🕮 Chuyên đề 10: MŨ, LOGARIT

✓ Vấn đề 1: PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Dạng 1: Dạng cơ bản: với $0 < a \neq 1$

$$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$$

Dạng 2: Đưa về cùng cơ số: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (1)

- Nếu $0 < a \neq 1$: (1) $\Leftrightarrow f(x) = g(x)$
- Nếu a thay đổi: (1) $\begin{cases} a > 0 \\ (a-1)\left[f(x) - g(x)\right] = 0 \end{cases}$

Dạng 3: Đặt ẩn phụ: Đặt $t = a^x$, $t > 0$; giải phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ g(t) = 0 \end{cases}$

Dạng 4: Đoán nghiệm và chứng minh nghiệm đó duy nhất.

PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

Điều kiện tồn tại $\log_a f(x)$ là $\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Dạng 1: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = a^b \end{cases}$

Dạng 2: Đưa về cùng cơ số: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

Dạng 3: Đặt ẩn phụ

Đặt $t = \log_a x$ sau đó giải phương trình đại số theo t

Dạng 4: Đoán nghiệm và chứng minh nghiệm duy nhất

B. ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2011

Giải phương trình: $\log_2\left(8 - x^2\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right) - 2 = 0$ $(x \in R)$.

Giải

$\log_2\left(8 - x^2\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right) - 2 = 0$. Điều kiện: $-1 \le x \le 1$.

$\Leftrightarrow \log_2\left(8-x^2\right)=\log_2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)+2 \Leftrightarrow 8-x^2=4\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)$ (*).

Với $-1\le x\le 1$ thì hai vế của (*) không âm nên bình phương hai vế của (*) ta được: (*) $\Leftrightarrow \left(8-x^2\right)^2=16\left(2+2\sqrt{1-x^2}\right)\Leftrightarrow \left(8-x^2\right)^2=32\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)$ (1).

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow t^2=1-x^2\Rightarrow x^2=1-t^2$, (1) trở thành:

$$\left(7+t^2\right)^2=32\left(1+t\right)\Leftrightarrow t^4+14t^2-32t+17=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^3-t^2+15t-17)=0\Leftrightarrow (t-1)^2(t^2+2t+17)=0\Leftrightarrow t=1.$$

Do đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=1\Leftrightarrow x=0$ (Thỏa điều kiện $-1\le x\le 1$).

Vậy, phương trình đã cho có một nghiệm $x=0$.

Bài 2: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2011

Giải bất phương trình $4^x-3.2^{x+\sqrt{x^2-2x-3}}-4^{1+\sqrt{x^2-2x-3}}>0$

Giải

$$4^x-3.2^{x+\sqrt{x^2-2x-3}}-4^{1+\sqrt{x^2-2x-3}}>0\Leftrightarrow 2^{2x}-3.2^x.2^{\sqrt{x^2-2x-3}}-4.2^{2\sqrt{x^2-2x-3}}>0$$

$$\Leftrightarrow 1-3.2^{\sqrt{x^2-2x-3}-x}-4.2^{2(\sqrt{x^2-2x-3}-x)}>0 \qquad (1)$$

Đặt $t=2^{\sqrt{x^2-2x-3}-x}>0$ (*)

(1) thành $1-3t-4t^2>0\Leftrightarrow 4t^2+3t-1<0\Leftrightarrow -1<t<\frac{1}{4}$

Do đó bất phương trình đã cho tương đương: $2^{\sqrt{x^2-2x-3}-x}<\frac{1}{4}=2^{-2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x-3}-x<-2\Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x-3}<x-2$$

$$\Leftrightarrow \Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\Leftrightarrow 3\le x<\frac{7}{2}.$$

Bài 3: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2010

Giải phương trình $4^{2x+\sqrt{x+2}}+2^{x^3}=4^{2+\sqrt{x+2}}+2^{x^3+4x-4}$ $(x\in\mathbb{R})$

Giải

$4^{2x+\sqrt{x+2}}+2^{x^3}=4^{2+\sqrt{x+2}}+2^{x^3+4x-4}$ (*); Điều kiện : $x\ge -2$.

(*) $\Leftrightarrow 4^{2+\sqrt{x+2}}(2^{4x-4}-1)-2^{x^3}(2^{4x-4}-1)=0\Leftrightarrow (2^{4x-4}-1)(4^{2+\sqrt{x+2}}-2^{x^3})=0$

Do đó phương trình (*) có hai trường hợp.

