - 3 + (b - 4)i|$ hay viết thành

$$2T = \sqrt{(a + 3)^2 + (b + 4)^2} + \sqrt{(a - 3)^2 + (b - 4)^2} \leq \sqrt{(1 + 1)(2a^2 + 18 + 2b^2 + 32)} = 2\sqrt{106}.$$

Dấu bằng có khi $6a + 8b = 0$ và dễ thấy đường thẳng này cắt đường tròn (1). Vậy **chọn D.**

Cách 2.

Đặt $|z| = m, |w| = n$ thì theo quy tắc hình bình hành ta có $m^2 + n^2 = \frac{1}{2}(|z+w|^2 + |z-w|^2)$

hay ta có $m^2 + n^2 = 53$ không đổi và suy ra: $m+n \leq \sqrt{(1+1)(m^2+n^2)} = \sqrt{106}$.

Lời bình.

Cách 1 giải với khá nhiều bài toán mà ta đã giải. Cách 2 theo quy tắc hình bình hành tuy ngắn gọn nhưng với hệ số là 1:1. Lý do là giả thiết thay đổi nên ta linh hoạt hơn trong giải toán, nhưng với hệ số khác thì không áp dụng được. Chẳng hạn ta xét bài toán sau

Ví dụ 86. Cho số phức z và w thỏa mãn $z+2w=8+6i$ và $|z-w|=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $|z|+|w|$ bằng

A. $4\sqrt{6}$

B. $2\sqrt{26}$

C. $\sqrt{66}$

D. $3\sqrt{6}$.

Phân tích.

So với bài 79, ở đây có khác là giả thiết thêm vào $z+2w$ (không kể hằng số). Tuy nhiên ta giải theo tính chất của môđun xem thế nào.

Lời giải:

Đặt $m=|z|, n=|w|, p=z\bar{w}+\bar{z}w$. Sử dụng tính chất $|z|^2=z\bar{z}$ ta có:

$$|z+2w|^2 = (z+2w)(\bar{z}+2\bar{w}) = m^2 + 2p + 4n^2 \quad (1)$$

$$\text{Và } 2|z-w|^2 = 2(z+w)(\bar{z}-\bar{w}) = 2m^2 - 2p + 2n^2 \quad (2).$$

Cộng các vế của (1) và (2), kết hợp giả thiết suy ra: $(8^2 + 6^2) + 2.4^2 = 3m^2 + 6n^2$.

$$\text{Suy ra } m^2 + 2n^2 = 44 \text{ do đó } m+n = 1.m + \frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}n \leq \sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)(m^2+2n^2)} = \sqrt{\frac{3}{2}.44} = \sqrt{66}.$$

Chọn C.

Cách 2. Không nhất định ta phải dùng môđun, trở về phép thế như bài 79 xem sao?

$$\text{Biến đổi } |2z-2w|=8 \Rightarrow |2z-(8+6i-z)|=8 \Rightarrow |3z-8-6i|=8 \Rightarrow \left|z-\frac{8}{3}-2i\right|=\frac{8}{3}.$$

Xét $2T=2|z|+|2w|=2|z|+|z-8-6i|$. Đặt $z-\frac{8}{3}-2i=a+bi \Rightarrow a^2+b^2=\frac{64}{9}$ và

$$2T=2\left|a+\frac{8}{3}+(b+2)i\right|+\left|a-\frac{16}{3}+(b-4)i\right| \text{ (như thế ta có dạng } 2MA+MB). \text{ Hay ta có}$$

$$2T=2\sqrt{\left(a+\frac{8}{3}\right)^2+(b+2)^2}+\sqrt{\left(a-\frac{16}{3}\right)^2+(b-4)^2}=2\sqrt{\frac{164}{9}+\frac{16a}{3}+4b}+\sqrt{\frac{464}{9}-\frac{32a}{3}-8b}.$$

Suy ra $2T \leq \sqrt{\left(\sqrt{2^2+1^2}\right)\left(\frac{328}{9} + \frac{464}{9}\right)} = \sqrt{3 \times 88} \Rightarrow T \leq \sqrt{66}$. **Chọn C.**

Ví dụ 87. [SGD Phú Thọ]

Cho tập hợp các số phức z thỏa mãn $|iz - 2 - i| = 3$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$2|z - 4 - i| + |z + 5 + 8i|$ bằng

A. $3\sqrt{15}$.

B. $15\sqrt{3}$.

C. $9\sqrt{5}$.

D. $18\sqrt{5}$.

Phân tích.

