DIỄN ĐÀN GIÁO VIÊN TOÁN

ĐỀ PHÁT TRIỂN SỐ 1

PHÁT TRIỂN ĐỀ THI TN THPT QUỐC GIA LẦN 1

NĂM HỌC 2020 – 2021

MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)

ĐỀ BÀI

Câu 1. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x-1} \le \left(\frac{4}{5}\right)^{2-x}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(-\infty;1]$. **C.** $[3;+\infty)$. **D.** $[1;+\infty)$.

Câu 2. Cho $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = 2$; $\int_2^3 g(t)\mathrm{d}t = -3$. Giá trị của $\int_2^3 [3f(x)-2g(x)]\mathrm{d}x$ là

A. 8. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 14.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;1)$, $B(0;2;3)$. Viết phương trình mặt cầu đường kính AB.

A. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$. **B.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=\frac{5}{4}$.

C. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$. **D.** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(0;2;5)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;-1;2)$. Phương trình của d là:

A. $\begin{cases} x=3t \\ y=2-t \\ z=5+3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3t \\ y=2-t \\ z=5+2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3 \\ y=-1+2t \\ z=2+5t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=1-t \\ z=2+2t \end{cases}$.

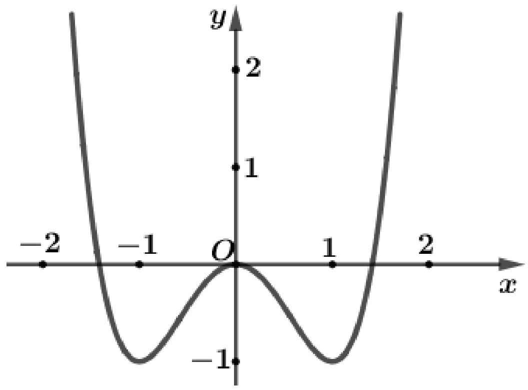
Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 6. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên dưới?



A. $y=-x^4+2x^2$. **B.** $y=x^3-3x^2$. **C.** $y=-x^3+3x^2$. **D.** $y=x^4-2x^2$.

Câu 7. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 2.

Câu 8. Với n là số nguyên dương bất kì, $n\geq 2$, công thức nào dưới đây đúng?

A. $C_n^2=\dfrac{n!}{2!(n-2)!}$. **B.** $C_n^2=\dfrac{2!}{n!(n-2)!}$. **C.** $C_n^2=\dfrac{n!}{(n-2)!}$. **D.** $C_n^2=\dfrac{2!(n-2)!}{n!}$.

Câu 9. Phần ảo của số phức $z=-3+4i$ bằng

A. -3. **B.** 4. **C.** 3. **D.** -4.

Câu 10. Cho $f(x)=x^2.\sqrt[3]{x^2}$ Giá trị của $f'(1)$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{8}{3}$. **C.** 4. **D.** $\dfrac{3}{8}$.

Câu 11. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x(x+1)$.

A. $x(x+1)+C$ **B.** $2x+1+C$ **C.** x^3+x^2+C **D.** $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+C$

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-2;1)$, $B(1;-1;3)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

A. $(1;-1;-2)$. **B.** $(-3;3;-4)$. **C.** $(3;-3;4)$. **D.** $(-1;1;2)$.

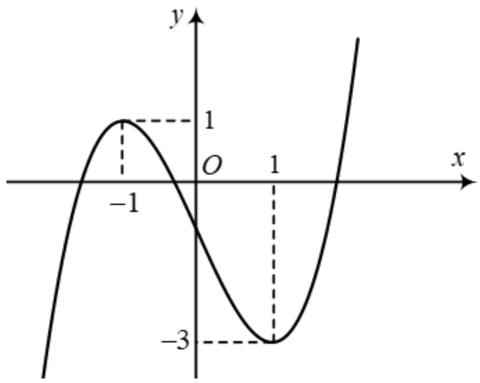
Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** -4.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số đã cho đồng biến trong khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-3;+\infty)$

Câu 15. Phương trình $3^{2x+1}=27$ có nghiệm là

A. $x=2$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=3$. **D.** $x=1$.

Câu 16. Nếu $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x=3$ thì $\int_1^5 8f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 15. **B.** 12. **C.** 24. **D.** 40.

Câu 17. Thể tích của khối lập phương cạnh $8a$ bằng

A. $512a^3$. **B.** $512a^2$. **C.** $8a^3$. **D.** $512a$.

Câu 18. Tập xác định của hàm số $y=2021^x$ là

A. $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 19. Thể tích V của mặt cầu bán kính R được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $4\pi R^2$. **B.** $\frac{4}{3}R^3$. **C.** $4\pi R^3$. **D.** $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Câu 20. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{2x+7}{x-3}$ là đường thẳng

A. $y=3$. **B.** $y=-2$. **C.** $y=2$. **D.** $y=-\frac{7}{3}$.

Câu 21. Với a là số thực dương tùy ý, biểu thức $a^{\frac{2}{3}}.\sqrt{a}$ bằng

A. $a^{\frac{7}{6}}$. **B.** $a^{\frac{5}{6}}$. **C.** $a^{\frac{6}{5}}$. **D.** $a^{\frac{1}{3}}$.

Câu 22. Cho khối chóp có diện tích đáy $B=7a^2$ và chiều cao $h=3a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $21a^3$. **B.** $7a^2$. **C.** $7a^3$. **D.** $\frac{7}{3}a^3$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x+2z-1=0$. Véctơ nào dưới đây là một véctơ pháp tuyến của (P)?

A. $\overrightarrow{n_1}=(3;0;2)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(3;2;-1)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(3;2;1)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(-3;-2;0)$.

Câu 24. Cho khối hình trụ có bán kính đáy $r=5$ và chiều cao $h=4$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 100π. **B.** 40π. **C.** 20π. **D.** 80π.

Câu 25. Cho hai số phức $z=-3+4i$, $\mathrm{w}=4-3i$. Số phức $z-\mathrm{w}$ bằng

A. $1+i$. **B.** $-7+7i$. **C.** $7-7i$. **D.** $-7-7i$.

Câu 26. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=2$,và công bội $q=-2$. Số hạng thứ ba của cấp số nhân bằng

A. -4. **B.** -8. **C.** 8. **D.** 4.

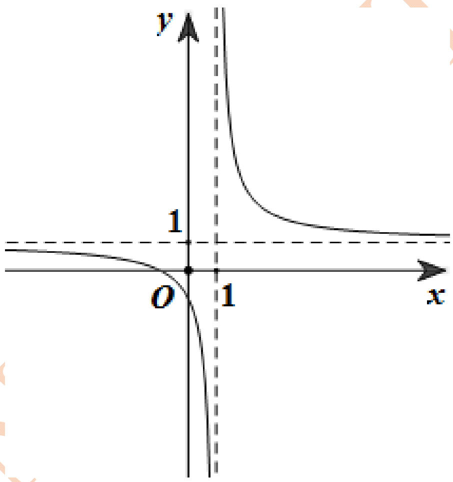
Câu 27. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x+\cos x$ là

A. $1+\sin x+C$. **B.** $\frac{x^2}{2}-\sin x+C$. **C.** $\frac{x^2}{2}+\sin x+C$. **D.** $1-\sin x+C$.

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-20;21)$ là điểm biểu diễn số phức nào dưới đây?

A. $z_2=20+21i$. **B.** $z_3=-20-21i$. **C.** $z_4=-20+21i$. **D.** $z_1=20-21i$.

Câu 29. Biết hàm số $y=\frac{x+m}{x-1}$ (m là số thực cho trước, $m\neq -1$ có đồ thị như hình bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$. **B.** $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$. **C.** $y'>0,\forall x\neq 1$. **D.** $y'<0,\forall x\neq 1$.

Câu 30. Từ một hộp chứa 10 quả bóng gồm 4 quả màu đỏ và 6 quả màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 quả. Xác suất để lấy được 2 quả khác màu bằng

A. $\frac{2}{9}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{15}$. **D.** $\frac{8}{15}$.

Câu 31. Trên đoạn $[-1;2]$, hàm số $y=2x^3+3x^2-12x+2$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

A. $x=6$. **B.** $x=15$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(3;-4;5)$ và vuông góc với đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{3}$. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $x+2y+3z-8=0$. **B.** $x+2y+3z-10=0$.

C. $3x-4y+5z-10=0$. **D.** $3x-4y+5z-8=0$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+5}{4}=\dfrac{z-3}{-7}$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d có phương trình là

A. $2x+4y-7z+27=0$. **B.** $2x+4y-7z+35=0$.

C. $3x-5y+3z-22=0$. **D.** $3x-5y+3z+35=0$.

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z=-3+7i$. Số phức liên hợp của z là

A. $\overline{z}=-\dfrac{13}{5}-\dfrac{11}{5}i$. **B.** $\overline{z}=-\dfrac{13}{5}+\dfrac{11}{5}i$. **C.** $\overline{z}=-13-11i$. **D.** $\overline{z}=13+11i$.

Câu 36. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Diện tích tam giác $A'BC$ bằng $\dfrac{a^2\sqrt{7}}{4}$. Góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C$ bằng

A. 30°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** 60°.

Câu 37. Với mọi a,b thỏa mãn $\log_3 a^2+\log_3 b^3=5$, khẳng định nào dưới đây đúng:

A. $a^2b^3=125$. **B.** $a^3b^2=125$. **C.** $a^2+b^3=125$. **D.** $a^2+b^3=75$.

Câu 38. Nếu $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-1$ thì $\int_0^1\left[3f(x)-2\right]\mathrm{d}x$ bằng:

A. -5. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 15.

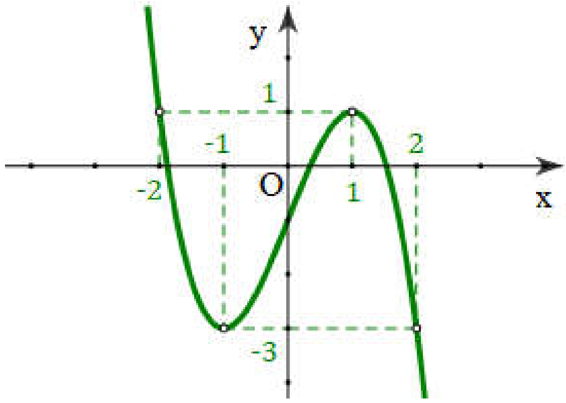
Câu 39. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+7 & \text{khi } x\ge 2\\ 3x^2-1 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=4$. Giá trị của $F(-2)+3F(4)$ bằng

A. 106. **B.** 110. **C.** 12. **D.** 36.

Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn $\left(4^x-2^{x^3+2}\right)\cdot\left[\log_3(2x+2)-2\right]\ge 0$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f\left(2-f(x)\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 4 . **B.** 7 . **C.** 5 . **D.** 6 .

Câu 42. Cắt hình nón $(\mathcal{N})$ bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc $45°$, ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của $(\mathcal{N})$ bằng

A. $8\sqrt{6}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{6}\pi a^2$. **C.** $4\sqrt{8}\pi a^2$. **D.** $4\sqrt{10}\pi a^2$.

Câu 43. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(2m+1)z+4m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0|=1$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 44. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=4$ và $|w|=5$. Khi $|2z+w-9+12i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng

A. $\frac{11}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$. **C.** 2 . **D.** 5 .

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-y+z+1=0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d lên (P) có phương trình là

A. $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{1}$. **B.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$. **C.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$. **D.** $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -6 và 10. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{2f(x)-8}{g(x)+8}$ và $y=2$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $4\ln 3$. **C.** $3\ln 2$. **D.** $\ln 2$.

Câu 47. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của y sao cho tương ứng với mỗi y luôn tồn tại không quá 63 số nguyên x thỏa mãn điều kiện $\log_{2020}(x+y^2)+\log_{2021}(y^2+y+64)\ge\log_4(x-y)$?

A. 301. **B.** 2 . **C.** 602 . **D.** 302 .

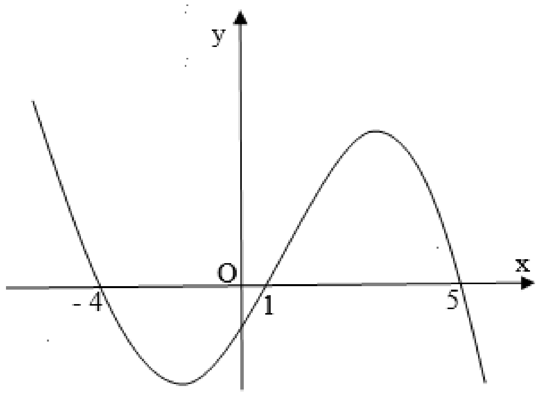
Câu 48. Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=120°$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'CD)$ bằng $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{3}{8}a^3$. **B.** $V=\frac{3\sqrt{6}}{8}a^3$. **C.** $V=\frac{3\sqrt{2}}{8}a^3$. **D.** $V=\frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.

Câu 49. Trong không gian *Oxyz*, cho $\vec{a}=(1;-1;0)$ và hai điểm $A(-4;7;3),B(4;4;5)$. Giả sử *M, N* là hai điểm thay đổi trong mặt phẳng *(Oxy)* sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ và $MN=5\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$ bằng:

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{77}$ **C.** $7\sqrt{2}-3$ **D.** $\sqrt{82}-5$

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(1+2x)$ như hình vẽ



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2021;2021]$ để hàm số $y=f\left(-|x|^2+2|x|-2020+m\right)$ có 7 điểm cực trị?

A. 0 giá trị. **B.** 5 giá trị. **C.** 6 giá trị. **D.** 7 giá trị.

--- HẾT ---

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.C	3.C	4.B	5.A	6.D	7.C	8.A	9.B	10.B
11.D	12.D	13.A	14.B	15.D	16.C	17.A	18.C	19.D	20.C
21.A	22.C	23.A	24.A	25.B	26.C	27.C	28.C	29.D	30.D
31.C	32.B	33.A	34.A	35.A	36.C	37.A	38.A	39.A	40.A
41.C	42.D	43.B	44.C	45.C	46.B	47.C	48.C	49.A	50.A

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x-1} \le \left(\frac{4}{5}\right)^{2-x}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(-\infty;1]$. **C.** $[3;+\infty)$. **D.** $[1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left(\frac{4}{5}\right)^{2x-1} \le \left(\frac{4}{5}\right)^{2-x} \Leftrightarrow 2x-1 \ge 2-x \Leftrightarrow x \ge 1$.

Vậy $S=[1;+\infty)$.

Câu 2. Cho $\int_2^3 f(x)\,dx = 2$; $\int_2^3 g(t)\,dt = -3$. Giá trị của $\int_2^3 [3f(x)-2g(x)]\,dx$ là

A. 8. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 14.

Lời giải

Chọn C

$$\int_2^3 [3f(x)-2g(x)]\,dx = \int_2^3 3f(x)\,dx - \int_2^3 2g(x)\,dx = 3\int_2^3 f(x)\,dx - 2\int_2^3 g(t)\,dt = 12$$

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;1)$, $B(0;2;3)$. Viết phương trình mặt cầu đường kính AB.

A. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$. **B.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=\frac{5}{4}$.

C. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$. **D.** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Tâm I của mặt cầu là trung điểm của AB $\Rightarrow I\left(-\frac{1}{2};2;2\right)$.

Bán kính $R=\frac{AB}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{1+4}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M\left(0;2;5\right)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=\left(3;-1;2\right)$. Phương trình của d là:

A. $\begin{cases} x=3t \\ y=2-t \\ z=5+3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3t \\ y=2-t \\ z=5+2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=3 \\ y=-1+2t \\ z=2+5t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=1-t \\ z=2+2t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng d đi qua điểm $M\left(0;2;5\right)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=\left(3;-1;2\right)$. Phương trình của d là $\begin{cases} x=3t \\ y=2-t \\ z=5+2t \end{cases}$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		1		3		5		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$+$	0	-	0	$+$	0	-	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

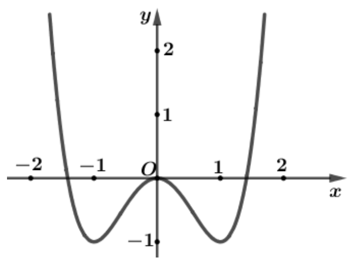
Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng xét dấu, $f'\left(x\right)$ đổi dấu khi qua các điểm $x\in\left\{-2;1;3;5\right\}$.

Vậy số điểm cực trị của hàm số đã cho là 4.

Câu 6. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên dưới?



A. $y=-x^4+2x^2$. **B.** $y=x^3-3x^2$. **C.** $y=-x^3+3x^2$. **D.** $y=x^4-2x^2$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào dáng đồ thị, đây là đồ thị hàm trùng phương nên loại đáp án B và C.

Đồ thị có bề lõm hướng lên phía trên nên chọn đáp án D.

Câu 7. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ cắt trục tung tại điểm có hoành độ $x=0$, suy ra tung độ $y=-1$.

Câu 8. Với n là số nguyên dương bất kì, $n\ge 2$, công thức nào dưới đây đúng?

A. $C_n^2=\frac{n!}{2!(n-2)!}$. **B.** $C_n^2=\frac{2!}{n!(n-2)!}$. **C.** $C_n^2=\frac{n!}{(n-2)!}$. **D.** $C_n^2=\frac{2!(n-2)!}{n!}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\Rightarrow C_n^2=\frac{n!}{2!(n-2)!}$.

Câu 9. Phần ảo của số phức $z=-3+4i$ bằng

A. -3. **B.** 4. **C.** 3. **D.** -4.

Lời giải

Chọn B

Số phức $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ có phần ảo là b, do đó $b=4$.

Câu 10. Cho $f(x)=x^2.\sqrt[3]{x^2}$ Giá trị của $f'(1)$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** 4. **D.** $\frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Với $x>0$ thì $f(x)=x^{2+\frac{2}{3}}=x^{\frac{8}{3}}\Rightarrow f'(x)=\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}$ nên $f'(1)=\frac{8}{3}$.

Câu 11. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=x(x+1)$.

A. $x(x+1)+C$ **B.** $2x+1+C$ **C.** x^3+x^2+C **D.** $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C$

Lời giải

Chọn D

$I=\int f(x)\mathrm{d}x=\int x(x+1)\mathrm{d}x=\int\left(x^2+x\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-2;1)$, $B(1;-1;3)$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là

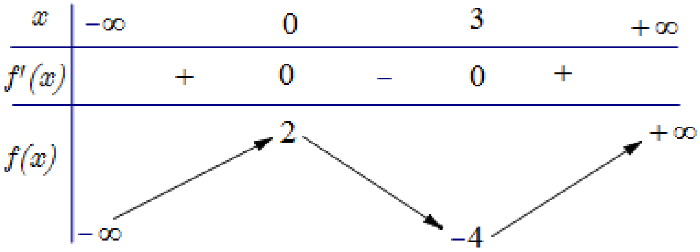
A. $(1;-1;-2)$. **B.** $(-3;3;-4)$. **C.** $(3;-3;4)$. **D.** $(-1;1;2)$.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{AB} = (-1;1;2)$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** -4.

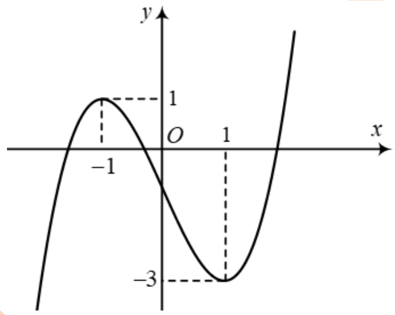
Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)$ đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$ khi đi qua nghiệm $x = 0$ nên hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 0$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số đã cho là $y = 2$ tại $x = 0$.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số đã cho đồng biến trong khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-3;+\infty)$

Lời giải

Chọn B

+ Trong khoảng $(-\infty;-1)$ ta thấy dáng đồ thị đi lên . Suy ra hàm số đã cho đồng biến.

+ Trong các khoảng khác đồ thị hàm số có dáng đi lên và có cả đi xuống nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 15. Phương trình $3^{2x+1} = 27$ có nghiệm là

A. $x = 2$. **B.** $x = -3$. **C.** $x = 3$. **D.** $x = 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $3^{2x+1} = 27 \Leftrightarrow 3^{2x+1} = 3^3 \Leftrightarrow 2x+1 = 3 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Câu 16. Nếu $\int_1^5 f(x)\mathrm{d}x = 3$ thì $\int_1^5 8f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 15. **B.** 12. **C.** 24. **D.** 40.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int\limits_1^5 8f\left(x\right)\mathrm{d}x = 8\int\limits_1^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 8.3 = 24$.

Câu 17. Thể tích của khối lập phương cạnh $8a$ bằng

A. $512a^3$. **B.** $512a^2$. **C.** $8a^3$. **D.** $512a$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích của khối lập phương cạnh bằng $5a$ là

$$V = \left(8a\right)^3 = 512a^3.$$

Câu 18. Tập xác định của hàm số $y = 2021^x$ là

A. $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Vì hàm số $y = 2021^x$ là hàm số mũ nên có tập xác định là tập $\mathbb{R}$.

