

Mục lục

1	Các bất đẳng thức cổ điển	3
1	Bất đẳng thức AM - GM	3
I.	Bất đẳng thức AM - GM	3
II.	Một số ví dụ áp dụng	5
III.	Bài tập	13
2	Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz	19
I.	Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng đa thức	19
II.	Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng phân thức	19
III.	Các ví dụ minh họa	19
IV.	Bài tập	27
3	Một số bất đẳng thức khác	31
I.	Bất đẳng thức Schur	31
1.	Bất đẳng thức Schur	31
2.	Các trường hợp đặc biệt	31
3.	Bất đẳng thức Schur mở rộng	31
4.	Các ví dụ	31
II.	Bất đẳng thức Holder	34
1.	Bất đẳng thức Holder	34
2.	Trường hợp đặc biệt	34
3.	Ví dụ minh họa	34
III.	Bất đẳng thức Chebyshev	35
1.	Bất đẳng thức Chebyshev	35
2.	Ví dụ minh họa	36
IV.	Bài tập	36
4	Phương pháp quy nạp	38
I.	Lý thuyết	38
II.	Ví dụ minh họa	38
5	Phương pháp phân tích bình phương SOS	42
I.	Lý thuyết	42
1.	Một số tiêu chuẩn đánh giá	42
2.	Một số biểu diễn cơ sở	42
II.	Các ví dụ	43
III.	Bài tập	46
6	Phương pháp dồn biến	48
I.	Lý thuyết	48
II.	Ví dụ minh họa	48
III.	Bài tập	51
2	Các phương pháp chứng minh bất đẳng thức hiện đại	53
1	Phương pháp p, q, r	54
I.	Lý thuyết	54
1.	Bất đẳng thức Schur	54

	2.	Một số biểu diễn đa thức đối xứng ba biến qua p, q, r	54
	3.	Một số đánh giá giữa p, q, r	55
	II.	Một số ví dụ	55
	III.	Bài tập	56
2		Phương pháp sử dụng tiếp tuyến và cát tuyến	58
	I.	Lý thuyết	58
	1.	Hàm lồi - Dấu hiệu hàm lồi	58
	2.	Bất đẳng thức tiếp tuyến - Bất đẳng thức cát tuyến	58
	II.	Các ví dụ minh họa	59
	III.	Bài tập	66
3		Một số chuyên đề	68
1		Ứng dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc ba trong chứng minh bất đẳng thức	68
	I.	Lý thuyết	68
	1.	Mở đầu	68
	2.	Một số kết quả	68
	II.	Ví dụ minh họa	70
	III.	Bài tập	74
2		Bài toán tìm hằng số tốt nhất trong bất đẳng thức	75
	I.	Lý thuyết	75
	II.	Ví dụ minh họa	75
	III.	Bài tập	82
1		Các bất đẳng thức cổ điển	86
1		Bất đẳng thức AM-GM	86
2		Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz	109
3		Một số bất đẳng thức khác	124
2		Một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức	129
1		Phương pháp quy nạp	129
2		Phương pháp phân tích bình phương SOS	130
3		Phương pháp dồn biến	135
4		Phương pháp p, q, r	148
5		Phương pháp tiếp tuyến và cát tuyến	150
3		Một số chuyên đề	156
1		Ứng dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc ba	156
2		Bài toán tìm hằng số tốt nhất	159

Chương 1

Các bất đẳng thức cổ điển

§1. Bất đẳng thức AM - GM

Bất đẳng thức $AM - GM$ là bất đẳng thức cổ điển được sử dụng nhiều trong các bài toán chứng minh bất đẳng thức. Ta biết trung bình cộng của n số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ là số $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ và trung bình nhân của n số đó là $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ (với điều kiện là $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ tồn tại). Bất đẳng thức $AM - GM$ cho chúng ta đánh giá giữa trung bình cộng của các số thực không âm và trung bình nhân của chúng. Cụ thể như sau:

I. Bất đẳng thức AM - GM

Định lý 1. Cho n số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$. ta có

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Chứng minh. Có nhiều cách để chứng minh bất đẳng thức $AM - GM$, dưới đây ta sẽ chứng minh bất đẳng thức $AM - GM$ bằng phương pháp quy nạp.

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức $AM - GM$ cho trường hợp $n = 2$. Tức là, cần chứng minh

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2} \Leftrightarrow (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2$.

Tiếp theo ta chứng minh cho trường hợp $n = 4$. Tức là cần chứng minh

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4}.$$

Áp dụng trường hợp $n = 2$ ta có

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_2}$$

và

$$\frac{a_3 + a_4}{2} \geq \sqrt{a_3 \cdot a_4}.$$

Do đó

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}.$$

Nên trường hợp $n = 4$ được chứng minh.

Tiếp đến ta chứng minh trường hợp $n = 3$, tức là chứng minh

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}$$

Đặt $a_4 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$. Áp dụng cho trường hợp $n = 4$ ta có

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4},$$

hay

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}}$$

Suy ra

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} \text{ (đpcm).}$$

Để chứng minh cho trường hợp tổng quát ta chứng minh theo hai bước sau:

Bước 1: Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = 2^m$

+) Với $m = 1$, ta có $n = 2$ nên bất đẳng thức đúng với $m = 1$

+) Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = 2^{m-1}$, ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = 2^m$.

Tức là

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{m-1}} + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}. \quad (1)$$

Đặt

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{m-1}}}{2^{m-1}}, y = \frac{a_{2^{m-1}+1} + a_{2^{m-1}+2} + \cdots + a_{2^m}}{2^{m-1}}$$

Theo giả thiết quy nạp ta có

$$x \geq \sqrt[2^{m-1}]{a_1 a_2 \cdots a_{2^{m-1}}}, y \geq \sqrt[2^{m-1}]{a_{2^{m-1}+1} \cdots a_{2^m}}.$$

Áp dụng cho trường hợp $n = 2$ ta có:

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

hay

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^{m-1}} + a_{2^{m-1}+1} + \cdots + a_n}{2^m} \geq \sqrt[2^m]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

Hay (1) được chứng minh.

Bước 2: Ta chứng minh nếu bất đẳng thức đúng với $n \geq 2$ thì cũng đúng với $n - 1$

Gả sử

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

Ta chứng minh

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1}}.$$

Thật vậy: Đặt $a_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho n số ta có

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

hay

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \cdot \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}}.$$

Suy ra

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1}} \text{ (đpcm).}$$

Từ hai bước trên ta có bất đẳng thức AM – GM được chứng minh.

Hệ quả 1. Cho các số thực dương $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Ta có

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

II. Một số ví dụ áp dụng

Ví dụ 1.1. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a^5 + a^5 + 1 + 1 + 1 \geq 3a^2 \text{ hay } 2a^5 + 3 \geq 3a^2.$$

Tương tự

$$2b^5 + 3 \geq 3b^2 \text{ và } 2c^5 + 3 \geq 3c^2.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Nhận xét 1. Ta có bài toán tổng quát như sau:

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$ (hoặc $abc = 1$) và $m, n \in \mathbb{N}, m \geq n$. Khi đó

$$a^m + b^m + c^m \geq a^n + b^n + c^n \quad (1).$$

Bất đẳng thức (1) còn đúng khi m, n là các số hữu tỉ dương. Và ta có thể tổng quát 3 biến thành k biến.

Ví dụ 1.2. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a + 4b + 9c = 6$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{1}{6}.$$

Xét x, y, z là các số thực dương. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a^3 + 2x^3 = a^3 + x^3 + x^3 \geq 3x^2a,$$

đẳng thức xảy ra khi $a = x$.

Tương tự ta cũng có:

$$b^3 + 2y^3 \geq 3y^2b, \quad c^3 + 2z^3 \geq 3y^2c.$$

Đẳng thức xảy ra khi $b = y, c = z$. Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3(x^2a + y^2b + z^2c) - 2(x^3 + y^3 + z^3).$$

Ta chọn x, y, z sao cho

$$\begin{cases} x + 4y + 9z = a + 4b + 9c = 6 \\ \frac{x^2}{1} = \frac{y^2}{4} = \frac{z^2}{9} = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Do đó

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3t^2(a + 4b + 9c) - 2(x^3 + y^3 + z^3) = \frac{1}{6}.$$

Ví dụ 1.3. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a^3 + b^3 + 1 \geq 3ab$$

$$b^3 + c^3 + 1 \geq 3bc$$

$$c^3 + a^3 + 1 \geq 3ca.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Ví dụ 1.4. Cho các số thực dương a, b, c có tổng bình phương bằng 3. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 3.$$

Gọi P là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh, ta có

$$\begin{aligned} P^2 &= \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \right)^2 \\ &= \frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{c^2b^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} + 2(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{c^2b^2}{a^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{c^2b^2}{a^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2b^2}{c^2} + \frac{c^2a^2}{b^2} \right) + 6 \\ &\geq b^2 + c^2 + a^2 + 6 = 9. \end{aligned}$$

Suy ra $P \geq 3$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 1.5. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = abc$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{a^3} \geq 1.$$

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$abc \left(\frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{a^3} \right) \geq a + b + c.$$

Hay

$$\frac{a^2c}{b^2} + \frac{b^2a}{c^2} + \frac{c^2b}{a^2} \geq a + b + c. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho ba số ta được :

$$\frac{a^2c}{b^2} + \frac{b^2a}{c^2} + c \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2c}{b^2} \cdot \frac{b^2a}{c^2} \cdot c} = 3a.$$

Tương tự :

$$\frac{b^2a}{c^2} + \frac{c^2b}{a^2} + a \geq 3b ; \frac{c^2b}{a^2} + \frac{a^2c}{b^2} + b \geq 3c.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có được bất đẳng thức (1).

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 1.6. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^5}{b^2} + \frac{b^5}{c^2} + \frac{c^5}{a^2} \geq a^3 + b^3 + c^3.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si :

$$\frac{a^5}{b^2} + ab^2 \geq 2\sqrt{\frac{a^5}{b^2} ab^2} = 2a^3.$$

Tương tự :

$$\frac{b^5}{c^2} + bc^2 \geq 2b^3; \frac{c^5}{a^2} + ca^2 \geq 2c^3.$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên lại với nhau ta được :

$$\frac{a^5}{b^2} + \frac{b^5}{c^2} + \frac{c^5}{a^2} \geq a^3 + b^3 + c^3 + (a^3 + b^3 + c^3 - ab^2 - bc^2 - ca^2).$$

Nên ta cần chứng minh :

$$a^3 + b^3 + c^3 - ab^2 - bc^2 - ca^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq ab^2 + bc^2 + ca^2. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si :

$$a^3 + b^3 + b^3 \geq 3\sqrt[3]{a^3 b^3 b^3} = 3ab^2 \Rightarrow a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2$$

Tương tự :

$$b^3 + 2c^3 \geq 3bc^2; c^3 + 2a^3 \geq 3ca^2.$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên lại với nhau ta có (1).

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 1.7. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{b^2(c+a)} + \frac{b^4}{c^2(a+b)} + \frac{c^4}{a^2(b+c)} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{a^4}{b^2(c+a)} + \frac{b}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c+a}{4} \geq 2a$$

hay

$$\frac{a^4}{b^2(c+a)} + b + \frac{c+a}{4} \geq 2a.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{b^4}{c^2(a+b)} + c + \frac{a+b}{4} \geq 2b \text{ và } \frac{c^4}{a^2(b+c)} + a + \frac{b+c}{4} \geq 2c.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta có đpcm.

Ví dụ 1.8 (BĐT Nesbit cho 3 số). Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) \geq \frac{9}{2}$$

Hay

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{2} \quad (1).$$

Ta có

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+b+c+c+a} = \frac{9}{2(a+b+c)}$$

Nên (1) đúng.

Ví dụ 1.9. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 30.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} ab+bc+ca &\leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} &\geq \frac{9}{ab+bc+ca} \\ \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} &\geq \frac{9}{(a+b+c)^2} = 9. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} VT &\geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9}{ab+bc+ca} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{7}{ab+bc+ca} \geq 9 + \frac{7}{\frac{1}{3}} = 30. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 1.10. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn : $xy + yz + zx = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \frac{3}{2}.$$

Ta có:

$$\sqrt[3]{xyz(x+y)(y+z)(z+x)} \leq \frac{x(y+z) + y(z+x) + z(x+y)}{3} = 2.$$

Suy ra

$$\frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \frac{xyz}{2}$$

Do đó

$$VT \geq \frac{1}{xyz} + \frac{xyz}{2} \geq \frac{1}{2xyz} + \frac{xyz}{2} + \frac{1}{2xyz} \geq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 1.11. (IMO 2012) Cho $n \geq 3$ và các số thực dương $a_2, a_3, \dots, a_n$ thỏa mãn $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$(1 + a_k)^k = \left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k-1} + \cdots + \frac{1}{k-1} + a_k \right)^k \geq \frac{k^k a_k}{(k-1)^{k-1}}.$$

Suy ra

$$(1 + a_2)^2 \cdot (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n \geq \frac{2^2}{1^1} \cdot \frac{3^3}{2^2} \cdot \frac{4^4}{3^3} \cdots \frac{n^n}{(n-1)^n} a_1 a_2 \cdots a_n = n^n.$$

Ta thấy không có đẳng thức xảy ra. Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 1.12. Cho các số thực dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$1 + \frac{3}{a+b+c} \geq \frac{6}{ab+bc+ca}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$ab + bc + ca + \frac{3(ab + bc + ca)}{a + b + c} \geq 6. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$ab + bc + ca + \frac{3(ab + bc + ca)}{a + b + c} \geq 2\sqrt{\frac{3(ab + bc + ca)^2}{a + b + c}}.$$

Mặt khác

$$(ab + bc + ca)^2 \geq 3(ab \cdot bc + bc \cdot ca + ca \cdot ab) = 3abc(a + b + c) = 3(a + b + c).$$

Suy ra

$$ab + bc + ca + \frac{3(ab + bc + ca)}{a + b + c} \geq 6.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 1.13. (Moldova TST 2014) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2} + \frac{ca}{c^2 + a^2} \geq \frac{9}{2}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + \frac{2ab}{a^2 + b^2} + \frac{2bc}{b^2 + c^2} + \frac{2ca}{c^2 + a^2} \geq 9 \quad (1).$$

Ta có $x^3 + y^3 \geq x^2y + y^2x$ với mọi $x, y > 0$ nên

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq \frac{c(a^2 + b^2)}{2} + \frac{b(c^2 + a^2)}{2} + \frac{a(b^2 + c^2)}{2}$$

Suy ra

$$VT(1) \geq \left(\frac{c(a^2 + b^2)}{2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2} \right) + \left(\frac{b(c^2 + a^2)}{2} + \frac{2bc}{b^2 + c^2} \right) + \left(\frac{a(b^2 + c^2)}{2} + \frac{2ca}{c^2 + a^2} \right) + 3abc \geq 9.$$

Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 1.14. Chứng minh rằng mỗi số thực dương a, b, c ta luôn có:

$$\frac{ab}{a + 3b + 2c} + \frac{bc}{b + 3c + 2a} + \frac{ca}{c + 3a + 2b} \leq \frac{a + b + c}{6}.$$

Ta có :

$$\frac{ab}{a + 3b + 2c} = \frac{ab}{(a + c) + (b + c) + 2b} \leq \frac{ab}{9} \cdot \left(\frac{1}{a + c} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{2b} \right).$$

Tương tự :

$$\frac{bc}{b + 3c + 2a} \leq \frac{bc}{9} \left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{a + c} + \frac{1}{2c} \right), \quad \frac{ac}{c + 3a + 2b} \leq \frac{ac}{9} \left(\frac{1}{b + c} + \frac{1}{a + b} + \frac{1}{2a} \right).$$

Cộng vế theo vế ta được

$$\frac{ab}{a + 3b + 2c} + \frac{bc}{b + 3c + 2a} + \frac{ca}{c + 3a + 2b} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{bc + ac}{a + b} + \frac{bc + ab}{a + c} + \frac{ab + ac}{b + c} \right) + \frac{1}{18} (a + b + c).$$

Hay

$$\frac{ab}{a + 3b + 2c} + \frac{bc}{b + 3c + 2a} + \frac{ca}{c + 3a + 2b} \leq \frac{1}{9} (a + b + c) + \frac{1}{18} (a + b + c) = \frac{a + b + c}{6}.$$

Ví dụ 1.15. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2 + 3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2 + 3}} + \frac{ca}{\sqrt{b^2 + 3}} \leq \frac{3}{2}.$$

Ta có

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 = 9 \Rightarrow ab + bc + ca \leq 3$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{c^2 + 3}} \leq \frac{1}{\sqrt{c^2 + ab + bc + ca}} = \frac{1}{\sqrt{(a + c)(b + c)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a + c} + \frac{1}{b + c} \right).$$

Do đó:

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2 + 3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{a + c} + \frac{ab}{b + c} \right)$$

Tương tự:

$$\frac{bc}{\sqrt{a^2 + 3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{bc}{a + b} + \frac{bc}{a + c} \right) \text{ và } \frac{ca}{\sqrt{b^2 + 3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{ca}{b + a} + \frac{ca}{b + c} \right)$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta có:

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2 + 3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2 + 3}} + \frac{ca}{\sqrt{b^2 + 3}} \leq \frac{1}{2} (a + b + c) = \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 1.16. (IMO 2005) Cho các số thực dương x, y, z thỏa $xyz \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + 1 - \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + 1 - \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \leq 3 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{1}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{1}{z^5 + x^2 + y^2} \leq \frac{3}{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ta có

$$x^5 + y^2 + z^2 \geq \frac{x^4}{yz} + y^2 + z^2 \geq \frac{2x^4 + (y^2 + z^2)^2}{y^2 + z^2} \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{y^2 + z^2}.$$

Do đó

$$\frac{1}{x^5 + y^2 + z^2} \leq \frac{3}{2} \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

Chứng minh tương tự

$$\frac{1}{y^5 + z^2 + x^2} \leq \frac{3}{2} \frac{z^2 + x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \text{ và } \frac{1}{z^5 + x^2 + y^2} \leq \frac{3}{2} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{1}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{1}{z^5 + x^2 + y^2} \leq \frac{3}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Hay (1) đúng.