- $2^{4x-4}=1\Leftrightarrow 4x-4=0\Leftrightarrow x=1$ (nhận)

- $2^{4+2\sqrt{x+2}} = 2^{x^3} \Leftrightarrow x^3 = 2\sqrt{x+2} + 4 \Leftrightarrow x^3 - 8 = 2(\sqrt{x+2} - 2)$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+4) = \frac{2(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \ (\text{nhận}) \\ x^2 + 2x + 4 = \dfrac{2}{\sqrt{x+2}+2} \ \ (1) \end{array}\right.$$

Nhận xét: Phương trình (1) có:

VT $= x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 \geq 3$; VP $= \dfrac{2}{\sqrt{x+2}+2} \leq 1$

Suy ra phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy : (*) chỉ có hai nghiệm x = 1; x = 2.

Bài 4: CAO ĐẲNG KHỐI A, B, D NĂM 2008

Giải phương trình $\log_2^2(x+1) - 6\log_2\sqrt{x+1} + 2 = 0$

Giải

$\log_2^2(x+1) - 6\log_2\sqrt{x+1} + 2 = 0 \quad (1)$

Điều kiện $x > -1$

$(1) \Leftrightarrow \log_2^2(x+1) - 3\log_2(x+1) + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(x+1) = 1 \\ \log_2(x+1) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 = 2 \\ x+1 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Bài 5: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2008

Giải phương trình $\log_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \log_{x+1}(2x-1)^2 = 4$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} 0 < 2x - 1 \neq 1 \\ 2x^2 + x - 1 > 0 \\ 0 < x + 1 \neq 1 \\ (2x-1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} < x \neq 1$

$\log_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \log_{x+1}(2x-1)^2 = 4$

$\Leftrightarrow \log_{2x-1}(2x-1)(x+1) + \log_{x+1}(2x-1)^2 = 4$

$\Leftrightarrow 1 + \log_{2x-1}(x+1) + 2\log_{x+1}(2x-1) = 4$

Đặt: $t = \log_{2x-1}(x+1) \Rightarrow \log_{x+1}(2x-1) = \dfrac{1}{\log_{2x-1}(x+1)} = \dfrac{1}{t}$

Ta có phương trình ẩn t là: $1 + t + \dfrac{2}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

- Với $t = 1 \Leftrightarrow \log_{2x-1}(x + 1) = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 2$ (nhận)
- Với $t = 2 \Leftrightarrow \log_{2x-1}(x + 1) = 2 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = x + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \text{(loại)} \\ x = \dfrac{5}{4} & \end{array}\right.$

Nghiệm của phương trình là: $x = 2$ và $x = \dfrac{5}{4}$.

Bài 6: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2007

> Giải phương trình: $\log_2(4^x + 15.2^x + 27) + 2\log_2 \dfrac{1}{4.2^x - 3} = 0$

Giải

Điều kiện: $4.2^x - 3 > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với.

$$\log_2(4^x + 15.2^x + 27) = \log_2(4.2^x - 3)^2 \Leftrightarrow 5.(2^x)^2 - 13.2^x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = -\dfrac{2}{5} \ (\text{loại}) \\ 2^x = 3 \end{array}\right.$$

Do $2^x > 0$ nên $2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$ (thỏa mãn điều kiện)

Bài 7: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2007

> Giải phương trình: $(\sqrt{2} - 1)^x + (\sqrt{2} + 1)^x - 2\sqrt{2} = 0$

Giải

Đặt $\left(\sqrt{2} - 1\right)^x = t \ (t > 0)$, khi đó phương trình trở thành:

$$t + \frac{1}{t} - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2} - 1, t = \sqrt{2} + 1$$

Với $t = \sqrt{2} - 1$ ta có $x = 1$.   Với $t = \sqrt{2} + 1$ ta có $x = -1$.

Bài 8: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2006

> Giải phương trình : $2^{x^2+x} - 4.2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với:

$$2^{2x}(2^{x^2-x} - 1) - 4(2^{x^2-x} - 1) = 0 \Leftrightarrow (2^{2x} - 4)(2^{x^2-x} - 1) = 0$$

- $2^{2x} - 4 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^2 \Leftrightarrow x = 1.$
- $2^{x^2-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$, $x = 1$.