Câu 19. Thể tích V của mặt cầu bán kính R được tính theo công thức nào dưới đây?

A. $4\pi R^2$. **B.** $\frac{4}{3}R^3$. **C.** $4\pi R^3$. **D.** $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Lời giải

Chọn D

Thể tích V của mặt cầu bán kính R được tính theo công thức: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Câu 20. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+7}{x-3}$ là đường thẳng

A. $y = 3$. **B.** $y = -2$. **C.** $y = 2$. **D.** $y = -\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x+7}{x-3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2+\frac{7}{x}}{1-\frac{3}{x}} = 2 \Rightarrow y = 2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 21. Với a là số thực dương tùy ý, biểu thức $a^{\frac{2}{3}}.\sqrt{a}$ bằng

A. $a^{\frac{7}{6}}$. **B.** $a^{\frac{5}{6}}$. **C.** $a^{\frac{6}{5}}$. **D.** $a^{\frac{1}{3}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $a^{\frac{2}{3}}.\sqrt{a} = a^{\frac{2}{3}}.a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}}$.

Câu 22. Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 7a^2$ và chiều cao $h = 3a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $21a^3$. **B.** $7a^2$. **C.** $7a^3$. **D.** $\frac{7}{3}a^3$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích của khối chóp đã cho bằng: $V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}7a^2.3a = 7a^3$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x + 2z - 1 = 0$. Véctơ nào dưới đây là một véctơ pháp tuyến của (P)?

A. $\overrightarrow{n_1} = (3;0;2)$. **B.** $\overrightarrow{n_2} = (3;2;-1)$. **C.** $\overrightarrow{n_3} = (3;2;1)$. **D.** $\overrightarrow{n_4} = (-3;-2;0)$.

Lời giải

Chọn A

Véc tơ pháp tuyến của $(P): 3x + 2z - 1 = 0$ là: $\overrightarrow{n_1} = (3;0;2)$.

Câu 24. Cho khối hình trụ có bán kính đáy $r = 5$ và chiều cao $h = 4$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 100π. **B.** 40π. **C.** 20π. **D.** 80π.

Lời giải

Chọn A

Thể tích của khối trụ đã cho là $V = \pi r^2 h = \pi.5^2.4 = 100\pi$.

Câu 25. Cho hai số phức $z = -3 + 4i$, $w = 4 - 3i$. Số phức $z - w$ bằng

A. $1 + i$. **B.** $-7 + 7i$. **C.** $7 - 7i$. **D.** $-7 - 7i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z - w = (-3 + 4i) - (4 - 3i) = -7 + 7i$.

Câu 26. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 2$,và công bội $q = -2$. Số hạng thứ ba của cấp số nhân bằng

A. -4. **B.** -8. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $u_3 = u_1.q^2 = 2.(-2)^2 = 8$.

Câu 27. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x+\cos x$ là

A. $1+\sin x+C$. **B.** $\dfrac{x^2}{2}-\sin x+C$. **C.** $\dfrac{x^2}{2}+\sin x+C$. **D.** $1-\sin x+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(x+\cos x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+\sin x+C$.

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-20;21)$ là điểm biểu diễn số phức nào dưới đây?

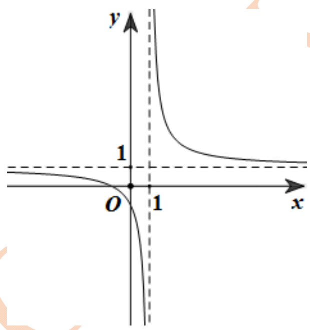
A. $z_2=20+21i$. **B.** $z_3=-20-21i$. **C.** $z_4=-20+21i$. **D.** $z_1=20-21i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có điểm $M(-20;21)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z=a+bi=-20+21i$.

Câu 29. Biết hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ (m là số thực cho trước, $m\neq-1$ có đồ thị như hình bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$. **B.** $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$. **C.** $y'>0,\forall x\neq1$. **D.** $y'<0,\forall x\neq1$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ nên loại đáp án A và B

Dạng đồ thị đi xuống thì $y'<0$ nên loại đáp án C

Vậy chọn D ($y'<0,\forall x\neq1$)

Câu 30. Từ một hộp chứa 10 quả bóng gồm 4 quả màu đỏ và 6 quả màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 quả. Xác suất để lấy được 2 quả khác màu bằng

A. $\dfrac{2}{9}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{15}$. **D.** $\dfrac{8}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 quả từ 10 quả bóng có $n(\Omega)=C_{10}^2=45$

Gọi A là biến cố: "Lấy được 2 quả khác màu"

Suy ra $n(A)=C_4^1.C_6^1=24$

Xác suất biến cố A là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{24}{45}=\dfrac{8}{15}$.

Câu 31. Trên đoạn $[-1;2]$, hàm số $y=2x^3+3x^2-12x+2$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

A. $x=6$. **B.** $x=15$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-1;2]$.

Ta có $y'=6x^2+6x-12$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[-1;2] \\ x=-2\notin[-1;2] \end{array}\right.$.

Ta có $y(-1)=15$, $y(1)=-5$, $y(2)=6$.

Vậy $\max\limits_{[-1;2]} y=y(-1)=15$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(3;-4;5)$ và vuông góc với đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{3}$. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $x+2y+3z-8=0$. **B.** $x+2y+3z-10=0$.

C. $3x-4y+5z-10=0$. **D.** $3x-4y+5z-8=0$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;2;3)$.

Vì mặt phẳng (P) vuông góc với d nên (P) nhận $\vec{u}=(1;2;3)$ làm vectơ pháp tuyến.

Hơn nữa, (P) đi qua điểm $A(3;-4;5)$ nên (P) có phương trình $(x-3)+2(y+4)+3(z-5)=0$.

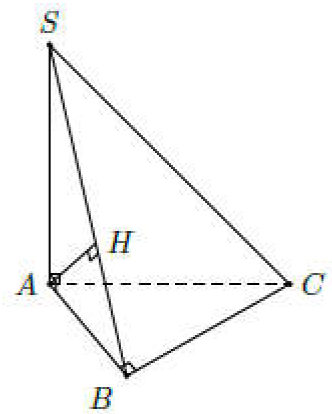
Rút gọn ta được $(P): x+2y+3z-10=0$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Kẻ $AH \perp SB$. Khi đó $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Suy ra AH là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{4a^2} \Leftrightarrow AH = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-3}{-7}$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d có phương trình là

A. $2x+4y-7z+27=0$. **B.** $2x+4y-7z+35=0$.

C. $3x-5y+3z-22=0$. **D.** $3x-5y+3z+35=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{u} = (2;4;-7)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua $A(1;-2;3)$ và vuông góc với d suy ra mặt phẳng (P) nhận vectơ $\vec{u} = (2;4;-7)$ làm vectơ pháp tuyến. Vậy phương trình mặt phẳng (P) cần tìm là $2(x-1)+4(y+2)-7(z-3)=0$ hay $2x+4y-7z+27=0$.

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z = -3+7i$. Số phức liên hợp của z là

A. $\overline{z} = -\frac{13}{5} - \frac{11}{5}i$. **B.** $\overline{z} = -\frac{13}{5} + \frac{11}{5}i$. **C.** $\overline{z} = -13-11i$. **D.** $\overline{z} = 13+11i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(2-i)z = -3+7i \Rightarrow z = \frac{-3+7i}{2-i} = -\frac{13}{5} + \frac{11}{5}i$.

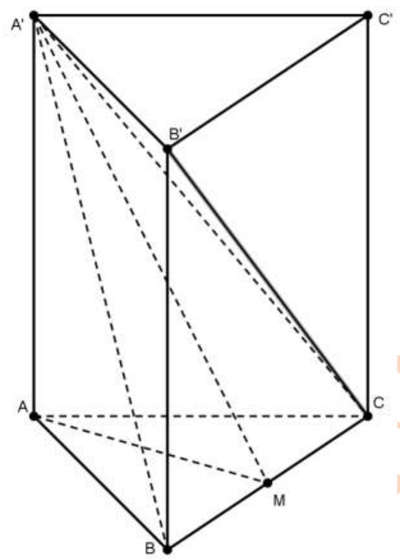
Vậy $\overline{z} = -\frac{13}{5} - \frac{11}{5}i$.

Câu 36. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Diện tích tam giác $A'BC$ bằng $\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$. Góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C$ bằng

A. 30°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** 60°.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm cạnh BC. Tam giác ABC đều, suy ra $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $BC \perp (A'AM) \Rightarrow BC \perp A'M \Rightarrow S_{A'BC} = \frac{1}{2}.BC.A'M \Rightarrow A'M = \frac{2S_{A'BC}}{BC} = \frac{\frac{a^2\sqrt{7}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Tam giác $A'AM$ vuông tại A, ta có $AA'^2 = A'M^2 - AM^2 = \frac{7a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} = a^2$. Suy ra $A'A = a$.

Vì $AA' // BB'$ nên $\left(\widehat{AA', B'C}\right) = \left(\widehat{BB', B'C}\right) = \widehat{BB'C}$. Ta có: $\tan \widehat{BB'C} = \frac{BC}{BB'} = 1 \Rightarrow \widehat{BB'C} = 45^\circ$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C$ bằng 45°.

Câu 37. Với mọi a, b thỏa mãn $\log_3 a^2 + \log_3 b^3 = 5$, khẳng định nào dưới đây đúng:

A. $a^2b^3 = 125$. **B.** $a^3b^2 = 125$. **C.** $a^2 + b^3 = 125$. **D.** $a^2 + b^3 = 75$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_3 a^2 + \log_3 b^3 = 5 \Leftrightarrow a^2b^3 = 5^3 \Leftrightarrow a^2b^3 = 125$.

Câu 38. Nếu $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -1$ thì $\int_0^1 [3f(x) - 2]\mathrm{d}x$ bằng:

A. -5. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 15.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_0^1 \left[3f(x)-2\right]\mathrm{dx} = 3\int_0^1 f(x)\,\mathrm{dx} - 2\int_0^2 \mathrm{dx} = 3.(-1)-2.1=-5$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 2x+7 & \text{khi } x\ge 2 \\ 3x^2-1 & \text{khi } x<2 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=4$. Giá trị của $F(-2)+3F(4)$ bằng

A. 106. **B.** 110. **C.** 12. **D.** 36.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$F(0)-F(-2)=\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{dx}=\int_{-2}^{0}\left(3x^2-1\right)\mathrm{dx}= x^3-x\Big|_{-2}^{0}=6 \Rightarrow F(-2)=F(0)-6=-2.$$

$$F(2)-F(0)=\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{dx}=\int_{0}^{2}\left(3x^2-1\right)\mathrm{dx}= x^3-x\Big|_{0}^{2}=6 \Rightarrow F(2)=F(0)+6=10.$$

$$F(4)-F(2)=\int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{dx}=\int_{2}^{4}\left(2x+7\right)\mathrm{dx}= x^2+7x\Big|_{1}^{2}=26 \Rightarrow F(4)=F(2)+26=36$$

Vậy $F(-2)-3F(4)=-2+3.36=106$.

Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên dương x thỏa mãn $\left(4^x-2^{x^3+2}\right)\cdot\left[\log_3(2x+2)-2\right]\ge 0$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Xét bất phương trình: $\left(4^x-2^{x^3+2}\right)\cdot\left[\log_3(2x+2)-2\right]\ge 0 \quad (1)$

Điều kiện: $2x+2>0 \Leftrightarrow x>-1$.

Ta giải các phương trình:

$$+\quad 4^x-2^{x^3+2}=0 \Leftrightarrow x^3+2=2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ (loại do điều kiện)} \\ x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

$+\ \log_3(2x+2)-2=0 \Leftrightarrow 2x+2=9 \Leftrightarrow x=\dfrac{7}{2}$.

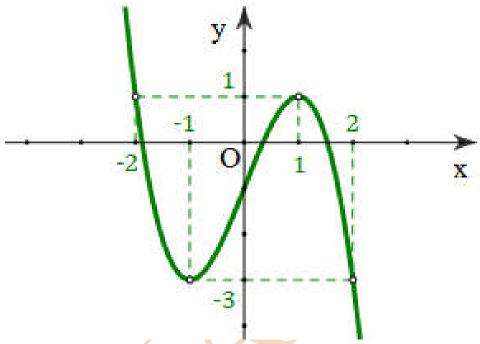
Ta có bảng xét dấu sau:

x	-1		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$4^x-2^{x^3+2}$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$
$\log_3(2x+2)-2$	‖	$-$	|	$-$		$-$	0	$+$
VT (1)	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, để $\left(4^x-2^{x^3+2}\right)\cdot\left[\log_3(2x+2)-2\right]\geq 0$ thì ta có

$$\left[\begin{array}{l}-1<x\leq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ 1\leq x\leq\dfrac{7}{2}\end{array}\right.\xrightarrow{x\in\mathbb{Z}^+}x=1,x=2,x=3.$$ Vậy có 3 giá trị nguyên dương thỏa mãn.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(2-f(x))=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $f(2-f(x))=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-f(x)=a\in(-2;-1)\\ 2-f(x)=b\in(-1;1)\\ 2-f(x)=c\in(1;2)\end{array}\right.$.

Phương trình $f(x)=2-a\in(3;4)$: có 1 nghiệm.

Phương trình $f(x)=2-b\in(1;3)$: có 1 nghiệm.

Phương trình $f(x)=2-c\in(0;1)$: có 3 nghiệm.

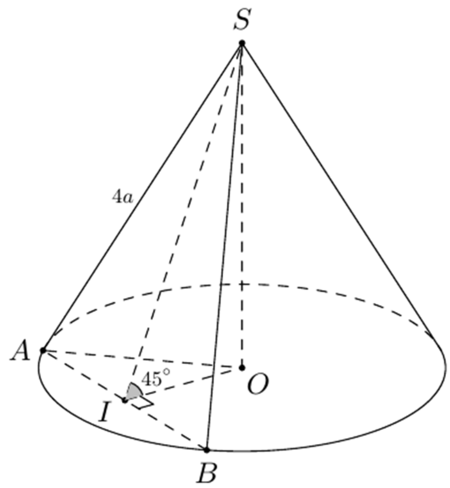
Vậy phương trình $f(2-f(x))=0$ có 5 nghiệm.

Câu 42. Cắt hình nón $(\mathcal{N})$ bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc $45°$, ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của $(\mathcal{N})$ bằng

A. $8\sqrt{6}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{6}\pi a^2$. **C.** $4\sqrt{8}\pi a^2$. **D.** $4\sqrt{10}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi hình nón $(\mathcal{N})$ có đỉnh S, đường tròn đáy có tâm O, bán kính r. Thiết diện đã cho là tam giác SAB đều cạnh $4a$ và I là trung điểm của AB. Khi đó,

$OI \perp AB,\ SI \perp AB$ nên góc giữa (SAB) và mặt phẳng đáy là $\widehat{SIO} = 45°$.

$SI = 2a\sqrt{3}$ nên $OI = SI.\cos 45° = a\sqrt{6}.$

Tam giác OIA vuông tại I có $r = OA = \sqrt{OI^2 + AI^2} = a\sqrt{10}.$

$l = SA = 4a$.

Vậy hình nón $(\mathcal{N})$ có diện tích xung quanh bằng $S_{xq} = \pi rl = 4\sqrt{10}\pi a^2.$

Câu 43. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(2m+1)z + 4m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 1$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $z^2 - 2(2m+1)z + 4m^2 = 0$ $(*)$. Ta có $\Delta' = (2m+1)^2 - 4m^2 = 4m+1$.

+ Trường hợp 1: Nếu $4m+1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{4}$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm thực nên

$$|z_0| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0 = 1 \\ z_0 = -1 \end{array}\right..$$

Với $z_0 = 1$ thay vào phương trình $(*)$ ta được:

$$1^2 - 2(2m+1).1 + 4m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \\ m = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \text{ (thoả } m \geq -\frac{1}{4}\text{)}.$$

Với $z_0 = -1$ thay vào phương trình $(*)$ ta được:

$1^2 + 2(2m+1) + 4m^2 = 0$, phương trình vô nghiệm.

+ Trường hợp 2: Nếu $4m+1<0 \Leftrightarrow m<-\frac{1}{4}$ thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phức là

$$z=2m+1+i\sqrt{-4m-1} \text{ và } z=2m+1-i\sqrt{-4m-1}.$$

Khi đó $|z_0|=1 \Leftrightarrow (2m+1)^2-4m-1=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{1}{2} \\ m=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$, kết hợp với $m<-\frac{1}{4}$ ta được $m=-\frac{1}{2}$.

Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 44. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=4$ và $|w|=5$. Khi $|2z+w-9+12i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng

A. $\frac{11}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{13}}{2}$. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|z|=4 \Leftrightarrow |2z|=8 \Leftrightarrow |(2z-9+12i)+9-12i|=8$.

Đặt $2z-9+12i=\mathrm{w}_1 \Rightarrow |\mathrm{w}_1+9-12i|=8$.

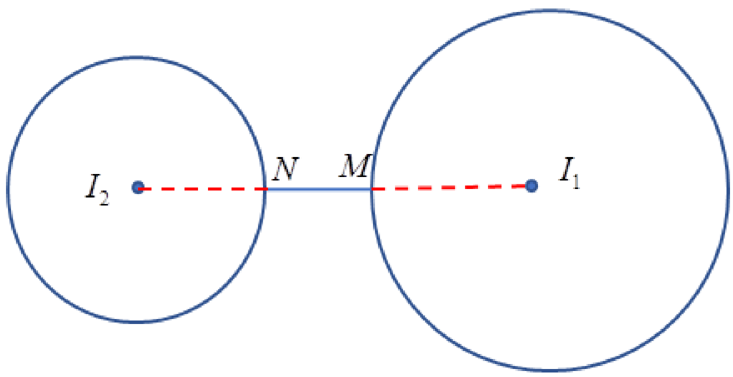
$M(\mathrm{w}_1)$ thuộc đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-9;12)$ và bán kính $R_1=8$.

$|\mathrm{w}|=5 \Leftrightarrow |-\mathrm{w}|=5$.

Đặt $\mathrm{w}_2=-\mathrm{w} \Rightarrow |\mathrm{w}_2|=5$.

$N(\mathrm{w}_2)$ thuộc đường tròn (C_2) có tâm $I_2(0;0)$ và bán kính $R_2=5$.

$I_1I_2=15>13=R_1+R_2$ suy ra (C_1) và (C_2) không cắt nhau.



$\Rightarrow \mathrm{Min}|2z+\mathrm{w}-9+12i|=\mathrm{Min}|\mathrm{w}_1-\mathrm{w}_2|=\mathrm{Min}MN=I_1I_2-(R_1+R_2)=2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\dfrac{I_2N}{I_2I_1}=\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{I_2M}{I_2I_1}=\dfrac{7}{15}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\overrightarrow{I_2N}=\overrightarrow{I_2I_1}\\ 15\overrightarrow{I_2M}=7\overrightarrow{I_2I_1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M(-3;4)\\ N\left(-\dfrac{21}{5};\dfrac{28}{5}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}w_1=2z-9+12i=-3+4i\\ w_2=-w=-\dfrac{21}{5}+\dfrac{28}{5}i\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=3-4i\\ w=\dfrac{21}{5}-\dfrac{28}{5}i\end{cases}$$

Vậy $|z-w|=\left|(3-4i)-\left(\dfrac{21}{5}-\dfrac{28}{5}i\right)\right|=2$.

Câu 45. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-y+z+1=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Hình chiếu vuông góc của d lên (P) có phương trình là

A. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{1}$. **B.** $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$. **C.** $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$. **D.** $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1;1)$.

Đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;1;-1)$.

Ta nhận thấy rằng đường thẳng d cắt (P) tại điểm $M(0;0;-1)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng qua d và vuông góc với mặt phẳng (P), vậy (Q) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(Q)}=[\vec{n};\vec{u}]=(0;2;2)$.

Khi đó, hình chiếu d' của d lên (P) là giao tuyến của (P) và (Q). Suy ra véc-tơ chỉ phương của d' là $\vec{u}'=\left[\vec{n};\vec{n}_{(Q)}\right]=(-4;-2;2)$.

Vậy phương trình của đường thẳng d' là $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -6 và 10. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{2f(x)-8}{g(x)+8}$ và $y=2$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $4\ln 3$. **C.** $3\ln 2$. **D.** $\ln 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)=2x^3+(6+a)x^2+(b+2a+12)x+2a+b+c$.

Suy ra: $g'(x)=6x^2+2(6+a)x+b+2a+12$.