Ví dụ 1.17. (IMO Shortlist 2009) Cho các số thực dương a, b, c thỏa $ab + bc + ca \leq 3abc$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a + b}} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{b + c}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{c + a}} + 3 \leq \sqrt{2} \left(\sqrt{a + b} + \sqrt{b + c} + \sqrt{c + a} \right).$$

Ta có

$$\sqrt{2(a + b)} = \sqrt{\frac{2(a + b)^2}{a + b}} = \sqrt{2 \left(\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{2ab}{a + b} \right)} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a + b}} + \sqrt{\frac{2ab}{a + b}}.$$

Suy ra

$$VP \geq \sqrt{\frac{2ab}{a + b}} + \sqrt{\frac{2bc}{b + c}} + \sqrt{\frac{2ca}{c + a}} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a + b}} + \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{b + c}} + \sqrt{\frac{c^2 + a^2}{c + a}}.$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức

$$\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) (x + y + z)^2 \geq 27$$

ta suy ra

$$x + y + z \geq 3\sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2ab}{a + b}} + \sqrt{\frac{2bc}{b + c}} + \sqrt{\frac{2ca}{c + a}} &\geq 3\sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{a + b}{2ab}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b + c}{2bc}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{c + a}{2ca}} \right)^2}} \\ &= 3\sqrt{\frac{3abc}{ab + bc + ca}} = 3. \end{aligned}$$

Từ đó, ta có đpcm.

Ví dụ 1.18. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + a^2} \geq \frac{a + b + c}{2}.$$

Ta có

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} = \frac{a(a^2 + b^2) - ab^2}{a^2 + b^2} = a - \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \geq a - \frac{b}{2}.$$

Tương tự

$$\frac{b^3}{b^2 + c^2} \geq b - \frac{c}{2} \text{ và } \frac{c^3}{c^2 + a^2} \geq c - \frac{a}{2}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta có đpcm.

Ví dụ 1.19. Cho các số thực a, b, c thỏa $abc < 0$ và $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(1 - ab - bc - ca) + \frac{12abc - 8}{ab + bc + ca} \geq 16.$$

Gọi P là vế trái của bất đẳng thức.

Đặt $m = -(ab + bc + ca)$, $n = -abc$

Do $a + b + c = 0 \Rightarrow 2(ab + bc + ca) = -(a^2 + b^2 + c^2) < 0 \Rightarrow m, n > 0$

Khi đó:

$$P = \frac{m(1+m)}{n} + \frac{12n+8}{m}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô sita có:

$$m^3 + 8n^2 + 8n \geq 12mn \text{ và } m^2 + 4n^2 \geq 4mn$$

Suy ra

$$m^3 + m^2 + 12n^2 + 8n \geq 16mn$$

Do đó:

$$P = \frac{m(1+m)}{n} + \frac{12n+8}{m} \geq 16$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m = 2, n = 1$, tức là a, b, c là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

III. Bài tập

Bài 1.1. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$a) (1+a)(1+b)(1+c) \geq \left(1 + \sqrt[3]{abc}\right)^3.$$

$$b) \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2 \left(1 + \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

Bài 1.2. Cho các số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$. Chứng minh rằng

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq \left(1 + \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}\right)^n.$$

Bài 1.3. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 64abc.$$

Bài 1.4. Cho $2n$ số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n}.$$

Bài 1.5. (BĐT AM-GM suy rộng) Cho $a_i \geq 0$ ($i = \overline{1, n}$) và các số hữu tỉ dương α_i thỏa mãn $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \geq a_1^{\alpha_1} \cdot a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n}.$$

Bài 1.6. Cho n số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ và số nguyên dương k . Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)^k.$$

Bài 1.7. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a} \geq \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{b+2c+a} + \frac{1}{c+2a+b}.$$

Bài 1.8. Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa $ab + bc + ca \leq 3abc$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^4} + \frac{1}{\left(\sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c}\right)^4} + \frac{1}{\left(\sqrt[4]{c} + \sqrt[4]{a}\right)^4} \leq \frac{3}{16}.$$

Bài 1.9. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$2 \left(\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \right) \geq 1 + \frac{b}{b+2a} + \frac{c}{c+2b} + \frac{a}{a+2c}.$$

Bài 1.10. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^3}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^3}}.$$

Bài 1.11. Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Bài 1.12. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a + b + c = \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Bài 1.13. Chứng minh rằng nếu $xy + yz + zx = 5$ thì $3x^2 + 3y^2 + z^2 \geq 10$

Bài 1.14. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^3}{(a+2b)(b+2c)} + \frac{b^3}{(b+2c)(c+2a)} + \frac{c^3}{(c+2a)(a+2b)} \geq \frac{a+b+c}{9}.$$

Bài 1.15. Cho các số thực dương $a, b, c > 0$ thỏa $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{b^2(c+2)} + \frac{b^4}{c^2(a+2)} + \frac{c^4}{a^2(b+2)} \geq 1.$$

Bài 1.16. Chứng minh rằng nếu $a, b, c > 0$ thì :

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 2 \left(\sqrt{\frac{c}{a+b}} + \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} \right).$$

Bài 1.17. Cho các số thực a, b, c thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{b+2} + \frac{b^4}{c+2} + \frac{c^4}{a+2} \geq 1.$$

Bài 1.18. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{4}{a^2 + b^2} + 1 \right) \left(\frac{4}{b^2 + c^2} + 1 \right) \left(\frac{4}{c^2 + a^2} + 1 \right) \geq 3(a + b + c)^2.$$

Bài 1.19. Cho các số thực dương a, b, c thỏa:

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} = \frac{7 - abc}{\sqrt{2}}.$$

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Bài 1.20. Chứng minh rằng nếu $a, b, c > 0$ và thỏa mãn $a.b.c = 1$ thì

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2}.$$

Bài 1.21. (Baltic Way 2014) Cho các số thực dương a, b, c thỏa $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a^3 + b}} + \frac{1}{\sqrt{b^3 + c}} + \frac{1}{\sqrt{c^3 + a}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Bài 1.22. (USA 2011) Với a, b, c là các số thực dương thỏa $a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 \leq 4$, chứng minh rằng

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geq 3.$$

Bài 1.23. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2a}{b+c}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{2b}{c+a}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{2c}{a+b}\right)^2} \geq 3.$$

Bài 1.24. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{b^3 + c^3}{2}} + \sqrt[3]{\frac{c^3 + a^3}{2}} + 6 \leq 3(a + b + c).$$

Bài 1.25. Cho các số thực a, b, c thỏa $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{13a^2b^2c^2 - 2abc - 2}{(a^2 + b^2 + c^2)^3} \leq \frac{1}{4}.$$

Bài 1.26. Cho các số thực không âm a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{(a + b + c)^3} \geq 6\sqrt{3}(a - b)(b - c)(c - a).$$

Bài 1.27. Cho các số thực a, b, c phân biệt thỏa $a + b + c = 1$ và $ab + bc + ca > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$P = \frac{2}{|a - b|} + \frac{2}{|b - c|} + \frac{2}{|c - a|} + \frac{5}{\sqrt{ab + bc + ca}}.$$

Bài 1.28. (JBMO 2014) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{c}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{a}\right)^2 \geq 3(a + b + c + 1).$$

Bài 1.29. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $ab \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\left(a + 2b + \frac{2}{a + 1}\right) \left(b + 2a + \frac{2}{b + 1}\right) \geq 16.$$

Bài 1.30. (IMO Shortlist 2009) Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(2a + b + c)^2} + \frac{1}{(2b + c + a)^2} + \frac{1}{(2c + a + b)^2} \leq \frac{3}{16}.$$

Bài 1.31. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn:

$$\sqrt[3]{a^3 + b^3} + \sqrt[3]{b^3 + c^3} + \sqrt[3]{c^3 + a^3} + abc = 3.$$

Chứng minh rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^3}{b^2 + c^2} + \frac{b^3}{c^2 + a^2} + \frac{c^3}{a^2 + b^2}$$

bằng $\sqrt[6]{32}m$, trong đó m là nghiệm của phương trình $t^3 + 54t - 162 = 0$.

Bài 1.32 (Đề thi chọn đội tuyển, vòng 1, Hà Tĩnh, năm học 2017-20178). Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$. Chứng minh rằng

$$(a + b + c)(a + b + c - abc) \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a).$$

Bài 1.33 (Đề thi chọn đội tuyển, vòng 2, Nam Định, năm học 2017-2018). Xét các số thực $a, b, c \in [0; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c)$$

Bài 1.34 (Đề thi chọn đội tuyển, vòng 2, Quảng Ngãi, năm học 2017-2018). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $3bc + 4ac + 5ab \leq 6abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{3a + 2b + c}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Bài 1.35 (ĐỀ THI HSG TỈNH TÂY NINH, VÒNG 1, 2017-2018). Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^3 + 2y^3 + 6}} + \frac{1}{\sqrt[4]{y^3 + 2z^3 + 6}} + \frac{1}{\sqrt[4]{z^3 + 2x^3 + 6}} \leq \sqrt{3}.$$

Bài 1.36 (Đề thi chọn đội tuyển, Lâm Đồng, năm học 2017-2018). Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x^3 + y^2 + z = 2\sqrt{3} + 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^3}$.

Bài 1.37 (Đề thi chọn đội tuyển, vòng 1, Hà Tĩnh, năm học 2016-2017). Cho các số thực a, b, c dương và thỏa $a^5 + b^5 + c^5 = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^6b^6 + b^6c^6 + c^6a^6 \leq 3.$$

Bài 1.38. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức $x^ky^kz^k(x^3 + y^3 + z^3) \leq 3$ đúng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 3$.

Bài 1.39. (VN TST 2010) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $16(a+b+c) \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3} + \frac{1}{\left(b+c+\sqrt{2(b+a)}\right)^3} + \frac{1}{\left(c+a+\sqrt{2(c+b)}\right)^3} \leq \frac{8}{9}.$$

Bài 1.40. (IMO 2001) Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Bài 1.41 (Turkey TST 2017). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$a^3b + b^3c + c^3a + 9 \geq 4(ab + bc + ca).$$

Bài 1.42 (IMO Shortlits A5-2008). Cho các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $abcd = 1$ và

$$a + b + c + d \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}.$$

Chứng minh rằng $a + b + c + d \leq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}$.

Bài 1.43. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 2$. Chứng minh rằng

$$(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3) \leq 2.$$

Bài 1.44. (Hàn Quốc MO 2016) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P = (x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy).$$

Bài 1.45. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2 y^2}{1 - z} + \frac{y^2 z^2}{1 - x} + \frac{z^2 x^2}{1 - y} + 3xyz \leq \frac{1}{6}$$

Bài 1.46. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn:

$$9(a^4 + b^4 + c^4) - 25(a^2 + b^2 + c^2) + 48 = 0.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$F = \frac{a^2}{b + 2c} + \frac{b^2}{c + 2a} + \frac{c^2}{a + 2b}.$$

Bài 1.47. (TST Quảng Nam 2014-2015) Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\sqrt{5a^2 + 4bc} + \sqrt{5b^2 + 4ca} + \sqrt{5c^2 + 4ab} \geq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} + 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}).$$

Bài 1.48. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 b}{1 + a + b} + \frac{b^2 c}{1 + b + c} + \frac{c^2 a}{1 + c + a} \leq 1.$$

Bài 1.49 (P122, Tạp chí Pi, tháng 12 năm 2017). Chứng minh rằng, với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có bất đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{a^2 + bc}{a(b + c)}} + \sqrt{\frac{b^2 + ca}{b(c + a)}} + \sqrt{\frac{c^2 + ab}{c(a + b)}} \geq 3.$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 1.50. Cho 2018 số dương $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$ thỏa: $a_1 + a_2 + \dots + a_{2018} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2018}}$.

Chứng minh rằng: $a_1 + a_2 + \dots + a_{2018} \geq 2018$.

§2. Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

I. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng đa thức

Định lí 1. Cho $2n$ số thực $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$. Khi đó, ta có

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

Dạng thức xảy ra khi $a_i = kb_i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

Chứng minh. Nếu $a_i = 0 \forall i = \overline{1, n}$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Nếu $\sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$, ta xét tam thức

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) x + \sum_{i=1}^n b_i^2$$

Ta có

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x - b_i)^2 \geq \forall x \in \mathbb{R}$$

Do đó

$$\Delta' = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \leq 0$$

Hay bất đẳng thức được chứng minh.

Dạng thức xảy ra khi $a_i x - b_i = 0 \Leftrightarrow a_i = k.b_i$.

II. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng phân thức

Định lí 2. Cho các n số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ và n số thực dương $b_1, b_2, \dots, b_n$. Khi đó, ta có

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

Dạng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng đa thức ta có

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{b_i} \cdot \frac{a_i}{\sqrt{b_i}} \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} \right)$$

Hay

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \text{ (đpcm).}$$

III. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 2.1. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \sqrt{82}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right) \left(\frac{1}{9} + 9\right) \geq \left(\frac{a}{3} + \frac{3}{b}\right)^2$$

hay

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{82}} \left(\frac{a}{3} + \frac{3}{b}\right).$$

Tương tự, ta cũng có

$$\sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{82}} \left(\frac{b}{3} + \frac{3}{c}\right) \text{ và } \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{82}} \left(\frac{c}{3} + \frac{3}{a}\right).$$

Cộng ba bất đẳng thức theo vế ta có

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{82}} \left[\frac{a+b+c}{3} + 3 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right].$$

Lại có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} = 9$ nên ta suy ra được

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{82}} \left(\frac{1}{3} + 27 \right) = \sqrt{82}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 2.2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) \geq 4\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopsky cho hai bộ số $(1; a)$ và $(b; 1)$ ta có

$$(1 + a^2)(1 + b^2) = (1 + a^2)(b^2 + 1) \geq (a + b)^2.$$

Tương tự

$$(1 + b^2)(1 + c^2) \geq (b + c)^2, \quad (1 + c^2)(1 + a^2) \geq (a + c)^2.$$

Nhận các bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) \geq (a + b)(b + c)(c + a).$$

Mặt khác

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc = 8.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} (a + b)(b + c)(c + a) &= \sqrt[3]{(a + b)(b + c)(c + a)} \cdot \sqrt[3]{[(a + b)(b + c)(c + a)]^2} \\ &\geq \sqrt[3]{(a + b)(b + c)(c + a)} \cdot \sqrt[3]{8^2} = 4\sqrt[3]{(a + b)(b + c)(c + a)} \text{ (đpcm)}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2.3. Cho $a, b, c > 0$ thỏa

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + c^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + a^2 + 1} \geq 1.$$

Chứng minh rằng $ab + bc + ca \leq 3$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho hai bộ số $(a; b; 1)$ và $(1; 1; c)$ ta có

$$(a^2 + b^2 + 1)(1 + 1 + c^2) \geq (a + b + c)^2.$$

Suy ra

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + 1} \leq \frac{2 + c^2}{(a + b + c)^2}.$$

Tương tự:

$$\frac{1}{b^2 + c^2 + 1} \leq \frac{2 + a^2}{(a + b + c)^2}, \quad \frac{1}{c^2 + a^2 + 1} \leq \frac{2 + b^2}{(a + b + c)^2}.$$

Suy ra

$$\frac{2 + a^2}{(a + b + c)^2} + \frac{2 + b^2}{(a + b + c)^2} + \frac{2 + c^2}{(a + b + c)^2} \geq 1,$$

Do đó ta có

$$6 + a^2 + b^2 + c^2 \geq (a + b + c)^2 \Rightarrow ab + bc + ca \leq 3 \text{ (đpcm)}.$$

Ví dụ 2.4. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} \leq \sqrt{2}(a + b + c).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + 1} + \sqrt{b^2 + 1} + \sqrt{c^2 + 1} &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c} \cdot \sqrt{c + \frac{1}{c}} \\ &\leq \sqrt{(a + b + c) \left(a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} \right)} \\ &= \sqrt{2}(a + b + c). \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 2.5. Cho các số thực a, b, c, x, y, z . Chứng minh rằng

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z).$$

Ta có

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z) - (ax + by + cz) \\ &= a \cdot \frac{2y + 2z - x}{3} + b \cdot \frac{2z + 2x - y}{3} + c \cdot \frac{2x + 2y - z}{3} \\ &\leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2) \left(\left(\frac{2y + 2z - x}{3} \right)^2 + \left(\frac{2z + 2x - y}{3} \right)^2 + \left(\frac{2x + 2y - z}{3} \right)^2 \right)}. \end{aligned}$$

Hơn nữa

$$\left(\frac{2y+2z-x}{3}\right)^2 + \left(\frac{2z+2x-y}{3}\right)^2 + \left(\frac{2x+2y-z}{3}\right)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Nên ta có đpcm.