Cho M thuộc đường tròn. Tìm max của $2MA + MB$.

Lời giải

Trước hết biến đổi $|iz - 2 - i| = 3 \Leftrightarrow |z - 1 + 2i| = 3$ và đặt $z - 1 + 2i = a + bi$ thì ta có:

$a^2 + b^2 = 9$ (1). Ngoài ra $z = a + 1 + bi - 2i$, thế z vào T ta được:

$T = 2|a - 3 + (b - 3)i| + |a + 6 + (b + 6)i|$ hay viết lại

$$T = 2\sqrt{27 - 6(a+b)} + \sqrt{81 + 12(a+b)} = \sqrt{2}\sqrt{54 - 12(a+b)} + \sqrt{81 + 12(a+b)}$$

$$T \leq \sqrt{(2+1)(54+81)} = 9\sqrt{5}. \text{ **Chọn C.}**$$

Ví dụ 88. Gọi n là số các số phức z đồng thời thỏa mãn $|iz + 1 + 2i| = 3$ và biểu thức

$T = 2|z + 5 + 2i| + 3|z - 3i|$ đạt giá trị lớn nhất. Gọi M là giá trị lớn nhất của T . Giá trị tích của $M.n$ là

A. $10\sqrt{21}$.

B. $6\sqrt{13}$.

C. $5\sqrt{21}$.

D. $2\sqrt{13}$.

Phân tích.

Cho M thuộc đường tròn. Tìm max của $2MA + 3MB$. Đạt cực trị tại bao nhiêu điểm?

Lời giải

Biến đổi $|iz + 1 + 2i| = 3 \Leftrightarrow |z + 2 - i| = 3$ và đặt $z + 2 - i = a + bi$ thì ta có: $a^2 + b^2 = 9$ (1).

Ngoài ra $z = a - 2 + bi + i$, thế z vào T ta được: $T = 2|a + 3 + (b + 3)i| + 3|a - 2 + (b - 2)i|$

hay viết lại $T = 2\sqrt{(a+3)^2 + (b+3)^2} + 3\sqrt{(a-2)^2 + (b-2)^2}$

$$T = 2\sqrt{27 + 6(a+b)} + 3\sqrt{17 - 4(a+b)} = \sqrt{2}\sqrt{54 + 12(a+b)} + \sqrt{3}\sqrt{51 - 12(a+b)}$$

Suy ra $T \leq \sqrt{(2+3)(54+51)} = 5\sqrt{21} \Rightarrow M = 5\sqrt{21}$. Dấu bằng xảy ra khi

$3(54 + 12a + 12b) = 2(51 - 12a - 12b) \Leftrightarrow a + b = -1$ mà dễ thấy đường thẳng này cắt đường tròn (1) tại hai điểm phân biệt nên $n = 2$.

Vậy $Mn = 10\sqrt{21}$. **Chọn A.**

Ví dụ 89. (Đặng Việt Hùng)

Cho 3 số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z-1+2i|=|z+3-4i|, |z_1+5-2i|=2, |z_2-1-6i|=2$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=|z-z_1|+|z-z_2|+4$

A. $\frac{2\sqrt{3770}}{13}$

B. $\frac{\sqrt{10361}}{13}$

C. $\frac{\sqrt{3770}}{13}$

D. $\frac{\sqrt{10361}}{26}$

Phân tích.

