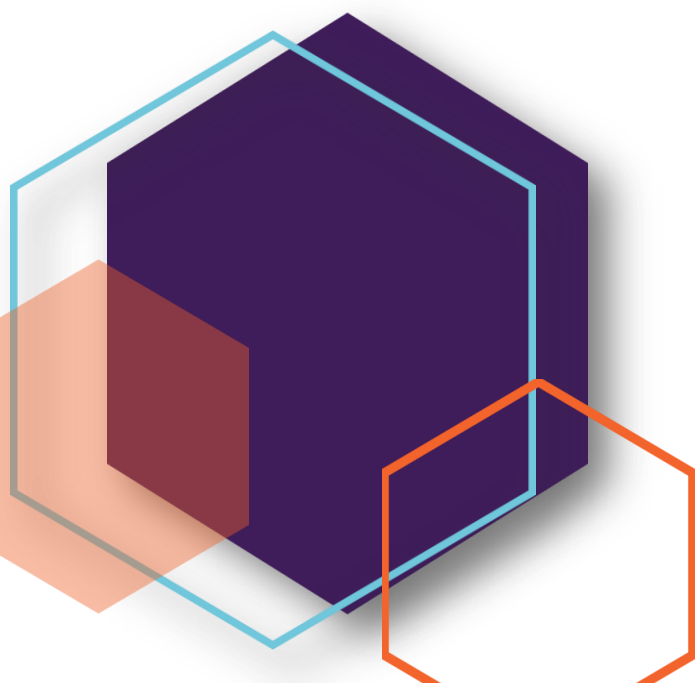


CHINH PHỤC OLYMPIC TOÁN



VẼ ĐẸP ĐÁNH GIÁ

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ
PHƯƠNG TRÌNH



TẬP CHÍ VÀ TƯ LIỆU TOÁN HỌC

LỜI GIỚI THIỆU

Trước năm 2017 phương trình hay hệ phương trình đều là các vấn đề khá quen thuộc và thường xuyên xuất hiện trong kỳ thi đại học, THPT Quốc Gia hay các kỳ thi học sinh giỏi với hàng trăm bài toán được đưa ra trong các đề thi thử, đề thi học sinh giỏi hay thảo luận trên những diễn đàn. Mặc dù từ năm 2017 trở đi vấn đề này tuy không còn giữ được sức nóng như trước nữa nhưng nó vẫn giữ một phần quan trọng trong chương trình toán phổ thông và cũng là một phần không thể thiếu trong các kỳ thi học sinh giỏi, Olympic. Có thể thấy với mức độ quan trọng của mình thì đã có rất nhiều tác giả đưa ra những cuốn sách của mình nói về vấn đề này kèm với rất nhiều dạng toán có liên quan, hầu hết tất cả các dạng được viết phương pháp và cách giải rất cụ thể. Tuy nhiên với mình – một người đã từng trải qua những năm tháng học phổ thông – thì mình có thể thấy rằng phương pháp đánh giá là một phương pháp rất mạnh và hiệu quả để xử lý các bài toán phức tạp và cũng đã được các anh chị, thầy cô chú ý để viết thành một số chuyên đề riêng về phương pháp này nhưng bản thân mình thấy các chuyên đề đó hầu hết chưa thực sự sâu và chưa có nhiều sự thống nhất. Chính vì lý do đó mình cùng 2 người bạn của mình đã nảy ra ý tưởng viết một cuốn sách để có thể tổng hợp, sáng tạo các bài toán hay và khó hơn nhằm đưa đến cho bạn đọc một cái nhìn, và hướng đi mới trong việc giải các bài toán phương trình vô tỷ. Trong cuốn sách này mục đích của mình là hướng tới 2 đối tượng là các bạn học sinh lớp 10 đang học phương trình, hệ phương trình và các bạn đang ôn thi học sinh giỏi nên sẽ có một số phần có sự trợ giúp của máy tính cầm tay để cho các bạn tham khảo. Cuốn sách được viết nên không thể chỉ có mình cá nhân mình mà hoàn thành được mà là sự cố gắng của 2 người bạn của mình là:

1. Nguyễn Mai Hoàng Anh – Lớp 10A1 – THPT Thực hành Cao Nguyên Đak Lak
2. Nguyễn Trường Phát – THPT Marie Curie

Bên cạnh đó mình cũng xin gửi lời cảm ơn tới các thầy cô, các anh chị đã góp ý, giúp mình biên soạn nên cuốn sách này mà tiêu biểu là:

1. Thầy Lã Duy Tiến – THPT Bình Minh – Ninh Bình
2. Thầy Nguyễn Thế Quốc - Khánh Hòa – Thừa Thiên Huế
3. Thầy Bùi Quý Minh – Giáo viên trường THPT Hồng Bàng – Hải Phòng
4. Thầy Đào Văn Minh – GDNN - GDTX Kiến Xương - Thái Bình
5. Thầy Lưu Thế Dũng – Giáo viên trường THPT Chuyên Sơn La
6. Thầy Nguyễn Bá Long – Giáo viên trường THPT Như Thanh – Thanh Hóa
7. Thầy Văn Huấn – Giáo viên trường DTNT – Hòa Bình
8. Anh Bùi Thế Việt – Sinh viên Đại học FPT
9. Thầy Mai Xuân Vinh – Sở Giáo dục và Đào tạo Nghệ An

10. Thầy Lê Văn Đoàn – THPT An Hữu
11. Anh Nguyễn Minh Tuấn – THPT Nguyễn Thị Minh Khai – Hà Nội
12. Anh Trần Quốc Thịnh – Hà Nội
13. Thầy Nguyễn Minh Quân: Giáo viên trường THPT Trần Văn Bảy – Sóc Trăng
14. Thầy Phạm Hùng Hải: Giáo viên trường THPT Hoàng Hoa Thám – Đà Nẵng
15. Cô Nguyễn Thị Trang Trang: Giáo viên THPT Lê Quý Đôn – Thạch Hà – Hà Tĩnh
16. Bạn Phan Trọng Nghĩa – Đại học sư phạm TPHCM
17. Anh Hồ Xuân Hùng – Sinh viên đại học Bách Khoa Hà Nội
18. Bạn Trần Hằng Nga – THPT Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương
19. Thầy Nguyễn Tài Tuệ - THPT Nguyễn Khuyến
20. Bạn Lê Quốc Dũng – TPHCM
21. Cô Trần Cẩm Huyền – THPT Cẩm Phả - Quảng Ninh
22. Anh Hàn Đặng Phương Nam – Đại học y dược Thái Nguyên
23. Thầy Phạm Kim Chung – Administrator K2pi.net.vn
24. Thầy Nguyễn Hồng Duy – Administrator K2pi.net.vn

Mình mong rằng cuốn sách này sẽ mang lại cho các bạn học sinh đang học lớp 10, các bạn đang ôn thi HSG những kiến thức, kỹ năng, kinh nghiệm để xử lý các bài toán hay và khó, đồng thời giúp các thầy cô có một tài liệu bổ ích để tham khảo đồng thời giúp ích cho công tác bồi dưỡng học sinh giỏi. Mặc dù đã rất cố gắng biên soạn một cách chi tiết tỉ mỉ nhưng không thể tránh khỏi các sai sót nhất định, mong bạn đọc bỏ qua và góp ý trực tiếp cho nhóm tác giả qua địa chỉ của mình

NGUYỄN MINH TUẤN

Sinh viên K14 – Khoa học máy tính – Đại học FPT Hà Nội

Email: tuangenk@gmail.com

Phone: 0343763310

Cuối cùng thay mặt nhóm tác giả cảm ơn các bạn đã theo dõi cuốn sách này, chúc các bạn học tập tốt và đồng thời các thành cô thành đạt hơn trong công việc.

Nhóm tác giả

Nguyễn Minh Tuấn – Nguyễn Trường Phát – Nguyễn Mai Hoàng Anh

MỤC LỤC

PHẦN I. KỸ THUẬT ĐÁNH GIÁ PHƯƠNG TRÌNH VÔ NGHIỆM.....	1
I. CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4 VÔ NGHIỆM.....	1
II. CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH BẬC 6 VÔ NGHIỆM.....	3
III. CÁCH PHÂN TÍCH RIÊNG CHO HAI DÒNG MÁY ĐẶC BIỆT.....	4
IV. CHỨNG MINH TRÊN KHOẢNG.....	6
V. PHƯƠNG PHÁP DẠC CHỨNG MINH TRÊN ĐOẠN.....	8
VI. CÁC BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC 1 BIẾN.....	13
PHẦN 2. PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ ĐÁNH GIÁ PHƯƠNG TRÌNH - HỆ	
PHƯƠNG TRÌNH34	34
CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ	
I. CÁC BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH.....	34
PHƯƠNG PHÁP HÀM ĐẶC TRƯNG.....	34
PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH HÀM ĐƠN ĐIỆU.....	54
II. CÁC BÀI TOÁN HỆ PHƯƠNG TRÌNH.....	79
PHẦN III. BẤT ĐẲNG THỨC ĐÁNH GIÁ PHƯƠNG TRÌNH - HỆ	
PHƯƠNG TRÌNH112	112
CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CẦN NHỚ	
I. CÁC BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH.....	113
ĐÁNH GIÁ MIỀN NGHIỆM.....	113
ĐÁNH GIÁ THEO CỤM.....	121
KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN.....	127
II. CÁC BÀI TOÁN VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH.....	192
TÀI LIỆU THAM KHẢO267	267

PHẦN I. KỸ THUẬT ĐÁNH GIÁ PHƯƠNG TRÌNH VÔ NGHIỆM.

I. CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4 VÔ NGHIỆM.

Cách 1. Sử dụng tính chất tam thức bậc 2.

Nền tảng: Ta sẽ phân tích phương trình ban đầu thành $\left(x^2 + \frac{ax}{2} + m\right)^2 + f(x)$ trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc 2 luôn lớn hơn 0 với mọi $x \in \mathbb{R}$

Ví dụ 1: Chứng minh phương trình sau vô nghiệm $x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 7 = 0$

Giải

- Bước 1:** Đầu tiên ta biến đổi phương trình theo tham số m như sau:

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{x}{2} + m\right)^2 + \left(\frac{11}{4} - 2m\right)x^2 + (1-m)x + 7 - m^2 = 0$$

Nhiều bạn sẽ đặt ra câu hỏi tại sao lại là $x^2 + \frac{x}{2} + m$. Rất đơn giản, khi ta khai triển biểu thức $\left(x^2 + \frac{x}{2} + m\right)^2$ sẽ xuất hiện ngay x^3 vì $2 \cdot x^2 \cdot \frac{x}{2} = x^3$. Hiểu rồi chứ các bạn, các bài khác cũng tách tương tự được như vậy, chỉ có điều ta phải đưa nó về dạng tổng quát: $x^4 + 2ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ thì mới tách thành như trên.

- Bước 2:** Ta tính Δ theo tham số m : $\Delta = (1-m)^2 - 4\left(\frac{11}{4} - 2m\right)(7-m^2)$

- Bước 3:** Ta thấy phương trình ban đầu vô nghiệm thì phương trình

$$\left(\frac{11}{4} - 2m\right)x^2 + (1-m)x + 7 - m^2 = 0$$

Phải vô nghiệm. Để phương trình này vô nghiệm thì $\begin{cases} \Delta < 0 \\ \frac{11}{4} - 2m > 0 \end{cases}$

- Dùng MODE 7 ,nhập hàm sau vào máy:

$$F(X) = (1-X)^2 - 4\left(\frac{11}{4} - 2X\right)(7-X^2)$$

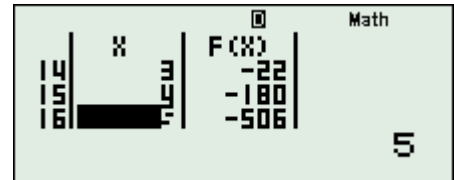
- Start = -10
- End = 10
- Step = 1

Sau đó ta tìm các giá trị X làm $F(X) < 0$ & $\frac{11}{4} - 2X > 0$

Nhìn vào bảng ta thấy rất nhiều giá trị làm $F(X) < 0$,

Math	
$f(X) = (X^2 + \frac{X}{2} + m)^2 + (\frac{11}{4} - 2m)X^2 + (1-m)X + 7 - m^2$	
Math	
X	$F(X)$
-2	-72
-1	-110
0	-76

nhưng tuy nhiên ta phải chọn làm sao cho $\frac{11}{4} - 2X > 0$ và đó phải là một giá trị bé để rút gọn. Với lí do như thế tôi sẽ chọn $X = 0$ hay $m = 0$



- **Bước 4:** Do biết $m = 0$ nên phương trình sẽ trở thành:

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 7 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}\left(x + \frac{2}{11}\right)^2 + \frac{76}{11}}_{>0 \forall x} = 0$$

Nên phương trình vô nghiệm!

Cách 2. Sử dụng đạo hàm.

Ta xét phương trình tổng quát: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

- **Bước 1:** Đạo hàm vế trái: $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$
- **Bước 2:** Giải phương trình $f'(x) = 0$. Nếu :
 1. Phương trình có 1 nghiệm thì đây là điểm rơi của bài toán.
 2. Phương trình có nhiều nghiệm thì thử xem nghiệm nào làm vế trái nhỏ nhất
- **Bước 3:** Tìm k sao cho:

$$+x^4+ax^3+bx^2+cx+d-\left(x^2+\frac{ax}{2}+k\right)^2>0\forall x$$

$$+k \approx -x_0^2 - \frac{a}{2}x_0 \text{ nhất.}$$

Mục tiêu của phương pháp này tương tự như phương pháp ở trên nhưng có vài điểm tối ưu hơn.

- **Bước 4:** Sau khi ta tìm được k thì chỉ việc lấy :

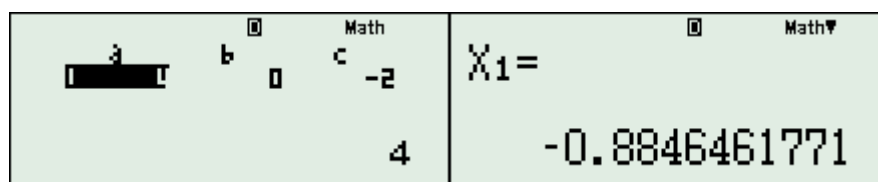
$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d-\left(x^2+\frac{a}{2}x+k\right)^2=mx^2+nx+p>0\forall x$$

Do $f(x) - g(x) = h(x)$ mà trong đó $\begin{cases} h(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ nên $f(x) > 0$. Thế là xong bài!

Ví dụ 2: Chứng minh rằng $f(x) = x^4 - x^2 + x + 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Giải

- **Bước 1:** Đạo hàm vế trái $f'(x) = 4x^3 - 2x + 1$
- **Bước 2:** Giải phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = -0.8846461771$



- **Bước 3: Tìm k:**

$$k \approx -x_0^2 - \frac{a}{2}x_0 = -0.7825988 \Rightarrow k = -0.8 = -\frac{4}{5}$$

- **Bước 4:** Ta lấy: $x^4 - x^2 + x + 2 - \left(x^2 - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{3}{5}x^2 + x + 1,36 > 0 \forall x$

Do đó phương trình ban đầu vô nghiệm! Nhanh hơn chứ!

Ví dụ 3: Chứng minh rằng $f(x) = 2x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 3 > 0$

Giải

- **Bước 1:** Đạo hàm: $f'(x) = 8x^3 + 3x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow x = x_0 = -1$
- **Bước 2:** Tìm $k = -x_0^2 - \frac{a}{2}x_0 = -\frac{3}{4}$
- **Bước 3:** Lấy $f(x) - 2\left(x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{8}(x+1)^2 + 1$. Xong!

Ví dụ 4: Chứng minh rằng $f(x) = 4x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x + 14 > 0$

Giải

- **Bước 1:** Đạo hàm $f'(x) = 16x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = -0,7909677904$
- **Bước 2:** Tìm $k \approx -x_0^2 - \frac{a}{2}x_0 \approx -\frac{1}{2}$
- **Bước 3:** Lấy $f(x) - 4\left(x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}\left(x + \frac{4}{7}\right)^2 + \frac{87}{7} > 0 \forall x$

II. CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH BẬC 6 VÔ NGHIỆM.

Ta xét phương trình tổng quát sau: $f(x) = x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$

- Ta sẽ thêm bớt biểu thức: $\left(x^3 + \frac{a}{2}x^2 + mx + n\right)^2$
- Lấy $f(x) - \left(x^3 + \frac{a}{2}x^2 + mx + n\right)^2 = \left(b - \frac{a^2}{4} - 2m\right)x^4 + \dots$
- Giải phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ thỏa mãn $\min_{\mathbb{R}} f(x) = f(x_0)$
- Tìm m thỏa mãn $\begin{cases} m \in \mathbb{Q} \\ b - \frac{a^2}{4} - 2m > 0 \end{cases}$, thông thường ta sẽ cho $b - \frac{a^2}{4} - 2m = 1$
- Tìm n thỏa mãn $\begin{cases} n \in \mathbb{Q} \\ x_0^3 + \frac{a}{2}x_0^2 + mx_0 + n \approx 0 \end{cases}$
- Khi tìm được m, n bài toán coi như được giải quyết!

Sau đây là 2 ví dụ để tìm hiểu rõ cách làm.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $f(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^2 + 2x + 1 > 0$

Giải

- Ta có $f'(x) = 6x^5 - 10x^4 - 4x^3 + 8x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = -0,25219838$

Math -10X^4-4X^3+8X+2	Math 6X^5-10X^4-4X^3+8X+2 X=-0.25219838 L-R=0
--------------------------	--

- Lấy $f(x) - (x^3 - x^2 + mx + n)^2 = (-2 - 2m)x^4 + \dots$
- Ta tìm m thỏa mãn $-2 - 2m = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$
- Ta tìm n thỏa mãn $x_0^3 - x_0^2 - \frac{3}{2}x_0 + n = 0 \Leftrightarrow n = -\frac{1}{4}$
- Lấy $f(x) - \left(x^3 - x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{16}x^2 + \frac{11}{16} > 0$
- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Ví dụ 2: Chứng minh rằng $f(x) = x^6 + 2x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 8x^2 + 2x + 12 > 0$

Giải

- Ta có $f'(x) = 6x^5 + 10x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 16x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = -0,115820665$

Math X^3-12X^2+16X+2	Math 6X^5+10X^4-8X^3-12X^2+16X+2 X=-0.115820665 L-R=0
-------------------------	--

- Lấy $f(x) - (x^3 + x^2 + mx + n)^2 = (-3 - 2m)x^4 + \dots$
- Ta tìm m thỏa mãn $-3 - 2m = 1 \Leftrightarrow m = -2$
- Ta tìm n thỏa mãn $x_0^3 + x_0^2 - 2x_0 + n \approx 0 \Leftrightarrow n \approx -\frac{1}{4}$. Để ý thấy $f(x_0) \approx 11,58 > 0$ rất nhiều nên đây là một bài toán khá lỏng lẻo. Do đó ta có thể coi $n = 0$ để tiện rút gọn bằng máy tính.
- Lấy $f(x) - (x^3 + x^2 - 2x)^2 = x^4 + 4x^2 + 2x + 12 > 0$
- Vậy bài toán đã được giải quyết hoàn toàn.

III. CÁCH PHÂN TÍCH RIÊNG CHO HAI DÒNG MÁY ĐẶC BIỆT.

Phương pháp này chỉ hữu ích cho 2 dòng máy VINACAL 570es PLUS II và CASIO 570VN - PLUS bởi vì 2 dòng máy này có tính năng tính min max của 1 tam thức bậc 2. Đối với máy VINACAL thì ta sẽ bấm $\boxed{\text{SHIFT}}\boxed{6}\boxed{6}$ máy sẽ hiện lên như sau:

1:Q...r 3:GCD 5:lim	2:LCM 4:FACT 6:MinMax	Math a b c Y=aX^2+bX+c 0
---------------------------	-----------------------------	-----------------------------------

Còn máy CASIO VN thì tích hợp trong chức năng giải phương trình bậc 2.

Nội dung

Phương pháp này sẽ dùng tính chất cơ bản của tam thức bậc 2 như sau: Xét tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ thì ta luôn có $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$. Tương chừng đơn giản nhưng lại giúp ích khá nhiều!

Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{16} > 0 \forall x$

Giải

- Nếu quen với phương pháp này thì sẽ cho ra kết quả khoảng 15s .
- Do tôi dùng máy VINACAL nên sẽ khởi động tính năng tìm min max.
- Nhập vào máy $1 \square = 3 \square = 3 \square =$, máy sẽ cho ra kết quả:

X-Value Minimum= $-\frac{3}{2}$	Y-Value Minimum= $\frac{3}{4}$
---	--

Vậy ta sẽ có $x^4 + 3x^3 + 3x^2 = x^2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3x^2}{4}$.

- Tiếp tục nhập $\frac{3}{4} \square = \frac{3}{4} \square = \frac{3}{16} \square =$ ta lại được kết quả:

X-Value Minimum= $-\frac{1}{2}$	Y-Value Minimum= 0
---	------------------------------

Vậy ta sẽ có $\frac{3x^2}{4} + \frac{3}{4}x + \frac{3}{16} = \frac{3}{4}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

- Vậy ta được $f(x) = x^2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 > 0$. Bài toán đã được giải quyết!

Nhanh chứ!. Đây vẫn là bình thường ta sẽ chiến một ví dụ tiếp theo!

Ví dụ 2: Chứng minh rằng $f(x) = x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 > 0$

Giải

1. Nhập 3 hệ số đầu vào máy ta sẽ được kết quả:

X-Value Minimum= $\frac{3}{2}$	Y-Value Minimum= $\frac{3}{4}$
--	--

Vậy sẽ có $x^6 - 3x^5 + 3x^4 = x^4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^4$

2. Nhập vào máy 3 hệ số tiếp theo sẽ được kết quả:

0 Math ▾ X-Value Minimum= $\frac{2}{3}$	0 Math ▲ Y-Value Minimum= $\frac{5}{3}$
---	---

Vậy sẽ có $\frac{3}{4}x^4 - x^3 + 2x^2 = \frac{3}{4}x^2\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}x^2$

3. Nhập vào máy 3 hệ số cuối sẽ được kết quả:

0 Math ▾ X-Value Minimum= $\frac{3}{10}$	0 Math ▲ Y-Value Minimum= $\frac{17}{20}$
--	---

Vậy sẽ có $\frac{5}{3}x^2 - x + 1 = \frac{5}{3}\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{17}{20}$

4. Vậy $f(x) = x^4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^2\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{17}{20} > 0 \forall x$.

Bây giờ sẽ chiến nốt ví dụ cuối cùng!

Ví dụ 3: Chứng minh rằng $f(x) = x^8 + \frac{2}{3}x^7 + 3x^6 + \frac{4}{3}x^5 + \frac{14}{3}x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + \frac{1}{3} > 0 \forall x$

Giải

Chỉ cần bấm máy khoảng 1 phút ta sẽ có kết quả dưới đây:

$$f(x) = x^6\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{26}{9}x^4\left(x + \frac{3}{13}\right)^2 + \frac{176}{39}x^2\left(x - \frac{39}{176}\right)^2 + \frac{489}{176}\left(x - \frac{88}{489}\right)^2 + \frac{119}{489}$$

Tự làm nhé! Cuối cùng hãy thử sức với bài sau đây.

Chứng minh:

$$f(x) = x^{12} + 2x^{11} + 18x^{10} - 11x^9 + 18x^8 - 16x^7 + 22x^6 - 17x^5 + 31x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 10x + 21 > 0$$

Chú ý rằng:

1. Nếu bạn nào không có 2 dòng máy trên thì vẫn có thể tính được như trên nhưng mất thời gian tính $-\frac{b}{2a}$ & $\frac{-\Delta}{4a}$. Nhưng đừng ngại nhé làm nhiều sẽ tiến bộ.
2. Nếu bạn nào có VINACAL hay VN PLUS thì đừng vội mừng, nhiều khi gặp phải những bài hệ số xấu thì cũng phải tính tay thôi vì máy tính không hiển thị được, thế là bằng nhau. Tiêu biểu là bài bên trên tôi cho, vui vẻ nhé.

IV. CHỨNG MINH TRÊN KHOẢNG.

Đầu tiên xét dạng tổng quát cho các bài toán có điểm rơi không chặt.

Giả sử cần chứng minh phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm trên $[b;+\infty); (-\infty;a]$. Ta sẽ CALC sao cho $X+a=1000; X+b=1000$ sau đó khai triển như bình thường. Để hiểu rõ hơn ta sẽ cùng chiến một ví dụ lấy.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $f(x)=3x^4-2x^3-2x^2+10x+4>0\forall x\in[2;+\infty)$

Giải

Cách 1: Hàm số

- Ta có $f'(x)=12x^3-6x^2-4x+10\Rightarrow f''(x)=36x^2-12x-4$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1+\sqrt{5}}{6} \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{6} \end{cases}$$

- Lập bảng biến thiên cho $f'(x)$ ta được:

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{6}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{6}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	0	+
$f'(x)$	$-\infty$	$\frac{83+5\sqrt{5}}{9}$	$\frac{83-5\sqrt{5}}{9}$	$+\infty$

Nhìn vào bảng biến thiên ta có thể thấy phương trình $f'(x)=0$ có 1 nghiệm duy nhất thuộc vào khoảng $(-0,9;-0,8)$ do $f'(-0,9).f'(-0,8)<0$.

Giả vờ nghiệm đó là $x=x_0=-0,8997774777$. Lại tiếp tục lập bảng biến thiên cho $f(x)$ ta được $f(x)>0\forall x\in[2;+\infty)$. Vậy là hết bài!

Cách 2: Nhóm thành tổng dựa vào điều kiện.

Ta dễ dàng nhận thấy $x\geq 2\Rightarrow x-2\geq 0$ nên nảy ra ý tưởng viết $f(x)$ dưới dạng :

$$f(x)=a(x-2)^4+b(x-2)^3+c(x-2)^2+d(x-2)+e$$

Và công việc này sẽ nhờ tới sự trợ giúp của thủ thuật CASIO.

- Ta sẽ CALC X sao cho $X-2=1000\Rightarrow X=1002$
- CALC $X=1002$ ta được kết quả $3,022058\times 10^{12}\approx 3(x-2)^4$
- Ghi vào sau $-3(X-2)^4$, CALC $X=1002$ ta được kết quả $2,205807\times 10^{10}\approx 22(x-2)^3$
- Ghi vào sau $-22(X-2)^3$, CALC $X=1002$ ta được kết quả $58074048\approx 58(x-2)^2$
- Ghi vào sau $-58(X-2)^2$, CALC $X=1002$ ta được kết quả $74048=74(x-2)+48$

- Thử lại với $X = \pi$ ta được kết quả là 0. Vậy kết quả luôn đúng
- Vậy $f(x) = 3(x-2)^4 + 22(x-2)^3 + 58(x-2)^2 + 74(x-2) + 48 > 0 \forall x \in [2; +\infty)$
- Thế là bài toán đã được giải quyết!

Ví dụ 2: Chứng minh rằng $f(x) = x^5 - x^4 - x^3 + 4x^2 + 6x + 1 < 0 \forall x \leq -1$

Giải

- Đúng như những bước làm bên trên ta sẽ tách thành:

$$f(x) = (x+1)^5 - 6(x+1)^4 + 13(x+1)^3 - 17(x+1)^2 + 20(x+1) - 10$$

- Để ý thấy với $x \leq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^5 \leq 0 \\ 13(x+1)^3 \leq 0 \Rightarrow f(x) < 0 \forall x \in (-\infty; -1] \\ 20(x+1) \leq 0 \end{cases}$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng $f(x) = x^7 - x^6 + x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 10x - 2 > 0 \forall x > 1$

Giải

Do bài này bậc tương đối cao nên ta sẽ cứ làm như bình thường và tìm các hệ số còn lại bằng đồng nhất hệ số.

Ta có $f(x) = (x-1)^7 + 6(x-1)^6 + 16(x-1)^5 + 23(x-1)^4 + a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + f(1)$

Lập hệ, cho x lần lượt bằng 1, 2, 3 sẽ tìm được a, b, c .

Ta được:

$$f(x) = (x-1)^7 + 6(x-1)^6 + 16(x-1)^5 + 23(x-1)^4 + 25(x-1)^3 + 20(x-1)^2 + 16(x-1) + 7$$

Bài toán đã được giải quyết

V. PHƯƠNG PHÁP DAC CHỨNG MINH TRÊN ĐOẠN

Ý tưởng của phương pháp này chính là phương pháp DAC - Phương pháp này đã có trong cuốn " Những viên kim cương trong bất đẳng thức - Trần Phương" bạn đọc có thể tham khảo thêm!

Ví dụ 1: Chứng minh rằng $f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 5x + 3 > 0 \forall x \in [1; +\infty)$

Giải

Để ý thấy:

$$f(x) = (x-1)^5 + 4(x-1)^4 + 4(x-1)^3 - 4(x-1)^2 - 4(x-1) + 4$$

$$4(x-1)^4 + 4(x-1)^3 - 4(x-1)^2 - 4(x-1) + 4 = 4 \left[\left(x^2 - \frac{3x+1}{2} + \frac{1}{5} \right)^2 + \frac{7}{20} \left(x - \frac{9}{7} \right)^2 + \frac{58}{175} \right] > 0$$

Nên do đó $f(x) > 0 \forall x \in [1; +\infty)$ (đpcm). Xong! Hết bài.

Hướng dẫn

Do ta đang cần chứng minh $f(x) > 0 \forall x \geq 1$ nên nảy ra ý tưởng tách thành:

$$(x-1)^5 + a(x-1)^4 + b(x-1)^3 + c(x-1)^2 + d(x-1) + e$$

Để tách thành như vậy ta sẽ sử dụng máy tính cầm tay để giải quyết. Để ý thấy với $x \geq 1 \Rightarrow x-1 \geq 0$ nên ta sẽ nhập vào máy và $\boxed{\text{CALC}} \boxed{X} \boxed{=} \boxed{1000}$ sao cho $X-1=1000 \Rightarrow X=1001$ và sử dụng kỹ thuật xấp xỉ như khai triển đa thức ta sẽ tách thành dạng như trên. Cụ thể các bước làm như sau:

Nhập vào máy biểu thức trên, $\boxed{\text{CALC}} \boxed{X} \boxed{=} \boxed{1000}$ ta được kết quả là $1.0... \times 10^{15} \approx (x-1)^5$.

Ghi vào sau $-(x-1)^5$ $\boxed{\text{CALC}} \boxed{X} \boxed{=} \boxed{1000}$ ta được kết quả là $4.0... \times 10^{12} \approx 4(x-1)^4$.

Ghi vào sau $-4(x-1)^4$ $\boxed{\text{CALC}} \boxed{X} \boxed{=} \boxed{1000}$ ta được kết quả $3.99... \times 10^9 \approx 4(x-1)^3$

Ghi vào sau $-4(x-1)^3$ $\boxed{\text{CALC}} \boxed{X} \boxed{=} \boxed{1000}$ ta được kết quả $-4003996 \approx -4(x-1)^2$

Ghi vào sau $+4(x-1)^2$ $\boxed{\text{CALC}} \boxed{X} \boxed{=} \boxed{1000}$ ta được kết quả $-3996 = -4(x-1) + 4$.

Nhớ rằng để tìm hệ số tự do ta sẽ $\boxed{\text{CALC}}$ giá trị mốc tức là 1 và được kết quả là 4.

Vậy ta được kết quả $f(x) = (x-1)^5 + 4(x-1)^4 + 4(x-1)^3 - 4(x-1)^2 - 4(x-1) + 4$, thử lại với $x = \pi$ ta thấy kết quả luôn đúng. Đến đây vấn đề đặt ra là tất cả không phải dấu "+" nên ta cần phải xử lý thêm 1 bước nữa. Thật may là biểu thức bậc 4 đằng sau luôn dương nên ta sẽ quy nó về bài toán chứng minh phương trình bậc 4 vô nghiệm với ẩn $y = x-1$. Sử dụng thủ thuật SOS ta sẽ tách nó thành:

$$\begin{aligned} & 4(x-1)^4 + 4(x-1)^3 - 4(x-1)^2 - 4(x-1) + 4 \\ &= 4 \left[\left(x^2 - \frac{3x+1}{2} + \frac{1}{5} \right)^2 + \frac{7}{20} \left(x - \frac{9}{7} \right)^2 + \frac{58}{175} \right] > 0 \end{aligned}$$

Khi đó bài toán đã được giải quyết hoàn toàn!

Nhận xét

Bài toán trên chỉ là dạng đặc biệt do biểu thức $f(x)$ khá là lỏng. Vậy đối với những bài toán chặt khác mà khi tách ra dạng như trên toàn dấu "-" thì phải làm như thế nào? Sau đây sẽ là cách giải quyết.

- Thứ nhất ta sẽ cần nói rộng khoảng cần chứng minh ta, có nghĩa là nếu bài toán cho $x \geq 1$ thì ta sẽ chứng minh hẳn nó lớn hơn 0 với $x \geq 3$ chẳng hạn, sau đó sẽ chứng minh nó lớn hơn 0 với $x \in [1; 3]$.
- Để chứng minh $f(x) > 0 \forall x \in [1; 3]$ ta sẽ sử dụng kỹ thuật chia để trị DAC. (Áp dụng chứng minh vô nghiệm trên đoạn).
- Nội dung phương pháp DAC: Bổ đề: Cho hàm số $f(x, y)$ liên tục và xác định trên $D = [a; b] \times [a; b]$ Hàm số $f(x, y)$ đồng biến theo x và nghịch biến theo y . Khi đó nếu $f(a, b) > 0$ thì $f(x, y) \geq f(a, b) > 0$.
- Chứng minh bổ đề:

- + Do hàm số đồng biến theo x , $x \geq a$ nên $f(x, y) \geq f(a, y)$ (1)
- + Do hàm số nghịch biến theo y , $y \leq b$ nên $f(a, y) \geq f(a, b)$ (2)
- + Từ (1) & (2) có điều phải chứng minh.

Áp dụng

Đối với bài này ta cứ giả vờ tách nó dưới dạng $(x-3)$ ta sẽ được:

$$f(x) = (x-3)^5 + 14(x-3)^4 + 76(x-3)^3 + 196(x-3)^2 + 236(x-3) + 108 > 0 \forall x > 3$$

Xét $x \in [1; 3]$. Đây là điều quan trọng nhất. Do bỏ đề xét tới hàm 2 biến nên ta sẽ biến $f(x)$ thành hàm 2 biến dựa vào tính đồng biến nghịch biến. Ta có:

$$(x^5)' = 5x^4 > 0 \Rightarrow \text{Chỗ này đồng biến ta sẽ đặt là } x.$$

$$(-x^4)' = -4x^3 < 0 \Rightarrow \text{Chỗ này nghịch biến nên đặt là } y.$$

Tương tự với các chỗ còn lại. Cuối cùng ta sẽ đặt $g(x, y) = x^5 - y^4 - 2y^3 - 2y^2 + 5x + 3$, hàm này chắc chắn đồng biến theo x và nghịch biến theo y với $x, y \in D = [1; 3] \times [1; 3]$.

Sau khi đặt xong hàm $g(x, y)$ ta cần phải chứng minh nó lớn hơn 0. Do bỏ đề phát biểu nếu $f(a, b) > 0 \Rightarrow f(x, y) > 0$ thì nhiều người sẽ tương luân $x = 1$ & $y = 3$, nhưng chớ trêu là nó âm choét ra do ta đánh giá quá mạnh tay, và nhiều bạn sẽ nghĩ bỏ đề sai, nhưng hãy để ý rằng phương pháp này có tên chia để trị nên các bạn cần phải chia $[1; 3] = [1; a] \cup [a; b] \cup \dots \cup [z; 3]$ và xét từng khoảng để khi thay 2 cận vào nó luôn dương, hiểu chứ?. Để tìm các khoảng kia phải sử dụng đến tài sản quý báu là chiếc máy tính.

Nhập hàm $g(x, y)$ vào máy: $X^5 - Y^4 - 2Y^3 - 2Y^2 + 5X + 3$. Đầu tiên bấm **CALC** và nhập $X = 1$ trước do đây là cận nhỏ nhất, sau đó ta thử thay $Y = 3$ vào thấy âm thì sẽ chuyển $Y = 2$ thấy vẫn âm. Chuyển tiếp Y xuống 1,5 thì thấy vẫn âm, lúc này đừng hoảng ta sẽ tìm được $Y = 1,2$ thì $g(x, y) = \frac{369}{625} > 0$, thế là đã tìm được 1 khoảng đầu tiên.

Để tìm tiếp các khoảng tiếp theo ta lại cho $X = 1,2$ và tìm Y . Cứ lặp lại quá trình trên ta sẽ chia được: $[1; 3] = [1; 1,2] \cup [1,2; 1,3] \cup [1,3; 1,39] \cup [1,39; 1,46] \cup [1,46; 1,51] \cup [1,51; 1,56] \cup [1,56; 1,6] \cup [1,6; 1,64] \cup [1,64; 1,67] \cup [1,67; 1,7] \cup [1,7; 1,73] \cup [1,73; 1,76] \cup [1,76; 1,8]; [1,8; 1,84] \cup [1,84; 1,88] \cup [1,88; 1,93] \cup [1,93; 1,99] \cup [1,99; 2]$.

Lúc đến bắt đầu tới số 2 là các bạn sẽ gặp khó khăn do các khoảng càng ngày càng hẹp. Ta lại nảy ý tưởng chứng minh $f(x) > 0 \forall x > 2$. Ta sẽ được:

$$f(x) = (x-2)^5 + 9(x-2)^4 + 30(x-2)^3 + 42(x-2)^2 + 21(x-2) + 5 > 0$$

Vậy lời giải sơ lược của bài này sẽ như sau:

Xét $x > 2$ ta có $f(x) = (x-2)^5 + 9(x-2)^4 + 30(x-2)^3 + 42(x-2)^2 + 21(x-2) + 5 > 0$

Xét $x \in [1; 2]$. Ta có bổ đề sau: Cho hàm số $f(x, y)$ liên tục và xác định trên $D = [a; b] \times [a; b]$ Hàm số $f(x, y)$ đồng biến theo x và nghịch biến theo y . Khi đó nếu $f(a, b) > 0$ thì $f(x, y) \geq f(a, b) > 0$.

Chứng minh:

Do hàm số đồng biến theo x , $x \geq a$ nên $f(x, y) \geq f(a, y)$ (1)

Do hàm số nghịch biến theo y , $y \leq b$ nên $f(a, y) \geq f(a, b)$ (2)

Từ (1) & (2) có điều phải chứng minh.

Xét hàm $g(x, y) = x^5 - y^4 - 2y^3 - 2y^2 + 5x + 3 \Rightarrow f(x) = g(x, x)$. Hàm số đồng biến theo x , nghịch biến theo y , liên tục trên $[1; 1, 2]; [1, 2; 1, 3]; [1, 3; 1, 39]; [1, 39; 1, 46]; [1, 46; 1, 51]; [1, 51; 1, 56]; [1, 56; 1, 6]; [1, 6; 1, 64]; [1, 64; 1, 67]; [1, 67; 1, 7]; [1, 7; 1, 73]; [1, 73; 1, 79]; [1, 79; 1, 86]; [1, 86; 1, 99]$.

$$\text{Lại có } \begin{cases} g(1; 1, 2) = \frac{369}{625} > 0 \\ \dots \\ g(1, 99; 2) \approx 4,1579601 > 0 \end{cases} \quad \text{nên theo bổ đề ta sẽ có } \begin{cases} f(x) = g(x, x) > 0 \forall x \in [1; 1, 2] \\ \dots \\ f(x) = g(x, x) > 0 \forall x \in [1, 99; 2] \end{cases}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh!

Ví dụ 2: Chứng minh rằng $f(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Giải

Cách 1: Tạo dựng hằng đẳng thức

$$\text{Ta luôn có: } f(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = \left(x^4 - \frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} > 0$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2: DAC

Nhìn cách 1 có vẻ rất ngắn gọn nhưng sẽ nhiều bạn có thể không nhận thấy dấu hiệu tách hằng đẳng thức thì ta vẫn có thể làm như sau:

$$\text{Xét } x < 0 \text{ khi đó } -x^5 < 0 \text{ lại có } \begin{cases} x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \\ x^8 \geq 0 \end{cases} \text{ nên có điều phải chứng minh.}$$

Xét $x > 1$ khi đó $x^8 - x^5 = x^5(x^3 - 1) = x^5(x - 1)(x^2 + x + 1) > 0$ ta cũng có điều phải chứng minh.

Xét $x \in [0; 1]$ đây là khâu quan trọng nhất. Cách làm DAC sẽ như sau:

+ Bước 1: Phát biểu, chứng minh bổ đề.

+ Bước 2: Đặt hàm $g(x, y)$ sao cho hợp lí đảm bảo luôn đúng theo bổ đề (rất quan trọng!). Để đặt hàm $g(x, y)$ ta sẽ đạo hàm từng biến một và xét tính đồng biến, nghịch biến. Nhớ là chỗ nào đang đồng sẽ đặt là x , nghịch biến là y .

$$\text{C\acute{o:} } \begin{cases} (x^8)' = 8x^7 > 0 \\ (-x^5)' = -5x^4 < 0 \\ (x^2)' = 2x > 0 \\ (-x)' = -1 < 0 \end{cases} . \text{ Nên sẽ đặt hàm } g(x, y) = x^8 - y^5 + x^2 - y + 1.$$

+ Chia để trị: Để chứng minh vô nghiệm được ta sẽ phải chia thành các khoảng nhỏ $[a; m]; [m; n]; \dots; [y; b]$ làm sao cho khi ta thay cận min bằng x và cận max bằng y thì $g(x, y) > 0$. Công việc này có casio để hỗ trợ.

Nhập vào máy $X^8 - Y^5 + X^2 - Y + 1$. Ta sẽ CALC $X=0$ trước và thử cho với $Y=0$ luôn xem có dương không. Nhưng tiếc là biểu thức bị âm do ta đã đánh giá quá trội, và vì thế cần thu nhỏ khoảng lại. Thử $\boxed{\text{CALC}}$ tiếp và cho $Y=0,5$ xem. Lần này đã dương, nhưng ta có thể nói rộng khoảng hơn nữa thử cho $Y=0,7$ lần này cũng dương nhưng nếu nói rộng ra hơn nữa sẽ bị âm. Thế là đã tìm được một khoảng. Ta sẽ lập lại quá trình trên với $X=0,7$ và sẽ phải tìm Y . Lần lượt tìm được 2 khoảng nữa là $[0,7; 0,9] \& [0,9; 1]$.

+ Bước 3: Lời giải:

Viết lại bước 1.

Đặt $g(x, y) = x^8 - y^5 + x^2 - y + 1$ liên tục trên các khoảng $[0; 0,7]; [0,7; 0,9]; [0,9; 1]$. Đồng biến theo x , nghịch biến theo y , có $f(x) = g(x, x)$.

$$\text{Lại có } \begin{cases} g(0; 0,7) \approx \dots > 0 \Rightarrow f(x) = g(x, x) > 0 \forall x \in [0; 0,7] \\ g(0,7; 0,9) \approx \dots > 0 \Rightarrow f(x) = g(x, x) > 0 \forall x \in [0,7; 0,9] \\ g(0,9; 1) \approx \dots > 0 \Rightarrow f(x) = g(x, x) > 0 \forall x \in [0,9; 1] \end{cases}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Ví dụ 3: Chứng minh rằng $f(x) = -x^6 + x^5 - x^4 + 2x^2 + x + \frac{1}{10} > 0 \forall x \in \left[-\frac{1}{9}; \frac{4}{3}\right]$

Giải

Đây là 1 bài toán khá là chặt nên chắc chắn sẽ phải chia tương đối nhiều khoảng.

Xét $x \in \left[-\frac{1}{9}; 0\right]$. Đặt $g(x, y) = -x^6 + x^5 - x^4 + 2y^2 + x + \frac{1}{10}$. Ta sẽ chia được các khoảng là

$$\left[-\frac{1}{9}; -0,1\right]; [-0,1; -0,05]; [-0,05; 0]$$

Xét $x \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$. Đặt $g(x, y) = -y^6 + x^5 - y^4 + 2x^2 + x + \frac{1}{10}$. Ta sẽ chia được các khoảng là

$[1; 1, 1]; [1, 1; 1, 2]; [1, 2; 1, 25]; [1, 25; 1, 29]; [1, 29; 1, 31]; [1, 31; 1, 32]; \left[1, 32; \frac{4}{3}\right]$. Ghê chưa!

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Áp dụng làm bài sau: Chứng minh rằng: $f(x) = -x^4 - 3x^2 + 6x - 1 > 0 \forall x \in [0, 2; 1, 1]$

- Thử áp dụng cách làm trên làm các bài sau

Chứng minh rằng:

$$1. f(x) = -x^6 + x^5 - x^4 + 2x^2 + x + \frac{1}{10} > 0 \forall x \in \left[-\frac{1}{9}; \frac{4}{3}\right]$$

$$2. f(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0 \forall x \text{ (thử dùng DAC nhé)}.$$

$$3. f(x) = x^5 - x^4 - x^3 + 4x^2 + 6x + 1 < 0 \forall x \in (-\infty; -1]$$

$$4. f(x) = x^7 - x^6 + x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 10x - 2 > 0 \forall x > 1$$

$$5. f(x) = -x^4 - 3x^2 + 6x - 1 > 0 \forall x \in [0, 2; 1, 1]$$

Kết thúc phương pháp này ở đây, trong mục này tôi chỉ trình bày cho các bạn một số cách bấm máy thôi để xử lý các đa thức thôi, nếu muốn tìm hiểu thêm về cách chứng minh bất đẳng thức 2 hay 3 biến bằng DAC thì hãy tham khảo thêm ở cuốn sách mà tôi đã nói ở đầu mục nhé!

VI. CÁC BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC 1 BIẾN

Trong phần này tôi sẽ giới thiệu tới các bạn một số cách chứng minh bất đẳng thức 1 biến cả bằng tay không với kết hợp với một chút CASIO, trong đó có một số bài toán khá là phức tạp có thể sẽ không giúp ích được nhiều cho lắm, nhưng tôi vẫn đưa vào để mọi người cùng tham khảo cách làm và sáng tạo thêm một số cách giải hay khác!

Ví dụ 1: Giải phương trình $x^2 + 8x - 16 - (x-3)\sqrt{3x+1} + (2-x)\sqrt{7x+2} = 0$

Giải

Bài này có rất nhiều cách giải khác nhau nhưng ta cứ liên hợp rồi chứng minh vô nghiệm xem sao.

Ta có:

$$\begin{aligned} & x^2 + 8x - 16 - (x-3)\sqrt{3x+1} + (2-x)\sqrt{7x+2} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x+4)(x-1) - (x-3)(\sqrt{3x+1} - 2) + (2-x)(\sqrt{7x+2} - 3) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x+4)(x-1) - \frac{3(x-3)(x-1)}{\sqrt{3x+1} + 2} + \frac{7(2-x)(x-1)}{\sqrt{7x+2} + 3} = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1 \\ f(x) = x + 4 - \frac{3(x-3)}{\sqrt{3x+1} + 2} + \frac{7(2-x)}{\sqrt{7x+2} + 3} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Nhiệm vụ là chứng minh $f(x) > 0 \forall x \geq -\frac{2}{7}$.

$$\text{Với } x \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} -3(x-3) \leq 0 \\ 2-x < 0 \\ \sqrt{3x+1}+2 > 5 \end{cases} \text{ . Khi đó có:}$$

$$f(x) > x+4 - \frac{3(x-3)}{5} + \frac{7(2-x)}{\sqrt{7x+2}+3} = \frac{(2x+29)\sqrt{7x+2} - 29x + 157}{5(\sqrt{7x+2}+3)}$$

$$1. \text{ Với } x \leq \frac{157}{29} \Rightarrow f(x) > 0.$$

$$2. \text{ Với } x > \frac{157}{29} \text{ thì } f(x) = \frac{28x^3 - 21x^2 + 15225x - 22967}{5(\sqrt{7x+2}+3)((2x+29)\sqrt{7x+2}+29x-157)} > 0 \forall x > \frac{157}{29}$$

$$\text{Với } x \in \left[-\frac{2}{7}; 2\right] \text{ ta có: } \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ \sqrt{7x+2}+3 < 7 \end{cases} \text{ . Khi đó ta có:}$$

$$f(x) > 6 - \frac{3(x-3)}{\sqrt{3x+1}+2} = \frac{6\sqrt{3x+1}+12-3(x-3)}{\sqrt{3x+1}+2} = \frac{6\sqrt{3x+1}+21-3x}{\sqrt{3x+1}+2} > 0$$

$$\text{Với } x \in [2; 3], \text{ ta có: } \begin{cases} -3(x-3) \geq 0 \\ 2-x \leq 0 \\ \sqrt{7x+2}+3 > 7 \end{cases} \text{ . Khi đó tương tự như trên ta có:}$$

$$f(x) > 6 - \frac{3(x-3)}{\sqrt{3x+1}+2} = \frac{6\sqrt{3x+1}+12-3(x-3)}{\sqrt{3x+1}+2} = \frac{6\sqrt{3x+1}+21-3x}{\sqrt{3x+1}+2} > 0$$

Vậy bài toán đã được giải quyết hoàn toàn!.

Nhận xét

- Ngoài cách như trên ta vẫn có thể tính ý nhóm như sau:

$$\begin{aligned} f(x) &= x+4 - \frac{3(x-3)}{\sqrt{3x+1}+2} + \frac{7(2-x)}{\sqrt{7x+2}+3} = \frac{1}{2}x + \frac{7(2-x)}{\sqrt{7x+2}+3} + \frac{1}{2}x+4 - \frac{3(x-3)}{\sqrt{3x+1}+2} \\ &= \frac{x\sqrt{7x+2}-4x+14}{2(\sqrt{7x+2}+3)} + \frac{(x+8)\sqrt{3x+1}-x+25}{2(\sqrt{3x+1}+2)} \end{aligned}$$

- Khi đó thích dùng đạo hàm hay dùng bất phương trình phụ thì tùy, tôi sẽ dùng đạo hàm.

$$\bullet \text{ Đặt } \begin{cases} f(x) = x\sqrt{7x+2} - 4x + 14 \\ g(x) = (x+8)\sqrt{3x+1} - x + 25 \end{cases}$$

- Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-8\sqrt{7x+2} + 21x + 4}{2\sqrt{7x+2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{280 + \sqrt{275968}}{882}$. $f'(x)$ đổi dấu từ

$(-) \Rightarrow (+)$ khi qua $\frac{280 + \sqrt{275968}}{882}$ nên đạt cực tiểu tại

$$\frac{280 + \sqrt{275968}}{882} \Rightarrow f(x) \geq f\left(\frac{280 + \sqrt{275968}}{882}\right) \approx 12,99 > 0$$

- Chứng minh tương tự ta cũng suy ra $g(x) > 0$.

- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Ví dụ 2: Giải phương trình $(\sqrt{x^2 + x + 1})^3 + (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + x + 6} = 2x^3 + 2x^2 - 9x + 2$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{x^2 + x + 1})^3 + (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + x + 6} = 2x^3 + 2x^2 - 9x + 2 \\ & \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(\sqrt{x^2 + x + 1} - 2) + (x^2 + 1)(\sqrt{x^2 + x + 6} - 3) - (2x - 5)(x^2 + x - 3) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x^2 + x - 3) \left[\frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + 2} + \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 6} + 3} - 2x + 5 \right] = 0 \end{aligned}$$

Đặt $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + 2} + \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 6} + 3} - 2x + 5$.

Chú ý rằng: $\begin{cases} \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + 2} \geq x + a \\ \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 6} + 3} \geq x + b \end{cases}$.

Khi đó dùng lim ta tìm được $\begin{cases} a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + 2} - x = -\frac{3}{2} \\ b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 6} + 3} - x = -\frac{7}{2} \end{cases}$

Ta có:

$$1. \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + 2} - x + \frac{3}{2} > \frac{2(x^2 + x + 1) + (3 - 2x)\sqrt{x^2 + x + 1}}{2(\sqrt{x^2 + x + 1} + 2)} > \frac{3\sqrt{x^2 + x + 1}}{2(\sqrt{x^2 + x + 1} + 2)} > 0$$

$$2. \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + x + 6} + 3} - x + \frac{7}{2} > \frac{2(x^2 + 1) + (7 - 2x)\sqrt{x^2 + 1}}{2(\sqrt{x^2 + x + 6} + 3)} > \frac{7\sqrt{x^2 + 1}}{2(\sqrt{x^2 + x + 6} + 3)} > 0$$

- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Ví dụ 3: Giải phương trình $x^5 + 7x^4 + 12x^3 + x^2 - 3x - 6 - 12\sqrt{6 - 5x} = 0$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
 & x^5 + 7x^4 + 12x^3 + x^2 - 3x - 6 - 12\sqrt{6-5x} = 0 \\
 & \Leftrightarrow (x-1)(x^4 + 8x^3 + 20x^2 + 21x + 18) - 12(\sqrt{6-5x} - 1) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f(x) = (x+3)(x^3 + 5x^2 + 5x + 6) + \frac{60}{\sqrt{6-5x} + 1} = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Để ý thấy:

- Với $x \in (-\infty; x_0] \cup \left[-3; \frac{6}{5}\right] \Rightarrow f(x) > 0$. Với x_0 thỏa mãn $x_0^3 + 5x_0^2 + 5x_0 + 6 = 0$
- Với $x \in [x_0; -3]$ ta có:
 - $g(x) = \frac{60}{\sqrt{6-5x} + 1} \Rightarrow g'(x) = \frac{300}{2\sqrt{6-5x}(\sqrt{6-5x} + 1)^2} > 0 \Rightarrow g(x) \geq g(x_0) > 9$
 - Khi đó: $f(x) > (x^2 + 4x + 1)^2 + 2\left(x + \frac{13}{4}\right)^2 + \frac{39}{8} > 0$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Ví dụ 4: Chứng minh rằng $f(x) = 4(x-1)\sqrt{x+1} - \frac{20x\sqrt{x+1}}{\sqrt{5x-1}+2} + \frac{20\sqrt{x+1}}{\sqrt{9-5x}+2} + 1 > 0 \forall x \in \left[1; \frac{9}{5}\right]$

Giải

Để ý thấy:

- Do $x \in \left[1; \frac{9}{5}\right]$ nên $\sqrt{9-5x} + 2 < 4 \Rightarrow \frac{20\sqrt{x+1}}{\sqrt{9-5x}+2} > 5\sqrt{x+1}$
- Khi đó $f(x) > g(x) = 4(x-1)\sqrt{x+1} - \frac{20x\sqrt{x+1}}{\sqrt{5x-1}+2} + 5\sqrt{x+1} + 1$
- Lại có: $g(x) = \frac{(x-1)(1-2\sqrt{5x-1})^2\sqrt{x+1} + (\sqrt{5x-1}+2)^2}{(\sqrt{5x-1}+2)^2} > 0 \forall x \in \left[1; \frac{9}{5}\right]$
- Nên $f(x) > 0 \forall x \in \left[1; \frac{9}{5}\right]$ (đpcm). Xong!

Hướng dẫn

Bài này nhìn hình thức khá khủng bố, trông có vẻ rối rắm nhưng khá là đơn giản.

- Đầu tiên ta thấy có quá nhiều căn trong bài, điều này làm ta nảy ra ý tưởng đánh giá bớt 1 căn đi để đưa về dạng đơn giản hơn.
- Hai là bài này là một bài không được chặt chẽ lắm và các biểu thức trong căn ở bậc nhất nên nảy ra ý tưởng đánh giá với 1 hằng số nào đó.
- Ba là thấy trong bài có 2 phân thức nên sẽ thử đánh giá một em xem sao, tôi sẽ chọn cái thứ 2.

Để thấy $\sqrt{9-5x}+2 < 4 \Rightarrow \frac{20\sqrt{x+1}}{\sqrt{9-5x}+2} > 5\sqrt{x+1}$. Lúc này bài toán chỉ còn 2 căn. Dùng

MODE **7** nhận thấy $f(x) \geq 1$. Điều này chẳng khác nào cho ta biết phương trình:

$$4(x-1)\sqrt{x+1} - \frac{20x\sqrt{x+1}}{\sqrt{5x-1}+2} + 5\sqrt{x+1} = 0 \text{ có nghiệm kép. Mà may mắn thay ta lại rút được}$$

$\sqrt{x+1}$ ra, lúc này chỉ là giải phương trình 1 căn có nghiệm kép $x = \frac{1}{4}$ (tự tìm nhé) và 1 nghiệm $x = 1$ (không quan tâm) quá dễ dàng, sử dụng liên hợp ngược hoặc chia căn cho nhanh là sẽ ra!

$$\text{Ta được: } 4(x-1)\sqrt{x+1} - \frac{20x\sqrt{x+1}}{\sqrt{5x-1}+2} + 5\sqrt{x+1} = \frac{(x-1)(1-2\sqrt{5x-1})^2\sqrt{x+1}}{(\sqrt{5x-1}+2)^2} \geq 0$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Ví dụ 5: Chứng minh rằng $f(x) = x^2 + 5 - \frac{5x^2 - 5x + 10}{\sqrt{x+7}+3} - \frac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2} > 0 \forall x \in [-2; +\infty)$

Giải

Hướng làm vẫn như bài trước, ta sẽ đánh giá 2 cái mẫu được $\sqrt{x+7}+3 \geq \sqrt{5}+3 > 5$ và $\sqrt{x+2}+2 \geq 2$.

$$\text{Khi đó: } f(x) > g(x) = x^2 + 5 - \frac{5x^2 - 5x + 10}{5} - \frac{2x+6}{2} = 0$$

Nên $f(x) > g(x) = 0 \forall x \in [-2; +\infty)$ (đpcm). Xong!

Hướng dẫn

Bài này không có cái gì để nói hết, trong căn chứa đa thức bậc nhất nên ta sẽ đánh giá với 1 hằng số nào đó và là xong!

Ngoài ra nếu thích DAC thì cứ việc dùng thử nhé! Ngoài cách này ra còn có một cách khác.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f(x) &= \left(x^2 - x + 2 - \frac{5(x^2 - x + 2)}{\sqrt{x+7}+3} \right) + \left(x + 3 - \frac{2(x+3)}{\sqrt{x+2}+2} \right) \\ &= (x^2 - x + 2) \left(1 - \frac{5}{\sqrt{x+7}+3} \right) + (x+3) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x+2}+2} \right) > 0 \forall x \in \left[1; \frac{9}{5} \right] \end{aligned}$$

Đến đây dựa vào điều kiện tự giải thích nhé!

Ví dụ 6: Chứng minh rằng

$$f(x) = 2\sqrt{3} + \frac{x-1}{\sqrt{1-x} + \sqrt{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{x}{2}\right)} - \frac{x}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{3}\left(\frac{3x-1}{3}\right)} > 0 \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$$

Giải

Nhận thấy

$$1. \quad g(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{x}{2}\right) \text{ nghịch biến trên } \left[\frac{1}{2}; 1\right] \text{ nên } g(x) \geq g(1) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$2. \quad v(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{3}\left(\frac{3x-1}{3}\right) \text{ đồng biến trên } \left[\frac{1}{2}; 1\right] \text{ nên } v(x) \geq v\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Khi đó $f(x) > \frac{x-1}{\frac{\sqrt{3}}{6}} - \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{6}} + 2\sqrt{3} = 0$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Hướng dẫn

Bài này không có gì phải bàn cãi. Do dưới mẫu đang có căn chứa đa thức bậc nhất nên ta sẽ đánh giá từng căn với một hằng số, nếu không đánh giá được như vậy thì dùng DAC không có gì khó cả.

Ở trên tôi trình bày hơi tắt, đáng lẽ phải có phần chứng minh đạo hàm mang 1 dấu nữa, nhưng thời gian có hạn mong thông cảm.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 6x + 7 - (x-2)\sqrt{2x+5} - (x+1)\sqrt{4x+2} > 0 \quad \forall x \geq -\frac{1}{2}$$

Giải

Với $x > 2$ ta có 2 bổ đề sau (tự chứng minh nhé):
$$\begin{cases} \sqrt{2x+5} \leq \frac{1}{2}x + \frac{9}{4} \\ \sqrt{4x+2} < \frac{9}{4}x + \frac{8}{5} \end{cases}$$
 Khi đó ta có:

$$f(x) > x^4 - 2x^3 - \frac{9}{10}x^2 + \frac{16}{5}x + 9,9 = \left(x^2 - x - \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{427}{50} > 0$$

Với $x \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ ta có:
$$\begin{cases} \sqrt{2x+5} > 2 \\ \sqrt{4x+2} < 4 \end{cases}$$
 Khi đó:

$$f(x) > x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 7 = x^2(x-1)^2 + 2x^2 + 7 > 0$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Nhận xét

Ở trên tôi có nêu lên 2 bổ đề mà nhiều người đọc sẽ chẳng hiểu được kiểm đầu ra. Sau đây tôi xin trình bày các bước làm.

Dễ kiểm tra thấy $f(x) > 0$ nên nó sẽ có giá trị nhỏ nhất, việc của ta là tìm được khi x bằng bao nhiêu thì đạt cực tiểu. Rõ ràng nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ chính là giá trị cần tìm do đó ta sẽ giải phương trình $f'(x) = 0$, ta được:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 6x + 6 - \frac{3x+3}{\sqrt{2x+5}} - \frac{6x+4}{\sqrt{4x+2}} = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = -0,3100436394$$

Việc làm tiếp theo là tìm nhân tử chứa nghiệm $x = x_0$, ta sẽ dùng phép $\boxed{\frac{d}{dx} \square}$. Nhân tử có

dạng $\sqrt{2x+5} + ax + b$. Với $\begin{cases} a = -\frac{d}{dx}(\sqrt{2x+5})|_{x=x_0} \\ b = -\sqrt{2x_0+5} - a \end{cases}$. Do kết quả lẻ nên ta sẽ tìm một số gần

nó và phải đẹp và thay vào phương trình đầu phải thỏa mãn. Với lí do đó chọn $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{9}{4} \end{cases}$.

Tương tự cho căn còn lại ta được nhân tử $\sqrt{4x+2} < \frac{9}{4}x + \frac{8}{5}$.

Để ý thấy $\begin{cases} \sqrt{2x+5} \leq \frac{1}{2}x + \frac{9}{4} \\ \sqrt{4x+2} < \frac{9}{4}x + \frac{8}{5} \end{cases}$, mà $f(x) > 0$ nên cần chia làm 2 trường hợp mới đánh giá

được. Đến đó chỉ việc đánh giá phương trình bậc 4 là xong!.

Ví dụ 8: Chứng minh rằng $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-3}+1} + \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+5}+3} - 2 > 0 \forall x \in [\sqrt{3}; +\infty)$

Giải

Ta có: $\sqrt{x^2-3} - \frac{4}{3}x + \frac{3}{2} = \frac{-28x^2 + 144x - 189}{6(6\sqrt{x^2-3} + 8x - 3)} < 0 \forall x \in [\sqrt{3}; +\infty)$

Khi đó $f(x) > \frac{x+1}{\frac{4}{3}x - \frac{3}{2} + 1} + \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+5}+3} - 2 = \frac{(12-10x)\sqrt{x^2+5} + 16x^2 - 28x + 33}{(8x-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}$

Để ý thấy :

$$1. (12-10x)\sqrt{x^2+5} + 16x^2 - 28x + 33$$

$$= \left(2\sqrt{x^2+5} - \frac{5}{2}x - 1\right)^2 + 16\sqrt{x^2+5} + \frac{23}{4}x^2 - 33x + 12$$

$$2. 16\sqrt{x^2+5} + \frac{23}{4}x^2 - 33x + 12 > \frac{23}{4}\left(x - \frac{66}{23}\right)^2 + \frac{222}{23} > 0 \forall x$$

$$3. \text{ Vậy } f(x) > 0$$

Hướng dẫn

Đầu tiên ta sẽ tìm điểm rơi của bài toán chính là nghiệm của đạo hàm. Ta có:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-3} - x - 3}{\sqrt{x^2-3}(\sqrt{x^2-3}+1)^2} + \frac{6\sqrt{x^2+5} - x + 10}{\sqrt{x^2+5}(\sqrt{x^2+5}+3)^2} = 0 \Leftrightarrow x = A = 2,677764402$$

Tìm 2 nhân tử chứa điểm rơi bằng cách sử dụng phép $\left[\frac{d}{dx}\right]$. Ta sẽ đưa về 1 căn và sử dụng nhân tử liên quan tới $\sqrt{x^2-3}$ vì điều kiện gắn chặt với con căn này. Nhân tử có dạng như giải phương trình vô tỷ là $\sqrt{x^2-3}+ax+b$.

Ta có
$$\begin{cases} a \approx -\frac{d}{dx}(\sqrt{f(x)})\Big|_{x=A} \\ b \approx -(\sqrt{f(x)}+ax) \end{cases}$$
. Áp dụng vào bài ta có $a = -\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2-3})\Big|_{x=A} = -1.311... \approx -\frac{4}{3}$.

Vốn dĩ có thể lấy $-\frac{4}{3}$ là vì ta đang cần một số đẹp để tiện biến đổi và đây cũng là bài toán chặt nhưng không phải chặt xít cổ do $f(A) = 0,188421028$. Ngoài nếu thích làm chặt nữa ta có thể lấy là $a = \frac{-13}{10}; a = \frac{-59}{4}...$ Đối với bài chặt hơn nữa thì ta cần phải làm như vậy chứ còn bài này thì không cần, chỉ vậy là đủ!

Có tiếp $b = -(\sqrt{f(x)}+ax) = 1.528191379 \approx \frac{3}{2}$. Lúc này nhận thấy là $\sqrt{x^2-3} < \frac{4}{3}x - \frac{3}{2}$ đúng chiều ta cần do bài toán cần chứng minh lớn hơn 0 và tử đang lớn hơn 0. Nếu nhân tử chưa đúng như ta cần thì ta cần phải làm tròn hệ số tự do làm sao cho đúng chiều dấu chúng ta cần.

Đến đây mới chỉ đi qua $\frac{2}{3}$ chặng đường, còn một phần nữa là chứng minh phần sau chứa một căn lớn hơn 0 bằng kỹ thuật SOS.

Tìm điểm rơi của biểu thức $g(x) = (12-10x)\sqrt{x^2+5} + 16x^2 - 28x + 33$. Ta có:

$$g'(x) = \frac{(32x-28)\sqrt{x^2+5} - 20x^2 + 12x - 50}{\sqrt{x^2+5}} = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = 1,961407277$$

Nhận thấy ta cần tìm nhân tử có dạng $(\sqrt{x^2+5}+ax+b)^2 = 2ax\sqrt{x^2+5}+...$ Đằng trước đang có $-10x\sqrt{x^2+5}$ nên tìm a thỏa mãn khi ta lấy $g(x) - (\sqrt{x^2+5}+ax+b)^2$ phải triệt tiêu được $-10x$. Với lí do trên ta sẽ chọn $a = -5 \Rightarrow b \approx \frac{34}{5}$. Từ đó có nhân tử là $(\sqrt{x^2+5}-5x+\frac{34}{5})^2$.

Nhưng tuy nhiên nhân tử chưa thỏa mãn do thay vào bị âm và ta nâng hệ số trước căn lên 2. Với cách làm tương tự ta có nhân tử sẽ là $(2\sqrt{x^2+5}-\frac{5}{2}x-1)^2$. Đến đây không còn gì phải bàn nhé!

Ví dụ 9: Chứng minh rằng $f(x) = \sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt{x^2+3x+1} - \sqrt{2x+10} = 0$ vô nghiệm.

Giải

Dùng Casio nhận thấy $f(x) > 0 \forall x \in \left[-5; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right]$ và $f(x) < 0 \forall x \in \left[\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

Trường hợp 1: Xét $x \in \left[-5; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right]$.

$$\text{Để ý thấy } \begin{cases} \sqrt[4]{x^4+1} + x > \sqrt[4]{x^4} + x = 0 \forall x \in \left[-5; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right] \\ -\sqrt{x^2+3x+1} - \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} = \frac{-5(x+3)^2}{4\left(-\sqrt{x^2+3x+1} + \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}\right)} \geq 0 \forall x \in \left[-5; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right] \\ -\sqrt{2x+10} + \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2x+10} - 2\right)^2 \geq 0 \forall x \in \left[-5; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right] \end{cases}$$

Do đó $f(x) > -x + \frac{3}{2}x + \frac{7}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} = 0$

Trường hợp 2: $x \in \left[\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$

$$\text{Để ý thấy } \sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt{x^2+1} = \frac{-2x^2}{\left(\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^4+1} + x^2 + 1\right)} \leq 0$$

$$\text{Khi đó } f(x) \leq \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+3x+1} - \sqrt{2x+10} = \frac{-5x-10-2\sqrt{x^2+3x+1}\sqrt{2x+10}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+3x+1} + \sqrt{2x+10}} < 0$$

Vậy phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm. (đpcm). Xong!

Hướng dẫn

Bài này phương pháp giống hệt với bài 4. Ta cũng sẽ đi tìm điểm rơi của bài toán.

Do thấy $f(x)$ luôn dương trên $\left[-5; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right]$ và luôn âm trên $\left[\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$ nên ta sẽ chia làm 2 trường hợp.

- Đối với trường hợp 1 thì không có gì phải bàn, nhưng trường hợp 2 thì có điều phải chú ý!
- Do trên $\left[\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$ thì ta sẽ không tìm được nghiệm của đạo hàm hay lúc này

hàm nghịch biến, nên ta sẽ không đi chứng minh đạo hàm âm mà sẽ quy về đánh giá $\sqrt[4]{x^4+1}$ với một $g(x)$ nào đó. Cái này hơi khó nhưng chịu để ý $\begin{cases} \sqrt[4]{x^4+1} > x \\ \sqrt{x^2+1} > x \end{cases}$.

Nếu như $\sqrt[4]{x^4+1} \leq \sqrt{x^2+1}$ thì thay vào thấy thỏa mãn. Vậy ta sẽ đi chứng minh

$\sqrt[4]{x^4+1} \leq \sqrt{x^2+1}$, đây không phải 1 câu khó, tôi cũng đã chứng minh rồi. Khi đó chỉ việc liên hợp lên là có điều cần chứng minh.

Ví dụ 10: Chứng minh rằng

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+1} - \frac{x-3}{\sqrt{x^2-3}+3} + \frac{x}{3} - \frac{11}{6} > 0 \forall x \in [\sqrt{3}; +\infty)$$

Giải

Trường hợp 1: Xét $x \in [\sqrt{3}; 3]$.

Để ý thấy:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+1} - x - \frac{1}{2} = \frac{\frac{3}{4} - x}{\sqrt{x^2+1} + x + \frac{1}{2}} < 0 \forall x \in [\sqrt{3}; 3] \\ \sqrt{x^2-3} - 2x + 3 = \frac{-3(x-2)^2}{\sqrt{x^2-3} + 2x - 3} \leq 0 \forall x \in [\sqrt{3}; 3] \end{cases}$$

Khi đó
$$f(x) > \frac{x+1}{x+1+\frac{1}{2}} + \frac{3-x}{2x} + \frac{x}{3} - \frac{11}{6} = \frac{(2x^2-14x+9)\sqrt{x^2+1}+8x^2-8x+9}{6x(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

Để ý tiếp:

- $2x^2 - 14x + 9 < 0 \forall x \in [\sqrt{3}; 3] \Rightarrow (2x^2 - 14x + 9)\sqrt{x^2+1} - 8x^2 + 8x - 9 < 0$

Nhân liên hợp ta được $4x^6 - 56x^5 + 172x^4 - 180x^3 + 105x^2 - 108x$

$$= x \left[x^4(4x-13) + x^2(-43x^2+172x-108) - 110 \left(x - \frac{21}{44} \right)^2 - \frac{7299}{88} \right] < 0$$

Nên $(2x^2 - 14x + 9)\sqrt{x^2+1} + 8x^2 - 8x + 9 > 0$

Trường hợp 2: Xét $x \in [3; +\infty)$.

Nhận thấy $\sqrt{x^2-3}+3 > 5$

Khi đó
$$f(x) > \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+1} + \frac{3-x}{5} + \frac{x}{3} - \frac{11}{6} = \frac{(4x-37)\sqrt{x^2+1}+34x-7}{30(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

Đặt $g(x) = (4x-37)\sqrt{x^2+1}+34x-7 \Rightarrow g'(x) = \frac{34\sqrt{x^2+1}+8x^2-37x+4}{\sqrt{x^2+1}}$.

Để ý thấy $g'(x) \geq \frac{8\left(x-\frac{3}{16}\right)^2 + \frac{119}{32}}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ nên $g(x)$ đồng biến trên $[\sqrt{3}; +\infty)$. Suy ra

$g(x) \geq g(\sqrt{3}) \approx 15,9430585 > 0$.

Vậy $f(x) > 0 \forall x \in [\sqrt{3}; +\infty)$.

Ví dụ 11: Chứng minh rằng $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}+2} + \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-2}+1} - \frac{19}{7} > 0 \forall x \in [\sqrt{2}; +\infty)$

Giải

Để nhận thấy $\sqrt{x^2-1} < x$. Khi đó ta luôn có:

$$f(x) > \frac{x+1}{x+2} + \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-2}+1} - \frac{19}{7} = \frac{\overbrace{(-12x-31)\sqrt{x^2-2}+14x^2+23x-17}^{g(x)}}{7(x+2)(\sqrt{x^2-2}+1)}$$

Để ý thấy:

- $g(x) = \frac{75}{11} \left(\sqrt{x^2-2} - \frac{22}{25}x \right)^2 + \frac{523}{275}x^2 + 23x - \frac{37}{11} - 31\sqrt{x^2-2}$
- $\sqrt{x^2-2} - 1.123x + 0.722 = \frac{-0.261129x^2 + 1.621612x - 2.521284}{\sqrt{x^2-2} + 1.123x - 0.722} < 0$

Khi đó $\frac{523}{275}x^2 + 23x - \frac{37}{11} - 31\sqrt{x^2-2} > \frac{523}{275}x^2 + 23x - \frac{37}{11} - 31(1.123x - 0.422) > 0$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Ví dụ 12: Chứng minh rằng $f(x) = \frac{4(x+1)}{\sqrt{x^2+2}+3} + \frac{3(x-2)}{\sqrt{x^2+4}+8} - x - \frac{2}{5} > 0 \forall x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{4}{5} \right]$

Giải

$$\text{Để ý thấy } \sqrt{x^2+4} - \frac{19}{50}x - \frac{231}{125} = \frac{\frac{2139}{2500}x^2 - 1.40448x + \frac{9139}{15625}}{\sqrt{x^2+4} + \frac{19}{50}x + \frac{231}{125}} > 0 \forall x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{4}{5} \right]$$

$$\text{Khi đó } f(x) > \frac{\overbrace{475x^2 + 24890x + 11968 - (475x^2 + 8750x + 12421)\sqrt{x^2+2}}^{g(x)}}{5(95x + 2462)(\sqrt{x^2+2} + 3)}$$

$$\text{Có } g'(x) = \underbrace{950x + 24890}_{v(x)} - \frac{\overbrace{1424x^3 + 17500x^2 + 14324x + 17500}^{u(x)}}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$\text{Nhận thấy } \begin{cases} \min_{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{4}{5} \right]} v(x) = v\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 25561,75144 \\ \max_{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{4}{5} \right]} u(x) = u\left(\frac{4}{5}\right) \approx 25165,00167 < \min_{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{4}{5} \right]} v(x) \end{cases}$$

Nên $g(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{4}{5} \right]$.

$$\text{Từ đó có } g(x) > g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2.957051285 > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{4}{5} \right].$$

Ví dụ 13: Chứng minh rằng $f(x) = \frac{x^3-1}{\sqrt{8x+5}+x+2} + \frac{2x-1}{\sqrt{6x+2}+x+1} + 3 > 0 \forall x \in \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$

Giải

Trường hợp 1: Xét $x > 1$. Khi đó $f(x) > \frac{x^3+5x+4+3\sqrt{8x+5}}{\sqrt{8x+5}+x+2} > 0 \forall x \in (1; +\infty)$

Trường hợp 2: Xét $x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$. Khi đó $\begin{cases} \sqrt{8x+5}+x+2 > 3 \\ \sqrt{6x+2}+x+1 > \frac{2}{3} \end{cases}$

Nên ta có $f(x) > \frac{x^3-1}{3} + \frac{3(2x-1)}{2} + 3 = \frac{2x^3+18x+7}{6} > \frac{2\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 18\left(-\frac{1}{8}\right) + 7}{6} = \frac{25}{162} > 0$

Trường hợp 3: Xét $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. Khi đó $\begin{cases} \sqrt{6x+2}+x+1 < 5 \\ \sqrt{8x+5}+x+2 > 5.5 \end{cases}$

Nên $f(x) > \frac{2(x^3-1)}{11} + \frac{2x-1}{5} + 3 = \frac{10x^3+22x+144}{55} > 0 \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Ví dụ 14: Giải phương trình $9x^4 - 32x^2 + 5 + 18\sqrt{4-3x} = 0$

Lã Duy Tiến

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & 9x^4 - 32x^2 + 5 + 18\sqrt{4-3x} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-1) \left[\frac{54}{\sqrt{4-3x}+1} - 9x^3 - 9x^2 + 23x + 23 \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x=1 \\ f(x) = \frac{54}{\sqrt{4-3x}+1} - 9x^3 - 9x^2 + 23x + 23 = 0 (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Giải (*). Dễ dàng nhận thấy với $x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{23}}{3}\right] \cup [-1; +\infty)$ thì ta thấy $f(x) > 0$.

Xét $x \in \left[-\frac{\sqrt{23}}{3}; -1\right]$, ta có bổ đề sau: $\sqrt{4-3x} < \frac{1}{2}x + \frac{19}{5}$ (bạn đọc tự chứng minh).

Khi đó $f(x) > \frac{54}{\frac{1}{2}x+1+\frac{19}{5}} - 9x^3 - 9x^2 + 23x + 23 = \frac{-45x^4 - 477x^3 - 317x^2 + 1219x + 1644}{5x+48} > 0$

Vậy PT $\Leftrightarrow x=1$.

Nhận xét

Câu này mặc dù mẫu chứa căn ở bậc nhất nhưng ta không thể đánh giá được do $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4-3x} = +\infty$. Vì thế ta sẽ đưa về bài toán giống với bài 4.

Khi ta đạo hàm tìm điểm rơi thì sẽ tìm được 3 nghiệm, nhiều bạn sẽ không biết chọn điểm rơi nào cho phù hợp. Vậy khi gặp những trường hợp thế này thì ta sẽ thử 3 nghiệm của $f'(x)$ vào, nghiệm nào làm $f(x)$ min thì ta sẽ chọn điểm rơi đó.

Thứ 2 với việc tìm nhân tử, ta có điểm rơi là $x = x_0 = -1,350561897$ khi thay vào

$\sqrt{4-3x} - \frac{1}{2}x$ thì sẽ được kết quả là 3.512830189 và nếu ai lấy là 3.5 thì bài toán sẽ sai do

$\sqrt{4-3x} - \frac{1}{2}x - \frac{7}{5} > 0$ sẽ ngược chiều với bài toán. Nếu lấy khoảng 3,6;3,7 thì vẫn chưa

được do sẽ bị dương ở một vài giá trị. Mặt khác bài này không được chặt cho lắm nên ta sẽ

lấy hẵn lên $\frac{19}{5}$ và kiểm tra bằng MODE 7 có thể thấy luôn âm và thay vào thấy $f(x) > 0$

cho nên đây là nhân tử cần tìm. Bạn đọc có thể lấy một số khác đẹp hơn!

Việc chứng minh $g(x) = -45x^4 - 477x^3 - 317x^2 + 1219x + 1644 > 0$ nhìn có vẻ khó nhưng rất dễ, ta sẽ tách như sau: $g(x) = x^3(-45x - 477) - 317x^2 + 1219x + 1644$, có thể thấy rằng với

$$x \in \left[-\frac{\sqrt{23}}{3}; -1 \right] \text{ thì } \begin{cases} x^3 < 0 \\ -45x - 477 < 0 \\ -317x^2 + 1219x + 1644 > 0 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $g(x) > 0$. Và thế là hết bài!

Ví dụ 15: Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt{2x+3}} - \frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1}$

Giải

Do $x = 1$ là nghiệm của phương trình nên ta tiến hành liên hợp.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2x+3}} - \frac{1}{\sqrt{x+4}} &= \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{2x+3}}{\sqrt{2x+3}\sqrt{x+4}} &= \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1} \\ \Leftrightarrow (x-1) \left[\frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1} + \frac{1}{\sqrt{2x+3}\sqrt{x+4}(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+4})} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x+5}-1} + \frac{1}{\sqrt{2x+3}\sqrt{x+4}(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+4})} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Xét $x \in [-1; +\infty]$. Ta có: $\sqrt{x^2-2x+5}-1 = \frac{(x-1)^2+3}{\sqrt{x^2-2x+5}+1} > 0$. Nên bài toán luôn đúng.

Xét $x \in \left[-\frac{3}{2}; -1 \right)$. Để ý thấy $(2x+3)\sqrt{x+4} + (x+4)\sqrt{2x+3} \leq (2x+3)\sqrt{x+4} + 3$

$$\text{Khi đó } f(x) > \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 5} + (2x^2 + 5x + 3)\sqrt{x + 4} + 3x + 2}{(\sqrt{x^2 - 2x + 5} - 1)((2x + 3)\sqrt{x + 4} + 3)}$$

$$\bullet \quad \sqrt{x^2 - 2x + 5} + (2x^2 + 5x + 3)\sqrt{x + 4} + 3x + 2 > (2x + 3) \underbrace{\left[\frac{3}{2} + (x + 1)\sqrt{x + 4} \right]}_{u(x)}$$

$$\text{Ta có } u'(x) = \frac{3x + 9}{\sqrt{x + 4}} > 0 \text{ nên } u(x) \text{ đồng biến trên } \left[-\frac{3}{2}; -1 \right] \Rightarrow u(x) \geq u\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{6 - \sqrt{10}}{4} > 0$$

1. Vậy bài toán đã được giải quyết!

Ví dụ 16: Chứng minh rằng

$$f(x) = x\sqrt{x + 2} + 3x\sqrt{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{(3x^6 + 3x^5 + 3x^4 + 3x^2 + x + 2)(x^2 + 3)} < 0 \forall x \geq 1$$

Giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} y = \sqrt{x + 2} \quad (y \geq \sqrt{3}) \\ z = \sqrt{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} \quad (z \geq \sqrt{5}) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } f(x) = xy + 3xz - \sqrt{(3x^2z^2 + y^2)(x^2 + 3)} = \frac{-3(y - x^2z)^2}{xy + 3xz + \sqrt{(3x^2z^2 + y^2)(x^2 + 3)}} \leq 0$$

Để ý thấy:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sqrt{x + 2} - x^2\sqrt{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{\overbrace{x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 - x - 2}^{g(x)}}{\sqrt{x + 2} + x^2\sqrt{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}} \\ 2. \quad & g(x) = (x - 1)^8 + 9(x - 1)^7 + 36(x - 1)^6 + 84(x - 1)^5 + 126(x - 1)^4 \\ & + 125(x - 1)^3 + 80(x - 1)^2 + 29(x - 1) + 2 > 0 \end{aligned}$$

Nên $g(x) > 0 \forall x \geq 1$. Vậy dấu "=" không thể xảy ra.

Vậy bài toán đã được giải quyết!

$$\text{Ví dụ 17: Giải hệ phương trình } \begin{cases} \frac{2x + 1}{y} = \sqrt{\frac{4(x^2 + x + 1)}{y^2 + 3}} \quad (1) \\ x^3(3y - 11) = 2 - \sqrt{(xy - x + 2)x} \quad (2) \end{cases}$$

Giải

$$\text{ĐKXĐ: } 2x^2y + 1 \geq 0; x \in [-1; 1]; 1 - 2x^2y \geq 0$$

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow \frac{2x + 1}{\sqrt{(2x + 1)^2 + 3}} = \frac{y}{\sqrt{y^2 + 3}} \Leftrightarrow f(2x + 1) = f(y)$$

$$\text{Xét } f(t) \text{ liên tục trên } \mathbb{R}. \text{ Có } f'(t) = \frac{3}{(t^2 + 3)\sqrt{t^2 + 3}} > 0 \forall t. \text{ Nên } f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

$$\text{Khi đó phương trình } f(2x + 1) = f(y) \Leftrightarrow y = 2x + 1$$

Thế vào phương trình (2) ta được: $6x^4 - 8x^3 = 2 - \sqrt{(2x^2 + 2)^3}$

Đặt $f(x) = 6x^4 - 8x^3 - 2 + \sqrt{(2x^2 + 2)^3}$

Để ý thấy:

$$1. \quad f(x) = 5\sqrt{2x^2 + 2} + 5x^4 - 8x^3 + x^2 - \frac{25}{4} + \left(\sqrt{2x^2 + 2} + x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 \\ = g(x) + \left(\sqrt{2x^2 + 2} + x^2 - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$2. \quad g'(x) = x \left(\frac{10}{\sqrt{2x^2 + 2}} + 20x^2 - 24x + 2 \right) = x \cdot h(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 2}}$$

$$3. \quad h'(x) = \frac{120x^3 - 96x^2 + 84x - 48}{\sqrt{2x^2 + 2}} = \frac{v(x)}{\sqrt{2x^2 + 2}}$$

$$4. \quad v'(x) = 360 \left(x - \frac{4}{15} \right)^2 + \frac{292}{5} > 0. \text{ Suy ra phương trình } h'(x) = 0 \text{ có tối đa 1 nghiệm là}$$

$$x = x_0 = \frac{4}{15} + \frac{\sqrt[3]{\frac{6784}{125} + \sqrt{\frac{2338848}{625}}} + \sqrt[3]{\frac{6784}{125} - \sqrt{\frac{2338848}{625}}}}{6}$$

$$\Rightarrow \min_{\mathbb{R}} h(x) = h(x_0) \approx 1.31 > 0. \text{ Khi đó phương trình } g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 (h(x) > 0).$$

$$\text{Mặt khác ta lại có: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \\ g(0) = \frac{-25 + 20\sqrt{2}}{4} > 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) > 0.$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Ví dụ 18: Chứng minh rằng

$$f(x) = x^2 - x + 4 - \frac{3x+1}{\sqrt{3x^2-2x+3}+2} - \frac{6}{\sqrt{3x+1}+2} > 0 \forall x \in \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$$

Giải

$$\text{Ta có: } \left(\sqrt{3x^2-2x+3}\right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{6x-2}{2\sqrt{3x^2-2x+3}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}. \text{ Suy ra } \sqrt{3x^2-2x+3} > \frac{3}{2}.$$

$$\text{Khi đó } f(x) > x^2 - x + 4 - \frac{6x+2}{7} - \frac{6}{\sqrt{3x+1}+2} = \frac{(7x^2-13x+26)\sqrt{3x+1}+14x^2-26x+10}{7(\sqrt{3x+1}+2)}$$

Để ý thấy:

$$+) \text{ Với } x \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right] \text{ thì } \begin{cases} 4x^2 - 26x + 10 > 0 \\ 7x^2 - 13x + 26 = 7\left(x - \frac{13}{14}\right)^2 + \frac{559}{28} > 0 \end{cases}$$

Do đó có điều phải chứng minh.

+) Với $x > 0$ thì $(7x^2 - 13x + 26)\sqrt{3x+1} > 7x^2 - 13x + 26 \Rightarrow f(x) > \frac{21\left(x - \frac{13}{14}\right)^2 + \frac{501}{28}}{7(\sqrt{3x+1} + 2)} > 0$

Vậy bài toán đã được giải quyết hoàn toàn!

Ví dụ 19: Chứng minh rằng

$$f(x) = \frac{2(x^2 - x - 1)}{\sqrt{x^4 - x^2 + 4} + x^2 - x + 2} - \frac{4(x^2 + x + 1)}{\sqrt{x^4 + 20x^2 + 4} + x^2 + 2x + 2} - x^2 + 2x < 0 \forall x \geq 0$$

Giải

Với $x \in \left[0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^4 + 20x^2 + 4} < 8 \\ \sqrt{x^4 - x^2 + 4} < 3 \\ x^2 - x - 1 < 0 \end{cases}$. Khi đó: $f(x) < \frac{2(x^2 - x - 1)}{x^2 - x + 5} - \frac{4(x^2 + x + 1)}{x^2 + 2x + 10} - x^2 + 2x$

$$= \frac{-x^4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - x^4 - 12x^2\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{5}{3}x^2 - 38\left(x - \frac{15}{19}\right)^2 - 620}{(x^2 - x + 5)(x^2 + 2x + 10)} < 0$$

Với $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 1 > 0 \\ \sqrt{x^4 - x^2 + 4} > \frac{14}{5}; \sqrt{x^4 + 20x^2 + 4} < x^2 + 5x - \frac{11}{4} \end{cases}$

Khi đó $f(x) < \frac{2(x^2 - x - 1)}{x^2 - x + \frac{24}{5}} - \frac{4(x^2 + x + 1)}{2x^2 + 7x - \frac{3}{4}} - x^2 + 2x$

$$= \frac{-40(x-1)^6 - 260(x-1)^5 - 537(x-1)^4 - 761(x-1)^3 - 389(x-1)^2 - 281(x-1) - 690}{(5x^2 - 5x + 24)(8x^2 + 28x - 3)} < 0$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Nhận xét

Nhiều bạn sẽ đặt ra câu hỏi vì sao lại đánh

giá được $\sqrt{x^4 + 20x^2 + 4} < x^2 + 5x - \frac{11}{4}$. Đơn

giản vì:

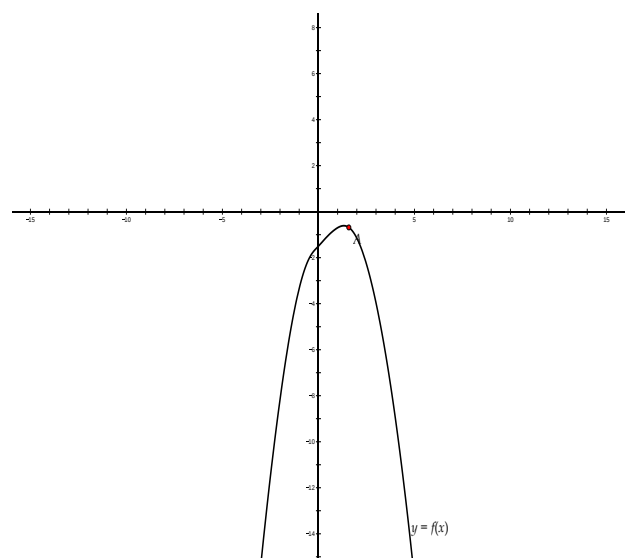
+ Ta đang cần đưa về chứng minh

$\sqrt{x^4 + 20x^2 + 4} < x^2 + ax + b$ với $x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ để

đưa về phương trình đa thức. Lại có $a^2 > 20$ nên sẽ lấy 5.