Ví dụ 2.6. Cho các số thực a, b, c thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 9$. Chứng minh rằng

$$2(a+b+c) - abc \leq 10.$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $|a| \leq |b| \leq |c|$

$$3(a^2 + b^2) \leq 2(a^2 + b^2 + c^2) = 18 \Rightarrow a^2 + b^2 \leq 6.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho hai bộ số

$$\begin{aligned} 2(a+b+c) - abc &= 2(a+b) + c(2-ab) \leq \sqrt{(4+(2-ab)^2)((a+b)^2 + c^2)} \\ &= \sqrt{(8-4ab+a^2b^2)(a^2+b^2+c^2+2ab)} \\ &= \sqrt{(8-4ab+a^2b^2)(9+2ab)}. \end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} \sqrt{(8-4ab+a^2b^2)(9+2ab)} &\leq 10 \\ \Leftrightarrow 2a^3b^3 + a^2b^2 - 20ab - 28 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (ab+2)^2(2ab-7) &\leq 0. \quad (*) \end{aligned}$$

Vì $2ab \leq a^2 + b^2 \leq 6 \Rightarrow 2ab - 7 < 0$, do đó (*) đúng.

Ví dụ 2.7 (VQB Cần). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=6$ và $a^2+b^2+c^2=14$. Chứng minh rằng

$$2 \leq \frac{4a+b}{c} \leq \frac{31}{2}.$$

Ta có

$$\frac{4a+b}{c} \geq 2 \Leftrightarrow -4a-b+2c \leq 0 \Leftrightarrow 3a+6b+9c \leq 7(a+b+c) = 42 \quad (1).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$3a+6b+9c \leq \sqrt{(3^2+6^2+9^2)(a^2+b^2+c^2)} = 42.$$

Suy ra (1) đúng. Đẳng thức xảy ra khi $a=1, b=2, c=3$.

Tương tự

$$\frac{4a+b}{c} \leq \frac{31}{2} \Leftrightarrow 8a+2b-31c \leq 0 \Leftrightarrow 57a+51b+18c \leq 49(a+b+c) = 294 \quad (2).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$57a+51b+18c \leq \sqrt{(57^2+51^2+18^2)(a^2+b^2+c^2)} = 294.$$

Hay (2) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=\frac{19}{7}, b=\frac{17}{7}, c=\frac{6}{7}$.

Ví dụ 2.8. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{c+a}} \leq 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\begin{aligned} VT^2 &= \left(\sqrt{a+c} \sqrt{\frac{a}{(a+b)(a+c)}} + \sqrt{b+a} \sqrt{\frac{b}{(b+c)(b+a)}} + \sqrt{c+b} \sqrt{\frac{c}{(c+a)(c+b)}} \right)^2 \\ &\leq 2(a+b+c) \left(\frac{a}{(a+b)(a+c)} + \frac{b}{(b+a)(b+c)} + \frac{c}{(c+a)(c+b)} \right) \\ &= \frac{4(a+b+c)[ab+bc+ca]}{(a+b)(b+c)(c+a)}. \end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{4(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{9}{8}.$$

Đây là một kết quả quen thuộc.

Ví dụ 2.9. Cho các số thực dương a, b, c thỏa

$$\frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{b^2+2} + \frac{1}{c^2+2} = 1.$$

Chứng minh rằng: $ab+bc+ca \leq 3$.

Từ giả thiết suy ra:

$$1 = \frac{a^2}{a^2+2} + \frac{b^2}{b^2+2} + \frac{c^2}{c^2+2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+6}$$

Do đó:

$$a^2+b^2+c^2+6 \geq (a+b+c)^2 \Leftrightarrow ab+bc+ca \leq 3 \text{ (đpcm)}.$$

Ví dụ 2.10. Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq 1.$$

Gọi P là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^4}{a^3+2a^2b^2} + \frac{b^4}{b^3+2b^2c^2} + \frac{c^4}{c^3+2c^2a^2} \\ &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3+b^3+c^3+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}. \end{aligned}$$

Với $a+b+c=3$ ta có

$$\begin{aligned} (a^4+b^4+c^4)(a^2+b^2+c^2) &\geq (a^3+b^3+c^3)^2 \\ (a^3+b^3+c^3)(a+b+c) &\geq (a^2+b^2+c^2)^2 \\ 3(a^2+b^2+c^2) &\geq (a+b+c)^2. \end{aligned}$$

Nhân ba bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$3(a^4 + b^4 + c^4) \geq (a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3)$$

Hay $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3$. Do đó

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2 + c^2)^2 &= a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\ &\geq a^3 + b^3 + c^3 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).\end{aligned}$$

Vậy $P \geq 1$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 2.11. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+a}\right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

Vì $\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1$ nên tồn tại các số thực dương x, y, z sao cho

$$\frac{b}{a} = \frac{yz}{x^2}, \quad \frac{c}{b} = \frac{zx}{y^2}, \quad \frac{a}{c} = \frac{xy}{z^2}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x^4}{(x^2 + yz)^2} + \frac{y^4}{(y^2 + zx)^2} + \frac{z^4}{(z^2 + xy)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\frac{x^4}{(x^2 + yz)^2} + \frac{y^4}{(y^2 + zx)^2} + \frac{z^4}{(z^2 + xy)^2} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{(x^2 + yz)^2 + (y^2 + zx)^2 + (z^2 + xy)^2}.$$

Ta chứng minh

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{(x^2 + yz)^2 + (y^2 + zx)^2 + (z^2 + xy)^2} \geq \frac{3}{4}$$

Biến đổi và rút gọn ta thu được bất đẳng thức

$$x^4 + y^4 + z^4 + 5(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \geq 6xyz(x + y + z) \quad (*).$$

Ta có

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x + y + z).$$

Nên suy ra (*) đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2.12 (P61, Tạp chí Pi, tháng 6 năm 2017). Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{7}{2}.$$

Hỏi dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi nào?

Ta biết rằng với a, b, c là ba số thực tùy ý, luôn có

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$$

Do đó

$$\frac{2(ab + bc + ca)}{a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} + 1. \quad (1)$$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{5}{2} \quad (2)$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{a}{b+c}\right) + \left(1 - \frac{b}{c+a}\right) + \left(1 - \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{1}{2} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}. \\ &\Leftrightarrow \frac{b+c-a}{b+c} + \frac{c+a-b}{c+a} + \frac{a+b-c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} \\ &\Leftrightarrow \frac{(b+c-a)^2}{(b+c-a)(b+c)} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a-b)(c+a)} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b-c)(a+b)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Do đó a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên $b+c > a, a+c > b$ và $a+b > c$. Do đó, tất cả các phân thức nằm ở vế trái của (3) đều có mẫu thức dương. Vì thế, ký hiệu VT là biểu thức nằm ở vế trái của (3), theo một hệ quả của bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta có

$$VT \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Vì

$$\begin{aligned} (b+c-a) + (c+a-b) + (a+b-c) &= a+b+c \\ (b+c-a)(b+c) + (c+a-b)(c+a) + (a+b-c)(a+b) &= 2(a^2+b^2+c^2). \end{aligned}$$

nên (3) được chứng minh và vì thế (2) được chứng minh. Từ (1) và (2), hiển nhiên, suy ra bất đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu bài toán. Từ điều kiện cần và đủ để dấu bằng xảy ra ở các bất đẳng thức trên, dễ dàng suy ra dấu bằng ở bất đẳng thức đề bài xảy ra khi và chỉ khi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác đều.

Ví dụ 2.13. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a+b+c=2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{4a+3bc}} + \frac{b}{\sqrt{4b+3ca}} + \frac{c}{\sqrt{4c+3ab}} \leq 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{\sqrt{4a+3bc}} + \frac{b}{\sqrt{4b+3ca}} + \frac{c}{\sqrt{4c+3ab}} \right)^2 &\leq (a+b+c) \left(\frac{a}{4a+3bc} + \frac{b}{4b+3ca} + \frac{c}{4c+3ab} \right) \\ &= 2 \left(\frac{a}{4a+3bc} + \frac{b}{4b+3ca} + \frac{c}{4c+3ab} \right). \end{aligned}$$

Ta chứng minh:

$$\begin{aligned} \frac{a}{4a+3bc} + \frac{b}{4b+3ca} + \frac{c}{4c+3ab} &\leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{bc}{4a+3bc} + \frac{ca}{4b+3ca} + \frac{ab}{4c+3ab} &\geq \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (1)$$

Ta có

$$VT(1) \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{bc(4a+3bc) + ca(4b+3ca) + ab(4c+3ab)}$$

Do

$$bc(4a + bc) + ca(4b + ca) + ab(4c + ab) = 3(ab + bc + ca)^2.$$

Nên ta có: $VT(1) \geq \frac{1}{3}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{2}{3}$.

Ví dụ 2.14. Cho các số thực $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2 + zx + zy}} + \frac{y + z}{\sqrt{y^2 + z^2 + xy + xz}} + \frac{z + x}{\sqrt{z^2 + x^2 + yz + xy}} \leq 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$VT^2 \leq 3 \left[\frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2 + zx + yz} + \frac{(y + z)^2}{y^2 + z^2 + xy + xz} + \frac{(z + x)^2}{z^2 + x^2 + yz + yx} \right].$$

Mặt khác

$$\frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2 + zx + yz} = \frac{(x + y)^2}{x(x + z) + y(y + z)} \leq \frac{x^2}{x(x + z)} + \frac{y^2}{y(y + z)} = \frac{x}{x + z} + \frac{y}{y + z}$$

Tương tự

$$\frac{(y + z)^2}{y^2 + z^2 + xy + xz} \leq \frac{y}{y + x} + \frac{z}{z + x} \quad \text{và} \quad \frac{(z + x)^2}{z^2 + x^2 + yz + yx} \leq \frac{z}{z + y} + \frac{x}{x + y}$$

Suy ra $VT^2 \leq 9 \Leftrightarrow VT \leq 3$, từ đây ta có đpcm.

Ví dụ 2.15. Cho a, b, c là các số thực không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{(2a + b)(2a + c)} + \frac{b^2}{(2b + c)(2b + a)} + \frac{c^2}{(2c + a)(2c + b)} \leq \frac{1}{3}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} \frac{9a^2}{(2a + b)(2a + c)} &= \frac{(2a + a)^2}{2a(a + b + c) + (2a^2 + bc)} \\ &\leq \frac{4a^2}{2a(a + b + c)} + \frac{a^2}{2a^2 + bc} \\ &= \frac{2a}{a + b + c} + \frac{a^2}{2a^2 + bc}. \end{aligned}$$

Do đó

$$9VT \leq 2 + \frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ca} + \frac{c^2}{2c^2 + ab}.$$

Nên ta chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ca} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{bc}{2a^2 + bc} + \frac{ca}{2b^2 + ca} + \frac{ab}{2c^2 + ab} &\geq 1. \quad (1) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$VT(1) \geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{2abc(a + b + c) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} = \frac{(ab + bc + ca)^2}{(ab + bc + ca)^2} = 1.$$

IV. Bài tập

Bài 2.1 (Bất đẳng thức Mincopski). Cho các $2n$ số thực $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2} \geq \sqrt{(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \dots + (a_n + b_n)^2}.$$

Bài 2.2. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (a + b)(b + c)(c + a).$$

Bài 2.3. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 3 \geq 9 \left(\frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + 2} \right).$$

Bài 2.4. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$a\sqrt{a^2 + 8bc} + b\sqrt{b^2 + 8ca} + c\sqrt{c^2 + 8ab} \leq 1.$$

Bài 2.5. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b + 2c} + \frac{b^3}{c + 2a} + \frac{c^3}{a + 2b} \geq 1.$$

Bài 2.6. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^2 + c^2 + 7}} + \frac{b^3}{\sqrt{c^2 + a^2 + 7}} + \frac{c^3}{\sqrt{a^2 + b^2 + 7}} \geq 1.$$

Bài 2.7. Cho các số thực dương a, b, c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + 4b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 4c^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Bài 2.8. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2a^2 + 3} + \frac{1}{2b^2 + 3} + \frac{1}{2c^2 + 3} \geq \frac{3}{5}.$$

Bài 2.9. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} \geq \frac{3}{2}.$$

Bài 2.10. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{3 - ab} + \frac{1}{3 - bc} + \frac{1}{3 - ca} \leq \frac{3}{2}.$$

Bài 2.11. Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{4x+5}{x^3+xy^2+3xyz} + \frac{4y+5}{y^3+yz^2+3xyz} + \frac{4z+5}{z^3+zx^2+3xyz} \geq \frac{162}{x^2+y^2+z^2+27}.$$

Bài 2.12. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{(b+2c)^2(a+b)} + \frac{b^2}{(c+2a)^2(b+c)} + \frac{c^2}{(a+2b)^2(c+a)} \geq \frac{1}{2}.$$

Bài 2.13. Cho $a, b, c \in (1; 2)$. Chứng minh rằng

$$\frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c}-c\sqrt{a}} + \frac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a}-a\sqrt{b}} + \frac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b}-b\sqrt{c}} \geq 1.$$

Bài 2.14. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq a^2b^2c^2$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2b^2}{c^3(a^2+b^2)} + \frac{b^2c^2}{a^3(b^2+c^2)} + \frac{c^2a^2}{b^3(c^2+a^2)} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bài 2.15 (IMO Shortlist-2007). Cho các số thực không âm $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ thỏa mãn điều kiện $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$S = a_1^2a_2 + a_2^2a_3 + \dots + a_{100}^2a_1 \leq \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Bài 2.16. (China TST 2005) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa $ab + bc + ca = \frac{1}{3}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 - bc + 1} + \frac{1}{b^2 - ca + 1} + \frac{1}{c^2 - ab + 1} \leq 3.$$

Bài 2.17. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$2 \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \right) \geq a\sqrt{3 + \frac{b^2}{c^2}} + b\sqrt{3 + \frac{c^2}{a^2}} + c\sqrt{3 + \frac{a^2}{b^2}} \geq 2(a + b + c).$$

Bài 2.18. Cho $x, y, z > -1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2.$$

Bài 2.19 (P77, Tạp chí Pi, tháng 7 năm 2017). Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

Bài 2.20. Cho ba số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện $(b+c)(c+2a)(c+4a) > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+4a} + \frac{2c}{c+2a} \geq 1.$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

Bài 2.21. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3.$$

Bài 2.22. Cho bốn số thực a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-cd} + \frac{1}{1-da} \leq \frac{16}{3}.$$

Bài 2.23. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+x+x^2} + \frac{1}{1+y+y^2} + \frac{1}{1+z+z^2} \geq 1.$$

Bài 2.24. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xyz = 8$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{x^2+2x+4} + \frac{y^2}{y^2+2y+4} + \frac{z^2}{z^2+2z+4} \geq 1.$$

Bài 2.25 (IMO 2008). Cho các số thực $x, y, z \neq 1$ và $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{y}{y-1}\right)^2 + \left(\frac{z}{z-1}\right)^2 \geq 1.$$

Bài 2.26. Cho a, b , là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{bc}{a(3b+a)}} + \sqrt{\frac{ac}{b(3c+b)}} + \sqrt{\frac{ab}{c(3a+c)}} \geq \frac{3}{2}.$$

Bài 2.27. Cho các số thực a, b, c tất cả không cùng dấu. Chứng minh rằng

$$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \geq 3(ab + bc + ca)^3.$$

Bài 2.28. Cho $a, b, c \geq 0$ và không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{2b^2 - bc + 2c^2} + \frac{b^2}{2c^2 - ca + 2a^2} + \frac{c^2}{2a^2 - ab + 2b^2} \geq 1.$$

Bài 2.29. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $3a^2 + 2b^2 + c^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2(a + b + c) - abc.$$

Bài 2.30. (Iran MO 2016 day 3) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{(a+b+1)^2} + \frac{b+c}{(b+c+1)^2} + \frac{c+a}{(c+a+1)^2} \geq \frac{2}{a+b+c}.$$

Bài 2.31. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz \geq 1$. Chứng minh rằng

$$(x^4 + y)(y^4 + z)(z^4 + x) \geq (x + y^2)(y + z^2)(z + x^2).$$

Bài 2.32. (Serbia TST 2016) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{3a+b}} + \frac{b}{\sqrt{3b+c}} + \frac{c}{\sqrt{3c+a}} \leq \frac{3}{2}.$$

Bài 2.33. (Hải Dương TST 2016)

Cho $a, b, c \in [-1, 1]$ thỏa mãn: $1 + 2abc \geq a^2 + b^2 + c^2$. Chứng minh rằng :

$$1 + 2a^3b^3c^3 \geq a^6 + b^6 + c^6.$$

Bài 2.34. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}.$$

Bài 2.35. Cho n ($n \geq 1$) $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{(n-2)x_1^2 + 2x_1}{(n-1)x_1^2 + 1} + \frac{(n-2)x_2^2 + 2x_2}{(n-1)x_2^2 + 1} + \dots + \frac{(n-2)x_n^2 + 2x_n}{(n-1)x_n^2 + 1} \geq 0.$$

Bài 2.36. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2a^2 + bc} + \frac{1}{2b^2 + ac} + \frac{1}{2c^2 + ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ac}.$$

Bài 2.37. Cho a, b, c là các số thực dương và $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt[n]{\frac{a^2 + bc}{a(b+c)}} + \sqrt[n]{\frac{b^2 + ac}{b(a+c)}} + \sqrt[n]{\frac{c^2 + ab}{c(a+b)}}.$$

Bài 2.38. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3 + 5}{a^3(b+c)} + \frac{b^3 + 5}{b^3(c+a)} + \frac{c^3 + 5}{c^3(a+b)} \geq 9.$$

Bài 2.39. Cho số nguyên dương $n \geq 3$ và $2n$ số thực dương $a_1; a_2; \dots; a_n; b_1; b_2; \dots; b_n$ thỏa mãn:

$$\sum_{k=1}^n a_k = 1; \sum_{k=1}^n b_k^2 = 1.$$

Chứng minh rằng: $\sum_{k=1}^n a_k(b_k + a_{k+1}) < 1$ (với $a_{n+1} = a_1$).