Xét phương trình

$$\frac{2f(x)-8}{g(x)+8}=2\Leftrightarrow 2g(x)=2f(x)-24$$

$$\Leftrightarrow 12x^2+2(2a+6)x+4a+2b+24=0 \Leftrightarrow 2g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$$

Ta có diện tích bằng

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{2f(x)-8}{g(x)+8}-2\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{2f(x)-2g(x)-24}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{2g'(x)}{g(x)+8}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|2\ln|g(x)+8|\right|\Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$=2\left|\ln|g(x_2)+8|-\ln|g(x_1)+8|\right|=2|\ln 9|=4\ln 3.$$

Câu 47. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của y sao cho tương ứng với mỗi y luôn tồn tại không quá 63 số nguyên x thỏa mãn điều kiện $\log_{2020}(x+y^2)+\log_{2021}(y^2+y+64)\ge \log_4(x-y)$?

A. 301. **B.** 2. **C.** 602. **D.** 302.

Lời giải

Chọn C.

Đặt $f(x)=\log_{2020}(x+y^2)+\log_{2021}(y^2+y+64)-\log_4(x-y)$ (coi y là tham số).

Điều kiện xác định của $f(x)$ là: $\begin{cases} x+y^2>0 \\ x-y>0 \end{cases} \Rightarrow x>y\ge -y^2$ (do x,y nguyên).

Do x,y nguyên nên ta xét $f(x)$ trên nữa khoảng $[y+1;+\infty)$. Ta có:

$$f'(x)=\frac{1}{(x+y^2)\ln 2020}-\frac{1}{(x-y)\ln 4}<0, \forall x\ge y+1.$$

Bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$y+1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $y+64$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$f(y+1)$ $\searrow$ $f(y+64)$

Yêu cầu bài toán trở thành:

$$f(y+64)<0 \Leftrightarrow \log_{2020}(y^2+y+64)+\log_{2021}(y^2+y+64)<\log_4 64$$

$$\Leftrightarrow \log_{2021}(y^2+y+64)(\log_{2020}2021+1)<3$$

$$\Leftrightarrow y^2+y+64-2021^{\frac{3}{\log_{2020}2021+1}}<0 \Rightarrow -301,76<y<300,76.$$

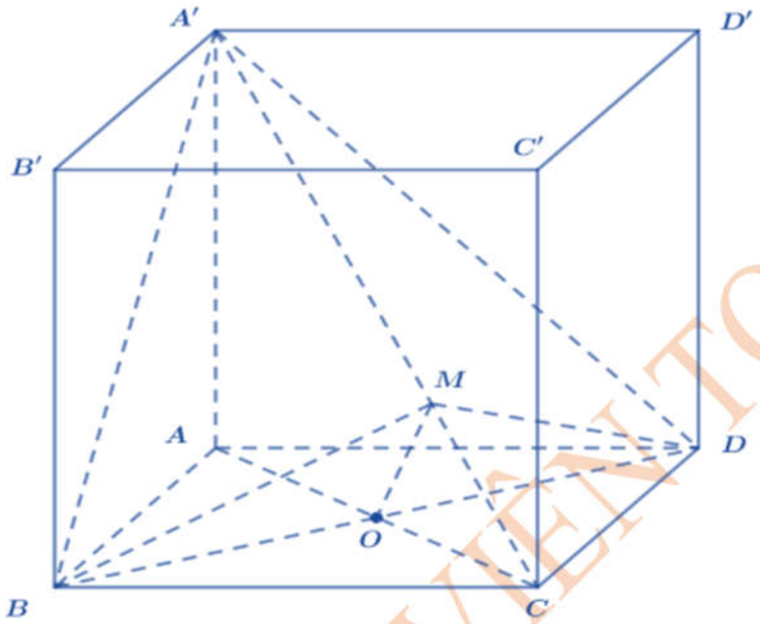
Vì $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{-301;-300;\ldots;299;300\}$. Vậy có 602 giá trị nguyên của y thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 48. Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=120°$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'CD)$ bằng $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{3}{8}a^3$.   **B.** $V = \frac{3\sqrt{6}}{8}a^3$.   **C.** $V = \frac{3\sqrt{2}}{8}a^3$.   **D.** $V = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 120^0$ nên $BD = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $BD \perp (A'AC) \Rightarrow BD \perp A'C$.

Kẻ $OM \perp A'C$ tại M thì $A'C \perp (BDM) \Rightarrow A'C \perp MD$, do đó góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'CD)$ là góc giữa hai đường thẳng MB và MD.

Vậy $\widehat{BMD} = 60°$ hoặc $\widehat{BMD} = 120°$.

TH1: $\widehat{BMD} = 60°$ thì do $MB = MD$ nên tam giác BMD là tam giác đều, do đó $OM = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow OM = OC$ (vô lý vì ΔOMC vuông tại M).

TH2: $\widehat{BMD} = 120°$ thì do tam giác BMD cân tại M nên $\widehat{BMO} = 60°$ $\Rightarrow MO = BO.\cot 60° = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, do đó $MC = \sqrt{OC^2 - MO^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Có tam giác $AA'C$ đồng dạng với tam giác MOC nên $\frac{AA'}{AC} = \frac{MO}{MC} \Rightarrow AA' = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $V = AA'.S_{ABCD} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{8}a^3$.

Câu 49. Trong không gian *Oxyz*, cho $\vec{a} = (1;-1;0)$ và hai điểm $A(-4;7;3), B(4;4;5)$. Giả sử *M, N* là hai điểm thay đổi trong mặt phẳng *(Oxy)* sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ và $MN = 5\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $|AM - BN|$ bằng:

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{77}$ **C.** $7\sqrt{2}-3$ **D.** $\sqrt{82}-5$

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}=(1;-1;0) \Rightarrow \overrightarrow{MN}=(k;-k;0)\ (k>0) \Rightarrow MN^2 = 2k^2 = 50 \Leftrightarrow k=5$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=(5;-5;0)$

Lấy A' thỏa mãn $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MN}=(5;-5;0) \Rightarrow A'(1;2;3)$

Vì $AA'NM$ là hình bình hành $\Rightarrow AM = A'N$

Ta có: $|AM-BN|=|A'N-BN| \le A'N=\sqrt{17}$

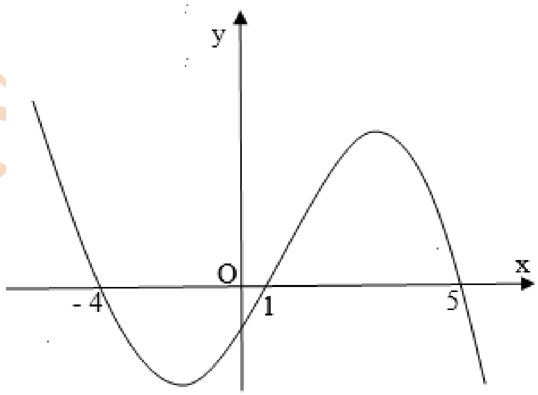
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow N = A'B \cap (Oxy)$

Ta có $\overrightarrow{A'B}=(3;2;2) \Rightarrow$ Phương trình $A'B: \begin{cases} x=1+3t \\ y=2+2t \\ z=3+2t \end{cases}$

$N \in A'B \Leftrightarrow N(1+3t;2+2t;3+2t)$

$N \in (Oxy) \Rightarrow 3+2t=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{3}{2}$. Khi đó $N\left(-\dfrac{7}{2};-1;0\right); M\left(-\dfrac{17}{2};4;0\right)$

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(1+2x)$ như hình vẽ:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2021;2021]$ để hàm số $y=f\left(-|x|^2+2|x|-2020+m\right)$ có 7 điểm cực trị?

A. 0 giá trị. **B.** 5 giá trị. **C.** 6 giá trị. **D.** 7 giá trị.

Lời giải

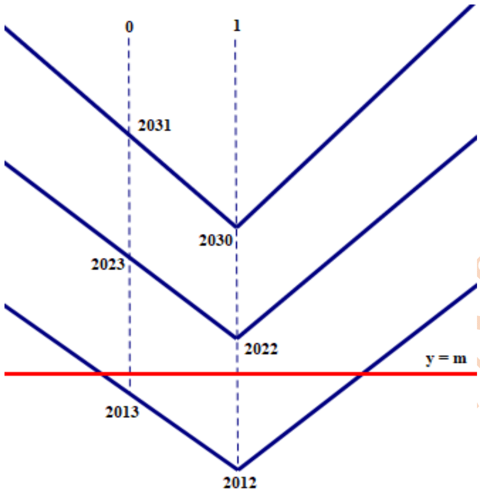
Chọn A

Theo bài ra ta có: đồ thị hàm số $y=f'(1+2x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $x=-4; x=1;\ x=5$ suy ra $f'(-7)=f'(3)=f'(11)=0.$

Xét hàm số $h(x)=f\left(-x^2+2x-2020+m\right)$ ta có $h'(x)=(-2x+2).f'\left(-x^2+2x-2020+m\right)$.

Ta có: $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ f'\left(-x^2+2x-2020+m\right)=0,(*) \end{array}\right.$. Ta có: $(*) \Leftrightarrow f'\left(-x^2+2x-2020+m\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2+2x-2020+m=-7 \\ -x^2+2x-2020+m=3 \\ -x^2+2x-2020+m=11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=x^2-2x+2013 \\ m=x^2-2x+2023 \\ m=x^2-2x+2031 \end{array}\right..$$



Hàm số $y=f\left(-|x|^2+2|x|-2020+m\right)$ có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=f\left(-x^2+2x-2020+m\right)$ có 3 điểm cực trị dương, từ đồ thị hàm số ta suy ra $\left[\begin{array}{l} 2012<m<2013 \\ 2023 \le m \le 2030 \end{array}\right.$.

Do m nguyên và $m \in [-2021;2021]$, suy ra $m \in \varnothing$.

--- HẾT ---

DIỄN ĐÀN GIÁO VIÊN TOÁN

ĐỀ PHÁT TRIỂN SỐ 2

PHÁT TRIỂN ĐỀ THI TN THPT QUỐC GIA LẦN 1

NĂM HỌC 2020 – 2021

MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)

ĐỀ BÀI

Câu 1. Giải bất phương trình $5^{2x-1} \ge 125$

A. $(-\infty;2)$. **B.** $[-2;+\infty)$. **C.** $[2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$; $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 12$. **B.** $I = 8$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = 6$.

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 9 = 0$. Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

A. $I(1;-2;3), R = \sqrt{5}$. **B.** $I(-1;2;-3), R = \sqrt{5}$.

C. $I(-1;2;-3); R = 5$. **D.** $I(1;-2;3), R = 5$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $A(2;-4;1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-3;2;3)$. Phương trình của d là:

A. $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-1}{-3}$. **B.** $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z-3}{1}$.

C. $\dfrac{x-2}{-3} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-1}{3}$. **D.** $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-1}{-3}$.

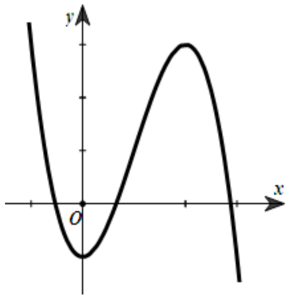
Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 6. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên dưới?



A. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 - 1$. **C.** $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

Câu 7. Đồ thị hàm số $y = (x^2 + 2)(x - 3)$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $-\sqrt{2}$.

Câu 8. Với n là số nguyên dương bất kì, $n \ge 3$, công thức nào dưới đây đúng?

A. $C_n^3 = 3!A_n^3$. **B.** $A_n^3 = 3!C_n^3$. **C.** $A_n^3 = 3C_n^3$. **D.** $C_n^3 = 3A_n^3$.

Câu 9. Phần thực của số phức $z = 3i$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 10. Trên khoảng $(0;+\infty)$ đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[8]{x^{15}}$ bằng

A. $\sqrt[8]{x^7}$. **B.** $\sqrt[7]{x^8}$. **C.** $\frac{15}{8}\sqrt[8]{x^7}$. **D.** $\frac{15}{8}\sqrt[7]{x^8}$.

Câu 11. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2x-1}$ trên $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Phát biểu nào sau đây **sai** ?

A. $F(x)=\frac{\ln|6x-3|}{2}+C$. **B.** $F(x)=\frac{\ln|2x-1|}{2}+C$.

C. $F(x)=\frac{\ln(2x-1)^2}{4}+C$. **D.** $F(x)=\ln|2x-1|+C$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;1)$. Tìm tọa độ điểm C thỏa mãn $\overrightarrow{AC}=(0;6;1)$.

A. $C(1;6;2)$. **B.** $C(1;6;0)$. **C.** $C(-1;-6;-2)$. **D.** $C(-1;6;-1)$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 2.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-\sqrt{2};0)$. **D.** $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Câu 15. Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(x-1)=3$.

A. $x=9$. **B.** $x=7$. **C.** $x=8$. **D.** $x=10$.

Câu 16. Nếu $\int_1^6 f(x)dx=9$ thì $\int_1^6\left[3f(x)+1\right]dx$ bằng

A. 33. **B.** 32. **C.** 27. **D.** 28.

Câu 17. Thể tích của khối hộp chữ nhật có độ dài các cạnh là a, $3a$, $5a$ bằng

A. $15a^2$. **B.** $15a^3$. **C.** $15a$. **D.** 15.

Câu 18. Tập xác định của hàm số $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 19. Diện tích mặt cầu có bán kính $2a$ là

A. $4\pi a^2$ **B.** $16\pi a^2$. **C.** $16a^2$. **D.** $\frac{4\pi a^2}{3}$.

Câu 20. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{1-x}{2x+1}$ là đường thẳng

A. $x=\frac{1}{2}$. **B.** $y=-\frac{1}{2}$. **C.** $y=\frac{1}{2}$. **D.** $x=-\frac{1}{2}$.

Câu 21. Với a là số thực dương tùy ý, $a^{\frac{4}{3}}$ bằng

A. $\sqrt[4]{a^3}$. **B.** $\sqrt[3]{a^4}$. **C.** $\frac{a^4}{a^3}$. **D.** a.

Câu 22. Cho khối chóp có diện tích đáy $B=3a^2$ và thể tích $V=3a^3$. Chiều cao của khối chóp đã cho bằng

A. $3a$. **B.** a. **C.** $\frac{1}{3}a$. **D.** $9a$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+5y-7=0$. Véctơ nào dưới đây là một véctơ pháp tuyến của (P)?

A. $\overrightarrow{n_1}=(2;5;-7)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(2;5;0)$. **C.** $\overrightarrow{n_3}=(2;5;7)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}=(-2;-5;7)$.

Câu 24. Cho khối trụ có bán kính đáy $r=7$ và thể tích $V=196\pi$. Chiều cao của khối trụ đã cho bằng

A. $h=4\pi$. **B.** $h=2\pi$. **C.** $h=2$. **D.** $h=4$.

Câu 25. Cho hai số phức $z=3-2i$, $w=-5+3i$. Số phức $z-\overline{w}$ bằng

A. $-2+i$. **B.** $8+i$. **C.** $-2-5i$. **D.** $-2+5i$.

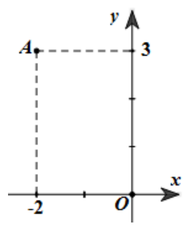
Câu 26. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=3$, và $u_2=-9$. Số hạng thứ tư của cấp số nhân bằng

A. 81. **B.** -81. **C.** 27. **D.** -27.

Câu 27. Hàm số $F(x)=e^x-\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây

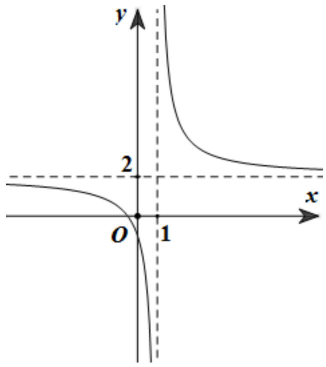
A. $f(x)=e^x+\cos x$. **B.** $f(x)=e^x-\cos x$. **C.** $f(x)=e^x+\sin x$. **D.** $f(x)=e^x-\sin x$.

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ, điểm A (như hình vẽ) là điểm biểu diễn cho số phức nào dưới đây?



A. $z_2=2+3i$. **B.** $z_3=2-3i$. **C.** $z_4=-2-3i$. **D.** $z_1=-2+3i$.

Câu 29. Biết hàm số $y=\dfrac{2x+a}{x-1}$ (a là số thực cho trước, $a\neq -2$ có đồ thị như hình bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $y'<0,\forall x\neq 1$. **B.** $y'>0,\forall x\neq 1$. **C.** $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$. **D.** $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 30. Từ một hộp chứa 20 thẻ được đánh số từ 1 đến 20, lấy ngẫu nhiên 1 thẻ. Xác suất để lấy được thẻ ghi số lẻ và chia hết cho 3 bằng

A. $\dfrac{3}{10}$. **B.** $\dfrac{3}{20}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Câu 31. Tích của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[1;\ 3]$ bằng

A. $\dfrac{52}{3}$. **B.** 20. **C.** 6. **D.** $\dfrac{65}{3}$.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua $M(1;2;-3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P):-x+2y+z+1=0$. có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$.

C. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh $2a$, $SA=SB=SC=SD=a\sqrt{5}$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(6;-2;3)$ và điểm $B(-2;8;-3)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $4x-5y+3z-7=0$. **B.** $2x+3y-14=0$.

C. $2x+3y+14=0$. **D.** $4x-5y+3z+7=0$.

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $(3-4i)\overline{z}+10=5i$. Môđun của số phức $z-i$ là

A. -2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 36. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. Góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C$ bằng

A. 30°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** 60°.

Câu 37. Biết $\log_6 3 = a, \log_6 5 = b$. Tính $\log_3 5$ theo a, b

A. $\frac{b}{a}$. **B.** $\frac{b}{1+a}$. **C.** $\frac{b}{1-a}$. **D.** $\frac{b}{a-1}$.

Câu 38. Nếu $\int\limits_0^1 \left[3f(x)-2\right]\mathrm{dx} = 13$ thì $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{dx}$ bằng:

A. -5. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 15.

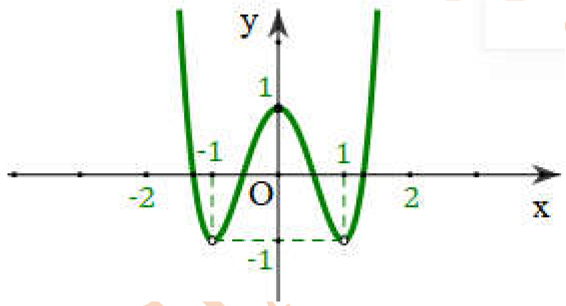
Câu 39. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = |1+x| - |1-x|$ trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(1) = 3$. Tính tổng $F(0) + F(2) + F(-3)$.

A. 8. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 10.

Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x+3)+2}\cdot\left(3^{x^3} - 3^{-x}\cdot 9^{4-3x}\right) < 0$?

A. 10. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 12.

Câu 41. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x)) = 1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 5. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 42. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O, $SO = 3a$. Thiết diện qua đỉnh của hình nón là ΔSAB có diện tích bằng $18a^2$. Khoảng cách từ O đến (SAB) là a. Tính bán kính của hình tròn đáy.

A. $\frac{a\sqrt{530}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{530}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{494}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{494}}{2}$.

Câu 43. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(2m+1)z + 4m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 2$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 44. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 3$ và $|w| = 1$. Khi $|iz + \overline{w} - 3 - 4i|$ đạt giá trị lớn nhất, $|z - w|$ bằng

A. $\frac{\sqrt{106}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{26}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{131}}{5}$.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng d' đối xứng với d qua mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{7}$. **B.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{7}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{7}$.

D. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{7}$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ với a,b,c,d là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)$ có hai giá trị cực trị là -1 và 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{44-2f'(x)}{g(x)+2}$ và $y=-2$ bằng

A. $\ln 3$. **B.** $4\ln 3$. **C.** $6\ln 2$. **D.** $3\ln 2$.

Câu 47. Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a tồn tại đúng 8 số thực x thỏa mãn $\left(x^4-4x^2-3+\log_4 a\right)\left(a.2^{2x^4-8x^2-3}+1\right)=-3$?

A. 1024. **B.** 1028. **C.** 1023. **D.** 1026.

Câu 48. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=\sqrt{6}$, $AD=\sqrt{3}$, $A'C=3$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $(AA'C'C)$, $(AA'B'B)$ tạo với nhau góc α thỏa mãn $\tan\alpha=\frac{3}{4}$. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. $V=8$. **B.** $V=12$. **C.** $V=10$. **D.** $V=6$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α): $3x-y+2z-5=0$ và hai điểm $A(8;-3;3)$; $B(11;-2;13)$. Gọi M; N là hai điểm thuộc mặt phẳng (α) sao cho $MN=\sqrt{6}$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ là

A. $2\sqrt{33}$. **B.** $3\sqrt{33}$. **C.** $4\sqrt{33}$. **D.** $5\sqrt{33}$.

Câu 50. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $g(x)=f\left(\left|x^2-2x-m\right|\right)$ có 9 điểm cực trị?