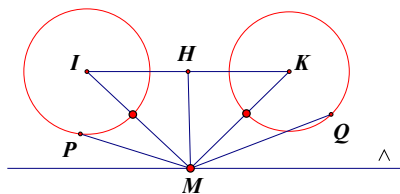
Cho điểm M thuộc đường thẳng và P, Q thuộc 2 đường tròn. Tìm max của MP + MQ.

Lời giải

Gọi $M(z) = M(x; y), I(-5; 2), K(1; 6), A(1; -2), B(-3; 4), P(z_1), Q(z_2), R_1 = R_2 = 2$.

Khi đó M thuộc trung trực của AB có phương trình $2x-3y+5=0$ (Δ) và P, Q di chuyển lần lượt trên hai đường tròn tâm I và K cùng bán kính $R=2$. Nhận xét $\overrightarrow{AB}=(-4; 6), \overrightarrow{IK}=(6; 4)$

Nghĩa là $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{IK}$ nên hai đường thẳng $IK // \Delta$, hơn nữa $d(I, \Delta) > R, IK > 2R$.



Rõ ràng ta có $T=MP+MQ+2R$ nhỏ nhất khi P, Q thuộc các đoạn MI, MK và do tính đối

xứng nên $T_{\min}=2MK$. Vậy $T_{\min}=2MK=2\sqrt{\left(\frac{1}{2}IK\right)^2+\left[d(I, \Delta)\right]^2}=\frac{2\sqrt{3770}}{13}$. **Chọn A.**

Lời bình.

Bài này ý tưởng lấy từ bài **THPT Thuận Thành 2 – Bắc Ninh** trong hình học tọa độ Oxyz khi thay hai mặt cầu bởi hai đường tròn.

Ví dụ 90. (SGD Nghệ An - THPT Liên trường)

Cho số phức z và gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+8i=0$ (z_1 có phần thực dương). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-z_1|+|z-z_2|+\left|\bar{z}+2z_1+\frac{z_2}{2}\right|$ được viết dưới dạng $m\sqrt{n}+p\sqrt{q}$ (trong đó $n, p \in \mathbb{N}; m, q$ là các số nguyên tố). Tổng $m+n+p+q$ bằng

A. 10

B. 13

C. 11

D. 12

Phân tích.

Cho 2 điểm (cần phải giải), suy ra điểm thứ 3, M tùy ý. Tìm min của MA + MB + MC.

Lời giải

Giải các nghiệm $z_1=2-2i, z_2=-2+2i \Rightarrow 2z_1+\frac{z_2}{2}=3-3i$

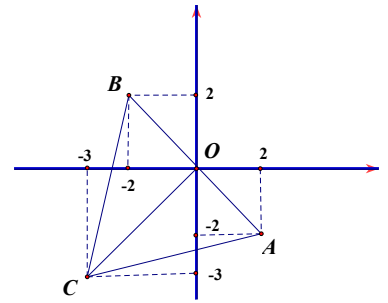
Viết lại $P=|z-2+2i|+|z+2-2i|+|z+3+3i|$. Xét: $M(z), A(2; -2), B(-2; 2), C(-3; -3)$

thì $P = MA + MB + MC$. Dễ thấy tam giác ABC cân tại C , và do tính đối xứng của A, B nên điểm M thuộc đoạn OC . Phương trình đường thẳng OC là $x = t, y = t \Rightarrow M(t; t), t \in [-3; 0]$. Ta có

$$P = 2\sqrt{(t-2)^2 + (t+2)^2} + \sqrt{2(t+3)^2} \text{ hay}$$

$$P = \sqrt{2} \left(2\sqrt{t^2 + 4} + t + 3 \right), P'(t) = \sqrt{2} \left(\frac{2t}{\sqrt{t^2 + 4}} + 1 \right)$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow t = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ suy ra } P_{\min} = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{2} \text{ và } m + n + p + q = 2 + 6 + 3 + 2 = 13. \text{ Chọn B.}$$



Ví dụ 91. (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình)

Cho số phức z thỏa mãn $4|z+i| + 3|z-i| = 10$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{5}{7}$.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 1.