§3. Một số bất đẳng thức khác

I. Bất đẳng thức Schur

1. Bất đẳng thức Schur

Định lí 1. Cho các số thực không âm x, y, z và số thực dương r . Khi đó, ta có bất đẳng thức sau

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-x)(y-z) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hoặc $c = 0, a = b$ và các hoán vị.

Chứng minh. Vì bất đẳng thức cần chứng minh là đối xứng ba biến nên ta giả sử $x \geq y \geq z$, khi đó $z^r(z-x)(z-y) \geq 0$ và

$$\begin{aligned} x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-x)(y-z) &\geq (x-y)(x^r(y-z) - y^r(y-z)) \\ &= (x-y)(y-z)(x^r - y^r) \geq 0. \end{aligned}$$

Từ hai bất đẳng thức trên ta suy ra đpcm.

2. Các trường hợp đặc biệt

- Xét $r = 1$ ta có các dạng sau

a) $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$

b) $4(a^3 + b^3 + c^3) + 15abc \geq (a+b+c)^3$

c) $xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$

d) $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9xyz}{x+y+z} \geq 2(xy + yz + zx)$

e) $(x+y+z)^3 + 9xyz \geq 4(x+y+z)(xy + yz + zx)$

- $r = 2$ ta có các dạng sau

a) $x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) \geq xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2)$

b) $6xyz(x+y+z) \geq [2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2)](x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx).$

3. Bất đẳng thức Schur mở rộng

Định lí 2. Cho các số thực dương a, b, c, x, y, z sao cho các bộ (a, b, c) và (x, y, z) là các bộ đơn điệu. Khi đó, ta có bất đẳng thức

$$a(x-y)(x-z) + b(y-z)(y-x) + c(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Chứng minh. Việc chứng minh bất đẳng thức này tương tự như chứng minh bất đẳng thức Schur ở trên.

4. Các ví dụ

Ví dụ 3.1 (Đồng Nai TST 2016). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 + 3}}.$$

3. MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC KHÁC

Với $x, y, z > 0$ ta có:

$$(x + y + z)^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \geq 9 \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{1}{x^2 y^2 z^2}} = 27.$$

Suy ra :

$$x + y + z \geq \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}}. \quad (*)$$

Áp dụng (*) với $x = \sqrt{\frac{a}{b+c}}, y = \sqrt{\frac{b}{c+a}}, z = \sqrt{\frac{c}{a+b}}$ ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} &\geq \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)}}. \end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Schur ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a).$$

Nên ta có : $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{a^3 + b^3 + c^3 + 3}}.$

Đẳng thức có $a = b = c = 1$.

Ví dụ 3.2 (Nghệ an TST 2014, ngày 2). Cho các số thực $x, y, z > 0$ thỏa $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{x+y}{2z}} + \sqrt[3]{\frac{y+z}{2x}} + \sqrt[3]{\frac{z+x}{2y}} \leq \frac{5(x+y+z) + 9}{8}.$$

Đặt $x = a^3, y = b^3, z = c^3$ bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2c^3}} + \sqrt[3]{\frac{b^3 + c^3}{2a^3}} + \sqrt[3]{\frac{c^3 + a^3}{2b^3}} \leq \frac{5(a^3 + b^3 + c^3) + 9}{8}.$$

Theo bất đẳng thức Schur ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a).$$

Do đó

$$\begin{aligned} 5(a^3 + b^3 + c^3) + 9 &= 2(a^3 + b^3 + c^3) + 3(a^3 + b^3 + c^3 + 3) \\ &\geq 2(a^3 + b^3 + c^3) + 3ab(a+b) + 3bc(b+c) + 3ca(c+a) \\ &= (a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3. \end{aligned} \quad (1)$$

Ta chứng minh

$$\frac{(a+b)^3}{8} \geq \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2c^3}}. \quad (2)$$

Thật vậy (1) tương đương với

$$\frac{(a+b)^3}{8abc} \geq \frac{1}{c} \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \Leftrightarrow (a+b)^9 \geq 8^3 a^3 b^3 \frac{a^3+b^3}{2}. \quad (3)$$

Ta có

$$\begin{aligned} 4 \cdot 8^2 \cdot a^3 b^3 (a^3 + b^3) &= ab \cdot ab \cdot ab (a^2 - ab + b^2) (a+b) \\ &\leq 4 \cdot 8^2 \left(\frac{ab + ab + ab + a^2 - ab + b^2}{4} \right)^4 (a+b) = (a+b)^9. \end{aligned}$$

Do đó (2) đúng. Tương tự ta có

$$\frac{(b+c)^3}{8} \geq \sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2a^3}}, \quad \frac{(c+a)^3}{8} \geq \sqrt[3]{\frac{c^3+a^3}{b^3}}. \quad (4)$$

Công các bất đẳng thức (2), (4) và từ (1) ta có đpcm.

Ví dụ 3.3. (VMO 2014) Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq \mathcal{P} \geq (a+b+c)^2,$$

$$\text{với } \mathcal{P} = (a+b+c)(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$

Ta có

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq \mathcal{P} \Leftrightarrow a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

Bất đẳng thức này là kết quả quen thuộc.

Đặt $x = \sqrt{a}$, $y = \sqrt{b}$, $z = \sqrt{c}$. Khi đó, bất đẳng thức

$$\mathcal{P} \geq (a+b+c)^2 \Leftrightarrow \sum x^4 + xyz \sum x + \sum xy(x^2 + y^2) \geq 4 \sum x^2 y^2 \quad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức Schur (với trường hợp $r = 2$) ta có

$$\sum x^4 + xyz \sum x \geq \sum xy(x^2 + y^2)$$

do đó

$$VT(1) \geq 2 \sum xy(x^2 + y^2) \geq 2 \cdot \sum xy \cdot 2xy = 4 \sum x^2 y^2.$$

Hay (1) được chứng minh.

Ví dụ 3.4. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + bc}{a^2(b+c)} + \frac{b^2 + ca}{b^2(c+a)} + \frac{c^2 + ab}{c^2(a+b)} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Ta có

$$\frac{a^2 + bc}{a^2(b+c)} - \frac{1}{a} = \frac{a^2 + bc - a(b+c)}{a^2(b+c)} = \frac{(a-b)(a-c)}{a^2(b+c)}.$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0 \quad (1).$$

$$\text{Với } x = \frac{1}{a^2(b+c)}, y = \frac{1}{b^2(c+a)}, z = \frac{1}{c^2(a+b)}.$$

$$\text{Giả sử } a > b > c, \text{ ta có } \frac{1}{a^2(b+c)} - \frac{1}{b^2(c+a)} = \frac{ab(b-a) + c(b^2 - a^2)}{a^2 b^2 (b+c)(c+a)} > 0 \text{ hay } x < y.$$

Do đó, bộ (x, y, z) là bộ đơn điệu giảm. Do đó, theo bất đẳng thức Schur suy rộng, ta có (1) đúng.

II. Bất đẳng thức Holder

1. Bất đẳng thức Holder

Định lí 3. Cho mn số thực dương a_{ij} với $i = \overline{1, m}$ và $j = \overline{1, n}$. Khi đó ta có bất đẳng thức sau

$$\prod_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^m \right) \geq \left(\sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m a_{ij} \right)^m.$$

2. Trường hợp đặc biệt

- $m = 2$ ta có bất đẳng thức Cauchy-Schwarz
- $m = 3$ ta có

$$(a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3)(b_1^3 + b_2^3 + \cdots + b_n^3)(c_1^3 + c_2^3 + \cdots + c_n^3) \geq (a_1 b_1 c_1 + \cdots + a_n b_n c_n)^3.$$

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 3.5. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$(a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2) \geq (a + b + c)^3.$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\begin{aligned} (a^3 + 2)(b^3 + 2)(c^3 + 2) &= (a^3 + 1 + 1)(1 + b^3 + 1)(1 + 1 + c^3) \\ &\geq (a + b + c)^3. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.6. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{\sqrt{a+2c}} + \frac{b+c}{\sqrt{b+2a}} + \frac{c+a}{\sqrt{c+2b}} \geq 2\sqrt{a+b+c}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$\left(\frac{a+b}{\sqrt{a+2c}} + \frac{b+c}{\sqrt{b+2a}} + \frac{c+a}{\sqrt{c+2b}} \right)^2 \left(\sum (a+b)(a+2c) \right) \geq 8(a+b+c)^3.$$

Mặt khác

$$\sum (a+b)(a+2c) = (a+b+c)^2 + 3(ab+bc+ca) \leq 2(a+b+c)^2.$$

Do đó

$$\frac{a+b}{\sqrt{a+2c}} + \frac{b+c}{\sqrt{b+2a}} + \frac{c+a}{\sqrt{c+2b}} \geq 2\sqrt{a+b+c}.$$

Ví dụ 3.7. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

Gọi P là vế trái của bất đẳng thức. áp dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$P^2 \left(\sum a(a^2 + 8bc) \right) \geq (a + b + c)^3.$$

Mà

$$\sum a(a^2 + 8bc) = a^3 + b^3 + c^3 + 24abc \leq (a + b + c)^3,$$

nên ta có $P \geq 1$.

III. Bất đẳng thức Chebyshev

1. Bất đẳng thức Chebyshev

Định lí 4. a) Với hai dãy n số thực $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ và $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ cùng tăng hoặc cùng giảm, tức là

$$\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases}$$

ta luôn có

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \dots \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}.$$

b) Với hai dãy n số thực $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ và $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ có một dãy tăng và một dãy giảm, tức là

$$\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}$$

ta luôn có

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n}{n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \dots \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}.$$

Chứng minh. Ta chứng minh cho trường hợp

$$\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \end{cases}.$$

Đặt $a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, khi đó tồn tại chỉ số k sao cho $a_k \leq a \leq a_{k+1}$, với k đó ta chọn số b sao cho $b_k \leq b \leq b_{k+1}$. Khi đó ta có

$$(a - a_i)(b - b_i) \geq 0 \Leftrightarrow ab - ab_i - a_i + a_ib_i.$$

Cho i chạy từ 1 đến n và cộng n bất đẳng thức đó ta được

$$nab - a \sum_{i=1}^n b_i - b \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n a_ib_i \geq 0.$$

Mà $b \sum_{i=1}^n a_i = nab$ nên ta có

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i \geq a \sum_{i=1}^n b_i = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right).$$

Ta có đpcm.

2. Ví dụ minh họa

Ví dụ 3.8. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \geq \frac{1}{2}.$$

Giải sử $a \geq b \geq c$, khi đó $a^2 \geq b^2 \geq c^2$ và $\frac{a}{b+c} \geq \frac{b}{c+a} \geq \frac{c}{a+b}$, nên áp dụng bất đẳng thức Trebyshev ta có

$$\begin{aligned} VT &= a^2 \frac{a}{b+c} + b^2 \frac{b}{c+a} + c^2 \frac{c}{a+b} \\ &\geq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.9. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \leq \frac{27}{10}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} &\left(\frac{9}{10} - \frac{1}{1+x^2} \right) + \left(\frac{9}{10} - \frac{1}{1+y^2} \right) + \left(\frac{9}{10} - \frac{1}{1+z^2} \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (3x-1) \frac{3x+1}{1+x^2} + (3y-1) \frac{3y+1}{1+y^2} + (3z-1) \frac{3z+1}{1+z^2} \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Với $1 \geq a \geq b \geq 0$ ta có

$$(3a+1)(b^2+1) - (3b+1)(a^2+1) = (a-b)(3ab - a - b + 3) \geq 0 \Rightarrow \frac{3a+1}{1+a^2} \geq \frac{3b+1}{1+b^2}.$$

Giả sử $x \geq y \geq z$, ta có $3x-1 \geq 3y-1 \geq 3z-1$ và $\frac{3x+1}{1+x^2} \geq \frac{3y+1}{1+y^2} \geq \frac{3z+1}{1+z^2}$. Do đó áp dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có

$$VT(1) \geq (3x-1 + 3y-1 + 3z-1) \left(\frac{3x+1}{1+x^2} + \frac{3y+1}{1+y^2} + \frac{3z+1}{1+z^2} \right) = 0.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

IV. Bài tập

Bài 3.1. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} + \sqrt[3]{\frac{3abc}{a^3+b^3+c^3}} \geq 4.$$

Bài 3.2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$2 \left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \right) + 1 \geq 6(ab + bc + ca).$$

Bài 3.3. Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \sqrt[3]{\frac{a^2 + bc}{b^2 + c^2}} \geq \frac{9\sqrt[3]{abc}}{a + b + c}.$$

Bài 3.4. (APMO 2004) Cho các số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca).$$

Bài 3.5. Cho các số thực không âm a, b, c . Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{(a+b)^3}{ab(4a+4b+c)}} + \sqrt{\frac{(b+c)^3}{bc(4b+4c+a)}} + \sqrt{\frac{(c+a)^3}{ca(4c+4a+b)}} \geq 2\sqrt{2}.$$

Bài 3.6. (Hello IMO 2007- Trần Nam Dũng) Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \geq 0$, ta có:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + abc + 8 \geq 5(a + b + c).$$

Bài 3.7. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geq 2(a + b + c).$$

Bài 3.8. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(ab + bc + ca).$$

Bài 3.9. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$4a^3 + 9b^3 + 36c^3 \geq 1.$$

Bài 3.10. Cho các số thực dương a, b, c có $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c+2a}} \geq 1.$$

Bài 3.11. Cho các số thực dương x, y, z và a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$. Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} \right)^3.$$

Bài 3.12. Cho a, b, c, x, y, z là các số thực dương thỏa $ax + by + cz = 1$. Chứng minh rằng

$$x^n + y^n + z^n \geq \left(\sqrt[n-1]{a^n} + \sqrt[n-1]{b^n} + \sqrt[n-1]{c^n} \right)^{1-n}.$$

Bài 3.13. Cho 3 số thực dương a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức:

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + 4\sqrt{2} \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 9 + 4\sqrt{2}.$$

§4. Phương pháp quy nạp

I. Lý thuyết

Quy nạp toán học là một phương pháp mạnh để chứng minh các phát biểu phụ thuộc vào một số tự nhiên.

Cho $(P(n))_{n \geq 0}$ là một dãy các mệnh đề. Phương pháp quy nạp toán học được sử dụng để chứng minh $P(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$ với n_0 là một số tự nhiên.

Phương pháp quy nạp toán học (dạng yếu): Giả sử

- $P(n_0)$ đúng.
- Với mọi $k \geq n_0$ và $P(k)$ đúng thì $P(k+1)$ đúng.

Khi đó $P(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$.

Phương pháp quy nạp toán học (bước nhảy s): Cho s là số nguyên dương. Giả sử

- $P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n_0+s-1)$ đúng.
- Với mọi $k \geq n_0$, $P(k)$ đúng kéo theo $P(k+s)$ đúng.

Khi đó $P(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$.

Phương pháp quy nạp toán học (Dạng mạnh): Giả sử

- $P(n_0)$ đúng
- Với mọi $k \geq n_0$, $P(m)$ đúng với mọi m mà $n_0 \leq m \leq k$ kéo theo $P(k+1)$ đúng.