A. 4. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

--- HẾT ---

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.B	3.A	4.C	5.B	6.C	7.B	8.B	9.C	10.C
11.D	12.A	13.B	14.C	15.A	16.B	17.B	18.A	19.B	20.D
21.B	22.A	23.B	24.D	25.B	26.B	27.B	28.D	29.A	30.B
31.B	32.C	33.B	34.D	35.D	36.A	37.A	38.B	39.C	40.C
41.D	42.A	43.B	44.A	45.C	46.C	47.D	48.A	49.C	50.B

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Giải bất phương trình $5^{2x-1} \geq 125$

A. $(-\infty;2)$. **B.** $[-2;+\infty)$. **C.** $[2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $5^{2x-1} \geq 125 \Leftrightarrow 5^{2x-1} \geq 5^3 \Leftrightarrow 2x-1 \geq 3 \Leftrightarrow 2x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2$

Vậy $S = [2;+\infty)$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$; $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 6$. Tính $I = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I = 12$. **B.** $I = 8$. **C.** $I = 4$. **D.** $I = 6$.

Lời giải

Chọn B

$$I = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 2 + 6 = 8.$$

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 9 = 0$. Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

A. $I(1;-2;3), R = \sqrt{5}$. **B.** $I(-1;2;-3), R = \sqrt{5}$.

C. $I(-1;2;-3); R = 5$. **D.** $I(1;-2;3), R = 5$.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $a = 1,\ b = -2,\ c = 3,\ d = 9 \Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{5}$, tâm $I(1;-2;3)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $A(2;-4;1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-3;2;3)$. Phương trình của d là:

A. $\frac{x-2}{-3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-1}{-3}$. **B.** $\frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x-2}{-3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-1}{3}$. **D.** $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-1}{-3}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d đi qua điểm $A(2;-4;1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-3;2;3)$. Phương trình của d là $\frac{x-2}{-3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-1}{3}$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

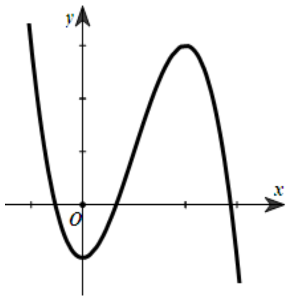
Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng xét dấu, $f'(x)$ đổi dấu khi qua các điểm $x \in \{-1; 0; 1\}$.

Vậy số điểm cực trị của hàm số đã cho là 3.

Câu 6. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên dưới?



A. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 - 1$. **C.** $y = -x^3 + 3x^2 - 1$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào dáng đồ thị, đây là đồ thị hàm bậc ba nên loại đáp án A và B.
Đồ thị có điểm cuối đi xuống nên chọn đáp án C.

Câu 7. Đồ thị hàm số $y = (x^2 + 2)(x - 3)$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $-\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y = (x^2 + 2)(x - 3)$ cắt trục hoành tại điểm có tung độ $y = 0$, suy ra hoành độ $x = 3$.

Câu 8. Với n là số nguyên dương bất kì, $n \geq 3$, công thức nào dưới đây đúng?

A. $C_n^3 = 3!A_n^3$. **B.** $A_n^3 = 3!C_n^3$. **C.** $A_n^3 = 3C_n^3$. **D.** $C_n^3 = 3A_n^3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $A_n^k = k!C_n^k \Rightarrow A_n^3 = 3!C_n^3$.

Câu 9. Phần thực của số phức $z = 3i$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Số phức $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$ có phần thực là a, do đó $a = 0$.

Câu 10. Trên khoảng $(0;+\infty)$ đạo hàm của hàm số $y=\sqrt[8]{x^{15}}$ bằng

A. $\sqrt[8]{x^7}$. **B.** $\sqrt[7]{x^8}$. **C.** $\frac{15}{8}\sqrt[8]{x^7}$. **D.** $\frac{15}{8}\sqrt[7]{x^8}$.

Lời giải

Chọn C

$y=\sqrt[8]{x^{15}}=x^{\frac{15}{8}}\Rightarrow y'=\left(x^{\frac{15}{8}}\right)'=\frac{15}{8}.x^{\frac{7}{8}}\Leftrightarrow y'=\frac{15}{8}.\sqrt[8]{x^7}$.

Câu 11. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2x-1}$ trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Phát biểu nào sau đây **sai** ?

A. $F(x)=\frac{\ln|6x-3|}{2}+C$. **B.** $F(x)=\frac{\ln|2x-1|}{2}+C$.

C. $F(x)=\frac{\ln(2x-1)^2}{4}+C$. **D.** $F(x)=\ln|2x-1|+C$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng hệ quả: $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C\Rightarrow\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{F(ax+b)}{a}+C$.

Suy ra $\int\frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x=\frac{\ln|2x-1|}{2}+C\Rightarrow$ **B** đúng.

Xét đáp án A ta có:

$F(x)=\frac{\ln|6x-3|}{2}+C=\frac{\ln 3}{2}+\frac{\ln|2x-1|}{2}+C\Rightarrow$ **A** đúng.

Xét đáp án C ta có:

$F(x)=\frac{\ln(2x-1)^2}{4}+C=\frac{2\ln|2x-1|}{4}+C=\frac{\ln|2x-1|}{2}+C\Rightarrow$ **C** đúng.

Xét đáp án D ta có:

$(F(x))'=(\ln|2x-1|+C)'=\frac{2}{2x-1}\neq f(x)=\frac{1}{2x-1}$ với $x\neq\frac{1}{2}$ nên đáp án **D** là **sai**.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;1)$. Tìm tọa độ điểm C thỏa mãn $\overrightarrow{AC}=(0;6;1)$.

A. $C(1;6;2)$. **B.** $C(1;6;0)$. **C.** $C(-1;-6;-2)$. **D.** $C(-1;6;-1)$.

Lời giải

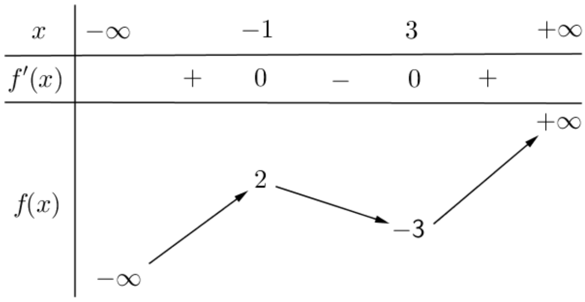
Chọn A

Gọi điểm $C(x_C;y_C;z_C)$, ta có: $\overrightarrow{AC}=(x_C-1;y_C;z_C-1)$.

Khi đó, $\overrightarrow{AC}=(0;6;1)\Leftrightarrow\begin{cases}x_C-1=0\\y_C=6\\z_C-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C=1\\y_C=6\\z_C=2\end{cases}$.

Vậy, tọa độ điểm $C(1;6;2)$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 2.

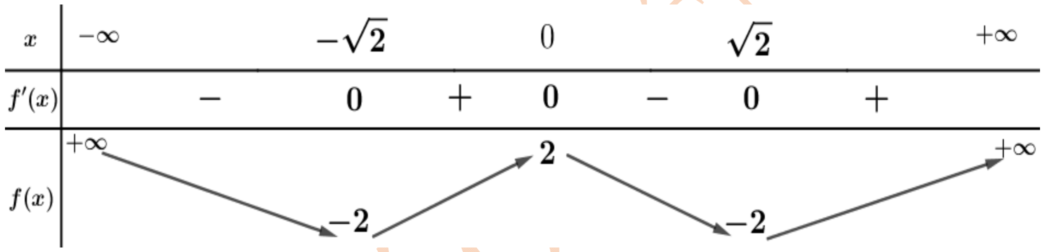
Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)$ đổi dấu từ $(-)$ sang $(+)$ khi đi qua nghiệm $x=3$ nên hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=3$

Dựa vào bảng biến thiên, giá trị cực tiểu của hàm số bằng -3 tại $x=3$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-\sqrt{2};0)$. **D.** $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Lời giải:

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\sqrt{2};0)$ và $(\sqrt{2};+\infty)$

Câu 15. Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(x-1)=3$.

A. $x=9$. **B.** $x=7$. **C.** $x=8$. **D.** $x=10$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=(1;+\infty)$.

Ta có: $\log_2(x-1)=3 \Leftrightarrow x-1=2^3 \Leftrightarrow x=9$

Câu 16. Nếu $\int_1^6 f(x)\mathrm{d}x=9$ thì $\int_1^6 [3f(x)+1]\mathrm{d}x$ bằng

A. 33. **B.** 32. **C.** 27. **D.** 28.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_1^6 [3f(x)+x]\mathrm{d}x = 3\int_1^6 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^6 \mathrm{d}x = 3.9+5=32$.

Câu 17. Thể tích của khối hộp chữ nhật có độ dài các cạnh là a, $3a$, $5a$ bằng

A. $15a^2$. **B.** $15a^3$. **C.** $15a$. **D.** 15.

Lời giải

Chọn B

Thể tích của khối hộp chữ nhật là

$$V = a.3a.5a = 15a^3.$$

Câu 18. Tập xác định của hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Vì hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ là hàm số mũ nên có tập xác định là tập $\mathbb{R}$.

Câu 19. Diện tích mặt cầu có bán kính $2a$ là

A. $4\pi a^2$ **B.** $16\pi a^2$. **C.** $16a^2$. **D.** $\frac{4\pi a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích mặt cầu có bán kính $2a$ là $16\pi a^2$.

Câu 20. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1-x}{2x+1}$ là đường thẳng

A. $x = \frac{1}{2}$. **B.** $y = -\frac{1}{2}$. **C.** $y = \frac{1}{2}$. **D.** $x = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

+) Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

+) Ta có $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} y = \lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{1-x}{2x+1} = +\infty$.

Vậy đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng $x = -\frac{1}{2}$.

Câu 21. Với a là số thực dương tùy ý, $a^{\frac{4}{3}}$ bằng

A. $\sqrt[4]{a^3}$. **B.** $\sqrt[3]{a^4}$. **C.** $\frac{a^4}{a^3}$. **D.** a.

Lời giải

Chọn B

Với a là số thực dương tùy ý, $m,n\in\mathbb{Z}, n\ge 2$ thì $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Do đó $a^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{a^4}$.

Câu 22. Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 3a^2$ và thể tích $V = 3a^3$. Chiều cao của khối chóp đã cho bằng

A. $3a$. **B.** a. **C.** $\frac{1}{3}a$. **D.** $9a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $V = \frac{1}{3}B.h \Rightarrow h = \frac{3V}{S} = \frac{3.3a^3}{3a^2} = 3a$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 5y - 7 = 0$. Véctơ nào dưới đây là một véctơ pháp tuyến của (P)?

A. $\overrightarrow{n_1} = (2;5;-7)$. **B.** $\overrightarrow{n_2} = (2;5;0)$. **C.** $\overrightarrow{n_3} = (2;5;7)$. **D.** $\overrightarrow{n_4} = (-2;-5;7)$.

Lời giải

Chọn B

Véc tơ pháp tuyến của $(P): 2x + 5y - 7 = 0$ là: $\overrightarrow{n_2} = (2;5;0)$.

Câu 24. Cho khối trụ có bán kính đáy $r = 7$ và thể tích $V = 196\pi$. Chiều cao của khối trụ đã cho bằng

A. $h = 4\pi$. **B.** $h = 2\pi$. **C.** $h = 2$. **D.** $h = 4$.

Lời giải

Chọn D

Gọi h là chiều cao khối trụ. Ta có $V = \pi r^2 h = \pi 7^2 h = 196\pi \Rightarrow h = 4$.

Câu 25. Cho hai số phức $z = 3 - 2i$, $\mathrm{w} = -5 + 3i$. Số phức $z - \overline{\mathrm{w}}$ bằng

A. $-2 + i$. **B.** $8 + i$. **C.** $-2 - 5i$. **D.** $-2 + 5i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\overline{w} = -5 - 3i$.

$\Rightarrow z - \overline{w} = (3 - 2i) - (-5 - 3i) = 8 + i$.

Câu 26. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$,và $u_2 = -9$. Số hạng thứ tư của cấp số nhân bằng

A. 81. **B.** -81. **C.** 27. **D.** -27.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $u_2 = u_1.q \Rightarrow q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{-9}{3} = -3$.

Suy ra: $u_4 = u_1.q^3 = 3.(-3)^3 = -81$.

Câu 27. Hàm số $F(x)=e^x-\sin x$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây

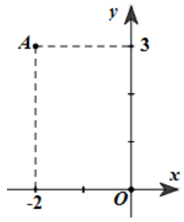
A. $f(x)=e^x+\cos x$. **B.** $f(x)=e^x-\cos x$. **C.** $f(x)=e^x+\sin x$. **D.** $f(x)=e^x-\sin x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $F'(x)=(e^x-\sin x)'=e^x-\cos x=f(x)$.

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ, điểm A (như hình vẽ) là điểm biểu diễn cho số phức nào dưới đây?



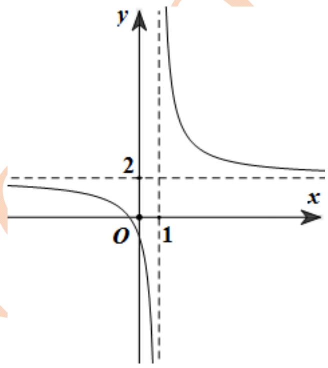
A. $z_2=2+3i$. **B.** $z_3=2-3i$. **C.** $z_4=-2-3i$. **D.** $z_1=-2+3i$.

Lời giải

Chọn D

Ta có điểm $A(-2;3)$ là điểm biểu diễn cho số phức $z=a+bi=-2+3i$.

Câu 29. Biết hàm số $y=\dfrac{2x+a}{x-1}$ (a là số thực cho trước, $a\neq -2$ có đồ thị như hình bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $y'<0,\forall x\neq 1$. **B.** $y'>0,\forall x\neq 1$. **C.** $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$. **D.** $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ nên loại đáp án C và D

Dạng đồ thị đi xuống thì $y'<0$ nên loại đáp án B

Vậy chọn A ($y'<0,\forall x\neq 1$)

Câu 30. Từ một hộp chứa 20 thẻ được đánh số từ 1 đến 20, lấy ngẫu nhiên 1 thẻ. Xác suất để lấy được thẻ ghi số lẻ và chia hết cho 3 bằng

A. $\dfrac{3}{10}$. **B.** $\dfrac{3}{20}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Lấy ngẫu nhiên 1 thẻ từ 20 thẻ có $n(\Omega)=C_{20}^1=20$

Gọi A là biến cố: "Lấy được thẻ ghi số lẻ và chia hết cho 3"

$\Rightarrow A=\{3;9;15\}$

Suy ra $n(A)=3$

Xác suất biến cố A là $P(A)=\dfrac{3}{20}$.

Câu 31. Tích của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ trên đoạn $[1;\ 3]$ bằng

A. $\dfrac{52}{3}$. **B.** 20. **C.** 6. **D.** $\dfrac{65}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$y'=1-\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x^2-4}{x^2}; y'=0\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\in[1;\ 3]\\x=-2\notin[1;\ 3]\end{array}\right.$

Ta có: $f(1)=5; f(2)=4; f(3)=\dfrac{13}{3}$.

Vậy $\max\limits_{[1;3]} y=5;\ \min\limits_{[1;3]} y=4\Rightarrow \max\limits_{[1;3]} y.\min\limits_{[1;3]} y=20$.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua $M(1;2;-3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P):-x+2y+z+1=0$. có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$.

C. $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z+3}{1}$.

Lời giải

Chọn C

$(P):-x+2y+z+1=0$. có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(-1;2;1)$.

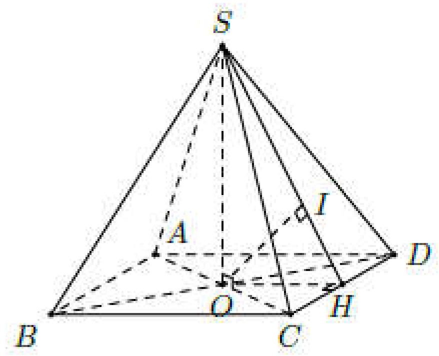
Đường thẳng Δ đi qua $M(1;2;-3)$ nhận vectơ $\vec{n}(-1;2;1)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{1}$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh $2a$, $SA=SB=SC=SD=a\sqrt{5}$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm CD.

Trong (SOH), kẻ $OI \perp SH$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp SO \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOH) \Rightarrow CD \perp OI$.

Mặt khác $OI \perp SH$ nên $OI \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(O,(SCD)) = OI$.

Ta có $BD = 2a\sqrt{2}$; $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{5a^2 - 2a^2} = a\sqrt{3}$; $OH = a$.

Do O là trung điểm BD nên ta có:

$\mathrm{d}(B,(SCD)) = 2\mathrm{d}(O,(SCD)) = 2.OI = \dfrac{2.SO.OH}{\sqrt{SO^2 + OH^2}} = a\sqrt{3}$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(6;-2;3)$ và điểm $B(-2;8;-3)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

A. $4x - 5y + 3z - 7 = 0$.
B. $2x + 3y - 14 = 0$.
C. $2x + 3y + 14 = 0$.
D. $4x - 5y + 3z + 7 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-8;10;-6) = -2(4;-5;3)$. Gọi M là trung điểm AB, ta có $M(2;3;0)$.

Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB. Ta có (P) đi qua $M(2;3;0)$ và nhận vector $u = (4;-5;3)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $4(x-2) - 5(y-3) + 3z = 0$ hay $4x - 5y + 3z + 7 = 0$.

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $(3-4i)\overline{z} + 10 = 5i$. Môđun của số phức $z - i$ là

A. -2.
B. 5.
C. 3.
D. 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(3-4i)\overline{z} = -10 + 5i \Rightarrow \overline{z} = \dfrac{-10+5i}{3-4i} = -2 - i$. Suy ra $z = -2 + i$

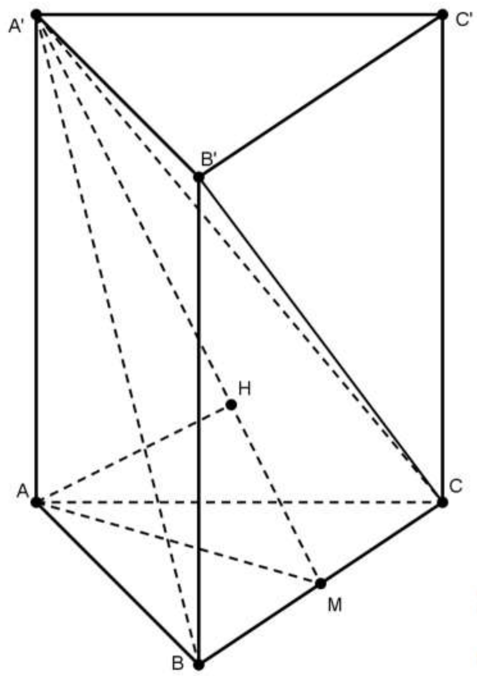
Do đó $z - i = -2$. Vậy $|z - i| = 2$.

Câu 36. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. Góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C$ bằng

A. 30°.
B. 90°.
C. 45°.
D. 60°.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm BC. Tam giác ABC đều, suy ra $AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $BC\perp(A'AM)\Rightarrow BC\perp A'M$.

Vẽ $AH\perp A'M$, suy ra $AH\perp(A'BC)$. Khi đó $AH=d\left(A,(A'BC)\right)=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Tam giác $A'AM$ vuông tại A có AH là đường cao, ta có $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{1}{AA'^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{AA'^2}=\dfrac{1}{AH^2}-\dfrac{1}{AM^2}=\dfrac{5}{3a^2}-\dfrac{4}{3a^2}=\dfrac{1}{3a^2}$. Suy ra $BB'=AA'=a\sqrt{3}$.

Vì $AA'//BB'$ nên $\left(\widehat{AA',B'C}\right)=\left(\widehat{BB',B'C}\right)=\widehat{BB'C}$. Ta có $\tan\widehat{BB'C}=\dfrac{BC}{BB'}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{BB'C}=30^\circ$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C$ bằng 30°.

Câu 37. Biết $\log_6 3=a,\log_6 5=b$. Tính $\log_3 5$ theo a,b

A. $\dfrac{b}{a}$. **B.** $\dfrac{b}{1+a}$. **C.** $\dfrac{b}{1-a}$. **D.** $\dfrac{b}{a-1}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_6 3=a\Leftrightarrow 3=6^a,\log_6 5=b\Leftrightarrow 5=6^b\Rightarrow\log_3 5=\log_{6^a}6^b=\dfrac{b}{a}$.

Câu 38. Nếu $\int\limits_0^1\left[3f(x)-2\right]dx=13$ thì $\int\limits_0^1 f(x)dx$ bằng:

A. -5. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 15.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_0^1\left[3f(x)-2\right]dx=13\Leftrightarrow 3.\int\limits_0^1 f(x)dx-2=13\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f(x)dx=5$.

Câu 39. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=|1+x|-|1-x|$ trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $F(1)=3$. Tính tổng $F(0)+F(2)+F(-3)$.