Bài 9: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2006

Giải phương trình: $3.8^x + 4.12^x - 18^x - 2.27^x = 0$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với: $3\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + 4\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x} - 2 = 0$ (1)

Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{x}$ $(t > 0)$, phương trình (1) trở thành $3t^3 + 4t^2 - t - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (t + 1)^2 (3t - 2) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$ (vì $t > 0$).

Với $t = \frac{2}{3}$ thì $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \frac{2}{3}$ hay $x = 1$.

Bài 10: ĐỀ DỰ BỊ 2

Giải phương trình: $\log_5\left(5^x - 4\right) = 1 - x$

Giải

Điều kiện: $5^x - 4 > 0$ (a)

- Dễ thấy $x = 1$ là nghiệm của (1)
- VT: $f(x) = \log_5\left(5^x - 4\right)$ là hàm số đồng biến
- VP: $g(x) = 1 - x$ là hàm số nghịch biến

Do đó $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Bài 11:

Giải phương trình $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$.

Giải

Đặt $t = 2^{x^2-x}$ $(t > 0)$

$$2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3 \Leftrightarrow t - \frac{4}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = -1 & \text{(loại)} \\ t = 4 & \text{(nhận)} \end{array}\right.$$

Vậy $2^{x^2-x} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$.

Bài 12:

Cho phương trình $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ (2): (m là tham số). **1/** Giải phương trình (2) khi $m = 2$. **2/** Tìm m để phương trình (2) có ít nhất 1 nghiệm thuộc đoạn $\left[1\ ;\ 3^{\sqrt{3}}\right]$.

Giải

1/ Khi m = 2 thì phương trình (2) trở thành $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$

Điều kiện x > 0. Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1} \geq 1$

(2) $\Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = -3$ (loại)

- $t = 2 \Rightarrow \log_3 x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 3^{\pm\sqrt{3}}$

2/ $1 \leq x \leq 3^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 1 \leq \log_3^2 x + 1 \leq 4 \Rightarrow 1 \leq t \leq 2$.

Phương trình (2) có ít nhất 1 nghiệm thuộc $\left[1; 3^{\sqrt{3}}\right]$

$\Leftrightarrow 2m = t^2 + t - 2 = f(t)$ có nghiệm $t \in [1, 2]$

Vì f tăng trên [1, 2] nên ycbt $\Leftrightarrow f(1) \leq 2m \leq f(2) \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$.

✓ *Vấn đề 2:* BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$ (1)

- Nếu a > 1: (1) $\Leftrightarrow f(x) > g(x)$
- Nếu 0 < a < 1: (1) $\Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Tổng quát:

- $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0;\ a \neq 1 \\ (a-1)(f(x) - g(x)) > 0 \end{cases}$
- $a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)\left[f(x) - g(x)\right] \geq 0 \end{cases}$

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ (1)

- Nếu a > 1 : (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$
- Nếu 0 < a < 1 : (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > f(x) \end{cases}$

B.ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2008

Giải bất phương trình: $\log_{0,7}\left(\log_6 \dfrac{x^2 + x}{x + 4}\right) < 0$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x+4} > 0 \\ \log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4} > 0 \end{cases}$

Bất phương trình tương đương với $\log_{0,7}\left(\log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4}\right) < \log_{0,7} 1$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x+4} > 6 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x-24}{x+4} > 0$$

$$\Leftrightarrow -4 < x < -3 \text{ hay } x > 8$$

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2008

Giải bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x^2-3x+2}{x} \geq 0$

Giải

Điều kiện: $\dfrac{x^2-3x+2}{x} > 0$

Bất phương trình tương đương với $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x^2-3x+2}{x} \geq \log_{\frac{1}{2}} 1$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x} > 0 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x} > 0 \\ \dfrac{x^2-4x+2}{x} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-3x+2)x > 0 \\ (x^2-4x+2)x \leq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \vee x > 2 \\ x < 0 \vee 2-\sqrt{2} \leq x \leq 2+\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2-\sqrt{2} \leq x < 1 \vee 2 < x \leq 2+\sqrt{2}.$$

Bài 3: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2007

Giải bất phương trình: $2\log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \leq 2$

Giải

Điều kiện: $x > \dfrac{3}{4}$. Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_3 \dfrac{(4x-3)^2}{2x+3} \leq 2$

$$\Leftrightarrow (4x-3)^2 \le 9(2x+3) \Leftrightarrow 16x^2 - 42x - 18 \le 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \le x \le 3$$

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là: $\frac{3}{4} < x \le 3$.