Khi đó $P(n)$ đúng với mọi $n \geq n_0$.

II. Ví dụ minh họa

Ví dụ 4.1. Chứng minh rằng

$$\sqrt{n} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} \quad (1.1)$$

với mọi số nguyên dương n .

Ta thấy (1.1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1.1) đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$\sqrt{k} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{k}, \quad (1.2)$$

ta chứng minh (1.1) đúng với $n = k+1$, tức là

$$\sqrt{k+1} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\sqrt{k+1}. \quad (1.3)$$

Thật vậy, dựa vào (1.2) ta có

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Mặt khác

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \sqrt{k+1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} > 0,$$

và

$$2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} > 0.$$

Từ đó ta có đpcm.

Ví dụ 4.2 (VMO 2011). Chứng minh rằng với $\forall n \geq 1, \forall x > 0$ ta có bất đẳng thức:

$$\frac{x^n(x^{n+1} + 1)}{x^n + 1} \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2n+1}. \quad (1.4)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

- Với $n = 1$ ta cần chứng minh:

$$\frac{x(x^2 + 1)}{x + 1} \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 8x(x^2 + 1) \leq (x+1)^4$$

hay là:

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^4 \geq 0 \quad (\text{đúng}).$$

Suy ra (1.4) đúng với $n = 1$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$.

- Giả sử (1.4) đúng với $n = k \geq 1$, tức là:

$$\frac{x^k(x^{k+1} + 1)}{x^k + 1} \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+1}. \quad (1.5)$$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{x^{k+1}(x^{k+2} + 1)}{x^{k+1} + 1} \leq \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+3}. \quad (1.6)$$

Thật vậy, ta có:

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+3} = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \left(\frac{x+1}{2}\right)^{2k+1} \geq \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \frac{x^k(x^{k+1} + 1)}{x^k + 1}.$$

Nên để chứng minh (1.6) ta chỉ cần chứng minh

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \frac{x^k(x^{k+1} + 1)}{x^k + 1} \geq \frac{x^{k+1}(x^{k+2} + 1)}{x^{k+1} + 1},$$

hay

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 (x^{k+1} + 1)^2 \geq x(x^{k+2} + 1)(x^k + 1). \quad (1.7)$$

Khai triển (1.7), biến đổi và rút gọn ta thu được:

$$x^{2k+2}(x-1)^2 - 2x^{k+1}(x-1)^2 + (x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^{k+1} - 1)^2 \geq 0,$$

bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Đẳng thức có khi $x = 1$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 4.3. Cho $n \geq 2$ số thực không âm $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^n (i-1)a_i^2 \leq \frac{n-1}{2n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2. \quad (1.8)$$

- Với $n = 2$ ta có: $a_2^2 \leq \frac{1}{4}(a_1 + a_2)^2$ đúng do $a_2 \leq a_1$, nên (1.8) đúng với $n = 2$.
- Giả sử (1.8) đúng với $n = k$, tức là:

$$\sum_{i=1}^k (i-1)a_i^2 \leq \frac{k-1}{2k} \left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^2. \quad (1.9)$$

Ta chứng minh (1.8) đúng với $n = k+1$, tức là:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} (i-1)a_i^2 &\leq \frac{k}{2(k+1)} \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i \right)^2 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k (i-1)a_i^2 + ka_{k+1}^2 &\leq \frac{k}{2(k+1)} \left(\sum_{i=1}^k a_i + a_{k+1} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Đặt $x = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i, x \geq x_{k+1}$. Sử dụng (1.9), ta chỉ cần chứng minh:

$$\begin{aligned} \frac{k-1}{2k} \left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^2 + ka_{k+1}^2 &\leq \frac{k}{2(k+1)} \left(\sum_{i=1}^k a_i + a_{k+1} \right)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{k(k-1)}{2} x^2 + kx_{k+1}^2 &\leq \frac{k}{2(k+1)} (kx + x_{k+1})^2 \\ \Leftrightarrow (k^2 - 1)x^2 + 2(k+1)x_{k+1} &\leq (kx + x_{k+1})^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2kx \cdot x_{k+1} - (2k+1)x_{k+1}^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x - x_{k+1})[x + (2k+1)x_{k+1}] &\geq 0 \quad (\text{đúng}). \end{aligned}$$

Vậy (1.8) luôn đúng.

Ví dụ 4.4. Cho các số nguyên dương phân biệt $a_1, a_2, \dots, a_n$. Chứng minh rằng

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2. \quad (1.11)$$

đúng với mọi $n \geq 1$.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Với $n = 1$ ta có $a_1^3 \geq a_1^2$ nên (1.11) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1.11) đúng với $n = k$ và $a_1 < a_2 < \dots < a_k < a_{k+1}$ là các số nguyên dương. Khi đó $a_{k+1} \geq a_k + 1$, nên

$$\frac{(a_{k+1} - 1)a_{k+1}}{2} \geq \frac{a_k(a_k + 1)}{2} = 1 + 2 + \dots + a_k.$$

Vì $1 + 2 + \dots + a_k$ là tổng của a_k số nguyên dương đầu tiên, nên

$$1 + 2 + \dots + a_k \geq a_1 + a_2 + \dots + a_k.$$

Suy ra

$$\frac{(a_{k+1} - 1) a_{k+1}}{2} \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

Hay

$$a_{k+1}^3 \geq 2a_{k+1} (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + a_{k+1}^2.$$

Do đó

$$\begin{aligned} a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_k^3 + a_{k+1}^3 &\geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2 + 2a_{k+1} (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + a_{k+1}^2 \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1})^2. \end{aligned}$$

Suy ra (1.11) được chứng minh.

Ví dụ 4.5. Cho $2n$ số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^n \frac{(b_1 + b_2 + \cdots + b_k) b_k}{a_1 + a_2 + \cdots + a_k} < 2 \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{a_i}. \quad (1.12)$$

Ta thấy bất đẳng thức (1.12) đúng với $n = 1$.

Giả sử bất đẳng thức (1.12) đúng với $n \geq$, tức là

$$\sum_{k=1}^n \frac{(b_1 + b_2 + \cdots + b_k) b_k}{a_1 + a_2 + \cdots + a_k} < 2 \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{a_i}, \quad (1.13)$$

ta chứng minh (1.12) đúng với $n + 1$, tức là

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(b_1 + b_2 + \cdots + b_k) b_k}{a_1 + a_2 + \cdots + a_k} < 2 \sum_{i=1}^{n+1} \frac{b_i^2}{a_i}. \quad (1.14)$$

Áp dụng cho trường hợp $2n$ số

$$(a_1 + a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n+1}, b_1 + b_2, b_3, b_4, \dots, b_{n+1})$$

ta có

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(b_1 + b_2 + \cdots + b_k) b_k}{a_1 + a_2 + \cdots + a_k} &< 2 \sum_{i=1}^{n+1} \frac{b_i^2}{a_i}. \\ \frac{(b_1 + b_2)^2}{a_1 + a_2} + \sum_{k=3}^n \frac{(b_1 + \cdots + b_k) b_k}{a_1 + \cdots + a_k} &\leq \frac{3}{2} \frac{(b_1 + b_2)^2}{a_1 + a_2} + 2 \sum_{k=3}^n \frac{b_k^2}{a_k}. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{b_1^2}{a_1} + \frac{(b_1 + b_2) b_2}{a_1 + a_2} + \frac{1}{2} \frac{(b_1 + b_2)^2}{a_1 + a_2} &\leq \frac{3}{2} \frac{b_1^2}{a_1} + 2 \frac{b_2^2}{a_2} \\ \Leftrightarrow \frac{b_1^2 + 4b_1 b_2 + 3b_2^2}{a_1 + a_2} &\leq \frac{b_1^2}{a_1} + 4 \frac{b_2^2}{a_2} \\ \Leftrightarrow b_1^2 + 4b_1 b_2 + 3b_2^2 &\leq b_1^2 + \frac{a_2}{a_1} b_1^2 + 4 \frac{a_1}{a_2} b_2^2 + 4b_2^2 \\ \Leftrightarrow 4b_1 b_2 &\leq \frac{a_2}{a_1} b_1^2 + 4 \frac{a_1}{a_2} b_2^2 + b_2^2 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối đúng, bằng cách áp dụng bất đẳng thức AM-GM

$$\frac{a_2}{a_1} b_1^2 + 4 \frac{a_1}{a_2} b_2^2 \geq 2 \sqrt{\frac{a_2}{a_1} b_1^2 \cdot 4 \frac{a_1}{a_2} b_2^2} = 4b_1 b_2.$$

§5. Phương pháp phân tích bình phương SOS

I. Lý thuyết

1. Một số tiêu chuẩn đánh giá

Xét biểu thức:

$$S = f(a, b, c) = S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 + S_c(a - b)^2.$$

trong đó S_a, S_b, S_c là các biểu thức chứa a, b, c là các số thực không âm.

Tính chất 1.

Nếu $S_a, S_b, S_c \geq 0$ thì $S \geq 0$.

Tính chất 2.

Nếu $a \geq b \geq c$ và $S_b, S_b + S_c \geq 0, S_b + S_a \geq 0$ thì $S \geq 0$.

Thật vậy:

Vì $a \geq b \geq c$ nên

$$(c - a)^2 = [(a - b) + (b - c)]^2 \geq (a - b)^2 + (b - c)^2.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S &\geq S_a(b - c)^2 + S_b[(a - b)^2 + (b - c)^2] + S_c(a - b)^2 \\ &= (S_a + S_b)(b - c)^2 + (S_b + S_c)(a - b)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Tính chất 3.

Nếu $a \geq b \geq c$ và $S_b \leq 0, S_a + 2S_b \geq 0, S_c + 2S_b \geq 0$ thì $S \geq 0$.

Thật vậy, ta có

$$(a - c)^2 = [(a - b) + (b - c)]^2 \leq 2(a - b)^2 + 2(b - c)^2.$$

Suy ra

$$S \geq (S_a + 2S_b)(b - c)^2 + (S_c + 2S_b)(a - b)^2 \geq 0.$$

Tính chất 4.

Nếu $a \geq b \geq c$ và $S_b \geq 0, S_c \geq 0, a^2S_b + b^2S_a \geq 0$ thì $S \geq 0$.

Ta có $a \geq b \geq c \Rightarrow \frac{a - c}{b - c} \geq \frac{b}{a}$. Suy ra

$$S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 = (b - c)^2 \left[S_a + S_b \left(\frac{c - a}{b - c} \right)^2 \right] \geq (b - c)^2 \left[S_a + S_b \frac{b^2}{a^2} \right] \geq 0.$$

2. Một số biểu diễn cơ sở

- $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{1}{ab}(a - b)^2.$
- $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].$
- $\sqrt{2(a^2 + b^2)} - (a + b) = \frac{(a - b)^2}{a + b + \sqrt{2(a^2 + b^2)}}.$
- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2].$
- $a^3 + b^3 - ab(a + b) = (a + b)(a - b)^2.$

- $a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a = \frac{1}{3} [(2a+b)(a-b)^2 + (2b+c)(b-c)^2 + (2c+a)(c-a)^2]$.
- $(a+b)(b+c)(c+a) - 8abc = a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2$.
- $a^2b + b^2c + c^2a - ab^2 - bc^2 - ca^2 = -\frac{1}{3} [(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3]$.
- $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} = \frac{(a-b)^2}{2(a+c)(b+c)} + \frac{(b-c)^2}{2(b+a)(c+a)} + \frac{(c-a)^2}{2(c+b)(a+c)}$.

II. Các ví dụ

Ví dụ 5.1 (IMO 2005). Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xyz \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0. \quad (1)$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} &\geq \frac{x^5 - x^2xyz}{x^5 + (y^2 + z^2)xyz} = \frac{x^4 - x^2yz}{x^4 + yz(y^2 + z^2)} \\ &\geq \frac{2x^4 - x^2(y^2 + z^2)}{2x^4 + (y^2 + z^2)^2} = \frac{2a^2 - a(b+c)}{2a^2 + (b+c)^2}, \end{aligned}$$

với $a = x^2, b = y^2, c = z^2$.

Suy ra

$$\begin{aligned} VT(1) &\geq \sum_{a, b, c} \frac{2a^2 - a(b+c)}{2a^2 + (b+c)^2} = \sum_{a, b, c} \frac{a(a-b) + a(a-c)}{2a^2 + (b+c)^2} \\ &= \sum (a-b) \left(\frac{a}{2a^2 + (b+c)^2} - \frac{b}{2b^2 + (c+a)^2} \right) \\ &= \sum_{a, b, c} (a-b)^2 \frac{c(2a+2b+c) + a^2 - ab + b^2}{(2a^2 + (b+c)^2)(2b^2 + (c+a)^2)} \geq 0 \text{ (đúng)}. \end{aligned}$$

Ví dụ 5.2 (VMO 2015). Cho $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng

$$(a+b+c) \left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \right) + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq (a+b+c)^2.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq (a+b+c) \left(a+b+c - \sqrt{ab} - \sqrt{bc} - \sqrt{ca} \right).$$

Đặt $x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}, z = \sqrt{c}$ ta cần chứng minh

$$\sum (x^2 - y^2)^2 \geq (x^2 + y^2 + z^2) (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx). \quad (2)$$

Mà

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2} (x-y)^2 + \frac{1}{2} (y-z)^2 + \frac{1}{2} (z-x)^2.$$

Nên (2) trở thành

$$S_x (y - z)^2 + S_y (z - x)^2 + S_z (x - y)^2 \geq 0, \quad (3)$$

với $S_x = y^2 + z^2 + 4yz - x^2, S_y = z^2 + x^2 + 4zx - y^2, S_z = x^2 + y^2 + 4xy - z^2$.

Giải sử $x \geq y \geq z$, khi đó $S_y \geq 0, S_z \geq 0$ và $S_x + S_y = 2z^2 + 4yz + 4zx \geq 0$.

Lại có $(x - z)^2 \geq (y - z)^2$ nên

$$VT(3) \geq (S_x + S_y)(y - z)^2 \geq 0 \text{ nên (3) đúng.}$$

Ví dụ 5.3. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{8abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} \geq 2.$$

Ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) &= \frac{1}{2} [(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \\ (a + b)(b + c)(c + a) - 8abc &= a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2}{ab + bc + ca} &\geq \frac{2a(b - c)^2 + 2b(c - a)^2 + 2c(a - b)^2}{(a + b)(b + c)(c + a)} \\ \Leftrightarrow \sum (a - b)^2 \left(\frac{1}{ab + bc + ca} - \frac{2c}{(a + b)(b + c)(c + a)} \right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sum (a - b)^2 S_c &\geq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Với

$$\begin{aligned} S_a &= \frac{1}{ab + bc + ca} - \frac{2a}{(a + b)(b + c)(c + a)} \\ S_b &= \frac{1}{ab + bc + ca} - \frac{2b}{(a + b)(b + c)(c + a)} \\ S_c &= \frac{1}{ab + bc + ca} - \frac{2c}{(a + b)(b + c)(c + a)}. \end{aligned}$$

Giải sử $a \geq b \geq c$ ta có $S_b, S_c \geq 0$ và

$$S_a + S_b = \frac{2}{ab + bc + ca} - \frac{2}{(a + c)(b + c)} \geq 0.$$

Suy ra (4) đúng.

Ví dụ 5.4. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{3(a^3 + b^3 + c^3)}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Ta giả sử b nằm giữa a và c . Ta có

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} - (a + b + c) &= \frac{(a - b)^2}{b} + \frac{(b - c)^2}{c} + \frac{(c - a)^2}{a} \\ \frac{3(a^3 + b^3 + c^3)}{a^2 + b^2 + c^2} - (a + b + c) &= \frac{(a + b)(a - b)^2 + (b + c)(b - c)^2 + (c + a)(c - a)^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0. \quad (5)$$

Với $S_a = \frac{a^2 + b^2 - bc}{c}$; $S_b = \frac{b^2 + c^2 - ac}{a}$; $S_c = \frac{a^2 + c^2 - ab}{b}$.

- Nếu $a \geq b \geq c \Rightarrow S_a \geq 0, S_c \geq 0$ và

$$S_a + 2S_b = \frac{a^2 + b^2 - bc}{c} + 2\frac{b^2 + c^2 - ca}{a} > 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} S_c + 2S_b &= \frac{c^2 + a^2 - ab}{b} + 2\frac{b^2 + c^2 - ca}{a} \\ &\geq \frac{c^2}{b} + a - b + 2\frac{b^2 + c^2 - ca}{a} \\ &\geq \frac{c^2}{a} + a - b + 2\frac{b^2 + c^2 - ca}{a}, \end{aligned}$$

hay

$$S_c + 2S_b \geq \frac{a^2 + 2b^2 + 3c^2 - ab - 2ca}{a}.$$

Mặt khác

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a^2 + 3c^2 \geq 2ca \\ \frac{2}{3}a^2 + 2b^2 > ab \end{cases} \Rightarrow a^2 + 2b^2 + 3c^2 \geq 2ca + ab.$$

Do đó, ta có $S_c + 2S_b > 0$.