A. 8. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 10.

Lời giải:

Chọn C

Bảng khử dấu giá trị tuyệt đối:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$1-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		-2	$\vert$	$2x$	$\vert$	2	

Ta có: $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = F(2)-F(1)=F(2)-3$ mà $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 2\mathrm{d}x=2$ nên $F(2)=5$.

$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=F(1)-F(0)=3-F(0)$ mà $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 2x\mathrm{d}x=x^2\Big|_0^1=1$ nên $F(0)=2$.

$\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=F(0)-F(-1)=2-F(-1)$ mà $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 2x\mathrm{d}x=x^2\Big|_{-1}^0=-1$ nên $F(-1)=3$.

$\int_{-3}^{-1} f(x)\mathrm{d}x=F(-1)-F(-3)=3-F(-3)$ mà $\int_{-3}^{-1} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-3}^{-1} -2\mathrm{d}x=-4$ nên $F(-3)=7$.

Vậy $F(0)+F(2)+F(-3)=2+5+7=14$.

Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x+3)+2}\cdot\left(3^{x^3}-3^{-x}\cdot 9^{4-3x}\right)<0$?

A. 10. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

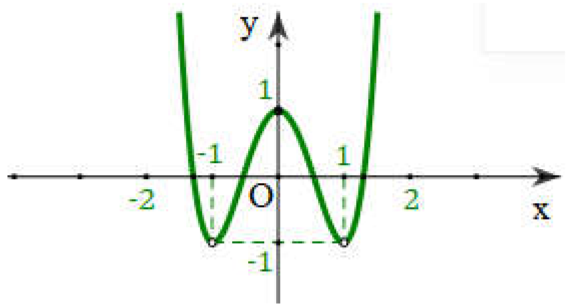
$\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x+3)+2}\cdot\left(3^{x^3}-3^{-x}\cdot 9^{4-3x}\right)<0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}(x+3)+2>0\\ 3^{x^3}-3^{-x}\cdot 9^{4-3x}<0\\ x>-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3<4\\ 3^{x^3}<3^{-x+8-6x}\\ x>-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<1\\ x^3<-7x+8\\ x>-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<1\\ x^3+7x-8<0\\ x>-3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x<1\\ x>-3\end{cases}\Leftrightarrow -3<x<1.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của x thỏa mãn.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên R có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $f(f(x))=1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 5. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=a\in\left(-2;-1\right) \\ f\left(x\right)=0 \\ f\left(x\right)=c\in\left(1;2\right) \end{array}\right.$.

Phương trình $f\left(x\right)=a\in\left(-2;-1\right)$: có 0 nghiệm.

Phương trình $f\left(x\right)=0$: có 4 nghiệm.

Phương trình $f\left(x\right)=c\in\left(1;2\right)$: có 2 nghiệm.

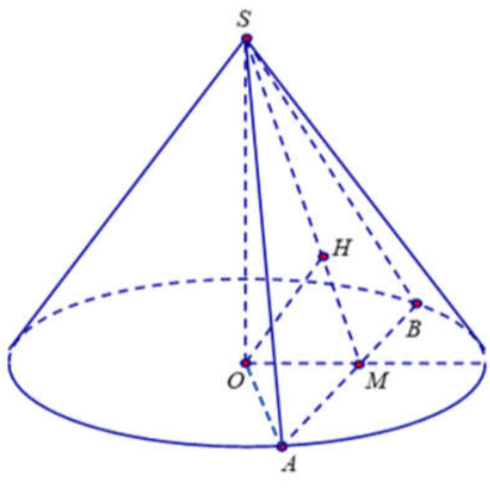
Vậy phương trình $f\left(2-f\left(x\right)\right)=0$ có 6 nghiệm.

Câu 42. Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O, $SO=3a$. Thiết diện qua đỉnh của hình nón là ΔSAB có diện tích bằng $18a^2$. Khoảng cách từ O đến $\left(SAB\right)$ là a. Tính bán kính của hình tròn đáy.

A. $\dfrac{a\sqrt{530}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{530}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{494}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{494}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB khi đó $OM\perp AB$. Suy ra $AB\perp\left(SOM\right)$.

Kẻ $OH\perp SM\Rightarrow OH\perp\left(SAB\right)$. Khi đó $OH=d\left(O;\left(SAB\right)\right)=a$.

Ta có: $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{SO^2}+\dfrac{1}{OM^2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{OM^2}=\dfrac{1}{OH^2}-\dfrac{1}{SO^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{9a^2}=\dfrac{8}{9a^2}$. Suy ra $OM=\dfrac{3a}{\sqrt{8}}$.

Từ đó: $SM=\sqrt{SO^2+OM^2}=\sqrt{9a^2+\left(\dfrac{3a}{\sqrt{8}}\right)^2}=\dfrac{9a}{\sqrt{8}}$.

Xét tam giác MOA vuông tại M : $MA=\sqrt{OA^2-OM^2}=\sqrt{OA^2-\dfrac{9a^2}{8}}$.

$S_{\Delta SAB}=18a^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}.AB.SM=18a^2 \Leftrightarrow MA.SM=18a^2 \Leftrightarrow \sqrt{OA^2-\dfrac{9a^2}{8}}.\dfrac{9a}{\sqrt{8}}=18a^2 \Leftrightarrow OA=\dfrac{a\sqrt{530}}{4}$.

Câu 43. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(2m+1)z+4m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0|=2$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $z^2-2(2m+1)z+4m^2=0$ $(*)$. Ta có $\Delta'=(2m+1)^2-4m^2=4m+1$.

+ Trường hợp 1: Nếu $4m+1\ge 0 \Leftrightarrow m\ge -\dfrac{1}{4}$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm thực nên

$$|z_0|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0=2 \\ z_0=-2 \end{array}\right..$$

Với $z_0=2$ thay vào phương trình $(*)$ ta được:

$$2^2-2(2m+1).2+4m^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=0 \end{array}\right. \text{(thoả } m\ge -\tfrac{1}{4}\text{)}.$$

Với $z_0=-2$ thay vào phương trình $(*)$ ta được:

$(-2)^2+4(2m+1)+4m^2=0$, phương trình vô nghiệm.

+ Trường hợp 2: Nếu $4m+1<0 \Leftrightarrow m<-\dfrac{1}{4}$ thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phức là:

$$z=2m+1+i\sqrt{-4m-1} \text{ và } z=2m+1-i\sqrt{-4m-1}.$$

Khi đó $|z_0|=2 \Leftrightarrow (2m+1)^2-4m-1=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \end{array}\right.$, kết hợp với $m<-\dfrac{1}{4}$ ta được $m=-1$.

Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 44. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=3$ và $|w|=1$. Khi $|iz+\overline{w}-3-4i|$ đạt giá trị lớn nhất, $|z-w|$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{106}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{26}}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{131}}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $|z|=3 \Leftrightarrow |iz|=3 \Leftrightarrow |(iz-3-4i)+3+4i|=3$.

Đặt $iz-3-4i=w_1 \Rightarrow |w_1+3+4i|=3$.

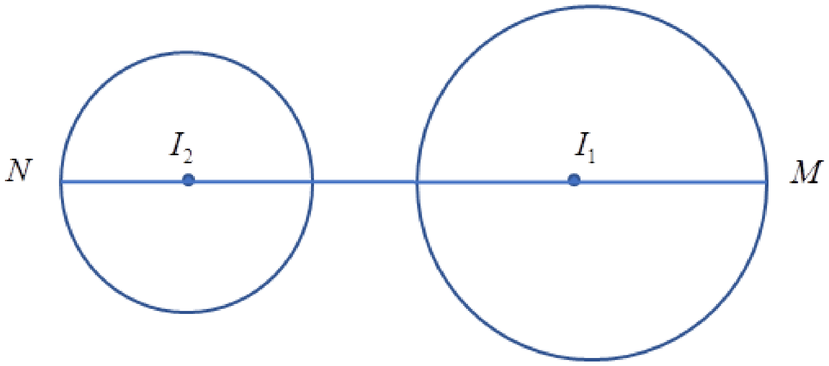
$M(w_1)$ thuộc đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-3;-4)$ và bán kính $R_1=3$.

$|w|=1 \Leftrightarrow |\overline{w}|=1 \Leftrightarrow |-\overline{w}|=1$.

Đặt $w_2 = -\overline{w} \Rightarrow |w_2| = 1$.

$N(w_2)$ thuộc đường tròn (C_2) có tâm $I_2(0;0)$ và bán kính $R_2 = 1$.

$I_1I_2 = 5 > 4 = R_1 + R_2$ suy ra (C_1) và (C_2) không cắt nhau.



$\Rightarrow \text{Max}\left|iz + \overline{w} - 3 - 4i\right| = \text{Max}\left|(iz - 3 - 4i) - (-\overline{w})\right| = \text{Max}\left|w_1 - w_2\right| = \text{Max}MN = I_1I_2 + (R_1 + R_2) = 9$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{NI_2}{I_2I_1} = \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{MI_1}{I_1I_2} = \dfrac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\overrightarrow{NI_2} = \overrightarrow{I_2I_1} \\ 5\overrightarrow{MI_1} = 3\overrightarrow{I_1I_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right) \\ M\left(-\dfrac{24}{5};\dfrac{-32}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_2 = -\overline{w} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i \\ w_1 = iz - 3 - 4i = -\dfrac{12}{5} + \dfrac{9}{5}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i \\ z = -\dfrac{12}{5} + \dfrac{9}{5}i \end{cases}$$

Vậy $|z - w| = \left|\left(-\dfrac{12}{5} + \dfrac{9}{5}i\right) - \left(-\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i\right)\right| = \dfrac{\sqrt{106}}{5}$.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$. Đường thẳng d' đối xứng với d qua mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z+1}{7}$.

B. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{7}$.

C. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{7}$.

D. $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+1}{7}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d qua $A(0;-1;2)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\vec{a} = (1;2;-1)$.

Mặt phẳng (P) có một véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;1;1)$.

Điểm $B(1;1;1)$ là giao điểm của (P) và d.

Gọi $H(x_H;y_H;z_H)$ là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P).

Khi đó

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} = k\vec{n} \\ H \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = k \\ y_H + 1 = k \\ z_H - 2 = k \\ x_H + y_H + z_H = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = k = \dfrac{2}{3} \\ y_H = -\dfrac{1}{3} \\ z_H = \dfrac{8}{3}. \end{cases}$$

Vậy $H\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3};\dfrac{8}{3}\right)$.

Gọi A' là hình chiếu của A qua mặt phẳng (P), suy ra H là trung điểm của AA'. Do đó $A'\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{10}{3}\right)$.

Đường thẳng d' qua $B(1;1;1)$ và có một véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{A'B}=\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{7}{3}\right)=-\frac{1}{3}(1;-2;7)$.

Phương trình đường thẳng d' là $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{7}$.

Câu 46. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ với a,b,c,d là các số thực. Biết hàm số $g\left(x\right)=f'\left(x\right)+f''\left(x\right)+f'''\left(x\right)$ có hai giá trị cực trị là -1 và 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{44-2f'\left(x\right)}{g\left(x\right)+2}$ và $y=-2$ bằng

A. $\ln 3$. **B.** $4\ln 3$. **C.** $6\ln 2$. **D.** $3\ln 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g\left(x\right)=f'\left(x\right)+f''\left(x\right)+f'''\left(x\right)$.

Suy ra: $g'\left(x\right)=f''\left(x\right)+f'''\left(x\right)+24$.

Xét phương trình

$$\frac{44-2f'\left(x\right)}{g\left(x\right)+2}=-2\Leftrightarrow 2g\left(x\right)-2f'\left(x\right)+48=0$$

$$\Leftrightarrow 2g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\end{array}\right.$$

Ta có diện tích bằng

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{44-2f'\left(x\right)}{g\left(x\right)+2}+2\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{2g\left(x\right)-2f'\left(x\right)+48}{g\left(x\right)+2}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{2g'\left(x\right)}{g\left(x\right)+2}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|2\ln\left|g\left(x\right)+2\right|\right|\Big|_{x_1}^{x_2}$$

$=2\left|\ln\left|g\left(x_2\right)+2\right|-\ln\left|g\left(x_1\right)+2\right|\right|=2\left|\ln 8\right|=6\ln 2$.

Câu 47. Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a tồn tại đúng 8 số thực x thỏa mãn $\left(x^4-4x^2-3+\log_4 a\right)\left(a.2^{2x^4-8x^2-3}+1\right)=-3$?

A. 1024. **B.** 1028. **C.** 1023. **D.** 1026.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=x^4-4x^2+\log_4 a\Leftrightarrow x^4-4x^2=t-\log_4 a=t-\frac{1}{2}\log_2 a$.

Phương trình trở thành $\left(t-3\right)\left(2^{2t-3}+1\right)=-3\Leftrightarrow t-3=-\dfrac{3}{2^{2t-3}+1}\Leftrightarrow g\left(t\right)=t-3+\dfrac{3}{2^{2t-3}+1}=0$ (*).

Có $\Leftrightarrow g'(t)=1-\dfrac{6.2^{2t-3}\ln 2}{\left(2^{2t-3}+1\right)^2}=0$ có đúng 2 nghiệm nên (*) có tối đa 3 nghiệm. Nhận thấy

$g(1)=g\left(\dfrac{3}{2}\right)=g(2)=0$ do đó (*) $\Leftrightarrow t=1$; $t=\dfrac{3}{2}$; $t=2$.

Vậy $\begin{cases} x^4-4x^2+\log_4 a=1 \\ x^4-4x^2+\log_4 a=\dfrac{3}{2} \\ x^4-4x^2+\log_4 a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 a-1=4x^2-x^4 \\ \log_4 a-\dfrac{3}{2}=4x^2-x^4 \\ \log_4 a-2=4x^2-x^4 \end{cases}$.

Để ý ba đường thẳng $y=\log_4 a-1$; $y=\log_4 a-\dfrac{3}{2}$; $y=\log_4 a-2$ đôi một song song

Hàm số $g(x)=4x^2-x^4$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Vậy phương trình có đúng 8 nghiệm khi và chỉ khi

+) TH1: (1) vô nghiệm, (2), (3) mỗi phương trình có 4 nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 a-1>4 \\ 0<\log_4 a-\dfrac{3}{2}<4 \\ 0<\log_4 a-2<4 \end{cases} \Leftrightarrow 5<\log_4 a<5{,}5 \Leftrightarrow 1024<a<2048 \Rightarrow a\in\{1025;...;2047\}$.

+) TH2: (1) có 4 nghiệm và (2); (3) mỗi phương trình có 2 nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<\log_4 a-1<4 \\ \log_4 a-\dfrac{3}{2}<0 \\ \log_4 a-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow 1<\log_4 a<1{,}5 \Leftrightarrow 4<a<8 \Rightarrow a\in\{5;6;7\}$.

+) TH3: (1) có hai nghiệm, (2) có 4 nghiệm và (3) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 a-1=4 \\ 0<\log_4 a-\dfrac{3}{2}<4 \\ \log_4 a-2<0 \end{cases}$ (vô nghiệm).

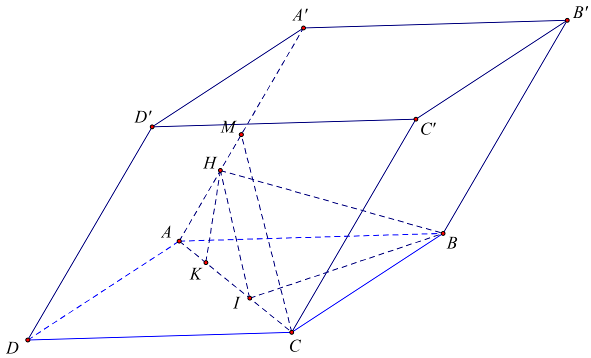
Vậy có tất cả $2047-1025+1+3=1026$ số nguyên thỏa mãn.

Câu 48. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=\sqrt{6}$, $AD=\sqrt{3}$, $A'C=3$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $(AA'C'C)$, $(AA'B'B)$ tạo với nhau góc α thỏa mãn $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. $V=8$. **B.** $V=12$. **C.** $V=10$. **D.** $V=6$.

Lời giải

Chọn A



Từ B kẻ $BI \perp AC \Rightarrow BI \perp (AA'C'C)$.

Từ I kẻ $IH \perp AA' \Rightarrow \widehat{((AA'C'C),(AA'B'B))} = \widehat{BHI}$.

Theo giải thiết ta có $AC = 3 \Rightarrow BI = \dfrac{AB.BC}{AC} = \sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông BIH có $\tan\widehat{BHI} = \dfrac{BI}{IH} \Leftrightarrow IH = \dfrac{BI}{\tan\widehat{BHI}} \Leftrightarrow IH = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Xét tam giác vuông ABC có $AI.AC = AB^2 \Rightarrow AI = \dfrac{AB^2}{AC} = 2$.

Gọi M là trung điểm của AA', do tam giác $AA'C$ cân tại C nên $CM \perp AA' \Rightarrow CM \,//\, IH$.

Do $\dfrac{AI}{AC} = \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{AH}{AA'} = \dfrac{1}{3}$.

Trong tam giác vuông AHI kẻ đường cao HK ta có $HK = \dfrac{4\sqrt{2}}{9} \Rightarrow$ chiều cao của lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $h = 3HK = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.AD.h = \sqrt{6}\sqrt{3}\dfrac{4\sqrt{2}}{3} = 8$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (α): $3x - y + 2z - 5 = 0$ và hai điểm $A(8;-3;3)$; $B(11;-2;13)$. Gọi M; N là hai điểm thuộc mặt phẳng (α) sao cho $MN = \sqrt{6}$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ là

A. $2\sqrt{33}$. **B.** $3\sqrt{33}$. **C.** $4\sqrt{33}$. **D.** $5\sqrt{33}$.

Lời giải

Chọn C

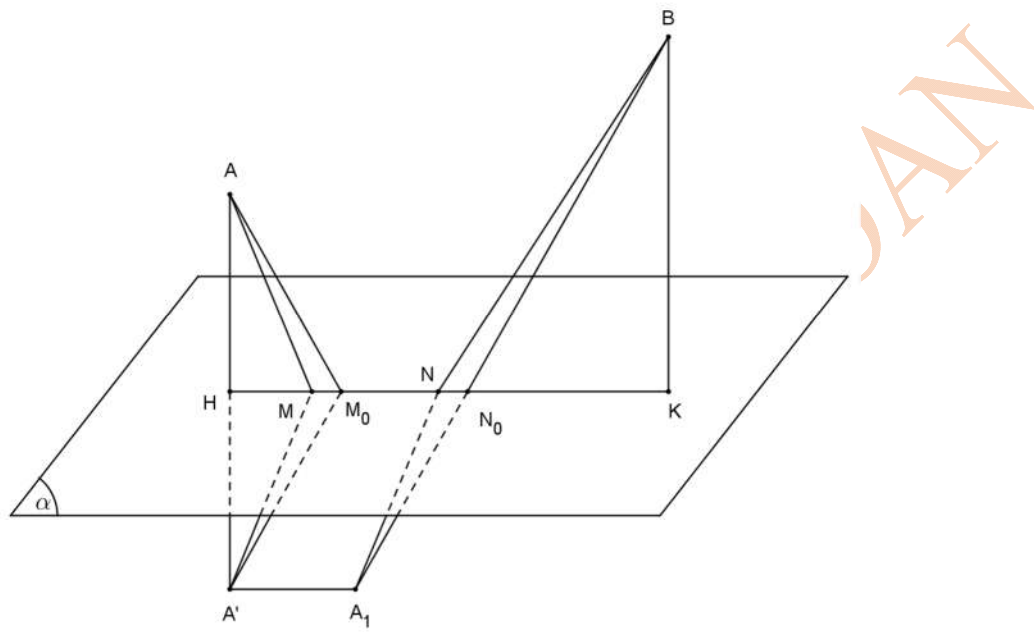
Dễ thấy hai điểm A; B nằm cùng phía đối với mặt phẳng (α).

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (α).

$\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng AA' là $\begin{cases} x = 8 + 3t_1 \\ y = -3 - t_1 \\ z = 3 + 2t_1 \end{cases}$.

Tọa độ giao điểm H của AA' và (α) thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x = 8+3t_1 \\ y = -3-t_1 \\ z = 3+2t_1 \\ 3x-y+2z-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-2 \\ x=2 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{cases}$.

$\Rightarrow H(2;-1;-1)$ là trung điểm của $AA' \Rightarrow A'(-4;1;-5)$.



Gọi K là hình chiếu của B lên mặt phẳng (α).

$\Rightarrow$Phương trình đường thẳng BK là $\begin{cases} x = 11+3t_2 \\ y = -2-t_2 \\ z = 13+2t_2 \end{cases}$.

Tọa độ điểm K thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x = 11+3t_2 \\ y = -2-t_2 \\ z = 13+2t_2 \\ 3x-y+2z-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1=-4 \\ x=-1 \\ y=2 \\ z=5 \end{cases} \Rightarrow K(-1;2;5)$.