Phân tích.

Ta có thể hình dung như là $4MA + 3MB = 10$ không đổi, kiểu như "lai tạo" của đường tròn và Elip nên không biết là đường cong gì, cũng may là chỉ hỏi độ dài OM . Bây giờ ta cũng lấy đường cong "thiên biến" để ứng "vạn biến" thử xem sao.

Lời giải

Dễ thấy $z = 0$ không thỏa mãn, và giả sử $|z| = m > 0$ thì đặt $z = m(\cos t + i \sin t), t \in [0; 2\pi]$

$$\text{Khi đó ta có } 4\sqrt{m^2 \cos^2 t + (1 + m \sin t)^2} + 3\sqrt{m^2 \cos^2 t + (1 - m \sin t)^2} = 10$$

$$\Leftrightarrow 10 = 4\sqrt{m^2 + 1 + 2m \sin t} + 3\sqrt{m^2 + 1 - 2m \sin t} \leq \sqrt{(4^2 + 3^2)(2m^2 + 2)}$$

$$\Rightarrow 2m^2 + 2 \geq 4 \Rightarrow m \geq 1 \Rightarrow |z|_{\min} = m = 1. \text{ Dấu bằng có khi:}$$

$$9(2 + 2 \sin t) = 16(2 - 2 \sin t) \Rightarrow \sin t = \frac{7}{25} \text{ (thỏa mãn thuộc } [-1; 1]).$$

Thật may mắn là phép ứng biến thành công. Vậy $|z|_{\min} = 1$ tô khoanh tròn D!.

5. Các bài luyện tập

Câu 1. (BGD - Đề thi chính thức THPTQG 2019 M102 C44)

Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \frac{3+iz}{1+z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

A. $2\sqrt{3}$.

B. 12.

C. 20.

D. $2\sqrt{5}$.

Câu 2. (SGD Hưng Yên)

Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (1 + 2i)z + i$ trên mặt phẳng tọa độ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

- A. $\sqrt{5}$. B. 10. C. 5. **D. $5\sqrt{5}$.**

Câu 3. (BGD -Đề thi chính thức THPTQG 2019 M104 C31)

Cho số phức z thỏa $(2 - i)z + 3 + 16i = 2(\bar{z} + i)$. Môđun của z bằng

- A. $\sqrt{5}$. B. 13. **C. $\sqrt{13}$.** D. 5.

Câu 4. Xét các số phức z thỏa mãn $|z - 2i + 1| = 4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (12 - 5i)\bar{z} + 3i$ là một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó bằng

- A. $\sqrt{52}$. B. $3\sqrt{13}$. **C. 52.** D. $12\sqrt{5}$.

Câu 5. Cho hai số phức z, z' thỏa mãn $|z + 5| = 5$ và $|z' + 1 - 3i| = |z' - 3 - 6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z - z'|$.

- A. $\frac{5}{2}$.** B. $\frac{5}{4}$. C. $\sqrt{10}$. D. $3\sqrt{10}$.

Câu 6. [THPT Nguyễn Trãi - Hải Dương]

Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn các điều kiện $|z_1| = |z_2| = 2$ và $|z_1 + 2z_2| = 4$. Giá trị của $|2z_1 - z_2|$ bằng:

- A. $2\sqrt{6}$** B. $\sqrt{6}$ C. $3\sqrt{6}$ D. 8.

Câu 7. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2 = z(10 - z)$ và $|z - 1 - i| = |z + 1 + i|$?

- A. 0 B. 3. C. 1. **D. 2.**

Câu 8. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 2\sqrt{3}$, $|z_2| = 3\sqrt{2}$. Tính giá trị biểu thức $P = |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2$.