- Nếu $a \leq b \leq c \Rightarrow S_b \geq 0$ thì ta có

$$\begin{aligned} S_b + S_a &= \frac{b^2 + c^2 - ca}{a} + \frac{a^2 + b^2 - bc}{c} > 0 \\ S_b + S_c &= \frac{b^2 + c^2 - ca}{a} + \frac{c^2 + a^2 - ab}{b} > 0. \end{aligned}$$

Ví dụ 5.5 (Iran 1996). Cho a, b, c là số dương. Chứng minh rằng :

$$(ab + bc + ca) \left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) \geq \frac{9}{4}.$$

Đặt $x = a + b, y = b + c, z = c + a \Rightarrow a = \frac{x+z-y}{2}, b = \frac{x+y-z}{2}, c = \frac{z+y-x}{2}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} &(2xy + 2yz + 2zx - x^2 - y^2 - z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \geq 9 \\ \Leftrightarrow &2(xy + yz + zx - x^2 - y^2 - z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) + (x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) - 9 \geq 0 \\ \Leftrightarrow &-[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) + \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 2 \right) + \left(\frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{y^2} - 2 \right) + \\ &\quad + \left(\frac{z^2}{x^2} + \frac{x^2}{z^2} - 2 \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow &S_z(x-y)^2 + S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 \geq 0; S_x = \frac{2}{yz} - \frac{1}{x^2}, S_y = \frac{2}{zx} - \frac{1}{y^2}, S_z = \frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2}. \end{aligned}$$

Giả sử $x \geq y \geq z$ suy ra $S_x \geq 0, S_x \geq S_y \geq S_z$.

Mặt khác

$$y + z \geq x \Rightarrow zx \leq z(y + z) \leq 2y^2 \Rightarrow S_y \geq 0$$

$$(x - z)^2 \geq \frac{y^2}{z^2} (x - y)^2 \Leftrightarrow (y - z)(y + z - x) \geq 0 \text{ (đúng).}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} S_z(x - y)^2 + S_x(y - z)^2 + S_y(z - x)^2 &\geq S_y(z - x)^2 + S_z(x - y)^2 \\ &\geq \frac{y^2}{z^2} (x - y)^2 S_y + S_z(x - y)^2 \end{aligned}$$

Mà

$$\begin{aligned} y^2 S_y + z^2 S_z &= y^2 \left(\frac{2}{zx} - \frac{1^2}{y} \right) + z^2 \left(\frac{2}{xy} - \frac{1^2}{z} \right) = \frac{2y^2}{zx} + \frac{2z^2}{xy} - 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow y^3 + z^3 \geq xyz. \end{aligned}$$

Do $y + z \geq x, y^2 + z^2 - yz \geq yz$ suy ra $y^2 S_y + z^2 S_z \geq 0$.

III. Bài tập

Bài 5.1 (Bất đẳng thức Schur). Cho a, b, c là các không âm. Chứng minh rằng :

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a).$$

Bài 5.2. Cho $a, b, c \geq 0$ và không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{ab - bc + ca}{b^2 + c^2} + \frac{bc - ca + ab}{c^2 + a^2} + \frac{ca - ab + bc}{a^2 + b^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Bài 5.3. Cho a, b, c là các không âm. Chứng minh rằng :

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab\sqrt{2(a^2 + b^2)} + bc\sqrt{2(b^2 + c^2)} + ca\sqrt{2(c^2 + a^2)}.$$

Bài 5.4. Cho a, b, c là số không âm. Chứng minh rằng :

$$\frac{2a^2 + bc}{b^2 + c^2} + \frac{2b^2 + ca}{c^2 + a^2} + \frac{2c^2 + ab}{a^2 + b^2} \geq \frac{9}{2}.$$

Bài 5.5. Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a) + 12abc.$$

Bài 5.6. (VN TST 2006) Chứng minh rằng với mọi số thực $x, y, z \in [1; 2]$, ta luôn có bất đẳng thức sau :

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 6 \left(\frac{x}{y + z} + \frac{y}{z + x} + \frac{z}{x + y} \right).$$

Hỏi đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào ?

Bài 5.7. Bài 5.8. Cho các số thực $a, b, c \in [0; 1]$ thỏa mãn $a + b + c = 2$.

Chứng minh rằng $\frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \leq a^3 + b^3 + c^3 \leq \frac{4}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - 3abc$.

Bài 5.9. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Bài 5.10. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \leq \frac{a^2 + b^2}{a+b} + \frac{b^2 + c^2}{b+c} + \frac{c^2 + a^2}{c+a}.$$

Bài 5.11. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a+b+c} \geq \frac{a^2 + b^2}{a+b} + \frac{b^2 + c^2}{b+c} + \frac{c^2 + a^2}{c+a}.$$

Bài 5.12. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right) + a + b + c \geq \frac{3}{2} \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Bài 5.13. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{1}{2} \left(4 - \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \right).$$

Bài 5.14. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} + \frac{9(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 33.$$

§6. Phương pháp dồn biến

I. Lý thuyết

Mục đích của phương pháp này là làm giảm biến trong bất đẳng thức cần chứng minh.

II. Ví dụ minh họa

Ví dụ 6.1. Cho $a, b, c \geq -3$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Giả sử $a = \min\{a, b, c\}$ và đặt $f(a, b, c) = \sum_{cyc} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} \right)$.

Ta có $-3 \leq a \leq 1$ và

$$\begin{aligned} f(a, b, c) - f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) &= \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{8}{(b+c)^2} - \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{4}{b+c} \right) \\ &= \frac{(b-c)^2(b^2 + 4bc + c^2 - bc(b+c))}{b^2c^2(b+c)^2} \\ &= \frac{(b-c)^2((3-a)^2 + bc(a-1))}{b^2c^2(b+c)^2} \\ &\geq \frac{(b-c)^2 \left((3-a)^2 + \frac{(3-a)^2(a-1)}{4} \right)}{b^2c^2(b+c)^2} \\ &= \frac{(b-c)^2(3-a)^2(a+3)}{4b^2c^2(b+c)^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Tiếp theo ta chứng minh $f(a, t, t) \geq 0$ với $t = \frac{a+b}{2} = \frac{3-a}{2}$. Thật vậy

$$\begin{aligned} f(a, t, t) &= \frac{1}{a^2} + \frac{2}{t^2} - \frac{1}{a} - \frac{2}{t} \\ &= \frac{t^2 + 2a^2 - at^2 - 2ta^2}{a^2t^2} \\ &= \frac{(a+3)(a-1)^2}{4a^2t^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 6.2. Cho các số thực dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{6}{a+b+c} \geq 5.$$

Giải sử $a = \max\{a, b, c\}$, suy ra $bc \leq 1 \leq a$.

Đặt $f(a, b, c) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{6}{a+b+c}$ và $x = \sqrt{bc}$. Ta có

$$\begin{aligned} f(a, b, c) - f(a, x, x) &= \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{2}{x} + \frac{6}{a+b+c} - \frac{6}{a+2x} \\ &= \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2}{bc} - \frac{6(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2}{(a+b+c)(a+2x)} \\ &= (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \left(\frac{1}{bc} - \frac{6}{(a+b+c)(a+2x)} \right). \end{aligned}$$

Ta có

$$(a+b+c)(a+2x) - 6bc \geq \left(\frac{1}{x^2} + 2x \right) \left(\frac{1}{x^2} + 2x \right) - 6x^2 \geq 3 \cdot 3 - 6x^2 > 0.$$

Suy ra

$$f(a, b, c) \geq f(a, x, x) = f\left(\frac{1}{x^2}, x, x\right).$$

Ta chứng minh $f\left(\frac{1}{x^2}, x, x\right) \geq 5$. (1)

Tuy nhiên (1) tương đương với

$$(x-1)^2(2x^4 + 4x^3 - 4x^2 - x + 2) \geq 0. \quad (2)$$

Bất đẳng thức (2) đúng do $0 < x \leq 1$.

Ví dụ 6.3. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) \leq 6.$$

Giải sử $a = \min\{a, b, c\}$. Đặt $f(a, b, c) = a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b)$ và $t = \sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}} \geq a$.

Xét

$$P = f(a, b, c) - f(a, t, t) = a^3(b+c-2t) + a(b^3+c^3-2t^3) + t^2(2bc-2t^2)$$

Ta có

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &\geq \frac{(b+c)^2}{2} \Rightarrow t \geq \frac{1}{2}(b+c) \Rightarrow b+c-2t \leq 0, \\ b^3 + c^3 - 2t^3 &= (b+c)(b^2+c^2-bc) - 2t^3 \leq 2t(b^2+c^2-bc) - 2t^3 = t(b-c)^2 \\ 2bc - 2t^2 &= -(b-c)^2. \end{aligned}$$

Suy ra

$$P \leq 0 + ta(b-c)^2 - t^2(b-c)^2 = t(b-c)^2(a-t) \leq 0 \Rightarrow f(a, b, c) \leq f(a, t, t).$$

Mặt khác, ta có $a^2 + 2t^2 = 3$ nên

$$\begin{aligned} f(a, t, t) &\leq 6 \Leftrightarrow a^3t + t^3a \leq 3 - t^4 \Leftrightarrow at(a^2 + t^2) \leq 3 - t^4 \\ &\Leftrightarrow a^2t^2(3 - t^2)^2 \leq (3 - t^4)^2 \Leftrightarrow (t^2 - 1)^2(t^4 - 3t^2 + 3) \geq 0 \text{ (bđt này luôn đúng)}. \end{aligned}$$

Ví dụ 6.4. Cho các số thực không âm a, b, c . Chứng minh rằng

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 4(a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a).$$

Kí hiệu (1) là bất đẳng thức cần chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a = \min\{a, b, c\}$.

+) $b \geq c$ thì (1) luôn đúng.

+) Xét $c \geq b$. Khi đó

$$VT(1) \geq (b^2 + c^2)^2 \quad \text{và} \quad c - a \leq c$$

Ta chứng minh :

$$(a + b + c)(b - a) \leq b(b + c) \quad (2)$$

Thật vậy

$$(2) \Leftrightarrow ab - a^2 + b^2 - ab + bc - ca \leq b^2 + bc \Leftrightarrow a(c + a) \geq 0 \quad (\text{luôn đúng})$$

Từ đó, suy ra

$$VP(1) \leq bc(b + c)(c - b) = bc(c^2 - b^2).$$

Để chứng minh (1), ta chứng minh:

$$(b^2 + c^2)^2 \geq 4bc(b^2 - c^2) \quad (3).$$

Nếu $b = 0 \Rightarrow (3)$ đúng. Xét $b \neq 0$ ta đặt $t = \frac{c}{b} \geq 1$. Khi đó (3) trở thành

$$(t^2 + 1)^2 \geq 4t(t^2 - 1) \Leftrightarrow t^4 - 4t^3 + 2t^2 + 4t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 2t - 1)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng}).$$

Suy ra (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy khi $\begin{cases} a = 0 \\ c = (1 + \sqrt{2})b \end{cases}$ và các hoán vị.

Ví dụ 6.5 (Hojo Lee). Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}.$$

Giả sử $c = \max\{a, b, c\}$. Đặt $f(a, b, c) = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$.

Nếu $c = 0$, ta có $ab = 1$ nên $a + b \geq 2$ và

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b} + a + b \\ &= \frac{1}{a+b} + \frac{a+b}{4} + \frac{3(a+b)}{4} \geq 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Xét

$$\begin{aligned}
P &= f(a, b, c) - f\left(a + b, \frac{1}{a+b}, 0\right) \\
&= \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b + \frac{1-ab}{a+b}} + \frac{1}{c + \frac{1-ab}{a+b}}\right) - \left(\frac{1}{a+b + \frac{1}{a+b}} + a + b + \frac{1}{a+b}\right) \\
&= (a+b) \left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - 1 - \frac{1}{1+(a+b)^2}\right) \\
&= (a+b) \frac{a(2-2ab-ab(a+b)^2)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+(a+b)^2)}.
\end{aligned}$$

Ta có $2 - 2ab = 2(1 - ab) = 2(bc + ac) = 2c(a + b) \geq ab(a + b)^2$. Suy ra $P \geq 0$, từ đó ta có

$$f(a, b, c) \geq f\left(t, \frac{1}{t}, 0\right) \geq \frac{5}{2}.$$

III. Bài tập

Bài 6.1. Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = abc + \frac{12}{ab + bc + ca}$.

b) Chứng minh số nguyên k nhỏ nhất sao cho

$$abc + \frac{k}{ab + bc + ca} \geq 1 + \frac{k}{3}$$

với mọi a, b, c thỏa mãn điều kiện trên là $k = 10$.

Bài 6.2 (Nguyễn Văn Quý). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{3a^2 + 4bc + 9} + \sqrt{3b^2 + 4ca + 9} + \sqrt{3c^2 + 4ab + 9} \geq 12.$$

Bài 6.3 (Liu Quan Bao). Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{9 - 6ab + a^2 + b^2} + \sqrt{9 - 6bc + b^2 + c^2} + \sqrt{9 - 6ca + c^2 + a^2} \geq 3\sqrt{5}.$$

Bài 6.4. (Yi Chang) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $\sqrt{1 + 3bc + \frac{7}{12}(b - c)^2} + \sqrt{1 + 3ca + \frac{7}{12}(c - a)^2} + \sqrt{1 + 3ab + \frac{7}{12}(a - b)^2} \leq 6$.

Bài 6.5. (Võ Quốc Bá Cẩn) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $\sqrt{2(a^2 + b^2) + 21c} + \sqrt{2(b^2 + c^2) + 21a} + \sqrt{2(c^2 + a^2) + 21b} \geq 15$.

Bài 6.6. (Phạm Thanh Tùng) Cho các số thực dương a, b, c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\sqrt{3a^2 - a + 1} + \sqrt{3b^2 - b + 1} + \sqrt{3c^2 - c + 1} \leq \sqrt{6(a^2 + b^2 + c^2) + 9}$$

Bài 6.7. (Phạm Kim Hùng) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a + b - 2ab} + \sqrt{b + c - 2bc} + \sqrt{c + a - 2ca} \geq 2.$$

Để kết thúc bài viết, chúng tôi xin giới thiệu một bài toán rất chặt và khó của Liu Quan Ban. Ngoài lời giải bằng dồn biến mà chúng tôi biết và giới thiệu ở đây chúng tôi chưa thấy có lời giải nào khác.

Bài 6.8. (Liu Quan Bao) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2a^2 - a + 1} + \sqrt{2b^2 - b + 1} + \sqrt{2c^2 - c + 1} \geq \frac{1}{3}\sqrt{21(a^2 + b^2 + c^2) + 99}.$$

Bài 6.9. Cho các số thực dương a, b, c có tích bằng 1. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{13}{a + b + c} \geq \frac{25}{4}.$$

Bài 6.10. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 9$. Chứng minh rằng

$$2(a + b - c) + abc \leq 10.$$

Bài 6.11. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$2(a^4 + b^4 + c^4) + 36 \geq 7(a^3 + b^3 + c^3 + 3abc).$$

Bài 6.12. Cho các số thực $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq (a + b + c)^2.$$

Bài 6.13. Cho các số thực $a, b, c \geq -3$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Bài 6.14. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 9$. Chứng minh rằng

$$2(a + b + c) - abc \leq 10.$$

Bài 6.15 (Iran 1996). Cho a, b, c là số dương. Chứng minh rằng :

$$(ab + bc + ca) \left(\frac{1}{(a + b)^2} + \frac{1}{(b + c)^2} + \frac{1}{(c + a)^2} \right) \geq \frac{9}{4}.$$

Chương 2

Các phương pháp chứng minh bất đẳng thức hiện đại

§1. Phương pháp p, q, r

I. Lý thuyết

1. Bất đẳng thức Schur

Cho các số thực không âm x, y, z và số thực dương r . Khi đó, ta có bất đẳng thức sau

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-x)(y-z) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$ hoặc $z = 0, x = y$ và các hoán vị.