Bài 4: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2006

Giải bất phương trình: $\log_5(4^x + 144) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1)$.

Giải

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\log_5(4^x + 144) - \log_5 16 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1) \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \log_5(4^x + 144) < \log_5 16 + \log_5 5 + \log_5(2^{x-2} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_5(4^x + 144) < \log_5[80(2^{x-2} + 1)]$$

$$\Leftrightarrow 4^x + 144 < 80(2^{x-2} + 1) \Leftrightarrow 4^x - 20.2^x + 64 < 0$$

$$\Leftrightarrow 4 < 2^x < 16 \Leftrightarrow 2 < x < 4$$

Bài 5: ĐỀ DỰ BỊ 2

Giải phương trình: $\log_5\left(5^x - 4\right) = 1 - x$

Giải

Điều kiện : $5^x - 4 > 0$ (a)

- Để thấy x = 1 là nghiệm của (1)
- VT : $f(x) = \log_5\left(5^x - 4\right)$ là hàm số đồng biến
- VP : $g(x) = 1 - x$ là hàm số nghịch biến

Do đó x = 1 là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 6:

Giải bất phương trình: $\log_x\left[\log_3\left(9^x - 72\right)\right] \le 1$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} 0 < x \ne 1 \\ 9^x - 72 > 0 \\ \log_3\left(9^x - 72\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \log_9 73$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \log_3\left(9^x - 72\right) < x$ (Vì $x > \log_9 73 > 1$)

$$\Leftrightarrow 9^x - 3^x - 72 < 0 \Leftrightarrow -8 \le 3^x \le 9 \quad \Leftrightarrow \quad x \le 2$$

Kết hợp với điều kiện ta được $\log_9 73 < x \le 2$.

✓ *Vấn đề 3:* HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

A.PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Thường sử dụng phương pháp biến đổi từng phương trình trong hệ, sau đó dùng phương pháp thế để tìm nghiệm.

B.ĐỀ THI

Bài 1: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2010

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2(3y-1)=x \\ 4^x+2^x=3y^2 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Điều kiện: $3y - 1 > 0$

Ta có $\begin{cases} \log_2(3y-1)=x \\ 4^x+2^x=3y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-1=2^x \\ 4^x+2^x=3y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{2^x+1}{3} \\ 4^x+2^x=3y^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{2^x+1}{3} \\ 3(4^x+2^x)=(2^x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{2^x+1}{3} \\ 2.4^x+2^x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{2^x+1}{3} \\ (2^x+1)(2^x-\dfrac{1}{2})=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{2^x+1}{3} \\ 2^x=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ (nhận)

Bài 2: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2010

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-4x+y+2=0 \\ 2\log_2(x-2)-\log_{\sqrt{2}} y=0 \end{cases}$

Giải

$\begin{cases} x^2-4x+y+2=0 & (1) \\ 2\log_2(x-2)-\log_{\sqrt{2}} y=0 & (2) \end{cases}$; Điều kiện: $x > 2$, $y > 0$

$(2) \Leftrightarrow (x-2)^2 = y^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-2 \\ y=2-x \end{array}\right.$

- $y = x-2$: $(1) \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ (loại)} \\ x=3 \Rightarrow y=1 \end{array}\right.$

- $y = 2 - x$: (1) $\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 4 \Rightarrow y = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vậy hệ có một nghiệm $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$.

Bài 3: ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2009

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2\left(x^2 + y^2\right) = 1 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 81 \end{cases} \left(x, y \in \mathbb{R}\right)$

Giải

Với điều kiện xy > 0 (*), hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = \pm 2 \end{cases}$$

Kết hợp (*), hệ có nghiệm: (x; y) = (2; 2) và (x; y) = (–2; –2)

Bài 4: ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2006

Chứng minh rằng với mọi a > 0, hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) \\ y - x = a \end{cases}$

Giải

Điều kiện: x, y > –1. Hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} e^{x+a} - e^x + \ln(1+x) - \ln(1+a+x) = 0 & (1) \\ y = x + a & (2) \end{cases}$$

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm duy nhất trong khoảng $(-1; +\infty)$.

Xét hàm số f(x) = $e^{x+a} - e^x + \ln(1+x) - \ln(1+a+x)$ với x > –1.