Lấy điểm A_1 sao cho $\overrightarrow{A'A_1} = \overrightarrow{MN}$.

Ta có: $AM + BN = A'M + BN = A_1N + BN \ge A_1B$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow N = A_1B \cap (\alpha)$.

Do $\overrightarrow{A'A_1} = \overrightarrow{MN}$ nên $A'A_1 = MN = \sqrt{6} \Rightarrow A_1$ nằm trên đường tròn tâm A', bán kính bằng $\sqrt{6}$ nằm trên mặt phẳng song song với mặt phẳng (α).

Do đó A_1B nhỏ nhất $\Leftrightarrow \overrightarrow{A'A_1}$ cùng hướng với $\overrightarrow{HK}$.

Khi đó $\overrightarrow{A'A_1} = \overrightarrow{MN} = \dfrac{MN}{HK}.\overrightarrow{HK} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{HK} \Rightarrow A_1(-5;2;-3)$.

Do đó $AM + BN = A'M + BN = A_1N + BN \ge A_1B = 4\sqrt{33}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng $4\sqrt{33}$.

Câu 50. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $g(x) = f\left(\left|x^2 - 2x - m\right|\right)$ có 9 điểm cực trị?

A. 4. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $g(x) = f\left(\left|x^2 - 2x - m\right|\right) = f\left(\sqrt{\left(x^2 - 2x - m\right)^2}\right)$ có:

$g'(x) = \dfrac{(2x-2)\left(x^2 - 2x - m\right)}{\left|x^2 - 2x - m\right|} f'\left(\left|x^2 - 2x - m\right|\right) \Rightarrow g'(x) = 0$ hoặc $g'(x)$ không xác định khi

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - m = 0 \\ x^2 - 2x - m = \pm 1 \\ x^2 - 2x - m = \pm 2 \\ 2x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x = m \\ x^2 - 2x - 2 = m \\ x^2 - 2x - 1 = m \\ x^2 - 2x + 1 = m \\ x^2 - 2x + 2 = m \\ x - 1 = 0 \end{array}\right. \quad (1).$$

Yêu cầu bài toán tương đương (1) có 9 nghiệm phân biệt là các nghiệm đơn hoặc bội lẻ.

Xét bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x^2 - 2x + 2$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$x^2 - 2x + 1$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$x^2 - 2x$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$
$x^2 - 2x - 1$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
$x^2 - 2x - 2$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên trên (1) có 9 nghiệm bội lẻ khi và chỉ khi $m \in (0;1]$.

DIỄN ĐÀN GIÁO VIÊN TOÁN

ĐỀ PHÁT TRIỂN SỐ 3

PHÁT TRIỂN ĐỀ THI TN THPT QUỐC GIA LẦN 1

NĂM HỌC 2020 – 2021

MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)

ĐỀ BÀI

Câu 1. Tìm nghiệm của phương trình $2^{x-2}=8^{100}$

A. $x=204$. **B.** $x=102$. **C.** $x=302$. **D.** $x=202$.

Câu 2. Cho hai tích phân $\int_{-2}^{5} f(x)\mathrm{d}x=8$ và $\int_{5}^{-2} g(x)\mathrm{d}x=3$. Tính $I=\int_{-2}^{5}\left[f(x)-4g(x)-1\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=13$. **B.** $I=-11$. **C.** $I=27$. **D.** $I=5$.

Câu 3. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+13=0$ có diện tích là:

A. 8π. **B.** $\dfrac{4\pi}{3}$. **C.** π. **D.** 4π.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $A(3;-2;4)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;6)$. Phương trình của d là:

A. $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-4}{6}$. **B.** $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+4}{6}$.

C. $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-4}{6}$. **D.** $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-6}{4}$.

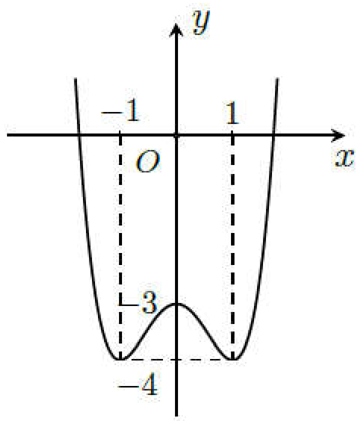
Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	||	−	0	−	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 6. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên dưới?



A. $y=x^4-2x^2+3$. **B.** $y=x^4-2x^2-3$. **C.** $y=-x^4-4x^2-1$. **D.** $y=x^3-3x-1$.

Câu 7. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-5}$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 5. **D.** -5.

Câu 8. Cho tập A gồm n phần tử $(n\ge 1)$, số hoán vị của tập A là

A. n^2. **B.** 2^n. **C.** $n!$. **D.** $(n!)^2$.

Câu 9. Phần ảo của số phức $z=2-i$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 10. Đạo hàm của hàm số $y=(2x+1)^{-\frac{1}{3}}$ trên tập xác định là

A. $2(2x+1)^{-\frac{1}{3}}\ln(2x+1)$.

B. $(2x+1)^{-\frac{1}{3}}\ln(2x+1)$.

C. $-\frac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{4}{3}}$.

D. $-\frac{1}{3}(2x+1)^{-\frac{4}{3}}$.

Câu 11. Tìm nguyên hàm của hàm số $\int\left(x^2+\frac{3}{x}-2\sqrt{x}\right)dx$ với $x>0$.

A. $\frac{x^3}{3}+3\ln|x|+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

B. $\frac{x^3}{3}+3\ln|x|-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

C. $\frac{x^3}{3}-3\ln|x|-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

D. $\frac{x^3}{3}+3\ln x-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;1;0)$ và $\overrightarrow{MN}=(-1;-1;0)$. Tìm tọa độ của điểm N.

A. $N(4;2;0)$. **B.** $\mathrm{N}(-4;-2;0)$. **C.** $N(-2;0;0)$. **D.** $N(2;0;0)$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x=0$. **B.** $(0;-3)$. **C.** $y=-3$. **D.** $x=-3$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 15. Tìm nghiệm của phương trình $\log_9(x+1)=\frac{1}{2}$.

A. $x=-4$. **B.** $x=2$. **C.** $x=4$. **D.** $x=\frac{7}{2}$

Câu 16. Nếu $\int_1^4 f(x)dx=11$ thì $\int_4^1 3f(x)dx$ bằng

A. 33. **B.** 44. **C.** -44. **D.** -33.

Câu 17. Thể tích của khối lập phương là $8a^3$. Độ dài của cạnh khối lập phương là

A. $512a^3$. **B.** $64a^2$. **C.** $64a$. **D.** $2a$.

Câu 18. Tập xác định của hàm số $y=\pi^x$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 19. Diện tích mặt cầu có đường kính $2a$ là

A. $4\pi a^2$ **B.** $16\pi a^2$. **C.** πa^2. **D.** $\frac{4\pi a^2}{3}$.

Câu 20. Biết đường tiệm cận đứng $x=a$ và tiệm cận ngang $y=b$ của đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{3-x}$. Khi đó tổng $a+b$ bằng:

A. 5. **B.** $\frac{11}{3}$. **C.** $\frac{7}{3}$. **D.** 1.

Câu 21. Với a là số thực dương tuỳ ý, $2\log_4 \frac{8}{a}$ bằng

A. $16\log_4 \frac{1}{a}$. **B.** $-6\log_2 \frac{2}{a}$. **C.** $3+\log_2 a$. **D.** $3-\log_2 a$.

Câu 22. Cho khối chóp có thể tích $V = 3a^3$ và chiều cao $h = a$. Diện tích đáy của khối chóp đã cho bằng

A. $3a^2$. **B.** a^2. **C.** $9a^2$. **D.** $\frac{1}{3}a^2$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 6 = 0$. Véctơ nào dưới đây là một véctơ pháp tuyến của (P)?

A. $\overrightarrow{n_1} = (1;3;2)$. **B.** $\overrightarrow{n_2} = (-3;2;-6)$. **C.** $\overrightarrow{n_3} = (-1;3;-2)$. **D.** $\overrightarrow{n_4} = (1;-3;-2)$.

Câu 24. Cho hình trụ có bán kính đáy $r = 6$ và chiều cao $h = 3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 108π. **B.** 36π. **C.** 18π. **D.** 54π.

Câu 25. Cho hai số phức $z = 2-3i$, $w = 1-i$. Mô đun của số phức $z+w$ bằng

A. 5. **B.** 25. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Câu 26. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1$,và $u_4 = 8$. Công bội của cấp số nhân bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 8. **D.** -8.

Câu 27. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 1$ và $F(0) = 2022$. Hàm số $F(x)$ là

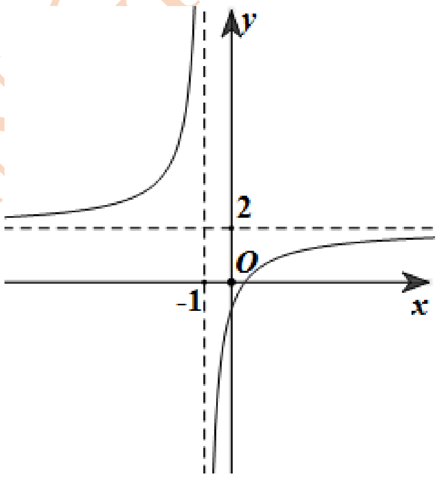
A. $F(x) = e^x + x + 2022$. **B.** $F(x) = e^x - x + 2022$.

C. $F(x) = e^x + x + 2021$. **D.** $F(x) = e^x - x + 2021$.

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ, số phức $z = 2021 - 2022i$ được biểu diễn bởi điểm nào dưới đây?

A. $M(2021;-2022)$. **B.** $N(2021;-2022i)$. **C.** $P(-1;i)$. **D.** $Q(2021;2022)$.

Câu 29. Biết hàm số $y = \frac{2x+b}{x+1}$ (b là số thực cho trước, $b \neq 2$ có đồ thị như hình bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **B.** $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **C.** $y' < 0, \forall x \neq -1$. **D.** $y' > 0, \forall x \neq -1$.

Câu 30. Từ một hộp có 10 viên bi đánh số từ 1 đến 10, lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 bi. Xác suất để lấy được 2 bi có tích hai số trên chúng là một số lẻ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{4}{9}$. **C.** $\frac{2}{9}$. **D.** $\frac{1}{9}$.

Câu 31. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 + \frac{3}{x}$ trên $(0;+\infty)$.

A. $m = 4\sqrt[4]{3}$. **B.** $m = 2\sqrt{3}$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = 2$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(3;-2;0)$, $B(4;-3;2)$, $C(1;2;-5)$, $D(2;1;3)$. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $\begin{cases} x=2-3t \\ y=1+t \\ z=3+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2-3t \\ y=1+t \\ z=3-2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-t \\ z=3+2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2-3t \\ y=1-t \\ z=3+2t \end{cases}$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{\sqrt{6}a}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;-2;5)$, mặt phẳng $(P):2x-y=0$ và mặt phẳng $(Q):x-y+3z+1=0$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với cả hai mặt phẳng (P), (Q) có phương trình là

A. $-2y+5z-7=0$. **B.** $3x+6y+z+7=0$. **C.** $3x+6y-z-7=0$. **D.** $-2y+5z+7=0$.

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $(z-1)(-2i)-8i=10$. Số phức liên hợp của $2z$ là

A. $6-10i$. **B.** $-6-10i$. **C.** $-6+10i$. **D.** $-3+5i$.

Câu 36. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và thể tích bằng $\dfrac{a^3}{4}$. Góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C$ bằng

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Câu 37. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^3b^2=32$. Giá trị của $3\log_2 a+2\log_2 b$ bằng

A. 5. **B.** 2. **C.** 32. **D.** 4.

Câu 38. Nếu $\int_{-1}^{1}\left[3f(x)-1\right]\mathrm{dx}=4$ thì $\int_{-1}^{1}\left[f(x)-x+1\right]\mathrm{dx}$ bằng:

A. 2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 6.

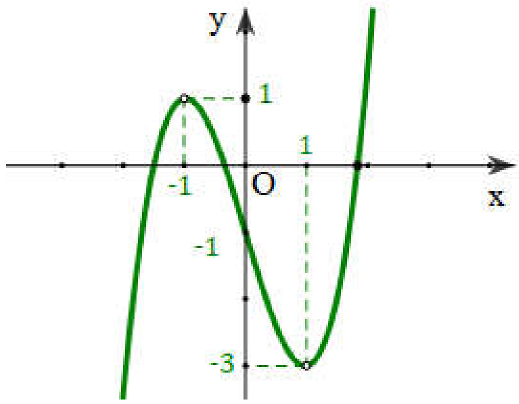
Câu 39. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \sin x & \text{khi } x\ge \dfrac{\pi}{4} \\ \cos x & \text{khi } x<\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{2}$. Giá trị của $F(0)-2F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** -1. **C.** $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\sqrt{3^{x^2+2}-27}\left[-\log_3\left(10-3^{x+1}\right)+1-x\right]\ge 0$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x))=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$. Tính số phần tử của tập S.



A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 42. Cắt hình nón $(\mathcal{N})$ đỉnh S cho trước bởi mặt phẳng qua trục của nó, ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2a\sqrt{2}$. Biết BC là một dây cung đường tròn của đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy của hình nón một góc $60°$. Tính diện tích tam giác SBC.

A. $\frac{4a^2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{4a^2\sqrt{2}}{9}$. **C.** $\frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{2a^2\sqrt{2}}{9}$.

Câu 43. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(2m+1)z+4m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0|=4$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 44. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=2$ và $|w|=1$. Khi $\left|z-(3i-4)\overline{w}+15+8i\right|$ đạt giá trị lớn nhất, $|z-w|$ bằng

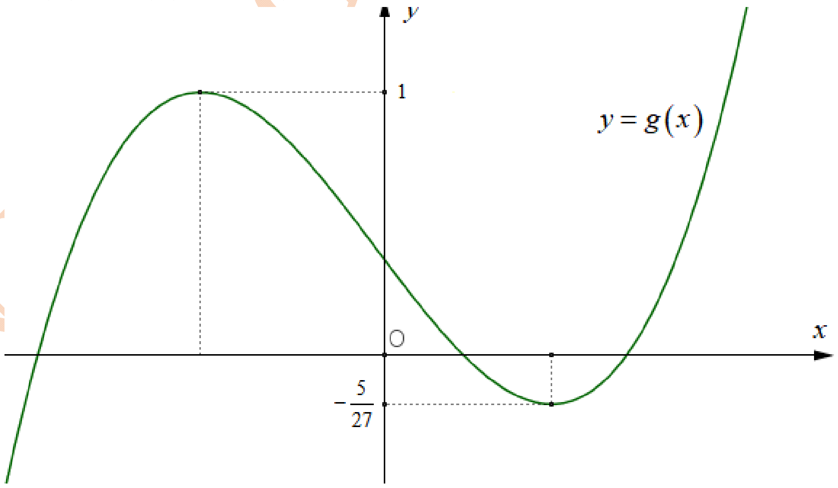
A. $\frac{\sqrt{2357}}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{37645}}{85}$. **C.** $\frac{\sqrt{1226}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{5421}}{17}$.

Câu 45. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P):3x+5y-z-2=0$. Gọi Δ là hình chiếu vuông góc của d lên (P). Phương trình tham số của Δ là

A. $\begin{cases} x=-62t \\ y=25t \\ z=2-61t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$. **B.** $\begin{cases} x=-8t \\ y=7t \\ z=-2+11t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

C. $\begin{cases} x=62t \\ y=-25t \\ z=-2+61t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$. **D.** $\begin{cases} x=-8t \\ y=7t \\ z=2+11t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=x^3+f(x)+f'(x)+f''(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)+x^3-3x^2+1}{g(x)+1}$ và $y=1$ bằng

A. $\ln 3$. **B.** $\ln\frac{22}{5}$. **C.** $\ln\frac{44}{27}$. **D.** $\ln\frac{27}{11}$.

Câu 47. Có bao nhiêu số nguyên a, $(2\le a\le 2021)$ để có ít nhất 5 số nguyên $5x$ thỏa mãn $a^{-x}+\frac{1}{2}\le 2^{-x}+\frac{1}{a}$

A. 1892. **B.** 125. **C.** 127. **D.** 1893.

Câu 48. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy góc $30°$ và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

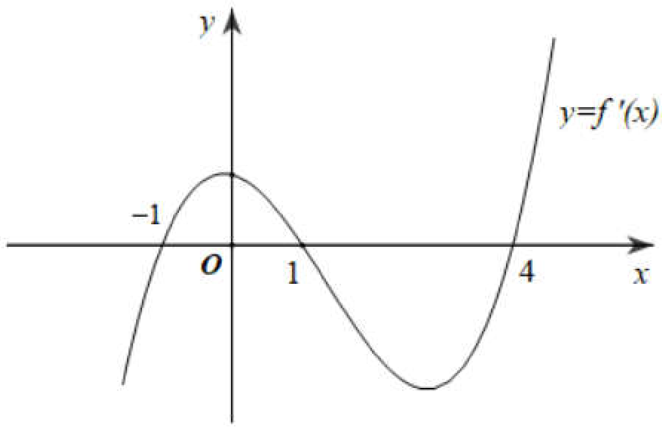
A. $V=8\sqrt{3}$. **B.** $V=16\sqrt{3}$. **C.** $V=64\sqrt{3}$. **D.** $V=2\sqrt{3}$.

Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;3)$, bán kính R. AB là một đường kính của (S); lấy hai điểm M,N sao cho $MN=\dfrac{R}{2}$ và mặt phẳng (IMN) tạo với AB một góc 60^0. Biết rằng biểu thức $T=3AM^2+4BN^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{159}{7}$. Viết phương trình mặt cầu (S).

A. $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$. **B.** $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$. **D.** $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=\dfrac{159}{28}$.

Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)=f(|4-2x|+m-2020)$ có 3 điểm cực tiểu?



A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 2018.

--- HẾT ---

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.A	3.D	4.A	5.B	6.B	7.A	8.C	9.D	10.C
11.B	12.D	13.A	14.D	15.B	16.D	17.D	18.A	19.A	20.D
21.D	22.C	23.C	24.B	25.A	26.A	27.C	28.A	29.D	30.C
31.C	32.A	33.D	34.B	35.B	36.D	37.A	38.B	39.B	40.C
41.B	42.A	43.B	44.B	45.C	46.D	47.D	48.A	49.C	50.C

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Tìm nghiệm của phương trình $2^{x-2}=8^{100}$

A. $x=204$. **B.** $x=102$. **C.** $x=302$. **D.** $x=202$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{x-2}=8^{100}\Leftrightarrow 2^{x-2}=2^{300}\Leftrightarrow x-2=300\Leftrightarrow x=302$

Vậy $x=302$

Câu 2. **Cho hai tích phân** $\int\limits_{-2}^{5} f(x)\mathrm{d}x=8$ **và** $\int\limits_{5}^{-2} g(x)\mathrm{d}x=3$. Tính $I=\int\limits_{-2}^{5}\left[f(x)-4g(x)-1\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=13$. **B.** $I=-11$. **C.** $I=27$. **D.** $I=5$.

Lời giải

Chọn A

$$I=\int\limits_{-2}^{5}\left[f(x)-4g(x)-1\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{5} f(x)\mathrm{d}x+4\int\limits_{5}^{-2} g(x)\mathrm{d}x-x\Big|_{-2}^{5}=8+4.3-(5+2)=13.$$

Câu 3. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+13=0$ có diện tích là:

A. 8π. **B.** $\dfrac{4\pi}{3}$. **C.** π. **D.** 4π.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu có bán kính $R=\sqrt{1+4+9-13}=1$ nên có diện tích là $S=4\pi R^2=4\pi$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $A(3;-2;4)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;6)$. Phương trình của d là:

A. $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-4}{6}$. **B.** $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+4}{6}$.

C. $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-4}{6}$. **D.** $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-6}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng d đi qua điểm $A(3;-2;4)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1;6)$. Phương trình của d là $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-4}{6}$.

Câu 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

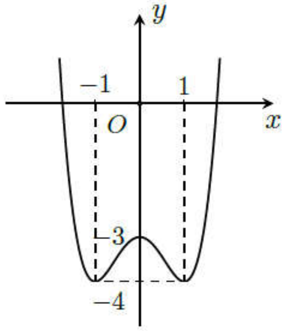
Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng xét dấu, $f'(x)$ đổi dấu khi qua các điểm $x \in \{-2;1;2\}$.

Vậy số điểm cực trị của hàm số đã cho là 3.

Câu 6. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên dưới?



A. $y = x^4 - 2x^2 + 3$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 - 3$. **C.** $y = -x^4 - 4x^2 - 1$. **D.** $y = x^3 - 3x - 1$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào dáng đồ thị, đây là hàm trùng phương nên loại đáp án D.

Điểm cuối đồ thị hướng lên phía trên nên loại phương án C.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm cực đại có tọa độ $(0;-3)$ nên chọn đáp án B.