+ Do hàm đang nghịch biến nên điểm rơi sẽ

là $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Có thể kiểm tra bằng Mode 7



hoặc có đồ thị của hàm $y = f(x)$ như sau:

Có thể thấy điểm $A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)$ đang nằm ở phần đi xuống của đồ thị nên $f(x)$ sẽ nghịch biến. Do đó nhân tử là $\sqrt{x^4 + 20x^2 + 4} < x^2 + 5x - \frac{11}{4}$. Phần còn lại không phải nói nhiều!

Ví dụ 20: Giải phương trình $-x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4x - 8 + (x^4 + 1)\sqrt{x^6 - x + 2} = 0$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} & -x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 4x - 8 + (x^4 + 1)\sqrt{x^6 - x + 2} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x+1)(x-2)(x^3+2) + (x^4+1)(\sqrt{x^6-x+2}-2x-4) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x+1)(x-2)(x^3+2) + \frac{(x^4+1)(x+1)(x-2)(x^4+x^3+3x^2+5x+7)}{\sqrt{x^6-x+2}+2x+4} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x+1)(x-2) \left[x^3+2 + \frac{(x^4+1)(x^4+x^3+3x^2+5x+7)}{\sqrt{x^6-x+2}+2x+4} \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2 \\ f(x) = x^3+2 + \frac{(x^4+1)(x^4+x^3+3x^2+5x+7)}{\sqrt{x^6-x+2}+2x+4} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Đặt $g(x) = x^6 - x + 2 \Rightarrow g'(x) = 6x^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{\frac{1}{6}}$. $g'(x)$ đổi dấu khi qua $\sqrt[5]{\frac{1}{6}}$ nên $g(x)$

đạt cực tiểu tại $\sqrt[5]{\frac{1}{6}} \Rightarrow g(x) \geq g\left(\sqrt[5]{\frac{1}{6}}\right) \approx 1,41 > 0$.

Đặt $h(x) = \sqrt{x^6 - x + 2} + 2x + 4$.

1. Với $x \geq -2 \Rightarrow h(x) > 0$.

2. Với $x < -2 \Rightarrow \sqrt{x^6 - x + 2} > \sqrt{x^6} = -x^3 \Rightarrow h(x) > x(-x^2 + 2) > 0$

Khi đó có:

$$\begin{aligned} f(x) & > \frac{x^3+2+(x^3+2)(2x+4)+x^4+x^3+3x^2+5x+7}{\sqrt{x^6-x+2}+2x+4} \\ & = \frac{3(x^2+x-0,75)^2 + \frac{9}{2}(x+1,5)^2 + \frac{83}{16}}{\sqrt{x^6-x+2}+2x+4} > 0 \end{aligned}$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Ví dụ 21: Giải phương trình $1+x\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2-x+1}(1+\sqrt{x^2-x+2})$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2016 – Anh Sơn 2 – Nghệ An

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 1+x\sqrt{x^2+1} &> \sqrt{x^2-x+1}(1+\sqrt{x^2-x+2}) \\ \Leftrightarrow 1-\sqrt{x^2-x+1}+x\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2} &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{-x^2+x}{1+\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{(x-1)(2x^2-x+2)}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2}} &> 0 \\ \Leftrightarrow (x-1) \left[\frac{2x^2-x+2}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2}} - \frac{x}{1+\sqrt{x^2-x+1}} \right] &> 0 \end{aligned}$$

Để ý thấy: $1+x\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2-x+1}(1+\sqrt{x^2-x+2}) > \frac{\sqrt{21}+2\sqrt{3}}{4} > 0 \Rightarrow x > 0$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2-x+2}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x^2-x+1)(x^2-x+2)}} - 1 = \frac{2x^2-x+2-x\sqrt{x^2+1}-\sqrt{(x^2-x+1)(x^2-x+2)}}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x^2-x+1)(x^2-x+2)}} \\ &> \frac{2x^2-2x+3-2\sqrt{(x^2-x+1)(x^2-x+2)}}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x^2-x+1)(x^2-x+2)}} = g(x) \end{aligned}$$

$$g(x) = \frac{1}{(2x^2-2x+3+2\sqrt{(x^2-x+1)(x^2-x+2)})(x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x^2-x+1)(x^2-x+2)})} > 0$$

- Lại có $1 - \frac{x}{1+\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{\sqrt{x^2-x+1}+1-x}{1+\sqrt{x^2-x+1}}$

Xét bất phương trình: $\sqrt{x^2-x+1}+1-x > 0$

- Với $x < 1 \Rightarrow$ bất phương trình luôn đúng.
- Với $x \geq 1$ ta có: $\sqrt{x^2-x+1}+1-x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ luôn đúng.

Do đó $1 - \frac{x}{1+\sqrt{x^2-x+1}} > 0$.

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Ví dụ 22: Cho 3 số $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $3(a^3+b^3+c^3)+2abc \geq 11\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3}$

Giải

Đặt $f(a, b, c) = 3(a^3 + b^3 + c^3) + 2abc - 11\sqrt{\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right)^3}$. Do $f(a, b, c)$ là hàm thuần nhất bậc 3, nên không mất tính tổng quát ta chuẩn hóa $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ và giả sử $a = \min\{a, b, c\}$. Khi đó ta cần chứng minh $f(a, b, c) = 3(a^3 + b^3 + c^3) + 2abc - 11 \geq 0$

Đặt $f\left(a, \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}}, \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}}\right) = 3\left(a^3 + 2\left(\sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}}\right)^3\right) + a(b^2 + c^2) - 11$. Ta có:

$$\begin{aligned} f(a, b, c) - f\left(a, \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}}, \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}}\right) &= \frac{1}{2} \left[3 \left(2(b^3 + c^3) - (b^2 + c^2) \sqrt{2(b^2 + c^2)} \right) - a(b - c)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[3 \left(\sqrt{2(b^2 + c^2)} - b - c \right) \left((b + c) \sqrt{2(b^2 + c^2)} + 2bc \right) - a(b - c)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot (b - c)^2 \left[\frac{3 \left((b + c) \sqrt{2(b^2 + c^2)} + 2bc \right)}{\sqrt{2(b^2 + c^2)} + b + c} - a \right] \end{aligned}$$

Do $a = \min\{a, b, c\}$ nên $\begin{cases} a \in [0; 1] \\ b + c \geq 2 \end{cases}$. Khi đó ta cần phải chứng minh được:

$$\begin{aligned} g(a, b, c) &= \frac{3 \left((b + c) \sqrt{2(b^2 + c^2)} + 2bc \right)}{\sqrt{2(b^2 + c^2)} + b + c} - a > 0 \\ \frac{3 \left((b + c) \sqrt{2(b^2 + c^2)} + 2bc \right)}{\sqrt{2(b^2 + c^2)} + b + c} - a &\geq \frac{3 \left((b + c) \sqrt{2(b^2 + c^2)} + 2bc \right)}{\sqrt{2(b^2 + c^2)} + b + c} - 1 \\ &= \frac{(3b + 3c - 1) \sqrt{2(b^2 + c^2)} + 6bc - b - c}{\sqrt{2(b^2 + c^2)} + b + c} \geq \frac{5 \sqrt{2(b^2 + c^2)} - b - c + 6bc}{\sqrt{2(b^2 + c^2)} + b + c} \\ &> \frac{\sqrt{2(b^2 + c^2)} - b - c + 6bc}{\sqrt{2(b^2 + c^2)} + b + c} = \frac{(b - c)^2}{\sqrt{2(b^2 + c^2)} + b + c} + 6bc \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy $f(a, b, c) \geq f\left(a, \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}}, \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}}\right) = f\left(a, \sqrt{\frac{3 - a^2}{2}}, \sqrt{\frac{3 - a^2}{2}}\right)$

Ta có: $f\left(a, \sqrt{\frac{3 - a^2}{2}}, \sqrt{\frac{3 - a^2}{2}}\right) = 3\left(a^3 + 2\left(\sqrt{\frac{3 - a^2}{2}}\right)^3\right) + 2a \cdot \frac{3 - a^2}{2} - 11$

$$\begin{aligned}
 f(a, t, t) \geq 0 &\Leftrightarrow 3 \left(a^3 + 2 \left(\sqrt{\frac{3-a^2}{2}} \right)^3 \right) + 2a \cdot \frac{3-a^2}{2} - 11 \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow 3a^3 + \frac{3(\sqrt{3-a^2})^3}{\sqrt{2}} + a(3-a^2) - 11 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3(\sqrt{3-a^2})^3}{\sqrt{2}} + 9a - 15 + (2a+4)(a-1)^2 \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow (a-1)^2 \left[2a+4 - \frac{3(a^4+2a^3-6a^2-14a+23)}{\sqrt{2} \left((\sqrt{3-a^2})^3 + (5-3a)\sqrt{2} \right)} \right] \geq 0 (*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Đặt } g(a) &= (2a+4) \left(\sqrt{2} \left(\sqrt{3-a^2} \right)^3 + 2(5-3a) \right) - 3(a^4+2a^3-6a^2-14a+23) \\
 &= (-2a^3-4a^2+6a+12) \sqrt{6-2a^2} - 3a^4-6a^3+6a^2+38a-29
 \end{aligned}$$

Ta có bổ đề $\sqrt{6-2a^2} > \frac{61}{25} - \frac{22}{25}a \Leftrightarrow 6-2a^2 > \left(\frac{61}{25} - \frac{22}{25}a \right)^2 \Leftrightarrow -\frac{1734}{625}a^2 + \frac{2684}{625}a + \frac{29}{625} > 0$. Dễ thấy bổ đề đúng với $a \in [0;1]$.

Mặt khác $-2a^3-4a^2+6a+12 = 2a(1-a)(a+3)+12 > 0 \forall a \in [0;1]$, nên ta được:

$$\begin{aligned}
 g(a) &> (-2a^3-4a^2+6a+12) \left(\frac{61}{25} - \frac{22}{25}a \right) - 3a^4-6a^3+6a^2+38a-29 \\
 &= \frac{-31a^4-184a^3-226a^2+1052a+7}{25} = \frac{-31a^4-184a^3+215a^2-441a^2+1052a+7}{25}
 \end{aligned}$$

$$\text{Do } \begin{cases} -31a^4-184a^3+215a^2 > 0 \forall a \in [0;1] \\ -441a^2+1052a+7 > 0 \forall a \in [0;1] \\ \sqrt{2} \left((\sqrt{3-a^2})^3 + (5-3a)\sqrt{2} \right) > 0 \end{cases} \Rightarrow g(a) > 0 \Rightarrow 2a+4 - \frac{3(a^4+2a^3-6a^2-14a+23)}{\sqrt{2} \left((\sqrt{3-a^2})^3 + (5-3a)\sqrt{2} \right)} > 0$$

Vậy (*) luôn đúng $\Rightarrow f(a, t, t) \geq 0 \Rightarrow f(a, b, c) \geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$

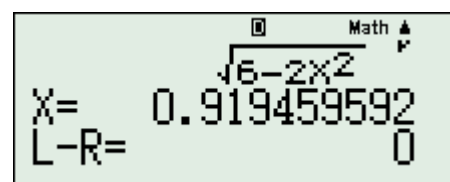
Bây giờ vấn đề đặt ra là kiểm đầu ra cái bổ đề kia. Để làm được điều này ta sẽ dùng tiếp tuyến để tìm ra nó dưới sự giúp đỡ của CASIO. Nhưng tuy nhiên làm sao ta có thể đánh giá được $\sqrt{6-2a^2} > ax+b$ khi chưa có manh mối gì? Để giải quyết vấn đề này ta sẽ tìm điểm rơi của bất đẳng thức đang cần chứng minh. Ta có:

$$g'(a) = \frac{16a^4+24a^3-60a^2-72a+36}{\sqrt{6-2a^2}} - 12a^3-18a^2+12a+38$$

Phương trình $g'(a)=0$ có 1 nghiệm là :

$$X = A = 0,919459592$$

Bây giờ ta cần đánh giá được biểu thức trước căn là $-2a^3-4a^2+6a+12$. Dễ thấy rằng:



$$-2a^3 - 4a^2 + 6a + 12 = a(1-a)(a+3) + 12 > 0$$

Vậy bây giờ cần chứng minh $\sqrt{6-2a^2} > ax+b$. Ta sẽ sử dụng phép $\frac{d}{dx}$.

Ta được $a = \frac{d}{dx}(\sqrt{6-2x^2}) \Big|_{x=A} = -0,8858596433$. Bây giờ ta sẽ lấy a làm sao cho bất đẳng thức không bị đánh giá quá trội và vừa đồng thời là một số hữu tỷ đẹp vừa dễ về sau để đánh giá hơn. Do đó mình sẽ lấy $a = -0,88 = -\frac{22}{25}$. Bây giờ cần tìm b , do đang cần chứng minh trên đoạn $[0;1]$ nên ta sẽ dùng MODE 7 để tìm ra b . MODE 7 với hàm $F(X) = \sqrt{6-2X^2} + \frac{22}{25}X$ trên $[0;1]$ ta được:

Để ý thấy là $\sqrt{6-2x^2} + \frac{22}{25}x > 2,449489742$. Bây giờ ta sẽ chọn b là một số hữu tỷ vừa đẹp vừa gần số 2,449 nhất. Ta sẽ chọn số $b = 2,44 = \frac{61}{25}$, đồng thời thay vào bài toán ta thấy nhân tử này thỏa mãn. Vậy ta tìm được nhân tử là $\sqrt{6-2a^2} + \frac{22}{25}a - \frac{61}{25}$.

Math			
1	2	3	
0	0	0	F(X)
0.05	2.4924		
0.1	2.5334		
	2.449489743		

Math			
4	5	6	
0	0	0	F(X)
0.15	2.5722		
0.2	2.6091		
0.25	2.643839929		

Chú ý rằng chắc mấy bạn khi tìm được a thì thay luôn $X = A$ vào để tìm ra b và tìm được $b = 2,884982846$, hiển nhiên là nhân tử này là sai. Đối với bài mà chứng minh trên đoạn thì ta thường sẽ dùng MODE 7 để tìm ra b , còn những bài chứng minh trên khoảng thì ta mới dùng cách thay trực tiếp nhân tử vào, nếu có thời gian hãy thử chứng minh những bài sau thì sẽ rõ. Ngoài ra nếu giải phương trình đạo hàm bằng 0 mà nhiều nghiệm thì ta chọn nghiệm nào làm phương trình đầu min max

PHẦN II. PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

CÁC TÍNH CHẤT CẦN NHỚ.

1. Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu và liên tục trên tập xác định của nó thì phương trình $f(x) = a$ có tối đa một nghiệm
2. Nếu hàm số $f(x)$ đơn điệu và không liên tục trên tập xác định của nó thì phương trình $f(x) = a$ có tối đa $n+1$ nghiệm
3. Nếu hàm số $f(x), g(x)$ cùng nghịch biến, dương và liên tục trên cùng một tập xác định D thì hàm số $h(x) = g(x).f(x)$ là hàm số đồng biến và liên tục trên tập D còn hàm số $v(x) = f(x) + g(x)$ là hàm số nghịch biến và liên tục trên tập xác định D .
4. Nếu hàm số $f(x), g(x)$ cùng đồng biến, dương và liên tục trên cùng một tập xác định D thì $h(x) = g(x).f(x)$ và $v(x) = f(x) + g(x)$ là các hàm số đồng biến và liên tục trên D .
5. Ngoài ra ta cần phải vận dụng linh hoạt các phương pháp đã đề cập tới trong phần 1 như kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức tiếp tuyến chứng minh bất đẳng thức 1 biến, kỹ thuật chứng minh đa thức vô nghiệm v.v..

I. CÁC BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH

PHƯƠNG PHÁP HÀM ĐẶC TRƯNG

Hàm đặc trưng tỏ ra rất hiệu quả trong việc giải các phương trình hay hệ phương trình. Trước một bài toán, thường có nhiều cách xử lý khác nhau, nhưng mình nhận thấy nếu như áp dụng được phương pháp sử dụng hàm đặc trưng thì nhiều khi bài toán sẽ được giải quyết đơn giản, ngắn gọn hơn khá nhiều. Trong bài viết này mình sẽ hướng dẫn các bạn một số kỹ thuật sử dụng và các bài toán có liên quan tới chủ đề này !

Câu 1: Giải phương trình $(x+3)\sqrt{x+1} + (x-3)\sqrt{1-x} + 2x = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$

Giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1 (*)$

Ta có : $(x+3)\sqrt{x+1} + (x-3)\sqrt{1-x} + 2x = 0$

$$\Leftrightarrow [(x+1)+2]\sqrt{x+1} + 2x = [(1-x)+2]\sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^3 + (\sqrt{x+1})^2 + 2\sqrt{x+1} = (\sqrt{1-x})^3 + (\sqrt{1-x})^2 + 2\sqrt{1-x} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ với $t \in [0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 2t + 2 > 0, \forall t \in [0; +\infty)$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$. Mặt khác $f(t)$ là hàm số liên tục trên $[0; +\infty)$.

Do đó phương trình

$$(1) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+1}) = f(\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn điều kiện (*)).}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 2: Giải phương trình $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x^2+1} + \sqrt[3]{2x^2} \quad (1) \quad (x \in \mathbb{R})$

Giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đặt $u = \sqrt[3]{x+1}$ và $v = \sqrt[3]{2x^2}$ khi đó phương trình trở thành:

$$\sqrt[3]{u^3+1} + u = \sqrt[3]{v^3+1} + v \quad (1a)$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt[3]{t^3+1} + t$ với $t \in \mathbb{R}$.

$$f'(t) = \frac{t^2}{\sqrt[3]{(t^3+1)^2}} + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \text{ suy ra hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Mặt khác $f(t)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình (1a) $\Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

$$\text{Với } u = v \text{ ta có } \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x^2} \Leftrightarrow 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm: $T = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$.

Câu 3: Giải phương trình $x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4} \quad (x \in \mathbb{R})$

Giải

TXD $D = \mathbb{R}$.

Đặt $y = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$, ta có hệ:

$$\begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y \\ y^3 = 7x^2 + 9x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y \\ 7x^2 + 9x - 4 = y^3 \end{cases}$$

Cộng vế với vế của hai phương trình với nhau ta được phương trình

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = y^3 + y \Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = y^3 + y \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ với $t \in \mathbb{R}$.

$$f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \text{ suy ra hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Mặt khác $f(t)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow y = x+1$

Với $y = x+1$ ta có phương trình:

$$x+1=\sqrt[3]{7x^2+9x-4} \Leftrightarrow (x+1)^3=7x^2+9x-4 \Leftrightarrow x^3-4x^2-6x+5=0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\left\{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2};5\right\}$.

Câu 4: Giải phương trình $(\sqrt{4x^4-12x^3+9x^2+16}-2x^2+3x)(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1})=8 \quad (x \in \mathbb{R})$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 4x^4-12x^3+9x^2+16 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq 1 \\ (2x^2-3x)^2+16 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1 (*)$

Đặt $u=x^2-\frac{3x}{2}, v=\sqrt{x-1} \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} (\sqrt{4u^2+16}-2u)(\sqrt{v^2+4}+v) &= 8 \Leftrightarrow (\sqrt{u^2+4}-u)(\sqrt{v^2+4}-v)=4 \\ \Leftrightarrow \sqrt{u^2+4}-u &= \frac{4}{\sqrt{v^2+4}+v} \Leftrightarrow \sqrt{u^2+4}-u = \sqrt{v^2+4}-v \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+4}+t$ với $t \in \mathbb{R}$.

$$f'(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}+1=\frac{\sqrt{t^2+4}+t}{\sqrt{t^2+4}}>\frac{\sqrt{t^2}+t}{\sqrt{t^2+4}}=\frac{|t|+t}{\sqrt{t^2+4}}\geq 0, \forall t \in \mathbb{R} \text{ suy ra hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Mặt khác $f(t)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow f(u)=f(v) \Leftrightarrow u=v$

Ta có $x=v^2+1$. Do đó

$$\begin{aligned} u=v &\Leftrightarrow (v^2+1)^2-\frac{3}{2}(v^2+1)=v \Leftrightarrow 2v^4+v^2-2v-1=0 \\ \Leftrightarrow (v-1)(2v^3+2v^2+3v+1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v=1 \\ 2v^3+2v^2+3v+1=0 \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

Với $v \geq 0$ ta có $2v^3+2v^2+3v+1 \geq 0+0+0+1 > 0$ do đó (2) vô nghiệm.

$v=1$ ta có $x=2$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Câu 5: Giải phương trình $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{3x^2+3x+1}=\frac{x^2+x}{(x^2+x+1)(3x^2+3x+1)} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^2 + x + 1 > 0 \\ 3x^2 + 3x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \\ 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} &= \frac{x^2 + x}{(x^2 + x + 1)(3x^2 + 3x + 1)} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{3x^2 + 3x + 1} \right) \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + x + 1} &= \sqrt{3x^2 + 3x + 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3x^2 + 3x + 1} \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t} - \frac{1}{2}t$ với $t \in (0; +\infty)$.

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2} > 0, \forall t \in (0; +\infty) \text{ suy ra hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty).$$

Mặt khác $f(t)$ là hàm số liên tục trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Do đó phương trình (1)} \Leftrightarrow f(x^2 + x + 1) = f(3x^2 + 3x + 1) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 3x^2 + 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $T = \{-1; 0\}$.

Câu 6: Giải phương trình $x - \sqrt{3x - 2} = \sqrt{9x^2 - 6x} - x\sqrt{x^2 + 2} \quad (1) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Giải

$$\text{Điều kiện: } x \geq \frac{2}{3} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x + x\sqrt{x^2 + 2} = \sqrt{3x - 2} + \sqrt{(3x - 2)3x} \\ &\Leftrightarrow x + x\sqrt{x^2 + 2} = \sqrt{3x - 2} + \sqrt{3x - 2} \cdot \sqrt{(\sqrt{3x - 2})^2 + 2} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{t^2 + 2}$ với $t \in \mathbb{R}$.

$$f'(t) = 1 + \sqrt{t^2 + 2} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R} \text{ suy ra hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Mặt khác $f(t)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó phương trình (1)} \Leftrightarrow f(x) = f(\sqrt{3x - 2}) \Leftrightarrow x = \sqrt{3x - 2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $T = \{1; 2\}$.

Câu 7: Giải phương trình $4|2x - 1|((x^2 - x + 1)) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14 \quad (1) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$(1) \Leftrightarrow |2x-1|[(2x-1)^2+3] = (x-2)^3+3x-6$$

$$\Leftrightarrow |2x-1|^3+3|2x-1| = (x-2)^3+3(x-2) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3+3t$ với $t \in \mathbb{R}$.

$f'(t) = 3t^2+3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(t)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $(*) \Leftrightarrow f(|2x-1|) = f(x-2) \Leftrightarrow |2x-1| = x-2$ Vô nghiệm

Câu 8: Giải phương trình $x^2+x+\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}=1+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}+\sqrt[4]{x+2}$

Giải

Điều kiện: $x \geq -1$

Cộng $x+1$ vào hai vế của phương trình ta được

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)+2} = (\sqrt{x+2})^2+\sqrt{\sqrt{x+2}}+\sqrt{\sqrt{x+2}+2} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^2+\sqrt{t}+\sqrt{t+2}$ với $t > 0$ ta có $f(t)$ đồng biến

Mặt khác phương trình $(*)$ có dạng $f(x+1) = f(\sqrt{x+2}) \Rightarrow x+1 = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow x^2+x-1=0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ hoặc } \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \text{ (Loại)}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Câu 9: Giải phương trình $x(\sqrt{x+1}+\sqrt{x+3}) = \sqrt{2}(1+\sqrt{1+x^2})$

Giải

Điều kiện để phương trình có nghiệm là $x > 0$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\sqrt{\frac{x+1}{2}} + \sqrt{\frac{x+3}{2}} = \frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+1}{2}} + \sqrt{\frac{x+1}{2}+1} = \frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = t + \sqrt{1+t^2}$ là hàm đồng biến do đó

$$f\left(\sqrt{\frac{x+1}{2}}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu 10: Giải phương trình $-2x^3+10x^2-17x+8=2x^2\sqrt[3]{5x-x^3}$

Giải

Ta thấy rằng $x=0$ không là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế cho x^3 ta được

$$-2 + \frac{10}{x} - \frac{17}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2\sqrt[3]{\frac{5}{x^2} - 1}$$

Đặt $t = \frac{1}{x}$ suy ra $8t^3 - 17t^2 + 10t - 2 = 2\sqrt[3]{5t^2 - 1}$

$$\Leftrightarrow (2t-1)^3 + 2(2t-1) = (5t^2-1) + 2\sqrt[3]{5t^2-1} \quad (*)$$

Xét hàm $f(u) = u^3 + 2u$ là hàm đồng biến $\forall u \in \mathbb{R}$

Phương trình (*) có dạng $f(2t-1) = f(\sqrt[3]{5t^2-1}) \Rightarrow 2t-1 = \sqrt[3]{5t^2-1}$

$$\Leftrightarrow (2t-1)^3 = 5t^2 - 1 \Leftrightarrow 8t^2 - 17t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{17 \pm \sqrt{97}}{8} \Rightarrow x = \frac{8}{17 \pm \sqrt{97}}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{8}{17 \pm \sqrt{97}}$.

Câu 11: Giải phương trình $x + 10\sqrt[3]{12 + \sqrt[3]{x-3}} + 9 = \sqrt[3]{3-x}$

Giải

Đặt $t = \sqrt[3]{3-x} \Leftrightarrow x = 3 - t^3$. Lúc đó phương trình đã cho trở thành

$$t^3 + t - 12 = 10\sqrt[3]{12 + 9t} \Leftrightarrow t^3 + 10t = (\sqrt[3]{12 + 9t})^3 + \sqrt[3]{12 + 9t} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(u) = u^3 + 10u$, $u \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(u) = 3u^2 + 10 > 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với kết quả này thì từ (1) ta có $f(t) = f(\sqrt[3]{12 + 9t}) \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{12 + 9t} \Leftrightarrow t^3 - 9t - 12 = 0$

$$\Leftrightarrow t^3 - (\sqrt[3]{3})^3 - (\sqrt[3]{9})^2 - 3\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9})(t^2 + \sqrt[3]{3}^2 + \sqrt[3]{9}^2 + \sqrt[3]{3}t - \sqrt[3]{9}t - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} \Leftrightarrow \sqrt[3]{3-x} = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} \Leftrightarrow x = 3 - (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})^3$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3 - (\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})^3$.

Câu 12: Giải phương trình $x^3 + 3x + 1 = x^2\sqrt[3]{x^3 + 4x^2}$

Giải

Do $x = 0$ không là nghiệm nên phương trình tương đương

$$1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \sqrt[3]{1 + \frac{4}{x}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + 1\right)^3 + \left(\frac{1}{x} + 1\right) = \left(\frac{4}{x} + 1\right) + \sqrt[3]{\frac{4}{x} + 1} \quad (*)$$

Hàm $f(t) = t^3 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và phương trình (*) có dạng $f\left(\frac{1}{x} + 1\right) = f\left(\sqrt[3]{\frac{4}{x} + 1}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + 1 = \sqrt[3]{\frac{4}{x} + 1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + 1\right)^3 = \frac{4}{x} + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{-3 \pm \sqrt{13}}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -\frac{2}{3 \pm \sqrt{13}}$.

Câu 13: Giải phương trình $x + \sqrt[4]{x^2 + x + 1} \sqrt[3]{x^2 + x + 2} = \sqrt[4]{x^2 - x + 1} \sqrt[3]{x^2 - x + 2}$

Giải

Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + x \right)^2 + \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2} + x \right)^2} + \frac{3}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} + x \right)^2} + \frac{7}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 + \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2} - x \right)^2} + \frac{3}{4} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2} - x \right)^2} + \frac{7}{4}$$

Do hàm số $f(t) = \frac{1}{2}t + \sqrt[4]{t + \frac{3}{4}} \sqrt[3]{t + \frac{7}{4}}$ là hàm đồng biến trên $[0; +\infty)$ nên

$$\left(\frac{1}{2} + x \right)^2 = \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 14: Giải phương trình $(5x-6)^2 - \frac{1}{\sqrt{5x-7}} = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

Giải

Điều kiện $x > \frac{7}{5}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$(5x-6)^2 - \frac{1}{\sqrt{(5x-6)-1}} = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(u) = u^2 - \frac{1}{\sqrt{u-1}}$, $u > 1$. Ta có: $f'(u) = 2u + \frac{1}{2\sqrt{(u-1)^3}} > 0$, $\forall u > 1$.

Suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến trong khoảng $(1; +\infty)$ nên:

Với $x > \frac{7}{5}$, ta có: $\begin{cases} x > 1; 5x-6 > 1 \\ f(5x-6) = f(x) \end{cases} \Rightarrow 5x-6 = x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Thử lại ta thấy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{3}{2}$.

Câu 15: Giải phương trình $\frac{x^3 + 6x^2 + 15x + 13}{x^2 + 4x + 7} = \sqrt{x+9} - \frac{1}{x+12}$.

Giải

Điều kiện $x \geq -9$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$(x+2) - \frac{1}{x^2 + 4x + 7} = \sqrt{x+9} - \frac{1}{x+12} \Leftrightarrow (x+2) - \frac{1}{(x+2)^2 + 3} = \sqrt{x+9} - \frac{1}{(x+9)+3} \quad (*)$$

Xét hàm số: $f(u) = u - \frac{1}{u^2 + 3}$ trên $\mathbb{R}$, ta có:

$$f'(u) = 1 + \frac{2u}{(u^2 + 3)^2} = \frac{(u^2 + 3)^2 + 2u}{(u^2 + 3)^2} = \frac{u^4 + 5u^2 + 8 + (u+1)^2}{(u^2 + 3)^2} > 0, \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

Suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nên $f(x+2) = f(\sqrt{x+9}) \Leftrightarrow x+2 = \sqrt{x+9} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{29}-3}{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{\sqrt{29}-3}{2}$.

Câu 16: Giải phương trình $26x^3 + 30x^2 = 4 - \frac{\sqrt{3x} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{3x^2 - 6x}}$.

Giải

Điều kiện $x > 2$. Đặt $\sqrt{3x} = a$; $\sqrt{x-2} = b$ ($a, b > 0$).

Phương trình đã cho trở thành:

$$a^6 + 3a^4 - b^6 - 3b^4 + \frac{a-b}{ab} = 0 \Leftrightarrow a^6 + 3a^4 - \frac{1}{a} = b^6 + 3b^4 - \frac{1}{b} \quad (*)$$

Xét hàm số: $f(u) = u^6 + 3u^4 - \frac{1}{u}$, $u > 0$, ta có: $f'(u) = 6u^5 + 12u^3 + \frac{1}{u^2} > 0$, $\forall u > 0$

Suy ra hàm số $f(u)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, do đó $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) = f(b) \\ a, b \in (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a = b$

Với $a = b$, thay trở lại ta có: $\sqrt{3x} = \sqrt{x-2}$ (VN).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 17: Giải phương trình $\sqrt[4]{3(x+5)} - \sqrt[4]{x+13} = \sqrt[4]{11-x} - \sqrt[4]{3(3-x)}$.

Giải

Điều kiện $-5 \leq x \leq 3$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{3(x+5)} + \sqrt[4]{3(3-x)} &= \sqrt[4]{11-x} + \sqrt[4]{x+13} \\ \Leftrightarrow \sqrt[4]{(3x+2)+13} + \sqrt[4]{11-(3x+2)} &= \sqrt[4]{11-x} + \sqrt[4]{x+13} \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số: $f(u) = \sqrt[4]{11-u} + \sqrt[4]{u+13}$, $u \in [-13; 11]$, ta có hàm số $f(u)$ liên tục trên đoạn $[-13; 11]$, đồng thời $f'(u) = \frac{1}{4\sqrt[4]{u+13}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{11-u}} \Rightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = -1$.

Suy ra: $f(u)$ đồng biến trên $[-13; -1]$ và nghịch biến trên $(-1; 11]$. Do đó ta có:

+ Nếu $x \in [-5; -1) \Rightarrow \begin{cases} -13 \leq 3x+2 < -1 \\ 3x+2 < x \end{cases}$ nên $f(3x+2) < f(x)$ hay phương trình (*) không có nghiệm $x \in [-5; -1)$

+ Nếu $x \in (-1; 3] \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq 3x+2 < 11 \\ 3x+2 > x \end{cases}$ nên $f(3x+2) < f(x)$ hay phương trình (*) không có nghiệm $x \in (-1; 3]$.

Với $x = -1 \Rightarrow f(x) = f(3x+2)$. Hay phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Câu 18: Giải phương trình $\frac{\sqrt{x^2-x+2}}{1+\sqrt{-x^2+x+2}} - \frac{\sqrt{x^2+x}}{1+\sqrt{-x^2-x+4}} = x^2 - 1$.

Giải

Điều kiện $\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x = -1 \end{cases}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{\sqrt{x^2-x+2}}{1+\sqrt{4-(x^2-x+2)}} - \frac{\sqrt{x^2+x}}{1+\sqrt{4-(x^2+x)}} = x^2-1 \quad (*)$$

Xét hàm số: $f(u) = \frac{u}{1+\sqrt{4-u^2}}$, $0 \leq u \leq 2$, ta có:

$$f'(u) = \frac{\sqrt{4-u^2}+4}{\sqrt{4-u^2}(1-\sqrt{4-u^2})} > 0, \quad \forall u \in [0;2]$$

Đồng thời $f(u)$ liên tục trên đoạn $[0;2]$, suy ra $f(u)$ đồng biến trên đoạn $[0;2]$. Ta lại có:
+ $x = -1$ không là nghiệm của phương trình.

Với $x \in \left[0; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right]$, ta có: $\sqrt{x^2-x+2}, \sqrt{x^2+x} \in [0;2]$ và:

- Nếu $0 \leq x < 1 \Rightarrow \sqrt{x^2-x+2} > \sqrt{x^2+x} \Rightarrow f(\sqrt{x^2-x+2}) > f(\sqrt{x^2+x})$, suy ra:

$VT(*) = f(\sqrt{x^2-x+2}) > f(\sqrt{x^2+x}) > 0$, đồng thời $VP(*) = x^2-1 < 0$ hay phương trình (*) không có nghiệm $x \in [0;1)$

- Nếu $1 < x < \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow \sqrt{x^2-x+2} < \sqrt{x^2+x} \Rightarrow f(\sqrt{x^2-x+2}) < f(\sqrt{x^2+x})$,

Suy ra: $VT(*) = f(\sqrt{x^2-x+2}) - f(\sqrt{x^2+x}) < 0$, đồng thời $VP(*) = x^2-1 > 0$ hay phương trình (*) không có nghiệm $x \in \left(1; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right]$.

Với $x = 1$ ta có: $f(\sqrt{x^2-x+2}) = f(\sqrt{x^2+x})$. Suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu 19: Giải phương trình $(x+\sqrt{x^2+4})(x+\sqrt{x^2-6x+10}-3)=2$

Giải

Ta có phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (x+\sqrt{x^2+4})(x+\sqrt{x^2-6x+10}-3)=2 \\ \Leftrightarrow & \left(-\frac{x}{2}\right) + \sqrt{\left(-\frac{x}{2}\right)^2+1} = (x-3) + \sqrt{(x-3)^2+1} \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t + \sqrt{t^2+1}$ ta có $f'(t) = \frac{t+\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và phương trình (*) có dạng

$$f\left(-\frac{x}{2}\right) = f(x-3) \Rightarrow -\frac{x}{2} = x-3 \Leftrightarrow x=2$$

Vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=2$.

Câu 20: Giải phương trình $4x^2 + 12 + \sqrt{x-1} = 4(x\sqrt{5x-1} + \sqrt{9-5x})$

Giải

Điều kiện: $1 \leq x \leq \frac{9}{5}$.

$$(*) \Leftrightarrow 4x^2 + 12 + \sqrt{x-1} - 4x\sqrt{5x-1} - 4\sqrt{9-5x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 2.2x.\sqrt{5x-1} + 5x-1) + [4 - 2.2.\sqrt{9-5x} + 9-5x] + \sqrt{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - \sqrt{5x-1})^2 + (2 - \sqrt{9-5x})^2 + \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \sqrt{5x-1} = 0 \\ 2 - \sqrt{9-5x} = 0 \\ \sqrt{x-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Câu 21: Giải phương trình $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2x^2+1} = \sqrt[3]{2x^2} - \sqrt[3]{x+1}$

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+1)+1} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x^2+1} + \sqrt[3]{2x^2} \Leftrightarrow f(x+1) = f(2x^2) \quad (1)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t+1} \text{ có } f'(t) = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(t+1)^2}} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}.$$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(x+1) = f(2x^2) \Leftrightarrow x+1 = 2x^2 \Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } x = -\frac{1}{2}.$$

Câu 22: Giải phương trình $24x^2 - 60x + 36 - \frac{1}{\sqrt{5x-7}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$

Giải

Điều kiện: $x > \frac{7}{5}$.

$$\text{Phương trình tương đương } (5x-6)^2 - \frac{1}{\sqrt{(5x-6)-1}} = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow f(5x-6) = f(x)$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t^2 - \frac{1}{\sqrt{t-1}} \text{ trên } (1; +\infty) \text{ có } f'(t) = 2t + \frac{1}{2(t-1)\sqrt{t-1}} > 0, \forall t > 1.$$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên nửa khoảng $(1; +\infty)$.

$$\Rightarrow f(5x-6) = f(x) \Leftrightarrow 5x-6 = x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Câu 23: Giải phương trình $(x+1)^2(4+\sqrt{x^2+2x+4})+x(x+1)(8+2\sqrt{4x^2+3})=\frac{3}{2}+\frac{1}{2x}$

Giải

Điều kiện: $x \neq 0$. Do $x = -1$ không là nghiệm nên với $x \neq -1$ ta có:

$$\begin{aligned} (x+1)^2(4+\sqrt{x^2+2x+4})+x(x+1)(8+2\sqrt{4x^2+3}) &= \frac{1}{(x+1)} \cdot \frac{3x+1}{2x} \\ \Leftrightarrow (x+1)\left[4+\sqrt{(x+1)^2+3}\right]+2x\left[4+\sqrt{(2x)^2+3}\right] &= \frac{3x+1}{2x^2+2x} \\ \Leftrightarrow (x+1)\left[4+\sqrt{(x+1)^2+3}\right] &= (-2x)\left[4+\sqrt{(-2x)^2+3}\right]+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2x} \\ \Leftrightarrow (x+1)\left[4+\sqrt{(x+1)^2+3}\right]-\frac{1}{x+1} &= (-2x)\left[4+\sqrt{(-2x)^2+3}\right]-\frac{1}{(-2x)} \\ \Leftrightarrow f(x+1) &= f(-2x) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=t\left(4+\sqrt{t^2+3}\right)-\frac{1}{t}$ trên $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ có:

$$f'(t)=4+\sqrt{t^2+3}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}+\frac{1}{t^2}>0, \forall t \neq 0$$

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến. Suy ra $f(x+1)=f(-2x) \Leftrightarrow x+1=-2x \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$

Câu 24: Giải phương trình $2x^3-x-\frac{1}{8}=\sqrt[3]{\frac{9}{8x^2}+\frac{1}{x}}-1$

Giải

Điều kiện: $x \neq 0$. Nhân hai vế phương trình cho x , ta được:

$$\begin{aligned} 2x^3-x^2-\frac{1}{8}x &= \sqrt[3]{\frac{9x}{8}+x^2-x^3} \Leftrightarrow x^3+x=-x^3+x^2+\frac{9x}{8}+\sqrt[3]{-x^3+x^2+\frac{9x}{8}} \\ \Leftrightarrow x^3+x &= \left(\sqrt[3]{-x^3+x^2+\frac{9x}{8}}\right)^3+\sqrt[3]{-x^3+x^2+\frac{9x}{8}} \Leftrightarrow f(x)=f\left(\sqrt[3]{-x^3+x^2+\frac{9x}{8}}\right) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và có $f(x)=f\left(\sqrt[3]{-x^3+x^2+\frac{9x}{8}}\right) \Leftrightarrow x=-x^3+x^2+\frac{9x}{8}$

$$\Leftrightarrow 2x^3-x^2-\frac{9}{8}x=0 \Leftrightarrow x(16x^2-8x-9)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ hoặc } x=\frac{1 \pm \sqrt{10}}{4}.$$

Câu 25: Giải phương trình $\sqrt{5+x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{5-4x-x^2}=\frac{x}{2}+\sqrt{x+6}$

Giải

Điều kiện: $-5 \leq x \leq 1$.

Đặt $y=\sqrt{5+x}+\sqrt{1-x} \geq 0 \Rightarrow y^2=6+2\sqrt{(x+5)(1-x)} \Leftrightarrow \sqrt{5-4x-x^2}=\frac{y^2-6}{2}$

Phương trình đầu tương đương

$$y + \frac{y^2 - 6}{2} = \frac{x}{2} + \sqrt{x+6} \Leftrightarrow y + \frac{y^2}{2} - 3 = \sqrt{x+6} + \frac{(\sqrt{x+6})^2}{2} - 3 \Leftrightarrow f(y) = f(\sqrt{x+6})$$

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{t^2}{2} - 3$ trên $[0; +\infty)$ có $f'(t) = 1 + t > 0, \forall t \geq 0$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[0; +\infty)$ và có $f(y) = f(\sqrt{x+6}) \Leftrightarrow y = \sqrt{x+6}$

$$\text{Suy ra: } \sqrt{5+x} + \sqrt{1-x} = \sqrt{x+6} \Leftrightarrow 2\sqrt{5-4x-x^2} = x \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{41}-8}{5}.$$

Câu 26: Giải phương trình $\sqrt{3-x} + \sqrt{x+4} + 2\sqrt{12-x-x^2} = 4x-2 + \sqrt{4x+5}$

Giải

Điều kiện: $-4 \leq x \leq 3$.

$$\text{Đặt } y = \sqrt{3-x} + \sqrt{x+4} \geq 0 \Rightarrow y^2 = 7 + 2\sqrt{12-x-x^2} \Rightarrow 2\sqrt{12-x-x^2} = y^2 - 7$$

Phương trình tương đương

$$y + y^2 - 7 = 4x - 2 + \sqrt{4x+5} \Leftrightarrow y + y^2 - 7 = \sqrt{4x+5} + \frac{(\sqrt{4x+5})^2}{2} - 7 \Leftrightarrow f(y) = f(\sqrt{4x+5})$$

Xét hàm số $f(t) = t + t^2 - 7$ trên $[0; +\infty)$ có $f'(t) = 1 + 2t > 0, \forall t \geq 0$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[0; +\infty)$ và có $f(y) = f(\sqrt{4x+5}) \Leftrightarrow y = \sqrt{4x+5}$

$$\text{Suy ra: } \sqrt{3-x} + \sqrt{x+4} = \sqrt{4x+5} \Leftrightarrow \sqrt{12-x-x^2} = 2x-1 \Leftrightarrow x = \frac{3+\sqrt{229}}{10}.$$

Câu 27: Giải phương trình $5(x^2 - x - 6)\sqrt{5x-19} = (x+2)(x+5+4\sqrt{x-3})(\sqrt{x-3}+2)$

Giải

Điều kiện: $x \geq 3$.

Phương trình tương đương

$$5(x+2)(x-3)\sqrt{5x-19} = (x+2)\left[(\sqrt{x-3})^2 + 4\sqrt{x-3} + 2^2 + 4\right](\sqrt{x-3}+2)$$

$$\Leftrightarrow (5x-15)\sqrt{5x-19} = \left[(\sqrt{x-3}+2)^2 + 4\right](\sqrt{x-3}+2) \quad (\text{do: } x+2 > 0, \forall x \geq 3)$$

$$\Leftrightarrow \left[(\sqrt{5x-19})^2 + 4\right]\sqrt{5x-19} = (\sqrt{x-3}+2)^3 + 4(\sqrt{x-3}+2)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{5x-19})^3 + 4\sqrt{5x-19} = (\sqrt{x-3}+2)^3 + 4(\sqrt{x-3}+2) \Leftrightarrow f(\sqrt{5x-19}) = f(\sqrt{x-3}+2)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 4t$ có $f'(t) = 3t^2 + 4 > 0, \forall t$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\text{Khi đó có } f(\sqrt{5x-19}) = f(\sqrt{x-3}+2) \Leftrightarrow \sqrt{5x-19} = \sqrt{x-3}+2$$

$$\Leftrightarrow 5x-19 = x+1+4\sqrt{x-3} \Leftrightarrow \sqrt{x-3} = x-5 \Leftrightarrow x=7.$$

Câu 28: Giải phương trình $\frac{4(1+\sqrt{1+4x})}{x+1+\sqrt{x^2+3x+2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)^2$

Giải

Phương trình tương đương

$$\frac{4 + 4\sqrt{1+4x}}{x+1 + \sqrt{(x+1)(x+2)}} = \frac{1}{x} - \frac{x}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4x\sqrt{1+4x} = \frac{x+1 + \sqrt{(x+1)(x+2)}}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x+1}} \Leftrightarrow f(4x) = f\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{1+t}$ trên $(0; +\infty)$ có $f'(t) = 1 + \sqrt{1+t} + \frac{t}{2\sqrt{1+t}} > 0$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$

Suy ra: $f(4x) = f\left(\frac{1}{x+1}\right) \Leftrightarrow 4x = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$

Câu 29: Giải phương trình $\frac{(2x-1)^2(4x^2-4x+3)}{4} = \sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x} + 2\sqrt{4x-4x^2+3} + 4$

Giải

Điều kiện: $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$. Phương trình tương đương

$$\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x}\right) + \left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x}\right)^2 = \frac{(2x-1)^2}{2} + \left[\frac{(2x-1)^2}{2}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow f\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x}\right) = f\left(\frac{(2x-1)^2}{2}\right)$$

Xét hàm số $f(t) = t + t^2$ trên $[0; +\infty)$ có $f'(t) = 1 + 2t > 0$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Suy ra $f\left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x}\right) = f\left(\frac{(2x-1)^2}{2}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} + \sqrt{3-2x} = \frac{(2x-1)^2}{2}$ (i)

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{2x+1} \geq 0 \\ v = \sqrt{3-2x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ u^2 - v^2 = 4x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ \frac{1}{2}(u^2 - v^2) = 2x - 1 \end{cases}$

Kết hợp với phương trình (i) được hệ $\begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ u + v = \frac{(u^2 - v^2)^2}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ 8 = (u - v)^2(u + v) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 4 \\ (u^2 + v^2 - 2uv)(u + v) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u + v)^2 - 2uv = 4 \\ (2 - uv)(u + v) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P = 4 \\ (2 - P)S = 8 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} S = u + v \geq 0 \\ P = uv \geq 0 \end{cases} (S^2 \geq 4P)$ và giải hệ này được: $\begin{cases} P = 0 \\ S = 2 \end{cases}$.

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} u = 2 \\ v = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 0 \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+1} = 2 \\ \sqrt{3-2x} = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \sqrt{2x+1} = 0 \\ \sqrt{3-2x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$$

So với điều kiện nghiệm phương trình là $x = \frac{3}{2}, x = -\frac{1}{2}$.

Câu 30: Giải phương trình $7x^2 - 13x + 8 = 2x^2 \sqrt[3]{x(1+3x-3x^2)}$

Giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Do $x = 0$ không là nghiệm nên chia hai vế phương trình cho $x^3 \neq 0$, ta được:

$$\frac{7}{x} - \frac{13}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 3} \text{ và đặt } y = \frac{1}{x}, y \neq 0 \text{ thì phương trình tương đương:}$$

$$\begin{aligned} 8y^3 - 13y^2 + 7y &= 2\sqrt[3]{y^2 + 3y - 3} \\ \Leftrightarrow (2y-1)^3 + 2(2y-1) &= \left(\sqrt[3]{y^2 + 3y - 3}\right)^3 + 2\sqrt[3]{y^2 + 3y - 3} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Suy ra: } f(2y-1) = f\left(\sqrt[3]{y^2 + 3y - 3}\right) \Leftrightarrow 2y-1 = \sqrt[3]{y^2 + 3y - 3}$$

$$\text{Từ đó tìm được các nghiệm là } x = 1, x = \frac{-5 + \sqrt{89}}{4}, x = -\frac{5 + \sqrt{89}}{4}.$$

Câu 31: Giải phương trình $4x^2 + 18x + \frac{14}{x} + 27 = \sqrt[3]{\frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3}}$.

Giải

Điều kiện: $x \neq 0$.

$$\text{Nhân 2 vế phương trình cho } x, \text{ được: } 4x^3 + 18x^2 + 27x + 14 = \sqrt[3]{4x+5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2x+3)^3 + (2x+3) = \left(\sqrt[3]{4x+5}\right)^3 + \sqrt[3]{4x+5} \Leftrightarrow f(2x+3) = f\left(\sqrt[3]{4x+5}\right)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{2}t^3 + t$ có $f'(t) = \frac{3}{2}t^2 + 1 > 0, \forall t$, nên $f(t)$ tăng trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Suy ra: } f(2x+3) = f\left(\sqrt[3]{4x+5}\right) \Leftrightarrow 2x+3 = \sqrt[3]{4x+5} \Leftrightarrow (2x+3)^3 = 4x+5$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(8x^2 + 28x + 22) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = \frac{-7 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Câu 32: Giải phương trình $9x^2 - 28x + 21 = \sqrt{x-1}$.

Giải

$$\bullet \text{ Với } x \in \left[1; \frac{3}{2}\right) \text{ thì } (4-3x)^2 + (4-3x) = (\sqrt{x-1})^2 + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow f(4-3x) = f(\sqrt{x-1})$$

Xét $f(t) = t^2 + t$ trên $\left[1; \frac{3}{2}\right)$ có $f'(t) = 2t + 1 > 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Suy ra: } f(4-3x) = f(\sqrt{x-1}) \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 4-3x \Leftrightarrow x = \frac{25 - \sqrt{13}}{8}$$

- Với $x \in \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ thì $(3x-5)^2 + (3x-5) = (\sqrt{x-1})^2 + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow f(3x-5) = f(\sqrt{x-1})$

Xét $f(t) = t^2 + t$ trên $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$ có $f'(t) = 2t + 1 > 0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Suy ra: } f(3x-5) = f(\sqrt{x-1}) \Leftrightarrow 3x-5 = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{3} \\ 9x^2 - 31x + 26 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Câu 33: Giải phương trình $(1 + \sqrt{x+1})(\sqrt{2x^2 - 2x + 1} + x - 1) = x\sqrt{x}$

Giải

Điều kiện $x > 0$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 + 1} - \left(\frac{1}{x} - 1\right) = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x+1}} \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 + 1} - \left(\frac{1}{x} - 1\right) = \sqrt{\frac{1}{x} + 1} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2 + 1} - t$ ta có $f'(t) = \frac{t - \sqrt{t^2 + 1}}{\sqrt{t^2 + 1}} = -\frac{1}{(t + \sqrt{t^2 + 1})\sqrt{t^2 + 1}} < 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra $f(t)$ nghịch biến và ta có $\frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Câu 34: Giải phương trình: $x = \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1+2\sqrt[3]{1+x}}$

Giải

Đặt $x = 2t$, thay vào ta được:

$$2t = \sqrt[3]{1+2t} + \sqrt[3]{1+2\sqrt[3]{1+2t}} \Leftrightarrow 2t + \sqrt[3]{1+2t} = 2\sqrt[3]{1+2t} + \sqrt[3]{1+2\sqrt[3]{1+2t}} \Leftrightarrow f(t) = f(\sqrt[3]{1+2t})$$

Với $f = 2k + \sqrt[3]{1+2k}$ là hàm f đồng biến với mọi k .

$$\Rightarrow t = \sqrt[3]{1+2t} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^3 = 1+x \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-2; 1 - \sqrt{5}; 1 + \sqrt{5}\}$.

Chú ý: Phương pháp này có thể giải quyết được một loạt các phương trình như dưới đây mà các phương pháp khác (như đặt ẩn phụ) chưa chắc giải quyết được:

$$1) nx = \sqrt{1+x} + \sqrt{1+\sqrt{1+x}} + \dots + \sqrt{1+\sqrt{1+\dots+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}}$$

2) Luyện tập thêm:

Giải các phương trình sau:

$$a) x + \sqrt{1+x} + \sqrt{1+\sqrt{1+x}} = 3\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}$$

$$b) x = \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{1+x}} + \sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{1+x}}}$$

Câu 35: Giải phương trình $x^3 - 2 = 3\sqrt[3]{3x+2}$

Giải

Phương trình đã cho được biến đổi về phương trình:

$$x^3 + 3x = 3x + 2 + \sqrt[3]{3x+2} \Leftrightarrow x^3 + 3x = \left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^3 + 3\sqrt[3]{3x+2} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ liên tục và luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó từ (1) ta có:

$$f(x) = f\left(\sqrt[3]{3x+2}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3x+2} \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = -1$; $x = 2$

Câu 36: Giải phương trình $8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = \sqrt[3]{3x-5}$

Giải

Ta sẽ đưa bài toán về xét hàm số $f(t) = at^3 + bt$.

Vấn đề còn lại là tìm hai hệ số a, b . Trước tiên ta viết vế phải về hình thức:

$$a\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^3 + b\sqrt[3]{3x-5} = \sqrt[3]{3x-5} \Rightarrow b = 1.$$

Lúc đó vế trái được viết dưới dạng $8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = a(mx+n)^3 + (mx+n)$

Bây giờ ta chỉ cần tìm ba hệ số a, m, n sao cho:

$$a(mx+n)^3 + (mx+n) = a\left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^3 + \sqrt[3]{3x-5}.$$

$$\text{Vì } 8x^3 = (2x)^3 \Rightarrow am^3 = 8 \Rightarrow \begin{cases} a = 1; m = 2 \\ a = 8; m = 1 \end{cases}$$

Nếu $a = 1; m = 2$ Khi đó ta có: $(2x+n)^3 + (2x+n) = 3x-5 + \sqrt[3]{3x-5}$

$$\Leftrightarrow 8x^3 + 12nx^2 + (6n^2 - 1)x + n^3 + n + 5 = \sqrt[3]{3x-5} \quad (1)$$

Kết hợp (1) với phương trình đã cho ta có:

$$\Leftrightarrow 8x^3 + 12nx^2 + (6n^2 - 1)x + n^3 + n + 5 = 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25$$

$$\text{Đồng nhất hệ số ở hai vế của phương trình ta được } \begin{cases} 12n = -36 \\ 6n^2 - 1 = 53 \\ n^3 + n + 5 = -25 \end{cases} \Leftrightarrow n = -3$$

Vậy hàm số đặc trưng là $f(t) = t^3 + t$, vậy lời giải chi tiết là

Phương trình đã cho được biến đổi thành phương trình:

$$(2x-3)^3 + (2x-3) = \left(\sqrt[3]{3x-5}\right)^3 + \sqrt[3]{3x-5} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Ta có: $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ liên tục và luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó từ (2) ta có:

$$\begin{aligned} f(2x-3) &= f(\sqrt[3]{3x-5}) \Leftrightarrow 2x-3 = \sqrt[3]{3x-5} \\ \Leftrightarrow (2x-3)^2 &= 3x-5 \Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 51x - 22 = 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)(8x^2 - 20x + 11) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x = 2$; $x = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{4}$.

Câu 37: Giải phương trình $x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = \sqrt[3]{-x^2 + 9x^2 - 19x + 11}$

Giải

Cũng như ví dụ trên ta cũng sẽ nghĩ đến việc xét hàm số đặc trưng $f(t) = at^3 + bt$.

Ta viết vế phải về hình thức

$$a(\sqrt[3]{-x^2 + 9x^2 - 19x + 11})^3 + b(\sqrt[3]{-x^2 + 9x^2 - 19x + 11}) = \sqrt[3]{-x^2 + 9x^2 - 19x + 11}$$

Từ phương trình này ta suy ra $b = 1$. Lúc này ta viết phương trình về hình thức biến đổi:

$$a(mx+n)^3 + (mx+n) = a(\sqrt[3]{-x^2 + 9x^2 - 19x + 11})^3 + \sqrt[3]{-x^2 + 9x^2 - 19x + 11} \quad (1)$$

$$\text{Do hệ số của } x^3 \text{ là 1 nên ta có: } am^3 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ m = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = 8 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a = -1 \\ m = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -8 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $(a; m) = (1; 1)$ ta có:

$$2x^3 + (3n-9)x^2 + (3n^2+20)x + n^3 + n - 11 = \sqrt[3]{-x^2 + 9x^2 - 19x + 11}.$$

Khi đó kết hợp với phương trình đã cho ta cần tìm n sao cho:

$$2x^3 + (3x-9)x^2 + (3n^2+20)x + n^3 + n - 11 = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$$

Điều này không thể thực hiện được vì hệ số của x^3 ở hai vế đã khác nhau.

Tương tự cho trường hợp cặp số $(a; m) = \left\{ \left(8; \frac{1}{2} \right); (1; -1); \left(-8; -\frac{1}{2} \right) \right\}$ ta cũng không tìm

được n . Vậy ta cần tìm n như thế nào đây? Câu trả lời nằm ở phương trình (1) ta có:

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow (am^3 + a)x^3 + (3anm^2 - 9a)x^2 + (3n^2am + m + 19a)x + am^3 + n - 11a \\ = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} \end{aligned}$$

Kết hợp với phương trình đã cho ta có:

$$(am^3 + a)x^3 + (3anm^2 - 9a)x^2 + (3n^2am + m + 19a)x + am^3 + n - 11a = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$$

$$\text{Đồng nhất hệ số hai vế phương trình này ta có } \begin{cases} am^3 + a = 1 \\ 3anm^2 - 9a = -6 \\ 3n^2am + m + 19a = 12 \\ an^3 + n - 11a = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ m = 1 \\ n = -1 \end{cases}$$

Khi đó ta sẽ xét hàm số $f(t) = \frac{1}{2}t^3 + t$ và phương trình đã cho sẽ được biến đổi thành:

$$\frac{1}{2}(x-1)^3 + (x-1) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}\right)^3 + \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}.$$

Khi đó phương trình đã cho được biến đổi như sau:

$$\frac{1}{2}(x-1)^3 + (x-1) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}\right)^3 + \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{2}t^3 + t, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có: $f'(t) = \frac{3}{2}t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ liên tục và luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó từ (*) ta có:

$$\begin{aligned} f(x-1) = f\left(\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}\right) &\Leftrightarrow (x-1)^3 = -x^3 + 9x^2 - 19x + 11 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Do đó phương trình có ba nghiệm: $x = 1; x = 2; x = 3$.

Câu 38: Giải phương trình $2x^3 + x^2 - 3x + 1 = 2(3x-1)\sqrt{3x-1}$

Giải

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{3}$. Phương trình đã cho được biến đổi như sau:

$$2x^3 + x^2 = 2\left(\sqrt[3]{3x-1}\right)^3 + \left(\sqrt{3x-1}\right)^2 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t^2, t > 0$. Ta có: $f'(t) = 6t^2 + 2t > 0, \forall t > 0$

Vậy hàm số $f(t)$ liên tục và luôn đồng biến trong khoảng $(0; +\infty)$. Do đó từ (1) ta có:

$$f(x) = f\left(\sqrt{3x-1}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt{3x-1} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Câu 39: Giải phương trình $\sqrt{x+2}\sqrt[3]{x^2+4x+5}\sqrt[4]{x^2+4x+1} = \sqrt[3]{x+12}\sqrt[4]{x^2+11x+24}$

Giải

Điều kiện $x \geq -2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[4]{(x^2+4x+1)(x^2+4x+4)}\sqrt[3]{x^2+4x+5} = \sqrt[4]{(x+3)(x+7)}\sqrt[3]{x+12}$$

Đặt $t = x^2 + 4x + 1$, phương trình trở thành $\sqrt[4]{(t+3)(t+7)}\sqrt[3]{t+6} = \sqrt[4]{(x+3)(x+7)}\sqrt[3]{x+6}$

Xét hàm số $f(k) = \sqrt[4]{(k+3)(k+7)}\sqrt[3]{k+6}; k \in [-2; +\infty)$.

Ta có $f'(k) = \frac{(k+5)\sqrt[3]{k+6}}{2\sqrt[4]{[(k+3)(k+7)]^3}} + \frac{\sqrt[4]{(k+3)(k+7)}}{3\sqrt[3]{(k+6)^2}} > 0$

Suy ra $f(k)$ là hàm đồng biến trên $[-2; +\infty)$.

$$\text{Nên ta có } f(t) = f(x) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = x \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

So với điều kiện, ta nhận $x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ là nghiệm của phương trình.

Vậy $x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 40: Giải phương trình $\sqrt{x+2} \cdot \sqrt[3]{x^2+4x+7} \cdot \sqrt[4]{x^2+4x+8} = \sqrt[3]{x+6} \cdot \sqrt[4]{x^2+10x+21}$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2+10x+21 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \in (-\infty; 7] \cup [-3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -2$$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} \cdot \sqrt[3]{(x+2)^2+3} \cdot \sqrt[4]{(x+2)^2+4} &= \sqrt[3]{(x+3)+3} \cdot \sqrt[4]{(x+3)(x+7)} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x+2}) \left(\sqrt[3]{(x+2)^2+3} \right) \left(\sqrt[4]{(x+2)^2+4} \right) &= \left(\sqrt[3]{x+3} \right) \left(\sqrt[3]{(\sqrt{x+3})^2+3} \right) \left(\sqrt[4]{(x+3)+4} \right) \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số: $f(t) = t \sqrt[3]{t^4+3} \sqrt[4]{t^4+4} \quad (t \geq 0)$

$$\text{Ta có } f'(t) = \sqrt[3]{t^4+3} \sqrt[4]{t^4+4} + \frac{4t^4 \sqrt[4]{t^4+4}}{3 \sqrt[3]{(t^4+3)^2}} + \frac{4t^4 \sqrt[3]{t^4+3}}{4 \sqrt[4]{(t^4+4)^3}} > 0, \quad \forall t \geq 0$$

$$(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+2}) = f(\sqrt[4]{x+3}) \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = \sqrt[4]{x+3} \Leftrightarrow (x+2)^2 = x+3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta có $x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ là nghiệm của phương trình.

Vậy $x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 41: Giải phương trình $\sqrt[4]{3(x+5)} - \sqrt[4]{x+13} = \sqrt[4]{11-x} - \sqrt[3]{3(3-x)}$.

Giải

Điều kiện $-5 \leq x \leq 3$.

Phương trình đã cho được viết lại thành $\sqrt[4]{15+3x} + \sqrt[4]{9-3x} = \sqrt[4]{15+(x-2)} + \sqrt[4]{9-(x-2)}$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt[4]{15+t} + \sqrt[4]{9-t}$ trên đoạn $t \in [-15; 9]$, ta có

$$f'(t) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(\sqrt[4]{15+t})^3} - \frac{1}{(\sqrt[4]{9-t})^3} \right) \Rightarrow f'(t) \geq 0, \forall t \in (-15; -3].$$

Và $f'(t) \leq 0, \forall t \in [-3; 9]$

Ta nhận thấy, với $x \in [-1; 3] \Rightarrow 3x; x-2 \in [-3; 9]$. Và $x \in [-5; -1] \Rightarrow 3x; x-2 \in [-15; -3]$.

Từ đó, suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $[-15; -3]$ và nghịch biến trên $[-3; 9]$ nên

$$f(3x) = f(x-2) \Leftrightarrow 3x = x-2 \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy, $x = -1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 42: Giải phương trình $\sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1$

Giải

Ta có: $\sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1 \Leftrightarrow 6x+1 + \sqrt[3]{6x+1} = (2x)^3 + 2x \Leftrightarrow f(\sqrt[3]{6x+1}) = f(2x)$

Trong đó $f(t) = t^3 + t$. Dễ thấy $f(t)$ là một hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$f(\sqrt[3]{6x+1}) = f(2x) \Leftrightarrow \sqrt[3]{6x+1} = 2x \Leftrightarrow 8x^3 = 6x+1 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Nếu $|x| > 1$ thì $|VT(1)| = |x(4\cos^2 - 3)| > 1 > \frac{1}{2}$.

Nếu $|x| \leq 1$ thì đặt $x = \cos \varphi, \varphi \in [0; \pi]$.

Phương trình trở thành: $4\cos^4 \varphi - 3\cos \varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 3\varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{3k\pi}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm $x = \cos \frac{\pi}{9}; x = \cos \frac{5\pi}{9}; x = \cos \frac{7\pi}{9}$.

Câu 43: Giải phương trình $4x = \sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{x+30}}}}$

Giải

$$\text{Đặt } \frac{1}{4}\sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{x+30}}} = y$$

$$\text{Đặt } \frac{1}{4}\sqrt{30 + \frac{1}{4}\sqrt{x+30}} = z$$

$$\text{Đặt } \frac{1}{4}\sqrt{x+30} = t.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 4x = \sqrt{30+y} \\ 4y = \sqrt{30+z} \\ 4z = \sqrt{30+t} \\ 4t = \sqrt{30+x} \end{cases}.$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{30+t}$ có $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{30+t}} > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(-30; +\infty)$.

Từ đó suy ra $x = y = z = t = \frac{1 + \sqrt{1921}}{32}$.

Câu 44: Giải phương trình

$$\sqrt{x^2 + 91} = \sqrt{\sqrt{x^4 + 2x^2\sqrt{x-2} + x - 93} - 2 + x^4 + 2x^2\sqrt{x-2} + x - 93}$$

Giải

$$VP = \sqrt{\sqrt{(x^2 + \sqrt{x-2})^2 - 91} - 2 + (x^2 + \sqrt{x-2})^2 - 91}.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{(x^2 + \sqrt{x-2})^2 - 91}.$$

$$\text{Ta có hệ PT } \begin{cases} \sqrt{t^2 + 91} = \sqrt{x-2} + x^2 \\ \sqrt{x^2 + 91} = \sqrt{t-2} + t^2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{t-2} + t^2 + \sqrt{t^2 + 91} = \sqrt{x-2} + x^2 + \sqrt{x^2 + 91}$$

Hàm số $f(t) = \sqrt{t-2} + t^2 + \sqrt{t^2 + 91}$ với $t \geq 2$ là hàm số đồng biến nên suy ra $t = x$.

$$\Rightarrow (x^2 + \sqrt{x-2})^2 = x^2 + 91 \Rightarrow (x^2 + \sqrt{x-2})^2 - 100 = x^2 - 9$$

$$\Rightarrow (x^2 + \sqrt{x-2} - 10)(x^2 + \sqrt{x-2} + 10) = x^2 - 9$$

$$\Rightarrow \left[(x-3)(x+3) + \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} \right] (x^2 + \sqrt{x-2} + 10) = (x-3)(x+3)$$

$$+) x = 3.$$

$$+) \left[(x+3) + \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} \right] (x^2 + \sqrt{x-2} + 10) = (x+3)$$

$$\Rightarrow (x+3)(x^2 + \sqrt{x-2}) + 9x + 27 + \frac{x^2 + \sqrt{x-2} + 10}{\sqrt{x-2} + 1} = 0$$

PT này vô nghiệm vì $x \geq 2$.

ĐS: $x = 3$.

PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH HÀM ĐƠN ĐIỀU.

Câu 1: Giải phương trình sau trên tập $(-3; 3)$: $\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{x-3} = \sqrt[5]{x+5} + \sqrt[5]{x-5}$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[3]{3+x} - \sqrt[5]{5+x} = \sqrt[3]{3-x} - \sqrt[5]{5-x} \Leftrightarrow f(x) = f(-x)$$

$$\text{Với: } f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(3+x)^2}} - \frac{1}{5\sqrt[5]{(5+x)^4}}$$

$$\text{Do } -3 < x < 3 \Rightarrow 5\sqrt[5]{(5+x)^4} > 5\sqrt[3]{(5+x)^2} > 5\sqrt[3]{(3+x)^2} > 3\sqrt[3]{(3+x)^2}$$

Suy ra $f'(x) > 0, \forall x \in (-3; 3) \Rightarrow f$: đồng biến trên khoảng $(-3; 3)$

Nên: phương trình $\Leftrightarrow f(x) = f(-x) \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$.

Câu 2: Giải phương trình: $2\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}} + 3\sqrt{-x + \sqrt{x^2 + 1}} = 5$

Giải

Đặt: $a = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow -x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{a}, a > 0$

Phương trình đã cho thành: $2\sqrt{a} + \frac{3}{\sqrt[3]{a}} = 5, f(a) = 2\sqrt{a} + \frac{3}{\sqrt[3]{a}} \Rightarrow f'(a) = 0 \Rightarrow a = 1$

Xét dấu của $f'(a)$ suy ra $a = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$.

Câu 3: Giải phương trình: $x^3 - 3x + (4x^2 - 2\sqrt{3}x + 2)\sqrt{1 + x^2} = 0$

Giải

VT $\Leftrightarrow x^3 - 3x + \left[3\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + x^2 + 1 \right] \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow VT \geq x^3 - 3x + (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$

Xét hàm $f(x) = x^3 - 3x + (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$

Có $f'(x) = 3\left(x^2 - x + x\sqrt{x^2 + 1}\right); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow$ Min $f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$. Hay $f(x) \geq 0 = VP \Rightarrow VT \geq VP$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 0$ và $f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ là nghiệm

Câu 4: Giải phương trình

$$(9x^2 + 24x + 17)\sqrt{3x + 3} - (x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 2x - 1} = x^3 - 5x - 4$$

Giải

Điều kiện $x \geq \sqrt{2} - 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(9x^2 + 24x + 17)\sqrt{3x + 3} - (x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 2x - 1} = x^3 - 5x - 4$$

Đặt $a = \sqrt{3x + 3}; b = \sqrt{x^2 + 2x - 1}; (a, b \geq 0)$. Phương trình đã cho trở thành

$$(a^4 + 2a^2 + 2)a - (b^4 + 2b^2 + 2)b + \frac{a(a - b)}{3} = 0 \quad (1)$$

Ta xét hàm số $f(x) = x(x^4 + 2x^2 + 2)$ thì $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 2 > 0, \forall x > 0$. Suy ra, $f(x)$ là hàm đồng biến, cho nên ta luôn có: $(f(a) - f(b))(a - b) \geq 0 \quad (2)$

Mặt khác, từ (1) ta có $f(a) - f(b) + \frac{a(a - b)}{3} = 0 \Rightarrow f(a) - f(b) = -\frac{a(a - b)}{3}$.

Vậy nên (2) sẽ trở thành $\frac{-a(a - b)^2}{3} \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a = b \\ a = 0 \end{cases}$.

Nhận thấy $a = 0 \Rightarrow x = -1$ không phải là nghiệm của phương trình, nên ta có

$$a = b \Leftrightarrow \sqrt{3x+3} = \sqrt{x^2+2x-1} \Rightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}.$$

Vậy $x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 5: Giải phương trình $\sqrt{x^2+1} = \frac{x+1}{1-x\sqrt{x^2-1}}$.

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 - x\sqrt{x^2-1} \neq 0 \end{cases}$. Ta có: $\sqrt{x^2+1} = \frac{x+1}{1-x\sqrt{x^2-1}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}(1-x\sqrt{x^2-1}) = x+1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - x\sqrt{x^4-1} = x+1 \quad (*)$$

Ta lại có: $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - 1 = x(\sqrt{x^4-1} + 1) \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1} = x(\sqrt{x^4-1} + 1) \Rightarrow x > 0$

Kết hợp điều kiện cho ta: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq x_0 = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$

Từ phương trình (*), xét hàm số: $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x\sqrt{x^4-1} - x - 1$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^4-1} - \frac{2x^4}{\sqrt{x^4-1}} - 1 = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})} - \sqrt{x^4-1} - \frac{2x^4}{\sqrt{x^4-1}} < 0, \quad \forall x > 1.$$

$$\Rightarrow f(x) \leq f(1) = \sqrt{2} - 2 < 0$$

Suy ra phương trình (*) vô nghiệm, hay phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 6: Giải phương trình $2\sqrt{1-2x} + \sqrt[10]{20x+1} = 3$.

Giải

Đặt $a = \sqrt{1-2x} \Rightarrow 2x = 1 - a^2 \ (a \geq 0)$; $b = \sqrt[10]{20x+1} \Rightarrow 20x = b^{10} - 1 \ (b \geq 0)$, ta có hệ phương

trình $\begin{cases} 2a+b=3 \\ b^{10}+10a^2-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow b^{10}+10\left(\frac{3-b}{2}\right)^2-11=0 \Rightarrow 2b^{10}+5b^2-30b+23=0 \quad (*)$

Do $a, b \geq 0$ nên từ: $2a+b=3 \Rightarrow 0 \leq b \leq 3$

+ Nếu: $b=0$ phương trình (*) vô nghiệm, suy ra PT đã cho vô nghiệm.

+ Nếu: $0 < b \leq 3$, từ (*) ta có: $2 + \frac{5}{b^8} - \frac{30}{b^9} + \frac{23}{b^{10}} = 0$

Xét hàm số: $f(b) = 2 + \frac{5}{b^8} - \frac{30}{b^9} + \frac{23}{b^{10}}$, $(0 < b \leq 3)$ ta có:

$$f'(b) = -\frac{40}{b^9} + \frac{270}{b^{10}} - \frac{230}{b^{11}} = -\frac{10}{b^{11}}(23 - 27b + 4b^2)$$

Lập bảng biến thiên ta thấy: $f(b) \geq f(1) = 0$.

Hay phương trình (*) có nghiệm duy nhất $b=1$.

Thử lại cho ta phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 7: Giải phương trình $\frac{x+1}{\sqrt{3x-2}} + \frac{\sqrt[3]{3x+2}}{4} = \sqrt{3x-2}$.

Giải

Điều kiện $x > \frac{2}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với: $\sqrt[3]{3x+2} \cdot \sqrt{3x-2} = 8x-12$ (*).

Với $x > \frac{2}{3}$ thì: $\sqrt[3]{3x+2} \cdot \sqrt{3x-2} > 0 \Rightarrow 8x-12 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$.

Đặt $\sqrt{3x-2} = a$ ($a > \sqrt{\frac{5}{2}}$). Phương trình đã cho trở thành:

$$a\sqrt[3]{a^2+4} = \frac{8(a^2+2)}{3} - 12 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{\frac{1}{a} + \frac{4}{a^3}} + \frac{20}{a^2} = 8$$

Hàm số: $f(a) = 3\sqrt[3]{\frac{1}{a} + \frac{4}{a^3}} + \frac{20}{a^2} - 8$, nghịch biến trên: $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}; +\infty\right)$ và $f(2) = 0$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Câu 8: Giải phương trình $\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = 32(x-1)^2\sqrt{2x-2}$

Giải

Điều kiện $x \geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với: $x + \sqrt{x^2-1} = 2(4x-4)^5$

Đặt: $4x-4 = a$ ($a \geq 0$). Phương trình đã cho trở thành:

$$2a^5 - \frac{a+4}{4} - \sqrt{\left(\frac{a+4}{4}\right)^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow 8a^5 = \sqrt{a^2+8a+a+4} \quad (*)$$

+ Rõ ràng $a = 0$ không là nghiệm của phương trình (*)

+ Với $a \neq 0$, phương trình (*) tương đương với: $8 = \frac{4}{a^5} + \frac{1}{a^4} + \sqrt{\frac{1}{a^8} + \frac{8}{a^9}}$

Hàm số: $f(a) = \frac{4}{a^5} + \frac{1}{a^4} + \sqrt{\frac{1}{a^8} + \frac{8}{a^9}} - 8$, nghịch biến trên $(0; +\infty)$ và $f(1) = 0$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu 9: Giải phương trình $\frac{x+1}{\sqrt{3x-2}} + \frac{\sqrt[3]{3x+2}}{4} = \sqrt{3x-2}$

Giải

Phương trình đã cho tương đương với: $\sqrt[3]{3x+2} \cdot \sqrt{3x-2} = 8x-12$

Điều kiện có nghiệm của phương trình là $x \geq \frac{3}{2}$

Đặt $\sqrt{3x-2} = a \left(a > \sqrt{\frac{5}{2}} \right)$. Phương trình trở thành:

$$a\sqrt[3]{a^2+4} = \frac{8(a^2+2)}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{\frac{1}{a} + \frac{4}{a^3}} + \frac{20}{a^2} = 8$$

Xét hàm số $f(a) = 3\sqrt[3]{\frac{1}{a} + \frac{4}{a^3}} + \frac{20}{a^2}$ là hàm số nghịch biến trên $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}; +\infty \right)$.

Từ đó chỉ ra $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình!

Câu 10: Giải phương trình $\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{x-3} = \sqrt[5]{x+5} + \sqrt[5]{x-5} \quad (-3 \leq x \leq 3)$

Giải

Phương trình tương đương: $\sqrt[3]{x+3} - \sqrt[5]{x+5} = \sqrt[3]{3-x} - \sqrt[5]{5-x} \Leftrightarrow f(x) = f(-x)$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}} - \frac{1}{5\sqrt[5]{(x+5)^4}}$$

$$\text{Do } -3 \leq x \leq 3 \Rightarrow 5\sqrt[5]{(x+5)^4} > 5\sqrt[3]{(x+5)^2} > 5\sqrt[3]{(x+3)^2} > 3\sqrt[3]{(x+3)^2}$$

Suy ra $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ tăng trên $(-3; 3)$

Vậy phương trình tương đương $x = -x \Leftrightarrow x = 0$

Câu 11: Giải phương trình $15x^2 + 10\sqrt{(x+1)^3} + 26 = 6\sqrt{(x+1)^5} + 30\sqrt{x+1}$

Giải

Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = t^2 - 1 \quad (t \geq 0)$. Phương trình tương đương:

$$f(t) = 6t^5 - 15t^4 - 10t^3 + 30t^2 + 30t - 41 = 0$$

Ta thấy $\begin{cases} f'(t) = 30(t^2 - t - 1)^2 > 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Câu 12: Giải phương trình $\sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{(1-x)^3} + 14 = \sqrt{(x+4)^3} + \sqrt{(4-x)^3}$

Giải

ĐKXĐ: $0 \leq x \leq 4$. Xét hàm số: $f(x) = \sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{(1-x)^3} - \sqrt{(x+4)^3} - \sqrt{(4-x)^3} - 14$

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x} + \sqrt{4-x} - \sqrt{x+4}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x \left(\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{x+4} + \sqrt{4-x}} \right) = 0 (*)$$

Bây giờ ta sẽ đi chứng minh phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x} = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x}$ vô nghiệm!

$$\text{Ta có } \sqrt{x+1} - \sqrt{x+4} + \sqrt{1-x} - \sqrt{4-x} = \frac{-3}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4}} - \frac{3}{\sqrt{1-x} + \sqrt{4-x}} < 0 \text{ vậy phương}$$

trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0$

Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình!

Câu 13: Giải phương trình $2x - 1 - \frac{1}{\sqrt{x^3 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{(2-x)(x^2 - x + 1)}} = 0$

Giải

Đặt: $f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{\sqrt{x^3 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{(2-x)(x^2 - x + 1)}}$ liên tục trên $(-1; 2)$

Có $f'(x) = 2 + \frac{3x^2 - 6x + 3}{2\sqrt{(2-x)(x^2 - x + 1)}} + \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}} > 0$

Vậy $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 14: Giải phương trình $\frac{39x}{2} - 21 + 5\sqrt{x^3 - 2x^2 + 16} + 5\sqrt{x + 2} = 0$

Giải

ĐKXĐ: $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + 16 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -2$

Đặt $f(x) = \frac{39x}{2} - 21 + 5\sqrt{x^3 - 2x^2 + 16} + 5\sqrt{x + 2}$ liên tục trên $[x_0; +\infty)$.

Có $f'(x) = \frac{39}{2} + \frac{5(3x^2 - 4x)}{2\sqrt{x^3 - 2x^2 + 16}} + \frac{5}{2\sqrt{x + 2}}$

- Nếu $x \in [-2; 0] \cup \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$ thì $5(3x^2 - 4x) \geq 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

- Nếu $x \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$ thì $2\sqrt{x^3 - 2x^2 + 16} \geq \frac{40\sqrt{3}}{9} > \frac{15}{2}$

$$\Rightarrow f'(x) > \frac{39}{2} + \frac{2(3x^2 - 4x)}{3} + \frac{5}{2\sqrt{x + 2}} = \frac{(24x^2 - 32x + 234)\sqrt{x + 2} + 30}{12\sqrt{x + 2}} > 0$$

Vậy $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[-2; +\infty)$. Suy ra $x = \frac{49 - 5\sqrt{105}}{8}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Sau đây mình xin giới thiệu tới cho bạn đọc một phương pháp xử dụng casio xử lý các bài toán có 1 hay nhiều nghiệm kết hợp với phương pháp hàm số mà mình cảm thấy khá chi là mạnh, chú ý rằng các bạn cần nắm chắc các kỹ thuật chứng minh vô nghiệm ở phần trước để có thể giải quyết các bài toán phần này một cách dễ dàng!

Câu 15: Giải phương trình $x^3 + x^2 + x + 3\sqrt[4]{x + 1} = 3$

Giải

Đầu tiên để định hướng hướng giải ta sẽ dùng máy tính kiểm tra tính đơn điệu của hàm số $f(x) = x^3 + x^2 + x - 3 + 3\sqrt[4]{x + 1}$ bằng MODE 7.

Nhập vào máy hàm số trên rồi cho:

- START = -3
- END = 20
- STEP = 1

Ta được bảng như hình bên. Nhìn vào bảng ta dễ thấy rằng phương trình đầu có 2 nghiệm $x = -2; x = 1$ và không phải hàm đơn điệu.

Đến đây chỉ có 2 cách là đạo hàm $f'(x)$ lên và xét dấu của $f'(x)$ sau đó chỉ ra 2 nghiệm trên 2 khoảng mà ta đã xét tính đơn điệu của nó. Cách thứ 2 là sử dụng định lý 2 để giải quyết nó.

Để dễ hình dung ta có thể vẽ đồ thị như sau:

Nhìn vào đồ thị ta thấy $f'(x)$ bị đổi dấu khi qua một điểm. Để giải quyết bài toán bằng cách 1 thì khá là khó vì:

$$f'(x) = 4(\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}) + (4x-1) \left[\frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{1}{(\sqrt[3]{3x+5})^2} \right] - 4$$

Rất khó để xét dấu của nó. Chỉ còn cách là chứng minh vô nghiệm trên 1 khoảng chứa điểm rơi, còn 2 khoảng còn lại ta dễ dàng xét dấu của nó. Ta sẽ thử làm 2 cách.

Giải

Cách 1: Hàm số.

Đặt $f(x) = (4x-1)(\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}) - 4x - 8$ liên tục trên $[-3; +\infty)$

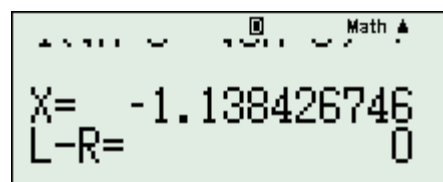
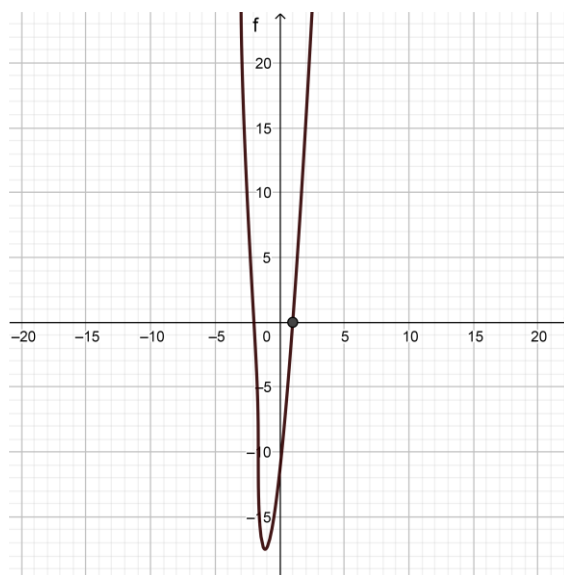
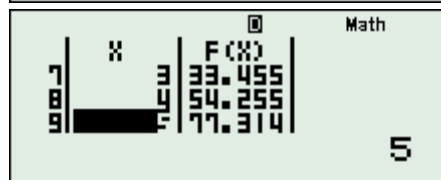
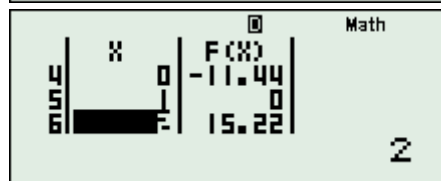
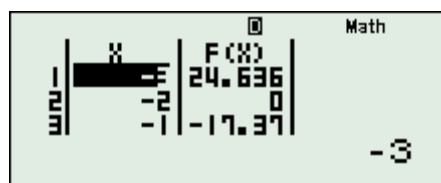
$$\text{Ta có: } f'(x) = 4(\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}) + (4x-1) \left[\frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{1}{(\sqrt[3]{3x+5})^2} \right] - 4$$

Đến đây để tìm khoảng chứa điểm rơi ta sẽ dùng CASIO để tìm nó.

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1,138426746$

Đến đây ta sẽ chứng minh phương trình đầu vô nghiệm trong khoảng $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$. Ta được:

Với $x \in \left[-\frac{3}{2}; -1\right]$ thì $(4x-1) < 0$, $(\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}) > 0 \Rightarrow VT < 0$.



Mặt khác $(8x+4) > 0 \forall x \in \left[-\frac{3}{2}; -1\right]$ nên phương trình vô nghiệm trên $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{1}{(\sqrt[3]{3x+5})^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{-1}{4(\sqrt{x+3})^3} - \frac{2}{(\sqrt[3]{3x+5})^5} < 0 \forall x \geq -1$$

Với $x \in \left[-1; \frac{1}{4}\right]$ thì $4x-1 < 0$, $g(x) \leq g(-1) < 1$. Khi đó ta có:

$$f'(x) > 4(\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}) + 4x - 5 > 4(\sqrt{1+3} + \sqrt[3]{3+5}) - 5 + 4 > 0$$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left[-1; \frac{1}{4}\right] \Rightarrow f(-1) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow -18 < f(x) \leq -9 < 0$. Vậy phương trình vô nghiệm trên $\left[-1; \frac{1}{4}\right]$.

Với $x \geq \frac{1}{4}$ thì $4x-1 \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 4(\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}) - 4 > 10 > 0$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right) \Rightarrow$ phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 1 nghiệm. Lại có

$f(1) = 0$ nên phương trình có 1 nghiệm là $x = 1$.

Với $x \in \left[-3; -\frac{3}{2}\right]$ thì $\begin{cases} 4x-1 < 0 \\ 2\sqrt{x+3} < 2,5 \\ (\sqrt[3]{3x+5})^2 < 2,5 \end{cases}$. Khi đó ta được:

$$\begin{aligned} f'(x) &< 4(\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}) + \frac{4(4x-1)}{5} - 4 \\ &\leq 4(\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}) - 9,6 \leq 4(\sqrt{-1,5+3} + \sqrt[3]{3 \cdot (-1,5)+5} - 9,6) < 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $\left[-3; -\frac{3}{2}\right]$, do đó phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 1 nghiệm thuộc $\left[-3; -\frac{3}{2}\right]$. Lại có $f(-2) = 0$ nên $x = -2$ là 1 nghiệm của phương trình đầu.

Kết luận: Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = -2$ và $x = 1$.

Cách 2: Hàm số.

Do $x = \frac{1}{4}$ không là nghiệm của phương trình nên xét $x \neq \frac{1}{4}$ thì phương trình tương đương:

$$(4x-1)(\sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5}) = 4x+8 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5} = \frac{4x+8}{4x-1}$$

Đặt $f(x) = \sqrt{x+3} + \sqrt[3]{3x+5} - \frac{4x+8}{4x-1}$ liên tục trên $\left[-3; \frac{1}{4}\right)$ và $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Có: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} + \frac{1}{(\sqrt[3]{3x+5})^2} + \frac{36}{(4x-1)^2} > 0$. Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\left[-3; \frac{1}{4}\right)$ và $\left(\frac{1}{4}; +\infty\right]$. Vậy phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 1 nghiệm trên mỗi khoảng trên.

Từ đó chỉ ra 2 nghiệm là $x = -2$ và $x = 1$ là xong bài!

Ta có thể thấy rằng cách 1 có vẻ là dài và phức tạp hơn so với cách 2 nhưng tuy nhiên sẽ có nhiều bài lại nhanh hơn, sau đây là một ví dụ.

Câu 17: Giải phương trình $9x^4 - 32x^2 + 5 + 18\sqrt{4-3x} = 0$

Thầy Lê Duy Tiến - THPT Bình Minh

Đề thi chọn học sinh giỏi THPT Bình Minh khóa 2015 – 2018

Giải

Vẫn như những bài trước ta sẽ dùng MODE 7 để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.

MODE 7 với hàm $f(x) = 9x^4 - 32x^2 + 5 + 18\sqrt{4-3x}$ trên $[-15; 2]$. Ta được:

Nhìn vào bảng thì ta thấy hàm có vẻ nghịch biến, nhưng nếu khảo sát kỹ hơn thì ta thấy rằng nó sẽ tăng trên khoảng $[-1; 3; -1, 1]$ do đó hàm này không hề đơn điệu một chiều trên $\left[-\infty; \frac{4}{3}\right)$.