Do f(x) liên tục trong khoảng $(-1; +\infty)$ và $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

nên phương trình f(x) = 0 có nghiệm trong khoảng $(-1; +\infty)$.

Mặt khác: $f'(x) = e^{x+a} - e^x + \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{1+a+x}$

$$= e^x(e^a - 1) + \frac{a}{(1+x)(1+a+x)} > 0, \ \forall x > -1$$

$\Rightarrow$ f(x) đồng biến trong khoảng $(-1; +\infty)$.

Suy ra phương trình f(x) = 0 có nghiệm duy nhất trong khoảng $(-1; +\infty)$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài 5: ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2005

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{2-y}=1 \\ 3\log_9(9x^2)-\log_3 y^3=3 \end{cases}$

Giải

$\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{2-y}=1 & (1) \\ 3\log_9(9x^2)-\log_3 y^3=3 & (2) \end{cases}$. Điều kiện : $\begin{cases} x \ge 1 \\ 0 < y \le 2 \end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow 3(1 + \log_3 x) - 3\log_3 y = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 y \Leftrightarrow x = y$.

Thay y = x vào (1) ta có

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=1 \Leftrightarrow x-1+2-x+2\sqrt{(x-1)(2-x)}=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(2-x)}=0 \Leftrightarrow x=1,\ \ x=2.$$

Kết hợp với điều kiện (*) hệ có hai nghiệm là (x; y) = (1; 1) và (x; y) = (2; 2).

Bài 6: ĐỀ DỰ BỊ 1 - ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2005

Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}}-7^{2+\sqrt{x+1}}+2005x \le 2005 & (1) \\ x^2-(m+2)x+2m+3 \ge 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x \ge -1$.

Ta có : (1) $\Leftrightarrow 7^{2x+\sqrt{x+1}}-7^{2+\sqrt{x+1}} \le 2005(1-x)$

- Xét $-1 \le x \le 1 \Rightarrow 2x \le 2 \Rightarrow 7^{2x+\sqrt{x+1}}-7^{2+\sqrt{x+1}} \le 0 \le 2005(1-x)$
  nên (1) đúng $\forall x \in [-1; 1]$
- Xét $x > 1 \Rightarrow 2x > 2 \Rightarrow 7^{2x+\sqrt{x+1}}-7^{2+\sqrt{x+1}} > 0 > 2005(1-x)$
  nên (1) hiển nhiên sai. Do đó (1) $\Leftrightarrow -1 \le x \le 1$
- Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi: (2) có nghiệm $\in [-1; 1]$
  $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 \ge m(x - 2)$ có nghiệm $x \in [-1; 1]$

  $\Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x+3}{x-2} \le m$ (vì $x-2<0$) có nghiệm $x \in [-1; 1]$

  Xét hàm $f(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{x-2}$, $x \in [-1; 1]$

  $f'(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$

x	$-\infty$	-1		$2-\sqrt{3}$		1		2		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
f'(x)			+	0	−		−	‖	−	0	+	
f(x)		-2	↗		↘	-2		‖				

Dựa vào bảng biến thiên hệ có nghiệm $\Leftrightarrow -2 \le m$

Bài 7: ĐỀ DỰ BỊ 1

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \dfrac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện $\begin{cases} y > 0 \\ y - x > 0 \end{cases}$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) + \log_{\frac{1}{4}} \dfrac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y-x}{y} = \dfrac{1}{4} \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{4}{3}x \\ x^2 + \dfrac{16}{9}x^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{4}{3}x \\ x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ (nhận) $\vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases}$ (loại)

Bài 8:

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \dfrac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases}$.

Giải

$\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \dfrac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ 2^x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2 - 4y = y^3 \\ y = 2^x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 5y + 4 = 0 \\ y = 2^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$.

Bài 9: ĐỀ DỰ BỊ 1

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - 4|y| + 3 = 0 & (1) \\ \sqrt{\log_4 x} - \sqrt{\log_2 y} = 0 & (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 1 \end{cases}$.

(2) $\Leftrightarrow \log_4 x = \log_4 y^2 \Leftrightarrow x = y^2$. Thay $x = y^2$ vào (1) ta được : $y^2 - 4|y| + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |y| = 1 \\ |y| = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = 3 \Rightarrow x = 9 \end{array} \right.$ (do $y \ge 1$)

Vậy hệ có 2 cặp nghiệm (1; 1) và (9; 3).