

Đề gồm có : 01 trang

Câu 1 (4 điểm). Cho hàm số $y = x^2 - (2m - 3)x - 2m + 2$ (1)

- 1) Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 0$.
- 2) Xác định m để đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng $y = 3x - 1$ tại hai điểm A, B phân biệt sao cho $\triangle OAB$ vuông tại O (với O là gốc toạ độ).

Câu 2 (2 điểm). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

$$y = \sqrt{x - m + 1} + \frac{2x}{\sqrt{-x + 2m}} \text{ xác định trên khoảng } (-1; 3).$$

Câu 3 (5 điểm). Giải các phương trình sau

- 1) $\sqrt{x^2 - 3x - 1} + 7 = 2x$
- 2) $\sqrt{3x + 1} + \sqrt{4x - 3} = \sqrt{5x + 4}$
- 3) $\sqrt{3x + 3} - \sqrt{5 - 2x} - x^3 + 3x^2 + 10x - 26 = 0$.

Câu 4 (2 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + x^3y - xy^2 + xy - y = 1 \\ x^4 + y^2 - xy(2x - 1) = 1 \end{cases}$$

Câu 5 (3 điểm). Cho tam giác ABC có $AB = 1$, $AC = x$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{NB} = -2\overrightarrow{NA}$. Tìm x để AM và CN vuông góc với nhau.

Câu 6 (2 điểm). Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng với G là trọng tâm tam giác ABC ta có

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{1}{6}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

Câu 7 (2 điểm). Cho $x, y, z \in [2018; 2019]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$f(x, y, z) = \frac{|2018 \cdot 2019 - xy|}{(x + y)z} + \frac{|2018 \cdot 2019 - yz|}{(y + z)x} + \frac{|2018 \cdot 2019 - zx|}{(z + x)y}.$$

----- Hết -----

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:
Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu	Nội dung	Điểm
1(4đ)	1) Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 0$.	2,0
	2) Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 2mx - 2m + 3 = 0(*)$ * Tìm được điều kiện để đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại A, B là $m < -3$ hoặc $m > 1$	0.5
	* Gọi x_1, x_2 là các nghiệm pt (*), ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = -2m + 3 \end{cases}$	1
	* $A(x_1; 3x_1 - 1), B(x_2; 3x_2 - 1)$. Tính được $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow 10x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 1 = 0$ $\Leftrightarrow -26m + 31 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{31}{26}$ Kết luận $m = \frac{31}{26}$	0.5
2(2đ)	Hàm số xác định khi $\begin{cases} x - m + 1 \geq 0 \\ -x + 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m - 1 \\ x < 2m \end{cases}$ Tập xác định của hàm số là $D = [m - 1; 2m)$ với điều kiện $m - 1 < 2m \Leftrightarrow m > -1$.	1
	Hàm số xác định trên $(-1; 3)$ khi và chỉ khi $(-1; 3) \subset [m - 1; 2m)$ $\Leftrightarrow m - 1 \leq -1 < 3 \leq 2m \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m > \frac{3}{2} \end{cases}$. Vô nghiệm. Kết luận không có giá trị của m	1

	1) $\sqrt{x^2 - 3x - 1} + 7 = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 7 \geq 0 \\ x^2 - 3x - 1 = (2x - 7)^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7}{2} \\ x = 5 \\ x = \frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$ Kết luận $S = \{5\}$.	2
3(5đ)	2) $\sqrt{3x + 1} + \sqrt{4x - 3} = \sqrt{5x + 4}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ 4x - 3 \geq 0 \\ 3x + 1 + 4x - 3 + 2\sqrt{(3x + 1)(4x - 3)} = 5x + 4 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ \sqrt{(3x + 1)(4x - 3)} = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \leq x \leq 3 \\ 11x^2 + x - 12 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} \leq x \leq 3 \\ x = 1 \\ x = -\frac{12}{11} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ Kết luận Kết luận $S = \{1\}$.	2
	3) $\sqrt{3x + 3} - \sqrt{5 - 2x} - x^3 + 3x^2 + 10x - 26 = 0$. Đk: $-1 \leq x \leq \frac{5}{2}$. Phương trình viết lại:	1