Ta có thể vẽ đồ thị của nó như sau:

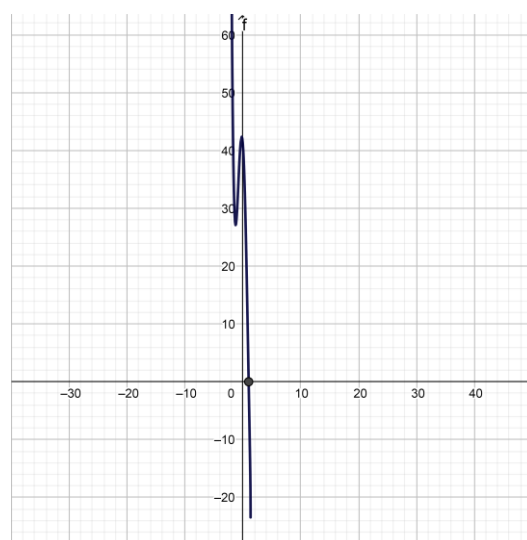
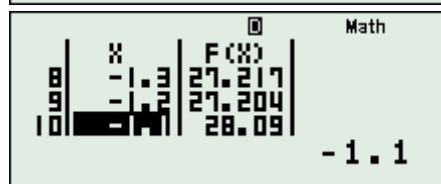
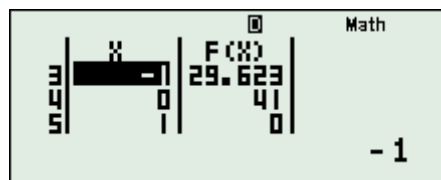
Hình ở bên là nhánh phía trên của đồ thị. Ta có thể thấy rằng nó không hề đơn điệu một chiều và có tới 2 điểm đổi chiều. Do đó để giải được bài này ta cần phải chứng minh nó vô nghiệm trên một khoảng nào đó. Dễ thấy là $(-\infty; 0]$.

Xét $x \in (-\infty; 0]$ ta có $\sqrt{4-3x} > 2$, do đó

$$\begin{aligned} f(x) &= 9x^4 - 32x^2 + 5 + 18\sqrt{4-3x} \\ &\geq 9x^4 - 32x^2 + 36 \\ &= 9\left(x^2 - \frac{16}{9}\right)^2 + \frac{68}{9} > 0 \end{aligned}$$

Vậy phương trình vô nghiệm trên $(-\infty; 0]$.

Xét $x \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$, ta có:



$f'(x) = 36x^3 - 64x - \frac{27}{\sqrt{4-3x}}$. Dễ thấy $36x^3 - 64x = x(36x^2 - 64) < 0 \forall x \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$ nên $f'(x) < 0$.

Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên $\left[0; \frac{4}{3}\right]$, do đó phương trình $f(x) = 0$ có tối đa 1 nghiệm trên $\left[0; \frac{4}{3}\right]$. Lại có $f(1) = 0$ nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ngoài ra nếu ai thích cũng có thể liên hợp để giải quyết bài toán này. Ta có:

$$\begin{aligned} 9x^4 - 32x^2 + 5 + 18\sqrt{4-3x} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1) \left[\frac{54}{\sqrt{4-3x}+1} - 9x^3 - 9x^2 + 23x + 23 \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ f(x) = \frac{54}{\sqrt{4-3x}+1} - 9x^3 - 9x^2 + 23x + 23 = 0 (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Do ta đã chứng minh phương trình vô nghiệm trên $(-\infty; 0]$ nên ta chỉ cần chứng minh $f(x) > 0 \forall x \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$. Điều này quá là dễ bởi vì $(x+1)(-9x^2 + 23) > 0 \forall x \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$ do đó phương trình $f(x) = 0$ sẽ vô nghiệm trên $\left[0; \frac{4}{3}\right]$. Bài toán đã được giải quyết!

Câu 18: Giải phương trình $\sqrt{x+1} - 2\sqrt{4-x} = \frac{5(x-3)}{2x^2+18}$

Giải

MODE 7 với hàm $f(x) = \sqrt{x+1} - 2\sqrt{4-x} - \frac{5(x-3)}{2x^2+18}$ ta được.

Nhìn vào bảng ta thấy hàm có vẻ đồng biến và có nghiệm là $x = 3$. Để kiểm chứng điều này ta sẽ vẽ đồ thị của hàm này.

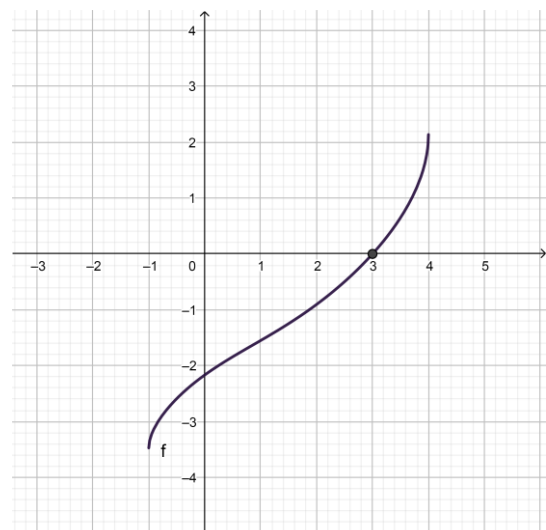
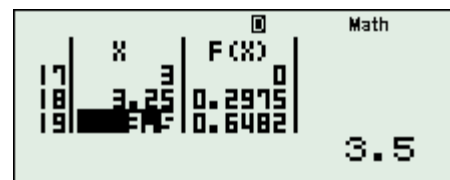
Nhìn vào đồ thị trăm phần trăm là hàm đồng biến nên ta sẽ đi chứng minh điều này.

Ta có: $f(x) = \sqrt{x+1} - 2\sqrt{4-x} - \frac{5(x-3)}{2x^2+18}$ liên tục trên $[-1; 4]$.

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{4-x}} + \frac{10x^2 - 60x - 90}{(2x^2 + 18)^2}$$

Bây giờ ta cần chứng minh $f'(x) > 0 \forall x \in [-1; 4]$.

Để chứng minh điều này ta cần dùng máy tính khảo sát tìm min, max của $f'(x)$ trên $[-1; 4]$.



Ta được $\frac{10x^2 - 60x - 90}{(2x^2 + 18)^2} < \frac{-1}{2}$ và

$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{4-x}} > \frac{1}{2}$. Ta sẽ đi chứng minh 2

điều này.

Ta có:

$$1. \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{5} = \frac{5 - 2\sqrt{x+1}}{10\sqrt{x+1}} = \frac{21 - 4x}{10\sqrt{x+1}(5 + 2\sqrt{x+1})} > 0$$

$$2. \frac{1}{\sqrt{4-x}} - \frac{3}{10} = \frac{10 - 3\sqrt{4-x}}{10\sqrt{4-x}} = \frac{9x + 64}{10(10 - 3\sqrt{4-x})\sqrt{4-x}} > 0$$

$$3. \frac{10x^2 - 60x - 90}{(2x^2 + 18)^2} + \frac{1}{2} = \frac{4x^4 + 92x^2 - 120x + 144}{2(2x^2 + 18)^2} = \frac{4x^4 + 92\left(x - \frac{15}{23}\right)^2 + \frac{2412}{23}}{2(2x^2 + 18)^2} > 0$$

Vậy $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[-1; 4]$. Do đó phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Ngoài ra ta cũng có thể giải bài này bằng phương pháp nhân liên hợp.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - 2\sqrt{4-x} &= \frac{5(x-3)}{2x^2+18} \\ \Leftrightarrow \frac{5(x-3)}{\sqrt{x+1} + 2\sqrt{4-x}} &= \frac{5(x-3)}{2x^2+18} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2x^2+18} \end{cases} (*) \end{aligned}$$

Đặt $f(x) = 2x^2 + 18 - \sqrt{x+1} - 2\sqrt{4-x}$

Với $x \in [-1; 4]$ thì $\begin{cases} \sqrt{x+1} < 3 \\ 2\sqrt{4-x} < 5 \end{cases} \Rightarrow f(x) > 2x^2 + 10 > 0$.

$\Rightarrow$ phương trình (*) vô nghiệm!

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Câu 19: Giải phương trình $\frac{x^2}{3} + \left(\frac{2}{3} - x^2\right)^2 + \sqrt{2-3x} - \frac{109}{81} = 0$

Đề thi thử THPT Quốc Gia - Phú Yên - 2015

Giải

MODE 7 với hàm: $F(X) = \frac{X^2}{3} + \left(\frac{2}{3} - X^2\right)^2 + \sqrt{2-3X} - \frac{109}{81}$ trên $[-15; 1]$ ta được:

Nhìn vào bảng thì ta sẽ thấy hàm có vẻ nghịch biến, khảo sát kỹ hơn ở khoảng $\left[0; \frac{2}{3}\right]$ ta sẽ thấy phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left[0; \frac{2}{3}\right]$. Giải phương trình ta sẽ được nghiệm $x = \frac{1}{3}$, do đó ta sẽ dùng phương pháp hàm số để giải nó. Ta có thể vẽ đồ thị của hàm như hình bên. Nhìn vào đồ thị ta thấy rằng hàm số $f(x)$ chắc chắn nghịch biến, nên ta sẽ đi chứng minh điều này.

Ta có: $f'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{2-3x}} + 4x^3 - 2x$.

Nếu $x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ thì $4x^3 - 2x < 0$, khi đó $f'(x) < 0$.

Nếu $x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right]$ thì $2\sqrt{2-3x} < 5$, suy ra:

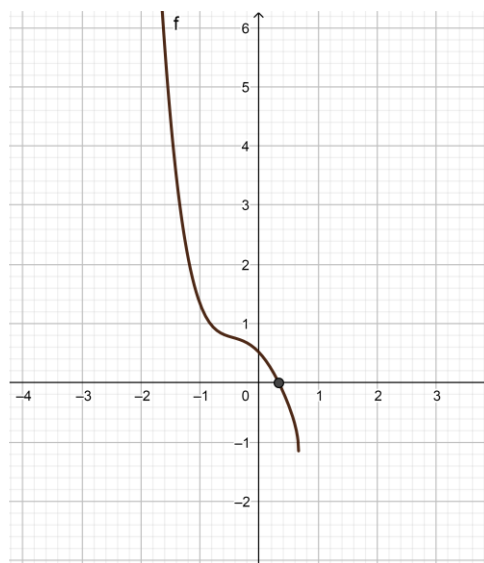
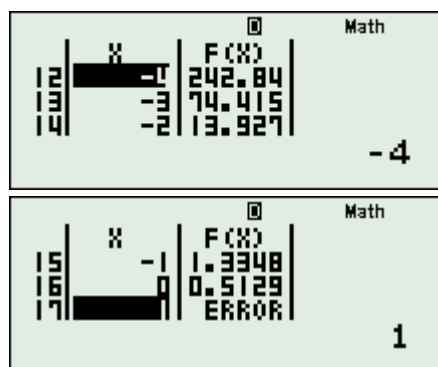
$$f'(x) < 4x^3 - 2x - \frac{3}{5} = g(x).$$

Có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Mặt khác ta lại có $g\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3}{5}$

$g(0) = -\frac{3}{5}$ và $g\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{-27+10\sqrt{5}}{45} < 0$, nên $f'(x) < g(x) < 0 \forall x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right]$.

Vậy $f(x)$ nghịch biến trên $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$, do đó $x = \frac{1}{3}$ là nghiệm duy nhất của phương trình.



Câu 20: Giải phương trình $2x^4 - 4x + 1 - (x^3 - x - 1)\sqrt{3x^3 + 1} = 0$

Đề thi thử THPT Quốc Gia – Phú Yên – 2015

Giải

Bài này là một bài khá là khó, nhưng trước hết ta cứ phải khảo sát hàm số và vẽ đồ thị trước đã.

MODE 7 với hàm $F(X) = 2X^4 - 4X + 1 - (X^3 - X - 1)\sqrt{3X^3 + 1}$ trên $[-1; 5]$ ta được.

Nhìn vào bảng thấy rằng hàm có vẻ nghịch biến, nhưng khảo sát kỹ hơn trên $\left[-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}; 1\right]$ ta sẽ thấy

hàm lúc tăng lúc giảm, do đó như những bài trên mình sẽ lại phải chứng minh vô nghiệm trên một khoảng nào đó rồi! Dễ dàng dò bằng CASIO thì ta thấy hàm sẽ nghịch biến trên khoảng $\left[\frac{9}{5}; +\infty\right)$, do

đó ta sẽ chứng minh phương trình vô nghiệm trên $\left[-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}; \frac{9}{5}\right]$.

Trước hết ta vẽ được đồ thị như bên.

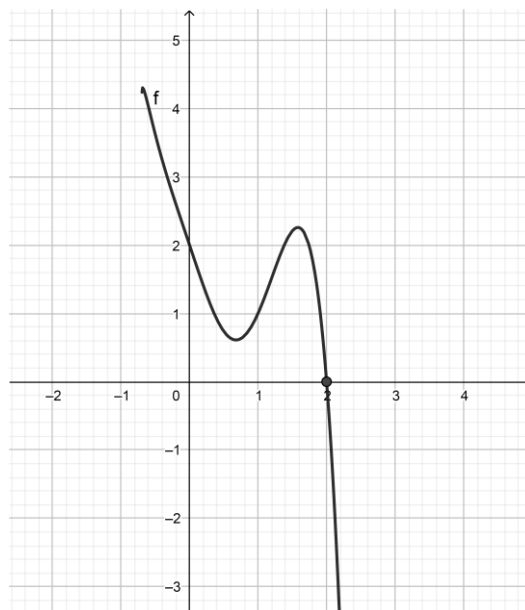
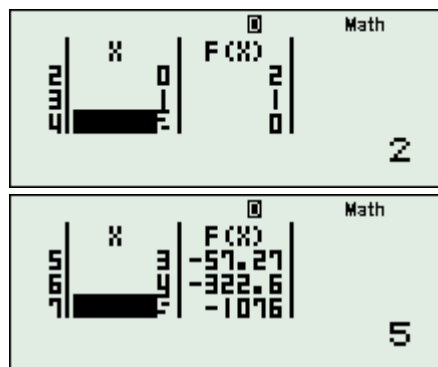
Nhìn vào đồ thị ta có thể chắc chắn rằng khi $x \in \left[\frac{9}{5}; +\infty\right)$ thì hàm nghịch biến và cắt trục hoành tại duy nhất một điểm tại $x=2$. Sau khi định hướng được hướng giải rồi ta sẽ đi giải quyết nó thôi! Nhưng ta lại gặp phải một vấn đề là biểu thức phía trước căn thức là một đa thức bậc 3 khá là khó xét dấu của nó để có thể khử căn nên ta sẽ chia làm 2 trường hợp.

Trường hợp 1: Nếu $\begin{cases} x^3 - x - 1 > 0 \\ x \in \left[-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}; \frac{9}{5}\right] \end{cases}$.

Khi đó $\sqrt{3x^3+1} \leq \frac{34\sqrt{10}}{25} < \frac{9}{2}$. Suy ra được:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 4x + 1 - (x^3 - x - 1)\sqrt{3x^3+1} \\ &> 2x^4 - 4x + 1 - \frac{9}{2}(x^3 - x - 1) = \frac{4x^4 - 9x^3 + x + 11}{2} \\ &= \frac{4\left(x^2 - \frac{9}{8}x - \frac{9}{10}\right)^2 + \frac{171}{80}x^2 - \frac{71}{10}x + \frac{194}{25}}{2} > 0 \end{aligned}$$

Vậy phương trình vô nghiệm khi $\begin{cases} x^3 - x - 1 > 0 \\ x \leq \frac{9}{5} \end{cases}$.



Trường hợp 2: Nếu $\begin{cases} x^3 - x - 1 < 0 \\ x \in \left[-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}; \frac{9}{5}\right] \end{cases}$. Đến đây nếu ta cho $\sqrt{3x^3 + 1} \geq 0$ thì không hẳn $f(x) > 0$

Do đó ta cần đánh giá $\sqrt{3x^3 + 1} \geq ax + b$. Đến đây sử dụng tiếp tuyến và điểm rơi của $f(x)$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 8x^3 - 4 - \frac{27x^5 - 15x^3 - 3x^2 - 2}{2\sqrt{3x^3 + 1}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,678262158 \rightarrow A \\ x = 1,581810582 \rightarrow B \end{cases}$$

Ta thấy $f(A) = 0,6112465178; f(B) = 2,256666123$ do đó $x = A$ là điểm rơi của $f(x)$.

Khi đó $a = \frac{d}{dx}(\sqrt{3x^3 + 1}) \Big|_{x=A} \approx \frac{3}{2}$. Ta sẽ dùng MODE 7 để tìm b .

MODE 7 với hàm $f(X) = \sqrt{3X^3 + 1} - \frac{3}{2}X$ ta sẽ tìm được min xấp xỉ $0,36 = \frac{9}{25}$. Vậy đánh giá

$$\text{cần tìm là } \sqrt{3x^3 + 1} > \frac{3}{2}x + \frac{9}{25} \quad (1)$$

- Nếu $x \in \left[-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}; -\frac{6}{25}\right]$ thì (1) luôn đúng.

- Nếu $x \in \left[-\frac{6}{25}; \frac{9}{5}\right]$ thì (1) $\Leftrightarrow 3x^3 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{27}{25}x + \frac{544}{625} > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0$

$$- g'(x) = 9x^2 - \frac{9}{2}x - \frac{27}{25} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{20}$$

$$- g\left(-\frac{6}{25}\right) \approx 0,95 > 0; g\left(\frac{9}{5}\right) = \frac{22831}{2500} > 0; g\left(\frac{5 + \sqrt{73}}{20}\right) \approx 0,0388 > 0; g\left(\frac{5 - \sqrt{73}}{20}\right) \approx 0,97 > 0$$

Vậy (1) luôn đúng.

$$\text{Khi đó } f(x) > 2x^4 - 4x + 1 - (x^3 - x - 1)\left(\frac{3}{2}x + \frac{9}{25}\right)$$

$$= \frac{25x^4 - 18x^3 + 75x^2 - 107x + 68}{25} = \frac{25x^2\left(x - \frac{9}{25}\right)^2 + \frac{19}{25}x^2 + 71\left(x - \frac{107}{142}\right)^2 + \frac{7863}{284}}{25} > 0$$

Vậy phương trình vô nghiệm trên $\left[-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}; \frac{9}{5}\right]$.

Trường hợp 3: Nếu $x \geq \frac{9}{5}$.

Ta có:

$$f'(x) = 8x^3 - 4 - \frac{27x^5 - 15x^3 - 3x^2 - 2}{2\sqrt{3x^3 + 1}} = \frac{2(8x^3 - 4)\sqrt{3x^3 + 1} - (27x^5 - 15x^3 - 3x^2 - 2)}{2\sqrt{3x^3 + 1}}$$

$$\text{Để ý thấy: } 8x^3 - 4 > 0 \forall x \geq \frac{9}{5}$$

$$27x^5 - 15x^3 - 3x^2 - 2 = 27(x-1)^5 + 135(x-1)^4 + 255(x-1)^3 + 222(x-1)^2 + 84(x-1) + 7 > 0$$

Khi đó ta chỉ cần đi chứng minh $\sqrt{3x^3+1}$ nhỏ hơn một biểu thức nào đó.

Nếu đánh giá $\sqrt{3x^3+1} < ax+b$ thì không khả thi do $\deg(\sqrt{3x^3+1}) = \frac{3}{2}$ - $\deg$ là bậc của

đa thức - lớn hơn 1. Ta cần phải đánh giá $\sqrt{3x^3+1} < x^2 + ax + b$ (ở đây ta chọn luôn hệ số của x^2 là 1 cho dễ đánh giá), nhưng ta lại phải đi tìm điểm rơi của $f'(x)$. Nhưng hãy để ý khi ta dò MODE 7 thì dường như $f'(x)$ nghịch biến. Để kiểm chứng ta sẽ khảo sát thật kỹ và vẽ đồ thị hàm này.

Nhìn vào đồ thị có thể thấy rằng khi

$x \geq \frac{9}{5} = 1,8$ thì hàm $f'(x)$ nghịch biến. Vậy

điểm rơi sẽ là $x = \frac{9}{5}$.

Khi đó ta sẽ tìm được:

$$\begin{cases} b = -\frac{\frac{d}{dx}(\sqrt{3x^3+1})\Big|_{x=\frac{9}{5}}}{\frac{d}{dx}(x^2)\Big|_{x=\frac{9}{5}}} \approx -\frac{1}{5} \\ c = \sqrt{3x^3+1} - x^2 + \frac{1}{5}x \Big|_{x=\frac{9}{5}} \approx \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy có đánh giá $\sqrt{3x^3+1} < x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{3}{2} (*)$

Bây giờ sẽ đi chứng minh (*) luôn đúng.

Ta có:

$$\sqrt{3x^3+1} < x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^4 - \frac{17}{5}x^3 + \frac{76}{25}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{5}{4} > 0 \Leftrightarrow x^2 \left(x - \frac{17}{10} \right)^2 + \frac{3}{20}(x-2)^2 + \frac{13}{20} > 0$$

Vậy (*) luôn đúng.

Khi đó $f'(x) < (-55x^5 - 16x^4 + 195x^3) + (-25x^2 + 8x - 50) < 0$.

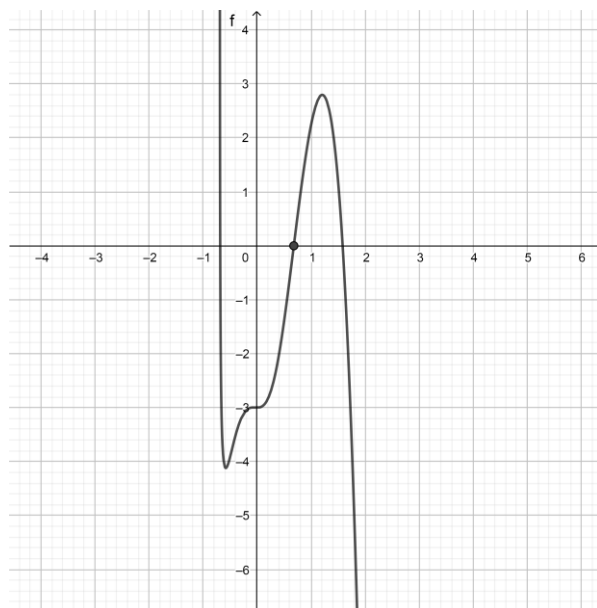
Suy ra $f(x)$ nghịch biến trên $\left[\frac{9}{5}; +\infty \right)$. Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 21: Giải phương trình $x^2 + 8x - 16 - (x-3)\sqrt{3x+1} + (2-x)\sqrt{7x+2} = 0$

Nguyễn Minh Tuấn

Giải

Dùng MODE 7 khảo sát hàm $f(x) = x^2 + 8x - 16 - (x-3)\sqrt{3x+1} + (2-x)\sqrt{7x+2}$.



Nhập vào máy hàm số trên rồi cho:

- START = -1
- END = 20
- STEP = 1

Ta được bảng như bên. Nhìn vào bảng thì ta thấy hàm có vẻ đồng biến và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 0. Để chắc chắn thì ta sẽ đi vẽ đồ thị, ta được như bên. Nhìn vào đồ thị ta chắc chắn rằng hàm đồng biến nên ta sẽ đi chứng minh điều này.

Ta có:

$$f'(x) = 2x + 8 - \frac{9x-7}{2\sqrt{3x+1}} - \frac{21x-10}{2\sqrt{7x+2}}$$

Để chứng minh $f'(x) > 0 \forall x \geq -\frac{2}{7}$ cũng không phải

là điều khó khăn gì. Trước hết ta cần phải chia trường hợp thì mới làm được.

Trường hợp 1: $x \in \left[-\frac{2}{7}; \frac{10}{21}\right]$.

Khi đó thì $\begin{cases} 21x-10 \leq 0 \\ 9x-7 < 0 \\ 2x+8 > 0 \end{cases}$. Cho nên $f'(x) > 0$.

Trường hợp 2: $x \in \left[\frac{10}{21}; \frac{7}{9}\right]$. Khi đó $\begin{cases} 21x-10 > 0 \\ 9x-7 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) > 2x + 8 - \frac{21x-10}{2\sqrt{7x+2}} - \frac{9x-7}{2\sqrt{3x+1}}$

Mặt khác ta lại có:

$$2x + 8 - \frac{21x-10}{2\sqrt{7x+2}} = \frac{2(2x+8)\sqrt{7x+2} - 21x + 10}{2\sqrt{7x+2}} > \frac{40 - 21x + 10}{2\sqrt{7x+2}} > 0 \forall x \in \left[\frac{10}{21}; \frac{7}{9}\right]$$

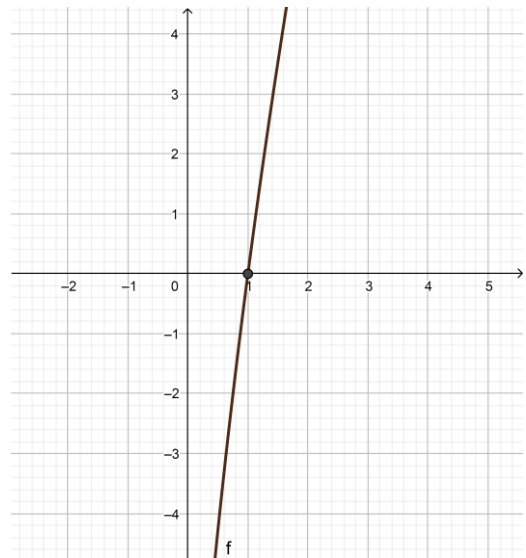
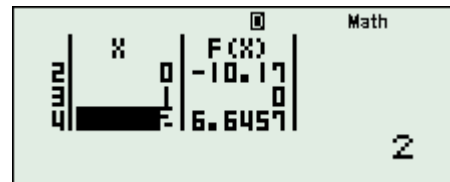
$$\Rightarrow f(x) > 0 \forall x \in \left[\frac{10}{21}; \frac{7}{9}\right]$$

Trường hợp 3: $x \geq \frac{7}{9}$. Khi đó ta có:

$$1. \ x + 4 - \frac{9x-7}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{2(x+4)\sqrt{3x+1} - 9x + 7}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{\frac{12x^3 + 19x^2 + 224x + 64}{2(x+4)\sqrt{3x+1} + 9x}}{2\sqrt{3x+1}} > 0$$

$$2. \ x + 4 - \frac{21x-10}{2\sqrt{7x+2}} = \frac{2(x+4)\sqrt{7x+2} - 21x + 10}{2\sqrt{7x+2}} = \frac{\frac{28x^3 - 209x^2 + 512x + 128}{2(x+4)\sqrt{7x+2} + 21x}}{2\sqrt{7x+2}} > 0$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0 \forall x \geq \frac{7}{9}$$



Vậy $f(x)$ đồng biến trên $\left[-\frac{2}{7}; +\infty\right)$ nên $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 22: Giải phương trình $\left(2 - \frac{3}{x}\right)(2\sqrt{x-1} - 1) = \frac{9x^2 - 8x + 4}{3x + 2\sqrt{2x-1}}$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2016 – THPT Trần Hưng Đạo – Đắk Nông

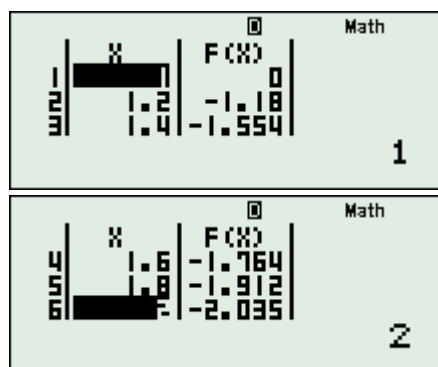
Giải

Vẫn như mọi khi ta vẫn đi khảo sát và vẽ đồ thị hàm số thôi!

MODE 7 với hàm $f(x) = \left(2 - \frac{3}{x}\right)(2\sqrt{x-1} - 1) - \frac{9x^2 - 8x + 4}{3x + 2\sqrt{2x-1}}$.

Nhập vào máy hàm số trên rồi cho:

- START = 1
- END = 5
- STEP = 0,2



Nhìn vào bảng ta thấy luôn phương trình đầu có nghiệm là $x=1$ và hàm có dấu hiệu nghịch biến. Để biết chính xác ta sẽ đi vẽ đồ thị. Ta thấy rằng đồ thị có dấu hiệu đi xuống, vậy hàm là nghịch biến. Do đó nếu ta chứng minh được hàm nghịch biến là OK.

Ta có:

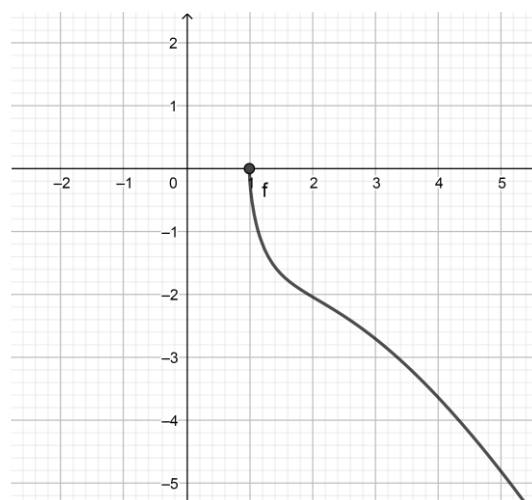
$$f'(x) = \frac{2x^2 + 3x - 6 - 3\sqrt{x-1}}{x^2\sqrt{x-1}} - \frac{(27x^2 - 12)\sqrt{2x-1} + 54x^2 - 52x + 8}{(3x + 2\sqrt{2x-1})^2\sqrt{2x-1}}$$

Nhìn đã thấy choáng rồi! Việc chứng minh không phải đơn giản chút nào! Nhưng hãy để ý rằng:

$$\begin{aligned} & 9x^2 - 8x + 4 \\ &= (3x + 2\sqrt{2x-1})(3x - 2\sqrt{2x-1}) \end{aligned}$$

Khi đó phương trình sẽ đơn giản hơn rất nhiều. Ta sẽ không phải đi chứng minh con “ép phẩy” kia! Ta có:

$$\begin{aligned} & \left(2 - \frac{3}{x}\right)(2\sqrt{x-1} - 1) = \frac{9x^2 - 8x + 4}{3x + 2\sqrt{2x-1}} \\ \Leftrightarrow & \left(2 - \frac{3}{x}\right)(2\sqrt{x-1} - 1) = \frac{(3x - 2\sqrt{2x-1})(3x + 2\sqrt{2x-1})}{3x + 2\sqrt{2x-1}} \\ \Leftrightarrow & \left(2 - \frac{3}{x}\right)(2\sqrt{x-1} - 1) = 3x - 2\sqrt{2x-1} \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow (2x-3)(2\sqrt{x-1}-1) = 3x^2 - 2x\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow 2(2x-3)\sqrt{x-1} + 2x\sqrt{2x-1} - 3x^2 - 2x + 3 = 0$$

Bây giờ đặt $f(x) = 2(2x-3)\sqrt{x-1} + 2x\sqrt{2x-1} - 3x^2 - 2x - 3$.

Ta có:

$$1. f'(x) = \frac{6x-7}{\sqrt{x-1}} + \frac{6x-2}{\sqrt{2x-1}} - 6x - 2$$

$$2. \frac{6x-7}{\sqrt{x-1}} - 3x - 1 = \frac{(6\sqrt{x-1} - 3x - 1)\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x-1}} = \frac{(-9x^2 + 30x - 37)\sqrt{x-1}}{6\sqrt{x-1} + 3x + 1} - 1 < 0$$

$$3. \frac{6x-2}{\sqrt{2x-1}} - 3x - 1 = \frac{6x-2 - (3x+1)\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}} = \frac{-18x^3 + 33x^2 - 15x - 5x + 5}{(6x-2 + (3x+1)\sqrt{2x-1})\sqrt{2x-1}} < 0$$

Suy ra $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $[1; +\infty)$. Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đầu.

Câu 23: Giải phương trình $3\sqrt{x+4} + 3\sqrt{5x+4} + 4x^2 - 18x - 12 = 0$

Giải

MODE 7 với hàm $f(x) = 3\sqrt{x+4} + 3\sqrt{5x+4} + 4x^2 - 18x - 12$

Nhập vào máy hàm số trên rồi cho:

- START = -0,8
- END = 5
- STEP = 0,2

Ta được bảng như bên. Nhìn vào bảng thì ta thấy rõ ràng phương trình không chỉ có 1 nghiệm duy nhất $x = 0$ mà còn có 1 nghiệm nữa thuộc khoảng $[3,6;4]$. Tất nhiên là ta phải chia 3 trường hợp rồi. Trước tiên để xác định các trường hợp thì ta có thể dùng MODE 7 thì có lẽ hàm này đồng biến khi $x \geq 3$ và nghịch biến khi $x < 1$.

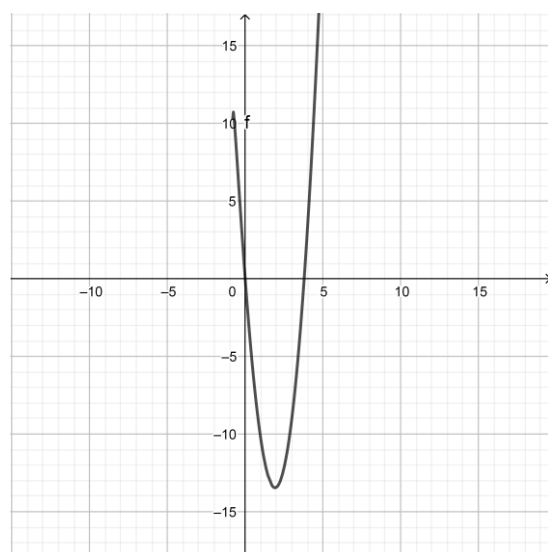
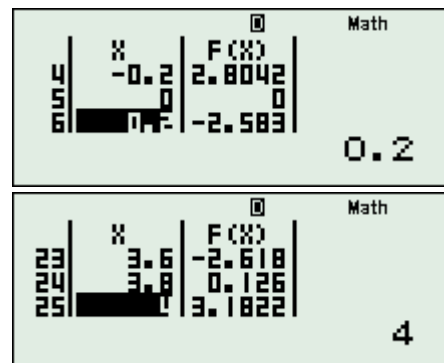
Và phương trình đầu vô nghiệm trên $[1;3]$.

Vậy là ta đã có định hướng để giải bài này. Nếu:

$$x \in [1;3]. \text{ Khi đó } \begin{cases} 3\sqrt{x+4} < 8 \\ 3\sqrt{5x+4} < 14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) < 4x^2 - 18x + 10 < 0 \forall x \in [1;3]$$

Vậy phương trình vô nghiệm trên $[1;3]$.



Ta có: $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x+4}} + \frac{15}{2\sqrt{5x+4}} + 8x - 18$

Nếu $x \geq 3$ thì hiển nhiên $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[3; +\infty)$.

Nếu $x \in \left[-\frac{4}{5}; 1\right]$ thì ta nhận thấy rằng chưa chắc hàm đã nghịch biến do

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{4}{5}^+} \frac{15}{2\sqrt{5x+4}} = +\infty$$

Lúc này không thể nào có chuyện $f'(x) < 0$ được. Để thấy được hàm đổi chiều thì hãy khảo sát hàm này trên $[-0,8; -0,7]$ với $STEP = \frac{0,1}{29}$ ta sẽ thấy nó đổi dấu ngay. Vậy để khắc

phục ta lại chia nhỏ khoảng $\left[-\frac{4}{5}; 1\right]$ hơn nữa. Khi đó ta sẽ xét 2 trường hợp sau:

Nếu $x \in \left[-\frac{4}{5}; -\frac{1}{2}\right]$ thì $\begin{cases} 3\sqrt{x+4} > 5 \\ 3\sqrt{5x+4} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) > 4x^2 - 18x - 7 > 0 \forall x \in \left[-\frac{4}{5}; -\frac{1}{2}\right]$

Nếu $x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ khi đó $\begin{cases} 2\sqrt{x+4} > 3,5 \\ 2\sqrt{5x+4} > 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) < 8x - \frac{135}{14} < 0$. Vậy hàm nghịch biến trên $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Vậy phương trình sẽ có 1 nghiệm trên $[3; +\infty)$ và 1 nghiệm trên $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$. Lúc này chỉ ra 2

nghiệm là $x = 0$ và $x = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ là xong!

Ngoài cách làm ở trên ta cũng có thể làm theo cách liên hợp lùi 1 nghiệm ra còn một nghiệm dùng hàm số để giải quyết. Ta cùng làm thử cả 2 hướng xem sao.

- **HƯỚNG 1:** Lùi nghiệm $x = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ ra trước.

Ta có:

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{x+4} + 3\sqrt{5x+4} + 4x^2 - 18x - 12 = 0 \\ \Leftrightarrow & 3(\sqrt{x+4} - x + 1) + 3(\sqrt{5x+4} - x - 1) + 4(x^2 - 3x - 3) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{-3(x^2 - 3x - 3)}{\sqrt{x+4} + x - 1} + \frac{-3(x^2 - 3x - 3)}{\sqrt{5x+4} + x + 1} + 4(x^2 - 3x - 3) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 - 3x - 3 = 0 \\ f(x) = \frac{-3}{\sqrt{x+4} + x - 1} - \frac{3}{\sqrt{5x+4} + x + 1} + 4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Có $f'(x) = \frac{6\sqrt{x+4} + 3}{2\sqrt{x+4}(\sqrt{x+4} + x - 1)^2} + \frac{6\sqrt{5x+4} + 15}{2\sqrt{5x+4}(\sqrt{5x+4} + x + 1)^2} > 0$.

Nên $f(x)$ đồng biến trên $\left[-\frac{5}{4}; +\infty\right)$. Lại có $f(0) = 0$ nên $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = 0$.

• **HƯỚNG 2:** Lôi nghiệm $x = 0$ ra trước.

Ta có:

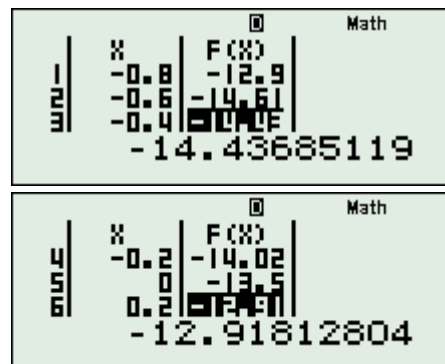
$$\begin{aligned} 3\sqrt{x+4} + 3\sqrt{5x+4} + 4x^2 - 18x - 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3(\sqrt{x+4} - 2) + 3(\sqrt{5x+4} - 2) + 4x^2 - 18x &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = \frac{3}{\sqrt{x+4} + 2} + \frac{15}{\sqrt{5x+4} + 2} + 4x - 18 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Bây giờ ta sẽ dùng cả MODE 7 và vẽ đồ thị để kiểm tra xem $f(x)$ có đơn điệu không.

MODE 7 với hàm $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x+4} + 2} + \frac{15}{\sqrt{5x+4} + 2} + 4x - 18$

Nhập vào máy hàm số trên rồi cho:

- START = -0,8
- END = 5
- STEP = 0,2



Ta có bảng như bên. Nhìn vào thấy rằng hàm không đơn điệu trên $\left[-\frac{4}{5}; +\infty\right)$ mà bị đổi chiều trong khoảng $[-0,8;0]$ nên ta sẽ phải chứng minh vô nghiệm trên khoảng này. Để hình dung rõ hơn ta có đồ thị như bên.

Nhìn vào đồ thị ta thấy rằng đúng là hàm bị đổi chiều một ít và còn lại là đồng biến nên ta sẽ đi chứng minh vô nghiệm trước.

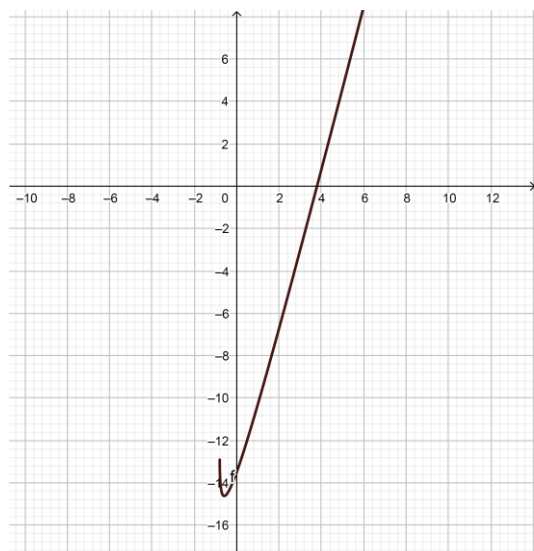
Nếu $x \in [-0,8;0]$ thì: $\begin{cases} \sqrt{x+4} > 1,5 \\ \sqrt{5x+4} \geq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow f(x) < 4x - \frac{135}{14} < 0 \forall x \in [-0,8;0]$$

Nếu $x \geq 0$ ta có:

$$f'(x) = \frac{-3}{2(\sqrt{x+4} + 2)^2 \sqrt{x+4}} - \frac{75}{2(\sqrt{5x+4} + 2)^2 \sqrt{5x+4}} + 4$$

Để thấy với $x \geq 0$ thì: $\begin{cases} 2(\sqrt{x+4} + 2)^2 \sqrt{x+4} \geq 64 \\ 2(\sqrt{5x+4} + 2)^2 \sqrt{5x+4} \geq 64 \end{cases}$



Khi đó $f'(x) \geq \frac{89}{32} > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Vậy đến đây bài toán đã được giải quyết!

Câu 24: Giải phương trình $x^4 - 6x^2 + 2x - 9 + (x^3 + 2x + 1)\sqrt{x^2 - x - 1} = 0$

Giải

MODE 7 với hàm số $f(x) = x^4 - 6x^2 + 2x - 9 + (x^3 + 2x + 1)\sqrt{x^2 - x - 1}$

Nhập vào máy hàm số trên rồi cho:

- START = -10
- END = 10
- STEP = 1

Ta được bảng như bên. Nếu ở trên máy tính các bạn thì có thể thấy rằng hàm này có vẻ

đồng biến trên $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$ và

$\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$. Có thể thấy rõ điều này khi ta

vẽ đồ thị. Nhìn vào đồ thị ta thấy rằng hàm có nghiệm duy nhất là $x=2$ liên tục và đồng biến trên

$\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$ và $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

Bây giờ ta sẽ đi giải quyết nó!

Có:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 2 + \frac{8x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 4x - 5}{2\sqrt{x^2 - x - 1}}$$

Trường hợp 1: $x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$

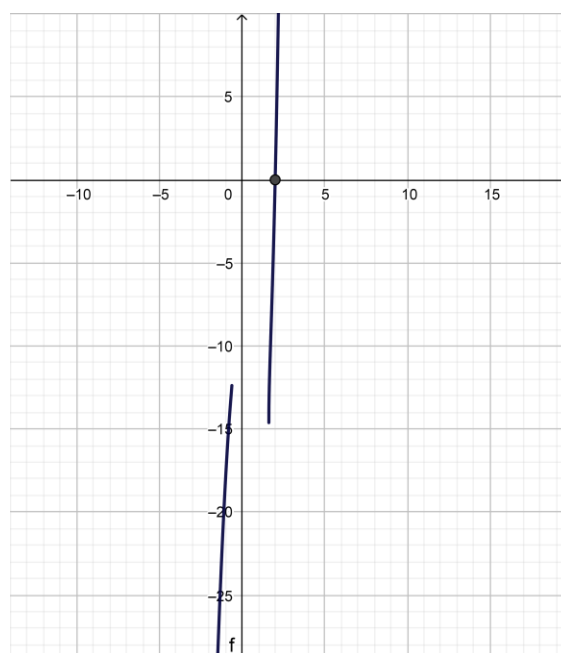
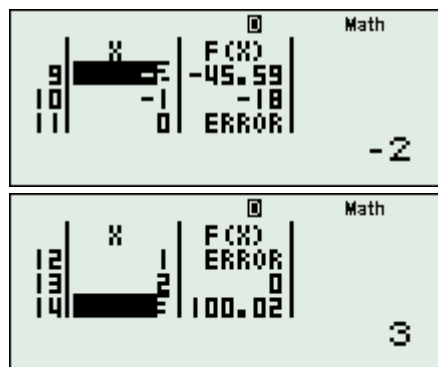
Ta cần chứng minh $f'(x) > 0$.

$$\text{Để ý thấy: } \underbrace{(8x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 4x - 5)}_{g(x)}' = 32x^3 - 21x^2 + 4x - 4 < 0$$

$$\Rightarrow 8x^4 - 7x^3 + 2x^2 - 4x - 5 > 1 > 0$$

Vậy ta cần có một đánh giá kiểu như $\sqrt{x^2 - x - 1} < ax + b$

- Nếu ta chọn $a = 1$ thì khi đó $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - x - 1} - x = +\infty$ ta không thể xác định được b
- Nếu ta chọn $a = -1$ thì ta dễ dàng dò bằng MODE 7 để tìm được $b = \frac{1}{2}$.



Vậy ta cần đánh giá: $\sqrt{x^2 - x - 1} < -x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{4} > 0$ luôn đúng với $x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$.

Khi đó $f'(x) > \frac{8x^4 - 10x^3 + 28x^2 - 24x - 8}{1 - 2x} > 0$

$$\text{Vì } \begin{cases} 28x^2 - 24x - 8 > 0 \forall x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \\ 1 - 2x > 0 \forall x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \\ 8x^4 - 10x^3 \forall x \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \end{cases}.$$

Vậy $f(x)$ đồng biến trên $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \Rightarrow f(x) \leq f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) < 0$.

Trường hợp 2: $x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Để ý thấy:

$$g'(x) = 32x^3 - 21x^2 + 4x - 4 = 32(x-1)^3 + 75(x-1)^2 + 58(x-1) + 11 > 0 \Rightarrow g(x) > 0.$$

Vẫn như trường hợp 1 ta vẫn cần đánh giá $\sqrt{x^2 - x - 1} < ax + b$.

Lần này chọn luôn $a = 1$, dùng MODE 7 ta tìm được $b = -\frac{1}{2}$

Vậy ta đi chứng minh $\sqrt{x^2 - x - 1} < x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{4} > 0$ luôn đúng.

$$\Rightarrow f'(x) > \frac{16x^4 - 11x^3 - 22x^2 + 12x - 7}{2x - 1} = \frac{h(x)}{2x - 1}$$

Để ý rằng:

$$h'(x) = 64x^3 - 33x^2 - 44x + 12 = 64\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 + 255\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 289\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{351}{4} > 0$$

$$\Rightarrow h(x) \geq h\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) > 17 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$$

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 25: Giải phương trình $x^5 + 7x^4 + 12x^3 + x^2 - 3x - 6 - 12\sqrt{6-5x} = 0$

Giải

Do $\sqrt{6-5x} > 5$ nên điều kiện có nghiệm của phương trình sẽ là:

$$x^5 + 7x^4 + 12x^3 + x^2 - 3x - 6 > 0$$

$$\Rightarrow x^5 + 7x^4 + 12x^3 + x^2 - 3x > 6 > -210$$

$$\Rightarrow (x+5)(x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 9x + 42) > 0$$

$$\Rightarrow x \geq -5 \left(\text{do } x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 9x + 42 = (x+1)^2 + (x-4,5)^2 + 21,75 > 0 \right)$$

Trường hợp 1: Nếu $x \in [-5; -4]$.

Khi đó đặt $VT = f(x)$ thì ta được:

$$f(x) < x^5 + 7x^4 + 12x^3 + x^2 - 3x - 66 = x^3(x+4)(x+3) + x^2 - 3x - 66 < 0$$

Trường hợp 2: Nếu $x \in [-4; -2]$ thì $\sqrt{6-5x} \geq 4$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &\leq x^5 + 7x^4 + 12x^3 + x^2 - 3x - 54 \\ &= x^5 + 7x^4 + 12x^3 - 20 + x^2 - 3x - 34 \\ &= (x-1)(x^4 + 8x^3 + 20x^2 + 20x + 20) + x^2 - 3x - 34 < 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \begin{cases} x^4 + 8x^3 + 20x^2 + 20x + 20 = (x^2 + 4x + 1)^2 + 2(x+3)^2 + 1 > 0 \\ x^2 - 3x - 34 < 0 \forall x \in [-4; -2] \end{cases}$$

Trường hợp 3: Nếu $x \in [-2; 0]$ thì $\sqrt{6-5x} > 2$ khi đó:

$$f(x) < x^5 + 7x^4 + 12x^3 + x^2 - 3x - 30 < 0$$

$$\text{Vì } \begin{cases} x^5 + 7x^4 + 12x^3 = x^3(x+3)(x+4) \leq 0 \\ x^2 - 3x - 30 = (x+2)(x-5) - 20 < 0 \end{cases}$$

Trường hợp 4: Nếu $x \in \left[0; \frac{6}{5}\right]$ ta có:

$$f'(x) = 5x^4 + 28x^3 + 36x^2 + 2x - 3 + \frac{30}{\sqrt{6-5x}} > 0 \forall x \in \left[0; \frac{6}{5}\right]$$

$$\text{Vì } -3 + \frac{30}{\sqrt{6-5x}} = \frac{30 - 3\sqrt{6-5x}}{\sqrt{6-5x}} = \frac{45x + 846}{(30 + 3\sqrt{6-5x})\sqrt{6-5x}} > 0$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } \left[0; \frac{6}{5}\right].$$

Do vậy nên phương trình đầu sẽ có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu 26: Giải phương trình $x^4 + x^2 + 10x - 19 + (x^3 - 7x + 13)\sqrt{x^2 + x - 1} = 0$

Giải

Đặt $f(x) = x^4 + x^2 + 10x - 19 + (x^3 - 7x + 13)\sqrt{x^2 + x - 1}$ liên tục trên $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]$ và $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

$$\text{Có } f'(x) = 4x^3 + 2x + 10 + \frac{8x^4 + 7x^3 - 34x^2 + 5x + 27}{2\sqrt{x^2 + x - 1}}$$

Với $x \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ta cần chứng minh $g(x) = 8x^4 + 7x^3 - 34x^2 + 5x + 27 > 0$

- Nếu $x \in [0; 1]$ thì theo AM - GM ta có
$$\begin{cases} 8x^4 + 8 \geq 2\sqrt{8 \cdot 8x^4} = 16x^2 \\ 7x^3 + 7 \geq 14\sqrt{x^3} > 14x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) > -4x^2 + 5x + 12 > 0$$

- Nếu $x > 1 \Rightarrow g(x) > 8(x-1)^4 + 39(x-1)^3 + 35\left(x - \frac{8}{7}\right)^2 + \frac{86}{7} > 0$

Vậy $f'(x) > 0 \forall x \in \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$

Với $x \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ta cần chứng minh rằng:

$$u(x) = 2(4x^3 + 2x + 10)\sqrt{x^2 + x - 1} + 8x^4 + 7x^3 - 34x^2 + 5x + 27 < 0$$

- Nếu $x \in \left[-2; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]$ thì $\begin{cases} 8x^4 + 7x^3 - 20x^2 < 0 \\ -14x^2 + 5x + 27 < 0 \Rightarrow u(x) < 0 \\ 4x^3 + 2x + 10 < 0 \end{cases}$

- Nếu $x \leq -2$.

Ta thấy rằng $-12x^2 + 5x + 27 < 0$ nên chỉ cần chứng minh:

$$A = 2(4x^3 + 2x + 10)\sqrt{x^2 + x - 1} + 8x^4 + 7x^3 - 22x^2 < 0$$

Để ý thấy: $20\sqrt{x^2 + x - 1} - 10x^2 = \frac{10((-x^4 + 4x^2) + 4x - 4)}{x^2 + \sqrt{x^2 + x - 1}} < 0$ nên lại chuyển về chứng minh:

$$\begin{aligned} 2(4x^3 + 2x)\sqrt{x^2 + x - 1} &< -8x^4 - 7x^3 + 12x^2 \\ \Leftrightarrow x[2(4x^2 + 2)\sqrt{x^2 + x - 1} + 8x^3 + 7x^2 - 12x] &< 0 \\ \Leftrightarrow 2(4x^2 + 2)\sqrt{x^2 + x - 1} + 8x^3 + 7x^2 - 12x &> 0 \\ \Leftrightarrow -48x^5 + 143x^4 + 232x^3 - 192x^2 + 16x - 16 &> 0 \end{aligned}$$

Đặt $f_1(x) = -48x^5 + 143x^4 + 232x^3 - 192x^2 + 16x - 16$

Có $f_1'(x) = -24x^4 + 572x^3 + 696x^2 - 384x + 16$

$$= -24x^4 + 16 + x(572x^2 + 696x - 384) < 0 \forall x \leq -2$$

Suy ra $f_1(x)$ nghịch biến $\Rightarrow f_1(x) \geq f_1(-2) = 1152 > 0$. Suy ra $A < 0$

Vậy $f'(x) < 0 \forall x \leq -2$

Kết luận phương trình có tối đa 2 nghiệm trên TXĐ là $x = 1; x = -2$.

Nhìn chung bài này đánh giá khá là trầy cổt! Ta thử liên hợp có nhanh không nhé.

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 10x - 19 + (x^3 - 7x + 13)\sqrt{x^2 + x - 1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^3 - 7x + 13)(\sqrt{x^2 + x - 1} - 1) + (x-1)(x+2)(x^2 + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x+2)\left[\frac{x^3 - 7x + 13}{\sqrt{x^2 + x - 1} + 1} + x^2 + 3\right] &= 0 \end{aligned}$$

Đặt $f(x) = \frac{x^3 - 7x + 13}{\sqrt{x^2 + x - 1} + 1} + x^2 + 3$.

- Nếu $x \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì $x^3 - 7x + 13 > 0$ (cái này dễ tự chứng minh)
- Nếu $x \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Để ý thấy:

$$+ f(x) = \frac{x^3 - 7x + 13}{\sqrt{x^2 + x - 1} + 1} + x^2 + 3 = \frac{(\sqrt{x^2 + x - 1} + 2)(x^2 - 2x + 7 + (x - 2)\sqrt{x^2 + x - 1})}{\sqrt{x^2 + x - 1} + 1}$$

$$+ x^2 - 2x + 7 + (x - 2)\sqrt{x^2 + x - 1} = \frac{-x^3 + 19x^2 - 36x + 53}{x^2 - 2x + 7 - (x - 2)\sqrt{x^2 + x - 1}} > 0$$

Đến đây bài toán đã được giải quyết!

II. CÁC BÀI TOÁN HỆ PHƯƠNG TRÌNH

PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Nhìn chung nội dung của phương pháp này mình đã đề cập trong chuyên đề phương trình trước đó với các kỹ thuật hay dùng. Ở phần này các bài toán cũng không có gì khác biệt nhiều, bên cạnh đó có một số kỹ thuật khác thì các bạn sẽ được giới thiệu trong từng ví dụ cụ thể. Nào bây giờ chúng ta sẽ cùng bắt đầu đi vào các bài toán đầu tiên nhé !

Câu 1: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 13x - 4y + 8 = y^3 - x^3 + 3(y^2 - 2x^2) \\ x^2(x - 2)(y + 1) = 5(1 - 2y) \end{cases}$$

Giải

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta biến đổi được về phương trình :

$$x^3 + 6x^2 + 13x + 8 = y^3 + 3y^2 + 4y \Leftrightarrow (x+1)^3 + 3(x+1)^2 + 4(x+1) = y^3 + 3y^2 + 4y \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t^2 + 4t, \forall t \in \mathbb{R}$.

Ta có : $f'(t) = 3t^2 + 6t + 4 = 3(t+1)^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó ta có hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (1) ta có : $f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow y = x+1$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$x^2(x-2)(x+2) + 5(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x^4 - (2x+5)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 5)(x^2 - 2x - 5) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{6} \Rightarrow y = 2 + \sqrt{6} \\ x = 1 - \sqrt{6} \Rightarrow y = 2 - \sqrt{6} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x, y) = \left\{ (1 + \sqrt{6}; 2 + \sqrt{6}); (1 - \sqrt{6}; 2 - \sqrt{6}) \right\}$.

Câu 2: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x^2 + 3y^2)x^3 + (2x - 3y^4)y^4 = (y^4 + 2)y^6 \\ \sqrt{4x+5} + 2\sqrt{y^2+3} = 7 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện : $x \geq -\frac{5}{4}$.

Phương trình thứ nhất được biến đổi lại thành phương trình :

$$x^5 + 3x^3y^2 + 2xy^4 = y^{10} + 3y^8 + 2y^6 \quad (1)$$

Xét $y = 0 \Rightarrow x = 0$ không thỏa hệ phương trình.

Với $y \neq 0$ ta chia hai vế (1) cho y^5 ta được phương trình :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5 + 3\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 2\left(\frac{x}{y}\right) = y^5 + 3y^3 + 2y \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = t^5 + 3t^3 + 2t, \forall t \in \mathbb{R}$.

Ta có : $f'(t) = 5t^4 + 9t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó từ (2) $\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) \Leftrightarrow x = y^2$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$\begin{aligned} \sqrt{4x+5} + 2\sqrt{x+3} &= 7 \Leftrightarrow 4x+5+4x+12+4\sqrt{4x^2+17x+15} = 49 \\ \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+17x+15} &= 8-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 8-2x \geq 0 \\ 4x^2+17x+15 = 64-32x+4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ 49x = 49 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có $x = 1 \Rightarrow y = \pm 1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x, y) = \{(1; 1); (1; -1)\}$.

Câu 3: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2x+3} - \sqrt{2y+3} = 4(y-x) \\ x = \sqrt[5]{x(1-y^3)} + 15(y^2+1) - 29 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện :
$$\begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ y \geq -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$\sqrt{2x+3} + 4x = \sqrt{2y+3} + 4y \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{2t+3} + 4t, \forall t \geq -\frac{3}{2}$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+3}} + 4 > 0, \forall t > -\frac{3}{2}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$, do đó từ (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[5]{x(1-x^3)} + 15(x^2+1) - 29 \Leftrightarrow x^5 + x^4 - 15x^2 - x + 14 = 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)(x^2-1)(x^2+3x+7) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow y=-1 \\ x=1 \Rightarrow y=1 \\ x=2 \Rightarrow y=2 \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \{(-1; -1); (1; 1); (2; 2)\}$.

Câu 4: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} + \sqrt{1-y} = 2 \\ x^2 - y^4 + 9y = x(9+y-y^3) \end{cases}$$

Giải

Phương trình (2) $\Leftrightarrow x(x-y) + y^3(x-y) - 9(x-y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y^3 - 9 = 0 \end{cases}$

Với $x = y$ thế vào phương trình 1 ta được $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt{1-x} = 2 \ (x \leq 1)$

Đặt $t^3 = x+1 \Rightarrow t + \sqrt{2-t^3} = 2 \Rightarrow -t^3 - t^2 + 4t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 + \sqrt{3} \\ t = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$

Đến đây ta tìm được 3 bộ nghiệm

$$(x; y) = \{(0; 0); (-11 + 6\sqrt{3}; -11 + 6\sqrt{3}); (-11 - 6\sqrt{3}; -11 - 6\sqrt{3})\}$$

Với $x = 9 - y^3$ thế vào phương trình 2 ta được $\sqrt[3]{10-y^3} + \sqrt{1-y} = 2$

Xét hàm số $f(y) = \sqrt[3]{10-y^3} + \sqrt{1-y} - 2 \Rightarrow f'(y) = \frac{-3y^2}{3\sqrt[3]{(10-y^3)^2}} - \frac{1}{2\sqrt{1-y}}$

Từ đây ta suy ra $f(y)$ nghịch biến trên tập xác định, từ đó dễ dàng chỉ ra phương trình vô nghiệm!

Thử lại ta thấy 3 bộ nghiệm ban đầu thỏa mãn hệ.

Câu 5: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+5} = \sqrt{y-1} + \sqrt{y-3} + \sqrt{y-5} \\ x^2 + y^2 + x + y = 80 \end{cases} \ (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 5 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1+2} + \sqrt{x+1+4} = \sqrt{y-5} + \sqrt{y-5+2} + \sqrt{y-5+4} \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t} + \sqrt{t+2} + \sqrt{t+4}, \forall t \geq 0$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{t+2}} + \frac{1}{\sqrt{t+4}} \right) > 0, \forall t > 0$.

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Do đó từ (1) $\Leftrightarrow f(x+1) = f(y-5) \Leftrightarrow y = x+6$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có được phương trình :

$$x^2 + 7x - 19 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-7 + 5\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-7 - 5\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta có $x = \frac{-7 + 5\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{7 + 5\sqrt{5}}{2}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y) = \left(\frac{-7 + 5\sqrt{5}}{2}; \frac{7 + 5\sqrt{5}}{2} \right)$.

Câu 6: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2(x - 2y) = 3 + 2(\sqrt{y+3} - \sqrt{x+2}) \\ \sqrt{x+1} + 6\sqrt{y-1} = 11 - 7x + 6y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 1 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất đã cho được biến đổi lại thành phương trình:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - y^2 - 4y &= 3 + 2\sqrt{y+3} - 2\sqrt{x+2} \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + 2\sqrt{x+2} &= y^2 + 4y + 4 + 2\sqrt{y+3} \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 + 2\sqrt{(x+1)+1} &= (y+2)^2 + 2\sqrt{(y+2)+1} \quad (1). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 2\sqrt{t+1}, t \geq 0$. Ta có $f'(t) = 2t + \frac{1}{\sqrt{t+1}} > 0, \forall t \geq 0$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[0; +\infty)$. Do đó từ

$$(1) \Leftrightarrow f(x+1) = f(y+2) \Leftrightarrow y = x - 1.$$

Mặt khác $y \geq 1 \Leftrightarrow x - 1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2$

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} + 6\sqrt{x-2} &= 11 - x \Leftrightarrow \sqrt{x+1} - 2 + 6(\sqrt{x-2} - 1) + x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{6(x-3)}{\sqrt{x-2}+1} + x-3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-3) \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{6}{\sqrt{x-2}+1} + 1 \right)}_P &= 0 \Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Vì $x \geq 2 \Rightarrow P > 0$. Với $x = 3 \Rightarrow y = 2$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (3; 2)$.

Câu 7: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (\sqrt{x^2+1} - 3x^2y + 2)(\sqrt{4y^2+1} + 1) = 8x^2y^3 \quad (1) \\ x^2y - x + 2 = 0 \quad (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Nếu $y \leq 0$ ta có : $\begin{cases} (\sqrt{x^2+1}-3x^2y+2)(\sqrt{4y^2+1}+1) > 0 \\ 8x^2y^3 \leq 0 \end{cases}$ nên hệ vô nghiệm.

Nếu $y > 0$ thì từ (2) ta có : $y = \frac{x-2}{x^2} \Rightarrow x > 2$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có (1)} &\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1}-3x^2y+2)(\sqrt{4y^2+1}+1) = 2x^2(\sqrt{4y^2+1}+1)(\sqrt{4y^2+1}-1) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}-3x^2y+2 = 2x^2y\sqrt{4y^2+1}-2x^2y \quad (*). \end{aligned}$$

Lại có từ (2) rút : $2 = x - x^2y$, thế vào (*) ta có phương trình :

$$\sqrt{x^2+1}+x = 2x^2y\sqrt{4y^2+1}+2x^2y \Leftrightarrow \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x} = 2y\sqrt{(2y)^2+1}+2y \quad (4).$$

Xét hàm số $f(t) = t\sqrt{t^2+1}+t, \forall t > 0$.

Ta có $f'(t) = \sqrt{1+t^2} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + 1 > 0, \forall t > 0$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Do đó từ (4)} \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = f(2y) \Rightarrow \frac{1}{x} = 2y \Leftrightarrow 2xy = 1.$$

Kết hợp với (2) ta có hệ :

$$\begin{cases} 2xy = 1 \\ x^2y - x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x - x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{1}{8} \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \left(4; \frac{1}{8}\right)$.

Câu 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^7 + 2x^5 + 6x - 9 + \sqrt{5x+4} = 3y \\ y^7 + 2y^5 + 6y - 9 + \sqrt{5y+4} = 3x \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} x \geq -\frac{5}{4} \\ y \geq -\frac{5}{4} \end{cases}.$$

Lấy hai phương trình trong hệ trừ vế theo vế ta có được phương trình :

$$\begin{aligned} x^7 + 2x^5 + 6x + \sqrt{5x+4} - y^7 - 2y^5 - 6y - \sqrt{5y+4} &= 3y - 3x \\ \Leftrightarrow x^7 + 2x^5 + 9x + \sqrt{5x+4} &= y^7 + 2y^5 + 9y + \sqrt{5y+4} \quad (1). \end{aligned}$$

Ta xét hàm số $f(t) = t^7 + 2t^5 + 9t + \sqrt{5t+4}, \forall t \geq -\frac{5}{4}$.

Ta có $f'(t) = 7t^6 + 10t^4 + \frac{5}{2\sqrt{5t+4}} + 9 > 0, t > -\frac{5}{4}$.

Do đó hàm số $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\left[-\frac{4}{5}; +\infty\right)$.

Do đó từ (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thế vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có phương trình :

$$x^7 + 2x^5 + 3x + \sqrt{5x+4} - 9 = 0 \quad (2).$$

Xét hàm số $f(x) = x^7 + 2x^5 + 3x + \sqrt{5x+4} - 9, \forall x \geq -\frac{4}{5}$.

Ta có $f'(x) = 7x^6 + 10x^4 + \frac{5}{2\sqrt{5x+4}} + 3 > 0, \forall x > -\frac{4}{5}$. Do đó hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $\left[-\frac{4}{5}; +\infty\right)$ nên phương trình $f(x) = 0$ nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Mà $f(1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ là nghiệm duy nhất của $f(x) = 0$. Suy ra $y = 1$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (1; 1)$.

Câu 9: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 5(x^2 + 2) + y^2 + x(2\sqrt{4x^2 + 2} - 1) = (y + 3)(\sqrt{y^2 + 6y + 11} + 7) \\ x^2 + 2y^2 - x - y - 2 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Hệ phương trình đã cho được biến đổi lại thành hệ phương trình :

$$\begin{cases} 5x^2 + y^2 - x - 7y - 11 + 2x\sqrt{4x^2 + 2} - (y + 3)\sqrt{y^2 + 6y + 11} = 0 \quad (1) \\ x^2 + 2y^2 - x - y - 2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Lấy (1) - (2) vế theo vế ta sẽ có được phương trình:

$$\begin{aligned} & 4x^2 - y^2 - 6y - 9 + 2x\sqrt{4x^2 + 2} - (y + 3)\sqrt{y^2 + 6y + 11} \\ & \Leftrightarrow 4x^2 + 2x\sqrt{4x^2 + 2} = (y + 3)^2 + (y + 3)\sqrt{y^2 + 6y + 11} \\ & \Leftrightarrow 2x(2x + \sqrt{(2x)^2 + 2}) = (y + 3)(y + 3 + \sqrt{(y + 3)^2 + 2}) \quad (3) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t(t + \sqrt{t^2 + 2}), \forall t \in \mathbb{R}$.

Ta có : $f'(t) = (t + \sqrt{t^2 + 2})\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t^2 + 2}}\right) = \frac{(\sqrt{t^2 + 2} + t)^2}{\sqrt{t^2 + 2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (3) ta có : $f(2x) = f(y + 3) \Leftrightarrow y = 2x - 3$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta sẽ có phương trình :

$$9x^2 - 27x + 19 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9 + \sqrt{5}}{6} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ x = \frac{9 - \sqrt{5}}{6} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm : $(x, y) = \left\{ \left(\frac{9 + \sqrt{5}}{6}; \frac{\sqrt{5}}{3} \right); \left(\frac{9 - \sqrt{5}}{6}; -\frac{\sqrt{5}}{3} \right) \right\}$.

Câu 10: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 + 17x - 32y = 6x^2 - 9y^2 - 17 \\ (y+2)\sqrt{x+4} + (x+9)\sqrt{2y-x+9} = x^2 + 9y + 1 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

(Thi thử chuyên Vinh Phúc khối A,B năm 2015)

Giải

Điều kiện : $\begin{cases} x \geq -4 \\ 2y - x + 9 \geq 0 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$\begin{aligned} x^3 - 6x + 12x + 17x - 17 &= y^3 - 9y^2 + 32y \\ \Leftrightarrow (x-3)^2 + 5(x-2) &= (y-3)^3 + 5(y-3) \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 5t, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó từ

$$(1) \Leftrightarrow f(x-2) = f(y-3) \Leftrightarrow y = x+1.$$

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có được phương trình :

$$\begin{aligned} (x+3)\sqrt{x+4} + (x+9)\sqrt{x+11} &= x^2 + 9x + 10 \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 36x + 40 - 4(x+3)\sqrt{x+4} - 4(x+9)\sqrt{x+11} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(x^2 + 3x - 40) + (x+3)(x+7 - 4\sqrt{x+4}) + (x+9)\sqrt{x+11}(\sqrt{x+11} - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(x-5)(x+8) + (x+3)\left(\frac{(x+3)(x-5)}{x+7+4\sqrt{x+3}}\right) + \frac{(x+9)(x-5)\sqrt{x+11}}{\sqrt{x+11}+4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-5)\left(\underbrace{2(x+8) + \frac{(x+3)^2}{x+7+4\sqrt{x+3}} + \frac{(x+9)\sqrt{x+11}}{\sqrt{x+11}+4}}_T\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x-5=0 \Leftrightarrow x=5 \Rightarrow y=6 &\text{ vì } T > 0, \forall x \geq -4. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (5; 6)$.

Câu 11: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + 3 = y(y-2) - (y+5)x \\ x-4 = 2(\sqrt{x-3} - \sqrt{y-10}) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Điều kiện : $\begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq 10 \end{cases}$.

Phương trình thứ nhất trong hệ được viết lại thành phương trình :

$$\begin{aligned} 2x^2 - y^2 + xy + 5x + 2y + 3 &= 0 \Leftrightarrow 2x^2 - xy + 3x + 2xy - y^2 + 3y + 2x - y + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x(2x - y + 3) + y(2x - y + 3) + 2x - y + 3 = 0 \Leftrightarrow (x + y + 1)(2x - y + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 3 \text{ vì } \begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq 4 \end{cases} \Rightarrow x + y + 1 > 0. \end{aligned}$$

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :

$$\begin{aligned} x - 4 &= 2\sqrt{x-3} - 2\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow (2x-7) - (x-3) = 2\sqrt{x-3} - 2\sqrt{2x-1} \\ &\Leftrightarrow 2x-7+2\sqrt{2x-7} = x-3+2\sqrt{x-3} \quad (1). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 2t, \forall t \geq 0$. Ta có $f'(t) = 2t + 2 > 0, \forall t \geq 0$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn tăng trên $[0; +\infty)$.

Do đó từ (1) $\Leftrightarrow f(\sqrt{2x-7}) = f(\sqrt{x-3}) \Leftrightarrow \sqrt{2x-7} = \sqrt{x-3} \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow y = 17$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (4; 17)$.

Câu 12: Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^3 - 10y^2 + 14y + 52 = (x+1)(3\sqrt{x+1} - 6x + 26) \\ 3x^2 - 8y^2 = 10x - 7 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Điều kiện : $x \geq -\frac{1}{3}$.

Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} y^3 - 10y^2 + 14y + 6x^2 - 20x + 26 = 3(x+1)\sqrt{3x+1} \quad (1) \\ 6x^2 - 20x = 16y^2 - 14 \quad (2) \end{cases}$$

Thế $6x^2 - 20x = 16y^2 - 14$ vào (1) ta có phương trình :

$$\begin{aligned} y^3 + 6y^2 + 14y + 12 &= 3(x+1)\sqrt{3x+1} \\ &\Leftrightarrow y^3 + 6y^2 + 12y + 8 + 2y + 4 = (3x+1+2)\sqrt{3x+1} \\ &\Leftrightarrow (y+2)^3 + 2(y+2) = (\sqrt{3x+1})^3 + \sqrt{3x+1} \quad (3) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (3) $\Leftrightarrow f(y+2) = f(\sqrt{3x+1}) \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = y+2$.

Kết hợp với (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{3x+1} = y+2 \\ 3x^2 - 10x = 8y^2 - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2 \\ 3x = y^2 + 4y + 3 \\ 3x^2 - 10x = 8y^2 - 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2 \\ x = \frac{y^2 + 4y + 3}{3} \\ 3\left(\frac{y^2 + 4y + 3}{3}\right)^2 - 10\left(\frac{y^2 + 4y + 3}{3}\right) = 8y^2 - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2 \\ x = \frac{y^2 + 4y + 3}{3} \\ y(y^3 + 8y^2 - 12y - 16) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2 \\ x = \frac{y^2 + 4y + 3}{3} \\ y(y-2)(y^2 + 10y + 8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2 \\ x = \frac{y^2 + 4y + 3}{3} \\ y = 0 \vee y = 2 \vee y = -5 \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2 \\ x = \frac{y^2 + 4y + 3}{3} \\ y = 0 \vee y = 2 \vee y = -5 + \sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 - 2\sqrt{7} \\ y = -5 + \sqrt{7} \end{cases} \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \{(1; 0); (5; 2); (5 - 2\sqrt{7}; -5 + \sqrt{7})\}$.

Câu 13: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (5 - 2x)\sqrt{x + 2y} = (6 - x - 2y)\sqrt{x - 1} \\ (x^3 - 2y - 3)(x + \sqrt{8x(3 - x) + 4y^2 + 5}) = 21 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Đặt $\begin{cases} a = x + y \\ b = y - x \end{cases}, a \geq 0, b > 0$. Từ cách đặt ta có : $\begin{cases} x = \frac{a + b}{2} \\ y = \frac{a - b}{2} \end{cases}$.

Lúc đó hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{24}{2b^3 + 11} \\ (a - b)\left(\frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} + 3\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{13 - 2b^3}{2b^3 + 11} \\ (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{13 - 2(1 - a^3)}{2b^3 + 11} \\ b^3 = 1 - a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{a}}{2a^3 + 11} = \frac{\sqrt{b}}{2b^3 + 11} (*) \\ b^3 = 1 - a^3 \end{cases}.$$

$$\text{Do } \begin{cases} a \geq 0, b > 0 \\ a^3 + b^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0, b > 0 \\ a^3 < 1, b^3 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0, b > 0 \\ a < 1, b \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq a < 1 \\ 0 < b \leq 1 \end{cases}.$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{2t^3 + 11}, \forall t \in [0; 1]$. Ta có : $f'(t) = \frac{11(1 - t^3)}{2t^3 + 11} \leq 0, \forall t \in [0; 1]$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn nghịch biến trên $[0;1]$.

Do đó ta có $(*) \Leftrightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b$.

Từ đó ta sẽ có hệ phương trình :

$$\begin{cases} a = b \\ a^3 + b^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ y - x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y) = \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

Câu 14: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2x^2 - 3x + 4)(2y^2 - 3y + 4) = 18 \\ x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Xét phương trình thứ hai trong hệ ta có : $x^2 + y^2 + xy - 7x - 6y + 14 = 0 \quad (*)$.

Nếu ta xem $(*)$ là phương trình bậc hai theo x thì phương trình có nghiệm khi và chỉ khi :

$$\Delta = (y-7)^2 - 4(y^2 - 6y + 14) = -3y^2 + 10y - 7 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq \frac{7}{3}.$$

Nếu ta xem $(*)$ là phương trình bậc hai theo biến y ta có phương trình có nghiệm khi và

$$\text{chỉ khi } \Delta = (x-6)^2 - 4(x^2 - 7x + 14) = -3x^2 + 16x - 20 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq \frac{10}{3}.$$

$$\text{Vậy } x \in \left[2; \frac{10}{3}\right], y \in \left[1; \frac{7}{3}\right].$$

Từ phương trình thứ nhất trong hệ dẫn đến xét hàm số $f(t) = 2t^2 - 3t + 4, \forall t \geq 1$.

Ta có : $f'(t) = 4t - 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

$$\text{Từ đó dẫn đến } f(x) \geq f(2) = 6, \forall x \in \left[2; \frac{10}{3}\right], f(y) \geq f(1) = 3, \forall y \in \left[1; \frac{7}{3}\right].$$

$$\text{Do đó } f(x) \cdot f(y) \geq 18. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Thế lại vào phương trình thứ hai ta thấy không thỏa mãn. Do đó hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 15: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + 3x = 4(y^3 - 2y^2 + 3y) \\ 3x^2 + y^2 = 2(y\sqrt{x(3x+y)} + x\sqrt{3y(y-x)}) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Nhận xét hệ luôn có nghiệm $(x, y) = (0; 0)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 2t^2 + 3t, \forall t \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t) = 3t^2 - 4t + 3 = 3\left(t - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{3} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$. Do đó ta có các nhận xét sau:

Với $x > 0$. Ta có $f(x) > f(0) = 0 \Leftrightarrow 4f(y) > 0 \Leftrightarrow f(y) > 0 \Leftrightarrow y > 0$.

Với $x < 0$. Ta có $f(x) < f(0) = 0 \Leftrightarrow 4f(y) < 0 \Leftrightarrow f(y) < 0 \Leftrightarrow y < 0$.

Mặt khác nếu $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + y^2 > 0 \\ y\sqrt{x(x+3y)} + x\sqrt{3y(y-x)} < 0 \end{cases}$. Do đó hệ vô nghiệm.

Vậy $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$. Đặt $y = tx, t > 0$. Phương trình thứ hai trong hệ trở thành:

$$3x^2 + t^2x^2 = 2\left(tx\sqrt{x(x+3tx)} + x\sqrt{3tx(tx-x)}\right)$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 3 = 2\left(t\sqrt{t+3} + \sqrt{3t^2-3t}\right) \Leftrightarrow t\sqrt{t+3} + \sqrt{3t^2-3t} = \frac{t^2+3}{2}$$

$$\text{Ta xét hệ sau: } \begin{cases} t\sqrt{t+3} + \sqrt{3t^2-3t} = \frac{t^2+3}{2} \quad (1) \\ t\sqrt{t+3} - \sqrt{3t^2-3t} = \frac{t(t^2+3)}{t\sqrt{t+3} + \sqrt{3t^2-3t}} = \frac{t(t^2+3)}{\frac{t^2+3}{2}} = 2t \quad (2) \end{cases}$$

Lấy (1)+(2) vế theo vế ta có được phương trình:

$$4t\sqrt{t+3} = t^2 + 4t + 3 \Leftrightarrow 16t^2(t+3) = (t^2 + 4t + 3)^2$$

$$\Leftrightarrow t^4 - 8t^3 - 26t^2 + 24t + 9 = 0 \Leftrightarrow (t^2 + 2t - 3)(t^2 - 10t - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \\ t = 5 - 2\sqrt{7} \\ t = 5 + 2\sqrt{7} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện $t > 0$ ta có: $\begin{cases} t = 1 \\ t = 5 + 2\sqrt{7} \end{cases}$.

Với $t = 1 \Leftrightarrow y = x$. Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có:

$$x^3 - 2x^2 + 3x = 4(x^3 - 2x^2 + 3x) \Leftrightarrow x(x^2 - 2x + 3) = 0.$$

Phương trình cuối cùng vô nghiệm với $x > 0$.

Với $t = 5 + 2\sqrt{7} \Leftrightarrow y = (5 + 2\sqrt{7})x$. Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có:

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + 3x &= 4(5 + 2\sqrt{7})\left((53 + 20\sqrt{7})x^3 - 2(5 + 2\sqrt{7})x + 3x\right) \\ \Leftrightarrow x\left[\left(4(5 + 2\sqrt{7})(53 + 20\sqrt{7}) - 1\right)x^2 - 2\left(4(5 + 2\sqrt{7})^2 + 1\right)x + 12(5 + 2\sqrt{7}) - 3\right] &= 0 \end{aligned}$$

Phương trình cuối cùng vô nghiệm với $x > 0$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x, y) = (0; 0)$.

Câu 16: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^3x - x^4 = 63 \\ xy^2 + 2x^2y + x^3 = 27\sqrt{3} \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Hệ phương trình đã cho được viết lại dưới dạng :
$$\begin{cases} x(y^3 - x^3) = 63(1) \\ x(x+y)^2 = 27\sqrt{3}(2) \end{cases}$$

Từ (2) $\Rightarrow x > 0$. Mặt khác từ (1) $\Leftrightarrow y^3 = \frac{63}{x} + x^3 \Rightarrow y > 0$.

Từ (2) $\Leftrightarrow y = \frac{3\sqrt[4]{27}}{\sqrt{x}} - x$.

Thế vào (1) ta được phương trình :
$$x \left(\left(\frac{3\sqrt[4]{27}}{\sqrt{x}} - x \right)^3 - x^3 \right) = 63 \quad (3).$$

Đặt $t = \sqrt{x}, t > 0$.

Khi đó (3) trở thành phương trình $t^9 - (3\sqrt[4]{27} - t^3)^3 + 63t = 0$.

Xét hàm số $f(t) = t^9 - (3\sqrt[4]{3} - t^3)^3 + 63t, \forall t > 0$.

Ta có : $f'(t) = 9t^8 + 9t^2(3\sqrt[4]{3} - t^3)^2 + 63 > 0, \forall t > 0$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$. Mặt khác $f(\sqrt[4]{2}) = 0$.

Do đó phương trình $f(t) = 0$ có nghiệm duy nhất $t = \sqrt[4]{3} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt[4]{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \Rightarrow y = 2\sqrt{3}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y) = (\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.

Câu 17: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x^2 - 7x + 14) = 5y^2 - 23y + 32 \\ x^2 + 8y^2 = y^3 + 28y - 23 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Cộng vế theo vế hai phương trình trong hệ ta có được phương trình :

$$\begin{aligned} & x^3 - 6x^2 + 14x - y^3 - 3y^2 - 5y - 9 \\ & \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 2x - 4 = y^3 - 3y^2 + 3y + 2y - 2 \\ & \Leftrightarrow (x-2)^3 + 2(x-2) = (y-1)^3 + 2(y-1) \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ là hàm số tăng trên $\mathbb{R}$. Do đó từ

$$(1) \Leftrightarrow f(x-2) = f(y-1) \Leftrightarrow x-2 = y-1 \Leftrightarrow x = y+1.$$

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$(y+1)^2 + 8y^2 = y^3 + 28y - 23 \Leftrightarrow y^3 - 9y^2 + 26y - 24 = 0 \Leftrightarrow (y-2)(y-3)(y-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-2=0 \\ y-3=0 \\ y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \Rightarrow x=3 \\ y=3 \Rightarrow x=4 \\ y=4 \Rightarrow x=5 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y) = \{(3; 2); (4; 3); (5; 4)\}$.

Câu 18: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^3 + xy + \frac{3}{2} = y^3 & (1) \\ (xy+2)^2 + \frac{1}{x^2} = 2y + \frac{4}{x} & (2) \end{cases}$$

Giải

Từ phương trình (2): $(xy+2)^2 + \frac{1}{x^2} = 2y + \frac{4}{x}$

$$\Rightarrow x^2y^2 + 4xy + 4 + \frac{1}{x^2} - 2y = \frac{4}{x}$$

$$\Rightarrow \left(xy - \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(xy - \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$$

Vậy $xy - \frac{1}{x} = -2$ thế vào phương trình (1) $\Rightarrow \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{x} - 2\right)^3 \cdot \frac{1}{x^3}$

Đặt $a = \frac{1}{x} \Rightarrow (a^2 - 1)^3 + a - \frac{1}{2} = (a - 2)^3 \cdot a^3 \Rightarrow 6a^5 - 15a^4 + 8a^3 + 3a^2 + a - \frac{3}{2} = 0$

Đặt $f(a) = 6a^5 - 15a^4 + 8a^3 + 3a^2 + a - \frac{3}{2} \Rightarrow f'(a) = 30a^4 - 60a^3 + 24a^2 + 6a + 1$

Ta có $f'(a) = 30(a - a^2)^2 + 6(a - a^2) + 1 > 0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất trên $\mathbb{R} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}$

Câu 19: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt[4]{3(2x^2 + 3y^2) + 49(x - y) + 134} = \frac{8}{\sqrt[3]{x - y + 6}} & (x, y \in \mathbb{R}) \\ x(x + 2y) + y(2y + 1) - x - 2 = 0 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện:
$$\begin{cases} 3(2x^2 + 3y^2) + 49(x - y) + 134 \geq 0 \\ x - y + 6 \neq 0 \end{cases}$$

Từ phương trình thứ hai trong hệ ta có: $x^2 + 2xy + 2y^2 - x + y - 2 = 0$, ta có được hai điều sau:

Thứ nhất: $2x^2 + 3y^2 = x^2 + y^2 - 2xy + x - y + 2$.

Thứ hai: $(x + y)^2 + y^2 = x - y + 2 \Rightarrow x - y + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x - y \geq -2$.

Thế điều thứ nhất vào phương trình thứ nhất trong hệ và biến đổi ta thu được phương trình :

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{3(x-y)^2 + 52(x-y) + 140} &= \frac{8}{\sqrt[3]{x-y+6}} \\ \Leftrightarrow \sqrt[4]{3(x-y)^2 + 52(x-y) + 140} \cdot \sqrt[3]{x-y+6} &= 8 \quad (1)\end{aligned}$$

Đặt $t = x - y, t \geq -2$.

Khi đó ta có (1) trở thành : $\sqrt[4]{3t^2 + 52t + 140} \cdot \sqrt[3]{t+6} - 8 = 0$.

Xét hàm số $f(t) = \sqrt[4]{3t^2 + 52t + 140} \cdot \sqrt[3]{t+6} - 8, \forall t \geq -2$.

$$\text{Ta có : } f'(t) = \frac{(6t+52) \cdot \sqrt[3]{t+6}}{\sqrt[4]{(3t^2 + 52t + 140)^3}} + \frac{\sqrt[4]{3t^2 + 52t + 140}}{3\sqrt[3]{t+6}} > 0, \forall t \geq -2.$$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[-2; +\infty)$. Do đó $f(t) = 0$ nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Mà $f(2) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(t) = 0$.

Kết hợp với phương trình thứ hai trong hệ ta có hệ :

$$\begin{aligned}\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+2xy+2y^2-x+y-2=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ 5x^2-12x+4=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ x=2 \vee x=\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\frac{2}{5} \\ y=-\frac{8}{5} \end{cases}.\end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \left\{ (2; 0); \left(\frac{2}{5}; -\frac{8}{5} \right) \right\}$.

Câu 20: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+y)(25-4xy) = \frac{105}{4} + 4x^2 + 17y^2 \quad (1) \\ 4x^2 + 4y^2 + 4x - 4y = 7 \quad (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

$$\text{Từ (2) ta có : } (2x+1)^2 + (2y-1)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} -3 \leq 2x+1 \leq 3 \\ -3 \leq 2y-1 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 2 \end{cases}.$$

Mặt khác từ (2) ta cũng có : $4x - 4y = 7 - 4x^2 - 4y^2 \quad (*)$.

Phương trình (1) được biến đổi trở thành phương trình :

$$\begin{aligned}(x+y)(25-4xy) &= \frac{105}{4} + 4x^2 - 4y^2 + 21y^2 \\ \Leftrightarrow (x+y)(25-4xy-(4x-4y)) &= \frac{105}{4} + 21y^2 \quad (3)\end{aligned}$$

$$\text{Thế (*) vào (3) ta có : } (x+y)(18+4(x^2-xy+y^2)) = \frac{105}{4} + 21y^2$$

$$\Leftrightarrow 18(x+y) + 4(x^3 + y^3) - 21y^2 = \frac{105}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 + 18x + 4x^3 - 21y^2 + 18y = \frac{105}{4} \quad (4)$$

Xét hàm số $f(x) = 4x^3 + 18x, \forall x \in [-2; 1]$.

Ta có : $f'(x) = 12x^2 + 18 > 0, \forall x \in [-2; 1]$.

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[-2; 1]$. Do đó $-68 = f(-2) \leq f(x) \leq f(1) = 22$.

Xét hàm số $f(y) = 4y^3 - 21y^2 + 18y, \forall y \in [-1; 2]$.