- A. $P = 20\sqrt{3}$. B. $P = 30\sqrt{2}$. C. $P = 50$. **D. $P = 60$.**

Câu 9. [SGD Lào Cai]

Cho z_1, z_2 là hai số phức liên hợp của nhau, đồng thời thỏa mãn $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$ và $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{3}$.

Tính môđun của số phức z_1 .

- A. $|z_1| = 3$ B. $|z_1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ **C. $|z_1| = 2$** D. $|z_1| = \sqrt{5}$

Câu 10. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để có đúng hai số phức z thỏa mãn $|z - (2m-1) - i| = 10$ và $|z - 1 + i| = |\bar{z} - 2 + 3i|$.

- A. 40. **B.** 41. C. 165. D. 164.

Câu 11. (THPT Chuyên Hà Tĩnh)

Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$) thỏa mãn $|z - 1 + 2i| = 5$ và $z\bar{z} = 10$. Tính $P = a - b$.

- A.** $P = 4$. B. $P = -4$. C. $P = -2$. D. $P = 2$.

Câu 12. Cho z_1, z_2 là các số phức thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 1$ và $|z_1 - 2z_2| = \sqrt{6}$. Tính giá trị của biểu thức $P = |2z_1 + z_2|$.

- A.** $P = 2$. B. $P = \sqrt{3}$. C. $P = 3$. D. $P = 1$.

Câu 13. (SGD Ninh Bình)

Tính tổng phần thực của tất cả các số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $\left(z + \frac{5}{|z|}\right)i = 7 - z$.

- A. -2 B. -3 **C.** 3 D. 2

Câu 14. Tính tổng của hai số phức z thỏa mãn điều kiện $\frac{z-3i}{z+i}$ là số thuần ảo và $|z| = \sqrt{5}$

- A. $-4+i$ **B.** $2i$ C. $8+2i$ D. $4-2i$.

Câu 15. Biết có hai số phức z đồng thời thỏa mãn $|2z-3| = |\bar{z}+1+i|$ và $(z-i)(\bar{z}+1+2i)$ là số thực. Tích của hai số đó là:

- A.** $\frac{8}{3} - \frac{1}{3}i$ B. $\frac{8}{3} + \frac{1}{3}i$ C. $-\frac{8}{3} - \frac{1}{3}i$ D. $-\frac{8}{3} + \frac{1}{3}i$.

Câu 16. (TT Diệu Hiền - Cần Thơ)

Xét số phức z thỏa mãn $|z - 2 - 2i| = 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - 1 - i| + |z - 5 - 2i|$ bằng

- A. $1 + \sqrt{10}$. B. 4. **C.** $\sqrt{17}$ D. 5.

Câu 17. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 - 4i| = \sqrt{5}$ và biểu thức $P = |z + 2|^2 - |z - i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Môđun của số phức z bằng

- A. 10. **B.** $5\sqrt{2}$. C. 13. D. $\sqrt{10}$.

Câu 18. Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1+z| + 3|1-z|$.

- A. $3\sqrt{15}$ B. $6\sqrt{5}$ **C.** $2\sqrt{10}$ D. $4\sqrt{5}$.

Câu 19. [THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai]

Cho số phức z thỏa $|z|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=|z^2+z|+|z^2-z|$.

- A. $\frac{14}{5}$. B. 4. **C.** $2\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{3}$.

Câu 20. Xét các số phức $z=a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z+2-3i|=2\sqrt{2}$. Tính $P=2a+b$ khi $|z+1+6i|+|z-7-2i|$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $P=3$. **B.** $P=-3$. C. $P=1$. D. $P=7$.

Câu 21. [THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu – Đồng Tháp]

Gọi S là tập hợp các số phức thỏa mãn $|z-3|+|z+3|=10$. Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S có mô đun nhỏ nhất. Giá trị biểu thức $P=z_1^2+z_2^2$ là:

- A. 16. B. 32. **C.** -32. D. -16.