	$(\sqrt{3x+3}-3)-(\sqrt{5-2x}-1)-(x-2)(x^2-x-12)=0$ $\Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2(x-2)}{\sqrt{5-2x}+1} - (x-2)(x^2-x-12)=0$ $\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2}{\sqrt{5-2x}+1} - x^2+x+12\right)=0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{3}{\sqrt{3x+3}+3} + \frac{2}{\sqrt{5-2x}+1} - x^2+x+12=0(*) \end{cases}$ Do $-x^2+x+12>0, \forall x \in [-1, \frac{5}{2}]$ Nên (*) vô nghiệm. Kết luận $S = \{2\}$.	
	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+x^3y-xy^2+xy-y=1(1) \\ x^4+y^2-xy(2x-1)=1(2) \end{cases} (*)$	
	$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-y)+xy(x^2-y)+xy=1 \\ (x^2-y)^2+xy=1 \end{cases}$	1
	Đặt $\begin{cases} a=x^2-y \\ b=xy \end{cases}$. Hệ trở thành: $\begin{cases} a+ab+b=1 \\ a^2+b=1 \end{cases} (*)$ Hệ (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} a^3+a^2-2a=0 \\ b=1-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a^2+a-2)=0 \\ b=1-a^2 \end{cases}$ Từ đó tìm ra $(a; b) \in \{(0; 1); (1; 0); (-2; -3)\}$	1
4(2đ)	Với $(a; b) = (0; 1)$ ta có hệ $\begin{cases} x^2-y=0 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1.$ Với $(a; b) = (1; 0)$ ta có hệ $\begin{cases} x^2-y=1 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (0; -1); (1; 0); (-1; 0).$ Với $(a; b) = (-2; -3)$ ta có hệ $\begin{cases} x^2-y=-2 \\ xy=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{x} \\ x^3+2x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{3}{x} \\ (x+1)(x^2-x+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1; y=3.$ Kết luận: Hệ có 5 nghiệm $(x; y) \in \{(1; 1); (0; -1); (1; 0); (-1; 0); (-1; 3)\}.$	2

5(3đ)	Ta có: đk $x > 0$ $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = -2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ Tương tự ta cũng có: $3\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ Vậy: $AM \perp CN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CN} = 0 \Leftrightarrow (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = 0$ $\Leftrightarrow (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow 2AB^2 - 3AC^2 - 5\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ $\Leftrightarrow 4 - 6x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{-4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$	3
6(2đ)	Ta có $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = GA \cdot GB \cdot \cos AGB = GA \cdot GB \cdot \frac{GA^2 + GB^2 - AB^2}{2GA \cdot GB}$ $= \frac{GA^2 + GB^2 - AB^2}{2} = \frac{\frac{4m_a^2}{9} + \frac{4m_b^2}{9} - AB^2}{2}$ Tương tự ta có 2 đẳng thức như trên. Sau đó cộng lại ta được $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} =$ $\frac{\frac{4m_a^2}{9} + \frac{4m_b^2}{9} - AB^2}{2} + \frac{\frac{4m_b^2}{9} + \frac{4m_c^2}{9} - BC^2}{2} + \frac{\frac{4m_c^2}{9} + \frac{4m_a^2}{9} - CA^2}{2}$ $= \frac{\frac{8}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) - (AB^2 + BC^2 + CA^2)}{2}$ Sử dụng công thức đường trung tuyến ta được đpcm.	2

7(2đ)	Ta chứng minh: $\forall x, y, z \in [a; b], (a > 0)$ ta luôn có $\frac{ ab - xy }{x + y} \leq \frac{b - a}{2}$ $\Leftrightarrow 4(ab - xy)^2 \leq (x + y)^2(b - a)^2$ $\Leftrightarrow [2ab - 2xy - (x + y)(b - a)][2ab - 2xy + (x + y)(b - a)] \leq 0$ $\Leftrightarrow [b(2a - x - y) + x(a - y) + y(a - x)] \times$ $[a(2b - x - y) + x(b - y) + y(b - x)] \leq 0 (\text{đúng})$ Vậy ta có $\frac{ ab - xy }{(x + y)z} \leq \frac{b - a}{2z} \leq \frac{b - a}{2a}$. Dấu “=” khi $x = y = a, z = a$ hay $x = y = z = a$ Áp dụng ta có: $f(x, y, z) \leq \frac{b - a}{2a} + \frac{b - a}{2a} + \frac{b - a}{2a} = \frac{3(b - a)}{2a}$ Dấu “=” khi $x = y = z = a$	1
	Thay $a = 2018, b = 2019$, ta được $\max f(x, y, z) = \frac{3}{4036} \text{ khi } x = y = z = 2018$	1

Lưu ý: Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.