Hệ quả 1.

a) Xét $r = 1$ ta có các dạng sau

- $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$
- $4(x^3 + y^3 + z^3) + 15xyz \geq (x+y+z)^3$
- $xyz \geq (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$
- $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{9xyz}{x+y+z} \geq 2(xy + yz + zx)$
- $(x+y+z)^3 + 9xyz \geq 4(x+y+z)(xy + yz + zx)$

b) $r = 2$ ta có các dạng sau

- $x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) \geq xy(x^2 + y^2) + yz(y^2 + z^2) + zx(z^2 + x^2)$
- $6xyz(x+y+z) \geq [2(xy + yz + zx) - (x^2 + y^2 + z^2)](x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx).$

2. Một số biểu diễn đa thức đối xứng ba biến qua p, q, r

Cho các số thực a, b, c . Đặt $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$ và $r = abc$. Khi đó ta có các biểu diễn sau

- $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) = pq - 3r.$
- $(a+b)(b+c)(c+a) = pq - r.$
- $ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(c^2 + a^2) = p^2q - 2q^2 - pr.$
- $(a+b)(a+c) + (b+c)(b+a) + (c+a)(c+b) = p^2 + q.$
- $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q.$
- $a^3 + b^3 + c^3 = p^3 - 3pq + 3r.$
- $a^4 + b^4 + c^4 = p^4 - 4p^2q + 2q^2 + 4pr.$
- $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = q^2 - 2pr.$
- $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = q^3 - 3pqr + 3r^2.$
- $a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 = q^4 - 4pq^2r + 2p^2r^2 + 4qr^2.$

3. Một số đánh giá giữa p, q, r

Dựa vào các bất đẳng thức cơ bản ba biến và bất đẳng thức Schur ta có các đánh giá sau

- $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \Rightarrow p^2 \geq 3q.$
- $(a + b + c)^3 \geq 27abc \Rightarrow p^3 \geq 27r.$
- $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c) \Rightarrow q^2 \geq 3pr.$
- $(a + b + c)(ab + bc + ca) \geq 9abc \Rightarrow pq \geq 9r.$
- $p^3 + 9r \geq 4pq$ (BĐT Schur với $r = 1$).
- $p^4 + 4q^2 + 6pr \geq 5p^2q$ (BĐT Schur với $r = 2$).
- $r \geq \max\left(0, \frac{p(4q - p^2)}{9}\right)$ (BĐT Schur với $r = 1$).
- $r \geq \max\left(0, \frac{(4q - p^2)(p^2 - q)}{6p}\right)$ (BĐT Schur với $r = 2$).

II. Một số ví dụ

Ví dụ 1.1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$5(a + b + c) + \frac{3}{abc} \geq 18.$$

Ta có $p^2 - 2q = 3$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$5p + \frac{3}{r} \geq 18. \quad (1)$$

Ta có

$$q^2 \geq 3rq \Rightarrow \frac{3}{r} \geq \frac{9p}{q^2} = \frac{36p}{(p^2 - 3)^2}.$$

Do đó

$$VT(1) \geq 5p + \frac{36p}{(p^2 - 3)^2}.$$

Nên ta đi chứng minh

$$\begin{aligned} 5p + \frac{36p}{(p^2 - 3)^2} &\Leftrightarrow 5p^5 - 18p^4 - 30p^3 + 108p^2 + 81p - 162 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (p - 3)^2(5p^3 + 12p^2 - 3p - 18) \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Ta có

$$3 < p^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 9 \Rightarrow \sqrt{3} < p \leq 3 \Rightarrow 5p^3 + 12p^2 - 3p - 18 > 0,$$

nên (2) luôn đúng.

Ví dụ 1.2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{(a+b)(b+c) + (b+c)(c+a) + (c+a)(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{p^2 + q}{pq - r} \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{p^2 + 1}{p - r} \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2p^2 - 5p + 5r + 2 \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Nếu $p \geq 2$ thì

$$2p^2 - 5p + 2 + 5r = (p-2)(2p-1) + 5r \geq 0,$$

suy ra (1) đúng.

Xét $\sqrt{3} \leq p < 2$ ta có $r \geq \frac{4pq - p^3}{9} = \frac{4p - p^3}{9}$. Nên để chứng minh (1) ta chứng minh

$$2p^2 - 5p + 2 + 5\frac{4p - p^3}{9} \geq 0 \Leftrightarrow (p-2)(5p^2 - 8p + 9) \leq 0 \quad (\text{luôn đúng}).$$

Ví dụ 1.3. Chứng minh rằng nếu $x, y, z > 0$ thì

$$(xy + yz + zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \frac{9}{4}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} & (x+y)^2(y+z)^2 + (y+z)^2(z+x)^2 + (z+x)^2(x+y)^2 \\ = & ((x+y)(y+z) + (y+z)(z+x) + (z+x)(x+y))^2 - 4(x+y)(y+z)(z+x)(x+y+z) \\ = & (p^2 + q)^2 - 4p(pq - r). \end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & q\left(\frac{(p^2 + q)^2 - 4p(pq - r)}{(pq - r)^2}\right) \geq \frac{9}{4} \\ \Leftrightarrow & 4p^4q - 17p^2q^2 + 4q^3 + 34pqr - 9r^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 3pq(p^3 - 4pq + 9r) + q(p^4 - 5p^2q + 4q^2 + 6pr) + r(pq - 9r) \geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên ta có đpcm.

III. Bài tập

Bài 1.1. Cho các số dương a, b, c thỏa $abc = 1$. Chứng minh rằng :

$$1 + \frac{3}{a+b+c} \geq \frac{6}{ab+bc+ca}.$$

Bài 1.2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca + 6abc = 9$. Chứng minh rằng

$$a + b + c + 3abc \geq 6.$$

Bài 1.3. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 7abc \geq 10.$$

Bài 1.4. Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$3 + \frac{12}{abc} \geq 5 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Bài 1.5. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3.$$

Bài 1.6. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ca} \leq \frac{3}{8}.$$

Bài 1.7. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx + xyz = 4$. Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5xyz \geq 8.$$

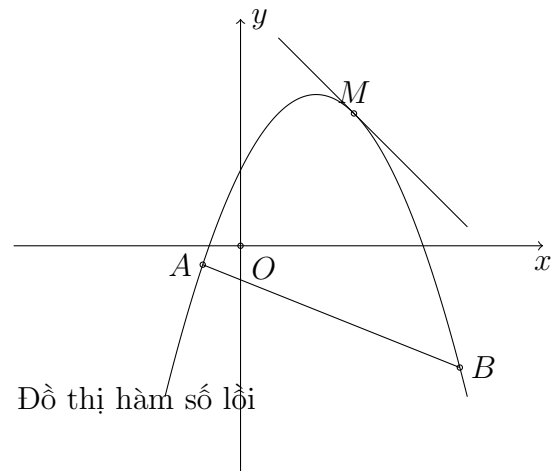
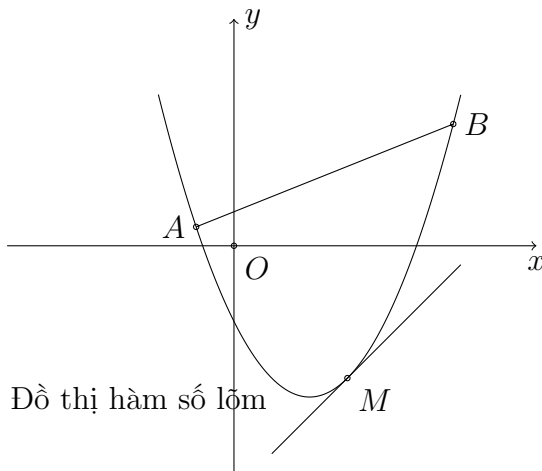
§2. Phương pháp sử dụng tiếp tuyến và cát tuyến

I. Lý thuyết

1. Hàm lồi - Dấu hiệu hàm lồi

Định nghĩa 1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục $[a; b]$ và có đồ thị là (C) . Khi đó ta có hai điểm $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ nằm trên đồ thị (C) .

- Đồ thị (C) gọi là lồi trên $(a; b)$ nếu tiếp tuyến tại mọi điểm nằm trên cung AB luôn nằm phía trên đồ thị (C) .
- Đồ thị (C) gọi là lõm trên $(a; b)$ nếu tiếp tuyến tại mọi điểm nằm trên cung AB luôn nằm phía dưới đồ thị (C) .



Định lí 1 (Dấu hiệu hàm lồi, lõm). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $(a; b)$. Khi đó

- Nếu $f''(x) > 0 \forall x \in (a; b)$ thì đồ thị hàm số lõm trên $(a; b)$.
- Nếu $f''(x) < 0 \forall x \in (a; b)$ thì đồ thị hàm số lồi trên $(a; b)$.

2. Bất đẳng thức tiếp tuyến - Bất đẳng thức cát tuyến

Định lí 2 (Bất đẳng thức tiếp tuyến). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm đến cấp hai trên $[a; b]$. Khi đó ta có

- Nếu $f''(x) \geq 0 \forall x \in [a; b]$ thì $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \forall x_0 \in [a; b]$
- Nếu $f''(x) \leq 0 \forall x \in [a; b]$ thì $f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \forall x_0 \in [a; b]$

Đẳng thức trong hai bất đẳng thức trên xảy ra khi $x = x_0$.

Chứng minh: Ta chứng minh trường hợp thứ nhất, trường hợp thứ hai chứng minh tương tự.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$, $x \in [a; b]$.

Ta có : $g'(x) = f'(x) - f'(x_0) \Rightarrow g''(x) = f''(x) \geq 0 \forall x \in [a; b]$.

Suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$ và $g'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$ khi x qua x_0 nên ta có :

$$g(x) \geq g(x_0) = 0 \forall x \in [a; b].$$

Định lí 3 (Bất đẳng thức cát tuyến). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm đến cấp hai trên $[a; b]$. Khi đó

- Nếu $f''(x) \geq 0 \forall x \in [a; b]$ thì $f(x) \geq \frac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - a) + f(a) \forall x_0 \in [a; b]$
- Nếu $f''(x) \leq 0 \forall x \in [a; b]$ thì $f(x) \leq \frac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - a) + f(a) \forall x_0 \in [a; b]$.

Đẳng thức trong các bất đẳng thức trên có khi và chỉ khi $x = a$ hoặc $x = b$.

II. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 2.1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 1}} \leq \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ với $x \in (0; 1)$. Ta có:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}} \Rightarrow f''(x) = -\frac{3x}{\sqrt{(x^2 + 1)^5}} < 0 \forall x \in (0; 1).$$

Nên ta có:

$$\begin{aligned} f(a) &\leq f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) \\ f(b) &\leq f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(b - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) \\ f(c) &\leq f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(c - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Suy ra :

$$f(a) + f(b) + f(c) \leq f'\left(\frac{1}{3}\right)(a + b + c - 1) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 2.2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa : $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1 + 8a}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 8b}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 8c}} \geq 1.$$

Xét hàm số : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + 8x}}$, $0 < a \leq \sqrt{3}$. Ta có :

$$f'(x) = -\frac{4}{\sqrt{(1 + 8x)^3}} \Rightarrow f''(x) = \frac{48}{\sqrt{(1 + 8x)^5}} > 0 \forall x \in \left(-\frac{1}{8}; \sqrt{3}\right].$$

Nên ta có :

$$\begin{aligned} f(a) &\geq f'(1)(a - 1) + f(1) \\ f(b) &\geq f'(1)(b - 1) + f(1) \\ f(c) &\geq f'(1)(c - 1) + f(1) \end{aligned}$$

Suy ra

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq f'(1)(a + b + c - 3) + 3f(1). \quad (*)$$

Mặt khác

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 9 \Rightarrow -3 \leq a + b + c \leq 3 \Rightarrow a + b + c - 3 \leq 0$$

và $f'(1) = -\frac{4}{27} < 0$ nên từ (*) ta suy ra : $f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f(1) = 1$.

Nhận xét 1. Dấu hiệu giúp chúng ta nhận ra phương pháp trên là bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq k$$

hoặc

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \leq k,$$

trong đó a_i ($i = 1, \dots, n$) là các số thực cho trước. Trong một số trường hợp BDT chưa có dạng trên, ta phải thực hiện một số phép biến đổi mới đưa về dạng trên. Chúng ta cần chú ý một số dấu hiệu sau.

- Nếu bất đẳng thức có dạng $f(a_1) \cdot f(a_2) \cdot \dots \cdot f(a_n) \geq k$ thì ta lấy ln hai vế
- Nếu bất đẳng thức cần chứng minh đồng bậc thì ta có thể chuẩn hóa. Tùy thuộc vào từng bài toán mà ta lựa chọn cách chuẩn hóa phù hợp.

Ví dụ 2.3. Cho các số thực dương a, b, c thỏa : $a + b + c = 3$. Tìm GTLN của biểu thức :

$$P = \left(a + \sqrt{1 + a^2}\right)^b \left(b + \sqrt{1 + b^2}\right)^c \left(c + \sqrt{1 + c^2}\right)^a.$$

Ta có :

$$\ln P = b \ln(a + \sqrt{1 + a^2}) + c \ln(b + \sqrt{1 + b^2}) + a \ln(c + \sqrt{1 + c^2}).$$

Xét hàm số : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, $0 < x < 1$. Ta có :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow f''(x) = \frac{-x}{\sqrt{(1 + x^2)^3}} < 0, \forall x \in (0; 1).$$

Suy ra :

$$f(a) \leq f'(1)(a - 1) + f(1) = f'(1)a + f(1) - f'(1).$$

Do đó

$$bf(a) \leq f'(1)ab + [f(1) - f'(1)]b.$$

Tương tự

$$cf(b) \leq f'(1)cb + [f(1) - f'(1)]c \text{ và } af(c) \leq f'(1)ac + [f(1) - f'(1)]a.$$

Cộng các bất đẳng thức theo vế ta được

$$\ln P \leq f'(1)(ab + bc + ca - (a + b + c)) + f(1)(a + b + c) \leq 3 \ln(1 + \sqrt{2}).$$

(Do $ab + bc + ca \leq 3 = a + b + c$)

Suy ra $\ln P \leq 3 \ln(1 + \sqrt{2}) \Rightarrow P \leq (1 + \sqrt{2})^3$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Vậy GTLN của $P = (1 + \sqrt{2})^3$.

Ví dụ 2.4. Cho $x, y > 0$ thỏa $x + y + z = 1$. Tìm GTNN của biểu thức $P = x^{-y} + y^{-z} + z^{-x}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có :

$$P \geq \frac{3}{\sqrt[3]{x^y \cdot y^z \cdot z^x}}.$$

Đặt $A = x^y \cdot y^z \cdot z^x \Rightarrow \ln A = y \ln x + z \ln y + x \ln z$.

Vì hàm số $f(t) = \ln t$ có $f''(t) = -\frac{1}{t^2} < 0$. Suy ra

$$\ln x \leq f' \left(\frac{1}{3} \right) \left(x - \frac{1}{3} \right) + f \left(\frac{1}{3} \right) = 3x - 1 - \ln 3.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \ln A &\leq y(3x - 1 - \ln 3) + z(3y - 1 - \ln 3) + x(3z - 1 - \ln 3) \\ &= 3(xy + yz + zx) - 1 - 3 \ln 3 \\ &\leq (x + y + z)^2 - 1 - 3 \ln 3 = -3 \ln 3. \end{aligned}$$

Suy ra $A \leq \frac{1}{3} \Rightarrow P \geq 3\sqrt[3]{3}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$.

Vậy GTNN của $P = 3\sqrt[3]{3}$.

Ví dụ 2.5. Cho $a, b, c \geq \frac{1}{2}$ thỏa $a + b + c = 2$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = a^a + b^b + c^c.$$

Xét hàm số $f(t) = t^t, \frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Ta có : $\ln f(t) = t \ln t$ lấy đạo hàm hai vế ta được

$$\begin{aligned} f'(t) &= (1 + \ln t)f(t) \Rightarrow \ln f'(t) = \ln f(t) + \ln(\ln t + 1) \\ \Rightarrow \frac{f''(t)}{f'(t)} &= \frac{f'(t)}{f(t)} + \frac{1}{t(\ln t + 1)} = 1 + \ln t + \frac{1}{t(\ln t + 1)} \\ \Rightarrow f''(t) &= (1 + \ln t)f(t) \left[1 + \ln t + \frac{1}{t(1 + \ln t)} \right] > 0 \quad \forall t \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right]. \end{aligned}$$

Vì $a, b, c \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$ nên áp dụng bất đẳng thức tiếp tuyến, ta có :

$$\begin{aligned} f(a) &\geq f' \left(\frac{2}{3} \right) \left(a - \frac{2}{3} \right) + f \left(\frac{2}{3} \right) \\ f(b) &\geq f' \left(\frac{2}{3} \right) \left(b - \frac{2}{3} \right) + f \left(\frac{2}{3} \right) \\ f(c) &\geq f' \left(\frac{2}{3} \right) \left(c - \frac{2}{3} \right) + f \left(\frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có :

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq f' \left(\frac{2}{3} \right) (a + b + c - 2) + 3f \left(\frac{2}{3} \right) = 3\sqrt[3]{\frac{4}{9}}.$$

Vậy GTNN của $P = 3\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$ đạt được $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{2}{3}$.

Ví dụ 2.6. Cho tam giác ABC có một góc không nhỏ hơn $\frac{2\pi}{3}$. Chứng minh rằng :

$$\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \geq 4 - \sqrt{3}.$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $A \geq \frac{2\pi}{3} > B \geq C \Rightarrow C \leq \frac{\pi}{6}$.