Câu 7. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x-5}$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 5. **D.** -5.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x-5}$ cắt trục hoành tại điểm có tung độ $y = 0$, suy ra hoành độ $x = 0$.

Câu 8. Cho tập A gồm n phần tử $(n \geq 1)$, số hoán vị của tập A là

A. n^2. **B.** 2^n. **C.** $n!$. **D.** $(n!)^2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có số hoán vị của tập hợp có n phần tử là $n!$.

Câu 9. Phần ảo của số phức $z = 2 - i$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

Số phức $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ có phần ảo là b, do đó $b=-1$.

Câu 10. Đạo hàm của hàm số $y=\left(2x+1\right)^{-\frac{1}{3}}$ trên tập xác định là

A. $2\left(2x+1\right)^{-\frac{1}{3}}\ln\left(2x+1\right)$.
B. $\left(2x+1\right)^{-\frac{1}{3}}\ln\left(2x+1\right)$.
C. $-\frac{2}{3}\left(2x+1\right)^{-\frac{4}{3}}$.
D. $-\frac{1}{3}\left(2x+1\right)^{-\frac{4}{3}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=\left[\left(2x+1\right)^{-\frac{1}{3}}\right]'=\frac{-1}{3}\left(2x+1\right)'\left(2x+1\right)^{-\frac{1}{3}-1}=\frac{-2}{3}\left(2x+1\right)^{-\frac{4}{3}}$.

Câu 11. Tìm nguyên hàm của hàm số $\int\left(x^2+\frac{3}{x}-2\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$ với $x>0$.

A. $\frac{x^3}{3}+3\ln\left|x\right|+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.
B. $\frac{x^3}{3}+3\ln\left|x\right|-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.
C. $\frac{x^3}{3}-3\ln\left|x\right|-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.
D. $\frac{x^3}{3}+3\ln x-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

Lời giải

Chọn B

Với $x>0$ ta có: $\int\left(x^2+\frac{3}{x}-2\sqrt{x}\right)dx=\int\left(x^2+\frac{3}{x}-2x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{x^3}{3}+3\ln\left|x\right|-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+C$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M\left(3;1;0\right)$ và $\overrightarrow{MN}=\left(-1;-1;0\right)$. Tìm tọa độ của điểm N.

A. $N\left(4;2;0\right)$.
B. $\mathrm{N}\left(-4;-2;0\right)$.
C. $N\left(-2;0;0\right)$.
D. $N\left(2;0;0\right)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $N\left(x;y;z\right)$ là điểm cần tìm. Ta có : $\overrightarrow{MN}\left(x-3;y-1;z\right)$.

Khi đó theo giả thiết ta có : $\begin{cases}x-3=-1\\y-1=-1\\z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=0\\z=0\end{cases}\Rightarrow N\left(2;0;0\right)$.

Câu 13. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	-3	↘	-4	↗	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x=0$.
B. $\left(0;-3\right)$.
C. $y=-3$.
D. $x=-3$.

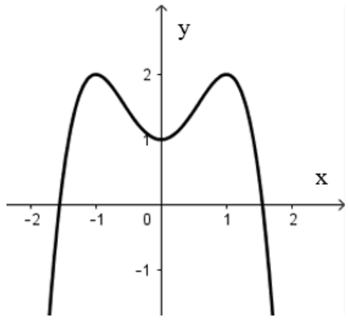
Lời giải

Chọn A

Ta có: y' đổi dấu từ $\left(+\right)$ sang $\left(-\right)$ khi đi qua nghiệm $x=0$ nên hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=0$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực đại tại điểm $x=0$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(-1;0\right)$. **B.** $\left(-2;0\right)$.

C. $\left(-2;1\right)$. **D.** $\left(0;1\right)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta có hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0;1\right)$.

Câu 15. Tìm nghiệm của phương trình $\log_9\left(x+1\right)=\dfrac{1}{2}$.

A. $x=-4$. **B.** $x=2$. **C.** $x=4$. **D.** $x=\dfrac{7}{2}$

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\left(-1;+\infty\right)$.

Ta có: $\log_9\left(x+1\right)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x+1=9^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x=2$

Câu 16. Nếu $\displaystyle\int_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=11$ thì $\displaystyle\int_4^1 3f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 33. **B.** 44. **C.** -44. **D.** -33.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\displaystyle\int_4^1 3f\left(x\right)\mathrm{d}x=-3\int_1^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-3.11=-33$.

Câu 17. Thể tích của khối lập phương là $8a^3$. Độ dài của cạnh khối lập phương là

A. $512a^3$. **B.** $64a^2$. **C.** $64a$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn D

Gọi độ dài của cạnh khối lập phương là x, ta có

$$V=x^3=8a^3\Rightarrow x=2a.$$

Câu 18. Tập xác định của hàm số $y=\pi^x$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\left[0;+\infty\right)$. **C.** $\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}$. **D.** $\left(0;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A

Vì hàm số $y=\pi^x$ là hàm số mũ nên có tập xác định là tập $\mathbb{R}$.

Câu 19. Diện tích mặt cầu có đường kính $2a$ là

A. $4\pi a^2$ **B.** $16\pi a^2$. **C.** πa^2. **D.** $\dfrac{4\pi a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Bán kính mặt cầu đã cho là $R = a$. Diện tích mặt cầu có đường kính $2a$ là $S = 4\pi R^2 = 4\pi a^2$.

Câu 20. Biết đường tiệm cận đứng $x = a$ và tiệm cận ngang $y = b$ của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{3-x}$. Khi đó tổng $a + b$ bằng:

A. 5. **B.** $\dfrac{11}{3}$. **C.** $\dfrac{7}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

• Đường tiệm cận đứng là $x = 3$ nên $a = 3$.

• Đường tiệp cận ngang là $y = -2$ nên $b = -2$.

• Vậy $a + b = 1$.

Câu 21. Với a là số thực dương tuỳ ý, $2\log_4 \dfrac{8}{a}$ bằng

A. $16\log_4 \dfrac{1}{a}$. **B.** $-6\log_2 \dfrac{2}{a}$. **C.** $3 + \log_2 a$. **D.** $3 - \log_2 a$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$2\log_4 \frac{8}{a} = 2\log_{2^2} \frac{2^3}{a} = 2.\frac{1}{2}\log_2 \frac{2^3}{a} = \log_2 \frac{2^3}{a} = \log_2 2^3 - \log_2 a = 3\log_2 2 - \log_2 a = 3 - \log_2 a$$

Vậy $2\log_4 \dfrac{8}{a} = 3 - \log_2 a$.

Câu 22. Cho khối chóp có thể tích $V = 3a^3$ và chiều cao $h = a$. Diện tích đáy của khối chóp đã cho bằng

A. $3a^2$. **B.** a^2. **C.** $9a^2$. **D.** $\dfrac{1}{3}a^2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $V = \dfrac{1}{3}B.h \Rightarrow B = \dfrac{3V}{h} = \dfrac{3.3a^3}{a} = 9a^2$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 6 = 0$. Véctơ nào dưới đây là một véctơ pháp tuyến của (P)?

A. $\overrightarrow{n_1} = (1;3;2)$. **B.** $\overrightarrow{n_2} = (-3;2;-6)$. **C.** $\overrightarrow{n_3} = (-1;3;-2)$. **D.** $\overrightarrow{n_4} = (1;-3;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Véc tơ pháp tuyến của $(P): x-3y+2z-6=0$ là: $\overrightarrow{n_3}=(-1;3;-2)$.

Câu 24. Cho hình trụ có bán kính đáy $r=6$ và chiều cao $h=3$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 108π. **B.** 36π. **C.** 18π. **D.** 54π.

Lời giải

Chọn B

Đường sinh của hình trụ $l=h=3$.

Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho là $S_{xq}=2\pi rl=2\pi.6.3=36\pi$.

Câu 25. Cho hai số phức $z=2-3i$, $w=1-i$. Mô đun của số phức $z+w$ bằng

A. 5. **B.** 25. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $z+w=(2-3i)+(1-i)=3-4i$.

Suy ra: $|z+w|=|3-4i|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$.

Câu 26. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1=1$,và $u_4=8$. Công bội của cấp số nhân bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** 8. **D.** -8.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_4=u_1.q^3 \Rightarrow q^3=\dfrac{u_4}{u_1}=8 \Rightarrow q=2$.

Câu 27. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x+1$ và $F(0)=2022$. Hàm số $F(x)$ là

A. $F(x)=e^x+x+2022$. **B.** $F(x)=e^x-x+2022$.

C. $F(x)=e^x+x+2021$. **D.** $F(x)=e^x-x+2021$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F(x)=\int f(x)dx=\int (e^x+1)dx=e^x+x+C.$

Mặt khác: $F(0)=2022 \Leftrightarrow e^0+0+C=2022 \Leftrightarrow C=2021.$

Vậy: $F(x)=e^x+x+2021.$

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ, số phức $z=2021-2022i$ được biểu diễn bởi điểm nào dưới đây?

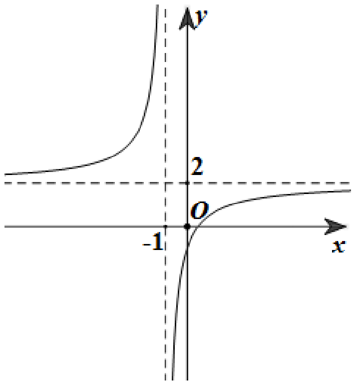
A. $M(2021;-2022)$. **B.** $N(2021;-2022i)$. **C.** $P(-1;i)$. **D.** $Q(2021;2022)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z=2021-2022i$ được biểu diễn bởi điểm $M(2021;-2022)$

Câu 29. Biết hàm số $y=\dfrac{2x+b}{x+1}$ (b là số thực cho trước, $b\ne 2$ có đồ thị như hình bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$. **B.** $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$. **C.** $y'<0,\forall x\ne -1$. **D.** $y'>0,\forall x\ne -1$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ nên loại đáp án A và B

Dạng đồ thị đi lên thì $y'>0$ nên loại đáp án C

Vậy chọn D ($y'>0,\forall x\ne -1$)

Câu 30. Từ một hộp có 10 viên bi đánh số từ 1 đến 10, lấy ngẫu nhiên đồng thời 2 bi. Xác suất để lấy được 2 bi có tích hai số trên chúng là một số lẻ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{4}{9}$. **C.** $\dfrac{2}{9}$. **D.** $\dfrac{1}{9}$.

Lời giải

Chọn C

Lấy ngẫu nhiên 2 bi từ 10 bi có $n(\Omega)=C_{10}^2=45$

Gọi A là biến cố: " Lấy được 2 bi có tích hai số trên chúng là một số lẻ"

Tức chọn 2 từ 5 bi có số ghi lẻ $\{1,3,5,7,9\}$

Suy ra $n(A)=C_5^2=10$

Xác suất biến cố A là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{10}{45}=\dfrac{2}{9}$.

Câu 31. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^3+\dfrac{3}{x}$ trên $(0;+\infty)$.

A. $m=4\sqrt[4]{3}$. **B.** $m=2\sqrt{3}$. **C.** $m=4$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định và liên tục trên $(0;+\infty)$.

Ta có $y'=3x^2-\dfrac{3}{x^2}=\dfrac{3x^4-3}{x^2}$.

Khi đó $y'=0\Rightarrow\begin{cases}3x^4-3=0\\ x\in(0;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm1\\ x\in(0;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Ta có $\begin{cases} y(1)=4 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} y=+\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} y=+\infty \end{cases} \Rightarrow m=\min\limits_{(0;+\infty)} y=4$ tại $x=1$.

Câu 32. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(3;-2;0)$, $B(4;-3;2)$, $C(1;2;-5)$, $D(2;1;3)$. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $\begin{cases} x=2-3t \\ y=1+t \\ z=3+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2-3t \\ y=1+t \\ z=3-2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-t \\ z=3+2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2-3t \\ y=1-t \\ z=3+2t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi Δ là đường thẳng qua D và vuông góc với (ABC).

Suy ra Δ nhận vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) làm vectơ chỉ phương.

Ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC) được tính theo công thức: $\vec{n}_{(ABC)}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.

Với $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;4;-5)$, suy ra $\vec{n}_{(ABC)}=(-3;1;2)$.

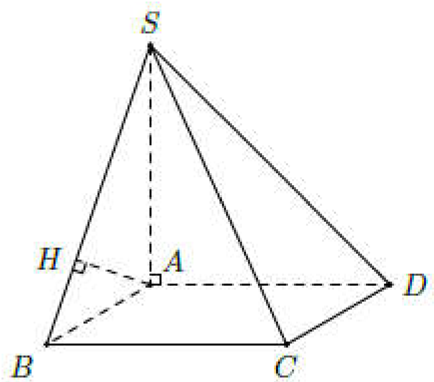
Vậy phương trình đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x=2-3t \\ y=1+t \\ z=3+2t \end{cases}$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

Câu 33. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\dfrac{\sqrt{6}a}{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp SA \end{cases} \Rightarrow BC\perp(SAB) \Rightarrow \begin{cases} (SAB)\perp(SBC) \\ (SAB)\cap(SBC)=SB \end{cases}$.

Trong (SAB), kẻ $AH\perp SB \Rightarrow AH=\mathrm{d}\left(A,(SBC)\right)$.

Khi đó $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AB^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{3a^2}=\dfrac{4}{3a^2} \Leftrightarrow AH=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Vậy $AH = \mathrm{d}\left(A,(SBC)\right) = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Câu 34. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;-2;5)$, mặt phẳng $(P): 2x - y = 0$ và mặt phẳng $(Q): x - y + 3z + 1 = 0$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với cả hai mặt phẳng (P), (Q) có phương trình là

A. $-2y + 5z - 7 = 0$. **B.** $3x + 6y + z + 7 = 0$. **C.** $3x + 6y - z - 7 = 0$. **D.** $-2y + 5z + 7 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{n}_P = (2;-1;0)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Ta có $\vec{n}_Q = (1;-1;3)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q).

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua $A(0;-2;5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng (P), (Q). Khi đó (α) nhận vectơ $\vec{n} = \left[\vec{n}_P, \vec{n}_Q\right] = (-3;-6;-1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy phương trình của mặt phẳng (α) là $-3x - 6(y+2) - (z-5) = 0$ hay $3x + 6y + z + 7 = 0$.

Câu 35. Cho số phức z thỏa mãn $(z-1)(-2i) - 8i = 10$. Số phức liên hợp của $2z$ là

A. $6 - 10i$. **B.** $-6 - 10i$. **C.** $-6 + 10i$. **D.** $-3 + 5i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(z-1)(-2i) - 8i = 10 \Rightarrow z - 1 = \dfrac{10 + 8i}{-2i} \Leftrightarrow z = -3 + 5i$.

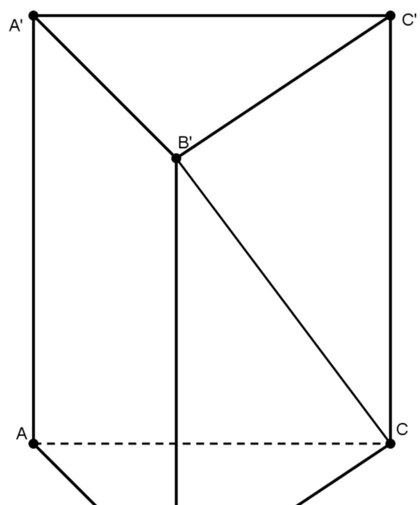
Vậy số phức liên hợp của $2z$ là $-6 - 10i$.

Câu 36. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và thể tích bằng $\dfrac{a^3}{4}$. Góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C$ bằng

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm BC. Tam giác ABC đều, suy ra $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = BB'.S_{ABC} \Rightarrow BB' = \dfrac{V_{ABC.A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dfrac{\frac{a^3}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vì $AA' // BB'$ nên $\left(\widehat{AA', B'C}\right) = \left(\widehat{BB', B'C}\right) = \widehat{BB'C}$. Ta có $\tan \widehat{BB'C} = \dfrac{BC}{BB'} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{BB'C} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AA' và $B'C$ bằng 60°.

Câu 37. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^3b^2 = 32$. Giá trị của $3\log_2 a + 2\log_2 b$ bằng

A. 5. **B.** 2. **C.** 32. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $a^3b^2 = 32 \Leftrightarrow \log_2 a^3b^2 = \log_2 32 \Leftrightarrow 3\log_2 a + 2\log_2 b = 5$.

Câu 38. Nếu $\int\limits_{-1}^{1} \left[3f(x) - 1\right] dx = 4$ thì $\int\limits_{-1}^{1} \left[f(x) - x + 1\right] dx$ bằng:

A. 2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_{-1}^{1} \left[3f(x) - 1\right] dx = 4 \Leftrightarrow 3.\int\limits_{-1}^{1} f(x) dx - 2 = 4 \Leftrightarrow \int\limits_{0}^{1} f(x) dx = 2$.

Vậy $\int\limits_{-1}^{1} \left[f(x) - x + 1\right] dx = 2 - \int\limits_{-1}^{1} (x-1) dx = 2 - (-2) = 4$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } x \ge \dfrac{\pi}{4} \\ \cos x & \text{khi } x < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3}{2}$. Giá trị của $F(0) - 2F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** -1. **C.** $1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0) = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = \sin x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow F(0) = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} = 1.$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right)=F\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=1$$

Vậy $F(0)-2F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-2.1=-1$.

Câu 40. Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn $\sqrt{3^{x^2+2}-27}\left[-\log_3\left(10-3^{x+1}\right)+1-x\right]\geq 0$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}10-3^{x+1}>0\Leftrightarrow 3.3^x<10\Leftrightarrow x<\log_3\frac{10}{3}\\ 3^{2x^2+2}-27\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\log_3\frac{10}{3}\\ \left[\begin{array}{l}x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}\\ x\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\leq x<\log_3\frac{10}{3}\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $3^{2x^2+2}-27=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ không thỏa mãn.

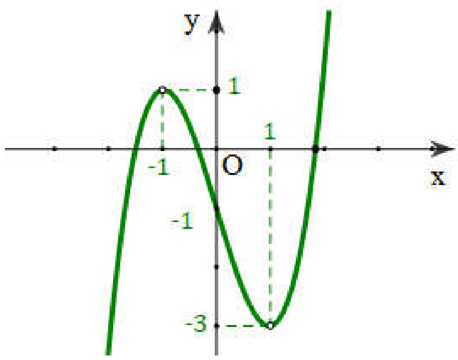
Trường hợp 2: $3^{2x^2+2}-27>0$, bất phương trình tương đương

$10-3^{x+1}\geq 3^{1-x}\Leftrightarrow 3.3^x+\frac{3}{3^x}-10\leq 0\Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-1\leq x<-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}<x\leq 1\end{array}\right.$.

Mà $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-1;1\}$. Vậy có 2 giá trị thỏa mãn.

Câu 41. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f(x)\right)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$. Tính số phần tử của tập S.



A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=f(x)$.

Vì $x\in(-1;0)\Rightarrow t\in(-1;1)$.

Phương trình trở thành $f(t)=m$.

$f(f(x))=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0) \Leftrightarrow f(t)=m$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$

$\Leftrightarrow m\in(-3;1)$.

Do đó $m\in Z \Rightarrow m\in\{-2;-1;0\}$.

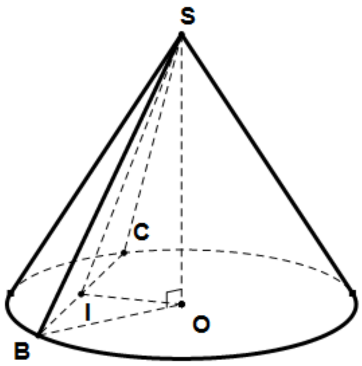
Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 42. Cắt hình nón $(\mathcal{N})$ đỉnh S cho trước bởi mặt phẳng qua trục của nó, ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $2a\sqrt{2}$. Biết BC là một dây cung đường tròn của đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng đáy của hình nón một góc $60°$. Tính diện tích tam giác SBC.

A. $\dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\dfrac{4a^2\sqrt{2}}{9}$. **C.** $\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC.

Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác vuông cân, suy ra $r=OB=OA=SO=a\sqrt{2}$.

$OI\perp BC,\ SI\perp BC$ nên góc giữa (SBC) và mặt phẳng đáy là $\widehat{SIO}=60°$.

Trong tam giác SIO vuông tại O có $SI=\dfrac{SO}{\sin\widehat{SIO}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a$ và $OI=SI.\cos\widehat{SIO}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

Mà $BC=2\sqrt{r^2-OI^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}a$.

Diện tích tam giác SBC là $S=\dfrac{1}{2}SI.BC=\dfrac{4a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 43. Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2-2(2m+1)z+4m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0|=4$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $z^2-2(2m+1)z+4m^2=0$ $(*)$. Ta có $\Delta'=(2m+1)^2-4m^2=4m+1$.