Câu 22. (SGD Ninh Bình):

Cho số phức z thỏa mãn $|z+1|=\sqrt{3}$. Tìm giá trị lớn nhất của $T=|z+4-i|+|z-2+i|$.

- A. $2\sqrt{46}$. **B.** $2\sqrt{13}$. C. $2\sqrt{26}$. D. $2\sqrt{23}$.

Câu 23. [THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai]

Cho số phức z thỏa $|z-1-2i|=|z-3-i|$. Khi đó $|z|$ nhỏ nhất bằng

- A. 1. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. D. 2.

Câu 24. (THPT Hậu Lộc 2-Thanh Hóa)

Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+1-i|=2$ và $z_2=iz_1$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $|z_1-z_2|$?

- A. $m=\sqrt{2}-1$. B. $m=2\sqrt{2}$. C. $m=2$. **D.** $m=2\sqrt{2}-2$.

Câu 25. Cho số phức z thỏa $|z-1-i|+|z-3-2i|=\sqrt{5}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính tổng $M+m$

- A.** $\sqrt{2}+\sqrt{13}$ B. $\sqrt{2}-\sqrt{13}$ C. $\sqrt{5}+\sqrt{13}$ D. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

Câu 26. Cho hai số phức u, v thỏa mãn $3|u-6i|+3|u-1-3i|=5\sqrt{10}$, $|v-1+2i|=\sqrt{v+i}$. Giá trị nhỏ nhất của $|u-v|$ là:

- A. $\frac{\sqrt{10}}{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{10}}{3}$. C. $\sqrt{10}$. D. $\frac{5\sqrt{10}}{3}$.

Câu 27. Cho số phức z thỏa mãn $4|z+i|+3|z-i|=10$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{5}{7}$. C. $\frac{3}{2}$. **D. 1.**

Câu 28. Cho số phức z thỏa mãn $|z-2-3i|+|\bar{z}+2+3i|=4\sqrt{5}$. Giá trị lớn nhất của $|z|$ là

- A. $\sqrt{13}+\sqrt{5}$. B. $3+\sqrt{13}$. **C. 7.** D. $4+\sqrt{5}$.

Câu 29. [THPT Thăng Long - Hà Nội]

Cho số thực a thay đổi và số phức z thỏa mãn $\frac{z}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{i-a}{1-a(a-2i)}$. Trên mặt phẳng tọa độ,

gọi $I(-3; 4)$ và M là điểm biểu diễn số phức z . Khi a thay đổi thì MI đạt nhỏ nhất là:

- A. 4** B. 3 C. 5 D. 6.

Câu 30. (THPT Chuyên Đại học Vinh)

Giả sử z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn $(z-6)(8+\bar{z}i)$ là số thực. Biết rằng $|z_1-z_2|=4$. Giá trị nhỏ nhất của $|z_1+3z_2|$ bằng:

- A. $5-\sqrt{21}$ B. $20-4\sqrt{21}$ **C. $20-4\sqrt{22}$** D. $5-\sqrt{22}$

Câu 31. Xét các số phức $z=a+bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z|=|\bar{z}+4-3i|$ và $|z+1-i|+|z-2+3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị $P=a+2b$ là:

- A. $P=-\frac{252}{50}$ B. $P=-\frac{41}{5}$. **C. $P=-\frac{61}{10}$.** D. $P=-\frac{18}{5}$.

Câu 32. Gọi $z=a+bi$ là số phức thỏa mãn $|z-1-i|=5$ và $|z-7-9i|+2|z-8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $2a+3b$ bằng

- A. 14. B. -17. **C. 20.** D. -12.

Câu 33. [THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu – Đồng Tháp]

Cho các số phức z và w thỏa mãn $(3-i)|z|=\frac{z}{w-1}+1-i$. Tìm GTLN của $T=|w+i|$.

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$** C. 2 D. $\frac{1}{2}$

Câu 34. (THPT Chuyên Ngũ – Hà Nội)

Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1-3i+5|=2$ và $|iz_2-1+2i|=4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=|2iz_1+3z_2|$.