Ta có : $f'(y) = 12y^2 - 42y + 18$.

$$\text{Lại có } f'(y) = 0 \Leftrightarrow 12y^2 - 42y + 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 3(1) \end{cases}$$

$$\text{Mà } f(-1) = -43, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{4}, f(2) = -16.$$

$$\text{Từ đây ta có : } -43 \leq f(y) \leq \frac{17}{4}. \text{ Vậy : } \begin{cases} -63 \leq f(x) \leq 22 \\ -43 \leq f(y) \leq \frac{17}{4} \end{cases} \Rightarrow f(x) + f(y) \leq \frac{105}{4}.$$

$$\text{Vậy từ (4)} \Leftrightarrow f(x) + f(y) = \frac{105}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Thử lại ta thấy thỏa mãn hệ.}$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có nghiệm } (x, y) = \left(1; \frac{1}{2}\right).$$

Câu 21: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 + 4y^3 + (x^4 - 1)y + 4y^2 = 1(1) \\ 8y^3 + 4\sqrt{x^2 + 1} = x^2 + 6y + 2(2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

$$\text{Từ (1) ta có } (y+1)x^4 + 4y^2(y+1) - (y+1) = 0 \Leftrightarrow (y+1)(x^4 + 4y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x^4 + 4y^2 = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Với } y = -1 \text{ thay vào (2) ta có } 4\sqrt{x^2 + 1} = x^2 + 4 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\sqrt{2} \\ x = -2\sqrt{2} \end{cases}.$$

$$\text{Với } x^4 + 4y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x^2 \leq 1 \\ -1 \leq 2y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Từ (2) ta có : } 4\sqrt{x^2 + 1} - x^2 + 8y^3 - 6y - 2 = 0 (*).$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = 4\sqrt{x^2 + 1} - x^2, \forall x \in [-1; 1].$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} - 2x = \frac{2x(2-\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{Lại có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 4 \text{ vì } 2 - \sqrt{x^2+1} > 0, \forall x \in [-1; 1].$$

$$\text{Mặt khác ta có : } f(-1) = f(1) = 4\sqrt{2} - 1. \text{ Do đó ta có : } 4 \leq f(x) \leq 4\sqrt{2} - 1.$$

$$\text{Xét hàm số } f(y) = 8y^3 - 6y - 2, \forall y \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

$$\text{Ta có : } f'(y) = 24y^2 - 6 = 6(4y^2 - 1) \leq 0, \forall y \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

$$\text{Vậy hàm số } f(y) \text{ luôn nghịch biến trên } \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

$$\text{Mặt khác ta có : } f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0; f\left(\frac{1}{2}\right) = -4. \text{ Do đó } -4 \leq f(y) \leq 0.$$

$$\text{Vậy : } \begin{cases} 4 \leq f(x) \leq 4\sqrt{2} - 1 \\ -4 \leq f(y) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) + f(y) \geq 0.$$

$$\text{Do đó từ (*)} \Leftrightarrow f(x) + f(y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Thử lại thấy thỏa mãn hệ nên hệ phương trình đã cho có nghiệm

$$(x, y) = \left\{ (0; -1); (2\sqrt{2}; -1); (-2\sqrt{2}; -1); \left(0; \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Câu 22: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x - 10y^2 - 11)\sqrt{x-1} + (x+1)(y^2 - 10) = -y^4 - 21 \\ 2(3y^2 + 7x) - 9\sqrt{x-1} + \sqrt{y-2} - 74 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 2 \end{cases}.$$

Biến đổi (1) ta có phương trình :

$$-11(x-1) + (x-10y^2-11)\sqrt{x-1} + (y^4 + xy^2 + x + y^2) = 0 (*)$$

Đặt $t = \sqrt{x-1}, t \geq 0$. Lúc đó (*) trở thành :

$$-11t^2 + (x-10y^2-11)t + (y^4 + xy^2 + x + y^2) = 0 (3).$$

$$\text{Ta có : } \Delta = (x-10y^2-11)^2 - 4(y^4 + xy^2 + x + y^2) = (x+12y^2+11)^2.$$

$$\text{Do đó } (3) \Leftrightarrow (-11t + y^2 + x^2)(t + y^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow y^2 + x = 11\sqrt{x-1} \text{ vì } t + y^2 + 1 > 0.$$

Thế vào (2) ta có phương trình :

$$y^2 + x - 9\sqrt{x-1} + \sqrt{y-2} + 13x + 5y^2 - 74 = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} + 13x + \sqrt{y-2} + 5y^2 = 74 (5)$$

Xét hàm số $f(x) = 2\sqrt{x-1} + 13x, \forall x \geq 1$. Ta có: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + 13 > 0, \forall x > 1$.

Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$.

Từ đó $\forall x \in [1; 2] \Rightarrow f(1) \leq f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow 13 \leq f(x) \leq 28$.

Xét hàm số $f(y) = \sqrt{y-2} + 5y^2, \forall y \geq 2$.

Ta có $f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y-2}} + 10y > 0, \forall y > 2$.

Vậy hàm số $f(y)$ đồng biến trên $[2; +\infty)$.

Từ đó $\forall y \in [2; 3] \Rightarrow f(2) \leq f(y) \leq f(3) \Leftrightarrow 20 \leq f(y) \leq 46$.

Do đó từ (5) ta có $f(x) + f(y) = 74 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$. Thử lại ta thấy hệ thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y) = (2; 3)$

Câu 23: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2 \\ (2x + y + 6)\sqrt{3x + 2y + 2} + 1 = \sqrt[3]{3x + 7} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0, y \neq 0 \\ 3x + 2y + 2 \geq 0 \end{cases}$.

Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, |t| \geq 2$. Khi đó ta có:
$$\begin{cases} \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} = (t^2 - 2)^2 - 2 \\ \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = t^2 - 2 \end{cases}$$
.

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình:

$$t^4 - 4t^2 + 2 - (t^2 - 2) + t + 2 = 0 \Leftrightarrow t^4 - 5t^2 + t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t^3 - 2t^2 - t + 3 = 0 \end{cases} (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 2t^2 - t + 3, \forall |t| \geq 2$. Ta có $f'(t) = 3t^2 - 4t - 1$.

Lại có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2 + \sqrt{7}}{2} (1) \\ t = \frac{2 - \sqrt{7}}{2} (1) \end{cases}$.

Lập bảng biến thiên (Nhờ em vẽ dùm).

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $f(t) \leq -11$ khi $t \leq -2$, $f(t) \geq 1$ khi $t \geq 2$.

Do đó $f(t) = 0$ vô nghiệm với mọi $|t| \geq 2$.

Vậy từ (*) ta có $t = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2 \Leftrightarrow (x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -x$. Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình: $(x+6)\sqrt{x+2} + 1 = \sqrt[3]{3x+7}$ (2) điều kiện là $x \geq -2$.

- Cách 1: Ẩn phụ hóa kết hợp xét hàm số đại diện.

Đặt $a = \sqrt{x+2}$ ($a \geq 0$). Ta có $x = a^2 - 2$.

Khi đó (2) trở thành: $a^3 + 4a + 1 = \sqrt[3]{3a^2 + 1}$ (3)

Lại đặt $b = \sqrt[3]{3a^2 + 1} \Leftrightarrow b^3 = 3a^2 + 1$. Kết hợp ta có: $\begin{cases} a^3 + 4a + 1 = b \\ 3a^2 + 1 = b^3 \end{cases}$.

Cộng vế theo vế hai phương trình ta được: $(a+1)^3 + (a+1) = b^3 + b$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó $f(a+1) = f(b) \Leftrightarrow a+1 = b \Leftrightarrow a+1 = \sqrt[3]{3a^2 + 1}$
 $\Leftrightarrow a^3 + 3a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (do $a \geq 0$).

Với $a = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = 2$.

- Cách 2: Ẩn phụ hóa kết hợp với liên hiệp.

Đặt: $\sqrt{x+2} = a$ ($a \geq 0$) $\Rightarrow x = a^2 - 2$.

Phương trình (2) trở thành:

$$\begin{aligned} a^3 + 4a + 1 &= \sqrt[3]{3a^2 + 1} \Leftrightarrow (a^3 + 3a) + (a - 1 - \sqrt[3]{3a^2 + 1}) = 0 \\ &\Leftrightarrow a(a^2 + 3) + \frac{a(a^2 + 3a)}{a+1 + (a+1)\sqrt[3]{3a^2 + 1} + \sqrt[3]{(3a^2 + 1)^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow a \left(1 + \frac{1}{(a+1)^2 + (a+1)\sqrt[3]{3a^2 + 1} + \sqrt[3]{(3a^2 + 1)^2}} \right) = 0 \text{ vì } a^2 + 3 > 0. \\ &\Leftrightarrow a = 0 \text{ vì } 1 + \frac{1}{(a+1)^2 + (a+1)\sqrt[3]{3a^2 + 1} + \sqrt[3]{(3a^2 + 1)^2}} > 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+2} = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = 2. \end{aligned}$$

Vậy qua hai cách và đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (-2; 2)$.

Câu 24: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y)^2(x^2+y^2-2) = (x^2+y^2)(xy+2) \\ 2(x^3+3y^2-13)(y+7) = y(3-y)-x^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta biến đổi được phương trình:

$$\begin{aligned} (x+y)^2(x^2+y^2) - 2(x+y)^2 - xy(x^2+y^2) + 2(x^2+y^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+y)^2(x^2+y^2) - 2(x+y)^2 - xy(x^2+y^2) - 2(x^2+y^2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 + 2xy(x^2 + y^2) - 4(x^2 + y^2) - 4xy - xy(x^2 + y^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 4) + xy(x^2 + y^2 - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 4) \left(\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Với $(x, y) = (0; 0)$ thì hệ không thỏa mãn.

Với $x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = 4 - x^2$. Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình $2(x^3 - 3x^2 + 1)(y + 7) = 3y - 4$ (1).

Do $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$ nên từ (1) ta có: $x^3 - 3x^2 - 1 = \frac{3y - 4}{2y + 14}$ (2).

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1, \forall x \in [-2; 2]$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x$.

Lại có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = 2 \Rightarrow y = -5 \end{cases}$.

Mặt khác $f(-2) = -21$.

Vẽ bảng biến thiên ta có được $\forall x \in [-2; 2] \Rightarrow -21 \leq f(x) \leq -1$.

Xét hàm số $f(y) = \frac{3y - 4}{2y + 14}, \forall y \in [-2; 2]$.

Ta có $f'(y) = \frac{50}{(2y + 14)^2} > 0, \forall y \in [-2; 2]$.

Do đó hàm số $f(y)$ đồng biến trên $[-2; 2]$ nên $-1 = f(-2) \leq f(y) \leq f(2) = \frac{1}{9}$.

Vậy ta sẽ có: $\begin{cases} -21 \leq f(x) \leq -1 \\ -1 \leq f(y) \leq \frac{1}{9} \end{cases}$ nên từ (2) ta có $f(x) = f(y) = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$

Thử lại ta thấy thỏa mãn nên nghiệm của hệ phương trình là $(x, y) = (2; -2)$.

Câu 25: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 2 + 3\sqrt{x^2 - x - 4} \\ 3y^2(y - 3) + 11(y - 4) = 2\sqrt[3]{13 - x^3} - 3x^3 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - x - 4 \geq 0 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$.

Phương trình thứ hai trong hệ được biến đổi thành phương trình:

$$\begin{aligned} 3y^3 - 9y^2 + 11y - 44 &= 2\sqrt[3]{13 - x^3} - 3x^3 \\ \Leftrightarrow 3(y - 1)^3 + 2(y - 1) &= 3(13 - x^3) + 2\sqrt[3]{13 - x^3} \quad (1). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 3t^3 + 2t, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 6t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó từ (1) $\Leftrightarrow f(y-1) = f(\sqrt[3]{13-x^3}) \Leftrightarrow y-1 = \sqrt[3]{13-x^3}$.

Thay vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có phương trình:

$$x+1+\sqrt[3]{13-x^3} = 2+3\sqrt{x^2-x-4} \Leftrightarrow \sqrt[3]{13-x^3} = 1-x+2\sqrt{x^2-x-4} \quad (2).$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 1-x \\ v = \sqrt{x^2-x-4} \end{cases} \Rightarrow u^3 - 3v^2 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 - 3x^2 + 3x - 12 = 13 - x^3, (v \geq 0)$$

Lúc đó phương trình (2) trở thành phương trình:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{u^3 - 3v^2} = u + 2v &\Leftrightarrow u^3 - 3v^2 = u^3 + 6u^2v + 12uv^2 + 8v^3 \\ &\Leftrightarrow 3v^2 + 6u^2v + 12uv^2 + 8v^3 = 0 \Leftrightarrow v(6(u+v)^2 + 2v^2 + 3v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-x-4} = 0 \\ 1-x = 0 \\ \sqrt{x^2-x-4} = 0 \end{cases} (*) \Leftrightarrow x^2-x-4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = 1 + \sqrt[3]{\frac{13-5\sqrt{17}}{2}} \\ x = \frac{1-\sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = 1 + \sqrt[3]{\frac{13+5\sqrt{17}}{2}} \end{cases} \end{aligned}$$

Vì (*) vô nghiệm.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ phương trình là:

$$(x, y) = \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}; 1 + \sqrt[3]{\frac{13-5\sqrt{17}}{2}} \right); \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}; 1 + \sqrt[3]{\frac{13+5\sqrt{17}}{2}} \right) \right\}.$$

Câu 26: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (5-2x)\sqrt{x+2y} = (6-x-2y)\sqrt{x-1} \\ (x^3-2y-3)(x+\sqrt{8x(3-x)+4y^2+5}) = 21 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+2y \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}.$$

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình:

$$(3-2(x-1))\sqrt{x+2y} = (6-(x+2y))\sqrt{x-1} \quad (1).$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{x-1} \\ b = \sqrt{x+2y} \end{cases}, a, b \geq 0. \text{ Khi đó (1) trở thành:}$$

$$(3-2a^2)b = (6-b^2)a \Leftrightarrow (6-4a^2)b = (6-b^2)2a \quad (2).$$

Với $a=0 \vee b=0$ thì hệ không thỏa mãn. Do đó ta có $a, b > 0$. Khi đó (2) trở thành:

$$\frac{6-(2a)^2}{2a} = \frac{6-b^2}{b} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{6-t^2}{t}, \forall t > 0$. Ta có $f'(t) = -\frac{6+t^2}{t^2} < 0, \forall t > 0$. Do đó hàm số $f(t)$ luôn nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Nên } (*) \Leftrightarrow f(2a) = f(b) \Leftrightarrow 2a = b \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = \sqrt{x+2y} \Leftrightarrow 3x-4 = 2y.$$

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình sau :

$$\begin{aligned} & (x^3 - 3x + 4 - 3) \left(x + \sqrt{24x - 8x^2 + (3x-4)^2 + 5} \right) = 21 \\ & \Leftrightarrow (x^3 - 3x + 1) \left(x + \sqrt{x^2 + 21} \right) = 21 \\ & \Leftrightarrow (x^3 - 3x + 1) \left(x + \sqrt{x^2 + 21} \right) = \left(\sqrt{x^2 + 21} + x \right) \left(\sqrt{x^2 + 21} - x \right) \\ & \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = \sqrt{x^2 + 21} - x \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 + \left(x + 3 - \sqrt{x^2 + 21} \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2) + \frac{6(x-2)}{x+3+\sqrt{x^2+21}} = 0 \Leftrightarrow (x-2) \underbrace{\left((x+1)^2 + \frac{6}{x+3+\sqrt{x^2+21}} \right)}_P = 0 \\ & \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=1 \text{ vì } P > 0, \forall x \geq 1. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (2; 1)$.

Câu 27: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + 3 = (4x^2 - 2yx^2)\sqrt{3-2y} + \frac{4x^2+1}{x} \\ \sqrt{2-\sqrt{3-2y}} = \frac{\sqrt[3]{2x^2+x^3+x+2}}{2x+1} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} 2 - \sqrt{3-2y} \geq 0 \\ 3-2y \geq 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \\ x \neq 0 \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$\begin{aligned} 2 + \frac{3}{x^2} &= (4-2y)\sqrt{3-2y} + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x} + 2 = (1+3-2y)\sqrt{3-2y} \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + 1 - \frac{1}{x} = \left(\sqrt{3-2y}\right)^3 + \sqrt{3-2y} \quad (*). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có : $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó từ } (*) \Leftrightarrow f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = f\left(\sqrt{3-2y}\right) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = \sqrt{3-2y}.$$

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :

$$\begin{aligned} \sqrt{2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)} &= \frac{\sqrt[3]{2x^2 + x^3 + x + 2}}{2x + 1} \Leftrightarrow (2x + 1)\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = x + 2 + x\sqrt{\frac{2}{x} + 1} \\ \Leftrightarrow \left(2 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{x}} &= 1 + \frac{2}{x} + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} \Leftrightarrow \left(1 + 1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{2}{x} + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right)^3 &= 1 + \frac{2}{x} + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, t \in \mathbb{R}$. Ta có : $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{Do đó từ (1)} \Leftrightarrow f\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right) &= f\left(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}}\right) \Leftrightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^2 \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} + x^3 &= 1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Thử lại ta có } x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}.$$

$$\text{Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là : } (x, y) = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{3 - \sqrt{5}}{4}\right).$$

Câu 28: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 3y + 1 = y^2 - \frac{1}{y} + \frac{3x + 4}{\sqrt{x + 1}} \\ \sqrt{9y - 2} + \sqrt[3]{7x + 2y + 2} = 2y + 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} x > -1 \\ y \geq \frac{2}{9} \end{cases}.$$

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành hệ phương trình :

$$x + 1 - \frac{3x + 4}{\sqrt{x + 1}} = y^2 - 3y - \frac{1}{y} \Leftrightarrow x + 1 - 3\sqrt{x + 1} - \frac{1}{\sqrt{x + 1}} = y^2 - 3y - \frac{1}{y} \quad (1).$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = t^2 - 3t - \frac{1}{t}, \forall t > 0.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 2t - 3 + \frac{1}{t^2} = \frac{(2t + 1)(t - 1)^2}{t^2} > 0, \forall t > 0.$$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến với mọi $t > 0$.

$$\text{Do đó từ (1)} \Leftrightarrow f(\sqrt{x + 1}) = f(y) \Leftrightarrow y = \sqrt{x + 1} \Leftrightarrow x = y^2 - 1.$$

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$\sqrt{9y - 2} + \sqrt[3]{7y^2 + 2y - 5} = 2y + 3 \Leftrightarrow y + 2 - \sqrt{9y - 2} + y + 1 - \sqrt[3]{7y^2 + 2y - 5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-2)(y-3)}{y+2+\sqrt{9y-2}} + \frac{(y+1)(y-2)(y-3)}{(y+1)^2 + (y+1)\sqrt[3]{7y^2+2y-5} + \sqrt[3]{(7y^2+2y-5)^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-2)(y-3) \underbrace{\left(\frac{1}{y+2+\sqrt{9y-2}} + \frac{y+1}{(y+1)^2 + (y+1)\sqrt[3]{7y^2+7y-5} + \sqrt[3]{(7y^2+7y-5)^2}} \right)}_K = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-2)(y-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \Rightarrow x=3 \\ y=3 \Rightarrow x=8 \end{cases} \text{ vì } K > 0, \forall y \geq \frac{2}{9}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \{(3; 2); (8; 3)\}$.

Câu 29: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 3})(y + \sqrt{y^2 + 3}) = 3 \\ x\sqrt{3x - 2xy + 1} = 4xy + 3x + 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện : $3x - 2xy + 1 \geq 0$.

Vì $\sqrt{y^2 + 3} - y > |y| - y \geq 0 \Rightarrow \sqrt{y^2 + 3} - y > 0$.

Do đó phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình sau :

$$\sqrt{x^2 + 3} + 3 = \sqrt{y^2 + 3} - y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3} + 3 = (-y) + \sqrt{(-y)^2 + 3} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2 + 3} + t, \forall t \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 3}} + 1 = \frac{\sqrt{t^2 + 3} + t}{\sqrt{t^2 + 3}} \geq \frac{|t| + t}{\sqrt{t^2 + 3}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(t)$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$. Do đó từ (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(-y) \Leftrightarrow y = -x$.

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta có được phương trình :

$$x\sqrt{2x^2 + 3x + 1} = -4x^2 + 3x + 1 \quad (*).$$

Nhận xét với $x = 0$ không thỏa phương trình (*)

- Trường hợp 1: $x > 0$ thì phương trình (*) trở thành phương trình :

$$\sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = -4 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow 2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - 2\sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2 \right) \left(\sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 3 \right) \Leftrightarrow \sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = 3 \text{ vì } \sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 9 \Leftrightarrow 7x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{37}}{14} \\ x = \frac{3 - \sqrt{37}}{14} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{37}}{14} \Rightarrow y = \frac{-3 - \sqrt{37}}{14}.$$

- Trường hợp 2: $x < 0$ thì phương trình (*) trở thành phương trình:

$$\begin{aligned}
 & -\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} = -4+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow 2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2} + \sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} - 6 = 0 \\
 & \Leftrightarrow \left(\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} - 2\right) \left(\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} = 2 \text{ vì } \sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} + 3 > 0 \\
 & \Leftrightarrow 2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2} = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{3-\sqrt{17}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{17}}{4} \Rightarrow y = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}.
 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là

$$(x, y) = \left\{ \left(\frac{3+\sqrt{37}}{14}; \frac{-3-\sqrt{37}}{14} \right); \left(\frac{3-\sqrt{17}}{4}; \frac{-3+\sqrt{17}}{4} \right) \right\}.$$

Câu 30: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x + (x + \sqrt{x^2 + 3})(y + \sqrt{y^2 + 3})y = 0 \\ (2\sqrt{x+3} + \sqrt{2-y})^2 (4 - 3\sqrt{3-y}) = \sqrt{2x+y+3} + \sqrt{x+2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện : $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \leq 2 \\ 2x + y + 3 \geq 0 \end{cases}.$

Vì $\sqrt{x^2 + 3} - x > |x| - x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3} - x > 0$. Nên ta biến đổi phương trình thứ nhất trong hệ thành:

$$\begin{aligned}
 & 3x(\sqrt{x^2 + 3} - x) + (x + \sqrt{x^2 + 3})(\sqrt{x^2 + 3} - x)(y + \sqrt{y^2 + 3})y = 0 \\
 & \Leftrightarrow 3x(\sqrt{x^2 + 3} - x) + 3(y + \sqrt{y^2 + 3})y = 0 \Leftrightarrow x^2 - x\sqrt{x^2 + 3} = y^2 + y\sqrt{y^2 + 3} \\
 & \Leftrightarrow (-x)^2 + (-x)\sqrt{(-x)^2 + 3} = y^2 + y\sqrt{y^2 + 3} \quad (*)
 \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t\sqrt{t^2 + 3}, \forall t \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(t) = 2t + \sqrt{t^2 + 3} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 3}} \stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} 2t + 2|t| > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn tăng trên $\mathbb{R}$. Do đó từ $(*) \Leftrightarrow f(-x) = f(y) \Leftrightarrow y = -x$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$(2\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2})^2 (4 - 3\sqrt{x+3}) = \sqrt{x+3} + \sqrt{x+2} \quad (1)$$

Đặt $t = \sqrt{x+2}, t \geq 0$. Ta có : $x = t^2 - 2$. Lúc đó (1) trở thành phương trình :

$$\begin{aligned}
 & (2\sqrt{t^2 + 1} + t)^2 (4 - 3\sqrt{t^2 + 1}) = \sqrt{t^2 + 1} + t \\
 & \Leftrightarrow 3(2\sqrt{t^2 + 1} + t)\sqrt{t^2 + 1} + 4(\sqrt{t^2 + 1} + 1) = 4(2\sqrt{t^2 + 1} + 1)
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (15t^2 - 16t + 16)\sqrt{t^2 + 1} = -12t^3 + 20t^2 - 16t + 16 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 1} = \frac{-12t^3 + 20t^2 - 16t + 16}{15t^2 - 16t + 16} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1} + 1} = \frac{t^2(5 - 12t)}{15t^2 - 16t + 16} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1} + 1} = \frac{5 - 12t}{15t^2 - 16t + 16} \end{cases}$$

Với $t = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x + 2} = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = 2$ (thỏa mãn).

Với $\frac{1}{\sqrt{t^2 + 1} + 1} = \frac{5 - 12t}{15t^2 - 16t + 16}$ (2).

• Trường hợp 1 : $t \geq \frac{5}{12}$ ta có : $\begin{cases} \frac{5 - 12t}{15t^2 - 16t + 16} \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1} + 1} > 0 \end{cases}$. Do đó (2) vô nghiệm.

• Trường hợp 2 : $0 \leq t < \frac{5}{12}$ ta có (2) $\Leftrightarrow 15t^2 - 16t + 16 = (5 - 12t)\sqrt{t^2 + 1} + 5 - 12t$

$$\Leftrightarrow 15t^2 - 4t + 11 = (5 - 12t)\sqrt{t^2 + 1} \Leftrightarrow (15t^2 - 4t + 11)^2 = (5 - 12t)^2(t^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 81t^4 + 177t^2 + 32t + 96 = 0 \text{ (vô lí vì } 81t^4 + 177t^2 + 32t + 96 > 0, \forall t \in [0; \frac{5}{12}])$$

Vậy với $t \geq 0$ ta có (2) vô nghiệm.

Do đó hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x, y) = (-2; 2)$.

Câu 31: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt[3]{y + 4} \cdot \sqrt[4]{y^2 + 7y + 10} = \sqrt{x + 1} \cdot \sqrt[3]{x^2 + 2x + 3} \cdot \sqrt[4]{x^2 + 2x + 4} \\ 3(3x + 2) = \sqrt{y + 2x + 5} (3\sqrt{x^2 + 5} - x^2) + 2\sqrt[3]{y - 2x + 5} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} x \geq -1 \\ y^2 + 7y + 10 \geq 0 \\ y + 2x + 5 \geq 0 \\ y + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ y \leq -5 \vee y \geq -2 \\ y + 2x + 5 \geq 0 \\ y \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq -2 \end{cases}$$

Phương trình thứ nhất trong hệ được viết lại thành phương trình :

$$\sqrt[3]{y + 2} \cdot \sqrt[4]{(y + 2)(y + 5)} = \sqrt{x + 1} \cdot \sqrt[3]{(x + 1)^2 + 2} \cdot \sqrt[4]{(x + 1)^2 + 3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y + 2 + 2} \cdot \sqrt[4]{y + 2 + 3} \cdot \sqrt[4]{y + 2} = \sqrt{x + 1} \cdot \sqrt[3]{(x + 1)^2 + 2} \cdot \sqrt[4]{(x + 2)^2 + 3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{y + 2}} \cdot \sqrt[3]{(\sqrt{y + 2})^2 + 2} \cdot \sqrt[4]{(\sqrt{y + 2})^2 + 3} = \sqrt{x + 1} \cdot \sqrt[3]{(x + 1)^2 + 2} \cdot \sqrt[4]{(x + 1)^2 + 3} (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t \cdot \sqrt[3]{t^4 + 2} \cdot \sqrt[4]{t^4 + 3}, \forall t \geq 0$.

$$\text{Ta có } f'(t) = \sqrt[3]{t^4 + 2} \cdot \sqrt[4]{t^4 + 3} + \frac{4t^4 \cdot \sqrt[4]{t^4 + 3}}{3\sqrt[3]{(t^4 + 3)^2}} + \frac{t^4 \cdot \sqrt[3]{t^4 + 2}}{\sqrt[4]{(t^4 + 3)^2}} > 0, \forall t \geq 0.$$

Do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Do đó từ } (*) \Leftrightarrow f(\sqrt[4]{y+2}) = f(\sqrt{x+1}) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt[4]{y+2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = y + 2 \Leftrightarrow y = x^2 + 2x - 1.$$

Thế vào phương trình thứ hai ta thu được phương trình sau :

$$3(3x+2) = \sqrt{x^2+4x+4} \left(3\sqrt{x^2+5} - x^2 \right) + 2\sqrt[3]{x^2+4}$$

$$\Leftrightarrow 3(3x+2) = (x+2) \left(3\sqrt{x^2+5} - x^2 \right) + 2\sqrt[3]{x^2+4}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 9x + 6 - 3(x+2)\sqrt{x^2+5} - 2\sqrt[3]{x^2+4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\sqrt{x^2+5} \left(\sqrt{x^2+5} - 3 \right) + \left(x+2 - 2\sqrt[3]{x^2+4} \right) + 3(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\sqrt{x^2+5} \left(\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3} \right) + \frac{(x+2)^3 - 8(x^2+4)}{(x+2)^2 + (x+2)\sqrt[3]{x^2+5} + \sqrt[3]{(x^2+5)^2}} + 3(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)\sqrt{x^2+5} \left(\frac{(x-2)(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3} \right) + \frac{(x-2)(x^2+12)}{(x+2)^2 + (x+2)\sqrt[3]{x^2+4} + \sqrt[3]{(x^2+4)^2}} + 3(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \underbrace{\left(\frac{(x+2)^2 \sqrt{x^2+5}}{\sqrt{x^2+5}+3} + \frac{x^2+12}{(x+2)^2 + (x+2)\sqrt[3]{x^2+4} + \sqrt[3]{(x^2+4)^2}} + 3 \right)}_T = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 7 \text{ vì } T > 0, \forall x \geq -1.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (2; 7)$

Câu 32: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (4x^2+1)x + (y-3)\sqrt{5-2y} = 0 \\ 4x^2 + y^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} 5-2y \geq 0 \\ 3-4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{5}{2} \\ x \leq \frac{3}{4} \end{cases}.$$

Đặt $a = \sqrt{5-2y}, a \geq 0$. Ta có : $y = \frac{5-a^2}{2}$. Khi đó phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành:

$$(4x^2+1)x + \left(\frac{5-a^2}{2} - 3 \right) a = 0 \Leftrightarrow 8x^3 + 2x = a^3 + a \Leftrightarrow (2x)^3 + 2x = a^3 + a \quad (1).$$

Do $a \geq 0$ nên từ (1) $\Rightarrow x \geq 0$. Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, \forall t \geq 0$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \geq 0$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn tăng trên $[0; +\infty)$.

$$\text{Do đó từ (1)} \Leftrightarrow f(2x) = f(a) \Leftrightarrow 2x = a \Leftrightarrow 2x = \sqrt{5-2y} \Leftrightarrow x = \frac{5-4x^2}{2}.$$

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :

$$4x^2 + \left(\frac{5-4x^2}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3-4x} = 7 \quad (2)$$

$$\text{Từ điều kiện } \begin{cases} x \leq \frac{3}{4} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{3}{4}. \text{ Do đó ta giải (2) với mọi } x \in \left[0; \frac{3}{4}\right].$$

$$\text{Ta có : (2)} \Leftrightarrow 16x^4 - 24x^2 + 5 + 8(\sqrt{3-4x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 - 1)(4x^2 - 5) - 16 \frac{2x-1}{\sqrt{3-4x}+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1) \underbrace{\left((2x+1)(4x^2-5) - \frac{16}{\sqrt{3-4x}+1} \right)}_K = 0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2.$$

$$\text{Vì } \forall x \in \left[0; \frac{3}{4}\right] \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 > 0 \\ -5 \leq 4x^2-5 \leq -\frac{11}{4} \end{cases} \Rightarrow (2x+1)(4x^2-5) < 0 \Rightarrow K < 0.$$

$$\text{Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là } (x, y) = \left(\frac{1}{2}; 2\right).$$

Câu 33: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Phương trình thứ hai trong hệ được viết lại thành phương trình :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x - \frac{1}{2} \leq 1 \\ -1 \leq y + \frac{1}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (*).$$

Phương trình thứ nhất trong hệ được viết lại thành phương trình :

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 12(x-1) &= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 12(y-1) \\ \Leftrightarrow (x-1)^3 - 12(x-1) &= (y+1)^3 - 12(y+1) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Do (*) nên ta có : } \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x-1 \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq y+1 \leq \frac{3}{2} \end{cases}. \text{ Xét hàm số } f(t) = t^3 - 12t, \forall t \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right].$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 3t^2 - 12 = 3(t^2 - 4) < 0, \forall t \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right].$$

$$\text{Vậy hàm số } f(t) \text{ luôn giảm trên } \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right].$$

Do đó từ (1) $\Leftrightarrow f(x-1) = f(y+1) \Leftrightarrow x-1 = y+1 \Leftrightarrow y = x-2$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$x^2 + (x-2)^2 - x + x - 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \\ x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \left\{ \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2} \right); \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right) \right\}$.

Câu 34: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y - 4 = 2\sqrt{x^2 - 2x - 1} & (1) \\ 4(y-2)^3 + 4x^3 + y - 58 = \sqrt[3]{14 - x^3} & (2) \end{cases}$$

Giải

Ta giải phương trình (2), $4(y-2)^3 + (y-2) = 4(14-x^3) + \sqrt[3]{14-x^3}$

Đặt $f(t) = 4t^3 + t \Rightarrow f'(t) = 12t^2 + 1 > 0$

Vậy $y-2 = \sqrt[3]{14-x^3}$. Với $y-2 = \sqrt[3]{14-x^3}$ thay vào phương trình (1) ta được

$$x-2 + \sqrt[3]{14-x^3} = 2\sqrt{x^2-2x-1} \Rightarrow \sqrt[3]{14-x^3} - (2-x) = 2\sqrt{x^2-2x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{-6(x^2-2x-1)}{(\sqrt[3]{14-x^3})^2 + (2-x)\sqrt[3]{14-x^3} + (2-x)^2} = 2\sqrt{x^2-2x-1}$$

Vậy $x^2-2x-1=0$ hay $\frac{-6\sqrt{x^2-2x-1}}{(\sqrt[3]{14-x^3})^2 + (2-x)\sqrt[3]{14-x^3} + (2-x)^2} = 2$ (ptvn do VT ≤ 0).

Đặt $t = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{x+6}} \Rightarrow t^3 = 6 + \sqrt[3]{6+x} \Rightarrow (t^3-6)^3 = 6+x(*) \Rightarrow x^3-t=6$, thay vào phương

trình (*) ta được $(t^3-x^3+t)^3 = x+x^3-t \Rightarrow (t^3-x^3+t)^3 - x^3 = x-t$

$$\Rightarrow (t^3-x^3+t-x) \left[(t^3-x^3+t)^2 + (t^3-x^3+t)x + x^2 \right] = x-t$$

$$\text{Đặt } A = (t^3-x^3+t)^2 + (t^3-x^3+t)x + x^2 \Rightarrow -A(x^3-t^3) - A(x-t) = x-t$$

$$\Rightarrow -A(x-t)(x^2+xt+t^2) - A(x-t) = x-t$$

Vậy $x-t=0$ hay $-A(x^2+xt+t^2) - A = 1$ (phương trình vô nghiệm do VT ≤ 0)

$$\text{Với } x-t=0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{x+6}} \Rightarrow x^3-6 = \sqrt[3]{x+6}.$$

Đặt $a = \sqrt[3]{x+6} \Rightarrow a^3 - x = 6$

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - a = 6 \\ a^3 - x = 6 \end{cases} \Rightarrow x^3 - a = a^3 - x \Rightarrow x^3 + x = a^3 + a.$

Xét $f(t) = t^3 + t, f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$

Khi đó $x = a \Rightarrow x = \sqrt[3]{x+6} \Rightarrow x^3 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2.$

Câu 35: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x+1} - \sqrt{2y+1} = x - y \\ x^2 - 12xy + 9y^2 + 4 = 0 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Điều kiện : $\begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ y \geq -\frac{1}{2} \end{cases}.$

Từ phương trình thứ hai trong hệ ta có: $x^2 + 9y^2 + 4 = 12xy \Rightarrow xy > 0.$

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành :

$$\sqrt{2x+1} - x = \sqrt{2y+1} - y \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{2t+1} - t, \forall t \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right).$ Ta có $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2t+1}} - 1.$

Lại có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2t+1}} - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 0.$

Từ đây ta suy ra hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ và nghịch biến trên $(0; +\infty).$

- Trường hợp 1: $x, y \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right)$ thì hàm số $f(t)$ đồng biến nên từ

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình : $2x^2 - 4 = 0$ (vô nghiệm vì $2x^2 - 4 < 0$).

- Trường hợp 2 : $x, y \in (0; +\infty)$ thì hàm số $f(t)$ nghịch biến nên từ $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Thế vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :

$$2x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ vì } x > 0.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (\sqrt{2}; \sqrt{2}).$

Câu 36: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}) = (x-y)\sqrt{x^2+1} \\ 2x(x-y) + 2(x+y) = 2 - y^2 \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Nhận xét do hệ không thể có nghiệm dạng $(x, y) = (0; 0).$

Từ phương trình thứ hai trong hệ ta có biến đổi sau :

$$2x^2 - 2(x-1)(y-1) + y^2 = 0 \text{ (a)}.$$

$$\text{Vì } x^2 > 0, y^2 > 0 \text{ nên từ (a)} \Rightarrow (x-1)(y-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ y < 1 \end{cases}.$$

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{y+1}{\sqrt{y^2+1}} \text{ (b)}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{t+1}{\sqrt{t^2+1}}, \forall t \in \mathbb{R}. \text{ Ta có } f'(t) = \frac{1-t}{\sqrt{(t^2+1)^3}}.$$

Trường hợp 1 : Nếu $t > 1$ thì $1-t < 0 \Rightarrow f'(t) < 0$. Do đó hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Nên từ (b) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình : $x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{6}$ (loại).

Trường hợp 2 : Nếu $t < 1$ thì $1-t > 0 \Rightarrow f'(t) > 0$. Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$.

Nên từ (b) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta có phương trình :

$$x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm 2\sqrt{6} \text{ (nhận)}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x, y) = \left\{ (-2 + \sqrt{6}; -2 + \sqrt{6}); (-2 - \sqrt{6}; -2 - \sqrt{6}) \right\}$.

Câu 37: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x + \sqrt{2x+1})\sqrt{y+3} = y + 3 + 2\sqrt{2x+1} & (1) \\ \sqrt{x-y} + \sqrt{x-1} + x = y + \sqrt{y} + 2 & (2) \end{cases}$$

Giải

Phương trình (2) trở thành $\sqrt{x-y} - 1 + \sqrt{x-1} - \sqrt{y} + x - y - 1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{x-y-1}{\sqrt{x-y}+1} + \frac{x-y-1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y}} + x-y-1 = 0$$

Vậy $x-y-1=0$ hay $\frac{1}{\sqrt{x-y}+1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y}} + 1 = 0$ (phương trình vô nghiệm do VT ≥ 1)

Với $x-x-1=0 \Rightarrow y=x-1$ thay vào phương trình (1)

$$\Rightarrow (x + \sqrt{2x+1})\sqrt{x+2} = x + 2 + 2\sqrt{2x+1}$$

Đặt $f(x) = x\sqrt{x+2} + \sqrt{(2x+1)(x+2)} - x - 2\sqrt{2x+1} - 2$ (điều kiện $x \geq 1$)

$$g(x) = x\sqrt{x+2}, \quad g'(x) = \sqrt{x+2} + \frac{x}{2\sqrt{x+2}}.$$

$$h(x) = \sqrt{(2x+1)(x+2)}, \quad h'(x) = \frac{4x+5}{2\sqrt{(2x+1)(x+2)}}$$

$$t(x) = \sqrt{2x+1}, \quad t'(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}}.$$

$$\text{Vậy } f'(x) = \sqrt{x+2} + \frac{x}{2\sqrt{x+2}} + \frac{4x+5}{2\sqrt{(2x+1)(x+2)}} + \frac{2}{\sqrt{2x+1}} - 1$$

$$\text{Để thấy } x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x+2} - 1 \geq 0.$$

$$\Rightarrow f'(x) = (\sqrt{x+2} - 1) + \frac{x}{2\sqrt{x+2}} + \frac{4x+5}{2\sqrt{(2x+1)(x+2)}} + \frac{2}{\sqrt{2x+1}} \text{ với } x \geq 1.$$

Do đó hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $[1; +\infty)$ mà $f(2) = 0$ nên phương trình có đúng một nghiệm duy nhất. vậy $x = 2$.

Câu 38: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 3x = (y-2)(y+1) \\ (x+y)\sqrt{x^2 - 4x + 5} + (x-2)\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 1} = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi thành phương trình :

$$\begin{aligned} (x+y)\sqrt{(2-x)^2 + 1} + (x-2)\sqrt{(x+y)^2 + 1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+y)\sqrt{(2-x)^2 + 1} - (2-x)\sqrt{(x+y)^2 + 1} &= 0 \quad (1). \end{aligned}$$

Xét $2-x=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=-2$. Thử lại không thấy thỏa hệ.

Xét $x+y=0 \Leftrightarrow x=-y$ ta có hệ: $\begin{cases} y^2 + 3y = y^2 - y - 2 \\ 2+y=0 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Vậy ta có $(x+y)(2-x) \neq 0$.

$$\text{Do đó từ (1) ta có: } \frac{\sqrt{(x+y)^2 + 1}}{x+y} = \frac{\sqrt{(2-x)^2 + 1}}{2-x} \quad (2).$$

Từ (2) $\Rightarrow (x+y)(2-x) > 0$. Xét hàm số $f(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t}, \forall t \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = -\frac{1}{t^2\sqrt{t^2 + 1}} < 0, \forall t \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Vậy hàm số $f(t)$ luôn nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$, mặt khác

$(x+y)(2-x) > 0$ nên từ (2) ta có $f(x+y) = f(2-x) \Leftrightarrow x+y = 2-x \Leftrightarrow y = 2-2x$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta được phương trình :

$$x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=2 \\ x=1 \Rightarrow y=0 \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là: $(x, y) = \{(0; 2); (1; 0)\}$.

Câu 39: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3(\sqrt{x^2+y^2}+y)=y^2(\sqrt{x^2+1}+x) & (1) \\ \sqrt[3]{(x-1)^2}-2\sqrt[3]{x-1}-(\sqrt{y}-5)\sqrt{x-8}-3\sqrt{y}+31=0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Phương trình (1): $x^3\sqrt{x^2+y^2}+x^3y=y^2\sqrt{x^2+1}+xy^2$ (điều kiện $x \geq 8$ và $y \geq 0$)

$$\Rightarrow \sqrt{x^8+x^6y^2}-\sqrt{y^4x^2+y^4}+x^3y-xy^2=0$$

$$\Rightarrow \frac{x^8-y^4+x^6y^2-y^4x^2}{\sqrt{x^8+x^6y^2}+\sqrt{y^4x^2+y^4}}+xy(x^2-y)=0$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2-y)(x^2+y)(x^4+y^2)}{\sqrt{x^8+x^6y^2}+\sqrt{y^4x^2+y^4}}+xy(x^2-y)=0$$

Vậy $x^2=y$ hoặc $\frac{(x^2+y)(x^4+y^2)}{\sqrt{x^8+x^6y^2}+\sqrt{y^4x^2+y^4}}+xy=0$ (vô nghiệm do $x, y > 0$ nên VT > 0).

Do đó, với $x^2=y$ thế vào phương trình (2) ta có

$$\sqrt[3]{(x-1)^2}-2\sqrt[3]{x-1}-(x-5)\sqrt{x-8}-3x+31=0$$

$$\text{Đặt } f(x)=(x-1)^{\frac{2}{3}}-2(x-1)^{\frac{1}{3}}-(x-5)\sqrt{x-8}-3x+31$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}-\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}-\left(\sqrt{x-8}+\frac{x-5}{2\sqrt{x-8}}\right)-3$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}-\frac{2}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}-\sqrt{x-8}-\frac{x-5}{2\sqrt{x-8}}-3$$

$$\text{Dễ thấy } -\frac{2}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}-\frac{2}{3}<0 \text{ (với mọi } x>8)$$

$$\Rightarrow f'(x)=-\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}+\frac{2}{3}\right)-\sqrt{x-8}-\frac{x-5}{2\sqrt{x-8}}-\frac{7}{3}<0 \text{ (với mọi } x>8)$$

Vậy $f'(x)$ nghịch biến trên khoảng $(8;+\infty)$

Vậy phương trình này có nhiều nhất 1 nghiệm mà $f(9)=0$ suy ra $x=9$.

Câu 40: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (5-2x)\sqrt{x+2y}=(6-x-2y)\sqrt{x-1} \\ (x^3-2y-3)\left(x+\sqrt{8x(3-x)+4y^2+5}\right)=21 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện $y \geq 0$.

Hệ phương trình đã cho được biến đổi thành hệ :

$$\begin{cases} (2x^2+1-\sqrt{y})\sqrt{2x^2+1}=3\sqrt{y}(\sqrt{y}-1) \\ y^2-y=(2x^2+1)-\sqrt{2x^2+1} \end{cases} \quad (I)$$

Ta có $y^2 - y = \sqrt{2x^2 + 1}(\sqrt{2x^2 + 1} - 1) \geq 0 \Rightarrow y^2 - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 0 \vee y \geq 1$.

Kết hợp với điều kiện $y \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$.

Với $y = 0$ không thỏa hệ.

Đặt $a = \sqrt{2x^2 + 1}, a \geq 1$. Khi đó hệ (I) trở thành: $\begin{cases} (a^2 - \sqrt{y})a = 3\sqrt{y}(\sqrt{y} - 1) \\ y^2 - y = a^2 - a \end{cases}$.

Xét phương trình: $y^2 - y = a^2 - a$ (1).

Xét hàm số $f(t) = t^3 - t, \forall t \geq 1$. Ta có $f'(t) = 3t^2 - 1 > 0, \forall t \geq 1$ nên hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $[1; +\infty)$. Do đó từ (1) $\Leftrightarrow f(y) = f(a) \Leftrightarrow y = a$. Thế vào Phương trình thứ hai trong hệ (I) ta có:

$$(a^2 - \sqrt{a})a = 3\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1) \Leftrightarrow a^3 - 3a = (\sqrt{a})^3 - 3\sqrt{a} \quad (2).$$

Xét hàm số $f(u) = u^3 - 3u, \forall u \geq 1$. Ta có $f'(u) = 3u^2 - 3 \geq 0, \forall u \geq 1$. Vậy hàm số $f(u)$ luôn tăng trên $[1; +\infty)$.

Do đó từ (2) $\Leftrightarrow f(a) = f(\sqrt{a}) \Leftrightarrow a = \sqrt{a} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow y = 0(1) \\ a = 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$.

Vậy ta có: $\begin{cases} a = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 + 1} = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (0; 1)$.

PHẦN III. BẤT ĐẲNG THỨC ĐÁNH GIÁ PHƯƠNG TRÌNH - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Phương trình – hệ phương trình – bất đẳng thức là 3 lĩnh vực có mối quan hệ chặt chẽ với nhau. Đây cũng chính là những phần quan trọng nhất của chương trình toán THPT và rất được nhiều học sinh đam mê toán yêu thích. Không những thế vấn đề này còn thường xuyên xuất hiện trong kì thi THPT Quốc gia hay các kì thi học sinh giỏi cấp tỉnh hay thậm chí VMO. Các bài toán phương trình không chính tắc thường được thiết kế và sáng tạo dưới ý tưởng của một bất đẳng thức nào đó đồng thời cũng là sự phối hợp của nhiều luồng kiến thức khác nhau yêu cầu người làm toán phải có một tư duy linh hoạt, sự tìm tòi củng cố kiến thức, liên hệ kiến thức đồng thời tập cho chúng ta nghiên cứu để có thể khám phá vẻ đẹp cũng như sử dụng thành thạo phương pháp này.

CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN CẦN NHỚ.

Bất đẳng thức Cauchy – AM – GM.

Cho n số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ khi đó ta có $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$

Bất đẳng thức AM – GM dạng cộng mẫu số cho n số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n a_i}$

Dấu “=” xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Bất đẳng thức Bunhiacopxki – Cauchy – Schwarz.

Cho 2 bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Khi đó ta có: $\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$

Ngoài ra cần phải chú ý đến bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng cộng mẫu Engel:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n b_i}$$

Bất đẳng thức trên còn có thể gọi là bất đẳng thức Svachơ.

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$. Riêng dạng cộng mẫu thì cần thêm điều kiện là

$$b_1, b_2, \dots, b_n > 0$$

Bất đẳng thức Minkowski.

Tổng quát: Cho mọi số thực $r \geq 1$ và mọi số dương $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ thì ta có:

$$\left[\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^r\right]^{\frac{1}{r}} \leq \left[\sum_{i=1}^n a_i^r\right]^{\frac{1}{r}} + \left[\sum_{i=1}^n b_i^r\right]^{\frac{1}{r}}$$

Ở đây chỉ xét trường hợp cho 2 bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Khi đó ta có:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Bất đẳng thức Holder.

Cho các số dương $x_{i,j}$ ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$).

Khi đó với mọi số $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \geq 0$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ ta có: $\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m x_{i,j} \right)^{\omega_j} \geq \sum_{j=1}^m \left(\prod_{i=1}^n x_{i,j}^{\omega_j} \right)$

Ở đây ta chỉ xét trường hợp đơn giản nhất cho 3 dãy số gồm $(a, b, c); (m, n, p); (x, y, z)$. Ta có:

$$(a^3 + b^3 + c^3)(x^3 + y^3 + z^3)(m^3 + n^3 + p^3) \geq (axm + byn + czp)^3$$

Dấu "=" xảy ra khi 3 dãy tương ứng tỷ lệ.

I. CÁC BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH.

A. ĐÁNH GIÁ MIỀN NGHIỆM.

Câu 1: Giải phương trình $\sqrt[5]{x-1} + \sqrt[3]{x+8} = x^3 + 1$.

Giải

Nhận xét $x = 0$ thỏa phương trình đã cho.

Với $x > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[5]{x-1} + \sqrt[3]{x+8} > -1 + 2 = 1 \\ -x^3 + 1 < 1 \end{cases}$ nên phương trình vô nghiệm.

Với $x < 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[5]{x-1} + \sqrt[3]{x+8} < -1 + 2 = 1 \\ -x^3 + 1 > 1 \end{cases}$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 2: Giải phương trình $3 + \sqrt[4]{7x+15} = x + \sqrt{2x}$.

Giải

Phân tích :

Do $x = 3$, là một nghiệm của phương trình. Nên khi đó: $\begin{cases} 3 = x \\ \sqrt[4]{7x+15} = \sqrt{2x} \end{cases}$

Ta viết lại phương trình thành $(x-3) + (\sqrt[4]{7x+15} - \sqrt{2x}) = 0 (*)$

Ta tìm nghiệm chung của các hệ bất phương trình:

$$\bullet \begin{cases} 3-x > 0 \\ \sqrt[4]{7x+15} - \sqrt{2x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ (x-3)(4x+5) < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 3$$

$$\bullet \begin{cases} 3-x < 0 \\ \sqrt[4]{7x+15} - \sqrt{2x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ (x-3)(4x+5) > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$$

+ Nếu $0 \leq x < 3$ thì $(3-x) + (\sqrt[4]{7x+15} - \sqrt{2x}) > 0$ hay (*) vô nghiệm.

+ Nếu $x > 3$ thì $(3-x) + (\sqrt[4]{7x+15} - \sqrt{2x}) < 0$ hay (*) vô nghiệm.

Hay phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Lời giải

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với: $(x-3) + (\sqrt[4]{7x+15} - \sqrt{2x}) = 0$ (*)

Nhận thấy $x = 3$ là nghiệm của phương trình (*).

Xét các hệ bất phương trình:

$$\bullet \begin{cases} 3-x > 0 \\ \sqrt[4]{7x+15} - \sqrt{2x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ (x-3)(4x+5) < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 3$$

$$\bullet \begin{cases} 3-x < 0 \\ \sqrt[4]{7x+15} - \sqrt{2x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ (x-3)(4x+5) > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$$

Suy ra:

+ Nếu $0 \leq x < 3$ thì $(3-x) + (\sqrt[4]{7x+15} - \sqrt{2x}) > 0$ hay (*) không có nghiệm $x \in [0; 3)$.

+ Nếu $x > 3$ thì $(3-x) + (\sqrt[4]{7x+15} - \sqrt{2x}) < 0$ hay (*) không có nghiệm $x \in (3; +\infty)$

Vậy PT có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

Câu 3: Giải phương trình $\sqrt[4]{7x^2+11x+6} - \sqrt{3x} = x-6$.

Giải

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với: $(\sqrt[4]{7x^2+11x+6} - \sqrt{3x}) + (6-x) = 0$

Nhận thấy $x = 6$ là nghiệm của phương trình (*).

Xét các hệ bất phương trình:

$$\bullet \begin{cases} 6-x > 0 \\ \sqrt[4]{7x^2+11x+6} - \sqrt{3x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 6 \\ (x-6)(2x+1) < 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 6$$

$$\bullet \begin{cases} 6-x < 0 \\ \sqrt[4]{7x^2+11x+6} - \sqrt{3x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6 \\ (x-6)(2x+1) > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 6$$

Suy ra:

+ Nếu $0 \leq x < 6$ thì $\left(\sqrt[4]{7x^2+11x+6}-\sqrt{3x}\right)+(6-x) > 0$ hay (*) không có nghiệm $x \in [0;6)$

+ Nếu $x > 6$ thì $\left(\sqrt[4]{7x^2+11x+6}-\sqrt{3x}\right)+(6-x) < 0$ hay (*) không có nghiệm $x \in (6;+\infty)$

Vậy PT có nghiệm duy nhất $x = 6$.

Câu 4: Giải phương trình $(x-1)^2 + \sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{(2x+1)^3} = 3$ (*)

Giải

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$.

Nhận thấy $x = 0$ là nghiệm của phương trình (*).

Xét các hệ bất phương trình:

$$\bullet \quad \begin{cases} \sqrt{(x+1)^3} > (x+1) \\ \sqrt{(2x+1)^3} > (2x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(\sqrt{x+1}-1) > 0 \\ (2x+1)(\sqrt{2x+1}-1) > 0 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)x}{\sqrt{x+1}+1} > 0 \\ \frac{(2x+1)x}{\sqrt{2x+1}+1} > 0 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

$$\bullet \quad \begin{cases} \sqrt{(x+1)^3} < (x+1) \\ \sqrt{(2x+1)^3} < (2x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(\sqrt{x+1}-1) < 0 \\ (2x+1)(\sqrt{2x+1}-1) < 0 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)x}{\sqrt{x+1}+1} < 0 \\ \frac{(2x+1)x}{\sqrt{2x+1}+1} < 0 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x < 0$$

Suy ra:

+ Nếu $x > 0$, ta có:

$$VT (*) = (x-1)^2 + \sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{(2x+1)^3} > (x-1)^2 + (x+1) + (2x+1)$$

$$= x^2 + x + 3 > 3 = VP (*) \text{ hay } (*) \text{ không có nghiệm } x \in (0;+\infty)$$

+ Nếu $-\frac{1}{2} \leq x < 0$, ta có:

$$VT (*) = (x-1)^2 + \sqrt{(x+1)^3} + \sqrt{(2x+1)^3} < (x-1)^2 + (x+1) + (2x+1)$$

$$= 3 + x(x+1) < 3 = VP (*) \text{ hay } (*) \text{ không có nghiệm } x \in (0;+\infty)$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 5: Giải phương trình $2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt{4x-4} = 0$

Giải

Phân tích.:

Ta nhận định phương trình đã có nghiệm duy nhất $x = 3$ (có thể sử dụng sự hỗ trợ từ máy tính bỏ túi), từ đó chúng ta nảy sinh ý tưởng đánh giá xoay quanh giá trị $x = 3$.

Lại có: $2x^2 - 11x + 21 - 3\sqrt[3]{4x-4} = 2(x-3)^2 + (x+3-3\sqrt[3]{4x-4})$ và nếu chúng ta chứng minh được rằng: $(x+3-3\sqrt[3]{4x-4}) \geq 0$ bài toán sẽ được giải quyết, mà:

$(x+3-3\sqrt[3]{4x-4}) \geq 0 \Leftrightarrow x+3 \geq 3\sqrt[3]{4x-4} \Leftrightarrow (x-3)^2(x+15) \geq 0$ (*), lúc này (*) chỉ đúng với $x \geq -15$.

Từ đó ý tưởng xử lý vấn đề này là sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình để làm 'hẹp' khoảng có nghiệm.

Thật vậy: PT $\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{4x-4} = 2x^2 - 11x + 21 > 0 \Rightarrow 3\sqrt[3]{4x-4} > 0 \Rightarrow x > 1$.

Và $\forall x > 1$ thì (*) hiển nhiên đúng.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với: $2(x-3)^2 + (x+3-3\sqrt[3]{4x-4}) = 0$

Từ phương trình ban đầu ta có $3\sqrt[3]{4x-4} = 2x^2 - 11x + 21 > 0 \Rightarrow 3\sqrt[3]{4x-4} > 0 \Rightarrow x > 1$.

Mà: $(x+3-3\sqrt[3]{4x-4}) \geq 0 \Leftrightarrow x+3 \geq 3\sqrt[3]{4x-4} \Leftrightarrow (x-3)^2(x+15) \geq 0$ luôn đúng $\forall x > 1$

Từ đó: $2(x-3)^2 + (x+3-3\sqrt[3]{4x-4}) \geq 0$, dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x = 3$.

Hay phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Chú ý: Trong một số bài toán việc sử dụng điều kiện có nghĩa là chưa đủ để chúng ta sử dụng đánh giá trong phương trình, từ đó ta nghĩ đến phương án tìm điều kiện có nghiệm của phương trình đó.

Bổ đề: Xét phương trình: $f(x) = g(x)$, $x \in D$ (*).

Nếu $f(x) \geq m$, $\forall x \in D$, thì để phương trình (*) có nghiệm ta cần phải có $g(x) \geq m$.

Nếu $f(x) \leq M$, $\forall x \in D$, thì để phương trình (*) có nghiệm ta cần phải có $g(x) \leq M$.

Câu 6: Giải phương trình $\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{1-3x}$.

Giải

Phân tích: Bài toán nhìn có dáng dấp của hàm số, tuy nhiên phương pháp sử dụng hàm số với bài toán này là không đơn giản. Ta có thể liên tưởng đến việc sử dụng đánh giá để thay thế.

Xét các bất phương trình:

$$\sqrt{1+2x} \geq \sqrt[3]{1+3x} \Leftrightarrow (1+2x)^3 \geq (1+3x)^2 \Leftrightarrow x^2(3+8x) \geq 0$$

$$\sqrt{1-2x} \geq \sqrt[3]{1-3x} \Leftrightarrow (1-2x)^3 \geq (1-3x)^2 \Leftrightarrow x^2(3-8x) \geq 0$$

Với điều kiện xác định $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ không làm các bất phương trình trên nghiệm đúng, từ

đó ta nảy sinh ý tưởng làm hẹp khoảng đánh giá này bằng cách sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình. Thật vậy:

Đặt $\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{1-3x} = u$, ta có

$$u^2 = 2 + 2\sqrt{1-4x^2} \geq 2 \Rightarrow u \geq \sqrt{2}$$

$$u = \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{1-3x} \quad (u \geq \sqrt{2}) \Rightarrow u^3 = 2 + 3u\sqrt[3]{1-9x^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{1-9x^2} = \frac{u^3 - 2}{3u} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

Rõ ràng $\forall x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ các bất phương trình trên nghiệm đúng.

Lời giải

Đặt $\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} = \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{1-3x} = u$, ta có:

$$u^2 = 2 + 2\sqrt{1-4x^2} \geq 2 \Rightarrow u \geq \sqrt{2}$$

$$u = \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{1-3x} \quad (u \geq \sqrt{2}) \Rightarrow u^3 = 2 + 3u\sqrt[3]{1-9x^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{1-9x^2} = \frac{u^3 - 2}{3u} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

Suy ra các bất phương trình sau đây nghiệm đúng $\forall x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

$$\sqrt{1+2x} \geq \sqrt[3]{1+3x} \Leftrightarrow (1+2x)^3 \geq (1+3x)^2 \Leftrightarrow x^2(3+8x) \geq 0$$

$$\sqrt{1-2x} \geq \sqrt[3]{1-3x} \Leftrightarrow (1-2x)^3 \geq (1-3x)^2 \Leftrightarrow x^2(3-8x) \geq 0$$

Hay: $\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} \geq \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[3]{1-3x}$, $\forall x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Kết luận. Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 7: Giải phương trình $\sqrt{4x^3 - 6x^2 - x + 10} = 1 - x^2\sqrt{x(x+1)(x-2)}$.

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 4x^3 - 6x^2 - x + 10 \geq 0 \\ x(x+1)(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Từ điều kiện này ta có ngay được $1 - x^2\sqrt{x(x+1)(x-2)} \leq 1$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$.

Mặt khác từ điều kiện ta luôn có $\sqrt{4x^3 - 6x^2 - x + 10} \geq 1$.

Thật vậy, bình phương hai vế bất phương trình ta có:

$$4x^3 - 6x^2 - x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(4x^2 - 10x + 9) \geq 0 \text{ (luôn đúng)}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$.

Từ các đánh giá này ta có $\sqrt{4x^3 - 6x^2 - x + 10} \geq 1 \geq 1 - x^2\sqrt{x(x+1)(x-2)}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = -1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Câu 8: Giải phương trình $x + 17 + 2(1-x)\sqrt{2x+2} = 2(x-1)\sqrt{x+6}$

Giải

Nếu $x = 1$ thì vô lý. Do đó:

$$x + 17 + 2(1 - x)\sqrt[3]{2x + 2} = 2(x - 1)\sqrt{x + 6} \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x + 2} + \sqrt{x + 6} - \frac{x + 17}{2(x - 1)} = 0$$

$$\text{Đặt } f(x) = \sqrt[3]{2x + 2} + \sqrt{x + 6} - \frac{x + 17}{2(x - 1)} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x + 2)^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x + 6}} + \frac{9}{(x - 1)^2} > 0$$

Khi đó $f(x) = 0$ có tối đa 1 nghiệm trong khoảng $[-6; 1)$ và có tối đa 1 nghiệm trong khoảng $(1; +\infty)$ vì nó liên tục trên $[-6; 1)$ và $(1; +\infty)$. Chỉ ra 2 nghiệm này là $x = 3$ hoặc $x = -5$

Xem thêm ở phần giải phương trình bằng phương pháp hàm số!

Câu 9: Giải phương trình $(3x - 11)\sqrt[4]{2 - x} + 2(x - 1)^2\sqrt{2x - 1} = 2x^2 + x - 11$

Giải

Ta có: Đặt $t = \sqrt[4]{2 - x} \geq 0 \Rightarrow x = 2 - t^4$. Khi đó:

- $(3x - 11)\sqrt[4]{2 - x} - 5x + 13 = (-3t^4 - 5)t + 5t^4 + 3 = (3t^2 + 4t + 3)(1 - t)^3$
- $2(x - 1)^2(\sqrt{2x - 1} - 1) = \frac{4(x - 1)^3}{\sqrt{2x - 1} + 1}$

Nếu $x > 1$ thì $0 \leq t < 1$ suy ra $\begin{cases} (3x - 11)\sqrt[4]{2 - x} - 5x + 13 > 0 \\ 2(x - 1)^2(\sqrt{2x - 1} - 1) > 0 \end{cases} \Rightarrow$ vô lý

Nếu $x < 1$ thì $t > 1$ suy ra $\begin{cases} (3x - 11)\sqrt[4]{2 - x} - 5x + 13 < 0 \\ 2(x - 1)^2(\sqrt{2x - 1} - 1) < 0 \end{cases} \Rightarrow$ vô lý

Lời giải chi tiết dành cho bạn đọc.

Kết luận: Phương trình có nghiệm $x = 1$.

Câu 10: Giải phương trình $\sqrt[3]{2x - 3} - 3x^2 + 3x + 20 = (2x - 9)\sqrt{3x + 4}$

Giải

Ta có $\sqrt[3]{2x - 3} - 3x^2 + 3x + 20 = (2x - 9)\sqrt{3x + 4}$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x - 3} - x + 2 - (2x - 9)\sqrt{3x + 4} - 3x^2 + 4x + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x - 3} - x + 2) + (\sqrt{3x + 4} - 3x + 7)(\sqrt{3x + 4} + x + 2) = 0$$

Ta luôn có $\sqrt{3x + 4} + x + 2 = \sqrt{3x + 4} + \frac{3x + 4}{3} + \frac{2}{3} > 0$

Nếu $x > \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ thì $\begin{cases} \sqrt{3x + 4} - 3x + 7 < 0 \\ \sqrt[3]{2x - 3} - x + 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow VT < 0$

Nếu $\frac{5 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ thì $\begin{cases} \sqrt{3x + 4} - 3x + 7 > 0 \\ \sqrt[3]{2x - 3} - x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow VT > 0$

Nếu $1 \leq x < \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ thì ta có $\sqrt[3]{2x-3}+1 > 0$. Suy ra:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2x-3}-3x^2+3x+20-(2x-9)\sqrt{3x+4} &> -3x^2+3x+19-(2x-9)\sqrt{3x+4} \\ &= \frac{1}{3}(3-\sqrt{3x+4})((3x+8)\sqrt{3x+4}+15x-3)+\frac{98}{3} > 0 \end{aligned}$$

Nếu $x < 1$ thì $\begin{cases} \sqrt{3x+4}-3x+7 > 0 \\ \sqrt[3]{2x-3}-x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow VT > 0$

Bài toán được giải quyết.

Câu 11: Giải phương trình $3\sqrt[3]{x-2}+x^2-x-6=(2x-3)\sqrt{x-2}$

Giải

Ta có $3\sqrt[3]{x-2}+x^2-x-6=(2x-3)\sqrt{x-2}$

$$\Leftrightarrow 3(\sqrt[3]{x-2}-1)+x^2-x-3-(2x-3)\sqrt{x-2}=0$$

$$\Leftrightarrow 3(\sqrt[3]{x-2}-1)+(\sqrt{x-2}-1)(x\sqrt{x-2}-2+3)=0$$

Ta luôn có: $x\sqrt{x-2}-x+3=\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x-2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\sqrt{x-2}+1 > 0 \forall x \geq 2$

Nếu $x > 3 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} > 1 \\ \sqrt{x-2} > 1 \end{cases} \Rightarrow VT > 0$. Nếu $x < 3 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} < 1 \\ \sqrt{x-2} < 1 \end{cases} \Rightarrow VT < 0$

Câu 12: Giải phương trình $(\sqrt[3]{2x+3}+2\sqrt{x+2})(x+3)=2x^2+11x+10$

Giải

Ta có $(\sqrt[3]{2x+3}+2\sqrt{x+2})(x+3)=2x^2+11x+10$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x+3}-x-1)(x+3)+2\sqrt{x+2}(x+3)-x^2-7x-7=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x+3}-x-1)(x+3)-(x+5-\sqrt{x+2})(x+1-\sqrt{x+2})=0$$

Ta luôn có: $x+5-\sqrt{x+2}=\frac{(\sqrt{x+2}-1)^2+x+7}{2} > 0$

Nếu $x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2x+3} < x+1 \\ \sqrt{x+2} < x+1 \end{cases}$ suy ra $VT < 0$

Nếu $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2x+3} > x+1 \\ \sqrt{x+2} > x+1 \end{cases}$ suy ra $VT > 0$

Nếu $-2 \leq x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sqrt[3]{2x+3}+1 \geq 0$. Vậy ta được:

$$\begin{aligned} &(\sqrt[3]{2x+3}+2\sqrt{x+2})(x+3)-2x^2-11x-10 \\ &\geq (2\sqrt{x+2}-1)(x+3)-2x^2-11x-10 \end{aligned}$$

$$= -\frac{(19\sqrt{x+2}+3)(\sqrt{x+2}-1)+(x-1)(2\sqrt{x+2}-1)^2}{2} > 0$$

Câu 13: Giải phương trình $x\sqrt[3]{x-1}+2\sqrt{2x-3}+2x^2-9x+6=0$

Giải

Ta có $x\sqrt[3]{x-1}+2\sqrt{2x-3}+2x^2-9x+6=0$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt[3]{x-1}-1)+(\sqrt{2x-3}-1)(x+(x-2)\sqrt{2x-3})=0$$

Ta luôn có: $x+(x-2)\sqrt{2x-3}=\frac{1}{27}(3\sqrt{2x-3}+5)(3\sqrt{2x-3}-1)^2+\frac{76}{27}>0$

Nếu $x > 2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} > 1 \\ \sqrt{2x-3} > 1 \end{cases}$ suy ra VT > 0

Nếu $x < 2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} < 1 \\ \sqrt{2x-3} < 1 \end{cases}$ suy ra VT < 0

Câu 14: Giải phương trình $6\sqrt[3]{3x+2}-18\sqrt{x+2}=x^2-x-26$

Giải

Ta có $6\sqrt[3]{3x+2}-18\sqrt{x+2}=x^2-x-26$

$$\Leftrightarrow 6(\sqrt[3]{3x+2}-x)=x^2-7x-26+18\sqrt{x+2}$$

$$\Leftrightarrow 6(\sqrt[3]{3x+2}-x)=(\sqrt{x+2}-1)^2(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+4)$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt[3]{3x+2}+1)^2(\sqrt[3]{3x+2}-2)+(\sqrt{x+2}-1)^2(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+4)=0$$

Nếu $x > 2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{3x+2} > 2 \\ \sqrt{x+2} > 1 \end{cases}$ suy ra VT > 0

Nếu $x < 2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{3x+2} < 2 \\ \sqrt{x+2} < 1 \end{cases}$ suy ra VT ≤ 0 . Dấu "=" xảy ra khi $x = -1$

Câu 15: Giải phương trình $4x^2+16+2\sqrt[3]{2x^2-1}=(2x^2-2x+7)\sqrt{1-3x}$

Giải

Ta có $4x^2+16+2\sqrt[3]{2x^2-1}=(2x^2-2x+7)\sqrt{1-3x}$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt[3]{2x^2-1}+5x+4)=(\sqrt{1-3x}-2)(2x^2-2x+3-2\sqrt{1-3x})$$

Ta luôn có: $\begin{cases} 2x^2-2x+3-2\sqrt{1-3x}=2x^2+\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\left(\sqrt{1-3x}-\frac{3}{2}\right)^2 > 0 \\ 2x^2-1+(5x+4)^3=(x+1)(125x^2+177x+63) \end{cases}$

Nếu $x > -1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{3x+2}+5x+4 > 0 \\ \sqrt{1-3x} < 2 \end{cases}$ suy ra VT > VP

$$\text{Nếu } x < -1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{3x+2} + 5x + 4 < 0 \\ \sqrt{1-3x} > 2 \end{cases} \text{ suy ra VT} < \text{VP}$$

Câu 16: Giải phương trình $3\sqrt{x-1}\sqrt[3]{2x-3} = 2x^2 + 14x - 33$

Giải

$$\text{Ta có } 3\sqrt{x-1}\sqrt[3]{2x-3} = 2x^2 + 14x - 33$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1}(\sqrt[3]{2x-3} - 3x + 5) + 3(3x - 5)\sqrt{x-1} - 2x^2 - 14x + 33 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1}(\sqrt[3]{2x-3} - 3x + 5) + (\sqrt{x-1} - 1)(7x - 24 - (2x + 9)\sqrt{x-1}) = 0$$

$$\text{Ta có: } 7x - 24 - (2x + 9)\sqrt{x-1} = -2\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1} - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{39}{8}\sqrt{x-1} - 17 < 0 \text{ và}$$

$$2x - 3 - (3x - 5)^3 = -(x - 2)(27x^2 - 81x + 61)$$

$$\text{Nếu } 1 \leq x < 2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2x-3} - 3x + 5 < 0 \\ \sqrt{x-1} > 1 \end{cases} \Rightarrow \text{VT} > 0$$

$$\text{Nếu } x > 2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2x-3} - 3x + 5 > 0 \\ \sqrt{x-1} < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{VT} < 0$$

Câu 17: Giải phương trình $\sqrt[5]{x-3} + 2\sqrt{2x+1} = 4x - 9$

Giải

$$\text{Ta có } \sqrt[5]{x-3} + 2\sqrt{2x+1} = 4x - 9 \Leftrightarrow (\sqrt[5]{x-3} - 2x + 7) = (\sqrt{2x+1} - 3)(\sqrt{2x+1} + 1)$$

$$\text{Xét hàm } f(x) = \sqrt[5]{x-3} - 2x + 7 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[4]{(x-3)^4}} - 2.$$

$$\text{Vậy } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{100000}} + 3$$

Lập Bảng Biến Thiên ta được:

$$\text{Nếu } x > 4 \text{ thì } f(x) < 0 \Rightarrow \text{VT} < \text{VP}$$

$$\text{Nếu } x < 4 \text{ thì } f(x) > 0 \Rightarrow \text{VT} > \text{VP}$$

Xem thêm ở phần giải phương trình bằng phương pháp hàm số!

B. KỸ THUẬT ĐÁNH GIÁ THEO CỤM

Tính chất. Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ xác định trên D. Nếu:

- $\min_D f(x) = m_1$; $\min_D g(x) = m_2 \Rightarrow f(x) + g(x) \geq m_1 + m_2 \quad \forall x \in D.$
- $\max_D f(x) = M_1$; $\max_D g(x) = M_2 \Rightarrow f(x) + g(x) \leq M_1 + M_2 \quad \forall x \in D.$
- $\min_D f(x) = m$; $\max_D g(x) = m \Rightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = m \\ g(x) = m \end{cases}.$

Đầu tiên chúng ta sẽ đi vào các bài toán sử dụng phương pháp phân tích tổng bình phương SOS. Đầu tiên để làm theo cách này ta sẽ làm theo các bước sau và chú ý rằng

đang áp dụng cho đa số những bài các căn đang đứng đơn lẻ, đa thức trong các căn cùng bậc hoặc một số bài có thể không và có nghiệm kép

Bước 1. Tìm nghiệm của phương trình

Bước 2. Tìm nhân tử chứa nghiệm đơn cho từng căn

Bước 3. Xác định dấu của vế trái và từng nhân tử, nếu tất cả cùng dấu thì khi đó phân tích phương trình thành $\alpha(\sqrt{f(x)}-a)^2 + \beta(\sqrt{f_1(x)}-b)^2 + \dots + \xi(\sqrt{f_n(x)}-z)^2 = 0$

Với $\alpha, \beta, \dots, \xi$ cùng dấu, $\sqrt{f(x)}-a; \sqrt{f_1(x)}-b$ là những nhân tử chứa nghiệm đơn vừa tìm được.

Câu 1: Giải phương trình $\sqrt{3x^3+2x^2+2} + \sqrt{-3x^3+x^2+2x-1} = 2x^2+2x+2$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2016 lần 1 – THPT Chuyên ĐH Sư phạm – Hà Nội

Giải

Ta có nghiệm của phương trình là $x = -1$ và khi $x = -1$ thì $\begin{cases} \sqrt{3x^3+2x^2+2} = 1 \\ \sqrt{-3x^3+x^2+2x-1} = 1 \end{cases}$

Nhận thấy rằng $VT \leq 0$ nên ta sẽ tách phương trình thành:

Lời giải ngắn gọn của bài này như sau:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^3+2x^2+2} + \sqrt{-3x^3+x^2+2x-1} &= 2x^2+2x+2 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(\sqrt{3x^3+2x^2+2}-1)^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}-1)^2 - \frac{1}{2}(x+1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Để thấy rằng $VT \leq 0$ nên dấu "=" chỉ xảy ra khi $\begin{cases} \sqrt{3x^3+2x^2+2}-1=0 \\ \sqrt{-3x^3+x^2+2x-1}-1=0 \Leftrightarrow x=-1 \\ x+1=0 \end{cases}$

Vậy $x = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 2: Giải phương trình $2\sqrt{x^2-2x-1} + 2\sqrt{x^2-2x+2} + 3\sqrt{-x^2+2x+3} = 0$

Giải

Biến đổi phương trình tương đương

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^2-2x-1} + 2\sqrt{x^2-2x+2} + 3\sqrt{-x^2+2x+3} &= 0 \\ \Leftrightarrow -(\sqrt{x^2-2x-1}-1)^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{x^2-2x+2}-2)^2 - \frac{3}{2}(\sqrt{-x^2+2x+3}-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Đến đây bài toán đã được giải quyết!

Bài tập tương tự.

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$$

$$\text{Đ/s: } -\frac{1}{2}(\sqrt{x-2}-1)^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{4-x}-1)^2 - (x-3)^2 = 0$$

$$\sqrt{2x-1} + 2\sqrt{x+3} + 7\sqrt{2x+2} + 12\sqrt{5-x} = 2x + 41$$

$$\text{Đ/s: } -\frac{1}{2}(\sqrt{2x-1}-1)^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{x+3}-2)^2 - \frac{7}{4}(\sqrt{2x+2}-2)^2 - 3(\sqrt{5-x}-2)^2 = 0$$

Câu 3: Chứng minh rằng: $f(x) = \frac{x^4 + x + 1 + 32\sqrt[4]{x^3 - 4x^2 + 7x - 12}}{x^4 + x^2 + 16x - 11} - 1 \leq 0 \forall x \in [3; +\infty)$

Giải

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2(2\sqrt[4]{x-3} - \sqrt[4]{x^2-x+4})^2 - 32(\sqrt{x-3}-1)^2 - 2(\sqrt{x^2-x+4}-4)^2}{x^4 + x^2 + 16x - 11} \leq 0$$

$$\text{Do đó dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt[4]{x-3} - \sqrt[4]{x^2-x+4} = 0 \\ \sqrt{x-3} - 1 = 0 \\ \sqrt{x^2-x+4} - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Câu 4: Giải phương trình $12x^2 + 16x + 1 - 2\sqrt{24x^3 + 12x^2 - 6x} - 4\sqrt{x^2 - x} = 4\sqrt{8x^3 + 9x^2 + x}$

Giải

Điều kiện: $24x^3 + 12x^2 - 6x \geq 0; x^2 - x \geq 0; 8x^3 + 9x^2 + x \geq 0$.

$$\begin{aligned} & (6x - 2\sqrt{6x(4x^2 + 2x - 1)} + 4x^2 + 2x - 1) + (1 - 2\sqrt{4x^2 - 4x} + 4x^2 - 4x) \\ & + [4x^2 + 4x - 2\sqrt{(4x^2 + 4x)(1 + 8x)} + 1 + 8x] = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{6x} - \sqrt{4x^2 + 2x - 1})^2 + (1 - \sqrt{4x^2 - 4x})^2 + (\sqrt{4x^2 + 4x} - \sqrt{1 + 8x})^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt{6x} - \sqrt{4x^2 + 2x - 1} = 0 \\ 1 - \sqrt{4x^2 - 4x} = 0 \\ \sqrt{4x^2 + 4x} - \sqrt{1 + 8x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Câu 5: Giải phương trình $3x + \frac{1}{\sqrt{2x-7}} + \frac{1}{\sqrt{x-3}} = 2(\sqrt[4]{2x-7} + \sqrt[4]{x-3} + 5)$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} 2x-7 > 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{7}{2}$. Phương trình

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \left[(2x-7) - 2\sqrt[4]{2x-7} + \frac{1}{\sqrt{2x-7}} \right] + \left[(x-3) - 2\sqrt[4]{x-3} + \frac{1}{\sqrt{x-3}} \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \left((\sqrt[4]{2x-7})^2 \right)^2 - 2\sqrt[4]{2x-7} + \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2x-7}} \right)^2 + \left((\sqrt[4]{x-3})^2 \right)^2 - 2\sqrt[4]{x-3} + \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x-3}} \right)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\left(\sqrt[4]{2x-7} \right)^2 - \frac{1}{\sqrt[4]{2x-7}} \right]^2 + \left[\left(\sqrt[4]{x-3} \right)^2 - \frac{1}{\sqrt[4]{x-3}} \right]^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt[4]{2x-7}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt[4]{2x-7}} = 0 \\ \left(\sqrt[4]{x-3}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt[4]{x-3}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt[4]{2x-7}\right)^3 = 1 \\ \left(\sqrt[4]{x-3}\right)^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

Câu 6: Giải phương trình $\sqrt{9x^3 - 18x^2} + \sqrt{36x^2 - 9x^3} = x^2 + 9$.

Giải

$$\text{Đặt: } a = \sqrt{9x^3 - 18x^2}; \quad b = \sqrt{36x^2 - 9x^3} \quad (a, b \geq 0) \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{18} = x^2$$

$$\text{Ta có: } a + b = \frac{a^2 + b^2}{18} + 9 \Leftrightarrow (a^2 - 18a + 81) + (b^2 - 18b + 81) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 9)^2 + (b - 9)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 9.$$

Các bài toán trên đều là các bài toán đơn giản, vậy câu hỏi đặt ra là nếu các bài toán khó hơn và chặt hơn thì các hệ số đứng trước các tổng bình phương có thể 1 vài số bị âm hoặc không thể đưa về dạng tổng SOS thì sao? Dưới đây ta sẽ tìm hiểu một cách khác mà mình gọi là SOS không hoàn toàn. Nguyên tắc của phương pháp này là ta sẽ xử lý các biểu thức chứa nghiệm kép từ đơn giản tới phức tạp để giải quyết các bài toán. Các bước làm như sau. Ta xét phương trình $f(x) = 0$.

Bước 1. Sắp xếp độ phức tạp của các căn trong phương trình tăng dần, ví dụ trong phương trình có 2 căn là $\sqrt{x+1}, \sqrt{x^2+1}, \sqrt[3]{x^4+1}$ thì phức tạp tăng từ trái qua phải.

Bước 2. Tìm biểu thức chứa nghiệm kép cho các biểu thức đơn giản trước, nếu có 3 biểu thức thì ta tìm cho 2 biểu thức trước. Chú ý ta chỉ lấy những nhân tử cùng dấu với vế trái của phương trình, những nhân tử không cùng dấu ta sẽ xử lý bằng bước thứ 3.

Bước 3. Ta dồn tất cả phần còn lại vào một biểu thức và chứng minh biểu thức đó cùng dấu với vế trái ta đang xét có thể bằng phân tích nhân tử hoặc đạo hàm, bất đẳng thức!

Để hiểu rõ hơn phương pháp ta đi vào các ví dụ cụ thể!

Câu 1: Giải phương trình $\frac{4\sqrt{1-x}}{x} + \frac{\sqrt{2x-1}}{1-x} = 3\sqrt{3}$

Giải

Bước đầu tiên bao giờ cũng là đi tìm nghiệm. Ta được 1 nghiệm $x = \frac{2}{3}$.

Kiểm tra nghiệm bội ta có:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{4(1-x)\sqrt{1-x} + x\sqrt{2x-1} - 3\sqrt{3}x(1-x)}{3x-2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{4(1-x)\sqrt{1-x} + x\sqrt{2x-1} - 3\sqrt{3}x(1-x)}{(3x-2)^2} \neq 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ là nghiệm kép.}$$

Tìm nhân tử từng cụm, giả sử nhân tử có dạng: $\begin{cases} 4(1-x)\sqrt{1-x} + ax + b = 0 \\ x\sqrt{2x-1} + cx + d = 0 \end{cases}$.

Khi đó sẽ tìm được 2 nhân tử là $\begin{cases} x\sqrt{2x-1} - \sqrt{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{9} = 0 \\ 4(1-x)\sqrt{1-x} + 2\sqrt{3}x - \frac{16\sqrt{3}}{9} = 0 \end{cases}$.

Phân tích nhân tử từng cụm 1 sử dụng công thức chia 2 căn ta được:

$$1. \quad 4(1-x)\sqrt{1-x} + 2\sqrt{3}x - \frac{16\sqrt{3}}{9} = \left(\frac{4}{9}\sqrt{1-x} + \frac{2\sqrt{3}}{27}\right)(3\sqrt{1-x} - \sqrt{3})^2$$

$$2. \quad x\sqrt{2x-1} - \sqrt{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{9} = \frac{(3\sqrt{2x-1} - \sqrt{3})^3}{54}$$

Nhìn vào rõ ràng thấy nhân tử thứ 2 không có cùng dấu với bài toán do chứa nghiệm bội 3 nên ta sẽ làm mạnh tay hơn là phân tích nhân tử cả cụm:

$-3\sqrt{3}x(1-x) - 2\sqrt{3}x + \frac{16\sqrt{3}}{9} + x\sqrt{2x-1}$ với hy vọng cả cụm đó sẽ luôn dương. Thật vậy ta

$$\begin{aligned} \text{được: } & -3\sqrt{3}x(1-x) - 2\sqrt{3}x + \frac{16\sqrt{3}}{9} + x\sqrt{2x-1} \\ & = \left(\sqrt{2x-1} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \left(2\sqrt{2x-1} + \frac{(9x-4)\sqrt{3}}{6}\right) \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy lời giải là:

$$4(1-x)\sqrt{1-x} + x\sqrt{2x-1} = 3\sqrt{3}x(1-x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\sqrt{1-x} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \underbrace{\left(2\sqrt{3}\sqrt{1-x} + 1\right)}_{>0} + \left(\sqrt{2x-1} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \underbrace{\left(2\sqrt{2x-1} + \frac{(9x-4)\sqrt{3}}{6}\right)}_{>0} = 0$$

$$\text{Để thấy } VT \geq 0 \text{ nên dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} \sqrt{1-x} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \\ \sqrt{2x-1} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Nhận xét. Ở đây mình đã sử dụng hướng phân tích nhân tử, tuy nhiên đang sử dụng một chút máy tính, tất nhiên các bạn có thể đặt từng cái căn một rồi thế vào cụm đi theo nó để đưa nó trở thành đa thức rồi phân tích nhân tử, cuối cùng thế ngược lại thì cũng được, tuy nhiên sẽ khá mất thời gian. Vì thế lời khuyên cho những bạn nào không dùng máy tính đoạn về sau là các bạn có thể sử dụng đạo hàm để xử lý các cụm nhân tử đó!

Câu 2: Giải phương trình $(x-3)\left(\frac{1}{2}x + \sqrt{x}\right) = (x-1)\sqrt{2x+1} + 3\sqrt{x} - 11$.

Giải

Điều kiện $x \geq 0$.

PT tương đương với: $(x-3)(x+2\sqrt{x}) = 2(x-1)\sqrt{2x+1} + 6\sqrt{x} - 22$.

$$\Leftrightarrow \left[(x-1)^2 - 2(x-1)\sqrt{2x+1} + 2x+1 \right] + (2x\sqrt{x} - 3x - 12\sqrt{x} + 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1-\sqrt{2x+1})^2 + (2x\sqrt{x} - 3x - 12\sqrt{x} + 20) = 0 \quad (*)$$

Đặt $\sqrt{x} = a$ ($a \geq 0$), xét hàm số $f(a) = 2a^3 - 3a^2 - 12a + 20$, $a \geq 0$

Ta có $f'(a) = 6a^2 - 6a - 12 \Rightarrow f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 2$ (do $a \geq 0$)

Lập bảng biến thiên cho ta $\min_{[0;+\infty)} f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 2$ hay:

$$2x\sqrt{x} - 3x - 12\sqrt{x} + 20 \geq 0, \quad \forall x \geq 0$$

Từ đó ta có: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{2x+1} \\ \sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$

Vậy $x = 4$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Nhận xét. Bài toán này phân tích được đều nhờ dấu hiệu của biểu thức đứng trước căn và chứng minh phần còn lại cùng dấu với một vế đang xét bằng phương pháp đạo hàm như bài toán mình đã nói ở trên.

Bài tập tương tự.

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x + 3 = \sqrt{2x+2} + \sqrt[4]{2x-1}$$

$$\text{Đ/s: } (x-1)^2 + \frac{1}{4}(\sqrt{2x+2} - 2)^2 + \frac{(\sqrt[4]{2x-1} - 1)^2 (\sqrt{2x-1} + 2\sqrt[4]{2x-1} + 3)}{4} = 0$$

$$x + \frac{4}{x} + 3x^2 = 2\sqrt{x^3-4} + 4\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^3+4x}$$

$$\text{Đ/s: } (x - \sqrt{x^3-4})^2 + (x - 2\sqrt{x-1})^2 + \frac{1}{x}(\sqrt{x^3+4x} - 2x)((2x+3)\sqrt{x^3+4x} + 2x^2 + 6x) = 0$$

$$x^2 + 12x + 1 = 4\sqrt{x^3+x} + 2x\sqrt{4x-1} + 2\sqrt{4x-x^2}$$

$$\text{Đ/s: } (\sqrt{4x-x^2} - 1)^2 + (x - \sqrt{4x-1})^2 + \frac{(x^2 - 4x + 1)^2}{x^2 + 4x + 1 + 4\sqrt{x^3+x}} = 0$$

Câu 3: Giải phương trình $\frac{3x+3}{\sqrt{x}} = 4 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}$.

Giải

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với: $\left(3\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - 6 \right) + \left(2 - \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} \right) = 0$

$$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 2 \right) + \left(\frac{2\sqrt{x^2-x+1} - x - 1}{\sqrt{x^2-x+1}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \frac{3(x-1)^2}{(2\sqrt{x^2-x+1}+x+1)\sqrt{x^2-x+1}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Câu 4: Giải phương trình $\sqrt{3x-7} + (4x-7)\sqrt{7-x} = 32$.

Giải

Điều kiện $\frac{7}{3} \leq x \leq 7$. Đặt $a = \sqrt{7-x}$ $\left(0 \leq a \leq \sqrt{\frac{14}{3}}\right)$. Phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{14-3a^2} - 4a^3 + 21a - 32 = 0. \text{ Ta có } 0 \leq f(a) = \sqrt{14-3a^2} \leq \sqrt{14}$$

Ta có $g(a) = -4a^3 + 21a - 32$, $0 \leq a \leq \sqrt{\frac{14}{3}}$

$$\Rightarrow g'(a) = -12a^2 + 21 \Rightarrow -32 = g(0) \leq g(a) \leq g\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right) = -32 + 7\sqrt{7}$$

Do đó $f(a) + g(a) \leq -32 + 7\sqrt{7} + \sqrt{14} < 0$. Hay phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 5: Giải phương trình $\frac{4}{4-x^2} + \frac{5+3\sqrt{1-x^2}}{8\sqrt{1-x^2}+8-2x^2} = \frac{13}{2+\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x}}$

Giải

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$. Ta có:

$$2\sqrt{2} \leq \sqrt{5-x} + \sqrt{3+x} \leq \sqrt{(1+1)(5-x+3+x)} = 4 \Rightarrow \frac{13}{6} \leq \frac{13}{2+\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x}} = f(x)$$

Hay $\min_{[-1;1]} f(x) = \frac{13}{6} \Leftrightarrow x = 1$ (1). Đặt $\sqrt{1-x^2} = a$ ($a \geq 0$), ta có:

$$\frac{4}{4-x^2} + \frac{5+3\sqrt{1-x^2}}{8\sqrt{1-x^2}+8-2x^2} = \frac{4}{3+a^2} + \frac{5+3a}{8a+6+2a^2} = \frac{4}{3+a^2} + \frac{1}{(a+3)} + \frac{1}{2(a+1)}.$$

Xét hàm số: $g(a) = \frac{4}{3+a^2} + \frac{1}{(a+3)} + \frac{1}{2(a+1)}$, $a \geq 0$.

Ta có $g'(a) = -\frac{8a}{(a^2+3)^2} - \frac{1}{2(a+1)^2} - \frac{1}{(a+3)^2} < 0$, $\forall a \geq 0$, hay hàm số nghịch biến trên

$$[0; +\infty). \text{ Do đó: } g(a) \leq g(0) = \frac{13}{6} \text{ tức là: } \frac{4}{4-x^2} + \frac{5+3\sqrt{1-x^2}}{8\sqrt{1-x^2}+8-2x^2} \leq \frac{13}{6} \quad (2)$$

Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow x = \pm 1$. Kết hợp (1) và (2) cho ta nghiệm của phương trình là $x = 1$.

C. KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN

Câu 1: Giải phương trình $13\sqrt{x^2-x^4} + 9\sqrt{x^2+x^4} = 16$

Tiến sĩ Trần Nam Dũng – Đại học khoa học tự nhiên – ĐHQG TP.HCM

Đề nghị Olympic 30/4/2011 – THPT Chuyên Lê Hồng Phong – TH.HCM

Giải

Với $\alpha, \beta > 0$. Ta sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\begin{aligned} 13\sqrt{x^2 - x^4} &= \frac{13}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 x^2 (1 - x^2)} \leq \frac{13}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^2 x^2 + (1 - x^2)}{2} = \frac{13(\alpha^2 - 1)x^2 + 13}{2\alpha} \\ 9\sqrt{x^2 + x^4} &= \frac{13}{\beta} \sqrt{\beta^2 x^2 (1 + x^2)} \leq \frac{9}{\beta} \cdot \frac{\beta^2 x^2 + (1 + x^2)}{2} = \frac{9(\beta^2 + 1)x^2 + 9}{2\beta} \\ \Rightarrow 13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4} &\leq \left[\frac{13(\alpha^2 - 1)}{2\alpha} + \frac{9(\beta^2 + 1)}{2\beta} \right] x^2 + \frac{13}{2\alpha} + \frac{9}{2\beta} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (\alpha^2 + 1)x^2 = (\beta^2 - 1)x^2 = 1$

Chọn $\alpha, \beta > 0$ thỏa mãn $\begin{cases} \alpha^2 + 1 = \beta^2 - 1 \\ \frac{13(\alpha^2 - 1)}{2\alpha} + \frac{9(\beta^2 + 1)}{2\beta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow VT \leq 16 = VP$

Dấu "=" xảy ra $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ngoài ra ta có thể dùng đạo hàm giải bài này. Đặt $f(x) = 13\sqrt{x^2 - x^4} + 9\sqrt{x^2 + x^4}$ hàm $f(x)$

liên tục trên $[0; 1]$. Ta có: $f'(x) = \frac{13(-2x^3 + x)}{\sqrt{x^2 - x^4}} + \frac{9(2x^3 + x)}{\sqrt{x^2 + x^4}}$.

$$f'(x) = \frac{13(-2x^3 + x)}{\sqrt{x^2 - x^4}} + \frac{9(2x^3 + x)}{\sqrt{x^2 + x^4}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 13(2x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1} = 9(2x^2 + 1)\sqrt{1 - x^2} \\ x = 0 (L) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \right] \\ (5x^2 - 4)(200x^4 + 160x^2 - 22) = 0 \end{cases}$$

Dễ thấy với $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \right]$ thì $200x^4 + 160x^2 - 22 \geq 108 > 0$, nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Do hàm $f(x)$ đổi dấu từ $(+) \Rightarrow (-)$ khi qua $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ nên đạt cực đại tại

$$x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow f(x) \leq f\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = 16 = VP.$$

Bài toán đã được giải quyết!

Câu 2: Giải phương trình $x^3 - 3x^2 - 8x + 40 - 8\sqrt[4]{4x + 4} = 0$

Trích đề thi HSG Quốc Gia - Bảng A - 1995

Đề nghị Olympic 30/4/2014 - THPT Chuyên Lê Quý Đôn - Ninh Thuận

Giải

Ta dễ dàng thấy phương trình có nghiệm $x = 3$ nên ta sẽ dùng bất đẳng thức AM - GM để khử căn. Ta có: $8\sqrt[4]{4x + 4} = \sqrt[4]{(4x + 4) \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16} \stackrel{AM-GM}{\leq} x + 13$.

Khi đó $VT \geq x^3 - 3x^2 - 8x + 40 - (x + 13) = (x - 3)^2(x + 3) \geq 0 \forall x \geq -1$.

Vậy dấu "=" xảy ra khi $x = 3$

Câu 3: Giải phương trình $x\sqrt{x} + \frac{32}{x\sqrt{x}} = 6\sqrt[3]{3x - 4}$

Giải

Nhìn vào phương trình ta thấy $VT > 0$ nên điều kiện có nghiệm là $x > \frac{4}{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có: $x\sqrt{x} + \frac{32}{x\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}}{2} + \frac{x\sqrt{x}}{2} + \frac{32}{x\sqrt{x}} \stackrel{AM-GM}{\geq} 6\sqrt{x}$

Khi đó ta cần chứng minh: $\sqrt{x} \geq \sqrt[3]{3x - 4} \Leftrightarrow x\sqrt{x} \geq 3x - 4 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)^2(\sqrt{x} + 1) \geq 0$ luôn đúng.

Vậy $VT \geq VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 4$

Câu 4: Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{-x^2 + x + 1} = x^2 - x + 2$

Giải

Cách 1: Dùng bất đẳng thức dạng $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \begin{cases} \sqrt{x^2 + x - 1} = \sqrt{1 \cdot (x^2 + x - 1)} \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{x^2 + x}{2} \\ \sqrt{-x^2 + x + 1} = \sqrt{1 \cdot (-x^2 + x + 1)} \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{-x^2 + x + 2}{2} \end{cases} \\ \Rightarrow VT \leq x + 1. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} \sqrt{x^2 + x - 1} = 1 \\ \sqrt{-x^2 + x + 1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Lại có $VP = x^2 - 2x + 1 + x + 1 = (x - 1)^2 + (x + 1) \geq x + 1$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$. Nên $VT \leq VP$. Dấu "=" xảy ra tại $x = 1$ nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Cách 2: Dùng bất đẳng thức Bunhiacopxki.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \begin{cases} VT = 1 \cdot \sqrt{x^2 + x - 1} + 1 \cdot \sqrt{-x^2 + x + 1} \stackrel{\text{Bunhiacopxki}}{\leq} \sqrt{(1^2 + 1^2)(x^2 + x - 1 + x - x^2 + 1)} = 2\sqrt{x} \\ VP - 2\sqrt{x} = x^2 - x + 2 - 2\sqrt{x} = x^2 - 2x + 1 + x - 2\sqrt{x} + 1 = (x - 1)^2 + (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Do đó dấu "=" chỉ xảy ra khi $x = 1$.

Cách 3: Phân tích tổng bình phương SOS.

Ta có:

$$x^2 - x + 2 - \sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{-x^2 + x + 1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + x - 1} - 1)^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{-x^2 + x + 1} - 1)^2 + (x - 1)^2 = 0$$

$$\text{Dễ dàng nhận thấy } VP - VT \geq 0. \text{ Nên dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} \sqrt{x^2 + x - 1} = 1 \\ \sqrt{-x^2 + x + 1} = 1 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Câu 5: Giải phương trình $\sqrt{8-x^2} + \sqrt{\frac{x^2-2}{2x^2}} = 5 - \frac{1+x^2}{x}$.

Giải

Với bài toán này ta dễ dàng thấy rằng phương trình có nghiệm kép $x = 2$. Do đó ta sẽ sử dụng bất đẳng thức AM - GM sao cho dấu đẳng thức phải xảy ra tại $x = 2$.

Để có được điều đó ta phân tích như sau $\sqrt{8-x^2} = 2\sqrt{\frac{m}{4} \cdot \frac{8-x^2}{m}} \leq \frac{m}{4} + \frac{8-x^2}{m}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{m}{4} = \frac{8-x^2}{m} \Leftrightarrow m^2 = 4(8-x^2)$.

Với $x = 2 \Rightarrow m = 4$. Từ đó ta có $\sqrt{8-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4(8-x^2)} \leq \frac{4+8-x^2}{4} = 3 - \frac{x^2}{4}$.

$$\sqrt{\frac{x^2-2}{2x^2}} = 2\sqrt{\frac{m}{4} \cdot \frac{x^2-2}{2mx^2}} \leq \frac{m}{4} + \frac{x^2-2}{2mx^2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{m}{4} = \frac{x^2-2}{2mx^2} \Leftrightarrow 2m^2x^2 = 4(x^2-2)$.

Cho $x = 2 \Rightarrow m = 1$ nên ta có: $\sqrt{\frac{x^2-2}{2x^2}} = 2\sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{x^2-2}{2x^2} \right)} \leq \frac{x^2-2}{2x^2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{x^2}$

Lời giải: Điều kiện $\begin{cases} 8-x^2 \geq 0 \\ \frac{x^2-2}{2x^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2} \leq x \leq -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có các đánh giá:

$$\sqrt{8-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4(8-x^2)} \leq \frac{4+8-x^2}{4} = 3 - \frac{x^2}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $8-x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$$\sqrt{\frac{x^2-2}{2x^2}} = 2\sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{x^2-2}{2x^2} \right)} \leq \frac{x^2-2}{2x^2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{x^2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{x^2-2}{2x^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Với hai đánh giá này từ phương trình đã cho ta có:

$$5 - \frac{x^2+1}{x} \leq 3 + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} - 1 \right)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right)^2 \leq 0.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} \frac{x}{2} - 1 = 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Câu 6: Giải phương trình $\sqrt{\frac{2(x^2+1)}{3}} = x\sqrt{x-\frac{1}{3}} + \sqrt{1-x}$

Giải

Bài này khá là cơ bản áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz là ra ngay. Ta có:

$$x\sqrt{x-\frac{1}{3}}+\sqrt{1-x}\leq\sqrt{(x^2+1)\left(x-\frac{1}{3}+1-x\right)}=\sqrt{\frac{2(x^2+1)}{3}}=VT$$

$$\begin{aligned}\text{Dấu “=” xảy ra khi } \frac{x}{\sqrt{x-\frac{1}{3}}} &= \frac{1}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow x\sqrt{x-1} = \sqrt{x-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x^3-x^2-x+\frac{1}{3}=0 \\ &\Leftrightarrow 3x^3-3x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^3=-2x^3 \Leftrightarrow x=\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}\end{aligned}$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Câu 7: Giải phương trình $x^4-12x^3+38x^2-12x-67+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}=0$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2016 – Lần 2 – Chuyên Vĩnh Phúc

Giải

Cách 1: Dùng bất đẳng thức Cauchy.

$$\text{Ta có: } \sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}=\frac{1}{2}.2\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}.2\sqrt{7-x}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{x+5}{2}+\frac{11-x}{2}\right)=4.$$

$$\text{Khi đó } VT\leq(x-3)^2(x^2-6x-7)=(x-3)^2(x+1)(x-7)\leq 0.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \begin{cases} \sqrt{x+1}=2 \\ \sqrt{7-x}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

Cách 2: Phân tích tổng bình phương:

Ta có:

$$\begin{aligned}x^4-12x^3+38x^2-12x-67+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}&=0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{4}(\sqrt{x+1}-2)^2-\frac{1}{4}(\sqrt{7-x}-2)^2-(x-3)^2(x+1)(7-x)&=0\end{aligned}$$

Không khó để nhận ra với $x\in[-1;7]$ thì $VT\leq 0$. Do đó dấu “=” xảy ra khi $x=3$

Vậy $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 8: Giải phương trình $3\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2-x}+\sqrt[4]{3-2x}=5$.

Giải

Sử dụng liên tiếp bất đẳng thức AM – GM ta có các đánh giá:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{x}&\leq\frac{(\sqrt{x}+1)}{2}\leq\frac{x+3}{4}\Rightarrow 3\sqrt[4]{x}\leq\frac{3(x+3)}{4} \\ \sqrt[4]{2-x}&\leq\frac{\sqrt{2-x}+1}{2}\leq\frac{5-x}{4} \\ \sqrt[4]{3-2x}&\leq\frac{\sqrt{3-2x}+1}{2}\leq\frac{6-2x}{4}\end{aligned}$$

Cộng vế theo vế các đánh giá này ta thu được: $3\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2-x}+\sqrt[4]{3-2x}\leq 5$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu 9: Giải phương trình $9\sqrt{x+2} + \frac{32(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2})}{(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2})^2} = 24$

Giải

Ý tưởng của bài toán này vẫn như các bài toán khác, ta vẫn sẽ đánh giá $VT \geq 24$. Nhưng tuy nhiên để nguyên như thế này thì chưa làm ăn được gì, ta sẽ liên hợp tử của phân thức.

Ta có:

$$9\sqrt{x+2} + \frac{32(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2})}{(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2})^2} = 24 \Leftrightarrow 9\sqrt{x+2} + \frac{96}{(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2})^2 (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})} = 24$$

$$\Leftrightarrow 6(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}) + 3(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}) + \frac{96}{(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2})^2 (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})} = 24$$

Khi đó áp dụng Cauchy cho 4 số: $6a = 6(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})$; $\frac{3}{2}b = \frac{3}{2}(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2})$

$$\frac{3}{2}b = \frac{3}{2}(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}); \frac{96}{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1})(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2})^2} = \frac{96}{ab^2} \text{ ta được:}$$

$$6a + \frac{3}{2}b + \frac{3}{2}b + \frac{96}{ab^2} \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 4\sqrt[4]{\frac{6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 96 \cdot a \cdot b \cdot b}{ab^2}} = 24 = VP$$

Vậy dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} 6a = \frac{3}{2}b \\ 6a = \frac{96}{ab^2} \end{cases} \Leftrightarrow b = 4a \Leftrightarrow x = 2$

Câu 10: Giải phương trình

$$12x^2 + 16x + 1 - 2\sqrt{24x^3 + 12x^2 - 6x} - 4\sqrt{x^2 - x} - 4\sqrt{8x^3 + 9x^2 + x} = 0$$

Giải

Ta có:

$$12x^2 + 16x + 1 - 2\sqrt{24x^3 + 12x^2 - 6x} - 4\sqrt{x^2 - x} - 4\sqrt{8x^3 + 9x^2 + x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x^2 + 16x + 1 - 2\sqrt{6x(4x^2 + 2x - 1)} - 2\sqrt{4(x^2 - x)} - 2\sqrt{4(x^2 + x)(8x + 1)} = 0$$

Phương trình có nghiệm $x = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 6x = 4x^2 + 2x - 1 \\ 4(x^2 - x) = 1 \\ 8x + 1 = 4(x^2 + x) \end{cases}$. Nên ta áp dụng bất đẳng thức

$$\text{AM - GM ta được: } \begin{cases} 2\sqrt{6x(4x^2+2x-1)} \leq 4x^2+8x-1 \\ 2\sqrt{4(x^2-x)} \leq 4(x^2-x)+1 \\ 2\sqrt{4(x^2+x)(8x+1)} \leq 4x^2+4x+8x+1 \end{cases}$$

Khi đó $VT \geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Ngoài ra nếu không thích ta có thể sử dụng cách ghép hằng đẳng thức như sau:

$$\begin{aligned} & 12x^2+16x+1-2\sqrt{24x^3+12x^2-6x}-4\sqrt{x^2-x}-4\sqrt{8x^3+9x^2+x}=0 \\ \Leftrightarrow & 6x-2\sqrt{6x(4x^2+2x-1)}+4x^2+2x-1+1-2\sqrt{4x^2-4x}+4x^2-4x \\ & +4x^2+4-2\sqrt{(4x^2+4x)(8x+1)}+8x+1=0 \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt{6x}-\sqrt{4x^2+2x-1}\right)^2+\left(\sqrt{4x^2-4x}-1\right)^2+\left(\sqrt{4x^2+4x}-\sqrt{8x+1}\right)^2=0 \end{aligned}$$

Đến đây bài toán đã được giải quyết!

Câu 11: Giải phương trình $2(2x+1)\sqrt{x+1}+(4-x)\sqrt{2-2x}=6\sqrt{x^2+2}$.

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Nhận xét với $x = \pm 1$ không thỏa phương trình đã cho.

Với $-1 < x < 1$, ta sử dụng bất đẳng thức B.C.S ta có:

$$\sqrt{2}(2x+1)\sqrt{2x+2}+(4-x)\sqrt{2-2x} \leq \sqrt{(2(2x+1)^2+(4-x)^2)(2x+2+2-2x)}=6\sqrt{x^2+2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: } \frac{\sqrt{2}(2x+1)}{\sqrt{2x+2}} &= \frac{4-x}{\sqrt{2-2x}} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{\sqrt{x+1}} = \frac{4-x}{\sqrt{2-2x}} \\ \Leftrightarrow (2x+1)\sqrt{2-2x} &= (4-x)\sqrt{x+1} \Rightarrow (2x+1)^2(2-2x) = (4-x)(x+1)^2 \\ \Leftrightarrow x^3-3x^2+6x+14 &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Với (1) ta có: } x^3-3x^2+6x+14 = (x-1)^3 + (3x+15).$$

$$\text{Mà với: } -1 < x < 1 \Rightarrow -8 < (x-1)^3 < 0; \quad 12 < 3x+15 < 18 \Rightarrow 4 < (x-1)^3 + 3x+15 < 18.$$

Do đó (1) vô nghiệm nên dấu đẳng thức không xảy ra.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 12: Giải phương trình $(x+3)\sqrt{x+1}+x^2+x+4=(2\sqrt{2}+3)(x^2-x^3+2x)$

Giải

Ở đây do $VT - VP \geq 0$ mà nếu sử dụng Cauchy cho $\sqrt{x+1}$ thì bất đẳng thức bị ngược chiều, để khắc phục ta sẽ tìm nhân tử cho $(x+3)\sqrt{x+1}$, ta được $(x+3)\sqrt{x+1} - 2\sqrt{2}(x+1)$.

Nhân tử này cùng chiều với bài toán nên ta sẽ dùng Cauchy để chứng minh.

Ta có: $(x+3)\sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1})^3 + 2\sqrt{x+1} \stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} 2\sqrt{2(\sqrt{x+1})^3 \sqrt{x+1}} = 2\sqrt{2}(x+1)$

Khi đó VT - VP = $(x-1)^2 \left[(2x+2)\sqrt{2} + 3x+4 \right] \geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi $(\sqrt{x+1})^2 = 2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x=1$.

Câu 13: Giải phương trình $\sqrt[4]{x^4+x^2-1} + \sqrt[4]{x^4-x^2+1} = 2x$

Giải

Cách 1: Đặt $\begin{cases} \sqrt[4]{x^4+x^2-1} = a \\ \sqrt[4]{x^4-x^2+1} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=2x \\ a^4+b^4=2x^4 \end{cases} \Rightarrow (a+b)^4 = 8(a^4+b^4)$

Ta có: $\frac{(a+b)^4}{8} = \frac{(a^2+2ab+b^2)^2}{8} \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} \frac{(a^2+b^2)^2}{2} = \frac{a^4+b^4+2a^2b^2}{2} \leq a^4+b^4$

Dấu "=" xảy ra khi $a=b \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4+x^2-1} = \sqrt[4]{x^4-x^2+1} \Leftrightarrow x=1$

Cách 2:

Ta có:

- $\left(\sqrt[4]{x^4+x^2-1} + \sqrt[4]{x^4-x^2+1} \right)^2 \stackrel{\text{Bunhiacopxki}}{\leq} 2 \left(\sqrt{x^4+x^2-1} + \sqrt{x^4-x^2+1} \right)$
- $2 \left(\sqrt{x^4+x^2-1} + \sqrt{x^4-x^2+1} \right) \stackrel{\text{Bunhiacopxki}}{\leq} 2\sqrt{2(x^4+x^2-1+x^4-x^2+1)} = 4x^2$
- Do đó VT $\leq$ VP. Dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

Câu 14: Giải phương trình $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 3x + 3 = \sqrt{2x+2} + \sqrt[4]{2x-1}$

Giải

Ta có: $\begin{cases} 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x+1)} \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \frac{4+2x+2}{2} = \frac{3+x}{2} \\ \sqrt[4]{2x-1} = 1.1.1.\sqrt[4]{2x-1} \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} \frac{2x-1+3}{4} = \frac{x+1}{2} \end{cases}$

Khi đó VT - VP = $\frac{x+3}{2} - \frac{x+1}{2} = \frac{2(x-1)}{2} \geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi $x=1$

Câu 15: Giải phương trình $x + \frac{4}{x} + 3x^2 = 2\sqrt{x^3-4} + 4\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^3+4x}$

Giải

Đầu tiên ta sẽ nhân x lên để tiện đánh giá. Khi đó phương trình trở thành:

$$3x^3 + x^2 + 4 = 2x\sqrt{x^3-4} + 4x\sqrt{x-1} + 2x\sqrt{x^3+4x}$$

Bây giờ ta cần phải chứng minh VT - VP ≥ 0 . Ta sẽ biến đổi như sau:

$$\begin{aligned}
 3x^3 + x^2 + 4 &= 2x\sqrt{x^3 - 4} + 4x\sqrt{x - 1} + 2x\sqrt{x^3 + 4x} \\
 \Leftrightarrow 3x^3 + x^2 + 4 - 2x\sqrt{x^3 - 4} - 4x\sqrt{x - 1} - 2x\sqrt{x^3 + 4x} &= 0 \\
 \Leftrightarrow x^2 - 2x\sqrt{x^3 - 4} + x^3 - 4 + x^2 + 4x\sqrt{x - 1} + 4(x - 1) + 2x^3 - x^2 - 4x + 12 - 2x\sqrt{x^3 + 4x} &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x - \sqrt{x^3 - 4})^2 + (x - 2\sqrt{x - 1})^2 + 2x^3 - x^2 - 4x + 12 - 2x\sqrt{x^3 + 4x} &= 0
 \end{aligned}$$

Ta đi chứng minh $2x^3 - x^2 - 4x + 12 - 2x\sqrt{x^3 + 4x} \geq 0$.

Thật vậy:

$$2x^3 - x^2 - 4x + 12 - 2x\sqrt{x^3 + 4x} \stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} 2x^3 - x^2 - 4x + 12 - \frac{4x^2 + x^3 + 4x}{2} = \frac{(x-2)^2(3x+6)}{2} \geq 0$$

Khi đó VT ≥ 0 . Dấu "=" xảy ra khi
$$\begin{cases} x - \sqrt{x^3 - 4} = 0 \\ x - 2\sqrt{x - 1} = 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ 2x = \sqrt{x^3 + 4x} \end{cases}$$

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình. Bài toán đã được giải quyết!

Câu 16: Giải phương trình $6\sqrt[3]{x-1} + 6\sqrt[4]{2x-3} + 5\sqrt[5]{(x-1)(2x-3)} = 8x+1$

Giải

Ta sẽ đi chứng minh
$$\begin{cases} 6\sqrt[3]{x-1} \leq 2x+2 \\ 6\sqrt[4]{2x-3} \leq 3x \\ 5\sqrt[5]{(x-1)(2x-3)} \leq 3x-1 \end{cases}$$

Thật vậy, ta có:
$$\begin{cases} 6\sqrt[3]{x-1} \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} 6 \cdot \frac{x-1+1+1}{3} = 2x+2 \\ 6\sqrt[4]{2x-3} \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} 6 \cdot \frac{2x-3+3}{4} \\ 5\sqrt[5]{(x-1)(2x-3)} \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} 5 \cdot \frac{x-1+2x-3+3}{5} = 3x-1 \end{cases}.$$

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức trên ta sẽ được VT $\leq$ VP

Dấu "=" xảy ra khi $x = 2$.

Câu 17: Giải phương trình $2(x+5)\sqrt{1-3x} + 3x - 10 = \frac{5(x^2 + 4x + 9)}{2\sqrt{10-6x} + \sqrt{4+3x} + 1}$

Giải

Ta có:

$$1. \quad 2\sqrt{10-6x} + \sqrt{4+3x} = 2\sqrt{10-6x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6x+8} \stackrel{\text{Bunhiacopski}}{\leq} \sqrt{18} \sqrt{4 + \frac{1}{2}} = 9$$

$$2. \quad \text{Do đó } \frac{1}{2\sqrt{10-6x} + \sqrt{4+3x} + 1} \geq \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{5(x^2 + 4x + 9)}{2\sqrt{10-6x} + \sqrt{4+3x} + 1} \geq \frac{x^2 + 4x + 9}{2}$$

Lại có: $\frac{x^2 + 4x + 9}{2} - 2(x + 5)\sqrt{1 - 3x} + 3x - 10 = \frac{(x + 5 - 2\sqrt{1 - 3x})^2}{2} \geq 0$

Nên $VT \leq VP$

Dấu "=" xảy ra khi $x = -1$

Câu 18: Giải phương trình:

$$(x + 1)\sqrt{x + 1}\sqrt{2x + 1} + (1 - 3x)\sqrt{1 - 3x}\sqrt{x + 1} + (2x + 1)\sqrt{2x + 1}\sqrt{1 - 3x} = 3$$

Giải

Cách 1.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x + 1} \\ b = \sqrt{2x + 1} \\ c = \sqrt{1 - 3x} \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 3.$

Phương trình trở thành: $a^3b + ac^3 + cb^3 = 3 \Leftrightarrow 3(a^3b + ac^3 + cb^3) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$

Đặt $\begin{cases} b = x + a \\ c = y + a \end{cases}$ để đưa về phương trình bậc 2 ẩn a , phương trình trở thành:

$$(x^2 - xy + y^2)a^2 - (x^3 - 5x^2y + 4xy^2 + y^3)a + x^4 - 3x^3y + 2x^2y^2 + y^4 = 0$$

Có $\Delta = (x^3 - 5x^2y + 4xy^2 + y^3)^2 - 4(x^2 - xy + y^2)(x^4 - 3x^3y + 2x^2y^2 + y^4)$. Do đang ở dạng

đẳng cấp nên ta có thể đặt $t = \frac{x}{y}$. Quy về giải phương trình:

$$-3t^6 + 6t^5 + 9t^4 - 18t^3 - 6t^2 + 12t - 3 = 0$$

Nhưng tuy nhiên phương trình này có nghiệm thuộc phương trình bậc 3 nên có thể giả sử

$$-3t^6 + 6t^5 + 9t^4 - 18t^3 - 6t^2 + 12t - 3 = -3(t^3 + at^2 + bt + c)^2$$

Đồng nhất hệ số ta sẽ có: $\Delta = -3(x^3 - x^2y - 2xy + y^3)^2 \leq 0$. Do đó $VT \leq VP$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$

Ngoài cách đồng nhất hệ số ta có thể tìm đủ 3 nghiệm của phương trình rồi dùng viet cho phương trình bậc 3

Cách 2.

Bài toán xuất phát từ đẳng thức sau:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a) = \sum_{cyc} \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + bc + ca - c^2)^2 \geq 0$$

Chứng minh:

Đặt $\begin{cases} x = a^2 - ab + bc \\ y = b^2 - cb + ca \\ z = c^2 - ca + ab \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy + yz + xz = a^3b + b^3c + c^3a \\ x + y + z = a^2 + b^2 + c^2 \end{cases}$

Khi đó có:

$$\begin{aligned}
 & (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a) = (x + y + z)^2 - 3(xy + yz + xz) \\
 & = \frac{1}{2}(x - y)^2 + \frac{1}{2}(y - z)^2 + \frac{1}{2}(x - z)^2 \\
 & = \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + bc + ca - c^2)^2 + \frac{1}{2}(b^2 - 2bc + ca + ab - a^2)^2 + \frac{1}{2}(c^2 - 2ca + ab + bc - b^2)^2
 \end{aligned}$$

Bây giờ ta áp dụng: Đặt $a = \sqrt{x+1}$; $b = \sqrt{2x+1}$; $c = \sqrt{1-3x}$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
 & (x+1)\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1} + (1-3x)\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1} + (2x+1)\sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x} = 3 \\
 \Leftrightarrow & 6(x+1)\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1} + 6(1-3x)\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1} + 6(2x+1)\sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x} - 18 = 0 \\
 \Leftrightarrow & -\left(4x - 2\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}\sqrt{1-3x} + \sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x}\right)^2 \\
 & -\left(x + \sqrt{x+1}\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}\sqrt{1-3x} - 2\sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x}\right)^2 \\
 & -\left(5x - \sqrt{x+1}\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{x+1}\sqrt{1-3x} - \sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x}\right)^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & x = 0
 \end{aligned}$$

Cách 3.

Ta có:

$$\begin{aligned}
 & (x+1)\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1} + (1-3x)\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1} + (2x+1)\sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x} \\
 & \stackrel{\text{Bunhiacopski}}{\leq} \sqrt{\left[(x+1)^2 + (2x+1)^2 + (1-3x)^2\right] \left[(x+1)(2x+1) + (2x+1)(1-3x) + (1-3x)(x+1)\right]} \\
 & = \sqrt{9 - 7x^2(14x^2 - 3)}
 \end{aligned}$$

Nếu $14x^2 - 3 \geq 0$ thì bài toán coi như được giải quyết!

$$\text{Nếu } 14x^2 - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}; -\sqrt{\frac{3}{14}}\right].$$

1. Khi đó áp dụng AM - GM ta có:

$$\begin{aligned}
 & (x+1)\sqrt{x+1}\sqrt{2x+1} + (1-3x)\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1} + (2x+1)\sqrt{2x+1}\sqrt{1-3x} \\
 & \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} \frac{(x+1)(3x+2)}{2} + \frac{(2x+1)(2-x)}{2} + (1-3x)\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1} \\
 & = (1-3x)\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 = 3 - \frac{1}{8}(7\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1} + 17x - 1)(\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1} + x - 1)
 \end{aligned}$$

$$2. \quad \text{Lại có: } \begin{cases} \sqrt{1-3x}\sqrt{x+1} + x - 1 \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} \frac{2-2x}{2} + x - 1 = 0 \\ 7\sqrt{1-3x}\sqrt{x+1} + 17x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-1; \frac{-8-14\sqrt{7}}{109}\right) \end{cases}$$

3. Nên VT $\leq 3 \Rightarrow$ đpcm

Cách 4.

Ta có:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a) = \left[\sum_{\text{cyc}} a^4 - \sum_{\text{cyc}} a^2b^2 \right] + 3 \left[\sum_{\text{cyc}} a^2b^2 - \sum_{\text{cyc}} a^2bc \right] - 3 \left[\sum_{\text{cyc}} a^3b - \sum_{\text{cyc}} a^2bc \right]$$

$$\begin{aligned} \bullet 3 \left[\sum_{\text{cyc}} a^3b - \sum_{\text{cyc}} a^2bc \right] &= 3 \left[\sum_{\text{cyc}} b^3c - \sum_{\text{cyc}} a^2bc \right] = -3 \sum_{\text{cyc}} bc(a^2 - b^2) \\ &= -3 \sum_{\text{cyc}} bc(a^2 - b^2) + \sum_{\text{cyc}} (ab + bc + ca)(a^2 - b^2) \\ &= \sum_{\text{cyc}} (a^2 - b^2)(ab + ca - 2bc) \end{aligned}$$

$$\bullet 3 \left[\sum_{\text{cyc}} a^2b^2 - \sum_{\text{cyc}} a^2bc \right] = \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} (ab + ac - 2bc)^2$$

$$\bullet \sum_{\text{cyc}} a^4 - \sum_{\text{cyc}} a^2b^2 = \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} (a^2 - b^2)^2$$

Vậy ta thu được đẳng thức:

$$\begin{aligned} &(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} (a^2 - b^2)^2 + \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} (ab + ac - 2bc)^2 - \sum_{\text{cyc}} (a^2 - b^2)(ab + ac - 2bc) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} (a^2 - b^2 - ab - ac + 2bc)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Câu 19: Giải phương trình

$$\sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+3x} + \sqrt[4]{1-3x} = \sqrt[4]{1+2x} + \sqrt[4]{1-2x} + \sqrt[4]{1+4x} + \sqrt[4]{1-4x}$$

Giải

Điều kiện $-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$.

Thật ra, nét tinh ý của bài toán chính là hai nhận xét:

- $\sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x} \geq \sqrt[4]{1+2x} + \sqrt[4]{1-2x}$ với mọi $x \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.
- $\sqrt[4]{1+3x} + \sqrt[4]{1-3x} \geq \sqrt[4]{1+4x} + \sqrt[4]{1-4x}$ với mọi $x \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.

Ta chứng minh $\sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x} \geq \sqrt[4]{1+2x} + \sqrt[4]{1-2x}$ (1) với mọi $x \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.

Thật vậy, bình phương hai vế của (1) ta được

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2\sqrt[4]{1-x^2} \geq \sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} + 2\sqrt[4]{1-4x^2}$$

Mặt khác, dễ thấy rằng $1-x^2 \geq 1-4x^2$ cho nên ta cần chứng minh

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \geq \sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} \Leftrightarrow 1-x^2 \geq 1-4x^2.$$

Điều này luôn đúng, suy ra ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét thứ (2) ta chứng minh hoàn toàn tương tự. Từ đó suy ra $VT \geq VP$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Vậy $x = 0$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Nhận xét. Có thể thấy bài toán xuất phát từ ý tưởng của những đánh giá dạng $x^2 \geq 0$, $\forall x \in D$. Những lớp bài như thế không nhiều nhưng lời giải đẹp và tự nhiên. Từ lời giải trên, ta rút ra được bất đẳng thức khá thú vị: $\sqrt[4]{1+nx} + \sqrt[4]{1-nx} \geq \sqrt[4]{1+2nx} + \sqrt[4]{1-2nx}$, $n \in \mathbb{N}$. Ngoài ra, lớp căn thức của đề bài cho ta nhớ đến một bổ đề bất đẳng thức nhỏ, có nhiều ứng dụng “Cho $a, b \geq 0$ ta có $\sqrt{a+4} + \sqrt{b+4} \geq 2 + \sqrt{a+b+4}$ ” từ đây, ta liên hệ đến sự thay đổi căn thức, có thể cho những bài toán khá đẹp.

Câu 20: Giải phương trình $\frac{\sqrt{2x+1}}{x+2} + \frac{49\sqrt{x-3}}{2x+6} = \frac{11x-8}{9}$

Giải

Do bài toán có nghiệm $x = 4$ nên ta sẽ dùng bất đẳng thức Cauchy như sau:

Ta có:
$$\begin{cases} \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{2x+1} \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} \frac{x+5}{3} \\ 49\sqrt{x-3} \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} \frac{49(x-2)}{2} \end{cases}$$

Khi đó $VT - VP \leq \frac{x+5}{x+2} + \frac{49(x-2)}{2x+6} - \frac{11x-8}{9} = -\frac{(x-4)^2(44x+87)}{18(x+2)(2x+6)} \leq 0$.

Dấu “=” xảy ra khi $x = 4$

Câu 21: Giải phương trình $\sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x} - x\sqrt{x^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}(7x^2-x+4)$

Giải

Ta sẽ áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho toàn bộ vế trái của phương trình

Ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x} - x\sqrt{x^2+1} &\stackrel{\text{Bunhiacopxki}}{\leq} \sqrt{(1^2+1^2+x^2)(3x^2-1+x^2-x+x^2+1)} \\ \Rightarrow \sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x} - x\sqrt{x^2+1} &\leq \sqrt{(5x^2-x)(x^2+2)} \end{aligned}$$

Mặt khác $\sqrt{(5x^2-x)(x^2+2)} = \sqrt{\frac{1}{2}(5x^2-x) \cdot 2(x^2+2)} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7x^2-x+4}{2} = VP$

Nên dấu “=” chỉ xảy ra khi $x = -1$

Câu 22: Giải phương trình $\frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}}{x+5 + \sqrt{2(x^2+1)}} = \sqrt{(1-x)^3} + \frac{3-2\sqrt{x}}{2}$

Giải

Đặt $f(x) = \sqrt{(1-x)^3} + \frac{3-2\sqrt{x}}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-3x^2+6x-3}{2\sqrt{(1-x)^3}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$. Nên $f(x)$ nghịch biến trên

$$[0;1] \Rightarrow f(x) \geq f(1) = \frac{1}{2}.$$

Ta có:

$$1. \sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3} \stackrel{\text{Bunhiacopski}}{\leq} 2\sqrt{2(x+1)} \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} x+3 = \frac{x+5+x+1}{2} \stackrel{\text{Bunhiacopski}}{\leq} \frac{x+5+\sqrt{2(x^2+1)}}{2}$$

$$2. \text{ Khi đó } VT \leq \frac{1}{2} \leq VP$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=1$

Câu 23: Giải phương trình $\frac{576x}{(x+\sqrt{x^2+8})^3} = 3x - \frac{26}{x} + 8\sqrt{x + \frac{15}{x^2}}$

Giải

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{(x+\sqrt{x^2+8})^3}$ với $x > 0$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2+8})^3 - 3(x+\sqrt{x^2+8})^2 \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+8}}\right)x}{(x+\sqrt{x^2+8})^6} = \frac{1 - \frac{3x}{\sqrt{x^2+8}}}{(x+\sqrt{x^2+8})^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+8} = 3x \Leftrightarrow x^2+8 = 9x^2 \Leftrightarrow x=1 \quad (x > 0)$$

Lập bảng biến thiên ta thấy $\max f(x) = f(1) = \frac{1}{64}, \forall x > 0$

Suy ra $f(x) \leq \frac{1}{64} \Leftrightarrow 576f(x) \leq 9, \forall x > 0$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=1$. Mặt khác theo bất đẳng thức B.C.S ta có:

$$\left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{15}\sqrt{15}}{x}\right)^2 \leq (1+15) \left[(\sqrt{x})^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{x}\right)^2 \right] = 16 \left(x + \frac{15}{x^2}\right)$$

$$\text{Từ đó ta có } x = \frac{15}{x^2} \geq \frac{1}{16} \left(\sqrt{x} + \frac{15}{x}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{15}{x^2}} \geq \frac{1}{4} \left(\sqrt{x} + \frac{15}{x}\right)$$

$$\text{Vậy } 3x - \frac{26}{x} + 8\sqrt{x + \frac{15}{x^2}} \geq 3x - \frac{26}{x} + 2 \left(\sqrt{x} + \frac{15}{x}\right) = 3x + 2\sqrt{x} + \frac{4}{x}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta lại có $3x + 2\sqrt{x} + \frac{4}{x} = 3 \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right) \geq 6 + 3 = 9$.

$$\text{Do đó } 3x - \frac{26}{x} + 8\sqrt{x + \frac{15}{x^2}} \geq 9. \text{ Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{15}}{x} \\ x = \frac{1}{x} \\ \sqrt{x} = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Vậy } \frac{576x}{(x + \sqrt{x^2 + 8})^3} \leq 9 \leq 3x - \frac{26}{x} + 8\sqrt{x + \frac{15}{x^2}}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } x = 1.$$

Câu 24: Giải phương trình $3x^3 + x^2 - 2x + 4 = 2\sqrt{3(x^5 + x^4 + 1)}$

Giải

Để thấy nếu áp dụng bất đẳng thức Cauchy luôn thì ta được:

$$2\sqrt{3(x^5 + x^4 + 1)} \stackrel{\text{Cauchy}}{\leq} x^5 + x^2 + 4.$$

Khi đó $VT - VP \geq 3x^3 + x^2 - 2x + 4 - x^5 - x^2 - 4 = (x-1)^2(-x^3 - 3x^2 - 2x)$, ta chưa thể xác định được dấu của bất đẳng thức. Do đó nảy ra ý tưởng phân tích đa thức trong căn thành nhân tử thì khi đó sẽ dễ dàng dùng bất đẳng thức đánh giá được. Để phân tích được ta sẽ làm như sau:

Do $f(x) = x^5 + x^4 + 1 = 0$ không có nghiệm hữu tỷ tức là không phân tích được dưới dạng $(ax + b).f(x)$ nên ta sẽ giả sử $f(x) = (x^2 + ax + 1)(x^3 + bx + c + 1)$. Có thể giả sử như vậy do:

1. Phương trình chỉ có 1 nghiệm lẻ duy nhất mà nghiệm này không cùng thuộc 1 phương trình bậc 2 nào nên nếu phân tích được dưới dạng một đa thức bậc 2 nhân với một đa thức bậc 3 thì đa thức bậc 2 phải vô nghiệm.
2. Do hệ số tự do bằng 1 và kết hợp với lí do trên ta sẽ viết được phương trình dưới dạng trên.

Khi đó có:

$$(x^2 + ax + 1)(x^3 + bx + c + 1) = x^5 + x^4 + (a+b)x^3 + (ab+c+1)x^2 + (ac+b+1)x + (a+c+1)$$

$$\text{Đồng nhất hệ số ta được: } \begin{cases} a+b=1 \\ ab+c+1=0 \\ ac+b+1=0 \\ a+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -c+b-bc+c=0 \\ 2b-c^2-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(1-c)=0 \\ 2b-c^2-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x^5 + x^4 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$$

Khi đó áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được:

$$2\sqrt{3(x^5 + x^4 + 1)} = 2\sqrt{3(x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)} \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} 2 \cdot \frac{x^2 + x + 1 + 3(x^3 - x + 1)}{2} = VT$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x^2 + x + 1 = 3(x^3 - x + 1) \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3} \\ x = -\frac{1 + \sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

Thử lại thấy thỏa mãn. Vậy bài toán đã được giải quyết!

Nhận xét

Ngoài cách đồng nhất hệ số như trên ta có thể dùng Casio phân tích nhân tử.

Chuyển máy sang môi trường số phức **MODE****2**. Khi đó dùng thuật toán lặp Newton - Rapshon ta sẽ phân tích phương trình này. Trước hết ta cần biết:

1. Xét dãy $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ và một hằng số x_0 cho trước.
2. Khi đó nếu $\lim_{x \rightarrow \infty} = k$ thì k là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Do đó để phân tích phương trình này ta cần tính $f'(x) = 5x^4 + 4x^3$ của hàm $f(x) = x^5 + x^4 + 1$.

Tiếp theo nhập vào máy biểu thức: $X = X - \frac{X^5 + X^4 + 1}{5X^4 + 4X^3}$. Do phương trình có nghiệm phức nên ta sẽ **CALC** $X = i$. Bấm khoảng hơn 20 lần ta thấy nó về $-\frac{1}{2} - 0,8660254038i \rightarrow A$.

Sau đó dùng **Viet** để tìm ra phương trình bậc 2. Ấn **SHIFT****2****2** máy hiển thị chữ **Conjg**(. Cái này nghĩa là tính năng chỉ ra số phức liên hợp. Do phương trình bậc 2 thì sẽ có 2 nghiệm liên hợp nên ta sẽ tính

$\begin{cases} A \text{Conjg}(A = 1 \\ A + \text{Conjg}(A = -1 \end{cases} \Rightarrow$ Nhân tử bậc 2 cần tìm là

$x^2 + x + 1$. Đến đây chia đa thức là xong!

Chú ý:

1. Những bạn có VINACAL thì phải nhớ khi nhập thì phải nhập là $X = X - \frac{X^3X^2 + X^3X + 1}{5X^3X + 4X^3}$ bởi vì dòng máy này ko tính được giá trị $(i)^4$ trở lên. Nên ta sẽ đưa về dạng $(i)^3$.
2. Đây là trường hợp may mắn khi ta tìm được nghiệm phức của phương trình bậc 2. Giả sử nếu là nghiệm phức của phương trình bậc 3 thì sao? Ta vẫn làm tương tự.

Dùng Viet cho phương trình bậc 3 ta sẽ có:
$$\begin{cases} x_1 x_2 x_3 = -\frac{d}{a} \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = \frac{c}{a} \\ x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$
 Khi đó chỉ cần

tìm được 1 nghiệm phức và một nghiệm thực ta sẽ suy ra phương trình bậc 3 cần tìm. Nhớ là tìm nghiệm thực trước.

Ta cũng có thể bình phương tung tóe bài này lên, ta được:

$$3x^3 + x^2 - 2x + 4 = 2\sqrt{3(x^5 + x^4 + 1)} \Rightarrow (3x^3 + x^2 - 2x + 4)^2 = 12(x^5 + x^4 + 1)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(3x^2 + 2x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (t/m)} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3} \text{ (t/m)} \\ x = -\frac{1 + \sqrt{7}}{3} \text{ (t/m)} \end{cases}$$

Câu 25: Giải phương trình $\sqrt[6]{x^6 + x^3 - 2x - 1} + \sqrt[6]{x^6 - x^3 + 2x + 1} = 2x$

Giải

Đặt
$$\begin{cases} \sqrt[6]{x^6 + x^3 - 2x - 1} = a \text{ (} a > 0 \text{)} \\ \sqrt[6]{x^6 - x^3 + 2x + 1} = b \text{ (} b > 0 \text{)} \end{cases} \Rightarrow (a+b)^6 = 32(a^6 + b^6)$$

Dễ dàng chứng minh được bất đẳng thức sau:

$$\frac{(a+b)^6}{32} \leq a^6 + b^6 \Leftrightarrow 32[(a^2)^3 + (b^2)^3] \geq (a+b)^6$$

Sử dụng bất đẳng thức $4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3 \Leftrightarrow 3(a-b)^2(a+b) \geq 0$ ta cần chứng minh được:

$8(a^2 + b^2)^3 \geq (a^2 + b^2 + 2ab)^3$. Theo AM - GM có $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ nên bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Từ đó suy ra được dấu "=" xảy ra khi $\sqrt[6]{x^6 + x^3 - 2x - 1} = \sqrt[6]{x^6 - x^3 + 2x + 1} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Câu 26: Giải phương trình $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$

MO Yugoslavia

Giải

Ta có:
$$\begin{cases} \sqrt{x - \frac{1}{x}} = \sqrt{1 \left(x - \frac{1}{x} \right)} \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} \frac{1 + x - \frac{1}{x}}{2} \\ \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{1}{x} (x - 1)} \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} \frac{\frac{1}{x} + x - 1}{2} \end{cases}$$

Khi đó $VP \leq x$. Dấu "=" xảy ra khi
$$\begin{cases} 1 = x - \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Câu 27: Giải phương trình $\sqrt[4]{3(x+5)} - \sqrt[4]{11-x} = \sqrt[4]{13+x} - \sqrt[4]{3(3-x)}$.

Giải

Phương trình đã cho ta sẽ biến đổi phương trình về phương trình.

$$\sqrt[4]{3(x+5)} + \sqrt[4]{3(3-x)} = \sqrt[4]{13+x} + \sqrt[4]{11-x} \quad (1)$$

Đặt: $a = \sqrt[4]{3(x+5)}$; $b = \sqrt[4]{3(3-x)}$; $c = \sqrt[4]{13+x}$; $d = \sqrt[4]{11-x}$, ($a, b, c, d \geq 0$)

Khi đó (1) trở thành:
$$\begin{cases} a + b = c + d \\ a^4 + b^4 = c^4 + d^4 \end{cases} \quad (*)$$

Sử dụng hằng đẳng thức: $(m+n)^4 = m^4 + 4m^3n + 6m^2n^2 + 4mn^3 + n^4$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } a^4 + b^4 = c^4 + d^4 &\Leftrightarrow (a+b)^4 - 2ab(2a^2 + 3ab + 2b^2) = (c+d)^4 - 2cd(2c^2 + 3cd + 2d^2) \\ &\Rightarrow ab[2(a+b)^2 - ab] = cd[2(c+d)^2 - cd] \\ &\Rightarrow (ab - cd)[(a+b)^2 - ab + (c+d)^2 - cd] = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Có được tất cả các phép biến đổi đó là nhờ sử dụng $a + b = c + d$.

Tới đây ta chú ý rằng: $(a+b)^2 \geq 4ab \geq ab$; $(c+d)^2 \geq 4cd \geq cd$.

Do đó ta có (2) tương đương với
$$\begin{cases} ab = cd \\ a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow ab = cd \text{ vì } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } ab = cd &\Leftrightarrow \sqrt[4]{9(x+5)(3-x)} = \sqrt[4]{(13+x)(11-x)} \\ &\Leftrightarrow -9x^2 - 18x + 135 = -x^2 + 2x + 143 \Leftrightarrow x = -1. \end{aligned}$$

Cách 2: Đặt:
$$\begin{cases} a = \sqrt[4]{15+3x} \\ b = \sqrt[4]{9-3x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 = 15+3x \\ b^4 = 9-3x \end{cases} \Rightarrow a^4 + b^4 = 24, (a, b \geq 0).$$

$$\text{Ta có } x+13 = \frac{1}{3}[2(15+3x)+9-3x] = \frac{2a^4+b^4}{3}, 11-x = \frac{1}{3}[15+3x+2(9-3x)] = \frac{a^4+2b^4}{3}$$

Kết hợp từ điều kiện và phương trình đã cho ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^4 + b^4 = 24 \\ a + b = \sqrt[4]{\frac{2a^2 + b^4}{3}} + \sqrt[4]{\frac{a^4 + 2b^4}{3}} \end{cases}$$

Ta có với mọi số thực m, n, p ta luôn có: $m^2 + n^2 + p^2 \geq \frac{1}{3}(m + n + p)^2$

Thật vậy ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức:

$$\begin{aligned} 3(m^2 + n^2 + p^2) &\geq (m + n + p)^2 \Leftrightarrow 2(m^2 + n^2 + p^2) - 2(mn + np + mp) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (m - n)^2 + (n - p)^2 + (p - m)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $m = n = p$

Áp dụng bất đẳng thức này ta có:

$$\frac{2a^4 + b^4}{3} = \frac{a^4 + a^4 + b^4}{3} \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} (a^2 + a^2 + b^2)^2 \geq \frac{1}{9} \left[\frac{1}{3} (a + a + b)^2 \right]^2 = \frac{1}{81} (2a + b)^4$$

Hay ta có $\sqrt[4]{\frac{2a^4 + b^4}{3}} \geq \frac{1}{3} (2a + b)$.

Thiết lập tương tự ta có $\sqrt[4]{\frac{a^4 + 2b^4}{3}} \geq \frac{1}{3} (a + 2b)$

Từ đó ta có: $\sqrt[4]{\frac{2a^4 + b^4}{3}} + \sqrt[4]{\frac{a^4 + 2b^4}{3}} \geq a + b$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a = b$.

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} a^4 + b^4 = 24 \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 2\sqrt{3} \\ b^2 = 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{15 + 3x} = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{9 - 3x} = 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$.

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = -1$.

Cách 3: Điều kiện: $-5 \leq x \leq 3$.

Phương trình đã cho được biến đổi về phương trình sau:

$$\sqrt[4]{15 + 3x} + \sqrt[4]{9 - 3x} = \sqrt[4]{15 + (x - 2)} + \sqrt[4]{9 - (x - 2)} \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt[4]{15 + t} + \sqrt[4]{9 - t}$, $\forall t \in [-15; 9]$

Ta có $f'(t) = \frac{1}{(\sqrt[4]{15 + t})^3} - \frac{1}{(\sqrt[4]{9 - t})^3}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt[4]{15 + t})^3} = \frac{1}{(\sqrt[4]{9 - t})^3} \Leftrightarrow t = -3$.

Khi đó ta có: $f'(t) \leq 0, \forall t \in [-15; -3]$, $f'(t) \geq 0, \forall t \in [-3; 9]$

Mặt khác $3x, x - 2 \in [-15; -3]$ khi $x \in [-5; -1]$, $3x, x - 2 \in [-3; 9]$ khi $x \in [-1; 3]$

Từ đó từ (3) ta có $f(3x) = f(x - 2) \Leftrightarrow 3x = x - 2 \Leftrightarrow x = -1$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Câu 28: Giải phương trình $x^4 + x^2 + 1 = \sqrt{3(x^7 + x^3 + x^2)}$

Giải

Bài này tương tự như bài 14. Ta sẽ phân tích $x^7 + x^3 + x^2 = x^2(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}x^4 + x^2 + 1 &= \sqrt{3(x^7 + x^3 + x^2)} \\ \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) &= \sqrt{3x^2(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)} \\ \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1} &= \sqrt{3x^2(x^3 - x^2 + 1)}\end{aligned}$$

Lại có:

$$\begin{aligned}1. \quad \sqrt{3x^2(x^3 - x^2 + 1)} &\stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} \frac{\sqrt{3}(x^3 + 1)}{2} = \frac{\sqrt{3}(x + 1)(x^2 - x + 1)}{2} \\ 2. \quad \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{\sqrt{3}(x + 1)}{2} &= \frac{\frac{1}{4}(x - 1)^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{\sqrt{3}(x + 1)}{2}} \geq 0 \\ 3. \quad (x^2 - x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1} &= \sqrt{3x^2(x^3 - x^2 + 1)} \leq \frac{\sqrt{3}(x + 1)(x^2 - x + 1)}{2}\end{aligned}$$

Nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ngoài ra nếu để ý ta thấy bài này có thể đưa về bài toán giống bài 19 bằng cách đặt $a = x^2; b = x; c = 1$. Khi đó phương trình trở thành: $a^2 + b^2 + c^2 = \sqrt{3(a^3b + b^3c + c^3a)}$

Ta biết rằng: $(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a) = \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + bc + ca - c^2)^2 \geq 0$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Câu 29: Giải phương trình $4x + \sqrt{x^2 + (1 + \sqrt{2})x + 1} + \sqrt{x^2 + (1 - \sqrt{2})x + 1} = 2\sqrt{5x + 1}$

Giải

Ta có: $4x - 2\sqrt{5x + 1} \stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} -x - 2$

Khi đó ta có:

$$\sqrt{x^2 + (1 + \sqrt{2})x + 1} + \sqrt{x^2 + (1 - \sqrt{2})x + 1} \geq x + 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1} \geq -x^2 + 2x + 2$$

Nếu $x \in \left[1 - \sqrt{3}; -\frac{1}{5}\right] \cup \left[1 + \sqrt{3}; +\infty\right)$ thì bài toán đã được giải quyết

Nếu $x \in \left[-\frac{1}{5}; 1 + \sqrt{3}\right]$ ta có:

$$2\sqrt{x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1} \geq -x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow x^2(3x^2 + 12x + 4) \geq 0 \forall x \in \left[-\frac{1}{5}; 1 + \sqrt{3}\right]$$

Từ đó suy ra VT $\geq$ VP. Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$

Bài toán đã được giải quyết hoàn toàn!

Câu 30: Giải phương trình $(x - 1)^2(x - 2)^2 + \sqrt[4]{x^2 - 3x + 3} + \frac{x - 5}{4} = 0$

Giải

Xét $x \leq -5$ ta có:

$$(x-1)^2(x-2)^2 + \frac{x-5}{4} = \frac{4(x+5)^4 - 103(x+5)^3 + 1001(x+5)^2 - 4337(x+5) + 7046}{4} > 0$$

$\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm trên $(-\infty; -5]$

Xét $x \geq -5$, ta đi chứng minh $\sqrt[4]{x^2 - 3x + 3} \geq \frac{5-x}{4}$

Nếu $x \geq 5$ thì bài toán đã được chứng minh.

Nếu $x \in [-5; 5]$ ta có:

$$\sqrt[4]{x^2 - 3x + 3} \geq \frac{5-x}{4} \Leftrightarrow -x^4 + 20x^3 + 106x^2 - 268x + 143 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(-x^2 + 18x + 143) \geq 0$$

Không khó để nhận ra bất đẳng thức cuối luôn đúng với $x \in [-5; 5]$.

Vậy VT ≥ 0 . Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$

Câu 31: Giải phương trình $\frac{1+2\sqrt{x}-x\sqrt{x}}{3-x-\sqrt{2-x}} = 2\left(\frac{1+x\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

Giải

Cách 1.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x} \\ b = \sqrt{2-x} \end{cases}; a, b \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2$.

Phương trình đã cho biến đổi thành $\frac{1+2a-a^3}{3-a-b} = 2\frac{a^3+1}{a^2+1}$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+1)(a^2-a-1)}{a^2+b-3} = 1 + \frac{(a-1)^2}{a^2+1} \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2}{a^2+1} = \frac{a+b-2}{b^2-b+1} (*)$$

Từ giả thiết $a^2 + b^2 = 2 \Rightarrow a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)} = 2$.

Do đó vế trái $(*) \geq$ vế phải $(*)$.

Nên phương trình đã cho có nghiệm tương đương $\begin{cases} a = 1 \\ a = b \end{cases} \Rightarrow x = 1$.

Vậy $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

Cách 2.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x} \\ b = \sqrt{2-x} \end{cases}; a, b \geq 0$

Từ phép đặt trên cho ta $a^2 + b^2 = 2$

Ta viết lại phương trình đã cho thành $\frac{1+2a-a(2-b^2)}{3-(2-b^2)-b} = 2\frac{1+a^3}{1+a^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1+ab^2}{b^2-b+1} = 2 \frac{1+a^3}{1+a^2} \Leftrightarrow 1+ab^2+a^2+a^3b^2=2b^2-2b+2+2a^3b^2-2a^3b+2a^3$$

$$\Leftrightarrow a^3(b^2-2b+1)+b^2-2b+1+b^2-ab^2+a^3-a^2=0$$

$$\Leftrightarrow (a^3+1)(b-1)^2+(a-1)(a^2-b^2)=0 \Leftrightarrow (a^3+1)(b-1)^2+2(a-1)(a^2-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (a^3+1)(b-1)^2+2(a-1)^2(a+1)=0$$

Mà từ điều kiện $a, b \geq 0$ nên ta có $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

Vậy $x=1$ là nghiệm của phương trình.

Câu 32: Giải phương trình $x^2+4x+5-\frac{3x}{x^2+x+1}=(x-1)\left(1-\frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2016 – Chuyên Quốc học Huế

Giải

Ta có:

$$x^2+4x+5-\frac{3x}{x^2+x+1}=(x-1)\left(1-\frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2+4x+5)(x^2+x+1)-3x}{x^2+x+1}=\frac{(x-1)(\sqrt{x^2+x+1}-2\sqrt{1-x})}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+4x+5)(x^2+x+1)-3x=(x-1)(x^2+x+1-2\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{1-x})$$

$$\Leftrightarrow x^4+4x^3+10x^2+6x+6+2(x-1)\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{1-x}=0$$

Để ý thấy: $2(x-1)\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{1-x} \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 2(x-1) \cdot \frac{x^2+2}{2}.$

Nên VT $\geq (x+2)^2(x^2+x+1) \geq 0.$

Dấu “=” xảy ra khi $x=-2$

Câu 33: Giải phương trình $\frac{2}{(\sqrt{x}+1)^2}+\frac{1}{x+\sqrt{2x-1}}=\frac{2}{1+\sqrt{x(2x-1)}}$

Đề thi thử THPT Quốc Gia 2015 – Lần 1 – THPT Minh Châu – Hưng Yên

Giải

Bài này đã cố tình che giấu đi mẫu của phân thức thứ 2 để làm đánh lạc hướng người làm

do đó ta cần có 1 bước biến đổi: $x+\sqrt{2x-1}=\frac{1}{2}(\sqrt{2x-1}+1)^2$

Khi đó phương trình tương đương: $\frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2}+\frac{1}{(\sqrt{2x-1}+1)^2}=\frac{1}{1+\sqrt{x(2x-1)}}$

Nhìn thế này ta sẽ nghĩ ngay tới bất đẳng thức AM – GM dạng cộng mẫu số, ta có:

$$\frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2} + \frac{1}{(\sqrt{2x-1}+1)^2} \geq \frac{4}{(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{2x-1}+1)^2}$$

Bài toán sẽ được giải quyết nếu ta chứng minh được:

$$\begin{aligned} \frac{4}{(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{2x-1}+1)^2} &\geq \frac{1}{1+\sqrt{x(2x-1)}} \Leftrightarrow \frac{3-3x+4\sqrt{x(2x-1)}-2(\sqrt{x}+\sqrt{2x-1})}{(1+\sqrt{x(2x-1)})[(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{2x-1}+1)^2]} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(2\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}-1)(2\sqrt{x}+5\sqrt{2x-1}-1)}{2(1+\sqrt{x(2x-1)})[(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{2x-1}+1)^2]} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2(\sqrt{x}-1)^2 \left[\frac{4x-1}{2\sqrt{x}+1} + 5\sqrt{2x-1} \right]}{2 \left[\frac{4x-1}{2\sqrt{x}+1} + \sqrt{2x-1} \right] 2(1+\sqrt{x(2x-1)})[(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{2x-1}+1)^2]} \geq 0 \end{aligned}$$

Dễ thấy bất đẳng thức cuối đúng với $x \geq \frac{1}{2}$ nên VT - VP ≥ 0 , dấu "=" xảy ra khi $x = 1$

Ngoài ra nếu ta đặt $\begin{cases} \sqrt{x} = a \\ \sqrt{2x-1} = b \end{cases}$ thì khi đó ta cần chứng minh $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{1}{1+ab}$.

Ta có đẳng thức sau đây: $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} - \frac{1}{1+ab} = \frac{ab(a-b)^2 + (1-ab)^2}{(a+1)^2(b+1)^2(1+ab)} \geq 0$. Vậy bất

đẳng thức đã được chứng minh.

Ta cũng có thể dùng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz chứng minh được. Ta có:

$$\begin{cases} (ab+1)\left(\frac{a}{b}+1\right) \geq (a+1)^2 \\ (ab+1)\left(\frac{b}{a}+1\right) \geq (b+1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{(a+1)^2} \geq \frac{b}{(a+b)(ab+1)} \\ \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{a}{(a+b)(ab+1)} \end{cases}$$

Cộng lại có điều cần chứng minh!

Nếu áp dụng luôn thì phương trình ban đầu trở thành:

$$\frac{\sqrt{x}\sqrt{2x-1}(\sqrt{x}-\sqrt{2x-1})^2 + (1-\sqrt{x(2x-1)})^2}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{2x-1}+1)^2(1+\sqrt{x(2x-1)})} = 0$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{2x-1}=0 \\ 1-\sqrt{x(2x-1)}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Câu 34: Giải phương trình $\frac{x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{2-x}+x-3} = \frac{2x-2\sqrt{x}+2}{x+1}$

Giải

Điều kiện $0 \leq x \leq 2$.

Phương trình đã cho được biến đổi tương đương thành phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{x\sqrt{x}+x-x-\sqrt{x}-\sqrt{x}-1}{\sqrt{2-x}+x-3} &= \frac{2(1+\sqrt{x})(x-\sqrt{x}+1)}{1+x} \\ \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}-1)}{\sqrt{2-x}+x-3} &= \frac{2(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{1+x} \\ \Leftrightarrow \frac{x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{2-x}+x-3} &= \frac{2x-2\sqrt{x}+2}{1+x} \quad (1). \end{aligned}$$

Để ý rằng $\sqrt{2-x}+x-3 < 0, \forall x \in [0;2]. \quad x-\sqrt{x}-1 \geq \sqrt{2-x}+x-3$

Mặt khác, ta có $\frac{x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{2-x}+x-3} \leq 1, \forall x \in [0;2] \quad (2).$

Thật vậy, ta có (2) tương đương với $\Leftrightarrow \sqrt{2-x}+\sqrt{x} \leq 2 \quad (3)$

Dễ thấy rằng (3) luôn đúng vì theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$\sqrt{2-x}+\sqrt{x} \leq \sqrt{(1^2+1^2)(2-x+x)} = 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\sqrt{2-x}=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=1.$

Lại có $\frac{2x-2\sqrt{x}+2}{1+x} \geq 1, \forall x \in [0;2] \quad (4)$

Thật vậy, (4) tương đương với $2x-2\sqrt{x}+2 \geq 1+x \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 \geq 0.$

Dấu đẳng thức ở (4) xảy ra khi và chỉ khi $x=1.$

Vậy ta có $\begin{cases} \frac{x-\sqrt{x}-1}{\sqrt{2-x}+x-3} \leq 1 \\ \frac{2x-2\sqrt{x}+2}{x+1} \geq 1 \end{cases}; \forall x \in [0;2]$ nên (1) xảy ra khi và chỉ khi $x=1.$

Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 35: Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{3x+1}+1} = 1$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM dạng cộng mẫu ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{3x+1}+1} \geq \frac{4}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1}+2} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}+1}$$

Áp dụng tiếp bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có: $\sqrt{x+1}+\sqrt{3x+1} \leq 2\sqrt{2x+1}$

Khi đó VT $\geq \frac{2}{\sqrt{2x+1}+1} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}+1} = \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}+1}$

Bây giờ nhiệm vụ của chúng ta là phải chứng minh được:

$$\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}+1} \geq 1 \Leftrightarrow x+2 \geq \sqrt{2x+1}+1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{2x+1}-1)^2 \geq 0$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$

Câu 36: Giải phương trình $\frac{x^2+x+1}{(x^2+\sqrt{x+1})^2} + \frac{x^2+x+2}{(x^2+\sqrt{x+2})^2} + \frac{x^2+x+3}{(x^2+\sqrt{x+3})^2} = 3$

Giải

Ta có: $\frac{x^2+x+1}{(x^2+\sqrt{x+1})^2} \leq 1 \Leftrightarrow x^2+x+1 \leq (x^2+\sqrt{x+1})^2 \Leftrightarrow x^2\sqrt{x+1}((x-1)\sqrt{x+1}+2) \geq 0$

Nếu $x \geq 1$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Nếu $x < 1$ thì: $(x-1)\sqrt{x+1}+2 = \frac{-x^3+x^2+x+3}{2+(1-x)\sqrt{x+1}} = \frac{x^2(1-x)+x+3}{2+(1-x)\sqrt{x+1}} > 0$

Do đó $\frac{x^2+x+1}{(x^2+\sqrt{x+1})^2} \leq 1$. Thiết lập các bất đẳng thức còn lại tương tự ta cũng sẽ được:

$$\frac{x^2+x+2}{(x^2+\sqrt{x+2})^2} \leq 1; \frac{x^2+x+3}{(x^2+\sqrt{x+3})^2} \leq 1$$

Cộng 3 bất đẳng thức ta được $VT \leq VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$

Câu 37: Giải phương trình $\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + \frac{x+2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})^2} = 1$

Giải

Đầu tiên ta sẽ chứng minh $\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + \frac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} \geq 2$

Bất đẳng thức biến đổi thành $\frac{\sqrt{x-2}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}-2\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})} \geq 0$ đúng với $x \geq 2$.

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có $\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + \frac{x+2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})^2} = 1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + \frac{x+2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})^2} + 1 - 1 \geq \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + \frac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} - 1 \geq 1$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 2$.

Cách 2.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\frac{4\frac{x-2}{x+2}}{3\frac{x-2}{x+2}+1}} + \frac{1}{\left(1+\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}\right)^2} = 1$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$, ($t \geq 0$) ta được phương trình:

$$\frac{2t}{\sqrt{3t^2+1}} + \frac{1}{(1+t^2)} = 1 \Leftrightarrow \frac{2t}{\sqrt{3t^2+1}} = \frac{t^2+2t}{(t+1)^2} \Leftrightarrow \frac{4t^2}{3t^2+1} = \frac{(t^2+2t)^2}{(t+1)^4}$$

$$\Leftrightarrow t^3(t^3+4t^2+11t+12)=0 \Leftrightarrow t=0$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Câu 38: Giải phương trình $\frac{3}{\sqrt{x^2+2x-2}} + \sqrt{-x^2+2x+3} = \sqrt{85-60x}$

Giải

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:
$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2x-2} \cdot 1 \leq \frac{x^2+2x-1}{2} \\ \frac{1}{5} \cdot 5\sqrt{85-60x} \leq 11-6x \end{cases}$$

Khi đó :

$$\begin{aligned} VT - VP &\geq \frac{6x^3+x^2-28x+17+(x^2+2x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}{x^2+2x-1} \\ &= \frac{(2-\sqrt{-x^2+2x+3})((6x+15)\sqrt{-x^2+2x+3}-x^2+10x+31)}{x^2+2x-1} \\ &= \frac{(x-1)^2((6x+15)\sqrt{-x^2+2x+3}-x^2+10x+31)}{(x^2+2x-1)(2+\sqrt{-x^2+2x+3})} \end{aligned}$$

Để ý thấy với $x \in \left[-1+\sqrt{3}; \frac{17}{12}\right]$ thì $\begin{cases} 6x+15 > 0 \\ -x^2+10x+31 > 0 \\ x^2+2x-1 > 0 \end{cases}$ nên $VT - VP \geq 0$.

Dấu “=” xảy ra khi $x=1$

Câu 39: Giải phương trình $(1+\sqrt{3x+1})(1+\sqrt{x+2})(1+\sqrt{5x}) = (1+\sqrt[3]{15x^3+35x^2+10x})$

Giải

Nhìn thấy dạng tích là sẽ nghĩ ngay tới bất đẳng thức Holder, trước hết ra sẽ đi chứng minh nó.

Có bổ đề sau [Holder]: Cho các số thực dương $a, b, c, x, y, z, m, n, p$ khi đó ta luôn có:

$$(a^3+b^3+c^3)(x^3+y^3+z^3)(m^3+n^3+p^3) \geq (axm+byn+czp)^3$$

Chứng minh: Theo AM – GM ta có:

$$1. \frac{a^3}{a^3+b^3+c^3} + \frac{m^3}{m^3+n^3+p^3} + \frac{x^3}{x^3+y^3+z^3} \geq \frac{3axm}{\sqrt[3]{(a^3+b^3+c^3)(m^3+n^3+p^3)(x^3+y^3+z^3)}}$$

$$2. \frac{b^3}{a^3+b^3+c^3} + \frac{n^3}{m^3+n^3+p^3} + \frac{y^3}{x^3+y^3+z^3} \geq \frac{3byn}{\sqrt[3]{(a^3+b^3+c^3)(m^3+n^3+p^3)(x^3+y^3+z^3)}}$$

$$3. \frac{c^3}{a^3+b^3+c^3} + \frac{p^3}{m^3+n^3+p^3} + \frac{z^3}{x^3+y^3+z^3} \geq \frac{3cpz}{\sqrt[3]{(a^3+b^3+c^3)(m^3+n^3+p^3)(x^3+y^3+z^3)}}$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên có điều phải chứng minh.

Quay lại bài, ta đề ý thấy $15x^3 + 35x^2 + 10x = 5x(3x+1)(x+2)$. Nên sẽ đặt $\begin{cases} a = \sqrt{3x+1} \\ b = \sqrt{x+2} \\ c = \sqrt{5x} \end{cases}$. Khi

đó phương trình trở thành: $(a+1)(b+1)(c+1) \geq (1+\sqrt[3]{abc})^3$

Theo bất đẳng thức Holder ta có: $\prod_{cyc} \left(\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right)^3 + (\sqrt[3]{a})^3 \right) \geq (1+\sqrt[3]{abc})^3$

Vậy dấu "=" xảy ra khi $a = b = c \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = \sqrt{x+2} = \sqrt{5x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Câu 40: Giải phương trình $x\sqrt{x^2+x-2} + 3x\sqrt{x^5-1} = \sqrt{(x^2+3)(3x^7-2x^2+x-2)}$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$x\sqrt{x^2+x-2} + 3x\sqrt{x^5-1} = x\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3x}\sqrt{x^5-1} \leq \sqrt{(x^2+3)(3x^7-2x^2+x-2)} = VP$$

Nhìn có vẻ dễ nhưng đến đây mới có vấn đề nảy sinh. Dấu "=" xảy ra khi:

$$\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x} = x\sqrt{x^5-1} \Leftrightarrow x^9 - x^4 - x^2 - x + 2 = 0$$

Phương trình không thật sự dễ giải cho lắm, chắc phải dùng đến hàm số.

Đặt: $f(x) = x^9 - x^4 - x^2 - x + 2$ liên tục trên $[1; +\infty)$.

$$\Rightarrow f'(x) = 9x^8 - 4x^3 - 2x - 1 = 9x^8 - 9x^3 + 2x^3 - 2x + 3x^3 - 1 > 0 \forall x \geq 1$$

Vậy $f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$. Lại có $f(1) = 0$ nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bên cạnh hàm số ta cũng có thể phân tích $f(x)$ thành nhân tử. Ta được:

$$f(x) = x^9 - x^4 - x^2 - x + 2 = (x-1)(x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 - x - 2)$$

$$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 - x - 2 = x^8 + x^7 + (x^6 + x^5 - 2) + x(x-1)(x^2 + x + 1) > 0 \forall x \geq 1$$

Khi đó phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Câu 41: Giải phương trình $\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} + \sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} = 2(x-1)^2(2x^2-4x+1)$

Giải

Để đơn giản ta sẽ đặt $\sqrt{2x-x^2} = t (t \in [0; 2]) \Rightarrow (x-1)^2 = 1-t^2$

Phương trình trở thành: $\sqrt{t+1} + \sqrt{1-t} = 2(1-t^2)(1-2t^2)(*)$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có: $\sqrt{t+1} + \sqrt{1-t} \geq 2\sqrt{(t+1)(1-t)}$

Khi đó ta có:

$$VT - VP \geq 2\sqrt{(t+1)(1-t)} - 2(1-t^2)(1-2t^2) = 2\sqrt{1-t^2} \left(1 - (1-2t^2)\sqrt{1-t^2}\right)$$

Mặt khác ta luôn có:

$$1 - (1-2t^2)\sqrt{1-t^2} \stackrel{AM-GM}{\geq} 1 - \frac{(1-2t^2)(2-t^2)}{2} = \frac{t^2(5-2t^2)}{2} \geq 0$$

- Vậy $VT - VP \geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$
- Ngoài ra ta còn có thể sử dụng bất đẳng thức AM - GM ở phương trình (*). Ta có:
 1. $\sqrt{t+1} + \sqrt{1-t} \geq 2\sqrt{1-t^2}$
 2. $2\sqrt{1-t^2} \geq 2(1-t^2) \Leftrightarrow 1 \geq \sqrt{1-t^2} \Leftrightarrow t^2 \geq 0$
 3. Do đó $VT - VP \geq 2(1-t^2)(2t^2) \geq 0$
- Dấu "=" xảy ra khi $t = 0 \Rightarrow \sqrt{2x-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$
- Bên cạnh với cách sử dụng bất đẳng thức ta có thể làm theo 3 cách sau, hơi trầy cối!

Cách 1.

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} + \sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} &= 2(x-1)^2(2x^2-4x+1) \\ \Leftrightarrow \sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} + \sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} & \\ &= 2\left(1-\sqrt{2x-x^2}\right)\left(1+\sqrt{2x-x^2}\right)\left(2\left(1-\sqrt{2x-x^2}\right)\left(1+\sqrt{2x-x^2}\right)-1\right) \end{aligned}$$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} \\ b = \sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 2$. Phương trình trở thành: $a + b = 2a^2b^2(2a^2b^2 - 1)$

Khi đó ta giải hệ sau: $\begin{cases} a + b = 2a^2b^2(2a^2b^2 - 1) \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 - 2ab = 2 \\ a + b = 2a^2b^2(2a^2b^2 - 1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab = \frac{(a+b)^2 - 2}{2} = \frac{t^2 - 2}{2} \\ t = \frac{(t^2 - 2)^2}{2} \left(\frac{(t^2 - 2)^2}{2} - 1 \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = \frac{(a+b)^2 - 2}{2} = \frac{t^2 - 2}{2} \\ (t-2) \left(\underbrace{t^7 + 2t^6 - 4t^5 - 8t^4 + 6t^3 + 12t^2 - 4}_{f(t)} \right) = 0 (*) \end{cases}$$

Theo giả thiết suy ra $t > 1$. Cần chứng minh $f(t) > 0$. Ta có:

$$\begin{aligned} f(t) &= (t-1)^7 + 9(t-1)^6 + 29(t-1)^5 + 37(t-1)^4 + 9(t-1)^3 \\ &\quad - 7(t-1)^2 + 9(t-1) + 5 > 0 \end{aligned}$$

$$9(t-1)^3 - 7(t-1)^2 + 9(t-1) = (t-1) \left(9 \left(x - \frac{25}{18} \right)^2 + \frac{275}{36} \right) > 0$$

Vậy ta được:

$$(*) \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ ab=1 \end{cases} \Rightarrow a=b=1 \Rightarrow \sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} = \sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

Cách 2.

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} + \sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} &= 2(x-1)^2(2x^2-4x+1) \\ \Leftrightarrow 2+2\sqrt{(x-1)^2} &= \left(2(x-1)^2(2x^2-4x+1) \right)^2 \\ \Leftrightarrow 2+2\sqrt{(x-1)^2} &= \left[2\sqrt{(x-1)^2}^2 \left[2\sqrt{(x-1)^2}^2 - 1 \right] \right]^2 \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{(x-1)^2}$ ($t \geq 0$), phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} 2+2t &= \left(2t^2(2t^2-1) \right)^2 \Leftrightarrow 8t^8 - 8t^6 + 2t^4 - t - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow (t-1)(8t^7 + 8t^6 + 2t^3 + 2t^2 + 2t + 1) &= 0 \Leftrightarrow t = 1 \end{aligned}$$

Với $t = 1$ ta có $\sqrt{(x-1)^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$

Cách 3: Liên hợp. Ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} + \sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} &= 2(x-1)^2(2x^2-4x+1) \\ \Leftrightarrow \sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} - 1 + \sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} - 1 + x(2-x)(4x^2-8x+6) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+1} - \frac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}+1} + x(2-x)(4x^2-8x+6) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \vee x=2 \\ \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+1} - \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}+1} + (4x^2-8x+6)\sqrt{2x-x^2} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

• Lại có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+1} - \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}+1} &= \frac{\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} - \sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}}{\left(\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+1 \right) \left(\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}+1 \right)} \\ &= \frac{-2\sqrt{2x-x^2}}{\left(\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+1 \right) \left(\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}+1 \right) \left(\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} + \sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} \right)} \end{aligned}$$

- Do đó ta cần chứng

$$f(x) = (2\sqrt{1-x} + \sqrt{2x-1})^2 - 3\sqrt{3}\sqrt{1-x}(x + \sqrt{(1-x)(2x-1)})$$

$$\text{minh: } \frac{(3x-2)^2(3\sqrt{3}\sqrt{1-x}-4)}{2(2\sqrt{(1-x)(2x-1)}+x)} + \frac{(3x-2)^2(27x+9)}{2(6+9x\sqrt{3}\sqrt{1-x})}$$

$$2x^2 - 4x + 3 - \frac{2}{\left(\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+1\right)\left(\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}+1\right)\left(\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}}+\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}\right)} > 0$$

- Do $\sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} \geq 0$ nên ta được:

$$f(x) \geq 2x^2 - 4x + 3 - \frac{2}{\left(\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+1\right)\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}} > \frac{(2x^2-4x+3)(1+\sqrt{2x-x^2})-2}{\left(\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+1\right)\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}}$$

$$= \frac{(1-\sqrt{2x-x^2})(4\sqrt{2x-x^2}-2x^2+4x+1)}{\left(\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}+1\right)\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}}} \geq 0 \forall x \in [0;2]$$

- Vậy bài toán đã được giải quyết!

Cách 4: Bất đẳng thức

Ta có: $\sqrt{1+\sqrt{2x-x^2}} + \sqrt{1-\sqrt{2x-x^2}} \stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} 2\sqrt{(x-1)^2}$

Khi đó VT - VP $\geq 2\sqrt{(x-1)^2} - 2(x-1)^2(2(x-1)^2 - 1)$

Đặt $|x-1|=t (t \in [0;1])$, khi đó cần chứng minh:

$$2t - 2t^2(2t^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow -2t(t-1)(2t^2 + 2t + 1) \geq 0$$

Vậy VT - VP ≥ 0 . Dấu "=" xảy ra khi $x=0; x=2$

Câu 42: Giải phương trình $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+1} = \sqrt[3]{\frac{3x-13}{4}}$

Giải

Để căn bậc 3 thì hơi khó đánh giá nên ta sẽ lũy thừa lên. Ta có:

$$\sqrt{x-2} - \sqrt{x+1} = \sqrt[3]{\frac{3x-13}{4}} \Leftrightarrow (\sqrt{x-2} - \sqrt{x+1})^3 - \frac{3x-13}{4} = 0$$

Theo AM - GM ta có:

$$\text{VT} \leq \left(\frac{x-1}{2} - \sqrt{x+1}\right)^3 - \frac{3x-13}{4} = \frac{1}{8}(\sqrt{x+1}-2)^2(x^2-4x+1-2(x+1)\sqrt{x+1})$$

Đến đây ta sẽ cần chứng minh $f(x) = x^2 - 4x + 1 - 2(x+1)\sqrt{x+1} < 0$, nhưng có vẻ ta cần tìm thêm điều kiện thì mới có thể chứng minh được. Để ý thấy $\sqrt{x-2} < \sqrt{x+1}$ nên điều kiện có nghiệm sẽ là $x \in \left[2; \frac{13}{3}\right]$.

Ta có: $f'(x) = 2x - 4 - 3\sqrt{x+1} = \frac{4x^2 - 25x + 7}{2x - 4 + 3\sqrt{x+1}} < 0 \forall x \in \left[2; \frac{13}{3}\right]$ từ đó suy ra

$$f\left(\frac{13}{3}\right) \leq f(x) \leq f(2). \text{ Mà } \begin{cases} f\left(\frac{13}{3}\right) \approx -22,189 \\ f(2) = -3 - 6\sqrt{3} \end{cases} \text{ nên } f(x) < 0. \text{ Vậy } VT \leq 0.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 3$

Câu 43: Chứng minh rằng: $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}} + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}} \leq 2 \forall a, b > 0$

Giải

Do bất đẳng thức đang ở dạng đẳng cấp nên ta sẽ chia cả tử và mẫu cho $\sqrt{b}$ và đặt $x = \sqrt{\frac{a}{b}} (x > 0)$. Ta cần chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x+1}} \leq 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x+3)(3x+1)} - (\sqrt{x+1})(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3}) \geq 0$$

Bài này khá là nhiều căn nên ta sẽ nghĩ cách làm giảm bớt căn, tuy nhiên khá là bế tắc. Ở bài này sẽ dùng bất đẳng thức $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$. Ta có:

$$\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+3} \leq \sqrt{2(4x+4)} = 2\sqrt{2}\sqrt{x+1}$$

Khi đó $VT \geq 2\sqrt{(x+3)(3x+1)} - 2\sqrt{2}\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}) = f(x)$

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{4(\sqrt{x}-1)^4}{2\sqrt{(x+3)(3x+1)} + 2\sqrt{2}\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1})} \geq 0$$

Do đó dấu "=" xảy ra khi $x = 1 \Leftrightarrow a = b$. Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh!

Ngoài ra ta có thể đánh giá bằng AM - GM như sau. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a+3b}} &\leq \frac{a}{a+b} + \frac{a+b}{a+3b}; \quad \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}} \leq \frac{1}{2} + \frac{2b}{a+3b} \Rightarrow \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}} \leq \frac{3}{4} + \frac{a}{2(a+b)} \\ \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}} &\leq \frac{b}{a+b} + \frac{a+b}{b+3a}; \quad \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b+3a}} \leq \frac{1}{2} + \frac{2a}{b+3a} \Rightarrow \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}} \leq \frac{3}{4} + \frac{b}{2(a+b)} \end{aligned}$$

Cộng hai bất đẳng thức trên với nhau ta có điều phải chứng minh.

Ngoài ra ta có thể giải phương trình bằng liên hợp như sau:

Nhận thấy phương trình đang có 3 căn nên có thể đặt $a = \sqrt{x}$ để giảm bớt độ công kênh của phương trình.

Đặt $a = \sqrt{x}$ ($a \geq 0$) phương trình trở thành:

$$2\sqrt{3a^4 + 10a^2 + 3} - (a+1)(\sqrt{3a^2 + 1} + \sqrt{a^2 + 3}) = 0$$

Ta tìm được nghiệm kép $a = 1$ nên sẽ tìm được 2 biểu thức liên hợp là $\begin{cases} \sqrt{3a^2 + 1} - \frac{3}{2}a - \frac{1}{2} \\ \sqrt{a^2 + 3} - \frac{1}{2}a - \frac{3}{2} \end{cases}$.

Khi đó tiến hành nhân liên hợp ta được:

$$2\sqrt{3a^4 + 10a^2 + 3} - (a+1)(\sqrt{3a^2 + 1} + \sqrt{a^2 + 3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3a^4 + 10a^2 + 3} - 2a^2 - 4a - 2 - (a+1)\left(\sqrt{3a^2 + 1} - \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}\right) - (a+1)\left(\sqrt{a^2 + 3} - \frac{1}{2}a - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8(a-1)^2(a+1)}{2\sqrt{3a^4 + 10a^2 + 3} + 2a^2 + 4a + 2} - \frac{3(a+1)(a-1)^2}{4\sqrt{3a^2 + 1} + 6a + 2} - \frac{3(a+1)(a-1)^2}{4\sqrt{a^2 + 3} + 2a + 6} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \frac{8(a+1)}{2\sqrt{3a^4 + 10a^2 + 3} + 2a^2 + 4a + 2} - \frac{3(a+1)}{4\sqrt{3a^2 + 1} + 6a + 2} - \frac{3(a+1)}{4\sqrt{a^2 + 3} + 2a + 6} = 0(*) \end{cases}$$

Nhiệm vụ là sẽ đi chứng minh phương trình (*) vô nghiệm.

Để ý thấy:

$$1. \frac{1}{2} - \frac{3(a+1)}{4\sqrt{3a^2 + 1} + 6a + 2} = \frac{48a^2}{(4\sqrt{3a^2 + 1} + 4)(8\sqrt{3a^2 + 1} + 12a + 4)} > 0 \forall a \geq 0$$

$$2. \frac{1}{2} - \frac{3(a+1)}{4\sqrt{a^2 + 3} + 2a + 6} = \frac{48a^2}{(4\sqrt{a^2 + 3} + 4a)(8\sqrt{a^2 + 3} + 4a + 12)} \geq 0 \forall a \geq 0$$

3. Còn lại ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{8(a^2 + 1)}{2\sqrt{3a^2 + 10a^2 + 3} + 2a^2 + 4a + 2} - 1 \\ &= \frac{(24a^2 + 24)(a-1)^2}{(2\sqrt{3a^2 + 10a^2 + 3} + 2a^2 + 4a + 2)(6a^2 - 4a + 6 + 2\sqrt{3a^4 + 10a^2 + 3})} \geq 0 \end{aligned}$$

Nên do đó phương trình * vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$

Câu 44: Giải phương trình $\frac{4\sqrt{1-x}}{x} + \frac{\sqrt{2x-1}}{1-x} = 3\sqrt{3}$

Giải

Cách 1.

Đầu tiên nhìn thấy bài này có dạng phân số nên ta sẽ thử dùng bất đẳng thức BCS dạng cộng mẫu số Engel. Ta có bổ đề sau: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$.

Chứng minh: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} = \frac{1}{x+y} \left(\sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 \right) \left[\left(\frac{a}{\sqrt{x}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{y}} \right)^2 \right] \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$

Áp dụng vào bài ta có:

$$VT - VP = \frac{(2\sqrt{1-x})^2}{x\sqrt{1-x}} + \frac{(\sqrt{2x-1})^2}{(1-x)\sqrt{2x-1}} - 3\sqrt{3} \geq \frac{(2\sqrt{1-x} + \sqrt{2x-1})^2}{\sqrt{1-x}(x + \sqrt{(1-x)(2x-1)})} - 3\sqrt{3}$$

Ta cần chứng minh $f(x) = (2\sqrt{1-x} + \sqrt{2x-1})^2 - 3\sqrt{3}\sqrt{1-x}(x + \sqrt{(1-x)(2x-1)}) \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Đặt : } g(x) &= \frac{3\sqrt{3}\sqrt{1-x} - 4}{2(2\sqrt{(1-x)(2x-1)} + x)} + \frac{27x + 9}{2(6 + 9x\sqrt{3}\sqrt{1-x})} \\ &= \frac{2(3\sqrt{3}\sqrt{1-x} - 4)(6 + 9x\sqrt{3}\sqrt{1-x}) + 2(27x + 9)(2\sqrt{(1-x)(2x-1)} + x)}{4(2\sqrt{(1-x)(2x-1)} + x)(6 + 9x\sqrt{3}\sqrt{1-x})} \\ &= \frac{36\sqrt{3}(1-2x)\sqrt{1-x} - 162x^2 + 162x - 48 + 54x^2 + 18x + 4(27x + 9)\sqrt{(1-x)(2x-1)}}{4(2\sqrt{(1-x)(2x-1)} + x)(6 + 9x\sqrt{3}\sqrt{1-x})} \\ &= \frac{-108x^2 + 180x - 48 + \sqrt{(1-x)(2x-1)}(-36\sqrt{3}\sqrt{2x-1} + 4(27x + 9))}{4(2\sqrt{(1-x)(2x-1)} + x)(6 + 9x\sqrt{3}\sqrt{1-x})} \\ &= \frac{-108x^2 + 180x - 48 + \sqrt{(1-x)(2x-1)} \left[\frac{11664x^2 + 5184}{36\sqrt{3}\sqrt{2x-1} + 4(27x + 9)} \right]}{4(2\sqrt{(1-x)(2x-1)} + x)(6 + 9x\sqrt{3}\sqrt{1-x})} \end{aligned}$$

Ta luôn có: $-108x^2 + 180x - 48 = -12(3x-4)(3x-1) > 0 \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$. Nên $g(x) > 0$. Do đó

$f(x) \geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{2}{3}$

Cách 2.

Bước đầu tiên bao giờ cũng là đi tìm nghiệm. Ta được 1 nghiệm $x = \frac{2}{3}$.

Kiểm tra nghiệm bội ta có:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{4(1-x)\sqrt{1-x} + x\sqrt{2x-1} - 3\sqrt{3}x(1-x)}{3x-2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{4(1-x)\sqrt{1-x} + x\sqrt{2x-1} - 3\sqrt{3}x(1-x)}{(3x-2)^2} \neq 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ là nghiệm kép.}$$

Tìm nhân tử từng cụm, giả sử nhân tử có dạng:
$$\begin{cases} 4(1-x)\sqrt{1-x} + ax + b = 0 \\ x\sqrt{2x-1} + cx + d = 0 \end{cases}.$$

Khi đó sẽ tìm được 2 nhân tử là:
$$\begin{cases} x\sqrt{2x-1} - \sqrt{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{9} = 0 \\ 4(1-x)\sqrt{1-x} + 2\sqrt{3}x - \frac{16\sqrt{3}}{9} = 0 \end{cases}.$$

Phân tích nhân tử từng cụm 1 sử dụng công thức chia 2 căn ta được:

$$3. \quad 4(1-x)\sqrt{1-x} + 2\sqrt{3}x - \frac{16\sqrt{3}}{9} = \left(\frac{4}{9}\sqrt{1-x} + \frac{2\sqrt{3}}{27}\right)(3\sqrt{1-x} - \sqrt{3})^2$$

$$4. \quad x\sqrt{2x-1} - \sqrt{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{9} = \frac{(3\sqrt{2x-1} - \sqrt{3})^3}{54}$$

Nhìn vào rõ ràng thấy nhân tử thứ 2 không có cùng dấu với bài toán do chứa nghiệm bội 3 nên ta sẽ làm mạnh tay hơn là phân tích nhân tử cả cụm:

$-3\sqrt{3}x(1-x) - 2\sqrt{3}x + \frac{16\sqrt{3}}{9} + x\sqrt{2x-1}$ với hy vọng cả cụm đó sẽ luôn dương. Thật vậy ta

$$\begin{aligned} \text{được: } & -3\sqrt{3}x(1-x) - 2\sqrt{3}x + \frac{16\sqrt{3}}{9} + x\sqrt{2x-1} \\ & = \left(\sqrt{2x-1} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \left(2\sqrt{2x-1} + \frac{(9x-4)\sqrt{3}}{6}\right) \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy lời giải là:

$$\begin{aligned} & 4(1-x)\sqrt{1-x} + x\sqrt{2x-1} = 3\sqrt{3}x(1-x) \\ \Leftrightarrow & \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\sqrt{1-x} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \underbrace{\left(2\sqrt{3}\sqrt{1-x} + 1\right)}_{>0} + \left(\sqrt{2x-1} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \underbrace{\left(2\sqrt{2x-1} + \frac{(9x-4)\sqrt{3}}{6}\right)}_{>0} = 0 \end{aligned}$$

Để thấy $VT \geq 0$ nên dấu "=" xảy ra khi
$$\begin{cases} \sqrt{1-x} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \\ \sqrt{2x-1} - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Cách 3.