+ Trường hợp 1: Nếu $4m+1\ge 0 \Leftrightarrow m\ge -\dfrac{1}{4}$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm thực nên

$$\left|z_0\right| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_0 = 4 \\ z_0 = -4 \end{array}\right..$$

Với $z_0 = 4$ thay vào phương trình $(*)$ ta được:

$$4^2 - 2(2m+1).4 + 4m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2+\sqrt{2} \\ m = 2-\sqrt{2} \end{array}\right. \text{ (thoả } m \ge -\frac{1}{4}\text{)}.$$

Với $z_0 = -4$ thay vào phương trình $(*)$ ta được:

$(-4)^2 + 8(2m+1) + 4m^2 = 0$, phương trình vô nghiệm.

+ Trường hợp 2: Nếu $4m+1<0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{4}$ thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phức là

$$z = 2m+1+i\sqrt{-4m-1} \text{ và } z = 2m+1-i\sqrt{-4m-1}.$$

Khi đó $\left|z_0\right| = 4 \Leftrightarrow (2m+1)^2 - 4m - 1 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -2 \end{array}\right.$, kết hợp với $m < -\frac{1}{4}$ ta được $m = -2$.

Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Giải trường hợp 2 theo cách khác

+ Trường hợp 2: Nếu $4m+1<0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{4}$ thì PT$(*)$ có hai nghiệm phức là z_0 và $\overline{z_0}$.

Ta có: $z_0.\overline{z_0} = \left|z_0\right|^2 \Leftrightarrow 4m^2 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -2 \end{array}\right.$, kết hợp với $m < -\frac{1}{4}$ ta được $m = -2$.

Câu 44. Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z| = 2$ và $|w| = 1$. Khi $\left|z - (3i-4)\overline{w} + 15 + 8i\right|$ đạt giá trị lớn nhất, $|z - w|$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2357}}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{37645}}{85}$. **C.** $\frac{\sqrt{1226}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{5421}}{17}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|z| = 2 \Leftrightarrow \left|(z+15+8i) - 15 - 8i\right| = 2$.

Đặt $z + 15 + 8i = \mathrm{w}_1 \Rightarrow \left|\mathrm{w}_1 - 15 - 8i\right| = 2$.

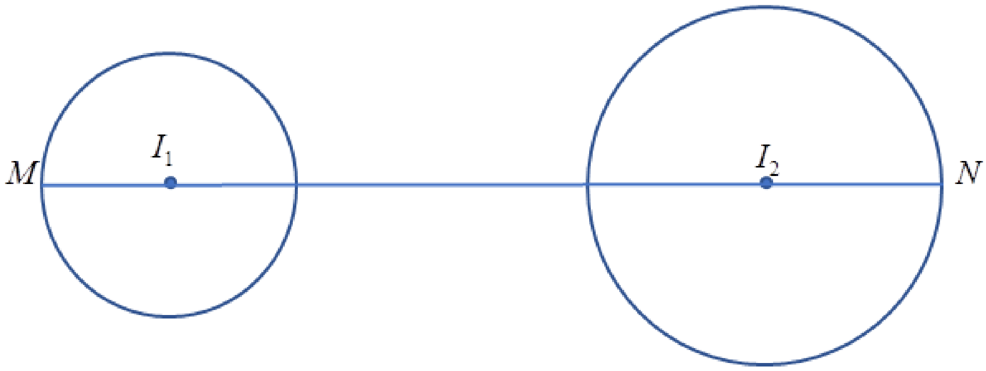
$M(\mathrm{w}_1)$ thuộc đường tròn (C_1) có tâm $I_1(15;8)$ và bán kính $R_1 = 2$.

$|\mathrm{w}| = 1 \Leftrightarrow \left|\overline{\mathrm{w}}\right| = 1 \Leftrightarrow |3i-4|.\left|\overline{\mathrm{w}}\right| = 1.|3i-4| \Leftrightarrow \left|(3i-4)\overline{\mathrm{w}}\right| = 5$.

Đặt $\mathrm{w}_2 = (3i-4)\overline{\mathrm{w}} \Rightarrow \left|\mathrm{w}_2\right| = 5$.

$N(\mathrm{w}_2)$ thuộc đường tròn (C_2) có tâm $I_2(0;0)$ và bán kính $R_2 = 5$.

$I_1I_2 = 17 > 7 = R_1 + R_2$ suy ra (C_1) và (C_2) không cắt nhau.



$\Rightarrow \text{Max}\left|\left(z+15+8i\right)-\left(3i-4\right)\overline{\text{w}}\right| = \text{Max}\left|\text{w}_1-\text{w}_2\right| = \text{Max}MN = I_1I_2+\left(R_1+R_2\right)=24$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{NI_2}{I_2I_1}=\dfrac{5}{17} \\ \dfrac{MI_1}{I_1I_2}=\dfrac{2}{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17\overrightarrow{NI_2}=5\overrightarrow{I_2I_1} \\ 17\overrightarrow{MI_1}=2\overrightarrow{I_1I_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N\left(-\dfrac{75}{17};-\dfrac{40}{17}\right) \\ M\left(\dfrac{285}{17};\dfrac{152}{17}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{w}_2=\left(3i-4\right)\overline{\text{w}}=-\dfrac{75}{17}-\dfrac{40}{17}i \\ \text{w}_1=z+15+8i=\dfrac{285}{17}+\dfrac{152}{17}i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{w}=\dfrac{36}{85}-\dfrac{77}{85}i \\ z=\dfrac{30}{17}+\dfrac{16}{17}i \end{cases}$$

Vậy $\left|z-\text{w}\right|=\left|\left(\dfrac{30}{17}+\dfrac{16}{17}i\right)-\left(\dfrac{36}{85}-\dfrac{77}{85}i\right)\right|=\dfrac{\sqrt{37645}}{85}$.

Câu 45. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P):3x+5y-z-2=0$. Gọi Δ là hình chiếu vuông góc của d lên (P). Phương trình tham số của Δ là

A. $\begin{cases} x=-62t \\ y=25t \\ z=2-61t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

B. $\begin{cases} x=-8t \\ y=7t \\ z=-2+11t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

C. $\begin{cases} x=62t \\ y=-25t \\ z=-2+61t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

D. $\begin{cases} x=-8t \\ y=7t \\ z=2+11t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

Lời giải

Chọn C

Gọi A là giao điểm của d và (P), ta có $A(0;0;-2)$.

Chọn $B(12;9;1)\in d$, gọi B' là hình chiếu vuông góc của B lên (P).

Phương trình BB' là $\dfrac{x-12}{3}=\dfrac{y-9}{5}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Tọa độ B' là nghiệm của hệ $\begin{cases} \dfrac{x-12}{3}=\dfrac{y-9}{5}=\dfrac{z-1}{-1} \\ 3x+5y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow B'\left(\dfrac{186}{35};-\dfrac{15}{7};\dfrac{113}{35}\right)$

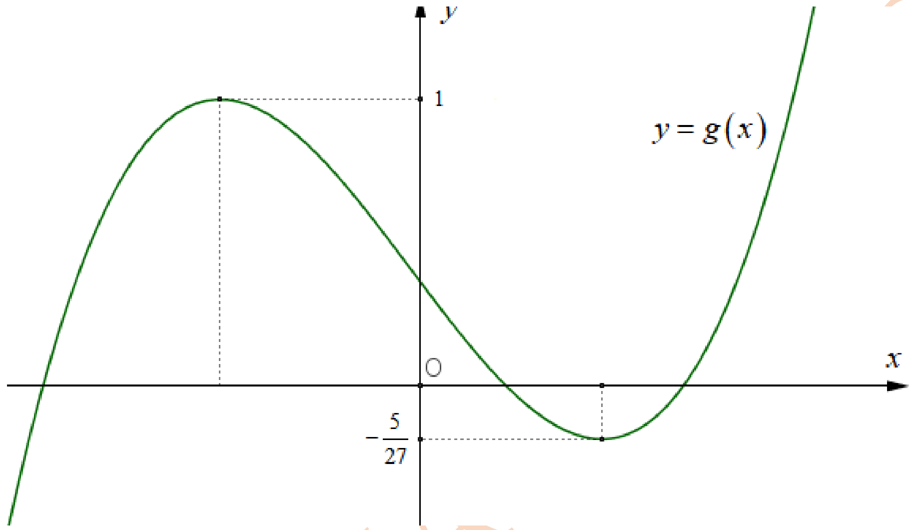
$\Rightarrow \overrightarrow{AB'} = \left(\dfrac{186}{35}; -\dfrac{15}{7}; \dfrac{183}{35}\right)$.

Khi đó phương trình Δ cũng chính là phương trình của BB'.

Ta có $\Delta: \begin{cases} \text{qua } A(0;0;-2) \\ \text{có VTCP } \vec{u} = (62;-25;61) \end{cases}$.

Suy ra $\Delta: \begin{cases} x = 62t \\ y = -25t \\ z = -2 + 61t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x) = x^3 + f(x) + f'(x) + f''(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{f(x) + x^3 - 3x^2 + 1}{g(x) + 1}$ và $y = 1$ bằng

A. $\ln 3$. **B.** $\ln \dfrac{22}{5}$. **C.** $\ln \dfrac{44}{27}$. **D.** $\ln \dfrac{27}{11}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $g(x) = x^3 + f(x) + f'(x) + f''(x)$.

Suy ra: $g'(x) = 3x^2 + f'(x) + f''(x) = 3x^2 + \left(g(x) - f(x) - x^3\right) = g(x) - f(x) - x^3 + 3x^2$.

Xét phương trình

$$\frac{f(x) + x^3 - 3x^2 + 1}{g(x) + 1} = 1 \Leftrightarrow g(x) = f(x) + x^3 - 3x^2$$

$$\Leftrightarrow g(x) - f(x) - x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 \end{array}\right.$$

Ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \dfrac{f(x) + x^3 - 3x^2 + 1}{g(x) + 1}$ và $y = 1$ là

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{f(x)+x^3-3x^2+1}{g(x)+1}-1\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)-g(x)+x^3-3x^2}{g(x)+1}\right)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{-g'(x)}{g(x)+1}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\ln\left|g(x)+1\right|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|=\left|\ln\left|g(x_2)+1\right|-\ln\left|g(x_1)+1\right|\right|$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=g(x)$ ta có $g(x_1)=1$ và $g(x_2)=-\dfrac{5}{27}$.

Do đó ta có: $S=\left|\ln|1+1|-\ln\left|-\dfrac{5}{27}+1\right|\right|=\ln\dfrac{27}{11}$.

Câu 47. Có bao nhiêu số nguyên a, $(2\le a\le 2021)$ để có ít nhất 5 số nguyên $5x$ thỏa mãn $a^{-x}+\dfrac{1}{2}\le 2^{-x}+\dfrac{1}{a}$

A. 1892. **B.** 125. **C.** 127. **D.** 1893.

Lời giải

Chọn D

+) Nếu $a=2$ bất phương trình đúng với mọi x. Suy ra $a=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+) Nếu $a\ge 3$ bất phương trình tương đương với $g(x)=a^{-x}-2^{-x}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{a}\le 0$ (*). Ta có $g(1)=0$

và $g'(x)=-a^{-x}\ln a+2^{-x}\ln 2=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{a}{2}\right)^{-x}=\dfrac{\ln 2}{\ln 3}\Leftrightarrow x=x_0=-\log_{\frac{a}{2}}\left(\dfrac{\ln 2}{\ln a}\right)$

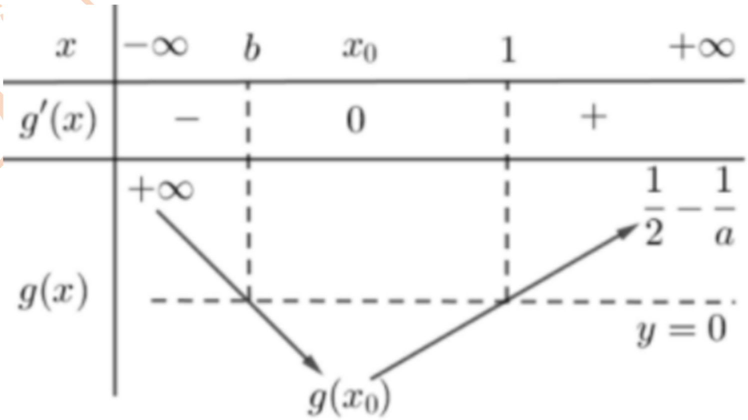
$g'(x)>0\Leftrightarrow x>x_0$; $g'(x)<0\Leftrightarrow x<x_0$

Và $a=3\Rightarrow x_0>1$; $a=4\Rightarrow x_0=1$; $a>4\Rightarrow x_0<1$

+) Nếu $a=4\Rightarrow x_0=1\Rightarrow g(x)\le 0\Leftrightarrow x=1$ chứa đúng một số nguyên $5x$ là số 5. Suy ra $a=4$ không thỏa mãn.

+) Nếu $a=3\Rightarrow x_0>1\Rightarrow g(x)\le 0\Leftrightarrow S_x=[1;1,28378]\Leftrightarrow S_{5x}=[5;6,17]$ chứa đúng hai số nguyên $5x$ là các số 5 và 6. Suy ra $a=3$ không thỏa mãn.

+) Nếu $a>4\Rightarrow x_0<1$



Suy ra tập nghiệm của bất phương trình $S_x=[b;1]\Rightarrow S_{5x}=[5b;5]$ chứa tối thiểu 5 số nguyên $5x$ là các số 1, 2, 3, 4, $5\Leftrightarrow 5b\le 1\Leftrightarrow b\le\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow g\left(\dfrac{1}{5}\right)\le 0\Leftrightarrow a^{-\frac{1}{5}}-2^{-\frac{1}{5}}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{a}\le 0$

$\Rightarrow a\in\{130;...;2021\}$.

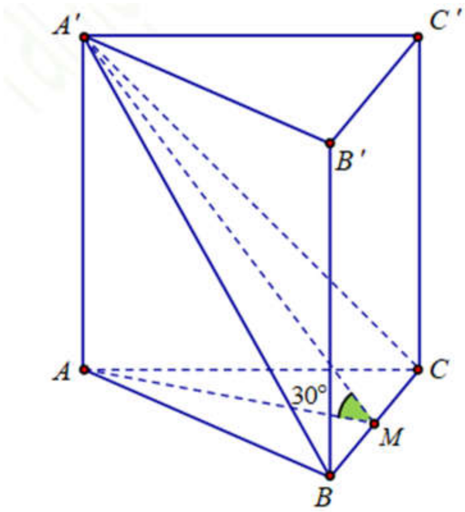
Vậy $1+\left[(2021-130)+1\right]=1893$ số nguyên a thỏa mãn.

Câu 48. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy góc $30°$ và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = 8\sqrt{3}$. **B.** $V = 16\sqrt{3}$. **C.** $V = 64\sqrt{3}$. **D.** $V = 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có: $\begin{cases} (A'BC)\cap(ABC) = BC \\ AM \perp BC \\ A'M \perp BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{((A'BC),(ABC))} = \widehat{A'MA} = 30°$.

Giả sử $x > 0$ là cạnh của tam giác đều ABC ta có: $AM = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác vuông $A'AM$ ta có: $\cos 30° = \dfrac{AM}{A'M} \Rightarrow A'M = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = x$.

Theo giả thuyết $S_{A'BC} = \dfrac{1}{2}A'M.BC \Rightarrow 8 = \dfrac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x = 4$.

Diện tích đáy: $B = \dfrac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$.

Xét tam giác vuông $A'AM$ ta có: $\tan 30° = \dfrac{AA'}{MA} \Rightarrow AA' = \tan 30°.2\sqrt{3} = 2$.

Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là: $V = 4\sqrt{3}.2 = 8\sqrt{3}$.

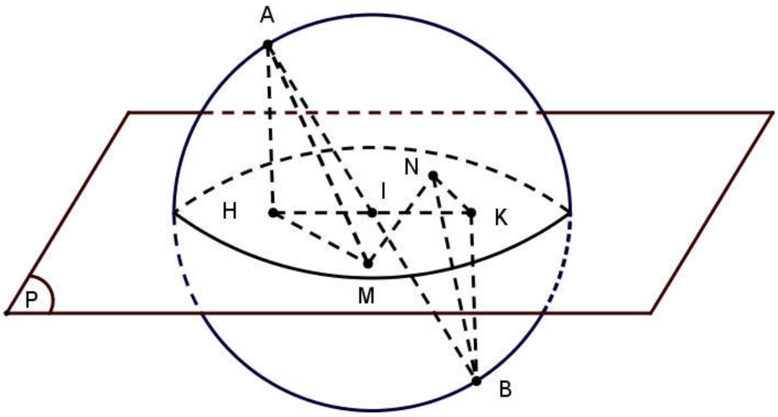
Câu 49. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;3)$, bán kính R. AB là một đường kính của (S); lấy hai điểm M, N sao cho $MN = \dfrac{R}{2}$ và mặt phẳng (IMN) tạo với AB một góc 60^0. Biết rằng biểu thức $T = 3AM^2 + 4BN^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{159}{7}$. Viết phương trình mặt cầu (S).

A. $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 4$. **B.** $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 9$.

C. $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4$. **D.** $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = \dfrac{159}{28}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A,B xuống mặt phẳng (IMN).

Góc giữa AB với (IMN) là $\widehat{AIH}=\widehat{BIK}=60^0$, khi đó $AH=BK=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$; $IH=IK=\dfrac{R}{2}\Rightarrow HK=R$.

$T=3AM^2+4BN^2=3\left(AH^2+HM^2\right)+4\left(BK^2+KN^2\right)=3AH^2+4BK^2+3HM^2+4KN^2$

$=\dfrac{21R^2}{4}+3HM^2+4KN^2$.

Theo bất đẳng thức Bunhia-copxki ta có:

$\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\right)\left(3HM^2+4KN^2\right)\geq\left(HM+KN\right)^2=\left(HM+MN+KN-MN\right)^2\geq\left(HK-MN\right)^2=\dfrac{R^2}{4}$

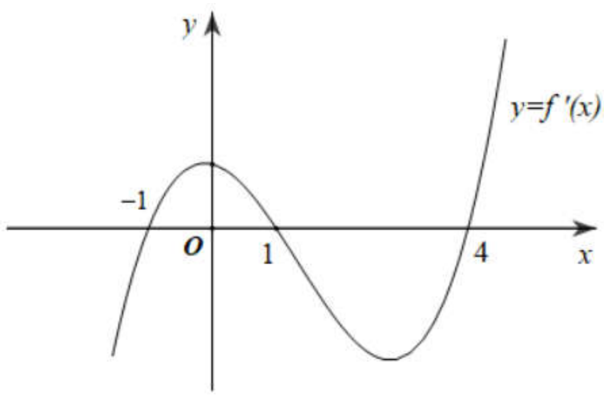
$\Rightarrow\left(3HM^2+4KN^2\right)\geq\dfrac{3R^2}{7}$, dấu "=" xảy ra khi H,M,N,K theo thứ tự đó cùng nằm trên cùng một đường thẳng.

Suy ra $T\geq\dfrac{21R^2}{4}+\dfrac{3R^2}{7}=\dfrac{159R^2}{28}$ như vậy $T_{\min}=\dfrac{159R^2}{28}=\dfrac{159}{7}\Leftrightarrow R^2=4$.

Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=4$.

Chú ý: Vì đây là bài toán trắc nghiệm nên chúng ta có thể đặc biệt hóa hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1, $SA=1$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

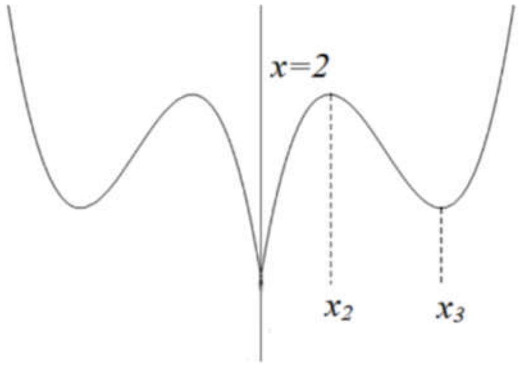
Câu 50. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)=f(|4-2x|+m-2020)$ có 3 điểm cực tiểu?



A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn C



Gọi $(C): y = f(|4-2x|+m-2020)$.

+) Nhận xét: Đường thẳng $x=2$ là trục đối xứng của (C).

+) Với $x>2$, ta có $y = f(2x+m-2024) \Rightarrow y' = 2f'(2x+m-2024)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+m-2024=-1 \\ 2x+m-2024=1 \\ 2x+m-2024=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=\frac{1}{2}(-m+2023) & (x_1) \\ x=\frac{1}{2}(-m+2025) & (x_2) \\ x=\frac{1}{2}(-m+2028) & (x_3) \end{array}\right.$$

+) (C) có 3 điểm cực tiểu $\Leftrightarrow$ hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

$\Leftrightarrow$ hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị thuộc khoảng $(2;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(-m+2023) \le 2 \\ \frac{1}{2}(-m+2025) > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2019 \le m < 2021.$$

--- HẾT ---