- A. $\sqrt{313}+16$.** B. $\sqrt{313}$. C. $\sqrt{313}+8$. D. $\sqrt{313}+2\sqrt{5}$.

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $|z+2-i|+|\bar{z}-2+i|=4\sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $|iz+7|$?

- A. 16. **B. 10.** C. $8+2\sqrt{2}$. D. $8+\sqrt{2}$.

Câu 36. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+2| = |z+2i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$P = |z - 1 - 2i| + |z - 3 - 4i| + |z - 5 - 6i|$ được viết dưới dạng $\frac{a + b\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$ với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + b$ là

- A.** 3. **B.** 7. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 37. [SGD Lào Cai]

Biết số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $|z-3-4i|=\sqrt{5}$ và biểu thức $M=|z+2|^2-|z-i|^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính mô đun của số phức $z+i$.

- A.** $\sqrt{61}$ **B.** $5\sqrt{2}$ **C.** $3\sqrt{5}$ **D.** $2\sqrt{41}$.

Câu 38. Cho số phức z thỏa mãn $|(1+i)z+1-3i|=3\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = |z + 2 + i| + \sqrt{6}|z - 2 - 3i| \text{ bằng}$$

- A.** $5\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{15}(1+\sqrt{6})$. **C.** $6\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{10}+3\sqrt{15}$.

Câu 39. [THPT Chuyên Quang Trung]

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m để tồn tại 4 số phức z thỏa mãn $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = 2$ và $z(\bar{z} + 2) - (z + \bar{z}) - m$ là số thuần ảo. Tổng các phần tử của S là:

- A. $\sqrt{2}+1$ **B.** $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$ C. $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 40. Cho số phức z_1 thỏa mãn $|z_1 - 5 + 3i| = |z_1 - 1 - 3i|$ và z_2 thỏa mãn $|z_2 - 4 - 3i| = |z_2 - 2 + 3i|$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |z_1 - z_2| + |\bar{z}_1 - 6 + i| + |z_2 - 6 - i|$.

- A.** $\frac{18}{\sqrt{13}}$. **B.** $\frac{16}{\sqrt{13}}$. **C.** $2\sqrt{10}$. **D.** 6.

[illegible]

PHỤ LỤC:

Chứng minh công thức tính nhanh khoảng cách từ 1 điểm đến đường trung trực của đoạn thẳng dạng số phức.

Bài toán. Cho $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $|z - A| = |z - B|$. Tìm min $|z - C|$.

Kết quả: $\min |z - C| = \frac{|C - A|^2 - |C - B|^2}{2|A - B|}$.

Hướng dẫn chứng minh.

Để dễ nắm bắt, ta chuyển bài toán về hình học tọa độ Oxy, sau đó chuyển lại về dạng số phức.

Gọi $M(x; y)$, $A(a; b)$, $B(c; d)$, $C(m; n)$ là các điểm biểu diễn các số phức tương ứng z , A , B , C .

+ Phương trình trung trực của BA là:

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{OM} - \frac{OA^2 - OB^2}{2} = 0 \Leftrightarrow (a-c)x + (b-d)y - \frac{OA^2 - OB^2}{2} = 0.$$

+ Khi tính khoảng cách từ C đến d thì

$$\begin{aligned} \frac{\left| (a-c)m + (b-d)n - \frac{OA^2 - OB^2}{2} \right|}{\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}} &= \frac{\left| 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \right|}{2\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}} \\ &= \frac{\left| \overrightarrow{BA} (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \right|}{2|z_1 - z_2|} = \frac{\left| [(z_3 - z_2) - (z_3 - z_1)][(z_3 - z_2) + (z_3 - z_1)] \right|}{2|z_1 - z_2|} \end{aligned}$$

Tức là ta có $\min |z - C| = \frac{\left| |C - A|^2 - |C - B|^2 \right|}{2|A - B|}$. Điều phải chứng minh.