1. Tìm nghiệm: Phương trình có nghiệm kép $x = \frac{2}{3}$
2. Tìm nhân tử chứa nghiệm: $2\sqrt{1-x} + \sqrt{2x-1} - \sqrt{3}$
3. Chia căn ta được kết quả:

$$\frac{f(x)}{2\sqrt{1-x} + \sqrt{2x-1} - \sqrt{3}} = \underbrace{-x\sqrt{3}\sqrt{1-x} - 2\sqrt{1-x}\sqrt{2x-1} + \frac{\sqrt{3}(x+2)}{2}\sqrt{2x-1} - \frac{3x-2}{2}}_{g(x)}$$

4. Để ý thấy với $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ thì $g(x) < 0$. Nên phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm!

Cách 4. Liên hợp

$$\begin{aligned} 4(1-x)\sqrt{1-x} + x\sqrt{2x-1} &= 3\sqrt{3}x(1-x) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\sqrt{1-x} + \frac{2\sqrt{3}}{27}\right)(3\sqrt{1-x} - \sqrt{3})^2 + \frac{1}{54}(3\sqrt{2x-1} - \sqrt{3})^3 + \frac{\sqrt{3}}{3}(3x-2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (3x-2)^2 = 0 \\ \frac{12\sqrt{1-x} + 2\sqrt{3}}{3(3\sqrt{1-x} + \sqrt{3})^2} + \frac{4(3x-2)}{(3\sqrt{2x-1} + \sqrt{3})^3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0(*) \end{cases} \end{aligned}$$

1. Để ý thấy :

$$\frac{4(3x-2)}{(3\sqrt{2x-1} + \sqrt{3})^3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{12(3x-2) + \sqrt{3}(3\sqrt{2x-1} + \sqrt{3})^3}{3(3\sqrt{2x-1} + \sqrt{3})^3} \geq \frac{36x-15}{3(3\sqrt{2x-1} + \sqrt{3})^3}$$

2. Nên phương trình (*) vô nghiệm.

3. Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{2}{3}$.

Cách 5. Liên hợp

$$\begin{aligned} 4(1-x)\sqrt{1-x} + x\sqrt{2x-1} &= 3\sqrt{3}x(1-x) \\ \Leftrightarrow 4(1-x)\left(\sqrt{1-x} + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) + x\left(\sqrt{2x-1} - \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \sqrt{3}\left(6x^2 - 8x + \frac{8}{3}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(1-x)\frac{-\frac{3}{4}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\sqrt{1-x} + \sqrt{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{x}{2}\right)} + x\frac{-3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{3}\left(\frac{3x-1}{3}\right)} + 6\sqrt{3}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{1-x} + \sqrt{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{x}{2}\right)} - \frac{x}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{3}\left(\frac{3x-1}{3}\right)} + 2\sqrt{3} = 0(*) \end{cases} \end{aligned}$$

+ Nhận thấy

1. $g(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{x}{2}\right)$ nghịch biến trên $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ nên $g(x) \geq g(1) = \frac{\sqrt{3}}{6}$
 2. $v(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{3}\left(\frac{3x-1}{3}\right)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ nên $v(x) \geq v\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$
- + Khi đó $f(x) > \frac{x-1}{\frac{\sqrt{3}}{6}} - \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{6}} + 2\sqrt{3} = 0$

Cách 6: Bất đẳng thức.

- Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{2x-1} \\ b = \sqrt{1-x} \end{cases} \Rightarrow a^2 + 2b^2 = 1$. Phương trình trở thành: $\frac{a}{b^2} + \frac{4b}{a^2 + b^2} = 3\sqrt{3}$
- Ta có:

$$\frac{a^4}{a^2 \cdot b^2 \cdot b^2} \stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} \frac{a^4}{\frac{(a^2 + b^2 + b^2)^3}{27}} = \frac{a^4}{\frac{1}{27}} \Rightarrow \frac{a^2}{b^4} \geq 27a^4 \Rightarrow \frac{a}{b^2} \geq 3\sqrt{3}a^2$$

$$\frac{16b^4}{2b^2(a^2 + b^2)(a^2 + b^2)} \stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} \frac{16b^4}{\left(\frac{2b^2 + a^2 + a^2 + b^2 + b^2}{3}\right)^3} = \frac{16b^4}{\left(\frac{2}{3}\right)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{16b^2}{(a^2 + b^2)^2} \geq 108b^4 \Rightarrow \frac{4b}{a^2 + b^2} \geq 3\sqrt{3} \cdot 2b^2$$

- Cộng lại ta được $VT \geq 3\sqrt{3} = VP$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$.

Câu 45: Giải phương trình $105x^4 + 1120x^2 + 256 = 128\sqrt{(1+x)^7} + 128\sqrt{(1-x)^7}$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \rightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Nhận xét. Ta nhận xét thấy nếu thay x bởi $-x$ thì phương trình không thay đổi. Suy ra ta chỉ cần xét $x \in [0; 1]$.

Xét hàm số: $f(x) = 105x^4 + 1120x^2 + 256 - 128\sqrt{(1+x)^7} - 128\sqrt{(1-x)^7}$

Ta có $f'(x) = 420x^3 + 2240x - 128\left[\frac{7(1+x)^6}{2\sqrt{(1+x)^7}} - \frac{7(1-x)^6}{2\sqrt{(1-x)^7}}\right]$

$$\Rightarrow f'(x) = 420x^3 + 2240x - 126\left[\frac{7(1+x)^6}{2\sqrt{(1+x)^7}} - \frac{7(1-x)^6}{2\sqrt{(1-x)^7}}\right]$$

$$\Rightarrow f''(x) = 1260x^2 + 2240 - 448\left[\frac{5(1+x)^4}{2\sqrt{(1+x)^5}} + \frac{5(1-x)^4}{2\sqrt{(1-x)^5}}\right]$$

$$\Rightarrow f''(x) = 1260x^2 + 2240 - 1120 \left[\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3} \right]$$

Mặt khác theo AM - GM ta có:

$$\sqrt{(1+x)^3} = \sqrt{(1+x)(1+x)(1+x) \cdot 1} \leq \sqrt{\left(\frac{1+x+1+x+1+x+1}{4} \right)^4} = \left(1 + \frac{3x}{4} \right)^2 = \frac{9}{16}x^2 + \frac{3}{2}x + 1$$

$$\sqrt{(1-x)^3} = \sqrt{(1-x)(1-x)(1-x) \cdot 1} \leq \sqrt{\left(\frac{1-x+1-x+1-x+1}{4} \right)^4} = \left(1 - \frac{3x}{4} \right)^2 = \frac{9}{16}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3} \leq 2 \left(\frac{9}{16}x^2 + 1 \right)$$

$$\Rightarrow 1120 \left[\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3} \right] \leq 2240 \left(\frac{9}{16}x^2 + 1 \right)$$

$$\Rightarrow -1120 \left[\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3} \right] \geq -2240 \left(\frac{9}{16}x^2 + 1 \right) = -1260x^2 - 2240$$

$$\Rightarrow f''(x) = 1260x^2 + 2240 - 1120 \left[\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3} \right] \geq 1260x^2 + 2240 - 1260x^2 - 2240 = 0$$

Vậy hàm số $f'(x) = 420x^3 + 2240x - 448 \left[\sqrt{(1+x)^5} + \sqrt{(1-x)^5} \right]$ đồng biến $\forall x \in [0; 1]$

$$\Rightarrow f'(x) \geq f(0) = 0$$

Do $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) = 105x^4 + 1120x^2 + 256 - 128\sqrt{(1+x)^7} - 128\sqrt{(1-x)^7}$ đồng biến với $\forall x \in [0; 1]$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0 \Rightarrow 105x^4 + 1120x^2 + 256 - 128\sqrt{(1+x)^7} - 128\sqrt{(1-x)^7} \geq 0 \text{ với } \forall x \in [0; 1].$$

Dấu đẳng thức xảy ra tại $x = 0$.

Vậy phương trình đã cho có $x = 0$ là nghiệm.

Câu 46: Giải phương trình $6\sqrt[6]{2x-1} + 6\sqrt[6]{2-x} - 7\sqrt[7]{(2x-1)(2-x)} = 5$

Giải

Do phương trình có nghiệm kép nên ta dùng phương pháp đánh giá. Ta có:

$$1. \quad f(x) = 6\sqrt[6]{2x-1} + 1 + 6\sqrt[6]{2-x} + 1 - 7\sqrt[7]{(2x-1)(2-x)} - 7$$

$$2. \quad 6\sqrt[6]{2x-1} + 1 \stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} 7\sqrt[7]{2x-1}$$

$$3. \quad 6\sqrt[6]{2-x} + 1 \stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} 7\sqrt[7]{2-x}$$

Do đó ta được:

$$f(x) \geq 7\sqrt[7]{2x-1} + 7\sqrt[7]{2-x} - 7\sqrt[7]{(2x-1)(2-x)} - 7 = 7 \left(\sqrt[7]{2x-1} + \sqrt[7]{2-x} - \sqrt[7]{(2x-1)(2-x)} - 1 \right)$$

$$= 7 \left(\sqrt[7]{2x-1} - 1 \right) \left(1 - \sqrt[7]{2-x} \right) = \frac{14(x-1)^2}{\sum_{i=0}^6 \left(\sqrt[7]{2x-1} \right)^i \cdot \sum_{j=0}^6 \left(\sqrt[7]{2-x} \right)^j}$$

Mà $\begin{cases} \sqrt[3]{2x-1} \geq 0 \\ \sqrt[3]{2-x} \geq 0 \end{cases}$, nên $f(x) \geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$

Câu 47: Giải phương trình $\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{3x-5} = 2\sqrt[5]{3x+26}$

Giải

Điều kiện: $x \geq \frac{5}{3}$. Phương trình đã cho được biến đổi về phương trình sau:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{3x-5} - 2\sqrt[5]{3x+26} = 0$$

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{3x-5} - 2\sqrt[5]{3x+26}$, $\forall x \geq \frac{5}{3}$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \frac{3}{4\sqrt[4]{(3x-5)^3}} - \frac{6}{5\sqrt[5]{(3x+26)^4}}$$

Tới đây ta sẽ tìm cách đánh giá cho $f'(x)$. Ta xét hiệu $A = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{6}{5\sqrt[5]{(3x+26)^4}}$

Để xét dấu biểu thức A thì ta cần chuẩn quy về một căn thức để có thể tiện lợi so sánh và vì trong biểu thức A chứa căn bậc hai và căn bậc năm nên ta sẽ chuẩn quy về căn bậc mười. Do đó ta biến đổi như sau:

$$A = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} - \frac{6}{5\sqrt[5]{(3x+26)^4}} = \frac{\sqrt[10]{5^{10}(3x+26)^8} - \sqrt[10]{12^{10}(x+2)^5}}{10\sqrt{x+2} \cdot \sqrt[5]{(3x+26)^4}}$$

Vậy để xét dấu của A ta chỉ cần xét dấu của hiệu: $\sqrt[10]{5^{10}(3x+26)^8} - \sqrt[10]{12^{10}(x+2)^5}$

Ta có $x \geq \frac{5}{3} \Rightarrow 3x+26 \geq 31$.

$$\text{Lại có } 5^{10}(3x+26)^8 = 5^{10}(3x+26)^5 \cdot (3x+26)^3 \geq 5^{10}(3x+26)^5 \cdot 31^3$$

$$\text{Từ đó ta có } 5^{10}(3x+26)^8 \geq 5^{10} \cdot 3^5(x+2)^5 \cdot 31^3 \geq 5^{10} \cdot 3^5(x+2)^5 \cdot 31^3 > 12^{10}(x+2)^5$$

Do đó $A > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$. Vậy hàm số $f(x)$ liên tục và luôn đồng biến với $x \in \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

Mặt khác ta có $f(2) = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Câu 48: Giải phương trình $\sqrt[5]{1+2015x} + \sqrt[5]{1-2015x} = \sqrt[5]{1+2016x} + \sqrt[5]{1-2016x}$

Giải

Nhận thấy nếu x_0 là nghiệm thì $-x_0$ cũng là nghiệm, vậy ta chỉ cần xét phương trình trên tập số thực $x \geq 0$.

Xét hàm số: $f(t) = \sqrt[5]{1+2015t} + \sqrt[5]{1-2015t}$ trên tập số thực $t \geq 0$.

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{2015}{5\sqrt[5]{(1+2015t)^4}} - \frac{2015}{5\sqrt[5]{(1-2015t)^4}} \Rightarrow f'(t) = \frac{2015}{5} \left(\frac{\sqrt[5]{(1-2015t)^4} - \sqrt[5]{(1+2015t)^4}}{\sqrt[5]{[(1+2015t)(1-2015t)]^4}} \right)$$

Ta đi chứng minh $f'(t) = \frac{2015}{5} \left(\frac{\sqrt[5]{(1-2015t)^4} - \sqrt[5]{(1+2015t)^4}}{\sqrt[5]{[(1+2015t)(1-2015t)]^4}} \right) \leq 0$

Thật vậy khi $t \geq 0$, ta có:

$$\begin{aligned} 4030t &\geq -4030t \Leftrightarrow (2015t)^2 + 4030t + 1 \geq (2015t)^2 - 4030t + 1 \\ &\Leftrightarrow (1+2015t)^2 \geq (1-2015t)^2 \Leftrightarrow (1+2015t)^2 - (1-2015t)^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow [(1+2015t)^2 + (1-2015t)^2][(1+2015t)^2 - (1-2015t)^2] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (1+2015t)^4 - (1-2015t)^4 \geq 0 \Leftrightarrow (1+2015t)^4 \geq (1-2015t)^4 \\ &\Rightarrow \sqrt[5]{(1+2015t)^4} \geq \sqrt[5]{(1-2015t)^4} \\ &\Rightarrow f'(t) = \frac{2015}{5} \left(\frac{\sqrt[5]{(1-2015t)^4} - \sqrt[5]{(1+2015t)^4}}{\sqrt[5]{[(1+2015t)(1-2015t)]^4}} \right) \leq 0 \text{ với } \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy hàm số: $f(x) = \sqrt[5]{1+2015x} + \sqrt[5]{1-2015x}$ nghịch biến với mọi $t \geq 0$.

Phương trình tương đương với: $f(2015x) = f(2016x) \Leftrightarrow 2015x = 2016x \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 49: Giải phương trình $2(|x|+2) = \sqrt{1+x^3} + \sqrt{1-x^3} + \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}$

Giải

Ta nhận thấy nếu thay x bởi $-x$ thì phương trình không thay đổi. Suy ra ta chỉ cần xét $x \geq 0$. Ta lại chú ý đến hằng đẳng thức đã nhắc đến ở các ví dụ trước là

$$\sqrt{1+x^3} + \sqrt{1-x^3} = \sqrt{2(1+\sqrt{1-x^6})} \leq 2 \text{ đẳng thức xảy ra khi } x = 0.$$

Đến đây ta chỉ cần chứng minh $2x+2 \geq \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x^2+x+1}$ với $x \geq 0$.

Thật vậy, bình phương hai vế lên ta được

$$4x^2 + 8x + 4 \geq 2x^2 + 2 + 2\sqrt{(x^2-x+1)(x^2+x+1)} \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1})^2 + 8x \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 0$. Vậy $x = 0$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 50: Giải phương trình $\sqrt{2x^2-2x+1} + \sqrt{2x^2-(\sqrt{3}-1)x+1} + \sqrt{2x^2+(\sqrt{3}+1)x+1} = 3$

Giải

Nhìn dạng này ta sẽ dùng bất đẳng thức vectơ. Cho 2 vectơ $\vec{v}(x;y)$ và $\vec{u}(a;b)$, khi đó ta có:

$$|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$. Ngoài ra có thể mở rộng cho 3 vectơ, thêm $\vec{a}(m;n)$:

$$|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{a}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{a}| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{m^2 + n^2} \geq \sqrt{(x+a+m)^2 + (y+b+n)^2}$$

Bây giờ vấn đề là phân tích các biểu thức trong căn thành các tổng bình phương như thế nào để có thể áp dụng bất đẳng thức trên được. Ta có:

1. $\sqrt{2x^2 - 2x + 1} = \sqrt{x^2 + x^2 - 2x + 1} = \sqrt{x^2 + (x-1)^2}$
2. $\sqrt{2x^2 - (\sqrt{3}-1)x + 1} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + x^2 - x\sqrt{3} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2}$
3. $\sqrt{2x^2 + (\sqrt{3}+1)x + 1} = \sqrt{x^2 + x + 1 + x^2 + x\sqrt{3}} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

Đến đây nếu áp dụng bất đẳng thức trên ta sẽ được:

$$VT \geq \sqrt{\left(x + x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{2}\right)^2 + (x-1+x+x)^2} = \sqrt{18x^2 + 2}$$

Dễ thấy $\sqrt{18x^2 + 2}$ chưa phải luôn lớn hơn 3, với lại hãy để ý điểm rơi của bất đẳng thức nó không phải là $x=0$ nên ta đã đánh giá sai. Để đánh giá đúng hãy để ý nếu ta áp dụng cho 2 căn ở sau thì điểm rơi là $x=0$, nên ta sẽ xử 2 căn đằng sau trước, ta được:

$$\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2} + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \geq \sqrt{4x^2 + 4x + 4} \geq \sqrt{x^2 + 4x + 4} = |x+2|$$

Chú ý: Nếu ban đầu ta viết là $\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ thì điểm rơi lúc này cũng không phải là $x=0$ nên

để điểm rơi là $x=0$ thì ta phải đổi $\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2$.

Còn lại để xuất hiện con 3 ta cần phải biến đổi căn còn lại, ta được:

$$\sqrt{2x^2 - 2x + 1} = \sqrt{x^2 + x^2 - 2x + 1} = \sqrt{x^2 + (x-1)^2} = \sqrt{x^2 + (1-x)^2} \geq |1-x|$$

Vậy $VT \geq |x+2| + |1-x| \geq 3 = VP$

Dấu "=" xảy ra khi $x=0$.

Câu 51: Giải phương trình $\sqrt{2(x^2 - 4x + 5)} + \frac{3-x}{2} \cdot \sqrt{x^3 + \frac{3}{x}} = 4\sqrt{2-x}$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta được:

$$\begin{aligned} \sqrt{2(x^2 - 4x + 5)} + \frac{3-x}{2} \cdot \sqrt{x^3 + \frac{3}{x}} &= \sqrt{2((2-x)^2 + 1)} + \frac{(2-x)+1}{2} \cdot \sqrt{x^3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}} \\ &\stackrel{AM-GM}{\geq} 2\sqrt{2-x} + \frac{2\sqrt{2-x}}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot x^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} = 4\sqrt{2-x} \end{aligned}$$

Vậy $VT \geq VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$

Câu 52: Giải phương trình $\frac{1}{1+\sqrt{x^2+3x+1}} + \frac{1}{1+\sqrt{x^2-3x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\begin{aligned} 1. & \frac{1}{1+\sqrt{x^2+3x+1}} + \frac{1}{1+\sqrt{x^2-3x+1}} \geq \frac{4}{2+\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-3x+1}} \\ 2. & \sqrt{x^2+3x+1} + \sqrt{x^2-3x+1} \leq \sqrt{2(2x^2+2)} = 2\sqrt{x^2+1} \\ 3. & \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy $VT \geq VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$.

Câu 53: Giải phương trình $x^4 - x^3 - 6x + 4 + 2\sqrt{x^6 - x + 1} = 0$

Giải

Đầu tiên ta dùng tiếp tuyến thì sẽ tìm được đánh giá là: $2\sqrt{x^6 - x + 1} \geq 5x - 3$.

- Nếu $x < \frac{3}{5}$ thì bất đẳng thức đúng.
- Nếu $x \geq \frac{3}{5}$ thì $2\sqrt{x^6 - x + 1} \geq 5x - 3 \Leftrightarrow (x-1)^2(4x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 16x - 5) \geq 0$.

Dễ thấy bất đẳng thức cuối đúng nên ta được :

$$x^4 - x^3 - 6x + 4 + 2\sqrt{x^6 - x + 1} \geq x^4 - x^3 - 6x + 4 + 5x - 3 = (x-1)^2(x^2 + x + 1) = VP$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Câu 54: Giải phương trình $\sqrt{x^9 - 2x + 2} + \sqrt{x^8 - x + 1} = (2-x)(x^3 + 2x^2 + 2x - 3)$

Giải

Phương trình này có nghiệm là $x = 1$ nên ta sẽ có 2 đánh giá:
$$\begin{cases} \sqrt{x^9 - 2x + 2} \geq \frac{7}{2}x - \frac{5}{2} \\ \sqrt{x^8 - x + 1} \geq \frac{7}{2}x - \frac{5}{2} \end{cases}$$

Nếu $x < \frac{5}{7}$ thì 2 đánh giá là đúng.

Nếu $x \geq \frac{5}{7}$ thì ta được:

$$\begin{aligned} 1. & \sqrt{x^8 - x + 1} \geq \frac{7}{2}x - \frac{5}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2(4x^6 + 8x^5 + 12x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 24x - 21) \geq 0 \\ 2. & \sqrt{x^9 - 2x + 2} \geq \frac{7}{2}x - \frac{5}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2(4x^7 + 8x^6 + 12x^5 + 16x^4 + 20x^3 + 24x^2 + 28x - 17) \geq 0 \end{aligned}$$

Dễ thấy rằng với $x \geq \frac{5}{7}$ thì đương nhiên 2 bất đẳng thức luôn đúng vì: $\begin{cases} 20x^2 + 24x - 21 > 0 \\ 24x^2 + 28x - 17 > 0 \end{cases}$

Vậy $VT - VP \geq (x-1)^2(x+1)^2 \geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$

Câu 55: Giải phương trình $\frac{2x(1+x\sqrt{2x-1})}{(x-\sqrt{x}+1)(1+(2x-1)\sqrt{2x-1})} = 2$

Giải

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x} \\ b = \sqrt{2x-1} \end{cases}$ thì phương trình trở thành: $\frac{(b^2+1)(1+a^2b)}{(a^2-a+1)(1+b^3)} = 2$

Ta có bổ đề: $(a+1)(b+1)(c+1) \geq (1+\sqrt[3]{abc})^3$ - Đã chứng minh ở bài trên.

Áp dụng ta có:

$$\begin{aligned} (1+a^3)(1+a^3)(1+b^3) &\geq (1+a^2b)^3 \\ (1+1)(1+1)(a^3+1) &\geq (1+a)^3 \\ (1+1)(1+b^3)(1+b^3) &\geq (1+b^2)^3 \end{aligned}$$

Nhân vế theo vế ta được:

$$\begin{aligned} 8(1+a^3)^3(1+b^3)^3 &\geq (1+a^2b)^3(1+a)^3(1+b^2)^3 \\ \Leftrightarrow \frac{(1+a^2b)^3(1+a)^3(1+b^2)^3}{(1+a^3)^3(1+b^3)^3} &\leq 8 \Leftrightarrow \frac{(1+a^2b)(1+a)(1+b^2)}{(a^3+1)(b^3+1)} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{(1+a^2b)(1+b^2)}{(a^2-a+1)(b^3+1)} \leq 2 \end{aligned}$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Câu 56: Giải phương trình $(1+\sqrt{x+6})\left(1+\frac{\sqrt{28x-3}}{\sqrt{x+6}}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt[4]{28x-3}}\right)^2 = 256$

Giải

Cách 1: Bất đẳng thức Holder.

Nhìn thấy dạng tích lại nghĩ đến bất đẳng thức Holder. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+6} \\ b = \sqrt{28x-3} \end{cases}$, phương trình trở thành:

$$(1+a)\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2 = 256.$$

Áp dụng hệ quả của bất đẳng thức Holder cho 4 dãy số:

$$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d) \geq (1+\sqrt[4]{abcd})^4$$

Ta được: $(1+a)\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right) \geq \left(1+\sqrt[4]{a \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{9}{\sqrt{b}} \cdot \frac{9}{\sqrt{b}}}\right)^4 = 256 = VP$

Dấu “=” xảy ra khi $a = 3; b = 9 \Rightarrow x = 3$

Cách 2: Bất đẳng thức AM – GM.

Theo AM – GM ta có:

$$(1+a)\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2 = \left(1+a+b+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2 \geq (2\sqrt{b}+b+1)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2 = (\sqrt{b}+1)^2\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2$$

$$(\sqrt{b}+1)^2\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2 = \left(\sqrt{b}+\frac{9}{\sqrt{b}}+1+9\right)^2 \geq \left(2\sqrt{\sqrt{b} \cdot \frac{9}{\sqrt{b}}}+10\right)^2 = 256$$

Vậy $VT \geq VP$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 3$.

Cách 3: Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz.

Ta có: $(1+a)\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2 \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} (\sqrt{b}+1)^2\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2 \geq 256$

Vậy $VT \geq VP$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 3$.

Cách 4:

Chú ý rằng ta luôn có đẳng thức sau:

$$(1+a)\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2 = 256 + 32\left(\frac{3}{\sqrt[4]{b}} - \sqrt[4]{b}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt[4]{b}} - \sqrt[4]{b}\right)^4 + \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{a}\right)^2\left(1+\frac{9}{\sqrt{b}}\right)^2$$

Áp dụng luôn vào bài thì ta được:

$$(1+\sqrt{x+6})\left(1+\frac{\sqrt{28x-3}}{\sqrt{x+6}}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt[4]{28x-3}}\right)^2 - 256$$

$$= 32\left(\frac{3}{\sqrt[8]{28x-3}} - \sqrt[8]{28x-3}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt[8]{28x-3}} - \sqrt[8]{28x-3}\right)^4 + \left(\sqrt[4]{\frac{28x-3}{x+6}} - \sqrt[4]{x+6}\right)^2\left(1+\frac{9}{\sqrt[4]{28x-3}}\right)^2 \geq 0$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 3$

Câu 57: Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt{2-x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \left[\sqrt[4]{\frac{2-x}{x-1}} - \sqrt[4]{\frac{x-1}{2-x}}\right]^2 = 2\sqrt{2}$

Giải

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{2-x} \\ b = \sqrt{x-1} \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$, phương trình trở thành: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 = 2\sqrt{2}$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{a}{b} - \frac{b}{a} + 2 - 2\sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow a + b + 2ab \geq 2\sqrt{2}ab + 1$$

$$\Leftrightarrow a + b + (a+b)^2 - 1 \geq \sqrt{2}(a+b)^2 + 1 - \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow (1-\sqrt{2})(a+b-\sqrt{2})(a+b-1) \geq 0$$

Do $a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow (a+b) \in [1; \sqrt{2}]$. Vậy bất đẳng thức cuối đúng.

Dấu “=” xảy ra khi $a = b \Rightarrow x = 3$

Câu 58: Giải phương trình $1 + \frac{2(\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{3-x})}{\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}} = \frac{1 + \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}}{\sqrt[4]{(x-1)(3-x)}}$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2(\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{3-x})}{\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}} &= \frac{1 + \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}}{\sqrt[4]{(x-1)(3-x)}} \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x})\sqrt[4]{(x-1)(3-x)} + 2(\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{3-x})\sqrt[4]{(x-1)(3-x)} \\ &= (\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}) + (\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x})^2 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x})^2}{2} &\geq \frac{2(\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x})\sqrt[4]{(x-1)(3-x)}}{2} \\ \frac{(\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x})^2}{2} + (\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}) &\geq \frac{4\sqrt[4]{(x-1)(3-x)} + (\sqrt{x-1} + \sqrt{3-x})^2}{2} \\ &\geq 2(\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{3-x})\sqrt[4]{(x-1)(3-x)} \end{aligned}$$

Cộng 2 vế ta được VT ≤ VP. Dấu "=" xảy ra khi x = 3.

Câu 59: Giải phương trình $(1 + \sqrt{3-x})^2 \left[1 + \frac{1}{\sqrt{x-2}}\right]^2 + (1 + \sqrt{x-2})^2 \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3-x}}\right]^2 = 17 + 2\sqrt{2}$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} &(1 + \sqrt{3-x})^2 \left[1 + \frac{1}{\sqrt{x-2}}\right]^2 + (1 + \sqrt{x-2})^2 \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3-x}}\right]^2 \\ &\stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} \frac{1}{2} \left[(1 + \sqrt{3-x}) \left[1 + \frac{1}{\sqrt{x-2}}\right] + (1 + \sqrt{x-2}) \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3-x}}\right] \right]^2 \end{aligned}$$

Cách 1: Phân tích nhân tử.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left[(1 + \sqrt{3-x}) \left[1 + \frac{1}{\sqrt{x-2}}\right] + (1 + \sqrt{x-2}) \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3-x}}\right] \right]^2 \geq 17 + 12\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow &\left[(1 + \sqrt{3-x}) \left[1 + \frac{1}{\sqrt{x-2}}\right] + (1 + \sqrt{x-2}) \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3-x}}\right] \right]^2 \geq 34 + 24\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow &\left[\frac{1}{\sqrt{3-x}} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{3-x} + \sqrt{x-2} + \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}} + 2 \right]^2 \geq 34 + 24\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{3-x}} + \sqrt{3-x} - \frac{x\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-2} + \frac{x\sqrt{2}}{2} - \frac{11\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}} + 2 + 3\sqrt{2} \right]^2$$

$$\geq 34 + 24\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{(2\sqrt{3-x} - \sqrt{2})^2 (\sqrt{2(3-x)} + 4)}{8\sqrt{3-x}} + \frac{(2\sqrt{x-2} - \sqrt{2})^2 (\sqrt{2(x-2)} + 4)}{8\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}} + 2 + 3\sqrt{2} \right]^2$$

$$\geq 34 + 24\sqrt{2}$$

Bài toán sẽ được giải quyết nếu ta chứng minh được:

$$\left[\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}} + 2 + 3\sqrt{2} \right]^2 \geq 34 + 24\sqrt{2}$$

Thật không may là:

$$\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}} \stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} 2 \Rightarrow \left[\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-2}} + \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}} + 2 + 3\sqrt{2} \right]^2 \geq (4 + 3\sqrt{2})^2 = 34 + 24\sqrt{2} = \text{VP}$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{5}{2}$

Cách 2: Bất đẳng thức.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{3-x} \\ b = \sqrt{x-2} \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$, ta đi chứng minh $\frac{1}{2} \left[(1+a) \left[1 + \frac{1}{b} \right] + (1+b) \left[1 + \frac{1}{a} \right] \right]^2 \geq \text{VP}$

$$\left[(1+a) \left[1 + \frac{1}{b} \right] + (1+b) \left[1 + \frac{1}{a} \right] \right]^2$$

$$= \left[2 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right]^2 = \left[\frac{a \left[b^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] + b \left[a^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right]}{ab} + \left[\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right] + 2 \right]^2$$

$$\stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} \left[\frac{3a^3 \sqrt{\frac{b^2}{4}} + 3b^3 \sqrt{\frac{a^2}{4}}}{ab} + \left[\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right] + 2 \right]^2$$

$$\stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} \left[\frac{6 \sqrt{ab^3 \frac{a^2}{4} \cdot \frac{b^2}{4}}}{ab} + 4 \right]^2 = \left[\frac{6}{\sqrt[6]{16} \sqrt[6]{ab}} + 2 \right]^2 \geq \left[\frac{6}{\sqrt[6]{16} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}} + 2 \right]^2 = 2(17 + 12\sqrt{2})$$

Vậy bài toán đã được giải quyết!

Câu 60: Giải phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} + \frac{2(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^4 - 64}{(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^4} = 0$

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} + \frac{2(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^4 - 64}{(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^4} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt{x})^2} + \frac{1}{(\sqrt{2-x})^2} + 2 - \frac{64}{(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^4} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{(\sqrt{x})^2} + \frac{1}{(\sqrt{2-x})^2} + \frac{4}{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2} = \frac{32[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2]}{(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Lại có: } \frac{1}{(\sqrt{x})^2} + \frac{1}{(\sqrt{2-x})^2} + \frac{4}{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2} &= \frac{[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2]^2}{(\sqrt{x})^2 (\sqrt{2-x})^2 [(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2]} + \frac{4(\sqrt{x})^2 (\sqrt{2-x})^2}{(\sqrt{x})^2 (\sqrt{2-x})^2 [(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2]} \\ &= \frac{[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2]^2}{(\sqrt{x})^2 (\sqrt{2-x})^2 [(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2]} + \frac{4(\sqrt{x})^2 (\sqrt{2-x})^2}{(\sqrt{x})^2 (\sqrt{2-x})^2 [(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2]} \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} &\frac{[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2]^2}{(\sqrt{x})^2 (\sqrt{2-x})^2 [(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2]} + \frac{4(\sqrt{x})^2 (\sqrt{2-x})^2}{(\sqrt{x})^2 (\sqrt{2-x})^2 [(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2]} \\ &\geq \frac{[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2 + 2\sqrt{x(2-x)}]^2}{2(\sqrt{x})^2 (\sqrt{2-x})^2 [(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2]} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^4}{2(\sqrt{x})^2 (\sqrt{2-x})^2 [(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2]} \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\begin{aligned} &\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^4}{2(\sqrt{x})^2 (\sqrt{2-x})^2 [(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2]} \geq \frac{32[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2]}{(\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^4} \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^8 \geq 64(\sqrt{x})^2 (\sqrt{2-x})^2 [(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2]^2 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{2-x})^4 \geq 8[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2-x})^2] \sqrt{x(2-x)} \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{2-x})^4 \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy VT $\geq$ VP. Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$

Câu 61: Giải phương trình

$$(4x+7+2\sqrt{8x+7})(4x+5+2\sqrt{x+1}) = 2(4\sqrt{x+1}+1)(2\sqrt{8x+7}+1)$$

Giải

Ta có:

$$(4x+7+2\sqrt{8x+7})(4x+5+2\sqrt{x+1})=2(4\sqrt{x+1}+1)(2\sqrt{8x+7}+1)$$

$$\Leftrightarrow \left((\sqrt{x+1})^2 + \sqrt{\frac{8x+7}{4}} + \frac{3}{4} \right) \left(\frac{8x+7}{4} + \sqrt{x+1} + \frac{3}{4} \right) = \left(2\sqrt{x+1} + \frac{1}{2} \right) \left(2\sqrt{\frac{8x+7}{4}} + \frac{1}{2} \right)$$

Chú ý rằng:

$$\left(\sqrt{x+1} - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^2 + \frac{1}{4} \geq \sqrt{x+1} \Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^2 + \sqrt{\frac{8x+7}{4}} + \frac{3}{4} \geq \sqrt{x+1} + \sqrt{\frac{8x+7}{4}} + \frac{1}{2}$$

$$\left(\sqrt{\frac{8x+7}{4}} - \frac{1}{2} \right)^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{8x+7}{4}} \right)^2 + \frac{1}{4} \geq \sqrt{\frac{8x+7}{4}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{8x+7}{4}} \right)^2 + \sqrt{x+1} + \frac{3}{4} \geq \sqrt{\frac{8x+7}{4}} + \sqrt{x+1} + \frac{1}{2}$$

Do đó VT $\geq \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{\frac{8x+7}{4}} + \frac{1}{2} \right)^2$. Mà theo AM - GM ta luôn có:

$$\left(2\sqrt{x+1} + \frac{1}{2} \right) \left(2\sqrt{\frac{8x+7}{4}} + \frac{1}{2} \right) \leq \frac{\left(2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{\frac{8x+7}{4}} + 1 \right)^2}{4} = \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{\frac{8x+7}{4}} + \frac{1}{2} \right)^2 \leq VT$$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x+1} = \sqrt{\frac{8x+7}{4}} = -\frac{3}{4}$.

Câu 62: Giải phương trình $\frac{1}{(\sqrt{x})^3} + \frac{x\sqrt{x}}{(\sqrt{2x-1})^3} + (2x-1)\sqrt{2x-1} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{\frac{x}{2x-1}} + \sqrt{2x-1}$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$\frac{1}{(\sqrt{x})^3} + 1 + 1 \geq \frac{3}{\sqrt{x}}; \frac{(\sqrt{x})^3}{(\sqrt{2x-1})^3} + 1 + 1 \geq \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{2x-1}}$$

$$(\sqrt{2x-1})^3 + 1 + 1 \geq 3\sqrt{2x-1}; \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x-1} \geq 3$$

Cộng lại ta được: VT + 6 $\geq 3 \left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x-1} \right] \geq \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x-1}} + \sqrt{2x-1} = VP$

Vậy dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x} = \sqrt{2x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Câu 63: Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2+x+1}\sqrt{1-x} + \sqrt[3]{x^2-x+1}\sqrt{x+1} = x^2+2$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM phát một là ra. Ta có:

$$VT = \sqrt[6]{(x^2+x+1)^3(1-x)^2} + \sqrt[6]{(x^2-x+1)^3(x+1)^2}$$

$$\leq \frac{3(x^2+x+1)+2(1-x)+1}{6} + \frac{3(x^2-x+1)+2(x+1)+1}{6} = x^2+2$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$.

Câu 64: Giải phương trình $\sqrt{3-2x^2} + \sqrt{3-\frac{2}{x^2}} = 1 + \frac{(x^2+4x+1)^4}{16x^4}$

Giải

ĐKXD: $x \in \left[-\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$. Theo AM - GM ta có: $\begin{cases} \sqrt{3-2x^2} \leq 2-x^2 \\ \sqrt{3-\frac{2}{x^2}} \leq 2-\frac{1}{x^2} \end{cases}$.

Từ đó suy ra:

$$VP - VT \geq \frac{(x^2+4x+1)^4}{16x^4} + x^2 + \frac{1}{x^2} - 3 = \frac{(x+1)^2(x^6+14x^5+87x^4+116x^3+87x^2+14x+1)}{16x^6}$$

Lại có: $x^6+14x^5+87x^4+116x^3+87x^2+14x+1$

$$= x^4(x^2+14x+16) + 71x^2\left(x+\frac{58}{71}\right)^2 + \frac{2813}{71}x^2+14x+1 > 0 \forall x \in \left[-\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right]$$

Vậy $VP \geq VT$. Dấu "=" xảy ra khi $x = -1$.

Câu 65: Giải phương trình $\sqrt{x-1} + x-3 = \sqrt{2(x-3)^2+2x-2}$

Giải

Đặt $\begin{cases} \vec{u} = (x-3; \sqrt{x-1}) \\ \vec{v} = (1; 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(x-3)^2+x-1} \\ |\vec{v}| = \sqrt{2} \end{cases}$. Theo bất đẳng thức vecto ta có:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \Rightarrow \sqrt{x-1} + (x-3) \leq \sqrt{2(x-3)^2+2x-2}$$

Vậy $VT \leq VP$. Đẳng thức xảy ra khi hai vecto $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương với nhau. Tức là $x = 5$

Câu 66: Giải phương trình $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x} = \sqrt{x+9}$

Giải

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x}\right)^2 &= \left(2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\right)^2 \\ &\leq (x+9) \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+1}\right) = x+9 = (\sqrt{x+9})^2 = VP^2 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 8 = \frac{x+1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}$

Câu 67: Giải phương trình $2x = \sqrt{3+\frac{1}{2}\sqrt{3+\frac{1}{2}\sqrt{3+\frac{1}{2}\sqrt{x+3}}}}$

Giải

Đặt $a = \frac{1}{2}\sqrt{3 + \frac{1}{2}\sqrt{x+3}}$. Khi đó ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x = \sqrt{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3+a}} \\ 2a = \sqrt{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3+x}} \end{cases}$$

Giả sử $x \geq a \Rightarrow 2x \geq 2a \Rightarrow \sqrt{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3+a}} \geq \sqrt{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3+x}}$. Mà $f(t) = \sqrt{3 + \frac{1}{2}\sqrt{3+t}}$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên suy ra $a \geq x \Rightarrow a = x \Rightarrow 2x = \sqrt{3 + \frac{1}{2}\sqrt{x+3}}$

Đặt $b = \frac{1}{2}\sqrt{x+3}$ ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x = \sqrt{3+b} \\ 2b = \sqrt{3+x} \end{cases}$$

Giả sử $x \geq b \Rightarrow \sqrt{3+b} \geq \sqrt{3+x} \Rightarrow b \geq x \Rightarrow b = x$. Hay $2x = \sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{3}{4} \text{ (KTM)} \end{cases}$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu 68: Giải phương trình $2\sqrt[4]{27x^2 + 24x + \frac{28}{3}} = 1 + \sqrt{\frac{27}{2}x + 6}$

Giải

Phương trình tương đương:

$$2\sqrt[4]{27x^2 + 24x + \frac{28}{3}} = 1 + \sqrt{\frac{3(9x+4)}{2}} \Leftrightarrow 2\sqrt[4]{\frac{(9x+4)^2}{3} + 4} = 1 + \sqrt{\frac{3(9x+4)}{2}}$$

Đặt $9x+4 = y (y \geq 0)$. Khi đó phương trình trở thành:

$$2\sqrt[4]{\frac{y^2}{3} + 4} = 1 + \sqrt{\frac{3y}{2}} \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{y^2}{3} + 4} = 1 + \frac{3y}{2} + \sqrt{6y}$$

Theo AM - GM ta có:

$$\sqrt{6y} \leq \frac{6+y}{2} \Rightarrow 4\sqrt{\frac{y^2}{3} + 4} \leq 2y+4 \Leftrightarrow 4\left(\frac{y^2}{3} + 4\right) \leq (y+2)^2 \Leftrightarrow \frac{(y-6)^2}{3} \geq 0$$

Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $y = 6 \Leftrightarrow x = \frac{2}{9}$.

Câu 69: Giải phương trình $\sqrt[8]{1+x} + \sqrt[8]{1-x} + \sqrt[8]{1+3x} + \sqrt[8]{1-3x} = 2(\sqrt[8]{1+2x} + \sqrt[8]{1-2x})$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} 1+3x \geq 0 \\ 1-3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{1+x} + \sqrt{1+3x} \leq \sqrt{2(1+x+1+3x)} = 2\sqrt{1+2x} \\ \sqrt{1-x} + \sqrt{1-3x} \leq \sqrt{2(1-x+1-3x)} = 2\sqrt{1-2x} \end{cases} \quad (1)$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz và kết hợp (1) ta có:

$$\begin{cases} \sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1+3x} \leq \sqrt{2(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+3x})} \leq 2\sqrt[4]{1+2x} \\ \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1-3x} \leq \sqrt{2(\sqrt{1-x} + \sqrt{1-3x})} \leq 2\sqrt[4]{1-2x} \end{cases} \quad (2)$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz và kết hợp (2) ta có:

$$\begin{cases} \sqrt[8]{1+x} + \sqrt[8]{1+3x} \leq \sqrt{2(\sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1+3x})} \leq 2\sqrt[8]{1+2x} \\ \sqrt[8]{1-x} + \sqrt[8]{1-3x} \leq \sqrt{2(\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1-3x})} \leq 2\sqrt[8]{1-2x} \end{cases} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \sqrt[8]{1+x} + \sqrt[8]{1-x} + \sqrt[8]{1+3x} + \sqrt[8]{1-3x} \leq 2(\sqrt[8]{1+2x} + \sqrt[8]{1-2x})$$

Vậy phương trình tương đương với:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}}{1} = \frac{\sqrt{1+3x}}{1} \vee \frac{\sqrt{1-x}}{1} = \frac{\sqrt{1-3x}}{1} \\ \frac{\sqrt[4]{1+x}}{1} = \frac{\sqrt[4]{1+3x}}{1} \vee \frac{\sqrt[4]{1-x}}{1} = \frac{\sqrt[4]{1-3x}}{1} \\ \frac{\sqrt[8]{1+x}}{1} = \frac{\sqrt[8]{1+3x}}{1} \vee \frac{\sqrt[8]{1-x}}{1} = \frac{\sqrt[8]{1-3x}}{1} \end{cases} \Rightarrow x=0 \quad (4)$$

Tóm lại phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

Nhận xét. Với cách chứng minh trên ta có thể tổng quát bài toán trên thành

$$\sqrt[n]{1+x} + \sqrt[n]{1-x} + \sqrt[n]{1+3x} + \sqrt[n]{1-3x} = 2(\sqrt[n]{1+2x} + \sqrt[n]{1-2x}), \quad n=2k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \text{ chẵn.}$$

Câu 70: Giải phương trình $\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} - 4x^2 + 4 = \frac{32}{x^2(2x^2+3)^2}$

Giải

Ta có: $4x^2 + \frac{32}{x^2(2x^2+3)^2} = \frac{1}{2} \left(4x^2 + (2x^2+3) + (2x^2+3) + \frac{64}{x^2(2x^2+3)^2} \right) - 3$

Theo AM - GM ta có: $4x^2 + \frac{32}{x^2(2x^2+3)^2} \geq \frac{1}{2} \left(\sqrt[4]{4x^2(2x^2+3)^2} \cdot \frac{64}{x^2(2x^2+3)^2} \right) - 3 = 5$

Từ đó suy ra $4x^2 + \frac{32}{x^2(2x^2+3)^2} - 4 \geq 5 - 4 = 1$

Xét bất phương trình:

$$x^2 + x + 1 - \sqrt{x^2 - x + 1} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} < 1 + \sqrt{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow 2x - 1 < 2\sqrt{x^2 - x + 1}$$

- Nếu $2x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$. Bất phương trình luôn đúng.
- Nếu $2x - 1 \geq 0$, bất phương trình lúc này tương đương với:

$$4x^2 - 4x + 1 < 4(x^2 - x + 1) \Leftrightarrow 1 < 4$$

Vậy VT $< 1 \leq$ VP do đó phương trình vô nghiệm!

Câu 71: Giải phương trình $x^2 + 4 = 2\sqrt{x^4 + 4} + 2\sqrt{x^4 - 4}$

Giải

Theo AM - GM ta có: $x^4 + 4 \geq 4x^2$

Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$2\sqrt{x^4 + 4} + 2\sqrt{x^4 - 4} \leq \sqrt{2(4(x^4 + 4) + 4(x^4 - 4))} = 4x^2$$

Từ đó suy ra phương trình vô nghiệm!

Câu 72: Giải phương trình $\sqrt{x^2 - x + 19} + \sqrt{7x^2 + 8x + 13} + \sqrt{13x^2 + 17x + 7} = 3\sqrt{3}(x + 2)$

Giải

Ta có:

$$1. \sqrt{x^2 - x + 19} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 18\frac{3}{4}} \geq 18\frac{3}{4}$$

$$2. 7x^2 + 8x + 13 = (2x - 1)^2 + 3(x + 2)^2 \geq 3(x + 2)^2$$

$$3. 13x^2 + 17x + 7 = \frac{(2x - 1)^2}{4} + \frac{3(4x + 3)^2}{4} \geq \frac{3(4x + 3)^2}{4}$$

Thế vào phương trình đầu ta sẽ được $VT \geq VP$. Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$.

Câu 73: Giải phương trình $\frac{11}{x^2} - \frac{25}{(x+5)^2} = 1$

Giải

Đặt $x + 5 = y (y \neq 0)$ ta có $x^2 = (y - 5)^2 = y^2 - 10y + 25$

Phương trình trở thành:

$$y^4 - 10y^3 + 39y^2 - 250y + 625 = 0 \Leftrightarrow \left(y^2 + \frac{625}{y^2}\right) - 10\left(y + \frac{25}{y}\right) + 38 = 0 \quad (1)$$

Đặt $z = y + \frac{25}{y} \Rightarrow |z| = \left|y + \frac{25}{y}\right| \geq 10$. Phương trình (1) trở thành: $z^2 - 10z - 11 = 0 \Rightarrow z = 11$.

$$\text{Thay } z = 11 \Rightarrow y + \frac{25}{y} = 11 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Câu 74: Giải phương trình $\sqrt[4]{1+x} + \frac{1}{6}\sqrt[4]{1+3x} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{1-x} + \frac{1}{2}\sqrt[4]{1+2x} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{6}$

Giải

Điều kiện $x \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.

Xét hàm số: $f(x) = \sqrt[4]{1+x} + \frac{1}{6}\sqrt[4]{1+3x} - \frac{1}{2}\sqrt[4]{1-x} - \frac{1}{2}\sqrt[4]{1+2x} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{6}$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{(1+x)^3}} + \frac{3}{24\sqrt[4]{(1+3x)^3}} + \frac{1}{8\sqrt[4]{(1-x)^3}} - \frac{2}{8\sqrt[4]{(1+2x)^3}} - \frac{1}{4}$$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình lũy thừa ta có:

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{(1+x)^3} + \sqrt[4]{(1+3x)^3}}{2}} \leq \sqrt[4]{\frac{\sqrt[4]{(1+x)^4} + \sqrt[4]{(1+3x)^4}}{2}} = \sqrt[4]{1+2x}$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{(1+x)^3} + \sqrt[4]{(1+3x)^3} \leq 2\sqrt[4]{(1+2x)^3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{(1+x)^3} + \sqrt[4]{(1+3x)^3}} \geq \frac{1}{2\sqrt[4]{(1+2x)^3}}$$

Mặt khác ta có: $\frac{1}{\sqrt[4]{(1+x)^3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(1+3x)^3}} \geq \frac{4}{\sqrt[4]{(1+x)^3} + \sqrt[4]{(1+3x)^3}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{(1+x)^3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(1+3x)^3}} \geq \frac{2}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}} \quad (1)$$

Mặt khác ta có:

$$\sqrt[4]{(1+x)^3} = \sqrt[4]{(1+x)(1+x)(1+x).1} \leq \frac{1+x+1+x+1+x+1}{4} = 1 + \frac{3x}{4}$$

$$\sqrt[4]{(1-x)^3} = \sqrt[4]{(1-x)(1-x)(1-x).1} \leq \frac{1-x+1-x+1-x+1}{4} = 1 - \frac{3x}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{(1+x)^3} + \sqrt[4]{(1+3x)^3} \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{(1+x)^3} + \sqrt[4]{(1+3x)^3}} \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{(1+x)^3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(1-x)^3}} \geq \frac{4}{\sqrt[4]{(1+x)^3} + \sqrt[4]{(1-x)^3}} \geq 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $\frac{2}{\sqrt[4]{(1+x)^3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(1+3x)^3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{(1-x)^3}} \geq \frac{2}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}} + 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\sqrt[4]{(1+x)^3}} + \frac{3}{24\sqrt[4]{(1+3x)^3}} + \frac{1}{8\sqrt[4]{(1-x)^3}} - \frac{2}{8\sqrt[4]{(1+2x)^3}} - \frac{1}{4} \geq 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{(1+x)^3}} + \frac{3}{24\sqrt[4]{(1+3x)^3}} + \frac{1}{8\sqrt[4]{(1-x)^3}} - \frac{2}{8\sqrt[4]{(1+2x)^3}} - \frac{1}{4} \geq 0$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục và đơn điệu tăng trên tập số thực $x \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$

Mặt khác ta có $f(0) = 0$, vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Lời giải trên nhắc đến bất đẳng thức trung bình lũy thừa, ta có thể hiểu ở đây là chứng minh $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leq \sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}} \Leftrightarrow (a^3+b^3)^4 \leq 2(a^4+b^4)^3 \Leftrightarrow (a^2+b^2)^2 \leq 2(a^4+b^4)$ luôn đúng theo BCS.

Câu 75: Giải phương trình $2\left(\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2}\right) + x^{16} + y^{16} = 4(1+x^2y^2)^2 - 10$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho 4 số dương ta có:

$$\begin{aligned}\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2} + 1 + 1 &\geq 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{x^{10} \cdot y^{10}}{x^2 \cdot y^2}} = 4x^2y^2 \Rightarrow 2\left(\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2} + 2\right) \geq 8x^2y^2 \\ x^{16} + y^{16} + 1 + 1 &\geq 4 \cdot \sqrt[4]{x^{16} \cdot y^{16}} = 4x^4y^4 \\ \Rightarrow 2\left(\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2} + 2\right) + x^{16} + y^{16} + 2 &\geq 4x^4y^4 + 8x^2y^2 \\ \Rightarrow 2\left(\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2}\right) + x^{16} + y^{16} &\geq 4(1 + x^2y^2)^2 - 10\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = y^2 = 1 \Leftrightarrow |x| = |y| = 1$

Câu 76: Giải phương trình $\sqrt{-4x^4y^2 + 16x^2y + 9} - \sqrt{x^2y^2 - 2y^2} = 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) (x > 0)$

Giải

Với $y = 0$ thì phương trình vô nghiệm

Với $y \neq 0$. ĐK: $x \geq \sqrt{2}; -\frac{1}{2} \leq x^2y \leq \frac{9}{2}$. Khi đó phương trình tương đương với:

$$\sqrt{25 - (2x^2y - 4)^2} = \sqrt{y^2(x^2 - 2)} + 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

Theo AM - GM ta có: $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2} \geq 1; \frac{3x^2}{4} \geq \frac{3}{2} (x \geq \sqrt{2}) \Rightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \geq 5$

Để ý thấy $\begin{cases} \sqrt{25 - (2x^2y - 4)^2} \leq 5 \\ \sqrt{y^2(x^2 - 2)} \geq 0 \end{cases}$. Nên phương trình có nghiệm duy nhất $x = \sqrt{2}; y = 1$

Câu 77: Giải phương trình $x^3 + 3x^2 + 24\sqrt{1+x} + 4\sqrt[4]{(1+2x)^3} = 24x + 12\sqrt{1-x} + 16$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 1+x \geq 0 \\ 1+2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 (*)$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + 24\sqrt{1+x} + 4\sqrt[4]{(1+2x)^3} - 24x - 12\sqrt{1-x} - 16$

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 6x + \frac{12}{\sqrt{1+x}} + \frac{6}{\sqrt[4]{1+2x}} - 24 + \frac{6}{\sqrt{1-x}}$

Mặt khác theo AM - GM ta có:

$$1 + 2x + \frac{1}{\sqrt[4]{1+2x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1+2x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1+2x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1+2x}} \geq 5 \Rightarrow 3x + \frac{6}{\sqrt[4]{1+2x}} \geq 6 \quad (1)$$

$$1 + x + \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+x}} \geq 3 \Rightarrow 3x + \frac{6}{\sqrt{1+x}} \geq 6 \quad (2)$$

Mặt khác ta lại có: $\frac{6}{\sqrt{1+x}} + \frac{6}{\sqrt{1-x}} \geq \frac{24}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \geq \frac{24}{2} = 12 \quad (3)$

Từ (1), (2) và (3) ta có: $6x + \frac{12}{\sqrt{1+x}} + \frac{6}{\sqrt[4]{1+2x}} + \frac{6}{\sqrt{1-x}} \geq 6+6+12=24$

$$\Rightarrow 3x^2 + 6x + \frac{12}{\sqrt{1+x}} + \frac{6}{\sqrt[4]{1+2x}} + \frac{6}{\sqrt{1-x}} \geq 24$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x + \frac{12}{\sqrt{1+x}} + \frac{6}{\sqrt[4]{1+2x}} - 24 + \frac{6}{\sqrt{1-x}} \geq 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục và đơn điệu tăng trên tập số thực $x \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

Khi $x = 1$, thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn, vậy $x = 1$ không phải là nghiệm của phương trình.

Khi $0 < x < 1$ ta có $f(x) > f(0) = 0$, vậy phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

Khi $x = 0$, thay vào phương trình thấy đúng nghiệm, vậy $x = 0$ là một nghiệm của phương trình.

Khi $-\frac{1}{2} < x < 0$ thì ta có $f(x) < f(0) = 0$, vậy phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

Khi $x = -\frac{1}{2}$ thay vào phương trình thấy không thỏa mãn, vậy $x = -\frac{1}{2}$ không là nghiệm của phương trình.

Kết hợp với điều kiện (*) ta có $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 78: Giải phương trình $\sqrt[4]{\frac{1}{2}+x} + \sqrt[4]{\frac{3}{2}-x} + \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{3}{2}-x\right)} = 3$

Giải

Điều kiện: $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$

Theo AM - GM ta có: $\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{3}{2}-x\right) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+x+\frac{3}{2}-x\right)^2 \leq 1 \Rightarrow \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{3}{2}-x\right)} \leq 1$

Theo Cauchy - Shwarz ta có:

$$\sqrt[4]{\frac{1}{2}+x} + \sqrt[4]{\frac{3}{2}-x} \leq \sqrt{2\left(\sqrt{\frac{1}{2}+x} + \sqrt{\frac{3}{2}-x}\right)} \leq \sqrt{2\sqrt{2\left(\frac{1}{2}+x+\frac{3}{2}-x\right)}} = 2$$

Vậy VT $\leq$ VP. Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$.

Câu 79: Giải phương trình $\left(\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} + \sqrt{x}\right)^2 = 2\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}+1} + \sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) + 1$

Giải

Điều kiện: $x \in [0; 1]$

Phương trình đầu tương đương:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{1-x} + x + 2\sqrt{\frac{x(x+1)}{1-x}} &= 2\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}+1} + \sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) + 1 \\ \Leftrightarrow x+1 + \frac{x}{1-x} + 2\sqrt{\frac{x(x+1)}{1-x}} &= 2\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}+1} + \sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)^2 - 2\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{\frac{x}{1-x}}\right) + 1 + \frac{1}{1-x} - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{\frac{x}{1-x}} - 1\right)^2 + \frac{x}{1-x} &= 0 \end{aligned}$$

Do $x \in [0;1]$ nên $VT \geq 0$. Dấu "=" xảy ra khi $x = 0$

Câu 80: Giải phương trình

$$\sqrt{1+2013x} + \sqrt{1-2013x} = (1+2014x)\sqrt{1-2014x} + (1-2014x)\sqrt{1+2014x}$$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 1. \quad VT^2 &= \left(\sqrt{1+2013x} + \sqrt{1-2013x}\right)^2 \geq 4\sqrt{1-(2013x)^2} \\ 2. \quad x^2 \geq 0 &\Rightarrow (2014x)^2 \geq (2013x)^2 \Rightarrow 1-(2014x)^2 \leq 1-(2013x)^2 \\ &\Rightarrow 4\sqrt{1-(2013x)^2} \geq 4\sqrt{1-(2014x)^2} \Rightarrow VT^2 \geq 4\sqrt{1-(2014x)^2} \\ 3. \quad VP^2 &= \left((1-2014x)\sqrt{1+2014x} + (1+2014x)\sqrt{1-2014x}\right)^2 \\ &\Rightarrow VP^2 \leq 2\left((1-2014x)^2(1+2014x) + (1-2014x)(1+2014x)^2\right) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = 1-2014x \\ b = 1+2014x \end{cases} \Rightarrow a+b=2$$

$$\begin{aligned} \text{Ta sẽ đi chứng minh: } VP^2 \leq 4\sqrt{ab} &\Leftrightarrow 2(a^2b+ab^2) \leq 4\sqrt{ab} \Rightarrow 2ab(a+b) \leq 4\sqrt{ab} \\ &\Rightarrow 4ab \leq 4\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab}(1-\sqrt{ab}) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ta lại có: } \sqrt{ab} > 0 \Rightarrow 1-\sqrt{ab} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{ab} \leq 1$$

$$\text{Bất đẳng thức trên luôn đúng do } 2 = a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \leq 1$$

Vậy đẳng thức xảy ra khi $x = 0$

$$\text{Câu 81: Giải phương trình } 10x^3 + 16\sqrt{(1-x)^5} + 5x = \frac{45}{2}x^2 + 16\sqrt{(1+x)^5}$$

Giải

Cách 1.

Điều kiện $x = 0$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$20x^3 - 45x^2 + 10x + 32\sqrt{(1-x)^5} - 32\sqrt{(1+x)^5} = 0$$

$$\text{Xét } f(x) = 20x^3 - 45x^2 + 10x + 32\sqrt{(1-x)^5} - 32\sqrt{(1+x)^5}$$

$$\text{Suy ra } f'(x) = 10 \left[(6x^2 - 9x + 1) - 8 \left(\sqrt{(1-x)^3} + \sqrt{(1+x)^3} \right) \right]$$

Ta sẽ chứng minh $f'(x) < 0$ với $-1 \leq x \leq 1$. Thật vậy

Vì $0 \leq x^2 \leq 1$ nên theo bất đẳng thức AM - GM và so sánh lũy thừa ta có

$$8 \left(\sqrt{(1-x)^3} + \sqrt{(1+x)^3} \right) \geq 16 \sqrt[4]{(1-x^2)^3} \geq 16(1-x^2)$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh $16(1-x^2) > 6x^2 - 9x + 1 \Leftrightarrow 22x^2 - 9x - 15 < 0 (*)$

Bất đẳng thức (*) luôn đúng với $-1 \leq x \leq 1$. Do đó $f(x)$ nghịch biến trên $[-1; 1]$.

Mặt khác $f(0) = 0$ nên $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Cách 2.

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$. Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng:

$$20x^3 + 32(1-x)^2 \sqrt{1-x} + 10x = 45x^2 + 32(1+x)^2 \sqrt{1+x}$$

Trường hợp 1 $0 \leq x \leq 1$.

Ta có $\sqrt{1-x} \leq 1$ nên VT $\leq 20x^3 + 32(1-x)^2 + 10x$ (1) và $1 \leq \sqrt{1+x}$

Nên $45x^2 + 32(1+x)^2 \leq VP$ (2)

Ta chứng minh $20x^3 + 32(1-x)^2 + 10x \leq 45x^2 + 32(1+x)^2$ (3)

Bất đẳng thức này tương đương với

$$\begin{aligned} 20x^3 + 32(x^2 - 2x + 1) + 10x &\leq 45x^2 + 32(x^2 + 2x + 1) \\ \Leftrightarrow x(20x^2 - 45x - 118) &\leq 0 \text{ (đúng, do } 0 \leq x \leq 1). \end{aligned}$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được VT $\leq$ VP,

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$.

Trường hợp 2: $-1 \leq x \leq 0$

Ta có $\sqrt{1-x} \geq 1$ nên VT $\geq 20x^3 + 32(1-x)^2 + 10x$ (4)

Và $1 \geq \sqrt{1+x}$ nên $45x^2 + 32(1+x)^2 \geq VP$ (5)

Ta tiếp tục chứng minh $20x^3 + 32(1-x)^2 + 10x \geq 45x^2 + 32(1+x)^2$ (6)

Bất đẳng thức này tương đương với $20x^3 + 32(x^2 - 2x + 1) + 10x \geq 45x^2 + 32(x^2 + 2x + 1)$

$$\Leftrightarrow x(20x^2 - 45x - 118) \geq 0 \text{ (đúng, do } -1 \leq x \leq 0).$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức (4), (5) và (6) ta được VT $\geq$ VP, đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow x = 0$. Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Cách 3.

Tập xác định: $-1 \leq x \leq 1$.

Khi $x = 1$, thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn, vậy $x = 1$ không là nghiệm của phương trình.

Kh $x = -1$, thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn, vậy $x = -1$ không là nghiệm của phương trình. Khi $-1 \leq x \leq 1$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = 10x^3 + 16\sqrt{(1-x)^5} + 5x - \frac{45}{2}x^2 - 16\sqrt{(1+x)^5}$$

$$\text{Ta có } f'(x) = 30x^2 - 16 \frac{5(1-x)^4}{2\sqrt{(1-x)^5}} + 5 - 45x - 16 \frac{5(1+x)^4}{2\sqrt{(1+x)^5}}$$

$$= 30x^2 - 40\sqrt{(1-x)^3} + 5 - 45x - 40\sqrt{(1+x)^3}$$

$$f''(x) = 60 + 40 \frac{(1-x)^2}{2\sqrt{(1-x)^3}} - 45 - 40 \frac{3(1+x)^2}{2\sqrt{(1+x)^3}} = 60x + 60\sqrt{1-x} - 45 - 60\sqrt{1+x}$$

$$f'''(x) = 60 - \frac{30}{\sqrt{1+x}} - \frac{30}{\sqrt{1-x}} = 30 \left(2 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right)$$

Mặt khác theo AM - GM ta có:

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1(1+x)} \leq \frac{1+1+x}{2} = 1 + \frac{x}{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{1(1-x)} \leq \frac{1+1-x}{2} = 1 - \frac{x}{2} \quad (2)$$

Cộng các vế của các bất đẳng thức (1) và (2) lại ta được:

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \leq 1 + \frac{x}{2} + 1 - \frac{x}{2} = 2$$

$$\text{Mặt khác ta lại có: } \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \geq \frac{4}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \geq 2.$$

$$\text{Vậy ta có: } f'''(x) = 30 \left(2 - \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) \leq 0, \quad \forall x \in (-1; 1)$$

$$\Rightarrow f''(x) < f''(1) = 60 - 45 - 60\sqrt{2} < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) < f'(1) = 30 + 5 - 45 - 40\sqrt{2} = -40\sqrt{2} < 0$$

Vậy hàm số $f(x)$ nghịch biến trên tập $x \in (-1; 1)$, mặt khác ta thấy $f(0) = 0$, vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

$$\text{Câu 82: Giải phương trình } \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} = \sqrt[4]{\frac{4-x}{3}} + \sqrt[4]{\frac{2+x}{3}}$$

Giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq 2$

$$\text{Cách 1. Đặt } \begin{cases} a = \sqrt[4]{x}; b = \sqrt[4]{2-x} \\ c = \sqrt[4]{\frac{4-x}{3}}; d = \sqrt[4]{\frac{2+x}{3}} \end{cases}$$

$$\text{Vậy ta có } a^4 + b^4 = c^4 + d^4 \text{ và } 0 \leq ab \leq cd \quad (*)$$

Thay vào phương trình ta được

$$a + b = c + d \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + d^2 + 2cd \Rightarrow a^2 + b^2 \geq c^2 + d^2$$

Dấu bằng xảy ra khi $ab = cd$

$$\text{Mặt khác ta có } a^2 + b^2 \geq c^2 + d^2 \Leftrightarrow a^4 + b^4 + 2a^2b^2 \geq c^4 + d^4 + 2c^2d^2 \Rightarrow a^4 + b^4 \geq c^4 + d^4$$

Dấu bằng xảy ra khi $a^2b^2 = c^2d^2$

Theo (*) ta có phương trình nghiệm đúng khi và chỉ khi: $\begin{cases} ab = cd \\ a^2b^2 = c^2d^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Cách 2. Nếu ta sử dụng bất đẳng thức sau thì bài toán trở nên gọn nhẹ

$$\text{Với mọi } a, b, c \text{ không âm ta có } \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c} \leq \sqrt[4]{\frac{a+2b}{3}} + \sqrt[4]{\frac{b+2c}{3}} + \sqrt[4]{\frac{c+2a}{3}}$$

$$\text{Với bài toán trên ta có phương trình tương đương } \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{\frac{4-x}{3}} + \sqrt[4]{\frac{2+x}{3}}$$

Sử dụng bất đẳng thức trên với vế trái ta có ngay nó nhỏ hơn hoặc bằng vế phải

Đẳng thức xảy ra khi .

Kết luận. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi $x = 1$.

Câu 83: Giải phương trình $\sqrt{2-x+\frac{3}{2-x}} + \sqrt{x+\frac{3}{x}} = 4$

Giải

Điều kiện $x \in (0; 2)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có VT} &= \sqrt{2-x+\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2-x}} + \sqrt{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}} \\ &\geq \sqrt[4]{4\sqrt{\frac{1}{(2-x)^2}}} + \sqrt[4]{4\sqrt{\frac{1}{x^2}}} = 2\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2-x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right) \geq \frac{4}{\sqrt[8]{(2-x)x}} \geq \frac{4}{\sqrt[8]{\frac{(2-x+x)^2}{4}}} = \text{VP} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.

Câu 84: Giải phương trình $x(1+\sqrt{x^4+1}) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{7x^2-6x+1}$

Giải

$$\text{Điều kiện } x \geq \frac{3+\sqrt{2}}{7}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có: } \begin{cases} x \geq \sqrt{2x-1} \\ \sqrt{x^4+1} \geq \sqrt{2}x \end{cases}$$

$$\text{Cho nên } x(1+\sqrt{x^4+1}) \geq \sqrt{2x-1} + \sqrt{2}x^2$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh

$$\sqrt{2}x^2 \geq \sqrt{7x^2-6x+1} \Leftrightarrow 2x^4 \geq 7x^2-6x+1 \Leftrightarrow (x-1)^2(2x^2+4x-1) \geq 0$$

Đúng cho nên $\text{VT} \geq \text{VP}$ dấu bằng xảy ra khi $x = 1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi $x = 1$.

Câu 85: Giải phương trình $\sqrt[11]{x^2 + x + 1} + \sqrt[11]{x^2 - x + 1} = 2\sqrt[10]{x^2 + 1}$

Giải

Ta có phương trình đã cho tương đương với

$$\left(2\sqrt[10]{x^2 + 1}\right)^{11} = \left(\sqrt[11]{x^2 + x + 1} + \sqrt[11]{x^2 - x + 1}\right)^{11} \leq 2^{10}(2x^2 + 2) = 2^{11}(x^2 + 1) \Leftrightarrow x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Tổng quát. $\sqrt[k+1]{x^2 + x + 1} + \sqrt[k+1]{x^2 - x + 1} \leq 2\sqrt[k+1]{x^2 + 1} \leq 2\sqrt[k]{x^2 + 1}$ với mọi k tự nhiên.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 86: Giải phương trình $x + \sqrt{\sqrt{-x-1} + \sqrt{1+2\sqrt{-x-1}}} = \sqrt{-x-1}$

Giải

Điều kiện $x \leq -1$

Đặt $\sqrt{-x-1} = t \geq 0$

Khi đó phương trình tương đương $\sqrt{t + \sqrt{2t+1}} = t^2 + t + 1$

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có

$$VT = \sqrt{t + \sqrt{2t+1}} \leq \sqrt{t + \frac{1+2t+1}{2}} = \sqrt{2t+1} \leq t+1 \leq t^2 + t + 1 = VP$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $t = 0$ hay $x = -1$.

Câu 87: Giải phương trình $x + 2\sqrt{\frac{3x-1}{5}} = 4\sqrt[4]{\frac{x^4+4}{20}}$

Giải

Ta có $2\sqrt{\frac{3x-1}{5}} \leq \frac{3x-1}{5} + 1 = \frac{3x+4}{5}$

$$\sqrt[4]{\frac{x^4+4}{20}} = \sqrt[4]{\frac{(x^4+4)(16+4)}{400}} \geq \sqrt[4]{\frac{(4x^2+4)^2}{400}} = 2\sqrt{\frac{x^2+1}{20}}$$

Suy ra $x + \frac{3x+4}{5} \geq 8\sqrt{\frac{x^2+1}{20}} \Leftrightarrow 8x+4 \geq 40\sqrt{\frac{x^2+1}{20}}$

$$\Leftrightarrow 2x+1 \geq 10\sqrt{\frac{x^2+1}{20}} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ 4x^2+4x+1 \geq 5x^2+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ (x-2)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Thử lại thấy thỏa mãn phương trình

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Câu 88: Giải phương trình $3\sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1+3x} = 3\sqrt[4]{1+2x} + 1$

Giải

Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{3}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{1+3x} - 1 &= 3(\sqrt[4]{1+2x} - \sqrt[4]{1+x}) \Leftrightarrow \frac{\sqrt[4]{1+3x} - 1}{\sqrt[4]{1+3x} + 1} = 3 \frac{\sqrt[4]{1+2x} - \sqrt[4]{1+x}}{\sqrt[4]{1+2x} + \sqrt[4]{1+x}} \\ \Leftrightarrow \frac{3x}{(\sqrt[4]{1+3x} + 1)(\sqrt{1+3x} + 1)} &= \frac{3x}{(\sqrt[4]{1+2x} + \sqrt[4]{1+x})(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1+x})} \end{aligned}$$

Ta quan tâm tới phương trình

$$(\sqrt[4]{1+3x} + 1)(\sqrt{1+3x} + 1) = (\sqrt[4]{1+2x} + \sqrt[4]{1+x})(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1+x}) \quad (*)$$

Để ý các bất đẳng thức $\sqrt{1+x} + \sqrt{1+2x} \geq 1 + \sqrt{1+3x}$

Và $\sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1+2x} \geq 1 + \sqrt[4]{1+3x}$

Suy ra $VP(*) \geq VT(*)$, $VT(*) = VP(*) \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 89: Giải phương trình: $\sqrt{1+2x} + \sqrt[3]{1+3x} + \sqrt[4]{1+4x} = 3(x+1)$

Giải

Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{4}$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{1 \cdot (1+2x)} + \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot (1+3x)} + \sqrt[4]{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (1+4x)} \\ &\leq \frac{1+1+2x}{2} + \frac{1+1+1+3x}{3} + \frac{1+1+1+1+4x}{4} = 3(x+1) = VP \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\sqrt{1+2x} = \sqrt[3]{1+3x} = \sqrt[4]{1+4x} \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$.

Câu 90: Giải phương trình: $\sqrt{\left(1 + \frac{x+6}{\sqrt{4x-3}}\right)\left(1 + \frac{9}{\sqrt{x+6}}\right)} = \frac{16}{\sqrt{1+\sqrt{4x-3}}}$

Giải

Đặt: $a = \sqrt{x+6}$, $b = \sqrt{4x-3}$ ($a, b > 0$)

Phương trình đã cho trở thành: $\sqrt{1 + \frac{a^2}{b}\left(1 + \frac{9}{a}\right)} = \frac{16}{\sqrt{1+b}} \Leftrightarrow \sqrt{(1+b)\left(1 + \frac{a^2}{b}\right)} = \frac{16a}{a+9} \quad (1)$

Theo bất đẳng thức BCS ta có: $VT(1) \geq 1+a = \frac{(a-3)^2}{a+9} + \frac{16a}{a+9} \geq \frac{16a}{a+9} = VP(1)$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = 3 \Rightarrow x = 3$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Câu 91: Giải phương trình: $12\sqrt{4x-x^2} \sin^2 \frac{x+y}{2} + 8\cos(x+y) - 13 - 4\cos^2(x+y) = 0$

Giải

Dễ thấy $\sqrt{4x-x^2} \leq 2$

Đánh giá

$$\sqrt{4x-x^2} \sin^2 \frac{x+y}{2} + 8 \cos(x+y) - 13 - 4 \cos^2(x+y) \\ \leq 12(1 - \cos(x+y)) + 8 \cos(x+y) - 13 - 4 \cos^2(x+y) = -(2 \cos(x+y) + 1)^2 \leq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = 2 \\ \cos(x+y) = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Câu 92: Giải phương trình $6\sqrt[3]{x^4+1} + 6\sqrt{x^3+1} = 7x^2 + 12$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM- GM ta có

$$6\sqrt{x^3+1} = 3.2\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} \leq 3x^2 + 6$$

Từ phương trình ta có ngay

$$7x^2 + 12 \leq 6\sqrt[3]{x^4+1} + 3x^2 + 6 \Leftrightarrow 2x^2 + 3 \leq 3\sqrt[3]{x^4+1} \Leftrightarrow x^2(8x^4 + 9x^2 + 54) \leq 0 \Rightarrow x = 0$$

Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 93: Giải phương trình $\sqrt{3x+1} + \sqrt[3]{7x+1} + \sqrt[4]{15x+1} + \sqrt[5]{31x+1} + \sqrt[6]{63x+1} = 5x^6 + 5$

Giải

Điều kiện $x \in \left[-\frac{1}{63}; +\infty\right)$

- Nếu $x \in \left[-\frac{1}{63}; 0\right)$ thì VT < 5 < VP suy ra phương trình vô nghiệm

- $x \in [0; 1)$ thì

$$VT \geq \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^3} + \sqrt[4]{(x+1)^4} + \sqrt[5]{(x+1)^5} + \sqrt[6]{(x+1)^6} = 5(x+1) \geq VP$$

- $x \in [1; +\infty)$, tương tự ta có VT ≤ 5(x+1) ≤ VP

Từ đó, ta dễ dàng thu được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{0; 1\}$.

Câu 94: Giải phương trình: $\sqrt[6]{x+2} \sqrt[3]{\frac{x+5}{2}} = \sqrt[4]{2x+1} \sqrt[4]{2x+1}$

Giải

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{4}$

- Trường hợp 1: $x \geq 1$

Ta có:

$$VT = \sqrt[6]{x+2} \sqrt[3]{\frac{x+5}{2}} \leq \sqrt[6]{x+2} \sqrt[3]{x+2} = x+2 \leq \sqrt{2x+1} = \sqrt[4]{2x+1} \sqrt[4]{2x+1} \leq \sqrt[4]{2x+1} \sqrt[4]{4x-1} = VP$$

- Trường hợp 2: $\frac{1}{4} \leq x \leq 1$. Tương tự VT ≥ VP

$$\Rightarrow VT = VP \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu 95: Giải phương trình $\frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - 3x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + 3x + 1}}{x^2 + 2} = 2$.

Giải

Áp dụng bất đẳng thức cauchy cho VT ta có

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x^2 - x + 1} \leq \frac{x^2 - x + 2}{2} \\ \sqrt{x^2 - 3x + 1} \leq \frac{x^2 - 3x + 2}{1} \\ \sqrt{x^2 + x + 1} \leq \frac{x^2 + x + 2}{2} \\ \sqrt{x^2 + 3x + 1} \leq \frac{x^2 + 3x + 2}{2} \end{array} \right. \Rightarrow VT \leq 2x^2 + 4 \leq VP$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 0$.

Câu 96: Giải phương trình $\cos x \sqrt{\frac{1}{\cos x} - 1} + \cos 3x \sqrt{\frac{1}{\cos 3x} - 1} = 1$

Giải

Phương trình đầu tương đương $\cos x \sqrt{\frac{1 - \cos x}{\cos x}} + \cos 3x \sqrt{\frac{1 - \cos 3x}{\cos 3x}} = 1$

Ta có điều kiện: $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1 - \cos x}{\cos x} \geq 0 \\ \frac{1 - \cos 3x}{\cos 3x} \geq 0 \end{array} \right.$ mà $1 - \cos x \geq 0$ và $1 - \cos 3x \geq 0 \Rightarrow \cos x, \cos 3x \geq 0$

Ta có $\cos x \sqrt{\frac{1 - \cos x}{\cos x}} \leq \frac{\cos x}{2} \left(\frac{1 - \cos x}{\cos x} + 1 \right) = \frac{1}{2}$

Cũng tương tự: $\cos 3x \sqrt{\frac{1 - \cos 3x}{\cos 3x}} \leq \frac{\cos 3x}{2} \left(\frac{1 - \cos 3x}{\cos 3x} + 1 \right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow VT \leq 1$ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\left\{ \begin{array}{l} \cos 3x \sqrt{\frac{1 - \cos 3x}{\cos 3x}} = \frac{1}{2} \\ \cos x \sqrt{\frac{1 - \cos x}{\cos x}} = \frac{1}{2} \end{array} \right.$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos 3x = \frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ hay } 3x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + t2\pi \text{ hay } x = -\frac{\pi}{3} + t2\pi \end{array} \right.$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{9} + k2\pi \text{ hay } x = -\frac{\pi}{9} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + t2\pi \text{ hay } x = -\frac{\pi}{3} + t2\pi \end{array} \right. \Rightarrow \text{giao lại trên đường tròn lượng giác.}$

Câu 97: Giải phương trình $\sqrt{2x+1} + \sqrt{17-2x} = x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 22$

Giải

Ta có $\sqrt{2x+1} + \sqrt{17-2x} - 6 = (x^2 + 1)(x-4)^2 \geq 0$

Lại có

$$\begin{cases} \frac{3\sqrt{2x+1}}{3} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2x+1+9}{2} \right) = \frac{x+5}{3} \\ \frac{3\sqrt{17-2x}}{3} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{17-2x+9}{3} \right) = \frac{13-x}{3} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2x+1} + \sqrt{17-2x} \leq 6 \Rightarrow \sqrt{2x+1} + \sqrt{17-2x} - 6 \leq 0$$

Từ đó ta có $\sqrt{2x+1} + \sqrt{17-2x} - 6 = 0 \Rightarrow x = 4$

Câu 98: Giải phương trình $5\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-2} + \frac{9(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})^3}{2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}} = 15$

Giải

Ta có $2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} > 0$; $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} > 0$, áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\begin{aligned} & 5\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-2} + \frac{9(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})^3}{2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}} \\ &= 5\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-2} + \frac{243}{(2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})^3} \\ &= (2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}) + 3(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2}) + \frac{243}{(2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})^3} \\ &\geq 5\sqrt[5]{\frac{2432\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})^3}{(2\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})^3}} = 15 \end{aligned}$$

Câu 99: Giải phương trình $\sqrt{1+2x} + \sqrt[3]{1+3x} = \sqrt[4]{1+4x} + \sqrt[5]{1+5x}$

Giải

Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{4}$

Ta có $\sqrt[4]{1+4x} \leq \sqrt[4]{1+4x+4x^2} = \sqrt[4]{(1+2x)^2} = \sqrt{|1+2x|} = \sqrt{1+2x} \Rightarrow \sqrt{1+2x} \geq \sqrt[4]{1+4x} \quad (1)$

Tương tự: $\sqrt[3]{1+3x} \geq \sqrt[5]{1+5x} \quad (2)$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{1+\frac{3}{5}(t^5-1)} \geq t \quad (t = \sqrt[5]{1+5x}) \Leftrightarrow 3t^5 - 5t^3 + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)^2(3t^3 + 6t^2 + 4t + 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2 [t^2(3t+4) + 2(t+1)^2] \geq 0 \text{ luôn đúng } \forall t > -1 \Rightarrow (2) \text{ luôn đúng } \forall x \geq -\frac{1}{4}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \sqrt{1+2x} + \sqrt[3]{1+3x} \geq \sqrt[4]{1+4x} + \sqrt[5]{1+5x}$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Câu 100: Giải phương trình $\frac{x^2(x^2+x-\sqrt{x^2-1}-2)}{x+\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}} = \frac{\sqrt{x^3-x^2\sqrt{x^2-1}}-1}{x-\sqrt{x^2-1}}$

Giải

Điều kiện của x là $x \geq 1$. Dễ thấy $t = \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}} \leq 1$

$$PT \Leftrightarrow \frac{x^2(x^2+t^2-2)}{x+t} = \frac{xt-1}{t^2} \Leftrightarrow \frac{xt-1}{x^2t^2} = x+t - \frac{2(xt-1)}{x+t}$$

Ta có thể đặt $\begin{cases} s = x+t \\ p = xt \end{cases}$ để giải tiếp hoặc sử dụng BĐT $(x-1)(t-1) \leq 0 \Leftrightarrow xt+1 \leq x+t$. Khi đó:

$$x+t - 2\frac{(xt+1)}{x+t} \geq (xt+1) - \frac{2(xt+1)}{(xt+1)} = xt-1 \Rightarrow \frac{xt-1}{x^2t^2} \geq xt-1 \Leftrightarrow \frac{(xt+1)(xt-1)^2}{x^2t^2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ t=1 \end{cases}$$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Câu 101: Giải phương trình $x^2+4x+5 - \frac{3x}{x^2+x+1} = (x-1)\left(1-2\sqrt{\frac{1-x}{x^2+x+1}}\right)$

Giải

Vì phương trình có nghiệm $x=2$ mà đây là nghiệm kép của bài toán nên ta tìm cách khử cái căn $\sqrt{\frac{1-x}{x^2+x+1}}$. Nhận thấy mẫu ở vế trái có chứa x^2+x+1 nên ta sẽ lấy:

$$\sqrt{\frac{1-x}{x^2+x+1}} = \frac{\sqrt{1-x}\sqrt{x^2+x+1}}{x^2+x+1} \leq \frac{1-x+x^2+x+1}{2(x^2+x+1)} = \frac{x^2+2}{2(x^2+x+1)}$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} & x^2+4x+5 - \frac{3x}{x^2+x+1} - (x-1)\left(1-2\sqrt{\frac{1-x}{x^2+x+1}}\right) \\ &= x^2+3x+6 - \frac{3x}{x^2+x+1} - 2\sqrt{\frac{1-x}{x^2+x+1}} \\ &\geq x^2+3x+6 - \frac{3x}{x^2+x+1} + \frac{(x-1)(x^2+2)}{x^2+x+1} = (x+2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Câu 102: Giải phương trình $4x^3(x^2+3x+2) = (2x^4+14x^3+13x^2+6x+1)(\sqrt{2x+3}-1)$

Giải

Ta có:

$$PT \Leftrightarrow \frac{1}{2}(2x-1-\sqrt{2x+3})(2x^3+8x^2+4x+1+x(2x+1)\sqrt{2x+3})(\sqrt{2x+3}-1)^2 = 0 \quad (*)$$

Sử dụng BĐT Cauchy ta có :

$$2x(2x+1)\sqrt{2x+3} \geq \frac{(2x+1)^2 + 4x^2(2x+3)}{2} = -\left(4x^3 + 8x^2 + 2x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2x^3 + 8x^2 + 4x + 1 + x(2x+1)\sqrt{2x+3} \geq 4x^2 + 3x + \frac{3}{4} = 4\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{3}{16} \geq 0$$

$$\text{Vậy (*)} \Leftrightarrow (2x-1-\sqrt{2x+3})(\sqrt{2x+3}-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4} \\ x = -1 \end{cases}$$

Câu 103: Giải phương trình $4x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 8 = (x^2 + 5)\sqrt{2x^4 + 2}$

Giải

Phương trình có nghiệm bội kép $x=1$, do đó ta tìm được nhân tử là $(\sqrt{2x^4 + 2} - 2x)$

Dễ thấy

$$1. \sqrt{2x^4 + 2} \geq 2x$$

2. Tuy nhiên thành thử ta thấy :

$$4x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 8 - (x^2 + 5)\sqrt{2x^4 + 2} \geq 0$$

Điểm rơi là $x=1$ nên $(x^2 + 5) = \sqrt{2x^4 + 2}$ vậy áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\begin{aligned} (x^2 + 5)\sqrt{2x^4 + 2} &\leq \frac{(x^2 + 5)^2 + 9(2x^4 + 2)}{6} \\ \Rightarrow 4x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 8 &\leq \frac{(x^2 + 5)^2 + 9(2x^4 + 2)}{6} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6}(5x^2 - 2x + 5)(x-1)^2 &\leq 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Câu 104: Giải phương trình $2x^3 - 2x^2 + 6x = (x^3 + 5x + 2)\sqrt{x-1}$

Giải

Ta có: PT $\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 1)(x^3 - x^2 + 5x + 1 - (x^2 + 1)\sqrt{x-1}) = 0$

Nếu

- $\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$
- $x^3 - x^2 + 5x + 1 = (x^2 + 1)\sqrt{x-1}$. T

Thành thử ta thấy cần phải chứng minh :

$$x^3 - x^2 + 5x + 1 - (x^2 + 1)\sqrt{x-1} > 0$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có

$$\sqrt{x-1} \leq \frac{x-1+1}{2} = \frac{x}{2}.$$

Do đó :

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + 5x + 1 - (x^2 + 1)\sqrt{x-1} &\geq x^3 - x^2 + 5x + 1 - \frac{x}{2}(x^2 + 1) \\ &= \frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{9}{2}x + 1 = \frac{1}{2}(x-1)(x^2 - x + 8) + 5 > 0 \end{aligned}$$

II. CÁC BÀI TOÁN HỆ PHƯƠNG TRÌNH.

Câu 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \left(1 + \left|\frac{x}{y}\right|\right)^4 + \left(1 + \left|\frac{y}{x}\right|\right)^4 = 32 & (1) \\ x^2 + y^2 + x^2y + 2x + y + 6 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x, y \neq 0$. Ta có:

$$\text{Phương trình (1)} \Leftrightarrow \left(1 + \left|\frac{x}{y}\right|\right)^4 + \left(1 + \left|\frac{y}{x}\right|\right)^4 = (1+1)^4 + \left(1 + \frac{1}{1}\right)^4$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = (t+1)^4 + \left(1 + \frac{1}{t}\right)^4, t > 0.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = 4(t+1)^3 + 4\left(\frac{1}{t} + t\right)^3 > 0, \forall t > 0 \text{ hay hàm số đồng biến trên } (0; +\infty)$$

$$\text{Do vậy } f\left(\left|\frac{x}{y}\right|\right) = f(1) \Leftrightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -y. \end{cases}$$

- Với $x = y$ thay vào (2) ta có phương trình $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$
- Với $x = -y$ thay vào (2) ta có phương trình $-x^3 + 2x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = \{(-2; -2), (3; -3)\}$.

Câu 2: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x^2 = (\sqrt{x^2 + 1} + 1)(x^2 - y^3 + 3y - 2) & (1) \\ x^2 + (y+1)^2 = 2\left(1 + \frac{1-x^2}{y}\right) & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $y \neq 0$.

$$\text{Phương trình (2) tương đương với } y(x^2 + y^2 + 2y + 1) = 2(y + 1 - x^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2(y+2) + y^3 + 2y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(y+2) + (y+2)(y^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+2)(x^2 + y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

- Với $y = -2$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có

$$4x^2 = x^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ \sqrt{x^2 + 1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

• Với $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có $4[(x^2 + 1) - 1] = (\sqrt{x^2 + 1} + 1)(x^2 - y^3 + 3y - 2)$

$$\Leftrightarrow 4(\sqrt{x^2 + 1} - 1) = x^2 - y^3 + 3y - 2 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2 + 1} - x^2 + y^3 - 3y - 2 = 0$$

Xét hàm số $f(x) = 4\sqrt{x^2 + 1} - x^2$ với $x \in [-1; 1]$. Ta có hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$

và $f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 2x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \left(\frac{2 - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \notin [-1; 1] \end{cases}$

$$\Rightarrow \min_{[-1; 1]} f(x) = \min \{f(-1); f(0); f(1)\} = f(0) = 4.$$

Xét hàm số $g(y) = y^3 - 3y - 2$ với $y \in [-1; 1]$. Ta có hàm số $g(y)$ liên tục trên đoạn $[-1; 1]$

và $g'(y) = 3y^2 - 3$; $g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1 \Rightarrow \min_{[-1; 1]} g(y) = \min \{g(-1); g(0); g(1)\} = g(0) = -4$

Từ đó ta có $f(x) + g(y) \geq 0, \forall x, y \in [-1; 1]$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

Thử lại ta có tập nghiệm của hệ $T = \{(0; -2), (2\sqrt{2}; -2), (-2\sqrt{2}; -2), (0; 1)\}$.

Câu 3: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + y - 1 = \sqrt{2(y^2 - 2y + x + 2)} \\ \sqrt{x(x+y)} + \sqrt{(x-1)(y+1)} = \frac{x^2 - x + y + 1}{\sqrt{x-1}} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x > 1 \\ y \geq -1 \end{cases}$.

Ta biến đổi hệ phương trình đã cho trở thành hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + y - 1 = \sqrt{2(y^2 - 2y + x + 2)} \\ \sqrt{(x^2 - x)(x+y)} + (x-1)\sqrt{y+1} = x^2 - x + y + 1 \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức B.C.S ta có $\sqrt{x+1} + y - 1 \leq \sqrt{(1+1)(y^2 - 2y + x + 2)}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x-1} = y - 1$.

Sử dụng đánh giá: $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$. Ta có các đánh giá sau:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \sqrt{(x^2 - x)(x+y)} \leq \frac{x^2 - x + x + 1}{2} \\ (x-1)\sqrt{y+1} \leq \frac{x^2 - 2x + 1 + y + 1}{2} \end{cases} \\ & \Rightarrow \sqrt{(x^2 - x)(x+y)} + (x-1)\sqrt{y+1} \leq x^2 - x + y + 1. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \sqrt{x^2 - x} = \sqrt{x + y} \\ x - 1 = \sqrt{y + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{y + 1} = x - 1.$

Khi đó kết hợp lại ta sẽ có hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x - 1} = y - 1 \\ \sqrt{y + 1} = x - 1 \end{cases} \quad (x \geq 1, y \geq 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \sqrt{y + 1} - \sqrt{x + 1} \\ \sqrt{x + 1} = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + (\sqrt{x + 1} - \sqrt{y + 1}) = 0 \\ \sqrt{x + 1} = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{y + 1}} \right) = 0 \\ \sqrt{x + 1} = y - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sqrt{x + 1} = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + 1 = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x(x - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x = 3 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (3; 3).$

Câu 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{4x^3 + 4xy^2}{2x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 - xy + y^2} = 2x + y \\ 2(2x - y)\sqrt{x - y} = x^2 - 5xy + 4x + y - 1 \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Điều kiện : $x \geq y.$

Từ phương trình thứ nhất trong hệ ta có :

$$\sqrt{x^2 - xy + y^2} = 2x + y - \frac{4x^3 + 4xy^2}{2x^2 + xy + y^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - xy + y^2} = y \left(\frac{4x^2 - xy + y^2}{2x^2 + xy + y^2} \right)$$

Do : $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 > 0 \\ 4x^2 - xy + y^2 > 0 \\ 2x^2 + xy + y^2 > 0 \end{cases}$ nên ta suy ra : $y > 0.$ Vì $\begin{cases} x \geq y \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0.$

Mặt khác ta có các đánh giá sau :

$$\sqrt{x^2 - xy + y^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(x + y)^2 + \frac{3}{4}(x - y)^2} \geq \frac{1}{2}(x + y)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y.$

$$\frac{4x^3 + 4xy^2}{2x^2 - xy + y^2} \geq \frac{3x + y}{2} \quad (1).$$

Thật vậy, ta có $(1) \Leftrightarrow 8x^3 + 8xy^2 \geq (3x + y)(2x^2 - xy + y^2) \Leftrightarrow (x - y)^2(2x - y) \geq 0.$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì $2x - y = x + (x - y) > 0.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y.$

Từ hai đánh giá ta có : $\frac{4x^3 + 4xy^2}{2x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 - xy + y^2} \geq \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2}(3x + y) = 2x + y$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$4x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \left\{ (1; 1); \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right) \right\}$.

Câu 5: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)} = \sqrt{y} + y(1) \\ (y + \sqrt{xy} + x + x^2)(x+1) - 4 = 0(2) \end{cases}$$

Giải

$$(1) \Rightarrow \frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{y(x-y) + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)}{\sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)} + y} = 0$$

Vậy $x = y$ hay $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{y + \sqrt{xy} - 2}{\sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)} + y} = 0(*)$.

Nếu $x = -1$ thế vào phương trình (2) suy ra $-4 = 0$ (vô lí)

Nếu $x \neq -1$ từ (2) $\Rightarrow y + \sqrt{xy} = \frac{4}{x+1} + x^2 - x$ thế vào phương trình (*)

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\frac{4}{x+1} + x^2 - x - 2}{\sqrt{xy + (x-y)(\sqrt{xy} - 2)} + y} = 0(**)$$

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh $\frac{4}{x+1} + x^2 - x - 2 \geq 0$ hoặc > 0

Đặt $f(x) = \frac{4}{x+1} + x^2 - x - 2$ với $x \geq 0$.

Khi đó, $f'(x) = \frac{-4}{(x+1)^2} + 2x - 1$ cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$

Khảo sát ta thấy $\min f(x) = 0$ tại $x = 1 \Rightarrow f(x) \geq 0$

Khi đó dễ thấy phương trình $(**) > 0$ với $x, y \geq 0$

Với $x = y$ thế vào (2) $\Rightarrow (3x - x^2)(x+1) - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ (thỏa) hay $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ (thỏa).

Câu 6: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 6\sqrt{xy} - y = 6 \\ x + \frac{6(x^3 + y^3)}{x^2 + xy + y^2} = \sqrt{2(x^2 + y^2)} + 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện: $xy \geq 0, x^2 + y^2 \geq 0$.

Vì $x \leq 0, y \leq 0$ không thỏa hệ nên ta chỉ cần xét $x > 0, y > 0$.

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có : $6\sqrt{xy} \leq 3(x+y)$.

Do đó từ phương trình thứ nhất ta có : $6 = x + 6\sqrt{xy} - y \leq x + 3(x+y) - y \Rightarrow 2x + y \geq 3$.

Mặt khác ta có : $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$. Do đó từ phương trình thứ hai trong hệ ta có :

$$x + \frac{6(x^3 + y^3)}{x^2 + xy + y^2} \geq x + \frac{6(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2 + \frac{x^2 + y^2}{2}} = \frac{4(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}.$$

Ta sẽ đi chứng minh $\frac{4(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \geq 2\sqrt{2(x^2 + y^2)}$ (*).

Thật vậy, ta có (*) $\Leftrightarrow 2(x^3 + y^3) \geq (x^2 + y^2)\sqrt{2(x^2 + y^2)}$

$$\Leftrightarrow 2(x^3 + y^3) \geq (x^2 + y^2)^2(x^2 + y^2) \Leftrightarrow x^6 - 3x^4y^2 + 4x^3y^3 + 3x^2y^4 + y^6 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2(x^4 + 2x^3y + 2xy^3 + y^4) \geq 0 \text{ (luôn đúng } \forall x, y > 0)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Với các đánh giá này ta có :

$$3 = x + \frac{6(x^3 + y^3)}{x^2 + xy + y^2} - \sqrt{2(x^2 + y^2)} \geq x + 2\sqrt{2(x^2 + y^2)} - \sqrt{2(x^2 + y^2)} = x + \sqrt{2(x^2 + y^2)}$$

Mặt khác ta lại có : $\sqrt{2(x^2 + y^2)} \geq x + y$.

Do đó ta có : $3 \geq x + x + y \Leftrightarrow 2x + y \leq 3$.

$$\text{Vậy qua các đánh giá ta có được } \begin{cases} 2x + y \geq 3 \\ 2x + y \leq 3 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (1; 1)$.

Câu 7: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x^2 = (\sqrt{x^2 + 1} + 1)(x^2 - y^3 + 3y - 2) & (1) \\ (x^2 + y^2)^2 + 1 = x^2 + 2y & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Từ phương trình (2) ta có $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2) = -(y^2 - 2y + 1)$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = -(y - 1)^2 \Rightarrow 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1.$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} x^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \\ y^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (*)$$

Từ phương trình (1) ta lại có: $4[(x^2 + 1) - 1] = (\sqrt{x^2 + 1} + 1)(x^2 - y^3 + 3y - 2)$

$$\Leftrightarrow 4(\sqrt{x^2 + 1} - 1) = x^2 - y^3 + 3y - 2 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2 + 1} - x^2 + y^3 - 3y - 2 = 0 \quad (*)$$

- Xét hàm số $f(x) = 4\sqrt{x^2+1} - x^2$ với $x \in [-1;1]$. Ta có hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f'(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} - 2x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x \left(\frac{2 - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \notin [-1;1] \end{cases}$

$$\Rightarrow \min_{[-1;1]} f(x) = \min \{f(-1); f(0); f(1)\} = f(0) = 4.$$

- Xét hàm số $g(y) = y^3 - 3y - 2$ với $y \in [-1;1]$. Ta có hàm số $g(y)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $g'(y) = 3y^2 - 3$; $g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$

$$\Rightarrow \min_{[-1;1]} g(y) = \min \{g(-1); g(0); g(1)\} = g(0) = -4$$

Từ đó ta có $f(x) + g(y) \geq 0, \forall x, y \in [-1;1]$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

Thử lại ta thấy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $\begin{cases} x=0 \\ y=1. \end{cases}$

Nhận xét.

Ta có thể giải quyết bài toán một cách ngắn gọn hơn từ việc giải quyết phương trình (*) như sau

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow (x^2+1) - 4\sqrt{x^2+1} + 3 = y^3 - 3y + 2 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1} - 1)(\sqrt{x^2+1} - 3) = (y+2)(y-1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Với } |x| \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} - 1 \geq 0 \\ \sqrt{x^2+1} - 3 < 0 \end{cases} \text{ đồng thời } |y| \leq 1 \Rightarrow (y+2)(y-1)^2 \geq 0$$

$$\text{Từ đó suy ra } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} - 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1. \end{cases}$$

Câu 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} = x+y & (1) \\ x\sqrt{2xy+5x+3} = 4xy - 5x - 3 & (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện $2xy + 5x + 3 \geq 0$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x^2 + xy + y^2 \geq \frac{3}{4}(x+y)^2 \\ x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2 \end{cases}. \text{ Do đó}$$

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}} \geq \sqrt{\frac{1}{4}(x+y)^2} + \sqrt{\frac{1}{4}(x+y)^2} = |x+y| \geq (x+y)$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y \geq 0$

Thay $x = y$ vào phương trình (2) ta được phương trình

$$\begin{aligned} x\sqrt{2x^2+5x+3} &= 4x^2-5x-3 \Leftrightarrow (2x^2+5x+3) + x\sqrt{2x^2+5x+3} - 6x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{2x^2+5x+3} + 3x)(\sqrt{2x^2+5x+3} - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2+5x+3} = -3x \\ \sqrt{2x^2+5x+3} = 2x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+5x+3} = 2x \Leftrightarrow x = 3. \end{aligned}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm là $(x; y) = (3; 3)$.

Câu 9: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x+y} = 16 & (1) \\ \frac{x^2}{8y} + \frac{2x}{3} = \sqrt{\frac{x^3}{3y} + \frac{x^2}{4}} - \frac{y}{2} & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x+y \neq 0 \\ y \neq 0 \\ \frac{x}{3y} + \frac{1}{4} \geq 0 \end{cases}$

Từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra: $\begin{cases} \frac{x^2}{8y} + \frac{2x}{3} + \frac{y}{2} \geq 0 \\ \frac{x}{3y} + \frac{1}{4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x + \frac{3}{4}y \geq 0 \end{cases}$

Ta có $x^2 + y^2 + \frac{8xy}{x+y} = 16 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 16 - 2xy + \frac{8xy}{x+y} = 0$

$$\Leftrightarrow (x+y-4)\left[(x+y)^2 + 4(x+y) - 2xy\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-4)\left[x^2 + y^2 + 4(x+y)\right] = 0 \quad (*)$$

Do $x+y > x + \frac{3}{4}y \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4(x+y) > 0$ nên $(*) \Leftrightarrow x+y = 4$.

Mặt khác, do $\frac{2x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{2}{3}\left(x + \frac{3}{4}y\right) > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\frac{x^2}{8y} + \left(\frac{2x}{3} + \frac{y}{2}\right) \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{8y}\left(\frac{2x}{3} + \frac{y}{2}\right)} = \sqrt{\frac{x^3}{3y} + \frac{x^2}{4}}$$

Suy ra phương trình thứ hai của hệ $\Leftrightarrow \frac{x^2}{8y} = \frac{2x}{3} + \frac{y}{2}$

Do đó hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ \frac{x^2}{8y} = \frac{2x}{3} + \frac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ 3x^2 - 16xy - 12y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{24}{7} \\ y = \frac{4}{7} \\ x = -8 \\ y = 12 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y) = \left\{ \left(\frac{24}{7}; \frac{4}{7} \right), (-8; 12) \right\}$.

Câu 10: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3(1-x) + y^3(1-y) = 12xy + 18 & (1) \\ |3x - 2y + 10| + |2x - 3y| = 10 & (2) \end{cases}$$

Giải

Nhận thấy $(x; y) = (0; 0)$ không là nghiệm của hệ phương trình.

Ta có $(1) \Leftrightarrow x^3 + y^3 = (x^2 - y^2)^2 + 2(xy + 3)^3 \geq 0 \Rightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2) \geq 0 \Rightarrow x + y \geq 0$ (*)

Áp dụng bất đẳng thức $|A| + |B| \geq |A - B|$ ta lại có

$$(2) \Rightarrow 10 = |3x - 2y + 10| + |2x - 3y| \geq |x + y + 10| \geq 10$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x - 2y + 10)(2x - 3y) \leq 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ y = -x \end{cases}$$

Thay $y = -x$ vào phương trình (1) ta có phương trình

$$2x^4 - 12x^2 + 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}, \text{ do } -2 \leq x \leq 0.$$

Thay trở lại ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$.

Câu 11: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x + y + 1)(x + y + 1 + xy) = 12xy & (1) \\ y\sqrt{3x - 2x^2 - 1} + x\sqrt{1 + y - 2y^2} + xy = 1 & (2) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện} \begin{cases} 3x - 2x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 + y - 2y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq y \leq 1 \end{cases}$$

- Với $(x + y + 1)(x + y + 1 + xy) = 0$ hệ đã cho vô nghiệm.
- Với $(x + y + 1)(x + y + 1 + xy) \neq 0$

$$\text{Từ phương trình (1) cho ta } \frac{1}{x + y + 1} - \frac{1}{x + y + 1 + xy} = \frac{1}{12}$$

$$\text{Ta lại có } \frac{1}{x + y + 1} - \frac{1}{x + y + 1 + xy} \leq \frac{1}{x + y + 1} - \frac{4}{(x + y + 2)^2}$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t + 1)^2}, t \in [1; 3] \text{ trong đó } t = x + y + 1$$

$$\text{Lập bảng biến thiên ta tìm được } f(t) \leq f(3) = \frac{1}{12}$$

$$\text{Vậy } \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = y + 1 \\ x + y + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Thử lại ta có nghiệm của hệ đã cho là } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Cách 2. Ta có
$$\begin{cases} x+y+1 \geq \frac{1}{2} + \frac{-1}{2} + 1 = 1 > 0 \\ x+y+1+xy \geq \frac{1}{2} + \frac{-1}{2} + 1 + 1 \cdot \frac{-1}{2} = \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$$

Nên từ $12xy = (x+y+1)(x+y+1+xy) > 0 \Rightarrow xy > 0$

Mà $x > 0 \Rightarrow y > 0$. Nên từ phương trình (2) suy ra $xy \leq 1$ (*)

Từ phương trình (1) và áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$12xy = (x+y+1)(x+y+1+xy) \geq 3\sqrt{x \cdot y \cdot 1} \cdot (2\sqrt{x \cdot y} + 2\sqrt{1 \cdot xy}) = 12(xy)^{\frac{5}{6}} \Rightarrow xy \geq 1 (**)$$

Từ (*), (**) cho ta
$$\begin{cases} x, y > 0 \\ x = y \Leftrightarrow x = y = 1. \\ xy = 1 \end{cases}$$

Thử lại ta có nghiệm của hệ đã cho là
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Câu 12: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = xy\sqrt{2(x^2 + y^2)} \\ 4\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 9(y-1)\sqrt{2x-2} \end{cases}$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) \geq 2\sqrt{xy}(x^2 - xy + y^2)$$

Mặt khác ta có $x^2 - xy + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow x^3 + y^3 \geq \frac{2(x+y)^2 \sqrt{xy}}{4} = \sqrt{xy} \sqrt{\frac{(x^2 + y^2 + 2xy)^2}{4}}$

$$\geq \sqrt{xy} \sqrt{2xy(x^2 + y^2)} = xy\sqrt{2(x^2 + y^2)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y$, thay vào phương trình 2 ta được

$$4\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 9(x-1)\sqrt{2x-2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+2+2\sqrt{(x-1)(x+1)}} = 9(x-1)\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) = 9(x-1)\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = (9x-11)\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

Câu 13: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + 6y\sqrt{x-1} + 12y = 4 & (1) \\ \frac{xy}{1+y} + \frac{1}{xy+y} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Ta có (2) $\Leftrightarrow \frac{y}{\frac{1}{x} + \frac{y}{x}} + \frac{\frac{1}{x}}{y + \frac{y}{x}} = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{y}{x}}}$

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = y$, ta có $\frac{a}{b+ab} + \frac{b}{a+ab} = \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta được

$$\frac{a}{b+ab} + \frac{b}{a+ab} \geq \frac{(a+b)^2}{ab+a^2b+ab+b^2a} = \frac{(a+b)^2}{ab(a+b)+2ab} = \frac{1}{\frac{ab}{a+b} + \frac{2ab}{(a+b)^2}} \geq \frac{1}{\frac{ab}{2\sqrt{ab}} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$ hay $y = \frac{1}{x}$

Thay vào (2) ta có $2\sqrt{x-1} = x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 4(x-1) = (x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 10$

Từ đó cho ta nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = \left(10; \frac{1}{10}\right)$

Câu 14: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x-3} - \sqrt{y} = 2x-6 & (1) \\ x^3 + y^3 + 7(x+y)xy = 8xy\sqrt{2(x^2+y^2)} & (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện $x \geq \frac{3}{2}, y \geq 0$.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + 7(x+y)xy &= (x+y)^3 + 4(x+y)xy \geq 2\sqrt{(x+y)^3 4(x+y)xy} \\ &= 4(x+y)^2 \sqrt{xy} = 4\sqrt{xy}[(x^2+y^2) + 2xy] \geq 4\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{(x^2+y^2)2xy} = 8xy\sqrt{2(x^2+y^2)}. \end{aligned}$$

Như vậy $x^3 + y^3 + 7(x+y)xy \geq 8xy\sqrt{2(x^2+y^2)}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

Với $x = y$ thay vào (1) ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-3} - \sqrt{x} &= 2x-6 \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 2(\sqrt{2x-3} - \sqrt{x})(\sqrt{2x-3} + \sqrt{x}) \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{2x-3} - \sqrt{x})(2\sqrt{2x-3} + 2\sqrt{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Do $2\sqrt{2x-3} + 2\sqrt{x} - 1 > 0, \forall x \geq \frac{3}{2}$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = (3; 3)$.

Câu 15: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x\sqrt{y-1} + y\sqrt{2x-1} = 4 & (1) \\ (2x+y-1)^3 = 27x(2-x) & (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}, y \geq 1$.

Áp dụng bất đẳng thức BCS ta có:

$$[VT(1)]^2 = (2x\sqrt{y-1} + y\sqrt{2x-1})^2 \leq (1+1)[4x^2(y-1) + y^2(2x-1)] (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta lại có

$$\bullet x^2(y-1) \leq \left(\frac{x+x+y-1}{3} \right)^3 = \left(\frac{2x+y-1}{3} \right)^3$$

$$\bullet y^2(2x-1) = 4 \cdot \frac{y}{2} \cdot \frac{y}{2} (2x-1) \leq 4 \left(\frac{y+2x-1}{3} \right)^3$$

$$\text{Kết hợp với (*) cho ta: } [VT(1)]^2 \leq 16 \left(\frac{y+2x-1}{3} \right)^3$$

Từ (2) ta lại có

$$(2x+y-1)^3 = 27x(2-x) \Rightarrow \left(\frac{2x+y-1}{3} \right)^3 = x(2-x) = 1 - (x-1)^2 \leq 1$$

$$\text{Do vậy } [VT(1)]^2 \leq 16 \left(\frac{y+2x-1}{3} \right)^3 \leq 16 \Rightarrow VT(1) \leq 4$$

$$\text{Kết hợp với (1) ta có } 4 = VP(1) = VT(1) \leq 4. \text{ Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 2)$.

$$\text{Câu 16: Giải hệ phương trình } \begin{cases} (x+1)\sqrt{y^2+5} + (y-1)\sqrt{x^2-3} = 10 & (1) \\ \left(x-y+\frac{1}{2}\right)^2 + (xy-3)^2 = \frac{5}{4} & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $x^2 \geq 3$.

$$\text{Ta có (2)} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - y = 8 - (xy - 4)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + x - y \leq 8 (*)$$

$$\text{Lại có } \begin{cases} (y-1)\sqrt{x^2-3} \leq \frac{(y-1)^2 + x^2 - 3}{2} = \frac{x^2 + y^2 - 2y - 2}{2} \\ (x+1)\sqrt{y^2+5} \leq \frac{(x+1)^2 + y^2 + 5}{2} = \frac{x^2 + y^2 + 2x + 6}{2} \end{cases}$$

Nên từ (1) ta lại có:

$$10 = (x+1)\sqrt{y^2+5} + (y-1)\sqrt{x^2-3} \leq x^2 + y^2 + x - y + 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + x - y \geq 8 (**)$$

$$\text{Từ (*) và (**) suy ra hệ có nghiệm } \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 4 \\ y - 1 = \sqrt{x^2 - 3} \\ x + 1 = \sqrt{y^2 + 5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; 2)$.

$$\text{Câu 17: Giải hệ phương trình } \begin{cases} x\sqrt{8-x^2} + y\sqrt{3-2y} = 5 & (1) \\ (3-2y)\sqrt{x+1} = 2y + \sqrt{4-y} - 2 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $y \leq \frac{3}{2}, -1 \leq x \leq 2\sqrt{2}$

Ta có (2) $\Leftrightarrow (2 - \sqrt{4-y})(2\sqrt{4-y} + 3) = (3-2y)\sqrt{x+1}$

Do $(3-2y)\sqrt{x+1} \geq 0, \forall \begin{cases} y \leq \frac{3}{2} \\ -1 \leq x \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$.

Suy ra $(2 - \sqrt{4-y})(2\sqrt{4-y} + 3) \geq 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{4-y} \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$

Ta lại có

- $x\sqrt{8-x^2} \leq \frac{x^2 + (8-x^2)}{2} = 4$
- $y^2(3-2y) \leq \left(\frac{y+y+(3-2y)}{3}\right)^3 = 1 \Rightarrow y\sqrt{3-2y} \leq 1$

Hay VT(1) $\leq 5 = VP(1)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3-2y \\ x = \sqrt{8-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Thử lại ta thấy, hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (1; 2)$.

Câu 18: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 25xy - 23y^2 - 9y = 12y\sqrt{(2x-3y-1)(x+y)} + 2x\sqrt{(x-y)(4y-x)} & (1) \\ \left(x - \frac{5y}{2}\right)^2 + \sqrt{x - \frac{5y}{2}} + \sqrt[4]{x - \frac{5y}{2}} - \frac{32xy}{405} + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Từ pt(1) ta được

$$y(3\sqrt{2x-3y-1} - 2\sqrt{x+y})^2 + x(\sqrt{x-y} - \sqrt{4y-x})^2 = 0$$

Từ pt(2): $VP \geq 1 > 0 \Rightarrow \frac{32xy}{405} > 0 \Rightarrow xy > 0$ do đó xy cùng dấu

do đó VT của pt(1) chỉ có thể là VT ≤ 0 hoặc VT ≥ 0

dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} y(3\sqrt{2x-3y-1} - 2\sqrt{x+y})^2 = 0 \\ x(\sqrt{x-y} - \sqrt{4y-x})^2 = 0 \end{cases}$

Giải hệ pt tìm được $\begin{cases} x = \frac{45}{8} \\ y = \frac{9}{4} \end{cases}$

Kiểm tra thì thấy thỏa mãn hpt ban đầu

Vậy hệ pt có nghiệm $\left(\frac{45}{8}; \frac{9}{4}\right)$

Câu 19: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 + 4x = 4(y\sqrt{x+1} - 1) & (1) \\ (x-1)^3 - 8\sqrt{y} = 3y^2 - x - 53 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow y^2 - 2y\sqrt{4x+4} + (4x+4) = 0 \Leftrightarrow (y - \sqrt{4x+4})^2 = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{4x+4}$

Thay vào (2) ta có phương trình $x^3 - 3x^2 - 8x + 40 = 8\sqrt{4x+4}$ (*)

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có :

$$VP(*) = 8\sqrt[4]{4x+4} = 2.2.2.\sqrt[4]{4x+4} \underset{AM-GM}{\leq} \frac{2^4 + 2^4 + 2^4 + 4x+4}{4} = x+13 .$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x=3$.

Ta sẽ chứng minh : $VT(*) \geq x+13, \forall x \geq -1$ (*) .

Thật vậy :

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 8x + 40 \geq x+13 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 9x + 27 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2(x+3) \geq 0$$

luôn đúng với mọi $x \geq -1$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x=3$.

Từ đó cho ta : $\begin{cases} VP(*) \leq x+13 \\ VT(*) \geq x+13 \end{cases} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 8\sqrt[4]{4x+4} = x+13 \\ x^3 - 3x^2 - 8x + 40 = x+13 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$

Thay trở lại, ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y) = (3;4)$.

Câu 20: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (y-2x)^2 + 4 = y - 6x + 2\sqrt{2(x+1)(y+1)} & (1) \\ (y-1)(x^2+x) + 1 = \sqrt{y} \cdot \sqrt[3]{1-3x} & (2) \end{cases} \quad (x,y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Ta có (1) $\Leftrightarrow [(y-2x)^2 - 2(y-2x)+1] + (y+1-2\sqrt{(y+1)(2x+2)}+2x+2) = 0$

$$\Leftrightarrow (y-2x-1)^2 + (\sqrt{y+1} - \sqrt{2x+2})^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y-2x-1=0 \\ \sqrt{y+1} - \sqrt{2x+2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=2x+1$$

Thay vào (2) ta có phương trình $2x^3 + 2x^2 + 1 = \sqrt{1+2x} \cdot \sqrt[3]{1-3x}$

Từ phương trình trên suy ra $x \geq -\frac{1}{2}$ nên $2x^3 + 2x^2 + 1 = 2x^2(x+1) + 1 > 0$, suy ra

$$\sqrt{1+2x} \cdot \sqrt[3]{1-3x} > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{1-3x} > 0 .$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có :

$$\begin{cases} 1.\sqrt{1+2x} \leq \frac{1+(1+2x)}{2} \\ 1.1.\sqrt[3]{1-3x} \leq \frac{1+1+(1-3x)}{3} \end{cases} \Rightarrow 0 < \sqrt{1+2x}.\sqrt[3]{1-3x} \leq (1+x)(1-x).$$

Ta sẽ chứng minh $2x^3 + 2x^2 + 1 \geq (1-x)(1+x)$ (*)

Thật vậy :

(*) $\Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(2x+3) \geq 0$ đúng với mọi $x \geq -\frac{1}{2}$ hay (*) được chứng minh.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Thay trở lại ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = (0; 1)$.

Câu 21: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+2xy}} & (1) \\ \sqrt{x(1-2x)} + \sqrt{y(1-2y)} = \frac{2}{9} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (*)$$

Từ phương trình (1) áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \right)^2 \leq 2 \left(\frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2} \right) \quad (3)$$

Mặt khác ta có
$$\frac{1}{1+2x^2} + \frac{1}{1+2y^2} - \frac{2}{1+2xy} = \frac{2(y-x)^2(2xy-1)}{(1+2xy)(1+2x^2)(1+2y^2)} \leq 0,$$

Do từ (*) ta có $0 \leq xy \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 1+2xy > 0, 2xy-1 < 0$

Khi đó (3) là một nghiệm của hệ phương trình

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \right)^2 \leq \frac{4}{1+2xy} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+2y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+2xy}}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y$, thế vào phương trình (2) ta được

$$2\sqrt{x-2x^2} = \frac{2}{9} \Leftrightarrow 2x^2 - x + \frac{1}{81} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{9-\sqrt{73}}{36} \\ x = y = \frac{9+\sqrt{73}}{36} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = \left(\frac{9 \pm \sqrt{73}}{36}; \frac{9 \pm \sqrt{73}}{36} \right)$.

Câu 22: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2y(2+2\sqrt{4y^2+1})=x+\sqrt{x^2+1} & (1) \\ \sqrt{3+x}-\sqrt{2-x}=\frac{1}{2y}-4\sqrt{\frac{1}{2y}+3}+8 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện
$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 2 \\ y > 0 \\ y \leq -\frac{1}{6} \end{cases}$$

Từ (1) ta có $VP(1)=x+\sqrt{x^2+1}>x+|x|\geq 0 \Rightarrow VT(1)>0 \Rightarrow y>0$

Lại có (2)
$$\Leftrightarrow \sqrt{3+x}-\sqrt{2-x}=\left[\left(\frac{1}{2y}+3\right)-4\sqrt{\frac{1}{2y}+3}+4\right]+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3+x}-\sqrt{2-x}=\left(\sqrt{\frac{1}{2y}+3}-2\right)^2+1 \Rightarrow \sqrt{3+x}-\sqrt{2-x}\geq 1 \Rightarrow x\geq \sqrt{2-x} \Rightarrow x\geq 1$$

Từ điều kiện $x\geq 1$ ta có (1)
$$\Leftrightarrow 2y+2y\sqrt{4y^2+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

Xét hàm số $f(t)=t+t\sqrt{1+t^2}, t>0$, ta có $f'(t)=1+\sqrt{1+t^2}+\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}>0, \forall t>0$.

Do đó $f(2y)=f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow 2y=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2y}$

Thay vào (2) ta có phương trình $x-5\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}+8=0$ (*)

Xét hàm số $f(x)=x-5\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}+8, x\geq 1$ ta có

$$f'(x)=1-\frac{5}{2\sqrt{x+3}}+\frac{1}{2\sqrt{2-x}}=\frac{2\sqrt{x+3}-4}{2\sqrt{x+3}}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}-\frac{1}{\sqrt{x+3}}\right)$$

Do $2\sqrt{x+3}-4\geq 0, \forall x\geq 1$ và $\frac{1}{\sqrt{2-x}}-\frac{1}{\sqrt{x+3}}=\frac{2x+1}{\sqrt{(2-x)(x+3)}(\sqrt{2-x}+\sqrt{x+3})}>0, \forall x\geq 1$

Nên $f'(x)>0, \forall x\geq 1$. Đồng thời $f(1)=0$ suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x=1$.

Câu 23: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{y+2x-1}+\sqrt{1-y}=y+2 & (1) \\ x\sqrt{x}=\sqrt{y(x-1)}+\sqrt{x^2-y} & (2) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} y+2x-1 \\ x \geq 0 \\ 1-y \geq 0 \\ y(x-1) \geq 0 \\ x^2-y \geq 0 \end{cases}$$

Nhận thấy $(x; y) = (0; y)$ không là nghiệm của hệ.

$$\text{Với } x \neq 0, \text{ ta có } \sqrt{y(x-1)} - \sqrt{x^2-y} = \frac{x(y-x)}{\sqrt{y(x-1)} + \sqrt{x^2-y}} = \frac{x(y-x)}{x\sqrt{x}} = \frac{y-x}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Kết hợp với (2) cho ta } \begin{cases} \sqrt{y(x-1)} + \sqrt{x^2-y} = x\sqrt{x} \\ \sqrt{y(x-1)} - \sqrt{x^2-y} = \frac{y-x}{\sqrt{x}} \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{y(x-1)} = x\sqrt{x} + \frac{y-x}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{y(x^2-x)} = (x^2-x) + y \Rightarrow [(x^2-x) - y]^2 = 0 \Rightarrow y = x^2 - x$$

Thay vào phương trình (1) cho ta $\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{-x^2+x+1} = x^2 - x + 2$ (*)

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có } \begin{cases} \sqrt{x^2+x-1} \leq \frac{x^2+x}{2} \\ \sqrt{-x^2+x+1} \leq \frac{-x^2+x+2}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{VT} (*) \leq x+1$$

Ta sẽ chứng minh $\text{VP} (*) \geq x+1$.

Thật vậy $x^2 - x + 2 \geq x+1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

$$\text{Vậy } \begin{cases} \text{VT} (*) \leq x+1 \\ \text{VP} (*) \geq x+1 \end{cases} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{VT} (*) = x+1 \\ \text{VP} (*) = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Thử lại ta thấy nghiệm của phương trình đã cho là $(x; y) = (1; 0)$.

$$\text{Câu 24: Giải hệ phương trình } \begin{cases} (x+2y-1)\sqrt{2y+1} = (x-2y)\sqrt{x+1} & (1) \\ 2xy+5y = \sqrt{(x+1)(2y+1)} & (2) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2y+1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$$

Nhận thấy $(x; y) = \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ không là nghiệm của hệ. Từ phương trình (1) ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (x-2y+4y-1)\sqrt{2y+1} = (x-2y)\sqrt{x+1} \\ &\Leftrightarrow (4y-1)\sqrt{2y+1} = (x-2y)(\sqrt{x+1} - \sqrt{2y+1}) \\ &\Leftrightarrow (4y-1)\sqrt{2y+1} = \frac{(x-2y)^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2y+1}} \geq 0 \Rightarrow y \geq \frac{1}{4} \quad (*) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta lại có

$$(2) \Rightarrow 2xy + 5y = \sqrt{(x+1)(2y+1)} \leq \frac{x+1+2y+1}{2}$$

$$\Rightarrow x+2 \geq 4y(x+2) \Rightarrow (x+2)(1-4y) \geq 0 \Rightarrow y \leq \frac{1}{4}, \text{ do } x \geq -1 (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra hệ có nghiệm khi
$$\begin{cases} y = \frac{1}{4} \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Thử lại suy ra hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.

Câu 25: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x^4 - 2x^2(y-1) + 4x + y^2 - 6y + 31}{4\sqrt[4]{27x-27y+162} + 6\sqrt{x-y+4}} = 1 & (1) \\ (\sqrt{y-2x} + \sqrt{y-5})^2 + 3x - y = 2 & (2) \end{cases}$$

Giải

Ta có pt(1): $x^4 - 2x^2(y-1) + 4x + y^2 - 6y + 31 = 4\sqrt[4]{27x-27y+162} + 6\sqrt{x-y+4}$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có
$$\begin{cases} 4\sqrt[4]{3 \cdot 3 \cdot 3(x-y+6)} \leq x-y+15 \\ 6\sqrt{x-y+4} \leq 3x-3y+15 \end{cases}$$

Do đó: $VP \leq 4x - 4y + 30$

Ta lại có

$$\begin{aligned} VT &= x^4 - 2x^2(y-1) + (y-1)^2 + 4x - 4y + 30 \\ &= (x^2 - y + 1)^2 + 4x - 4y + 30 \geq 4x - 4y + 30 \end{aligned}$$

Do đó $VT = VP \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y + 1 = 0 \\ x - y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$

Kiểm tra lại hpt ban đầu thì có nghiệm $(x=2; y=5)$ là thỏa mãn

Câu 26: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{y-1}} = \frac{2}{\sqrt{x+y}} & (1) \\ x^2 + y^2 + 4xy - 4x + 2y - 5 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện
$$\begin{cases} x > -2; y > 1 \\ x + y > 0 \end{cases}$$

Ta có $(2) \Leftrightarrow 2(x+y)^2 = (x+2)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x+2}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{x+y}\right)^2 = 2$

và (1) $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+y}{x+2}} + \sqrt{\frac{x+y}{y-1}} = 2$. Đặt $\sqrt{\frac{x+y}{x+2}} = a; \sqrt{\frac{x+y}{y-1}} = b$ ($a, b > 0$).

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} a+b=2 \\ \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} = 2 \end{cases}$ (*). Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\begin{cases} (2) \Rightarrow 2 = \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^4} \cdot \frac{1}{b^4}} \Rightarrow \frac{1}{a^2 \cdot b^2} \leq 1 \Rightarrow ab \geq 1 \\ (1) \Rightarrow 2 = a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq 1 \end{cases}$$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1$. Với $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{x+2}=1 \\ \frac{x+y}{y-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=-1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y) = (-1; 2)$.

Câu 27: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4xy + x + 4\sqrt{(2-x)(y+2)} = 14 & (1) \\ x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Giải

Cách 1. Điều kiện $(2-x)(y+2) \geq 0$

Từ phương trình (1) ta có $2 = (x+1)^2 + y^2 \geq 2(x+1)y \Rightarrow y(x+1) \leq 1$ (*)

Cũng từ phương trình (1) $\Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \Rightarrow y+2 > 0$

Do đó

$$(2) \Rightarrow 14 - 4xy - x = 2\sqrt{2-x} \cdot (2\sqrt{y+2}) \leq (2-x) + 4(y+2) \Rightarrow y(x+1) \geq 1 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra hệ đã cho có nghiệm khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x+1=y \\ \sqrt{2-x}=2\sqrt{y+2} \\ y(x+1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$$

Thử lại ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = (-2; -1)$

Cách 2. Điều kiện $(2-x)(y+2) \geq 0$

Từ phương trình (1) $\Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \Rightarrow y+2 > 0 \Rightarrow 2-x > 0$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow 4(xy+y-1) = (\sqrt{2-x} - 2\sqrt{2+y})^2 \geq 0 \Rightarrow xy+y-1 \geq 0 (*)$$

$$\text{Lại có } (2) \Leftrightarrow (1-xy-y) = (x-y+1)^2 \geq 0 \Rightarrow xy+y-1 \leq 0 (**)$$

$$\text{Từ (*) và (**) suy ra hệ đã cho tương đương với } \begin{cases} \sqrt{2-x} = 2\sqrt{2+y} \\ x-y+1=0 \\ xy+y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$$

Hay hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (-2; -1)$.

Câu 28: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+2)^2 - |x+y|(y-1) + (x+y)^2 = 0 & (1) \\ (y-1)(x+y)^2 - y + 1 = |x+y|(y^2 - 2y) & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Từ phương trình (1) ta có $|x+y|(y-1) \geq 0$ (*)

Nếu $|x+y| = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = -1$ (L)

Với $|x+y| \neq 0 \Rightarrow y - 1 > 0$

Mặt khác từ (2) suy ra $|x+y| - \frac{1}{|x+y|} = y - 1 - \frac{1}{y-1}$

Xét hàm số $f(t) = t - \frac{1}{t} \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0 \quad (\forall t > 0)$

Hàm số luôn đồng biến $\forall t > 0$ nên $f(|x+y|) = f(y-1) \Leftrightarrow |x+y| = y-1$

Thế vào (1) suy ra $(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow |y-2| = y-1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

Thử lại ta thấy, các nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = \left(-2; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 29: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + y^3 + y^6 = \sqrt{xy - x^2y^2} & (1) \\ 4xy^3 + y^3 + \frac{1}{2} = 2x^2 + \sqrt{1 + (2x-y)^2} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện $xy - x^2y^2 \geq 0$ (*)

Ta có $y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(xy - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow y^6 + 2y^3 + 2x^2 + 4xy^3 \leq \frac{1}{2} + y^3 + 4xy^3$

Cộng với (2) ta được

$$\Leftrightarrow y^6 + 2y^3 + 2x^2 + 4xy^3 + 2x^2 + \sqrt{1 + (2x-y)^2} \leq 1 + 2y^3 + 8xy^3$$

$$\Leftrightarrow y^6 + 4x^2 - 4xy^3 + \sqrt{1 + (2x-y)^2} \leq 1 \Leftrightarrow (y^3 - 2x)^2 + \sqrt{1 + (2x-y)^2} \leq 1$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} y - 2x = 0 \\ y^3 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 - y = 0 \\ x = \frac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y = -1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Thử lại ta thấy, nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = \left(-\frac{1}{2}; -1\right)$.

Câu 30: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + \sqrt{2(x^4 + y^4)} = 1 & (1) \\ x^5y + xy^5 = \frac{2}{27} & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Từ (2) ta có $xy(x^4 + y^4) = \frac{2}{27} > 0 \Rightarrow xy > 0$

$$1 - xy = \sqrt{2(x^4 + y^4)} \geq 2|xy| = 2xy \Rightarrow xy \leq \frac{1}{3}; \quad x^4 + y^4 = \frac{(1 - xy)^2}{2}$$

$$\text{Xét VT} = xy(x^4 + y^4) = xy \cdot \frac{(1 - xy)^2}{2} = 2xy \cdot \frac{1 - xy}{2} \cdot \frac{1 - xy}{2} \leq 2 \left(\frac{xy + \frac{1 - xy}{2} + \frac{1 - xy}{2}}{3} \right)^3 = \frac{2}{27}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} xy = \frac{1 - xy}{2} \\ xy = \frac{1}{3} \\ x^4 = y^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Thử lại ta thấy, nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$.

Bình luận.

Đối với hệ phương trình trên ta có thể biến đổi từ (1) như sau $\begin{cases} xy \leq 1 \\ x^4 + y^4 = \frac{(1 - xy)^2}{2} \end{cases}$

Thế vào phương trình (2) ta có $xy \frac{(1 - xy)^2}{2} = \frac{2}{27}$

Bài 31: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (\sqrt{b(3 - a^2 - b)} - a\sqrt{b})(\sqrt{b} - a) + (3 - a^2)a = 2(1) \\ a^2 + b^2 + \sqrt{a} = 3b(2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện: $a \geq 0; b \geq 0$.

Ta sẽ làm việc với PT(1). Nhận thấy một dấu hiệu rất đặc biệt:

$$\sqrt{b(3 - a^2 - b)} \text{ và } (3 - a^2)a$$

Nên ta sẽ bung phương trình ra và ghép để có $(3 - a^2 - b)$ và đặc lượng $\sqrt{3 - a^2 - b}$, và khi đó bài toán thực sự bắt đầu.

$$\text{Đặt } a = x, \sqrt{b} = y$$

$$\text{Biến đổi PT(1)} \Leftrightarrow (y\sqrt{3 - x^2 - y^2} - xy)(y - x) + (3 - x^2)x = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2y + y^2\sqrt{3 - x^2 - y^2} + (3 - x^2 - y^2)x - xy\sqrt{3 - x^2 - y^2}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{3 - a - b} = z \Rightarrow x^2y + y^2z + z^2x - xyz = 2 \text{ với } x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

Ta sẽ chứng minh $P = x^2y + y^2z + z^2x - xyz \leq 2$ với $x, y, z \geq 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Thật vậy:

Giả sử $x \geq y \geq z$. Ta có: $z(x-y)(y-z) \geq 0 \Leftrightarrow yz^2 \geq y^2z + z^2x - xyz$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &\leq y(z^2 + x^2) = y(3 - y^2) = \sqrt{y^2(3 - y^2)} = 2\sqrt{y^2 \cdot \frac{3 - y^2}{2} \cdot \frac{3 - y^2}{2}} \\ &\leq 2\sqrt{\frac{\left(y^2 + \frac{3 - y^2}{2} + \frac{3 - y^2}{2}\right)^3}{27}} = 2 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1 \Rightarrow a = b = 1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $a = b = 1$.

Bài 32: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{2} + \frac{2}{x} = \frac{x+3}{y+3} + \frac{y+3}{5} + \frac{5}{x+3} \\ x^3 + \sqrt{x} - \sqrt{y} = 8 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $x, y \geq 0$

Ta sẽ chứng minh một kết quả tổng quát, một kết quả rất thường được sử dụng vào chế tác hệ phương trình với phương thức đánh giá, sau đây tôi xin giới thiệu một cách rất nhanh, rất đơn giản:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{x+k}{y+k} + \frac{y+k}{z+k} + \frac{z+k}{x+k}$$

Sử dụng phương pháp S-S:

Không mất tính tổng quát, giả sử $z = \min\{x, y, z\}$

$$\text{Ta có: } \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} - 3 = \frac{(x-y)^2}{xy} + \frac{(x-z)(y-z)}{zx}$$

$$\text{Và } \frac{x+k}{y+k} + \frac{y+k}{z+k} + \frac{z+k}{x+k} - 3 = \frac{(x-y)^2}{(x+k)(y+k)} + \frac{(x-z)(y-z)}{(x+k)(z+k)}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x+k)(y+k)} \right) (x-y)^2 + \left(\frac{1}{zx} - \frac{1}{(x+k)(z+k)} \right) (x-z)(y-z) \geq 0$$

Theo giả thiết ta có: $(x-z)(y-z) \geq 0$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{xy} - \frac{1}{(x+k)(y+k)} \geq 0 \text{ và } \frac{1}{zx} - \frac{1}{(x+k)(z+k)} \geq 0 \quad \forall k \geq 0$$

Từ đó BĐT được chứng minh!

Áp dụng vào bài toán suy ra $x = y = 2$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = 2$.

Bài 33: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{x-y} = \sqrt{5} \\ |(x-y+1)(x-2y+1)y| = \sqrt{5} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $x \geq y \geq 1$

Đặt $\sqrt{x} = a; \sqrt{y-1} = b; \sqrt{x-y} = c$, HPT đã cho trở thành:
$$\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = \sqrt{5} \\ |(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)| = \sqrt{5} \end{cases}$$

Giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Khi đó ta có:

$a + b = \sqrt{5} - c \leq \sqrt{5}$. Đặt $P = |(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)|$, ta sẽ chứng minh $P \leq \sqrt{5}$.

Thật vậy:

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\begin{aligned} P^2 &= (a^2 - b^2)^2 (b^2 - c^2)^2 (c^2 - a^2)^2 \leq a^4 b^4 (a - b)^2 (a + b)^2 \leq 5a^4 b^4 (a - b)^2 \\ &\leq 5 \left[\frac{4ab + (a - b)^2}{5} \right]^5 \leq 5 \left[\frac{(a + b)^2}{5} \right]^5 \leq 5 \Rightarrow P \leq \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra nên $(a; b; c) = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}; 0 \right)$. Thử lại thấy không thỏa mãn.

Vậy HPT vô nghiệm.

Câu 34: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt[4]{(x+1)(3-y)} + \sqrt{xy} - \sqrt{x} = 2x + 2 & (1) \\ 3\sqrt[3]{(3x+8)(y+6)} + \sqrt{x} = 12 + \sqrt{xy} & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện
$$\begin{cases} (x+1)(3-y) \geq 0 \\ x \geq 0 \\ xy \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

Cộng (1) và (2) theo từng vế ta được

$$4\sqrt[4]{(x+1)(3-y)} + 6\sqrt[3]{(3x+8)(y+6)} = 4x + 28 \quad (*)$$

Áp dụng BĐT AM-GM ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4\sqrt[4]{(x+1)(3-y)} \leq 1 + 1 + (x+1) + (3-y) = 6 + x - y \\ 6\sqrt[3]{(3x+8)(y+6)} \leq 8 + (3x+8) + (y+6) = 3x + y + 22 \end{cases} \\ \Rightarrow VT(*) \leq 4x + 28 = VP(*) \end{aligned}$$

Do vậy $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x + 1 = 3 - y \\ 8 = 3x + 8 = y + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $(x; y) = (0; 2)$.

Câu 35: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{3x-2} - \sqrt{1-y} = x & (1) \\ \sqrt{(x+3)(5-y)} + \sqrt{y^2-3y+2} + x\sqrt{2-y} = 2x-y+4 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện
$$\begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ y \leq 1 \end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(5-y)} + \sqrt{y-1} \cdot \sqrt{2-y} + x\sqrt{2-y} = 2x-y+4 \quad (3)$

Từ phương trình (1) $\Rightarrow \sqrt{1-y} = \sqrt{3x-2} - x$, thay vào (3) ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x+3)(5-y)} + (\sqrt{3x-2} - x)\sqrt{2-y} + x\sqrt{2-y} = 2x-y+4 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)(5-y)} + \sqrt{(3x-2)(2-y)} = 2x-y+4 \quad (*) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ta

$$\begin{cases} \sqrt{(3x-2)(2-y)} \leq \frac{3x-2+2-y}{2} = \frac{3x-y}{2} \\ \sqrt{(x+3)(5-y)} \leq \frac{x-y+8}{2} \end{cases}$$

Do đó VT(*) $\leq \frac{3x-y}{2} + \frac{x-y+8}{2} = 2x-y+4 = VP(*)$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2=2-y \\ x+3=5-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Thay trở lại ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = (1; 1)$.

Câu 36: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x^2y^2} + 1 = 2\left(\frac{x+y}{xy}\right) & (1) \\ 6\sqrt[3]{(x+1)(y+1)^2} + 3\sqrt{(2x-1)(2y-1)} = 5x+7y+3 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện
$$\begin{cases} x, y \neq 0 \\ (2x-1)(2y-1) \geq 0 \end{cases}$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{2}{x} - \frac{2}{y} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - 1\right)^2 = 1$

Suy ra
$$\begin{cases} 0 \leq \frac{1}{x} \leq 2 \\ 0 \leq \frac{1}{y} \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{cases} 6\sqrt[3]{(x+1)(y+1)^2} \leq 6 \frac{(x+1)+(y+1)+(y+1)}{3} = 2x+4y+6 \\ 3\sqrt{(2x-1)(2y-1)} \leq 3 \frac{(2x-1)+(2y-1)}{2} = 3x+3y-3 \end{cases}$$

Suy ra $VT(2) \leq 5x+7y+3 = VP(*)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=y+1 \\ 2x-1=2y-1 \end{cases} \Rightarrow x=y$

Thay vào (1) ta có $\left(\frac{1}{x}-1\right)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+\sqrt{2} \\ x=2-\sqrt{2} \end{cases}$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y) = \left\{ (2+\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}), (2-\sqrt{2}; 2-\sqrt{2}) \right\}$.

Câu 37: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4(1+2\sqrt{y+1})\sqrt{x-2} = 1-4y \\ \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{y+1}+1} + \frac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{x-2}+1} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq -1 \end{cases}$

Đặt $\sqrt{x-2} = a, \sqrt{y+1} = b (a, b \geq 0)$

Hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} 8ab+4a=1-4(b^2-1) \\ \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(a+b)^2 = 4+(2a-1)^2 & (1) \\ \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} = \frac{2}{3} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có $(a+b)^2 \geq 1 \Rightarrow a+b \geq 1$

Từ (2) ta lại có :

$$VT(*) = \frac{a^2}{ab+b} + \frac{b^2}{ab+a} \geq \frac{(a+b)^2}{2ab+(a+b)} \geq \frac{(a+b)^2}{2 \frac{(a+b)^2}{4} + (a+b)} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{a+b}} \geq \frac{2}{3}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$

Thay trở lại ta tìm được nghiệm của hệ đã cho là $(x;y) = \left(\frac{9}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

Câu 38: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{y(x-2)} + \sqrt{x(y+2)} = x+y & (1) \\ \sqrt{y+3} + \frac{4(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})}{3(\sqrt{y+1})^2} = 3 & (2) \end{cases}$$

Giải

Từ điều kiện $x \geq 2 \Rightarrow y \geq 0$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$VT(1) = \sqrt{y(x-2)} + \sqrt{x(y+2)} \leq \frac{y+(x-2)}{2} + \frac{x+(y+2)}{2} = x+y = VP(1)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x-2 \\ x = y+2 \end{cases} \Leftrightarrow y = x-2$$

Do đó (1) $\Rightarrow y = x-2$

Thay vào (2) ta có phương trình

$$\sqrt{x+1} + \frac{4(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})}{3(\sqrt{x-2}+1)^2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \frac{4}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x-2}+1)^2} = 3$$

Đặt: $\sqrt{x+1} = a; \sqrt{x-2} = b$ ($a > b \geq 0$).

Ta có phương trình: $a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} = 3$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho ta:

$$\begin{aligned} a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} + 1 &= (a-b) + \left(\frac{b+1}{2}\right) + \left(\frac{b+1}{2}\right) + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} \\ &\geq 4\sqrt[4]{(a-b)\left(\frac{b+1}{2}\right)^2 \cdot \frac{4}{(a-b)(b+1)^2}} = 4 \Rightarrow a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} \geq 3. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Thay trở lại ta tìm được $x = 3$. Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

Câu 39: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{y}{\sqrt{x}+y} - \frac{x}{(y+\sqrt{x})^2} = \frac{y^4}{(x+y^2)^2} & (1) \\ \sqrt{y+\sqrt{x-1}} = 32(x-2y+1)\sqrt{2y-2} & (2) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện} \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \\ y + \sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{x}{y^2} + 1\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{y}{\sqrt{x}} + 1\right)^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{x}}{y} + 1}$$

$$\text{Đặt } a = \frac{x}{y}; b = y \text{ (} a, b > 0 \text{) ta có } \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} = \frac{1}{ab+1} \quad (*)$$

Theo bất đẳng thức B.C.S ta có

$$\begin{cases} (ab+1)\left(\frac{a}{b}+1\right) \geq (a+1)^2 \\ (ab+1)\left(\frac{b}{a}+1\right) \geq (b+1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{(a+1)^2} \geq \frac{b}{a+b} \cdot \frac{1}{ab+1} \\ \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{a}{a+b} \cdot \frac{1}{ab+1} \end{cases}$$

Suy ra $VT(*) \geq \frac{a+b}{(a+b)(ab+1)} = \frac{1}{ab+1} = VP(*)$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} ab = \frac{a}{b} \\ ab = \frac{b}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow x=y^2$

Với $x=y^2$ thay trở lại ta có phương trình :

$$\sqrt{y+\sqrt{y-1}} = 32(y-1)^2 \sqrt{2y-2} \Leftrightarrow y+\sqrt{y^2-1} = 2(4y-4)^5$$

Đặt : $4y-4=u (u \geq 0)$. Phương trình đã cho trở thành :

$$2u^5 - \frac{u+4}{4} - \sqrt{\left(\frac{u+4}{4}\right)^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow 8u^5 = \sqrt{u^2+8u} + u + 4 (*)$$

- Rõ ràng $u=0$ không là nghiệm của phương trình (*)
- Với $u \neq 0$, phương trình (*) tương đương với : $8 = \frac{4}{u^5} + \frac{1}{u^4} + \sqrt{\frac{1}{u^8} + \frac{8}{u^9}}$

Hàm số : $f(u) = \frac{4}{u^5} + \frac{1}{u^4} + \sqrt{\frac{1}{u^8} + \frac{8}{u^9}}$, nghịch biến trên $(0; +\infty)$ và $f(1)=0$

Suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất $u=1$.

Thay trở lại ta có nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y) = \left(\frac{25}{16}; \frac{5}{4}\right)$.

Bài 40: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x-3y+2}+1}} + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2x-5y+3}+1}} + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} (1) \\ 3x^2 - 13xy + 17y^2 + 8x - 21y + 6 = 0 (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq \min\left\{\frac{x+2}{3}; \frac{2x+3}{5}\right\} \end{cases}$

Ta có: PT(2) $\Leftrightarrow 6x^2 - 26xy + 34y^2 + 16x - 42y + 12 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-3y+2)^2 + (2x-5y+3)^2 + x^2 = 1$$

Đặt $\sqrt{x-3y+2} = a; \sqrt{2x-5y+3} = b; \sqrt{x} = c (a \geq 0; b \geq 0; c \geq 0)$.

Khi đó hệ đã cho được viết lại như sau:
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{b+1}} + \frac{1}{\sqrt{c+1}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} (*) \\ a^4 + b^4 + c^4 = 1 (**) \end{cases}$$

Từ $(**)$ $\Rightarrow a \in [0; 1] \Rightarrow \sqrt{a+1} \in [1; 2] \Rightarrow (\sqrt{a+1} - 1)(\sqrt{a+1} - \sqrt{2}) \leq 0$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a+1})^2 - (1 + \sqrt{2})\sqrt{a+1} + \sqrt{2} \leq 0.$$

Tương tự, ta cũng có: $\sqrt{b+1} + \sqrt{\frac{2}{b+1}} \leq 1 + \sqrt{2};$

$$\sqrt{c+1} + \sqrt{\frac{2}{c+1}} \leq 1 + \sqrt{2}$$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được:

$$\sum \sqrt{a+1} + \sum \sqrt{\frac{2}{a+1}} \leq 3 + 3\sqrt{2} \Rightarrow VT^{(*)} \sqrt{2} \leq 3 + 3\sqrt{2} - \left(\sum \sqrt{a+1} \right)$$

$$\text{Do } a, b, c \in [0; 1] \Rightarrow \begin{cases} a \geq a^4; b \geq b^4; c \geq c^4 \\ \sum (\sqrt{a+1} - 1)(\sqrt{b+1} - 1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c \geq a^4 + b^4 + c^4 = 1 \\ \sum \sqrt{a+1} \sqrt{b+1} \geq 2 \sum \sqrt{a+1} - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\sum \sqrt{a+1} \right)^2 = a + b + c + 3 + 2 \left(\sum \sqrt{a+1} \sqrt{b+1} \right) \geq 4 + 2 \left(2 \sum \sqrt{a+1} - 3 \right) = 4 \sum \sqrt{a+1} - 2$$

$$\Rightarrow \sum \sqrt{a+1} \geq 2 + \sqrt{2} \Rightarrow VT^{(*)} \sqrt{2} \leq 3 + 3\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow VT^{(*)} \leq 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} = VP^{(*)}$$

$$\text{Từ đó: } (*) \text{ xảy ra khi và chỉ khi: } \begin{cases} a, b, c > 0; a^4 + b^4 + c^4 = 1 \\ a = a^4; b = b^4; c = c^4 \\ \sqrt{a+1} + \sqrt{\frac{2}{a+1}} = 1 + \sqrt{2} \\ \sqrt{b+1} + \sqrt{\frac{2}{b+1}} = 1 + \sqrt{2} \\ \sqrt{c+1} + \sqrt{\frac{2}{c+1}} = 1 + \sqrt{2} \\ \sum (\sqrt{a+1} - 1)(\sqrt{b+1} - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (a; b; c) = (0; 0; 1) \text{ và các hoán vị } \Leftrightarrow x = y = 1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$.

Câu 41: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2(x-y)^2 + 6x - 2y + 4} - \sqrt{y} = \sqrt{x+1} \\ \sqrt{2x^4 - 2(y-1)^3 + x^2} = 2(\sqrt{x^2 - y + 2} - 1) + x \end{cases}$$

Giải

Biến đổi phương trình đầu ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{2(x-y)^2 + 6x - 2y + 4} - \sqrt{y} = \sqrt{x+1} \\ & \Leftrightarrow 2x^2 - 4xy + 2y^2 + 6x - 2y + 4 + x + y + 1 + 2\sqrt{y(x+1)} \\ & \Leftrightarrow 2(x+1-y)^2 + (\sqrt{x+1} - \sqrt{y})^2 = 0 \Leftrightarrow x+1=y \end{aligned}$$

Thế vào phương trình 2 ta được $\sqrt{2x^4 - 2x^3 + x^2} = 2(\sqrt{x^2 - x + 1} - 1) + x$

Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $x \neq 0$ ta có $2\sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{(x-2)^2 + 3x^2} \geq |x-2| \Rightarrow 2\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2 > 0$

Nhân 2 vế phương trình trên với $2\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2$ ta thu được phương trình mới là

$$\sqrt{2x^4 - 2x^3 + x^2} (2\sqrt{x^2 - x + 1} - (x-2)) = 3x^2$$

Chia cả 2 vế cho x^2 ta có $\sqrt{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} (2\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2) = 3$

Ta có $\sqrt{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + 1} \geq 1, \sqrt{(x+1)^2 + 3(x-1)^2} \geq |x+1| \geq x+1 \Rightarrow 2\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2 \geq 3$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = 0 \\ \sqrt{(x+1)^2 + 3(x-1)^2} = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Câu 42: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)\sqrt{\frac{3y-x+2}{x+y+2}} = \frac{x^2+y^2}{x+y} + 1 & (1) \\ \sqrt{x+y-1} + \sqrt{5-2x} = 4xy - 12y + 7 & (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} 5-2x \geq 0 \\ x+y-1 \geq 0 \\ 3y-x+2 \geq 0 \end{cases}$

Với điều kiện $x+y \geq 1 \Rightarrow VP(1) \geq 0$ nên $VT(1) \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 0$

Lại có $VP(1) = \frac{x^2+y^2}{x+y} + 1 \geq \frac{(x+y)^2}{2(x+y)} + 1 = \frac{x+y}{2} + 1$

$$VT(1) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4(x+1)^2(3y-x+2)}{x+y+2}} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[2(x+1)+2(x+1)+3y-x+2]^3}{27(x+y+2)}} = \frac{x+y+2}{2}$$

Từ đó suy ra $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2(x+1)=3y-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y$

Với $x = y$, thay vào (2) ta có $\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-2x} = 4x^2 - 12x + 7$

$$\Leftrightarrow 2(4x^2 - 12x + 5) + \sqrt{2x-1} \left(\frac{2x-5}{\sqrt{2x-1}+2} \right) + \sqrt{5-2x} \left(\frac{1-2x}{\sqrt{5-2x}+2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)(5-2x)} \left(2\sqrt{(2x-1)(5-2x)} + \frac{\sqrt{5-2x}}{\sqrt{2x-1}+2} + \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{5-2x}+2} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = \left\{ \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right), \left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2} \right) \right\}$.

Câu 43: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \left(\frac{1}{\sqrt{x+3y}} + \frac{1}{\sqrt{y+3x}} \right) = 2 & (1) \\ \frac{2-y}{4} = \sqrt{2x-3} - \sqrt[3]{y-1} & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ y \geq 0 \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{x+y}{x+3y} \right) \\ \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+3y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2y}{x+3y} \right) \end{cases} \Rightarrow \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x+3y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{3}{2} \right) \quad (3)$

Hoàn toàn tương tự cho ta $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{y+3x}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x+y} + \frac{3}{2} \right) \quad (4)$

Lấy (3)+(4) theo từng vế cho ta : $VT(1) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x+y} + \frac{3}{2} \right) = 2 = VP(1)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Với $x = y$ thay vào phương trình (2) ta được: $\frac{x-2}{4} + \sqrt{2x-3} - \sqrt[3]{x-1} = 0 \quad (*) \left(x \geq \frac{3}{2} \right)$

Xét hàm số: $f(x) = \frac{x-2}{4} + \sqrt{2x-3} - \sqrt[3]{x-1} \quad \left(x \geq \frac{3}{2} \right)$, ta có:

$f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2x-3}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} > 0, \forall x \geq \frac{3}{2}$. Suy ra $f(x)$ đồng biến, mà $f(2) = 0$

Nên phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x = 2$. Từ đó suy ra $(x; y) = (2; 2)$ là nghiệm của hệ đã cho.

Câu 44: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+5y-4)\sqrt{x-y^2} = 2xy-2y & (1) \\ y\sqrt{x-1} + 3\sqrt{x-y^2} = 2x+y & (2) \end{cases}$$

Giải

Phân tích.

Xét phương trình (1):

Cho $x = 0 \Rightarrow (5y - 4)\sqrt{-y^2} = -2y \Rightarrow y = 0$. Ta nhận được $(x; y) = A_1(0; 0)$.

Cho $y = 0 \Rightarrow (x - 4)\sqrt{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$. Ta nhận được $(x; y) = B_1(4; 0)$.

Cho $x = 1 \Rightarrow (5y - 3)\sqrt{1 - y^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$.

Ta nhận được $(x; y) = \left\{ C_1(1; 1), C_2(1; -1), C_3\left(1; \frac{3}{5}\right) \right\}$

Cho $y = 1 \Rightarrow (x + 1)\sqrt{x - 1} = 2(x - 1) \Rightarrow x = 1$. Ta nhận được $(x; y) = C_1(1; 1)$

Cho $y = -1 \Rightarrow (x - 9)\sqrt{x - 1} = 2(1 - x) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$. Ta nhận được $(x; y) = \{C_2(1; -1), E_1(5; -1)\}$

Suy luận và dự đoán.

- Nhận thấy từ các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 chúng ta không thiết lập được mối quan hệ bậc nhất nào.
- Trong phương trình (2) chứa $\sqrt{x - y^2}$ nên chúng ta nảy sinh ý nghĩ, có thể là mối quan hệ giữa nó với các biến x, y .

Khi đó chỉ có thể là $\sqrt{x - y^2} = ax + by + c$ (*)

+ Điểm $A_1 \in (*) \Rightarrow c = 0$

+ Điểm $B_1, C_1 \in (*) \Rightarrow a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{2\sqrt{x - y^2} = x - y}$ (a)

+ Điểm $B_1, C_2 \in (*) \Rightarrow a = b = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{2\sqrt{x - y^2} = x + y}$ (b)

+ Điểm $B_1, C_3 \in (*) \Rightarrow a = b = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{2\sqrt{x - y^2} = x + y}$ (b)

+ Điểm $E_1 \in (b)$, nên ta dự đoán mối quan hệ giữa các biến là :

$$\boxed{2\sqrt{x - y^2} = x + y}$$

Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq y^2 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow (x+5y-4)(2\sqrt{x-y^2}-x-y) + (x+y)^2 - 4(x-y^2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x+5y-4)(2\sqrt{x-y^2}-x-y) - (2\sqrt{x-y^2}+x+y)(2\sqrt{x-y^2}-x-y) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (2\sqrt{x-y^2}-x-y)(4y-4-2\sqrt{x-y^2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-y^2} = x+y \\ \sqrt{x-y^2} = 2y-2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Với $2\sqrt{x-y^2} = x+y$, kết hợp với (2) cho ta hệ :

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} 2\sqrt{x-y^2} = x+y \\ y\sqrt{x-1} + 3\sqrt{x-y^2} = 2x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-y^2} = x+y \\ 2y\sqrt{x-1} = x-y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 0, (x-y)y \geq 0 \\ x^2 + 5y^2 + 2xy - 4x = 0 \\ x^2 + 5y^2 - 2xy - 4xy^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 0, (x-y)y \geq 0 \\ x \geq 1, x \geq y^2 \\ x^2 + 5y^2 + 2xy - 4x = 0 \\ 4x(y-1-y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Với $\sqrt{x-y^2} = 2y-2$, kết hợp với (2) cho ta hệ :

$$\begin{cases} \sqrt{x-y^2} = 2y-2 & (3) \\ y\sqrt{x-1} + 3\sqrt{x-y^2} = 2x+y & (4) \end{cases}$$

Từ (3) ta có $y \geq 1$. Áp dụng BĐT AM - GM, ta có :

$$\text{VT}(4) \leq \frac{y^2+x-1}{2} + \frac{3}{2}(x-y^2+1) = 2x+1-y^2 < 2x+1 \leq 2x+y, \forall y \geq 1$$

Do đó hệ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x;y) = \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

Câu 45: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x-1)\sqrt{x-y+1} + (x-y)\sqrt{x+3} = 3x-2y-1 & (1) \\ \sqrt{y+1-\frac{1}{x}} + \sqrt{y+x^2-x^3} = \frac{1}{2}(x^2+3) & (2) \end{cases}$$

Giải

Biến đổi phương trình đầu ta được :

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{x-y+1} - (x-1) + (x-y)\sqrt{x+3} - 2(x-y) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-1)\frac{x-y}{\sqrt{x-y+1}+1} + (x-y)\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-1)(x-y)\left(\frac{1}{\sqrt{x-y+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=y \end{cases}
 \end{aligned}$$

Thế vào (2) cho ta $\sqrt{x+1-\frac{1}{x}} + \sqrt{x+x^2-x^3} = \frac{1}{2}(x^2+3)$ (*)

Ta có $VT(*) = \sqrt{x+1} - \frac{1}{x} + |x| \sqrt{\frac{1}{x} + 1 - x} \leq \sqrt{2(x^2+1)}$

Lại có $VP(*) = \frac{1}{2}(x^2+3) = \frac{1}{2}[(x^2+1)+2] \geq \frac{1}{2}(2\sqrt{2(x^2+1)}) = \sqrt{2(x^2+1)}$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \pm 1$

Câu 46: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + 2\sqrt{y+1} = y + \frac{9}{4} & (1) \\ \frac{x-1}{\sqrt{y+1}+1} + \frac{y+1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{1}{3} & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq -1 \end{cases}$ Đặt $\begin{cases} \sqrt{x-1} = a \\ \sqrt{y+1} = b \end{cases} (a, b \geq 0)$.

Hệ phương trình đã cho trở thành
$$\begin{cases} a + 2b = b^2 + \frac{5}{4} \\ \frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Từ (3) ta có $a + b = \left(b^2 - b + \frac{1}{4}\right) + 1 \Leftrightarrow a + b = \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \Rightarrow a + b \geq 1 (*)$

Từ (4) ta lại có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1} \geq \frac{(a+b)^2}{(a+b)+2} \Rightarrow 3(a+b)^2 - (a+b) - 2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (a+b-1)(3a+3b+2) \leq 0 \Leftrightarrow a+b \leq 1, \text{ do } a, b \geq 0 (**) \end{aligned}$$

Từ (*), (**) suy ra hệ phương trình tương đương với: $a = b = \frac{1}{2}$

Do vậy hệ PT đã cho có nghiệm $(x; y) = \left(\frac{5}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

Câu 47: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-y-1)\sqrt{2(3-y^2)} = 2-xy & (1) \\ y\sqrt{5-x^2} = x-y-4 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} 3-y^2 \geq 0 \\ 5-x^2 \geq 0 \end{cases}$

Áp dụng BĐT $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}, \forall a, b \in \mathbb{R}$. Từ phương trình (1) ta có:

$$2-xy = (x-y-1)\sqrt{2(3-y^2)} \leq \frac{(x-y-1)^2 + 6 - 2y^2}{2} \Rightarrow (x^2 - y^2) - 2(x-y) + 3 \geq 0 \quad (3)$$

Từ phương trình (2) ta lại có $(2) \Leftrightarrow \left(y + \sqrt{5-x^2}\right)^2 = -(x^2 - y^2) + 2(x-y) - 3$

$$\Rightarrow (x^2 - y^2) - 2(x - y) + 3 \leq 0 \quad (4)$$

Từ (3), (4) suy ra hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x - y - 1 = \sqrt{6 - 2y^2} \\ y = -\sqrt{5 - x^2} \\ x^2 - y^2 - 2(x - y) + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 0 \\ x^2 = 5 - y^2 \\ x - y = 1 + \sqrt{6 - 2y^2} \\ (6 - 2y^2) - 2\sqrt{6 - 2y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y) = (2; -1)$.

Câu 48: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{y+1}+1} = \frac{2}{3} \\ \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}} + \sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x}} - \frac{2}{\sqrt{xy}} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Giải

Ta có (1): $\frac{2}{3} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{y+1}+1} = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} + \frac{\sqrt{y+1}-1}{y}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{3} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{2}{3}$$

Từ phương trình 2 ta suy ra $\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y}} \geq \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}} + \sqrt{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + 2\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \sqrt{\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2}} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + 2\sqrt{\frac{1}{y} + \frac{1}{x^2}} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2}\right) \geq \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x^2}\right) \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{xy} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} \Leftrightarrow x = y$$

Thế vào phương trình 1 ta được $x = y = 3$

Câu 49: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (4y-2)\sqrt{x-1} + 2y\sqrt{3y-2} = y^2 + 3y & (1) \\ (4y+x-3)^3 = 27y(2-y) & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq \frac{2}{3} \end{cases}$. Từ phương trình (2) ta có:

$$(4y+x-3)^3 = 27(2y-y^2) = 27[1-(y-1)^2] \leq 27 \Rightarrow 4y+x \leq 6 \quad (*)$$

Lại có:

$$(1) \Rightarrow y^2 + 3y = (4y-2)\sqrt{x-1} + 2y\sqrt{3y-2} \leq (4y-2)\sqrt{x-1} + (y^2 + 3y - 2)$$

$$\Rightarrow (2y-1)\sqrt{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow 1 \leq (2y-1)^2(x-1), \text{ do } y \geq \frac{2}{3}$$

Suy ra $1 \leq (2y-1)^2(x-1) \leq \left(\frac{2y-1+2y-1+x-1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4y+x-3}{3}\right)^3 \Rightarrow 4y+x \geq 6 \quad (**)$

Từ (*), (**) ta có hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} y-1=0 \\ 4y+x=6 \\ y=\sqrt{3y-2} \\ 2y-1=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = (2; 1)$.

Câu 50: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2x-2} + \sqrt{2y+2} = (x-3y)\sqrt{x+y} & (1) \\ (y+1)\sqrt{3x-y-4} = (2y+1)\sqrt{x+y} & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq -1 \\ 3x-y-4 \geq 0 \end{cases}$$

Trường hợp 1. $x+y=0$ hệ đã cho trở thành
$$\begin{cases} \sqrt{2x-2} + \sqrt{2y+2} = 0 \\ (y+1)\sqrt{3x-y-4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Trường hợp 2. $x+y > 0$ ta có PT(1) $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2(x-1)}{x+y}} + \sqrt{\frac{2(y+1)}{x+y}} = x-3y$

$$\Rightarrow x-3y = \sqrt{\frac{2(x-1)}{x+y}} + \sqrt{\frac{2(y+1)}{x+y}} \leq \sqrt{(1+1)\left(\frac{2(x-1)}{x+y} + \frac{2(y+1)}{x+y}\right)} = 2 \quad (3)$$

Lại có PT(2) $\Leftrightarrow \frac{2y+1}{y+1} = \sqrt{\frac{3x-y-4}{x+y}}$, do $y \neq -1$

$$\Rightarrow \frac{2y+1}{y+1} = \sqrt{\frac{3x-y-4}{x+y}} \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3x-y-4}{x+y}\right) = \frac{2x-2}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow (2y+1)(x+y) \leq (2x-2)(y+1) \Leftrightarrow x-3y \geq 2y^2+2 \Rightarrow x-3y \geq 2 \quad (4)$$

Kết hợp (3), (4) suy ra hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+y} = \frac{y+1}{x+y} \\ \frac{3-y-4}{x+y} = 1 \\ y=0 \\ x-3y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm $(x; y) = \{(1; -1), (2; 0)\}$.

Câu 51: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+y}(\sqrt{y}+1) = \sqrt{x^2+y^2}+2 & (1) \\ x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = \frac{x^2+4y-4}{2} & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$

Từ phương trình (2):

$$\begin{aligned} x^2 + 4y - 4 &= x \cdot 2\sqrt{y-1} + y \cdot 2\sqrt{x-1} \leq \frac{x^2 + 4y - 4}{2} + \frac{y^2 + 4x - 4}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4y - 4}{2} &\leq \frac{y^2 + 4x - 4}{2} \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 4y - 4x \leq 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-4) \leq 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Từ phương trình (1):

$$\begin{aligned} \sqrt{x+y} - 2 &= \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{xy + y^2} \\ \Leftrightarrow \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}+2} &= \frac{x(x-y)}{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{xy + y^2}} \Rightarrow (x-y)(x+y-4) \geq 0 \quad (**) \end{aligned}$$

Suy ra hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 2\sqrt{y-1} \\ y = 2\sqrt{x-1} \\ (x-y)(x+y-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = (2; 2)$.

Câu 52: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y+1}} + \sqrt{\frac{y}{x+1}} = \sqrt{\frac{2(x+y)}{y+1}} & (1) \\ (y-1)\sqrt{x-1} = \frac{x^2 - y}{2} & (2) \end{cases}$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Từ phương trình (2) ta có:

$$\frac{x^2 - y}{2} = (y-1)\sqrt{x-1} \leq \frac{(y-1)^2 + (x-1)}{2} \Leftrightarrow (x-y)(x+y-1) \leq 0 \Rightarrow x \geq y \quad \left(\text{do } \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \right)$$

Với $x \geq y$ từ phương trình (1) cho ta:

$$\begin{aligned} VT(1) &= \sqrt{\frac{x}{y+1}} + \sqrt{\frac{y}{x+1}} \leq \sqrt{(1+1)\left(\frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}\right)} \\ &\leq \sqrt{(1+1)\left(\frac{x}{y+1} + \frac{y}{y+1}\right)} = \sqrt{2\left(\frac{x+y}{y+1}\right)} = VP(1) \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y$

Với $x = y$ thay trở lại phương trình (2) ta có:

$$2(x-1)\sqrt{x-1} = x(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ ban đầu là $(x; y) = \{(1; 1), (2; 2)\}$.

Câu 53: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^8 + y^8 + y - 5x + 2 = 0 & (1) \\ 5x^3 - x^2y = 4x^2y^2(x^2 + 1) + y - 5x & (2) \end{cases}$$

Giải

Từ phương trình (2): $5x^3 - x^2y = 4x^2y^2(x^2 + 1) + y - 5x$
 $\Rightarrow 5x(x^2 + 1) = 4x^2y^2(x^2 + 1) + y(1 + x^2)$
 $\Rightarrow 5x = 4x^2y^2 + y \Rightarrow -4x^2y^2 = y - 5x$ thế vào phương trình (1):
 $\Rightarrow x^8 + y^8 - 4x^2y^2 + 2 = 0$
 $\Rightarrow (x^8 + y^8 - 2x^4y^4) + 2x^4y^4 - 4x^2y^2 + 2 = 0$
 $\Rightarrow (x^4 - y^4)^2 + 2(x^2y^2 - 1)^2 = 0$

Ta có VT ≥ 0 nên dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x^4 - y^4 = 0 \\ x^2y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

Câu 54: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + x + \sqrt{x+2} = 2y^2 + y + \sqrt{2y+1} & (1) \\ x^2 + 2y^2 - 2x + y - 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$

Lấy (1) - (2) theo từng vế và biến đổi ta có:

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 2 + \sqrt{x+2} &= 4y^2 + 2y + \sqrt{2y+1} \\ \Leftrightarrow (x+1)^2 + (x+1) + \sqrt{x+2} &= 4y^2 + 2y + \sqrt{2y+1} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t + \sqrt{t+1}$, $t \geq -1$ ta có:

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2t + 1 + \frac{1}{2\sqrt{t+1}} = 2(t+1) + \frac{1}{4\sqrt{t+1}} + \frac{1}{4\sqrt{t+1}} - 1 \\ &\geq 3\sqrt[3]{2(t+1)} \cdot \frac{1}{16(t+1)} - 1 = \frac{3}{2} - 1 > 0 \end{aligned}$$

Hay hàm số $f(t)$ đồng biến, do vậy từ $f(x+1) = f(2y) \Leftrightarrow x+1 = 2y$

Với $x = 2y - 1$ thay vào phương trình (2) ta có $6y^2 - 7y + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{1}{6} \end{cases}$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = \left\{ (1; 2), \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{6}\right) \right\}$.

Câu 55: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{5y - x - y^2 - 1} = y - x + 2 & (1) \\ \sqrt{3y - x} + 2\sqrt{x-1} = x + 2y - 1 & (2) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 1 \\ 3y - x \geq 0 \\ 5x - y^2 - x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Lấy (1)+(2) theo từng vế ta được: $\sqrt{5y-x-y^2-1} + \sqrt{3y-x} + 2\sqrt{x-1} = 3y+1$ (*)

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{aligned} VT(*) &\leq \frac{5y-x-y^2-1+1}{2} + \frac{1+3y-x}{2} + 1 + (x-1) = \frac{-y^2+8y+1}{2} = \\ &= \frac{-(y^2-2y+1)+6y+2}{2} = \frac{6y+2-(y-1)^2}{2} \leq \frac{6y+2}{2} = 3y+1 = VP(*) \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y-x-y^2-1=1 \\ 3y-x=1 \\ x-1=1 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y)=(2;1)$.

Câu 56: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \quad (1) \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x \quad (2) \end{cases}$

Giải

Từ 2 phương trình đầu ta có

$$pt(1): 3xy^2 + x^3 + 49 = 0$$

$$pt(2): y^2 - y(8x+8) + x^2 + 17x = 0$$

Để ý rằng trên kia không có y nên $pt(2)$ dưới phải mất y vậy $x = -1$

$$\text{Thế vào } pt(1): -3y^2 + 48 = 0 \Rightarrow -3(y^2 - 16) = 0 \Rightarrow -3(y-4)(y+4) = 0$$

$$pt(2): y^2 - 16 = 0$$

$$\text{Vậy nhân } -3pt(2) - pt(1) = 0$$

$$\Rightarrow -3(x^2 - 8xy + y^2 - 8y + 17x) - (x^3 + 3xy^2 + 49) = 0$$

$$\Rightarrow -(x+1)(x^2 + 2x + 3y^2 - 24y + 49) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ hay } x^2 + 2x + 3y^2 - 24y + 49 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Với } pt(*): (x+1)^2 + (3y^2 - 24y + 48) = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + 3(y-4)^2 = 0$$

Ta có $VT \geq 0$ nên dấu bằng xảy ra khi: $x = -1$ và $y = 4$ (thỏa)

Với $x = -1 \Rightarrow y = 4$ hay $y = -4$.

Câu 57: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2x - 2 = \sqrt{-y^2 - 4y - 2} \quad (1) \\ 11 + y - 6x = \sqrt{10 - 4x - 2x^2} \quad (2) \end{cases}$

Giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} -y^2 - 4y - 2 \geq 0 \\ 10 - 4x - 2x^2 \geq 0 \end{cases}$$

Lấy (1)+(2) theo từng vế ta được:

$$x^2 - 4x + y + 9 = \sqrt{-y^2 - 4y - 2} + \sqrt{10 - 4x - 2x^2} \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{aligned} VP(*) &= \sqrt{-y^2 - 4y - 2} + \frac{1}{2} \left(2\sqrt{10 - 4x - 2x^2} \right) \leq \frac{-y^2 - 4y - 2 + 1}{2} + \frac{10 - 4x - 2x^2 + 4}{4} = \\ &= \frac{-2x^2 - 2y^2 - 4x - 8y + 12}{4} := A \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh $VT(*) \geq A$, thật vậy:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y + 9 &\geq \frac{-2x^2 - 2y^2 - 4x - 8y + 12}{4} \Leftrightarrow 6x^2 - 12x + 2y^2 + 12y + 24 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 6(x-1)^2 + 2(y+3)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng}). \end{aligned}$$

$$\text{Từ } \begin{cases} VT(*) \geq A \\ VP(*) \leq A \end{cases} \text{ nên } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \sqrt{-y^2 - 4y - 2} \\ 2 = \sqrt{10 - 4x - 2x^2} \\ x - 1 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y) = (1; -3)$.

Câu 58: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \left(\sqrt{1-x} + \sqrt{2x+y} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{5x+3y+1}} + \frac{1}{\sqrt{3-x+y}} \right) = 2 \\ xy + 2\sqrt{2x^4 - x^3 + 7x^2 + y + 2} = 4 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 2x+y \geq 0 \\ 5x+3y+1 > 0 \\ 3-x+y > 0 \\ 2x^4 - x^3 + 7x^2 + y + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = 1-x \\ b = 2x+y \end{cases}, a, b \geq 0. \text{ Ta có } \begin{cases} 5x+3y+1 = a+3b \\ 3-x+y = b+3a \end{cases}.$$

Khi đó phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi trở thành :

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a+3b}} + \frac{1}{\sqrt{b+3a}} \right) = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a+3b}} + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b+3a}} = 2 \quad (1)$$

Rõ ràng với $(a, b) = (0; 0)$ là không thỏa (1).

$$\text{Do đó với } a, b > 0 \text{ ta đặt } t = \frac{a}{b}, t > 0 \text{ ta đưa (1)} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{t} + 1}{\sqrt{t+3}} + \frac{\sqrt{t} + 1}{\sqrt{3t+1}} = 2.$$

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có :

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+3}} = \sqrt{\frac{t}{t+1} \cdot \frac{t+1}{t+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{t}{t+1} + \frac{t+1}{t+3} \right) \Rightarrow \frac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{t}{t+1} + \frac{3}{2} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{t+3}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{t+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{t+3} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{3t+1}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{3t+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{2t}{3t+1} \right) \Rightarrow \frac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{3t+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t+1} + \frac{3}{2} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{3t+1}} = \sqrt{\frac{1}{t+1} \cdot \frac{t+1}{3t+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t+1} + \frac{t+1}{3t+1} \right) \end{cases}$$

Do đó ta có: $\frac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t+3}} + \frac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{3t+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{t+1}{t+1} + 3 \right) = 2.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} t > 0 \\ \frac{t}{t+1} = \frac{t+1}{t+3} \\ \frac{1}{2} = \frac{2}{t+3} \\ \frac{1}{2} = \frac{2t}{3t+1} \\ \frac{1}{t+1} = \frac{t+1}{3t+1} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

Lúc này ta sẽ có $a = b \Leftrightarrow 1 - x = 2x + y \Leftrightarrow y = 1 - 3x.$

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$x(1-3x) + 2\sqrt{2x^4 - x^3 + 7x^2 - 3x + 3} = 4 \Leftrightarrow x - 3x^2 + 2\sqrt{2x^2(x^2+3) - x(x^2+3) + x^2+3} = 4$$

$$\Leftrightarrow x - 3x^2 + 2\sqrt{(x^2+3)(2x^2-x+1)} = 4$$

Lại theo bất đẳng thức AM – GM ta có : $2\sqrt{(x^2+3)(2x^2-x+1)} \leq 3x^2 - x + 4.$

Từ đó ta có : $x - 3x^2 + 2\sqrt{(x^2+3)(2x^2-x+1)} \leq x - 3x^2 + 3x^2 - x + 4 = 4.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$2x^2 - x + 1 = x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 4 \\ x = 2 \Rightarrow y = -5 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện và thử lại ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (1; 4).$

Câu 59: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{(x-2)^2 + y^2}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{y+1}} = \frac{(x-2)^2}{1 + \sqrt{y+1}} + \frac{y^2}{1 + \sqrt{x}} & (1) \\ {}^{2017}\sqrt{x-2} + {}^{2017}\sqrt{y} = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Ta có:

pt(1): đặt $a = x - 2, b = y$ (dk : $a, b \geq -2$)

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{1 + \sqrt{a+2} + \sqrt{b+1}} = \frac{a^2}{1 + \sqrt{b+1}} + \frac{b^2}{1 + \sqrt{a+2}}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{1 + \sqrt{a+2} + \sqrt{b+1}} = \frac{a^2 + b^2 + a^2\sqrt{a+2} + b^2\sqrt{b+1}}{(1 + \sqrt{b+1})(1 + \sqrt{a+2})}$$

$$\begin{aligned} \text{VT} : & (a^2 + b^2)(1 + \sqrt{b+1})(1 + \sqrt{a+2}) = (a^2 + a^2\sqrt{b+1} + b^2 + b^2\sqrt{b+1})(1 + \sqrt{a+2}) \\ & = a^2 + a^2\sqrt{a+2} + a^2\sqrt{b+1} + a^2\sqrt{(b+1)(a+2)} + b^2 + b^2\sqrt{a+2} + b^2\sqrt{b+1} + b^2\sqrt{(a+2)(b+1)} \\ & = (a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)(\sqrt{a+2} + \sqrt{b+1}) + (a^2 + b^2)\sqrt{(a+2)(b+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{VP} : & (a^2 + b^2 + a^2\sqrt{a+2} + b^2\sqrt{b+1})(1 + \sqrt{a+2} + \sqrt{b+1}) \\ & = (a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)(\sqrt{a+2} + \sqrt{b+1}) + a^2\sqrt{a+2} \\ & \quad + a^2\sqrt{a+2}(\sqrt{a+2} + \sqrt{b+1} + b^2\sqrt{b+1} + b^2\sqrt{b+1} + b^2\sqrt{b+1}(\sqrt{a+2} + b+1)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^2\sqrt{a+2} + a^2(a+2) + b^2\sqrt{b+1} + b^2(b+1) = 0$$

$$\text{Ta có VT} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2\sqrt{a+2} = 0 \\ a^2(a+2) = 0 \\ b^2\sqrt{b+1} = 0 \\ b^2(b+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ hay } a = -2 \\ b = 0 \text{ hay } b = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ hay } x = 0 \\ y = 0 \text{ hay } y = -1 \end{cases} \text{ thế vào pt(2) ta thấy } x = 2, y = 0 \text{ là thỏa mãn hệ}$$

Câu 60: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + 2\sqrt{y+1} = y + \frac{9}{4} \\ \frac{x-1}{\sqrt{y+1}+1} + \frac{y+1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq -1 \end{cases}$. Nhận thấy hệ không có nghiệm $(x, y) = (1; -1)$.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x-1} \\ b = \sqrt{y+1} \end{cases}, a, b > 0$. Lúc đó hệ phương trình đã cho trở thành hệ:
$$\begin{cases} a + 2b = b^2 + \frac{5}{4} \\ \frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ta có: $\frac{A^2}{X} + \frac{B^2}{Y} \geq \frac{(A+B)^2}{X+Y} (*)$, $\forall A, B \in \mathbb{R}, X, Y > 0$.

Áp dụng bổ đề này ta có $\frac{a^2}{b+1} + \frac{b^2}{a+1} \geq \frac{(a+b)^2}{a+b+2} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \geq \frac{(a+b)^2}{a+b+2}$
 $\Leftrightarrow 3(a+b)^2 - (a+b) - 2 \leq 0 \Leftrightarrow a+b \leq 1 \Leftrightarrow a \leq 1-b$.

Với đánh giá này, kết hợp với phương trình thứ nhất ta có :

$$a = b^2 - 2b + \frac{5}{4} \Rightarrow b^2 - 2b + \frac{5}{4} \leq 1 - b \Leftrightarrow (2b - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2b - 1 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Với } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{y+1} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ y = -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Đối chiếu và thử lại ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \left(\frac{5}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

Câu 61: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 2x - 2 = \sqrt{-y^2 - 4y - 2} \\ 6x - y - 11 + \sqrt{-2x^2 - 4x + 10} = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện :
$$\begin{cases} -2x^2 - 4x + 10 \geq 0 \\ -y^2 - 4y - 2 \geq 0 \end{cases}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có :

$$x^2 + 2x - 2 = \sqrt{-y^2 - 4y - 2} \leq \frac{1 - y^2 - 4y - 2}{2} \Rightarrow 2x^2 + 4x + y^2 + 4y - 3 \leq 0 \quad (1)$$

$$y - 6x + 11 = \sqrt{-2x^2 - 4x + 10} = \frac{\sqrt{4(10 - 4x - 2x^2)}}{2} \leq \frac{4 + 10 - 4x - 2x^2}{2}.$$

Suy ra $x^2 - 10x + 2y + 15 \leq 0 \quad (2).$

Lấy (1) + (2) vế theo vế ta có

$$3x^2 - 6x + y^2 + 6y + 12 \leq 0 \Leftrightarrow 3(x - 1)^2 + (y + 3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện và thử lại ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (1; -3).$

Câu 62: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{3 + 2x^2y - x^4y^2} + x^2(1 - 2x^2) = y^4 \quad (1) \\ 1 + \sqrt{1 + (x - y)^2} + x^2(x^4 - 2x^2 - 2xy^2 + 1) = 0 \quad (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Hệ tiếp theo là 1 hệ đánh giá, ban đầu nhìn vào thì rất khó đoán ý tác giả nhưng thử để ý xem

$$\text{pt}(1): \sqrt{3 + 2x^2y - x^4y^2} + x^2 - 2x^4 = y^4$$

$$\text{pt}(2): 1 + \sqrt{1 + (x - y)^2} + x^6 - 2x^4 - 2x^3y^2 + x^2 = 0$$

Lấy pt(1) thế vào pt(2):

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{1 + (x - y)^2} + x^6 - 2x^3y^2 = 2x^4 - x^2$$

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{1 + (x - y)^2} + x^6 - 2x^3y^2 = \sqrt{3 + 2x^2y - x^4y^2} - y^4$$

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{1 + (x - y)^2} + (x^3 - y^2)^2 = \sqrt{3 + 2x^2y - x^4y^2}$$

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{1 + (x - y)^2} + (x^3 - y^2)^2 = \sqrt{4 - (x^2y - 1)^2}$$

Ta có $VT \geq 2$ mà cũng có $VP \leq 2$ nên dấu bằng xảy ra khi:

$$\begin{cases} \sqrt{1 + (x - y)^2} = 1 \\ \sqrt{4 - (x^2y - 1)^2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = y = 1 \text{ thế vào thỏa mãn}$$

Câu 63: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^2 - 5xy + 4y^2 - 1 - 2(x - y)\sqrt{4x^2 - 2xy - 2y^2} = 0 \quad (1) \\ 2x^2 - 5xy + 7y^2 - 2 - 2(x - y)\sqrt{4x^2 - 2xy - 2y^2} = 0 \quad (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Bài toán này ý tưởng cũng khó khăn không kém, do bài này tôi chế nên tôi sẽ đưa lời gốc lên cho mọi người thưởng thức!!

$$\text{Nhân } 4\text{pt}(1) - 2\text{pt}(2) = 0$$

$$4\text{pt}(1): 12x^2 - 20xy + 16y^2 - 4(2x - 2y)\sqrt{4x^2 - 2xy - 2y^2} = 4$$

$$-2\text{pt}(2): -4x^2 + 10xy - 14y^2 + 2(2x - 2y)\sqrt{4x^2 - 2xy - 2y^2} = -4$$

$$\Rightarrow 8x^2 - 10xy + 2y^2 - 2(2x - 2y)\sqrt{4x^2 - 2xy - 2y^2} = 0$$

$$\Rightarrow (4x^2 - 8xy + 4y^2) - 2(2x - 2y)\sqrt{4x^2 - 2xy - 2y^2} + (4x^2 - 2xy - 2y^2) = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 2y)^2 - 2(2x - 2y)\sqrt{4x^2 - 2xy - 2y^2} + (\sqrt{4x^2 - 2xy - 2y^2})^2 = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 2y - \sqrt{4x^2 - 2xy - 2y^2})^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{4x^2 - 2xy - 2y^2} = 2y - 2x$$

$$\text{Thế vào pt}(1), \text{pt}(2): \begin{cases} 3x^2 - 5xy + y^2 - 2(x - y)(2y - 2x) = 1 \quad (*) \\ 2x^2 - 5xy + 7y^2 - 2(x - y)(2y - 2x) = 2 \quad (**) \end{cases}$$

$$\text{pt}(*): 7x^2 - 13xy + 8y^2 = 1$$

$$\text{pt}(**): 6x^2 - 13xy + 11y^2 = 2$$

$$\text{Lấy pt}(*) \text{ thế pt}(**): 6x^2 - 13xy + 11y^2 = 2(7x^2 - 13xy + 8y^2)$$

$$\Rightarrow y = x \text{ hay } y = \frac{8x}{5}$$

$$\text{Thế vào pt}(*) \text{ với } x = y \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (nhận)}$$

$$\text{Thế vào pt}(**) \text{ với } y = \frac{8x}{5} \Rightarrow x = \pm \frac{5}{\sqrt{167}} \Rightarrow y = \pm \frac{8}{\sqrt{167}} \text{ (loại)}$$

Câu 64: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + y^3 + y^6 = \sqrt{xy - x^2y^2} \\ 4xy^3 + y^3 + \frac{1}{2} = 2x^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2} \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện $xy - x^2y^2 \geq 0$ (*)

Ta có $y^6 + y^3 + 2x^2 = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(xy - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow y^6 + 2y^3 + 2x^2 + 4xy^3 \leq \frac{1}{2} + y^3 + 4xy^3$

Cộng chéo vế theo vế đánh giá này với phương trình thứ hai ta thu được :

$$\begin{aligned} y^6 + 2y^3 + 2x^2 + 4xy^3 + 2x^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2} &\leq 1 + 2y^3 + 8xy^3 \\ \Leftrightarrow y^6 + 4x^2 - 4xy^3 + \sqrt{1 + (2x - y)^2} &\leq 1 \Leftrightarrow (y^3 - 2x)^2 + \sqrt{1 + (2x - y)^2} \leq 1 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} y - 2x = 0 \\ y^3 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 - y = 0 \\ x = \frac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y = -1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Thử lại ta thấy, nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = \left(-\frac{1}{2}; -1\right)$.

Câu 65: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{y}{\sqrt{x} + y} - \frac{x}{(y + \sqrt{x})^2} = \frac{y^4}{(x + y^2)^2} \\ \sqrt{y + \sqrt{x - 1}} = 32(x - 2y + 1)\sqrt{2y - 2} \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \\ y + \sqrt{x - 1} \geq 0 \end{cases}$. Phương trình (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{x}{y^2} + 1\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{y}{\sqrt{x}} + 1\right)^2} = \frac{1}{\frac{\sqrt{x}}{y} + 1}$

Đặt $a = \frac{x}{y^2}; b = \frac{y}{\sqrt{x}}$ ($a, b > 0$) ta có $\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} = \frac{1}{ab+1}$ (*)

Theo bất đẳng thức B.C.S ta có

$$\begin{cases} (ab+1)\left(\frac{a}{b} + 1\right) \geq (a+1)^2 \\ (ab+1)\left(\frac{b}{a} + 1\right) \geq (b+1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{(a+1)^2} \geq \frac{b}{a+b} \cdot \frac{1}{ab+1} \\ \frac{1}{(b+1)^2} \geq \frac{a}{a+b} \cdot \frac{1}{ab+1} \end{cases}$$

Suy ra $VT(*) \geq \frac{a+b}{(a+b)(ab+1)} = \frac{1}{ab+1} = VP(*)$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = \frac{a}{b} \\ ab = \frac{b}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y^2$$

Với $x = y^2$ thay trở lại ta có phương trình

$$\sqrt{y + \sqrt{y-1}} = 32(y-1)^2 \sqrt{2y-2} \Leftrightarrow y + \sqrt{y^2-1} = 2(4y-4)^5$$

Đặt: $4y-4 = u (u \geq 0)$. Phương trình đã cho trở thành:

$$2u^5 - \frac{u+4}{4} - \sqrt{\left(\frac{u+4}{4}\right)^2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 8u^5 = \sqrt{u^2+8u} + u + 4 (*)$$

+) Rõ ràng $u = 0$ không là nghiệm của phương trình (*)

+) Với $u \neq 0$, phương trình (*) tương đương với: $8 = \frac{4}{u^5} + \frac{1}{u^4} + \sqrt{\frac{1}{u^8} + \frac{8}{u^9}}$

Hàm số $f(u) = \frac{4}{u^5} + \frac{1}{u^4} + \sqrt{\frac{1}{u^8} + \frac{8}{u^9}}$, nghịch biến trên $(0; +\infty)$ và $f(1) = 0$

Suy ra phương trình (*) có nghiệm duy nhất $u = 1$.

Thay trở lại ta có nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y) = \left(\frac{25}{16}; \frac{5}{4}\right)$.

Câu 66: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2(4x^2-1)+1=0 & (1) \\ (16x^3-3x+2)y^2-2\sqrt{3}xy-1=0 & (2) \end{cases}$$

Giải

TH1: $y = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình

TH2: $y \neq 0$, chia cả hai vế phương trình (1) và (2) cho y^2 ta có:

$$\text{Phương trình (1): } 4x^2 + \frac{1}{y^2} = 1$$

$$\text{Phương trình (2): } 16x^3 - 3x - \frac{2\sqrt{3}x}{y} + 2 - \frac{1}{y^2} = 0 \Rightarrow 32x^3 - 6x - \frac{4\sqrt{3}x}{y} + 4 - \frac{2}{y^2} = 0$$

$$\text{Để ý phương trình (2): } 4(2x)^3 - 3(2x) - \frac{4x\sqrt{3}}{y} + 4 - \frac{2}{y^2} = 0$$

$$\text{Đặt } 2x = \sin t; \frac{1}{y} = \cos t \text{ (điều kiện } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2})$$

Phương trình (1) luôn đúng ta sẽ không giải nữa

Phương trình (2) trở thành

$$\sin 3t + \sqrt{2} \sin 2t + \cos 2t = 3 \Rightarrow \sin 3t + 2 \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) = 3$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} -1 \leq \sin 3t \leq 1 \\ -2 \leq 2 \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \leq 2 \end{cases} \Rightarrow VT \leq 3$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} \sin 3t = 1 \\ \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{2\pi}{6} \leq 2k\pi \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{1}{6} \Rightarrow k = 0$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Câu 67: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 \sqrt{2(x-3)} + (x+1)(y-1) = \sqrt[3]{3x - \frac{1}{2}} \\ \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{y^2 - y + 1} = \sqrt{x^2 - xy + y^2} \end{cases}$$

Giải

Theo bất đẳng thức Mincowsky ta có

$$\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{y^2 - y + 1} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \geq \sqrt{(1+x-y)^2 + 3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - xy + y^2} \geq \sqrt{(1+x-y)^2 + 3} \Leftrightarrow xy - 2x + 2y - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(y-2) \geq 0$$

Mặt khác $x \geq 3 \Rightarrow y \geq 2$. Khi đó áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$x+1 = \frac{1}{3}((3x+1)+1+1) \geq \sqrt[3]{3x+1} \Rightarrow VT(1) \geq x+1 \geq \sqrt[3]{3x+1} > \sqrt[3]{3x - \frac{1}{2}}$$

Vậy hệ phương trình vô nghiệm!

Câu 68: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{1-2y-x^2} + x - 1 = \sqrt{2(x^2 - y^2 + 2)} \\ \sqrt{1+2x-y^2} - y - 1 = \sqrt{2(y^2 - x^2 + 2)} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 1-2y-x^2 \geq 0 \\ 1+2x-y^2 \geq 0 \\ x^2 - y^2 + 2 \geq 0 \\ y^2 - x^2 + 2 \geq 0 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế hai phương trình ta có :

$$\sqrt{1-2y-x^2} - (y+1) + \sqrt{1+2x-y^2} + x - 1 = \sqrt{2(x^2 - y^2 + 2)} + \sqrt{2(y^2 - x^2 + 2)}$$

Sử dụng bất đẳng thức B.C.S ta có :

$$\begin{cases} \sqrt{1-2y-x^2} - (y+1) \leq \sqrt{(1^2+(-1)^2)(1-2y-x^2+(y+1)^2)} = \sqrt{2(y^2-x^2+2)} \\ \sqrt{1+2x-y^2} + (x-1) \leq \sqrt{(1^2+1^2)(1+2x-y^2+(x-1)^2)} = \sqrt{2(x^2-y^2+2)} \end{cases}$$

Cộng vế theo vế ta sẽ có được dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \sqrt{1-2y-x^2} = -y-1 \\ \sqrt{1+2x-y^2} = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, y \leq -1 \\ 1-2y-x^2 = y^2+2y+1 \\ 1+2x-y^2 = x^2-2x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, y \leq -1 \\ x^2+y^2+4x=0 \\ x^2+y^2-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, y \leq -1 \\ y=-x \\ x^2+y^2-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, y \leq -1 \\ y=-x \\ x^2-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, y \leq -1 \\ y=-x \\ x=0 \vee x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (2; -2)$.

Câu 69: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4xy + x + 4\sqrt{(2-x)(y+2)} = 14 & (1) \\ x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện $(2-x)(y+2) \geq 0$

Từ phương trình (2) ta có $2 = (x+1)^2 + y^2 \geq 2(x+1)y \Rightarrow y(x+1) \leq 1 (*)$ đồng thời $2 = (x+1)^2 + y^2 \Rightarrow |y| \leq \sqrt{2} \Rightarrow y+2 > 0$, kết hợp điều kiện xác định suy ra $2-x > 0$. Do đó từ (1) cho ta $14 - 4xy - x = 2\sqrt{2-x}(2\sqrt{y+2}) \leq (2-x) + 4(y+2) \Rightarrow y(x+1) \geq 1 (**)$

Từ (*), (**) suy ra hệ có nghiệm khi và chỉ khi
$$\begin{cases} x+1=y \\ \sqrt{2-x} = 2\sqrt{y+2} \\ y(x+1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y) = (-2; 1)$.

Câu 70: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x-y+4}(\sqrt{x-y+2}+2\sqrt{y-x}) = 3\sqrt{3} \\ x^3 + \sqrt{2x-1} = 2 - \sqrt{y-2} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ y \geq 2 \\ -2 \leq x-y \leq 0 \end{cases}$. Áp dụng bất đẳng thức B.C.S ta có :

$$\sqrt{x-y+2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2(y-x)} \leq \sqrt{(1+2)(x-y+2+2y-2x)} = \sqrt{3(y-x+2)}$$

Do đó ta có $\sqrt{x-y+4}(\sqrt{x-y+2}+2\sqrt{y-x}) \leq \sqrt{3}(\sqrt{y-x+2} \cdot \sqrt{x-y+4}) \quad (1)$

Mặt khác từ điều kiện : $-2 \leq x-y \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq y-x \leq 2 \Rightarrow y-x+2 > 0$.

Do đó áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có :

$$\sqrt{y-x+2} \cdot \sqrt{x-y+4} \leq \frac{y-x+2+x-y+4}{2} = 3 \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta có được : $\sqrt{x-y+4}(\sqrt{x-y+2} + 2\sqrt{y-x}) \leq 3\sqrt{3}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi dấu đẳng thức ở các đánh giá (1),(2) xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-y+2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{y-x}}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{x-y+4} = \sqrt{y-x+2} \end{cases} \Leftrightarrow y = x+1.$$

Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình :

$$\begin{aligned} x^3 + \sqrt{2x-1} &= 2 - \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^3 - 1 + \sqrt{2x-1} - 1 + \sqrt{x-1} = 0 \quad (x \geq 1) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x-1} \underbrace{\left((x^2+x+1)\sqrt{x-1} + \frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}+1} + 1 \right)}_P = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2 \text{ vì } P > 0, \forall x \geq 1. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ đã cho là $(x, y) = (1; 2)$.

Câu 71: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(y-2x^2y) + y\sqrt{(xy+1)(3-xy)} = y^5 & (1) \\ x^3(1-x^2) + x\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + (x^2-y^2)^2}\right) = x^2y^2 & (2) \end{cases}$$

Giải

Dễ thấy $x = y = 0$ không là nghiệm của hệ phương trình

Xét $x, y \neq 0$ thì hệ phương trình trở thành

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x^4 + \sqrt{(xy+1)(3-xy)} = y^4 \\ x^2 - x^4 + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + (x^2 - y^2)^2} = xy^2 \end{cases}$$

Phương trình (2): $2x^2 - 2x^4 + 1 + 2\sqrt{\frac{1}{4} + (x^2 - y^2)^2} = 2xy^2$

Cộng chéo hai vế phương trình trên ta được

$$\Rightarrow \sqrt{(xy+1)(3-xy)} = x^2 - 2xy^2 + y^4 + 2\sqrt{\frac{1}{4} + (x^2 - y^2)^2} + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{(xy+1)(3-xy)} = (x - y^2)^2 + 2\sqrt{\frac{1}{4} + (x - y^2)^2} + 1$$

Ta có
$$\begin{cases} (x - y^2)^2 \geq 0 \\ 2\sqrt{\frac{1}{4} + (x - y^2)^2} + 1 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow VP \geq 2$$

Mà $\sqrt{(xy+1)(3-xy)} \leq 2 \Rightarrow 3xy - (xy)^2 + 3 - xy \leq 4$

$$\Rightarrow -(xy)^2 + 2xy - 1 \leq 0 \Rightarrow (xy - 1)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} xy = 1 \\ x - y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = 1.$

Câu 72: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3(x - y - 1)\sqrt{x^2 - y^2 + 9} = y(y - x) - 3 \\ 10y\sqrt{10 - x^2} = x - y - 94 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - y^2 + 9 \geq 0 \\ 10 - x^2 \geq 0 \end{cases}.$

Sử dụng đánh giá $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}, \forall a, b \in \mathbb{R}$. Ta có:

$$3(x - y - 1)\sqrt{x^2 - y^2 + 9} \leq \frac{(x - y - 1)^2 + 9(x^2 - y^2 + 9)}{2}.$$

Từ đó ta có:

$$2y^2 - 2xy - 6 \leq x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x + 2y + 9x^2 - 9y^2 + 81 \Leftrightarrow 5(x^2 - y^2) - (x + y) + 44 \geq 0 \quad (1).$$

Mặt khác từ phương trình thứ hai ta có được biến đổi:

$$5(y^2 + 2y\sqrt{10 - x^2} + 10 - x^2) = -5x^2 + 5y^2 + x - y - 44$$

$$\Leftrightarrow 5(y + \sqrt{10 - x^2})^2 = -5(x^2 - y^2) + x - y - 44.$$

Từ đây ta có $-5(x^2 - y^2) + x - y - 44 \geq 0 \Leftrightarrow 5(x^2 - y^2) - (x - y) + 44 \leq 0 \quad (2)$

Từ (1), (2) ta có: $\begin{cases} x - y - 1 = 3\sqrt{x^2 - y^2 + 9} \\ y = -\sqrt{10 - x^2} \\ 5(x^2 - y^2) - (x - y) + 44 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 + \sqrt{10 - x^2} = 3\sqrt{2x^2 - 1} \\ y = -\sqrt{10 - x^2} \\ 5(x^2 - y^2) - (x - y) + 44 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 - x^2 = 9(2x^2 - 1) + 6(1 - x)\sqrt{2x^2 - 1} + (1 - x)^2 \\ y = -\sqrt{10 - x^2} \\ 5(x^2 - y^2) - (x - y) + 44 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - x)(10x + 9) = 3(1 - x)\sqrt{2x^2 - 1} \\ y = -\sqrt{10 - x^2} \\ 5(x^2 - y^2) - (x - y) + 44 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = 0 \\ 10x + 9 = 3\sqrt{2x^2 - 1} \\ y = -\sqrt{10 - x^2} \\ 5(x^2 - y^2) - (x - y) + 44 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \begin{cases} 10x + 9 \geq 0 \\ 41x^2 + 90x + 45 = 0 \end{cases} \\ y = -\sqrt{10-x^2} \\ 5(x^2 - y^2) - (x - y) + 44 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-45 + 6\sqrt{5}}{41} \\ y = -\sqrt{10-x^2} \\ 5(x^2 - y^2) - (x - y) + 44 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện và thử lại ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (1; -3)$.

Câu 73: Giải phương trình
$$\begin{cases} (x-1+\sqrt{(x-1)^2+4})(y+\sqrt{y^2+4})=4 & (1) \\ \sqrt{4-3y}+\sqrt{9-5y}=x^4-x^2+2x+3 & (2) \end{cases}$$

Giải

Ta có pt (1): $x-1+\sqrt{(x-1)^2+4}=(-y)+\sqrt{(-y)^2+4}$

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2+4}$, chứng minh được hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó: $x-1=-y$ thế vào pt (2) ta được

$$\sqrt{1+3x}+\sqrt{4+5x}=x^4-x^2+2x+3$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+x}{\sqrt{1+3x}+x+1}+\frac{-x^2+x}{\sqrt{4+5x}+x+2}=x^4-x^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x=0 \\ -\frac{1}{\sqrt{1+3x}+x+1}-\frac{1}{\sqrt{4+5x}+x+2}=x(x+1) \end{cases} (*)$$

Ta sẽ chứng minh pt(*) vô nghiệm với mọi $x \geq -\frac{1}{3}$

Theo BĐT Cauchy:
$$\begin{cases} \sqrt{1+3x} \leq \frac{3x+2}{2} \\ \sqrt{4+5x} \leq \frac{5+5x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+3x}+x+1 \leq \frac{3x+2}{2}+x+1 \\ \sqrt{4+5x}+x+2 \leq \frac{5+5x}{2}+x+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{1+3x}+x+1}+\frac{-1}{\sqrt{4+5x}+x+2} \leq -\frac{1}{\frac{3x+2}{2}+x+1}-\frac{1}{\frac{5+5x}{2}+x+2}$$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh:
$$-\frac{1}{\frac{3x+2}{2}+x+1}-\frac{1}{\frac{5+5x}{2}+x+2} < x^2+x \quad (\text{với } x \geq -\frac{1}{3})$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{5x+4}-\frac{2}{7x+9}-x^2-x < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2(7x+9)-2(5x+4)-(x^2+x)(5x+4)(7x+9)}{(5x+4)(7x+9)} < 0$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x^2 \left(35x^2 + 108x + \frac{109}{2} \right) > 0 \\ \frac{109x^2}{2} + 55x + 20 > 0 \\ 5x + 6 > 0 \\ (5x + 4)(7x + 9) > 0 \end{cases} \quad \left(\text{với } x \geq -\frac{1}{3} \right)$$

Vậy VT < VP với mọi $x \geq -\frac{1}{3}$

Câu 74: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{3(2y-2)} = (x+5y)\sqrt{x+2y} \\ (y-1)\sqrt{x-2y+8} = (y-3)\sqrt{x+2y} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq 1 \\ x - 2y + 8 \geq 0 \end{cases}.$$

Trường hợp 1 $x + 2y = 0$. Lúc đó hệ phương trình đã cho trở thành hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{3(2y-2)} = 0 \\ (y-1)\sqrt{x-2y+8} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-1=0 \\ \sqrt{x+2}=0 \\ x=2y-8 \\ \sqrt{2y-6} + \sqrt{3(2y-2)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-2 \end{cases} \text{ (thỏa).}$$

Trường hợp 2 $x + 2y > 0, y > 1$. Khi đó phương trình thứ hai được biến đổi thành phương

$$\text{trình: } \frac{y-3}{y-1} = \sqrt{\frac{x-2y+8}{x+2y}}.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM- GM ta có đánh giá sau:

$$\sqrt{\frac{x-2y+8}{x+2y}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x-2y+8}{x+2y} + 1 \right) = \frac{x+4}{x+2y}.$$

$$\text{Từ đây ta có } \frac{y-3}{y-1} \geq \frac{x+4}{x+2y} \Leftrightarrow (y-3)(x+2y) \geq (x+4)(y-1)$$

$$\Leftrightarrow x+5y \geq y^2+2 \geq 2 \Rightarrow x+5y \geq 2 \quad (*)$$

Mặt khác từ phương trình thứ nhất áp dụng bất đẳng thức B.C.S

$$\text{Ta có } \sqrt{x+2} + \sqrt{3(2y-2)} \leq \sqrt{(1+3)(x+2+2y-2)} = 2\sqrt{x+2y}.$$

$$\text{Từ đây ta có } (x+5y)\sqrt{x+2y} \leq 2\sqrt{x+2y} \Leftrightarrow x+5y \leq 2 \quad (*).$$

Từ (*), (*) suy ra hệ đã cho tương đương với hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} 3 \frac{x+2}{x+2y} = \frac{2y-2}{x+2y} \\ \frac{x-2y+8}{x+2y} = 1 \\ y = 0 \\ x+5y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x, y) = (-2; 1)$.

Câu 75: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (y-2x)^2 + 4 = y - 6x + 2\sqrt{2(x+1)(y+1)}(1) \\ (y-1)(x^2+x)+1 = \sqrt{y} \cdot \sqrt[3]{1-3x}(2) \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Giải

Điều kiện : $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$.

Từ (1) ta biến đổi thành phương trình sau:

$$\begin{aligned} (y-2x)^2 - 2(y-2x) + 1 + 2x + 2 - 2\sqrt{2(x+1)(y+1)} + y + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (y-2x-1)^2 + (\sqrt{2x+2} - \sqrt{y+1})^2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y-2x-1=0 \\ \sqrt{2x+2} = \sqrt{y+1} \end{cases} \Leftrightarrow y = 2x+1. \end{aligned}$$

Thế vào (2) ta có phương trình : $2x^3 + 2x^2 + 1 = \sqrt{1+2x} \cdot \sqrt[3]{1-3x}$.

Từ điều kiện $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$, ta có $2x^3 + 2x^2 + 1 = 2x^2(x+1) + 1 > 0$.

Suy ra $\sqrt[3]{1-3x} > 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$. Vậy tổng hợp các điều kiện ta có : $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có : $\begin{cases} \sqrt{1+2x} \leq \frac{1+1+2x}{2} = x+1 \\ \sqrt[3]{1-3x} \leq \frac{1+1+1-3x}{3} = 1-x \end{cases}$

Từ đây ta suy ra : $0 < \sqrt{1+2x} \cdot \sqrt[3]{1-3x} \leq (x+1)(1-x)$.

Vậy ta cần chứng minh : $2x^3 + 2x^2 + 1 \leq (x+1)(1-x)$, $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]$.

Ta có : $2x^3 + 2x^2 + 1 \leq 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2(2x+3) \geq 0$ (luôn đúng $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]$).

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$ (thỏa mãn). Suy ra : $y = 1$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = (0; 1)$

Câu 76: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 8(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + \frac{5-8y^2}{x} = \sqrt{\frac{y}{x}} \left(8\sqrt{xy} + \frac{1}{xy} \right) \\ 8(x^2 + y^2) + \frac{1}{\sqrt{xy}} = 5 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Điều kiện : $x > 0, y > 0$

Phương trình thứ nhất được biến đổi thành phương trình :

$$8x(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + 5 - 8y^2 = \sqrt{xy} \left(8\sqrt{xy} + \frac{1}{xy} \right)$$

Lấy phương trình vừa biến đổi cộng với phương trình thứ hai trong hệ vế theo vế ta thu được $x - \sqrt{x} = y - \sqrt{y} \Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1)(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \end{cases}$

Trường hợp 1 : $x = y$. Thay vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình

$$16x^2 + \frac{1}{x} = 5 \Leftrightarrow 16x^3 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{8} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{8} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được $x = y = \frac{1}{4}; x = y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{8}$

Trường hợp 2 : $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x} \\ b = \sqrt{y} \end{cases}, a, b > 0$.

Khi đó ta có hệ mới : $\begin{cases} a + b = 1 \\ 8(a^4 + b^4) + \frac{1}{ab} = 5 \end{cases}$

Ta có $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$. Do đó : $a^4 + b^4 \geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{2} \geq \frac{\left(\frac{(a+b)^2}{2} \right)^2}{2} = \frac{1}{8}$.

Vậy ta có : $8(a^4 + b^4) \geq 1$.

Mặt khác ta có : $a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{ab} \geq 4$

Từ hai đánh giá trên ta có : $8(a^4 + b^4) + \frac{1}{ab} \geq 5$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b=1 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=\frac{1}{2} \\ \sqrt{y}=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y) = \left\{ \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right); \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{8}; \frac{-1+\sqrt{17}}{8} \right) \right\}$.

Câu 77: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt[3]{x^2-xy+1} + \sqrt[3]{y^2-xy+1} - 2 = 2(x-y)^2 \\ (16xy-5)(\sqrt{x}+\sqrt{y})+4=0 \end{cases}$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt[3]{x^2-xy+1} \\ b = \sqrt[3]{y^2-xy+1} \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^3 = (x-y)^2 + 2$
 $\Leftrightarrow 2(x-y)^2 = 2(a^3 + b^3) - 4 \geq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 \geq 2$.

Mặt khác từ phương trình thứ nhất ta có:

$$a+b-2=2(x-y)^2 \Leftrightarrow a+b-2 \geq 0 \Leftrightarrow a+b \geq 2$$

Khi đó phương trình thứ nhất trong hệ được biến đổi trở thành phương trình:

$$a+b-2=2(a^3+b^3)-4 \Leftrightarrow a+b=2(a^3+b^3)-2 \Leftrightarrow \frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}=2(a^3+b^3)-2 (*)$$

Mặt khác ta lại có $a^2-ab+b^2 = \frac{1}{4}(a+b)^2 + \frac{3}{4}(a-b)^2 \geq \frac{1}{4}(a+b)^2 \geq 1$

Vậy ta sẽ có: $\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2} \leq \frac{a^3+b^3}{1}$, do đó từ (*) ta có:

$$2(a^3+b^3)-2 \leq a^3+b^3 \Leftrightarrow a^3+b^3 \leq 2$$

Vì $\begin{cases} a^3+b^3 \geq 2 \\ a^3+b^3 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow a^3+b^3=2 \Leftrightarrow (x-y)^2+2=2 \Leftrightarrow (x-y)^2=0 \Leftrightarrow x=y$.

Thế vào phương trình thứ hai ta thu được phương trình: $(16x^2-5)\sqrt{x}+2=0 (3)$.

Đặt $t=\sqrt{x}, t \geq 0$. Lúc đó phương trình (3) trở thành phương trình:

$$(16t^4-5)t+2=0 \Leftrightarrow 16t^5-5t+2=0 \Leftrightarrow (2t-1)^2(4t^3+4t^2+3t+2)=0$$

$$\Leftrightarrow 2t-1=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2} \text{ vì } 4t^3+4t^2+3t+2 > 0, \forall t \geq 0. \Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{4} \Rightarrow y=\frac{1}{4}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của hệ là $(x, y) = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right)$.

Một phương án cho sử dụng BĐT hai biến đối xứng

Đây là những bất đẳng thức khá chặt, sử dụng các thêm bớt đại lượng bất biến khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy. Chính vì tính chất đối xứng hai biến nên dạng BĐT này thường được lồng ghép vào các hệ phương trình hay kết hợp để chuyển về xét hàm số

chứng minh BĐT. Những ứng dụng này phổ biến trong các kỳ thi và là một khó khăn trong các đề thi vì tính chất giới hạn thời gian. Tư tưởng của cách chứng minh BĐT này là từ việc giải phương trình cố gắng đưa ra nhân tử $(x - y)$. Con đường sẽ bỏ qua cách chứng minh trực tiếp bằng các BĐT phụ như Cauchy, Cauchy - Schwarz hay Holder,... Nói cách khác, cách làm này giúp khẳng định tính đúng đắn của BĐT.

Ví dụ 1: Cho x, y là các số thực không âm, chứng minh $x^3 + y^3 \geq xy\sqrt{2(x^2 + y^2)}$.

Đây là một BĐT không khó, tuy nhiên giải quyết được nó cần một chút kỹ thuật

Bài Giải

Ta có $x^3 + y^3 = xy\sqrt{2(x^2 + y^2)}x^3 + y^3 - xy(x + y) = xy\left[\sqrt{2(x^2 + y^2)} - (x + y)\right]$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2(x + y) = xy \cdot \frac{2(x^2 + y^2) - (x + y)^2}{\sqrt{2(x^2 + y^2)} + x + y} \Leftrightarrow (x - y)^2(x + y) = \frac{(x - y)^2 xy}{\sqrt{2(x^2 + y^2)} + x + y}$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 \left[(x + y) - \frac{xy}{\sqrt{2(x^2 + y^2)} + (x + y)} \right] = 0.$$

Do $(x + y)^2 \geq 4xy$ (vì $x, y \geq 1$) suy ra $(x + y) - \frac{xy}{\sqrt{2(x^2 + y^2)} + (x + y)} > 0$.

Nên $x = y$ đpcm!

Để minh họa cho BĐT này mình xin lấy một bài toán sau:

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = xy\sqrt{2(x^2 + y^2)} \\ 4\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 9(y - 1)\sqrt{2x - 2} \end{cases}$$

Ví dụ 2: Cho $x, y \geq 1$. Chứng minh rằng $\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} \geq \frac{2}{xy + 1}$.

Giải

Ta có BĐT

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{xy + 1} \right) + \left(\frac{1}{y^2 + 1} - \frac{1}{xy + 1} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(xy + 1) - (x^2 + 1)}{(xy + 1)(x^2 + 1)} + \frac{(xy + 1) - (y^2 + 1)}{(xy + 1)(y^2 + 1)} \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y - x)}{x^2 + 1} + \frac{y(y - x)}{y^2 + 1} \geq 0 \Leftrightarrow (y - x) \left(\frac{y}{y^2 + 1} - \frac{x}{x^2 + 1} \right) \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (x - y) \frac{xy(x - y) + y - x}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} \geq 0 \Leftrightarrow (x - y) \frac{xy - 1}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} \geq 0 \text{ luôn đúng, suy ra đpcm!}$$

Ví dụ 3: Cho x, y là các số thực không âm, chứng minh

$$\frac{2}{\sqrt{2(x^2 + y^2)}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + 3x^2}} \leq \frac{2}{x + y}.$$

Giải

Trước hết ta sẽ chứng minh $\frac{2}{\sqrt{2(x^2+y^2)}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+3x^2}}$.

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}} - \frac{1}{\sqrt{2(x^2+y^2)}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{y^2+3x^2}} - \frac{1}{\sqrt{2(x^2+y^2)}} \right) \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2(x^2+y^2)} - \sqrt{x^2+3y^2}}{\sqrt{x^2+3y^2}} + \frac{\sqrt{2(x^2+y^2)} - \sqrt{y^2+3x^2}}{\sqrt{y^2+3x^2}} \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+3y^2}(\sqrt{2(x^2+y^2)} + \sqrt{x^2+3y^2})} + \frac{y^2-x^2}{\sqrt{y^2+3x^2}(\sqrt{2(x^2+y^2)} + \sqrt{y^2+3x^2})} \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (x^2-y^2) \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}(\sqrt{2(x^2+y^2)} + \sqrt{x^2+3y^2})} + \frac{1}{\sqrt{y^2+3x^2}(\sqrt{2(x^2+y^2)} + \sqrt{y^2+3x^2})} \right] \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (x^2-y^2) \left[\sqrt{2(x^2+y^2)}(\sqrt{y^2+3x^2} - \sqrt{x^2+3y^2}) + (y^2+3x^2) - (x^2+3y^2) \right] \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (x^2-y^2)(\sqrt{y^2+3x^2} - \sqrt{x^2+3y^2}) \left[\sqrt{2(x^2+y^2)} + (\sqrt{y^2+3x^2} + \sqrt{x^2+3y^2}) \right] \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (x^2-y^2)(\sqrt{y^2+3x^2} - \sqrt{x^2+3y^2}) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2-y^2) \frac{2(x^2-y^2)}{\sqrt{y^2+3x^2} + \sqrt{x^2+3y^2}} \geq 0 \text{ luôn đúng.}$$

Chúng minh $\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+3x^2}} \leq \frac{2}{x+y}$.

Ta có BĐT

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}} - \frac{1}{x+y} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{y^2+3x^2}} - \frac{1}{x+y} \right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+y-\sqrt{x^2+3y^2}}{\sqrt{x^2+3y^2}(x+y)} + \frac{x+y-\sqrt{3x^2+y^2}}{\sqrt{3x^2+y^2}(x+y)} \leq 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+y)^2 - (x^2+3y^2)}{\sqrt{x^2+3y^2}(x+y+\sqrt{x^2+3y^2})} + \frac{(x+y)^2 - (3x^2+y^2)}{\sqrt{3x^2+y^2}(x+y+\sqrt{3x^2+y^2})} \leq 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y(x-y)}{\sqrt{x^2+3y^2}(x+y)+x^2+3y^2} + \frac{2x(y-x)}{\sqrt{3x^2+y^2}(x+y+\sqrt{3x^2+y^2})} \leq 0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left[\frac{y}{\sqrt{x^2+3y^2}(x+y)+x^2+3y^2} + \frac{x}{\sqrt{3x^2+y^2}(x+y+\sqrt{3x^2+y^2})} \right] \leq 0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left[(x+y)(y\sqrt{3x^2+y^2} - x\sqrt{x^2+3y^2}) + 3xy(x-y) + y^3 - x^3 \right] \leq 0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left[(x+y) \frac{y^4-x^4}{y\sqrt{3x^2+y^2} + x\sqrt{x^2+3y^2}} + 3xy(x-y) + (y-x)(y^2+xy+x^2) \right] \leq 0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \left[\frac{(x^2+y^2)(x+y)}{y\sqrt{3x^2+y^2}+x\sqrt{x^2+3y^2}} + (x-y)^2 \right] \geq 0 \text{ luôn đúng!}$$

Ví dụ 4: Cho $x; y$ là các số thực không âm, chứng minh $\frac{x}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+1}} \geq \frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{xy+1}}$.

Giải

Ta sẽ chứng minh BĐT mạnh hơn $\frac{x}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+1}} \geq \frac{x+y}{\sqrt{xy+1}}$.

$$\text{Ta có BĐT} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{y^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{xy+1}} \right) + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{y}{\sqrt{xy+1}} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \frac{\sqrt{xy+1} - \sqrt{y^2+1}}{\sqrt{y^2+1}\sqrt{xy+1}} + y \frac{\sqrt{xy+1} - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{xy+1}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \frac{xy - y^2}{\sqrt{y^2+1}(\sqrt{xy+1} + \sqrt{y^2+1})} + y \frac{xy - x^2}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{xy+1} + \sqrt{x^2+1})} \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)xy \left[\frac{1}{\sqrt{y^2+1}(\sqrt{xy+1} + \sqrt{y^2+1})} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{xy+1} + \sqrt{x^2+1})} \right] \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow xy(x-y) \left[\sqrt{xy+1}(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}) + (x^2+1) - (y^2+1) \right] \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow xy(x-y)(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}) \left[\sqrt{xy+1} + (\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}) \right] \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}) \geq 0 \Leftrightarrow (x-y) \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}} \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng!}$$

Từ đây ta có thể chứng minh được BĐT đã cho.

Ví dụ 5: Nếu $a; b; c$ thỏa mãn $a; b; c \geq 1$ thì $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{4}{1+\sqrt[3]{abc}}$.

Giải

Ta có $a; b; c \geq 1 \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \geq 1$. Áp dụng BĐT 2 ta có

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \text{ và } \frac{1}{1+c} = \frac{1}{1+\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{2}{1+\sqrt{c^3 abc}}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}} + \frac{2}{1+\sqrt{c^3 abc}}.$$

$$= 2 \left(\frac{1}{1+\sqrt{ab}} + \frac{1}{1+\sqrt{c^3 abc}} \right) \geq \frac{4}{1+\sqrt{ab} \cdot \sqrt{c^3 abc}} = \frac{4}{1+\sqrt[3]{abc}}.$$

Dấu đẳng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Ví dụ 6: Cho $x; y; z$ là các số thực thỏa mãn $axy \geq 1$ và $z \geq 1$. Chứng minh:

$$\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{y^2+y+1} + \frac{1}{z^2+z+1} \geq \frac{2}{\sqrt[3]{x^2y^2z^2} + \sqrt[3]{xyz} + 1}.$$

Giải

Trước tiên ta chứng minh BĐT với hai biến $\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{y^2+y+1} \geq \frac{2}{xy + \sqrt{xy} + 1}$.

$$\text{Ta có BĐT} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{xy + \sqrt{xy} + 1} \right) + \left(\frac{1}{y^2+y+1} - \frac{1}{xy + \sqrt{xy} + 1} \right) \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy + \sqrt{xy} - x^2 - x}{x^2+x+1} + \frac{xy + \sqrt{xy} - y^2 - y}{y^2+y+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x) + \sqrt{x}(\sqrt{y} - \sqrt{x})}{x^2+x+1} + \frac{y(x-y) + \sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{y^2+y+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left[\frac{y + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}}{y^2+y+1} - \frac{x + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}}{x^2+x+1} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left[xy(x-y) + y - x + \frac{\sqrt{y}(x^2+x) - \sqrt{x}(y^2+y)}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left[xy(x-y) + y - x + \frac{\sqrt{xy}(x\sqrt{x} - y\sqrt{y} + \sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right] \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y) \left[xy(x-y) + y - x + \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y + 1)}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right] \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \left[xy - 1 + \frac{\sqrt{xy}(x + \sqrt{xy} + y + 1)}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} \right] \geq 0.$$

Do $xy \geq 1$ nên BĐT được chứng minh.

Theo “bản năng”, ta sẽ áp dụng cho kết quả trên ta có:

$$\frac{1}{z^2+z+1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2y^2z^2} + \sqrt[3]{xyz} + 1} \geq \frac{2}{z\sqrt[3]{xyz} + \sqrt{z\sqrt[3]{xyz}} + 1}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{y^2+y+1} + \frac{1}{z^2+z+1} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2y^2z^2} + \sqrt[3]{xyz} + 1} \geq \frac{2}{z\sqrt[3]{xyz} + \sqrt{z\sqrt[3]{xyz}} + 1} + \frac{2}{xy + \sqrt{xy} + 1}$$

$$\geq \frac{4}{\sqrt{xyz}\sqrt[3]{xyz} + \sqrt{\sqrt{xyz}\sqrt[3]{xyz} + 1}} = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2y^2z^2} + \sqrt[3]{xyz} + 1}. \text{ Suy ra đpcm!}$$

Ví dụ 7: Cho $x; y; z$ là các số thực thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Giải

Trước hết ta chứng minh BĐT hai biến $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$

Dựa vào bài toán trước ta dễ dàng chứng minh được bài toán này!

Bài tập tự luyện

Cho $x; y$ là các số thực thỏa mãn $xy > 0$, chứng minh $\frac{x^2}{y^2\sqrt{x^2+1}} + \frac{y^2}{x^2\sqrt{y^2+1}} \geq \frac{2}{\sqrt{xy+1}}.$

Quay trở lại các hệ phương trình có dạng BĐT này:

Bài 78: Cho $x; y$ là các số thực không âm, giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+\sqrt{y^2+1}} + \frac{1}{y+\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{xy}+\sqrt{xy+1}} \\ \sqrt{x(2y+1)(y+3x^2)} = y^3 \cdot \sqrt{y^2+1} \end{cases}$$

Giải

Từ PT trên suy ra $x = y$. Thay vào PT dưới ta được

$$y(2y+1)(y+3y^3) = y^6(y^2-1) \Leftrightarrow (2y+1)(3y+1) = y^6 - y^4.$$

$$\Leftrightarrow y^6 - y^4 - 6y^2 - 5y - 1 = 0 \Leftrightarrow (y^3 - 3y - 1)(y^3 + 2y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 - 3y - 1 = 0 \text{ (vì } y \geq 0)$$

Tới đây ta phải sử dụng phép thế lượng giác:

$$\text{Đặt } y = 2 \cos t \left(t \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \right), \text{ PTTT } 8 \cos^3 t - 6 \cos t - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos t 3t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vì } t \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \text{ nên } t = \frac{\pi}{9} \Rightarrow y = 2 \cos \frac{\pi}{9} \Rightarrow x = 4 \cos^2 \frac{\pi}{9}.$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của HPT là } S = \left\{ \left(4 \cos^2 \frac{\pi}{9}; 2 \cos \frac{\pi}{9} \right) \right\}.$$

Bài 79: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2} + \frac{1}{x+\sqrt{y(2x-y)}} = \frac{2}{y+\sqrt{x(2x-y)}} \\ 2(y-4)\sqrt{2x-y+3} - (x-6)\sqrt{x+y+1} = 3(y-2) \end{cases}.$$

Giải

Nhận thấy $x = 0$ hoặc $y = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Xét $y > 0$, ta đặt $x = ty, (t > 0)$.

Phương trình thứ nhất của hệ trở thành:

$$\frac{2}{(\sqrt{t}+1)^2} + \frac{1}{t+\sqrt{2t-1}} = \frac{2}{1+\sqrt{t(2t-1)}} \Leftrightarrow \frac{2}{(\sqrt{t}+1)^2} + \frac{2}{(\sqrt{2t-1}+1)^2} = \frac{2}{1+\sqrt{t(2t-1)}}.$$

$$\frac{1}{(\sqrt{t}+1)^2} + \frac{1}{(\sqrt{2t-1}+1)^2} = \frac{1}{1+\sqrt{t(2t-1)}}.$$

Chú ý ta có BĐT sau $\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab}$.

Thật vậy, sử dụng BĐT Cauchy - Schwarz ta có

$$(1+ab)(a+b) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{ab} \cdot \sqrt{b})^2 = a(1+b)^2 \Rightarrow \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{a}{a+b} \cdot \frac{1}{a+b}.$$

Tương tự ta có $\frac{1}{(1+a)^2} \geq \frac{b}{a+b} \cdot \frac{1}{1+ab}$.

Cộng theo vế hai BĐT trên ta được

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} \geq \frac{1}{1+ab} \left[\frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} \right] = \frac{1}{1+ab}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Do vậy $\sqrt{t} = \sqrt{2t-1} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = y$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ phương trình ta được

$$2(x-4)\sqrt{x+3} - (x-6)\sqrt{2x+1} = 3(x-2).$$

+ nhận thấy $x = 2$ là một nghiệm của phương trình.

+ Xét $x \neq 2$ khi đó

$$\begin{cases} 2(x-4)\sqrt{x+3} - (x-6)\sqrt{2x+1} = 3(x-2) \\ 2(x-4)\sqrt{x+3} + (x-6)\sqrt{2x+1} = \frac{4(x-4)^2(x+3) - (x-6)^2(2x+1)}{3(x-2)} = \frac{2x^2+7x-78}{3} \end{cases}$$

Cộng vế theo vế hai phương trình ta được:

$$4(x-4)\sqrt{x+3} = \frac{2x^2+7x-78}{3} + 2(x-2) = \frac{2x^2+16x-78}{3}$$

$$\Leftrightarrow 12(x-4)\sqrt{x+3} = 2(x-4)(x+12) \Leftrightarrow 2(x-4)[6\sqrt{x+3} - x - 12] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 6 \end{cases}$$

(Thử lại thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là $S = \{(2;2);(4;4);(6;6)\}$.

Chú ý. Ta có thể đặt $a = \sqrt{t}; b = \sqrt{2t-1}$ sau đó biến đổi tương đương như sau:

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} = \frac{1}{1+ab} \Leftrightarrow \frac{(1+ab)[(1+a)^2 + (1+b)^2] - (1+a)^2(1+b)^2}{(1+ab)(1+a)^2(1+b)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+ab)\left[(1+a)^2 + (1+b)^2\right] - (1+a)^2(1+b)^2 \Leftrightarrow ab(a^2 + b^2) - a^2b^2 - 2ab + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow ab(a-b)^2 + (ab-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1 \Leftrightarrow \sqrt{t} = \sqrt{2t-1} = 1 \Leftrightarrow t=1$$

Câu 80: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x} - y = \frac{2}{3\sqrt{3}} & (1) \\ x\sqrt{x} - \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{3} & (2) \end{cases}$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM:

$$x\sqrt{x} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} 3\sqrt[3]{x\sqrt{x} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}}} = \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x}(1-x) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$(1)-(2): \sqrt{x}(1-x) - \left(\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Suy ra: VT $\leq$ VP

Dấu “=” xảy ra khi: $x = y = \frac{1}{3}$

Câu 81: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - x + 2 = 2\sqrt{-y^2 + 5y - 5} & (1) \\ -x + y + 3 = 2\sqrt{-2y^2 + 8y - 4} & (2) \end{cases}$$

Giải

Điều kiện:
$$\begin{cases} -y^2 + 5y - 5 \geq 0 \\ -2y^2 + 8y - 4 \geq 0 \end{cases}$$

Từ (1) ta có: $x^2 - x + 2 = 2\sqrt{-y^2 + 5y - 5} \leq -y^2 + 5y - 5 + 1$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - x - 5y + 6 \leq 0 \quad (*)$$

Từ (2) ta có: $-x + y + 3 = 2\sqrt{-2y^2 + 8y - 4} \leq \frac{-2y^2 + 8y - 4 + 4}{2} = -y^2 + 4y$

$$\Rightarrow y^2 - x - 3y + 3 \leq 0 \quad (**)$$

Cộng vế theo vế các BĐT (*) và (**) ta được:

$$x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 9 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 2(y-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

Thử lại: t/m

Vậy HPT có nghiệm $(x; y) = (1; 2)$

Câu 82: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x-1 = \sqrt{(2x-1)^2 - 4y+4} & (1) \\ 3y-6x+25 = 4\sqrt{41-(y-6)^2} & (2) \end{cases}$$

Giải

Phương trình (2) trở thành:

$$6y - 12x = 50 = 8\sqrt{41 - (y-6)^2} \leq \left[16 + (41 - (y-6)^2) \right] = -y^2 + 12y + 21$$

$$\Rightarrow y^2 - 6y - 12x + 29 \leq 0 \quad (*)$$

Phương trình (1) trở thành: $x^4 - 6x^2 + 4y + 4x - 4 = 0 \quad (**)$

$$\text{Từ } (*) \text{(**)} \Rightarrow x^4 - 6x^2 - 8x + y^2 - 2y + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4)^2 + 2(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 0 \Rightarrow x = 2, y = 1$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2, y = 1$

Câu 83: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 2x - 2 = \sqrt{4y - y^2 - 2} \\ 11 - 6x - y = \sqrt{10 - 4x - 2x^2} \end{cases}$$

Giải

Cách 1:

$$\text{Đặt: } x+1 = a; y-2 = b \Rightarrow \text{HPT} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3 = \sqrt{2 - b^2} & (1) \\ 15 - 6a - b = \sqrt{12 - 2a^2} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{12 - 2a^2} \leq \frac{4 + (12 - 2a^2)}{4} = \frac{8 - a^2}{2}.$$

$$\text{*Phương trình (2), ta có: } 15 - 6a - b \leq \frac{8 - a^2}{2} \Rightarrow a^2 - 12a - 2b + 22 \leq 0 \quad (3)$$

$$\text{*Phương trình (1) trở thành: } a^4 - 6a^2 + 9 = 2 - b^2 \Leftrightarrow a^4 - 6a^2 + b^2 + 7 = 0 \quad (4)$$

$$\text{Từ (3)(4)} \Rightarrow a^4 - 5a^2 + b^2 - 12a - 2b + 29 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 4)^2 + 3(a-2)^2 + (b-1)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất } \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Cũng có thể có cách đánh giá khác:

Cách 2:

từ PT(1) áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$x^2 + 2x - 2 = \sqrt{-y^2 - 4y - 2} = \frac{\sqrt{1(-y^2 - 4y - 2)}}{2} \leq \frac{-y^2 - 4y - 2}{2}$$

$$\text{Thu gọn ta có } 2x^2 + 4x + y^2 + 5y - 3 \leq 0 \quad (1)$$

Tiếp tục như vậy cho PT(2) ta có:

$$2x^2 - 20x + 4y + 30 \leq 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 2y + 15 \leq 0 \quad (2)$$

$$3x^2 - 6xy^2 + 6y + 12 \leq 0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2 + (y+3)^2 \leq 0$$

Nghiệm của bất phương trình trên là $\begin{cases} x-1=0 \\ y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

Câu 84: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 2 = \sqrt{5x^2 + 3y - 5} \\ y - 2x + 7 = 4\sqrt{4y - y^2 + 1} \end{cases}$

Giải

Bài này nghiệm $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$. Sau đây sẽ quyết định đánh giá phương trình nào, bài này đánh giá phương trình (2) như sau:

Với nghiệm đã nói thì $\sqrt{4y - y^2 + 1} = 2$ dùng bất đẳng thức AM-GM như sau:

$$y - 2x + 7 = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{4y - y^2 + 1} \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} 4 + \left(\sqrt{4y - y^2 + 1}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 - 3y - 2x + 2 \leq 0 \quad (1)$$

$$\text{Khi đó: } (x^2 + 2)^2 = \left(\sqrt{5x^2 + 3y - 5}\right)^2 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 3y + 9 = 0 \quad (2)$$

Lấy (1)+(2) ta được: $x^4 - x^2 + y^2 - 6y - 2x + 11 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1) + (x - 1)^2 + (y - 3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$$

Câu 85: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - 1 = \sqrt{2(3y^2 - x^4 - x^2)} - 1 \\ 2y^4 + 4y^2 + 10 = 8x\sqrt{2(y+1)} \end{cases}$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2(3y^2 - x^4 - x^2) - 1 \geq 0 \\ x \geq \frac{1}{2}; y + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Ta có:

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } 4x^2 - 4x + 1 = 6y^2 - 2x^4 - 2x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 2(x-1)^2 + 2x^4 + 1 = 6y^2 \Leftrightarrow 6y^2 + 2 = 2(x^2 - 1)^2 + 2(x-1)^2 + 8x^2 \geq 8x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq \sqrt{3y^2 + 1}$$

$$\text{Phương trình (2) trở thành: } 2y^4 + 4y^2 + 10 = 4 \cdot 2x \cdot \sqrt{2(y+1)} \leq 4 \cdot \sqrt{2(y+1)} \cdot \sqrt{2(y+1)(3y^2 + 1)}$$

$$\leq 2(2y + 2 + 3y^2 + 1) = 4y + 4 + 6y^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow y^4 - y^2 - 2y + 2 \leq 0 \Leftrightarrow (y-1)^2(y^2 + 2y + 2) \leq 0 \Leftrightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = y = 1$

Câu 86: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 + (4x-1)^2 = \sqrt[3]{4x(8x+1)} \\ 40x^2 + x = y\sqrt{14x-1} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải

Đây là một đề ra không dễ, tuy nhiên nếu cần mẫn ta có thể có 3 cách sau:

Cách 1:

Điều kiện: $14x \geq 1; y \in \mathbb{R}$

Ta có $\sqrt[3]{4x(8x+1)} + 2y\sqrt{14x-1} = y^2 + (4x-1)^2 + 2(40x^2 + x)$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM-GM ta được:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{4x(8x+1)} + 2y\sqrt{14x-1} &= \sqrt[3]{8x \cdot \frac{(8x+1)}{2} \cdot 1} + 2y\sqrt{14x-1} \\ &\leq \frac{1}{3} \left(8x + \frac{8x+1}{2} + 1 \right) + y^2 + 14x - 1 \\ &\leq y^2 + (4x-1)^2 + 2(40x^2 + x) - \frac{3}{2}(8x-1)^2 \\ &\leq y^2 + (4x-1)^2 + 2(40x^2 + x) \end{aligned}$$

Do đó dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $x = \frac{1}{8}; y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Đây là nghiệm duy nhất của hệ.

Cách 2:

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{14}$

Với điều kiện như thế thì phương trình hai hiển nhiên $y > 0$. Ta có đánh giá sau đây:

$$40x^2 + x = y\sqrt{14x-1} \leq \frac{y^2 + 14x - 1}{2} \Leftrightarrow y^2 \geq 80x^2 - 12x + 1$$

Từ phương trình (1) ta lại có:

$$\sqrt[3]{4(8x+1)} = y^2 + (4x-1)^2 \geq 80x^2 - 12x + 1 + (4x-1)^2 = 2(48x^2 - 10x + 1)$$

Đồng thời $\sqrt[3]{4x(8x+1)} = \sqrt[3]{1 \cdot 1 \cdot (32x^2 + 4x)} \leq \frac{1 + 1 + 32x^2 + 4x}{3}$

Từ đó suy ra $2(48x^2 - 10x + 1) \leq \frac{32x^2 + 4x + 2}{3} \Leftrightarrow 2(8x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $x = \frac{1}{8}; y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Cách 3:

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{14}$

HPT đã cho đươc viết lại thành:
$$\begin{cases} y^2 + 16x^2 - 8x + 1 = \sqrt[3]{4x(8x+1)} \\ 80x^2 + 2x = 2y\sqrt{14x-1} \end{cases}$$

Cộng vế theo vế hai phương trình ta được:

$$\begin{aligned} & (y^2 - 2y\sqrt{14x-1} + 14x-1) + 96x^2 - 20x + 2 = \sqrt[3]{4x(8x+1)} \\ & \Leftrightarrow (y - \sqrt{14x-1})^2 + 96x^2 - 20x + 2 = \sqrt[3]{4x(8x+1)}^{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } VT(1) & \geq 96x^2 - 20x + 2 = \frac{1}{2} [3(8x-1)^2 + 8x+1] \geq \frac{1}{2}(8x+1) \\ & = \frac{1}{6}(16x+8x+1+2) \geq \frac{1}{2} \sqrt[3]{16x(8x+1) \cdot 2} = \sqrt[3]{4x(8x+1)} = VP(1) \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } (x; y) = \left(\frac{1}{8}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Câu 87: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 1 = \sqrt{16 - 2xy - \frac{3}{2}y^2} \\ x + y = \sqrt[3]{9x^2 + 14xy - 42} \end{cases}$$

Giải

$$\text{Áp dụng BĐT AM-GM ta có } x + y = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{9x^2 + 14xy - 42}} \leq \sqrt{9x^2 + 14xy - 38}$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 \leq 9x^2 + 14xy - 38 \Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 - 4x^2 - 6xy + 19 \leq 0 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } (x^2 + 1)^2 = \left(\sqrt{16 - 2xy - \frac{3}{2}y^2} \right)^2 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 2xy + \frac{3}{2}y^2 - 15 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Lấy (1)+(2) ta được: } x^4 - 2x^2 - 4xy + 2y^2 + 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 + 2(x-y)^2 \leq 0 \Rightarrow x = y = \sqrt{2}$$

Câu 88: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 + x - 1 = 2y\sqrt{3x-2} \\ y^2 + 2x^2 - x + 4 = 3\sqrt[3]{4x^2(x+1)} \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow xy \leq 1(*). \text{ Ta có (1)} \Rightarrow 12xy \geq (2\sqrt{xy} + 1)(xy + 2\sqrt{xy} + 1).$$

Từ phương trình đầu của hệ suy ra:

$$\sqrt{xy} = t (t \in [0; 1]) \Rightarrow 12t^2 \geq (2t+1)(t+1)^2 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2 - 5t - 1) \leq 0.$$

Kết hợp với phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$t \in [0; 1] \Rightarrow 2t^2 - 5t - 1 < 0 \Rightarrow t \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1(**).$$

$$\text{Mặt khác sử dụng BĐT AM-GM ta có } 3\sqrt[3]{4x^2(x+1)} \leq 2x^2 + (x+1) + 2 = 2x^2 + x + 3.$$

Suy ra $4x^2 - 3x + 5 \leq 2x^2 + x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(x; y) = (1; 1)$.

Câu 89: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = \sqrt[3]{x(2x+1)} \\ 3x^2 - x + \frac{1}{2} = y\sqrt{x^2 + x} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $x; y > 0$

Ta có: HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = \sqrt[3]{x(2x+1)} \\ 6x^2 - 2x + 1 = 2y\sqrt{x^2 + x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = \sqrt[3]{x(2x+1)} \\ 5x^2 + (x-1)^2 = 2y\sqrt{x^2 + x} \end{cases}$

Mặt khác: $\sqrt[3]{2.4x \cdot (2x+1)} \leq \frac{2x+1+4x+2}{3} = 2x+1$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq \frac{2x+1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 + 2y^2 \leq 2x+1 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 1 + 2y^2 \leq 0$$

Kết hợp lại ta được :

$$2(5x^2 - 3x + 1 - y^2) + 2x^2 - 6x + 1 + 2y^2 \leq 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Câu 90: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{(x^2+1)^3} - 8x^3 = 2\sqrt{2y-1} - 2 \\ y^2 + 1 = 2\sqrt{-9x^3 + 3x + 1} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} y \geq \frac{1}{2} \\ -9x^3 + 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$

Từ (1) ta có: $VP(1) \leq 2y - 1 + 1 - 2 = 2y - 2 \leq y^2 + 1 - 2 = y^2 - 1$

Mà $y^2 - 1 = 2\sqrt{-9x^3 + 3x + 1} - 2$

$$\leq -9x^3 + 3x + 1 + 1 - 2 = -9x^3 + 3x \quad (\text{từ (2)})$$

Suy ra: $\sqrt{(x^2+1)^3} - 8x^3 \leq -9x^3 + 3x \Leftrightarrow \sqrt{(x^2+1)^3} \leq -x^3 + 3x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^3 + 3x \geq 0 (*) \\ (x^2+1)^3 \leq (-x^3 + 3x)^2 (t^*) \end{cases}$$

(**) tương đương: $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 \leq x^6 - 6x^4 + 9x^2 \Leftrightarrow 9x^4 - 6x^2 + 1 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (3x^2 - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Kết hợp (*) thấy $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ thỏa mãn. Khi đó: $y = 1(t/m)$

Vậy HPT có nghiệm: $(x; y) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right)$

Câu 91: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - \frac{1}{2} = \sqrt{3xy - \frac{x^3}{2} - 2y - \frac{7}{4}} \\ y = \sqrt{\frac{2x}{y-x+1}} \end{cases}$$

Giải

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 6xy - x^3 - 4y - \frac{7}{2} \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} \left[(x^2 + 4) + 2x\right]y - x^3 - 4y - \frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2y + 2x^2 - 2xy - 2x + 4 \leq 0 \quad (1)$$

$$y^2(y - x + 1) = 2x \Leftrightarrow y^3 - xy^2 + y^2 - 2x = 0 \quad (2)$$

Lấy (1)+(2) về theo về ta có: $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4 \leq 0$

$$\Leftrightarrow [x^3 + y^3 - xy(x+y)] + (x-y)^2 + (x-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = y = 2$$

Câu 92: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + 3 = \sqrt{(y+1)^2 + 2xy - 2} \\ \frac{y-1}{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{8x - x^2 - 3} \end{cases}$$

Giải

Phương trình đầu : $x^2 + 6x - y^2 - 2y - 2xy + 11 = 0 \quad (1)$

$$y - 2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{8x - x^2 - 3}} \stackrel{\text{AM-GM}}{\leq} \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{9 + 8x - x^2 - 3}$$

$$\Rightarrow 3(y-1)^2 \leq 8x - x^2 - 3 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 3y^2 - 6y + 3 \leq 0 \quad (2)$$

Lấy (1)+(2) ta có: $2x^2 + 2y^2 - 2x - 8y - 2xy + 14 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 + (x-y+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 2 \wedge y = 3$$

Câu 93: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{(x^2+1)^3} - 8x^3 = 2\sqrt{2y-1} - 2 \\ y^2 + 1 = 2\sqrt{-9x^3 + 3x + 1} \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\sqrt{(x^2+1)^3} - 8x^3 = 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2y-1} - 2 \leq \frac{2\left[1 + (\sqrt{2y-1})^2\right]}{2} - 2 = 2y - 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x^2+1)^3} - 8x^3 - 2y + 2 \leq 0 \quad (1)$$

$$y^2 + 1 = 2.1.\sqrt{-9x^3 + 3x + 1} \leq \frac{2 \left[1 + \left(\sqrt{-9x^3 + 3x + 1} \right)^2 \right]}{2} = -9x^3 + 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow 9x^3 - 3x + y^2 - 1 \leq 0 \quad (2)$$

$$\text{Lấy (1) cộng (2): } x^3 - 3x + \sqrt{(x^2+1)^3} + y^2 - 2y + 1 \leq 0 \quad (3)$$

$$\text{Xét } f(x) = x^3 - 3x + \sqrt{(x^2+1)^3} \text{ có } f'(x) = 3x^2 - 3 + \frac{3}{2}\sqrt{x^2+1}.2x = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = x^2(x^2 + 1) \Leftrightarrow -2x^2 + 1 = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} (N) \\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}} (L) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0 \Leftrightarrow \text{Vế trái bất đẳng thức (3)} \geq 0$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{\sqrt{3}}; y = 1$$

Câu 94: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y - 1 = \sqrt{8 - 2y - 5x - x^6} \\ 6 - 2y^2 = \frac{5}{2}(x^6 + 1) \end{cases}$$

Giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} y \geq 1 \\ 8 - 2y - 5x - x^5 \geq 0 \Leftrightarrow x^5 + 5x \leq 8 - 2y \leq x^5 + 5x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } (y-1)^2 = \left(\sqrt{8-2y-5x-x^3} \right)^2 \Leftrightarrow x^8 + 5x + y^2 - 7 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Và } 6 - 2y^2 = \frac{5}{2}(x^6 + 1) \stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} \frac{5}{2} \cdot 2x^3 = 5x^3 \Leftrightarrow -5x^3 - 2y^2 + 6 \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Lấy (1)+(2) ta được: } (x^5 - 5x^3 + 5x - 2) + (1 - y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+x-1)^2 + (1-y^2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Thử lại thấy vô nghiệm.

Câu 95: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x = \sqrt{4y+3} - \sqrt{2y} \\ \sqrt{\frac{2}{x} - 8x + 2\sqrt{1-2x}} = \frac{y}{x} + \frac{1}{4xy} \end{cases}$$

Giải

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$4x = \frac{2y+3}{\sqrt{4y+3}+\sqrt{2y}} \Leftrightarrow x > 0$$

$$VT = \sqrt{\frac{2}{x}-8x} + 2\sqrt{1-2x} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{x}-8x} + 2\sqrt{2x\left(\frac{1}{2x}-1\right)}$$

$$\stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{1}{4} \left[4 + \left(\frac{2}{x} - 8x \right) \right] + 2x + \left(\frac{1}{2x} - 1 \right) = \frac{1}{x}$$

$$VP = \frac{y}{x} + \frac{1}{4xy} \stackrel{1}{4xy} \geq 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{1}{4xy}} = \frac{1}{x}$$

Vậy $VP \geq VT$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}; y = \frac{1}{2}$$

Câu 96: Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 7 = 4\sqrt{3y+1} \\ y^2 + xy = 2\sqrt{3x-2} \end{cases}$$

Giải

Theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$x^2 + 7 = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3y+1} \stackrel{AM-GM}{\leq} 2^2 + (\sqrt{3y+1})^2 = 3y+5 \Leftrightarrow x^2 - 3y + 2 \leq 0 \quad (1)$$

$$y^2 + xy = 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3x-2} \leq 1^2 + (\sqrt{3x-2})^2 = 3x-1 \Leftrightarrow y^2 + xy - 3x + 1 \leq 0 \quad (2)$$

Lấy (1)+(2) ta được: $x^2 + y^2 + xy - 3x - 3y + 3 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{4} + \frac{3}{4}(x+y)^2 - 3(x+y) + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{4} + \frac{3}{4}(x+y-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = y = 1$$

KỸ THUẬT TĂNG GIẢM SOS - HỒ XUÂN HÙNG

Câu 1: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y + x^2 + y = x^3 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Ta có: HPT} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 1 + y^3 = 0 \\ x^2y + x^2 + y = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2+x+1) + y^3 = 0 \\ (x-1)x^2 = y(x^2+1) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} PT^{(1)} \Rightarrow (x-1)y \leq 0 \\ PT^{(2)} \Rightarrow (x-1)y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x-1)y = 0 \Rightarrow (x;y) = (1;0)$$

Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x;y) = (1;0)$

Câu 2: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^3 - 2y^3 - x^2(y+1) + 2(x-1) = 0 \end{cases}$$

Giải

$$\text{Ta có: HPT} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 1 + y^3 = 0 \\ x^3 - x^2 + 2x - 2 = 2y^3 + x^2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2 + x + 1) + y^3 = 0 \\ (x-1)(x^2 + 2) = y(x^2 + 2y^2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \text{PT}^{(1)} \Rightarrow (x-1)y \leq 0 \\ \text{PT}^{(2)} \Rightarrow (x-1)y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x-1)y = 0 \Rightarrow (x; y) = (1; 0)$$

Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 0)$

Kĩ thuật này đánh giá nhân tử:

$$(x - x_0)(y - y_0) = 0$$

- Ở mỗi Phương trình, giả sử $x \rightarrow +\infty$ (hoặc $x \rightarrow \alpha, \beta$ với $x \in [\alpha, \beta]$) để đảm bảo đẳng thức: $y \rightarrow +\infty$ thì $(x - x_0)(y - y_0) \geq 0$; nếu $y \rightarrow -\infty$ thì $(x - x_0)(y - y_0) \leq 0$
- So sánh lượng $(x - x_0)(y - y_0)$ từ 2PT, nếu chúng đối dấu, ta sẽ dùng PP nêu trên.
- Đưa HPT về dạng $\begin{cases} (x - x_0)f_1(x, y) + (y - y_0)f_2(x, y) = 0 \\ (x - x_0)f_3(x, y) = (y - y_0)f_4(x, y) \end{cases}$
- Chứng minh $f_i(x, y) \geq 0$

Kĩ thuật này dựa trên cơ sở: Khi HPT có nghiệm duy nhất, giả sử x tăng một khoảng rất nhỏ, xem xét sự thay đổi tương ứng của y trên mỗi phương trình, nếu sự thay đổi so với nghiệm đúng là không giống nhau x thì ta sẽ suy ra 2 chiều ngược nhau khi so sánh $(x - x_0)(y - y_0)$ với số 0. Thực chất kĩ thuật này có thể gọi là sử dụng điều kiện có nghiệm của bài toán.

Câu 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x^2 + y^2) = y^3 + xy + (x + y)^2 \\ x^3 + y^3 - 2x^2 - y^2 - x + y = 12 \end{cases}$

Giải

Nhận xét:

- $\text{PT}^{(1)}$: Cho $x \rightarrow +\infty$ thì $y \rightarrow +\infty$
- $\text{PT}^{(2)}$: Cho $x \rightarrow +\infty$ thì $y \rightarrow -\infty$
- Nghiệm của HPT: $(x, y) = (3, 2)$

Bài giải:

Ta sẽ biến đổi như sau:

$$\text{Ta có: HPT} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + xy^2 = x^2 + y^2 + 3xy + y^3 \\ (x^3 - 2x^2 + 2x - 6) + (y^3 - y^2 + y - 6) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x^2 + xy + y^2) = (y-2)(x^2 + y^2) \\ (x-3)(x^2 + x + 2) + (y-2)(y^2 + y + 3) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \text{PT}^{(1)} \Rightarrow (x-3)(y-2) \geq 0 \\ \text{PT}^{(2)} \Rightarrow (x-3)(y-2) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow (x-3)(y-2) = 0 \Rightarrow (x; y) = (3; 2)$$

Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 2)$

Hãy thử kiểm tra khả năng áp dụng của nó:

Câu 4: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2\sqrt{x+3} - (y+4)\sqrt{y+3} = 2(x^2 - y - 4) \\ \sqrt{17x+6y+2} + x^3 + y = 7 \end{cases}$$

Giải

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với:

$$x^2(\sqrt{x+3} - 2) = (y+4)(\sqrt{y+3} - 2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x-1)}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{(y+4)(y-1)}{\sqrt{y+3}+2} \Rightarrow (x-1)(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq 1 \end{cases}$$

Khi đó nếu $x, y \geq 1 \Rightarrow \sqrt{17x+6y+2} + x^3 + y \geq 7$.

Nếu $x, y \leq 1 \Rightarrow \sqrt{17x+6y+2} + x^3 + y \leq 7$.

Vậy $x = y = 1$ là nghiệm của hệ phương trình.

Bài tập tương tự
$$\begin{cases} (x^2+1)\sqrt{x+3} + 2(y+1)(y+2) - 2x^2 = (y^2+3y+3)\sqrt{y+1} \\ 26x^3 + 4y + 17\sqrt{x+3} + 6\sqrt{y+1} = 84 \end{cases}$$

Đ/s: $(x; y) = (1; 3)$

Nhận xét: Lời giải này cũng có thể hoàn toàn hiểu theo một nghĩa như sau:

Câu 5: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{x-4} - \sqrt{y-1} = 2 \\ x + \sqrt{12x+y^2} = 19 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: $x \geq 4; y \geq 1$

Từ phương trình thứ nhất, ta có $2\sqrt{x-4} - 4 = \sqrt{y-1} - 2 \Leftrightarrow \frac{2(x-8)}{\sqrt{x-4}+1} = \frac{y-5}{\sqrt{y-1}+2}$

- Xét $x > 8 \Rightarrow y > 5$. Khi đó:

$$VT = x + \sqrt{12x+y^2} < 8 + \sqrt{121} = 19 = VP$$

- Xét $x < 8 \Rightarrow y < 5$. Khi đó:

$$VT = x + \sqrt{12x+y^2} < 8 + \sqrt{121} = 19 = VP$$

Do đó $x = 8; y = 5$. Thử lại thỏa mãn hệ.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 8; y = 5$

Nhận xét: Cách giải này sau này sẽ được khái quát lên một kĩ thuật – kĩ thuật tăng giảm được trình bày ở phần trước

Câu 6: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y^3 + x + y + 3\sqrt{x+y} = 11^{(1)} \\ xy\sqrt{x^2+3} + \sqrt{2y} + \sqrt{y+2} = 0^{(2)} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện:
$$\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Từ phương trình (1), ta có:

$$\begin{aligned} \text{PT}^{(1)} &\Leftrightarrow x^3 + x + 2 + y^3 + y - 10 + 3\sqrt{x+y} - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 2) + (y-2)(y^2 + 2y + 5) + 3 \frac{x+y-1}{\sqrt{x+y}+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 2) + (y-2)(y^2 + 2y + 5) + 3 \frac{(x+1)+(y-2)}{\sqrt{x+y}+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1) \left(x^2 - x + 2 + \frac{3}{\sqrt{x+y}+1} \right) + (y-2) \left(y^2 + 2y + 5 + \frac{3}{\sqrt{x+y}+1} \right) = 0 \\ &\Rightarrow (x+1)(y-2) \leq 0.^{(3)} \end{aligned}$$

Mặt khác, từ phương trình (2), ta có: $(2) \Leftrightarrow x\sqrt{x^2+3} + \sqrt{\frac{2}{y}} + \sqrt{\frac{1}{y} + \frac{2}{y^2}} = 0^{(4)}$ (vì $y=0$ không thỏa mãn hệ phương trình) $\Rightarrow x < 0$. Khi đó:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: PT}^{(4)} &\Leftrightarrow x\sqrt{x^2+3} + 2 + \sqrt{\frac{2}{y}} - 1 + \sqrt{\frac{1}{y} + \frac{2}{y^2}} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2(x^2+3)-2}{x\sqrt{x^2+3}-2} + \frac{\frac{2}{y}-1}{\sqrt{\frac{2}{y}}+1} + \frac{\frac{2}{y^2}+\frac{1}{y}-1}{\sqrt{\frac{2}{y^2}+\frac{1}{y}}+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x^2-1)(x^2+4)}{x\sqrt{x^2+3}-2} + \frac{\frac{2}{y}-1}{\sqrt{\frac{2}{y}}+1} + \frac{\frac{2}{y^2}+\frac{1}{y}-1}{\sqrt{\frac{2}{y^2}+\frac{1}{y}}+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1) \frac{(x-1)(x^2+4)}{x\sqrt{x^2+3}-2} + \left(\frac{2}{y} - 1 \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{y}}+1} + \frac{\frac{1}{y}+1}{\sqrt{\frac{2}{y^2}+\frac{1}{y}}+1} \right) = 0 \Rightarrow (x+1) \left(\frac{2}{y} - 1 \right) \geq 0 \\ (\text{Vì } \frac{(x-1)(x^2+4)}{x\sqrt{x^2+3}-2} > 0 \text{ do } x < 0 ; \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{y}}+1} + \frac{\frac{1}{y}+1}{\sqrt{\frac{2}{y^2}+\frac{1}{y}}+1} > 0 \text{ do } y > 0) \end{aligned}$$

Kết hợp $^{(3)}$ ta có $(x+10)(y-2) = 0$. Khi đó $x = -1$ và $y = 2$.

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (-1; 2)$

Câu 7: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+y)^2 + 12\sqrt{x+y-6} = 4x+3y+37 \\ \sqrt{y^2-12} + 10\sqrt{y} = x\sqrt{x^2y-5y} + 10 \end{cases}$$

Giải

Điều kiện:
$$\begin{cases} x+y \geq 6 \\ y \geq 2\sqrt{3} \\ x^2 \geq 5 \end{cases}$$

Ta có: $x\sqrt{x^2y-5y} + 10 = \sqrt{y^2-12} + 10\sqrt{y} > 10 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x \geq \sqrt{5}$

Ta có:

$$PT^{(1)} \Leftrightarrow (x+y)[(x-3)+(y-4)] + 3(x-3) + 4(y-4) + 12(\sqrt{x+y-6}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(x+y+3+\frac{12}{\sqrt{x+y-6}+1}\right) + (y-4)\left(x+y+16+\frac{12}{\sqrt{x+y-6}+1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(y-4) \leq 0^{(*)}$$

Ta lại có: $PT^{(2)} \Leftrightarrow \sqrt{y-\frac{12}{y}} + 10 = x\sqrt{x^2-5} + \frac{10}{\sqrt{y}}$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{y-\frac{12}{y}}-1\right) - 5\left(\frac{2}{\sqrt{y}}-1\right) = (x\sqrt{x^2-5}-6)$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\frac{4}{y}\right)\left[\frac{y+3}{\sqrt{y-\frac{12}{y}}+1} + \frac{5}{\frac{2}{\sqrt{y}}+1}\right] = (x^2-9) \cdot \frac{x^2+4}{x\sqrt{x^2-5}+6}$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{4}{y}\right)(x^2-9) \geq 0 \Rightarrow (x-3)(y-4) \geq 0^{(**)}$$

Từ $(*)$ và $(**)$ $\Rightarrow (x-3)(y-4) = 0 \Rightarrow x=3; y=4$

Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 4)$

Câu 8: Giải phương trình $(5x-4)\sqrt{2x-3} - (4x-5)\sqrt{3x-2} = 2$

Giải

Điều kiện: $x \geq \frac{3}{2}$

Đặt
$$\begin{cases} \sqrt{2x-3} = u \\ \sqrt{3x-2} = v \end{cases} \left(u, v \geq 0; 0 \leq \frac{u}{v} < \frac{2}{3} \right)$$

Ta sẽ biểu diễn $\begin{cases} 5x-4=\frac{2}{5}u^2+\frac{7}{5}v^2 \\ 4x-5=\frac{7}{5}u^2+\frac{2}{5}v^2 \end{cases}$ và đồng thời: $2v^2-3u^2=5$

Khi đó ta chỉ cần giải hệ PT $\begin{cases} \left(\frac{2}{5}u^2+\frac{7}{5}v^2\right)u+\left(\frac{7}{5}u^2+\frac{2}{5}v^2\right)v=2 \\ 2v^2-3u^2=5 \end{cases}$

Giải HPT ta sử dụng kĩ thuật tăng giảm:

HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\frac{u}{v}\right)^3-7\left(\frac{u}{v}\right)^2+7\left(\frac{u}{v}\right)-2=\frac{10}{v^3} \\ 3\left(\frac{u}{v}\right)^2+\frac{5}{v^2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^3-7a^2+7a-2=10b^{3(1)} \\ 3a^2+5b^2=2^{(2)} \end{cases}$

Ta có: Từ PT⁽¹⁾ $\Rightarrow 2a^3-10a^2+7a=10b^3+5b^2$

$\Rightarrow 2a^3-10a^2+7a-\frac{15}{32}=10b^3+5b^2-\frac{15}{32}$

$\Rightarrow \left(a-\frac{3}{4}\right)\left(2a^2-\frac{17}{2}a+\frac{5}{8}\right)=\left(b-\frac{1}{4}\right)\left(10b^2+\frac{15}{2}b+\frac{15}{8}\right)$

Mà $2a^2-\frac{17}{2}a+\frac{5}{8}>0$ vì $0\leq a<\frac{2}{3}$ và $10b^2+\frac{15}{2}b+\frac{15}{8}>0$

Suy ra $\left(a-\frac{3}{4}\right)\left(b-\frac{1}{4}\right)\geq 0^{(*)}$

Lại có: Từ

PT⁽²⁾ $\Rightarrow 3\left(a^2-\frac{9}{16}\right)+5\left(b^2-\frac{1}{16}\right)=0 \Rightarrow 3\left(a-\frac{3}{4}\right)\left(a+\frac{3}{4}\right)+5\left(b-\frac{1}{4}\right)\left(b+\frac{1}{4}\right)=0$

Suy ra $\left(a-\frac{3}{4}\right)\left(b-\frac{1}{4}\right)\leq 0^{(**)}$

Từ ^(*) và ^(**) suy ra $\left(a-\frac{3}{4}\right)\left(b-\frac{1}{4}\right)=0 \Rightarrow x=6$

Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=6$

Câu 9: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x-3)^3=2+\sqrt{y^3+3y} \\ 3\sqrt{x-3}=\sqrt{y^2+8y} \end{cases}$

Giải

Điều kiện: $x\geq 3$, dễ dàng suy ra $y\geq 0$.

Đặt $x-3=a(a\geq 0)$. HPT đã cho trở thành:

$\begin{cases} \sqrt{y^3+3y}+2=(a+3)a^{3(1)} \\ y^2+8y=9a^{(2)} \end{cases}$

Tuy nhiên ta nhận thấy ở cả 2 phương trình: x, y cùng tăng hoặc cùng giảm.

Vì vậy ta sẽ sử dụng PT hệ quả có được sự chênh lệch tăng giảm:

- Từ $PT^{(2)} \Rightarrow y^2 + 8y - 9 = 9a - 9 \Rightarrow (y-1)(y+9) = 9(a-1)$ mà $y \geq 0 \Rightarrow (y-1)(a-1) \geq 0^{(*)}$
- Ta có: $9.PT^{(1)} - 2PT^{(2)} \Rightarrow 9(\sqrt{y^3 + 3y} + 2) - 2(y^2 + 8y) = 9(a+3)a^3 - 18a$
 $\Leftrightarrow 2(y^2 + 8y) - 9\sqrt{y^3 + 3y} + 9a^4 + 27a^3 - 18a - 18 = 0$
 $\Leftrightarrow \frac{4(y^2 + 8y)^2 - 81(y^3 + 3y)}{2(y^2 + 8y) + 9\sqrt{y^3 + 3y}} + 9a^4 + 27a^3 - 18a - 18 = 0$
 $\Leftrightarrow \frac{y(y-1)(4y^2 - 13y + 243)}{2(y^2 + 8y) + 9\sqrt{y^3 + 3y}} + 9(a-1)(a^3 + 4a^2 + 4a + 2) = 0$

Do $a, y \geq 0 \Rightarrow (y-1)(a-1) \leq 0^{(**)}$

Kết hợp $(*)^{(*)} \Rightarrow (a-1)(y-1) = 0 \Rightarrow a = y = 1 \Rightarrow x = 4$

Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x; y) = (4; 1)$

Bài tương tự. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(x-3)^3 = 2 + \sqrt{y^3 + 3y^2} \\ 3\sqrt{x-3} = \sqrt{y^2 + 8y} \end{cases}$$

Câu 10: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{5x-6} - \frac{x}{2} = \sqrt{y^4 - 4y^2 + 1} + \frac{y}{4} \\ x^2 - x - 2 = \sqrt{y^3 + 8} \end{cases}$$

Giải

Điều kiện: Ta có thể suy ra được điều kiện:
$$\begin{cases} x \geq \frac{6}{5} \\ y \geq -2 \end{cases}$$

Ta có: $PT^{(2)} : x^2 - x - 2 = \sqrt{y^3 + 8} \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = \sqrt{y^3 + 8} - 4$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+2) = \frac{y^3 - 8}{\sqrt{y^3 + 8} + 4}$$

$$\Rightarrow (x-3)(y^3 - 8) \geq 0 \Rightarrow (x-3)(y-2) \geq 0^{(*)}$$

Ta có: $PT^{(2)} - 2.PT^{(1)} \Rightarrow x^2 - 2 - 2\sqrt{5x-6} = \sqrt{y^3 + 8} - 2\sqrt{y^4 - 4y^2 - 4} - \frac{y}{2}$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3 - 2\sqrt{5x-6}) = (\sqrt{y^3 + 8} - 2\sqrt{y^4 - 4y^2 - 4}) - \frac{1}{2}(y-2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4 - 6x^2 - 20x + 33}{x^2 - 3 + 2\sqrt{5x-6}} + \frac{4y^4 - y^3 - 16y^2 + 8}{\sqrt{y^3 + 8} + 2\sqrt{y^4 - 4y^2 - 4}} + \frac{1}{2}(y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x^3 + 3x^2 + 3x - 11)}{x^2 - 3 + 2\sqrt{5x-6}} + \frac{(y-2)(4y^3 + 7y^2 - 2y + 4)}{\sqrt{y^3 + 8} + 2\sqrt{y^4 - 4y^2 - 4}} + \frac{1}{2}(y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \cdot \frac{x^3+3x^2+3x-11}{x^2-3+2\sqrt{5x}-6} + (y-2) \left[\frac{4y^3+7y^2-2y+4}{\sqrt{y^3+8}+2\sqrt{y^4-4y^2-4}} + \frac{1}{2} \right] = 0$$

Do $y \geq -2 \Rightarrow 4y^3+7y^2-2y+4 > 0 \Rightarrow (x-3)(y-2) \leq 0^{(**)}$

Kết hợp $(*)$, $(**)$ $\Rightarrow (x-3)(y-2) = 0 \Rightarrow (x; y) = (3; 2)$

Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x; y) = (3; 2)$

Câu 11: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x\sqrt{x-y} + y\sqrt{x+y} = xy \\ x\sqrt{x-1} + y\sqrt{y-1} = x+y \end{cases}$$

Giải

Nhận xét: Nghiệm duy nhất $x = y = 2$, từ $PT^{(2)} \Rightarrow (x-2)(y-2) \leq 0$

Vậy ta chỉ cần chứng minh từ $PT^{(1)} \Rightarrow (x-2)(y-2) \geq 0$

Điều này đúng! Nhưng không dễ, hơn nữa cũng không cần khó khăn như vậy khi khai thác thêm từ $x \geq y \Rightarrow x \geq 2 \geq y$

Điều kiện: $x \geq y \geq 1$

Ta có: $PT^{(2)} : x\sqrt{x-1} + y\sqrt{y-1} = x+y$

$$\Leftrightarrow x(\sqrt{x-1}-1) + y(\sqrt{y-1}-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{y(y-2)}{\sqrt{y-1}+1} = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(y-2) \leq 0 \text{ mà } x \geq y \Rightarrow x \geq 2 \geq y \geq 1$$

Ta có: $PT^{(1)} \Leftrightarrow x\sqrt{x-y} + y\sqrt{x+y} = xy$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x+y} + [x\sqrt{x-y} - \sqrt{x+y}(x-y)] = xy$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}(x - \sqrt{x+y} \cdot \sqrt{x-y}) = xy$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x+y} + \frac{1}{2}\sqrt{x-y}(\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y})^2 = xy$$

$$\Rightarrow x\sqrt{x+y} \leq xy \Leftrightarrow \sqrt{x+y} \leq y \Leftrightarrow x \leq y^2 - y$$

$$\text{Mà } y^2 - y \leq 2 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2$$

Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 2)$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Phương pháp hàm số chinh phục giải toán phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, bất đẳng thức, giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất – Nguyễn Đình Thành Công
2. Bí quyết chinh phục kỳ thi THPT Quốc Gia 2 trong 1 chủ đề phương trình, bất phương trình, hệ phương trình – Phạm Bình Nguyên, Nguyễn Ngọc Duyệt
3. Luyện siêu tư duy casio chuyên đề phương trình, bất phương trình, hệ phương trình đại số và vô tỷ - Đoàn Trí Dũng, Hà Hữu Hải, Nguyễn Tấn Siêng, Hồ Xuân Trọng
4. Tư duy logic tìm tòi lời giải hệ phương trình – Mai Xuân Vinh
5. Những điều cần biết luyện thi quốc gia kỹ thuật giải nhanh hệ phương trình – Đặng Thành Nam
6. Phương pháp đánh giá nhân tử trong giải toán phương trình, bất phương trình, hệ phương trình – Đoàn Trí Dũng, Hà Hữu Hải
7. Tuyển chọn 410 hệ phương trình hay và đặc sắc – Nguyễn Minh Tuấn
8. Tư duy sáng tạo tìm tòi lời giải PT – BPT – HPT đại số và vô tỷ – Lê Văn Đoàn
9. Phương pháp U V T W phân tích nhân tử phương trình vô tỷ – Bùi Thế Việt
10. Sáng Tạo Và Giải Phương Trình, Hệ Phương Trình, Bất Phương Trình – Nguyễn Tài Chung
11. Phương trình và hệ phương trình – Diễn đàn MathScope
12. Tuyển chọn các bài toán phương trình vô tỷ - Đoàn Quốc Việt
13. Tuyển chọn các bài toán phương trình đặc sắc – Diễn đàn K2pi