Hàm số $f(x) = \tan x$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ có

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right).$$

Áp dụng BĐT tiếp tuyến, ta có

$$\begin{aligned} f\left(\frac{A}{2}\right) &\geq f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ f\left(\frac{B}{2}\right) &\geq f'\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\frac{B}{2} - \frac{\pi}{12}\right) + f\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ f\left(\frac{C}{2}\right) &\geq f'\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\frac{C}{2} - \frac{\pi}{12}\right) + f\left(\frac{\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) &\geq \left[f'\left(\frac{\pi}{3}\right) - f'\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]\left(\frac{A}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{12}\right)\left(\frac{A+B+C}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + f\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

Do $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) - f'\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0$; $\frac{A}{2} - \frac{\pi}{3} \geq 0$ và $\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2}$ nên ta có :

$$f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) \geq f\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 4 - \sqrt{3}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A = \frac{2\pi}{3}; B = C = \frac{\pi}{6}$ và các hoán vị.

Ví dụ 2.7. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa $\max\{a, b, c\} \geq \frac{3}{4}$ và $a + b + c = 1$. Tìm GTNN của biểu thức :

$$P = \sqrt[3]{1+3a^2} + \sqrt[3]{1+3b^2} + \sqrt[3]{1+3c^2}.$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a = \max\{a, b, c\} \Rightarrow a \geq \frac{3}{4}, c \leq \frac{1}{8}$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{1+3x^2}$, $x \in (0; 1)$ có

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt[3]{(1+3x^2)^2}} \Rightarrow f''(x) = \frac{2-2x^2}{\sqrt[3]{(1+3x^2)^5}} > 0 \quad \forall x \in (0; 1).$$

Áp dụng bất đẳng thức tiếp tuyến, ta có :

$$\begin{aligned} f(a) &\geq f'\left(\frac{3}{4}\right)\left(a - \frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) \\ f(b) &\geq f'\left(\frac{1}{8}\right)\left(b - \frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{1}{8}\right) \\ f(c) &\geq f'\left(\frac{1}{8}\right)\left(c - \frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{1}{8}\right) \end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta có

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) + f(c) &\geq \left[f'\left(\frac{3}{4}\right) - f'\left(\frac{1}{8}\right)\right]\left(a - \frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{8}\right) \\ &\geq f\left(\frac{3}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\sqrt[3]{172} + 2\sqrt[3]{67}}{4}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = \frac{3}{4}; b = c = \frac{1}{8}$ và các hoán vị.

Vậy $\min P = \frac{\sqrt[3]{172} + 2\sqrt[3]{67}}{4}$.

Nhận xét 2. Trong một số trường hợp đồ thị hàm số $y = f(x)$ có khoảng lồi, lõm trên $[a; b]$ nhưng ta vẫn có được đánh giá :

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), x_0 \in (a; b).$$

Ví dụ 2.8. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng :

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq 2(a^3 + b^3 + c^3).$$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$(a^4 - 2a^3) + (b^4 - 2b^3) + (c^4 - 2c^3) \geq 0 \Leftrightarrow f(a) + f(b) + f(c) \geq 0.$$

Trong đó $f(x) = x^4 - 2x^3$. Ta thấy $f''(x) = 12x^2 - 12x$ nên đồ thị hàm số f có khoảng lồi và khoảng lõm do đó ta không thể áp dụng BĐT tiếp tuyến được. Tuy nhiên ta vẫn có thể đánh giá được $f(x)$ qua tiếp tuyến của nó tại điểm có hoành độ $x = 2$ (vì đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 2$).

Ta có tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $y = f(x)$ điểm có hoành độ $x = 2$ là: $y = 8x - 16$.

$$f(x) - (8x - 16) = x^4 - 2x^3 - 8x + 16 = (x - 2)^2(x^2 - 2x + 4) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq 8(a + b + c) - 48 = 0.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2.9 (Ba Lan 1996). Cho $a, b, c \geq -\frac{3}{4}$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \leq \frac{9}{10}.$$

Ta thấy đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ và bất đẳng thức đã cho có dạng: $f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{9}{10}$ trong đó $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ với $x \in [-\frac{3}{4}; \frac{5}{2}]$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{3}$ là: $y = \frac{36x + 3}{50}$.

Ta có:

$$\frac{36x + 3}{50} - f(x) = \frac{36x + 3}{50} - \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{(3x - 1)^2(4x + 3)}{50(x^2 + 1)} \geq 0 \quad \forall x \in [-\frac{3}{4}; \frac{5}{2}].$$

Vậy

$$\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \leq \frac{36(a + b + c) + 9}{50} = \frac{9}{10}.$$

Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2.10. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{a + b + c} \geq 4 \left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \right).$$

Không làm mất tính tổng quát ta giả sử, khi đó Bất đã cho trở thành

$$\frac{5a - 1}{a - a^2} + \frac{5a - 1}{b - b^2} + \frac{5c - 1}{c - c^2} \leq 9.$$

Vì a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác và $a + b + c = 1$ suy ra $a, b, c \in (0; \frac{1}{2})$. Ta có

$$\frac{5a - 1}{a - a^2} - (18a - 3) = \frac{(3a - 1)^2(2a - 1)}{a - a^2} \leq 0 \quad \forall a \in (0; \frac{1}{2}).$$

Suy ra $\frac{5a - 1}{a - a^2} \leq 18a - 3 \quad \forall a \in (0; \frac{1}{2})$.

Ta cũng có hai bất đẳng thức tương tự. Cộng các bất đẳng thức này lại với nhau ta có

$$\frac{5a - 1}{a - a^2} + \frac{5a - 1}{b - b^2} + \frac{5c - 1}{c - c^2} \leq 18(a + b + c) - 9 = 9.$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Ví dụ 2.11 (Trung Quốc 2005). Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng:

$$10(a^3 + b^3 + c^3) - 9(a^5 + b^5 + c^5) \geq 1.$$

Giả sử $a \geq b \geq c$.

Xét hàm số $f(x) = 10x^3 - 9x^4$, $x \in (0; 1)$ có

$$f'(x) = 30x^2 - 45x^4 \Rightarrow f''(x) = 60x - 180x^3.$$

Suy ra $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = \sqrt{\frac{1}{3}}$ đồng thời

$$f''(x) > 0 \quad \forall x \in (0; x_0) \text{ và } f''(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0; 1).$$

- Nếu $a < x_0$. Áp dụng bất đẳng thức tiếp tuyến ,ta có:

$$\begin{aligned} f(a) &\geq f' \left(\frac{1}{3} \right) \left(a - \frac{1}{3} \right) + f \left(\frac{1}{3} \right) \\ f(b) &\geq f' \left(\frac{1}{3} \right) \left(b - \frac{1}{3} \right) + f \left(\frac{1}{3} \right) \\ f(c) &\geq f' \left(\frac{1}{3} \right) \left(c - \frac{1}{3} \right) + f \left(\frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

Suy ra

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq f' \left(\frac{1}{3} \right) (a + b + c - 1) + 3f \left(\frac{1}{3} \right) = 1.$$

- Nếu $a > x_0$. Áp dụng bất đẳng thức tiếp tuyến và cát tuyến ta có:

$$\begin{aligned} f(a) &\geq \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} (a - 1) + f(1) > f(1) = 1 \\ f(b) &\geq f'(0) (b - 0) + f(0) = 0 \\ f(c) &\geq f'(0) (c - 0) + f(0) = 0. \end{aligned}$$

Do đó $f(a) + f(b) + f(c) > 1$.

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2.12. Cho $\triangle ABC$ nhọn. Tìm GTLN của biểu thức

$$F = \sin A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^3 C.$$

Ta có

$$\ln F = \ln \sin A + 2 \ln \sin B + 3 \ln \sin C.$$

Xét hàm số $f(x) = \ln \sin x$, $x \in (0; \frac{\pi}{2})$, ta có

$$f'(x) = \cot x \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức tiếp tuyến với $\triangle MNP$ nhọn, ta có :

$$\begin{aligned} f(A) &\leq f'(M) (A - M) + f(M) = (A - M) \cot M + \ln \sin M \\ f(B) &\leq f'(N) (B - N) + f(N) = (B - N) \cot N + \ln \sin N \\ f(C) &\leq f'(P) (C - P) + f(P) = (C - P) \cot P + \ln \sin P. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\tan M \cdot f(A) + \tan N \cdot f(B) + \tan P \cdot f(C) \geq \tan M \cdot \ln \sin M + \tan N \cdot \ln \sin N + \tan P \cdot \ln \sin P.$$

Chọn ba góc M, N, P sao cho :

$$\frac{\tan M}{1} = \frac{\tan N}{2} = \frac{\tan P}{3} = k \Rightarrow \tan M = k; \tan N = 2k; \tan P = 3k.$$

Mặt khác : $\tan M + \tan N + \tan P = \tan M \cdot \tan N \cdot \tan P$, suy ra

$$6k = 6k^3 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \sin M = \frac{\tan M}{\sqrt{1 + \tan^2 M}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \sin N = \frac{2}{\sqrt{5}}; \sin P = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Do đó, ta có

$$f(A) + f(B) + f(C) \leq \ln \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \ln \frac{2}{\sqrt{5}} + 3 \ln \frac{3}{\sqrt{10}} = \ln \frac{27}{25\sqrt{5}},$$

hay $F \leq \frac{27}{25\sqrt{5}}$. Dạng thức xảy ra $\Leftrightarrow A = M; B = N; C = P$.

Vậy GTLN của $F = \frac{27}{25\sqrt{5}}$.

III. Bài tập

Bài 2.1 (Albania 2002). Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{3\sqrt{3}}(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq a + b + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Bài 2.2. Cho n số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ thuộc khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$ thỏa :

$$\tan x_1 + \tan x_2 + \dots + \tan x_n \leq n.$$

Chứng minh rằng

$$\sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \dots \cdot \sin x_n \leq \frac{1}{\sqrt{2^n}}.$$

Bài 2.3. Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh :

$$\frac{a}{1 + bc} + \frac{b}{1 + ac} + \frac{c}{1 + ab} \geq \frac{9}{10}.$$

Bài 2.4. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{(b + c - a)^2}{(b + c)^2 + a^2} + \frac{(c + a - b)^2}{(c + a)^2 + b^2} + \frac{(a + b - c)^2}{(a + b)^2 + c^2} \geq \frac{3}{5}.$$

Bài 2.5. Cho $a, b, c > -1$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S = a^3 + b^3 + c^3 + 5(a^2 + b^2 + c^2).$$

Bài 2.6. Cho $a + b + c = -6$ với $a, b, c < -1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$S = \frac{a}{a^2 + a + 1} + \frac{b}{b^2 + b + 1} + \frac{c}{c^2 + c + 1}.$$

Bài 2.7. Cho $a, b, c > -\frac{2}{3}$ và $4(ab + bc + ca) + a + b + c \geq 15$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = a^3 + b^3 + c^3 + 2(a^2b + b^2c + c^2a).$$

Bài 2.8. Cho $a, b, c \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$ và $-2(ab + bc + ca) + 3(a + b + c) = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $S = 2(a^3 + b^3 + c^3) - 3(a^2b + b^2c + c^2a)$.

Bài 2.9. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S = 5(a^3 + b^3 + c^3) + 2(a^2b + b^2c + c^2a).$$

Bài 2.10. Cho $a, b, c \in \left[\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right]$ và $ab + bc + ca + 9 = 4(a + b + c)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$T = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b}\right).$$

Bài 2.11. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $3(ab + bc + ca) - (a + b + c) \geq 6$. Tính giá trị nhỏ nhất của

$$A = a^5 + b^5 + c^5 + 3(a^4b + b^4c + c^4a).$$

Bài 2.12. Cho $a, b, c \in [0, 4]$ thỏa mãn $ab + bc + ca \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$B = (a^2 + b^2 + c^2) + b\sqrt{3a + 1} + c\sqrt{3b + 1} + a\sqrt{3c + 1}.$$

Bài 2.13. Cho tam giác ABC nhọn. Tìm GTNN của biểu thức :

$$F = \tan A + 2 \tan B + 3 \tan C.$$

Bài 2.14. Cho $x, y, z > 0$ thỏa $x + y + z = 1$. Tìm GTNN của :

$$P = x^3 + \sqrt{1 + y^2} + \sqrt[4]{1 + z^4}.$$

Chương 3

Một số chuyên đề

§1. Ứng dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc ba trong chứng minh bất đẳng thức

I. Lý thuyết

1. Mở đầu

Định lí Vi-ét đảo đối với phương trình bậc hai được phát biểu như sau:

Định lí 1. Nếu hai số a, b có tổng là S và tích là P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0. \quad (3.1)$$

Phương trình (3.1) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta = S^2 - 4P \geq 0$ hay $S^2 \geq 4P$.

Mà $S = a + b, P = ab$ nên ta có điều kiện để tồn tại hai số a, b (tức là phương trình (3.1) có nghiệm) là :

$$(a + b)^2 \geq 4ab.$$

Đây chính là bất đẳng thức quen thuộc. Nếu $a, b \geq 0$ thì ta thu được bất đẳng thức AM-GM.

Tương tự đối với định lí Vi-ét đảo của phương trình bậc ba như sau:

Đặt $m = a + b + c, n = ab + bc + ca, p = abc$. Khi đó, a, b, c là nghiệm của phương trình

$$x^3 - mx^2 + nx - p = 0. \quad (3.2)$$

Ta đi tìm điều kiện để phương trình (3.2) có ba nghiệm (có thể trùng nhau).

2. Một số kết quả

Đặt: $x = y + \frac{m}{3}; \alpha = \frac{m^2}{3} - n; \beta = \frac{9mn - 2m^3 - 27p}{27}$. Từ (3.2) ta thu được phương trình

$$y^3 - \alpha y + \beta = 0. \quad (3.3)$$

Số nghiệm của (3.3) chính là số giao điểm của đồ thị $(C) : f(y) = y^3 - \alpha y + \beta$ với trục hoành.

Ta có: $f'(y) = 3y^2 - \alpha$.

- Nếu $\alpha < 0$ thì $f'(y) > 0, \forall y$ nên phương trình (3.3) có đúng 1 nghiệm.
- Nếu $\alpha = 0$ thì phương trình (3.3) có nghiệm bội ba.

1. ỨNG DỤNG ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

- Nếu $\alpha > 0$ thì $f'(y) = 0$ có hai nghiệm $y_1 = -\sqrt{\frac{\alpha}{3}}$; $y_2 = \sqrt{\frac{\alpha}{3}}$, khi đó

$$f(y_1) = \frac{2\alpha}{3} \sqrt{\frac{\alpha}{3}} + \beta, f(y_2) = -\frac{2\alpha}{3} \sqrt{\frac{\alpha}{3}} + \beta.$$

Suy ra

$$f(y_1) \cdot f(y_2) = \beta^2 - \frac{4\alpha^3}{27} = \frac{27\beta^2 - 4\alpha^3}{27}.$$

Do đó, phương trình (3.3) có ba nghiệm khi và chỉ khi:

$$f(y_1) \cdot f(y_2) \leq 0 \Leftrightarrow 4\alpha^3 - 27\beta^2 \geq 0.$$

Hay là:

$$|9mn - 27p - 2m^3| \leq 2\sqrt{(m^2 - 3n)^3}.$$

Kết quả 1. Cho các số thực a, b, c . Đặt $a + b + c = m$, $ab + bc + ca = n$, $abc = p$. Khi đó, ta có đánh giá sau:

$$|9mn - 27p - 2m^3| \leq 2\sqrt{(m^2 - 3n)^3}. \quad (3.4)$$

Với $a, b, c \geq 0$, đặt $a + b + c = 3u$, $ab + bc + ca = 3v^2$ và $abc = w^3$.

Vì

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \geq 9\sqrt[3]{(abc)^2}$$

nên ta có $u \geq v \geq w$.

Khi đó (3.4) trở thành

$$|9 \cdot 3u \cdot 3v^2 - 27w^3 - 2 \cdot 27u^3| \leq 2\sqrt{(9u^2 - 9v^2)^3}.$$

Hay

$$|3uv^2 - w^3 - 2u^3| \leq 2\sqrt{(u^2 - v^2)^3}. \quad (3.5)$$

Chia hai vế của (3.5) cho u^3 ta có

$$\left| 3\left(\frac{v}{u}\right)^2 - \left(\frac{w}{u}\right)^3 - 2 \right| \leq 2\sqrt{\left(1 - \left(\frac{v}{u}\right)^2\right)^3}.$$

Hay là

$$-2\sqrt{\left(1 - \left(\frac{v}{u}\right)^2\right)^3} \leq 3\left(\frac{v}{u}\right)^2 - \left(\frac{w}{u}\right)^3 - 2 \leq 2\sqrt{\left(1 - \left(\frac{v}{u}\right)^2\right)^3}.$$

Suy ra

$$3\left(\frac{v}{u}\right)^2 - 2\sqrt{\left(1 - \left(\frac{v}{u}\right)^2\right)^3} - 2 \leq \left(\frac{w}{u}\right)^3 \leq 3\left(\frac{v}{u}\right)^2 + 2\sqrt{\left(1 - \left(\frac{v}{u}\right)^2\right)^3} - 2.$$

Kết quả 2: Cho các số thực dương a, b, c . Đặt $a + b + c = 3u$, $ab + bc + ca = 3v^2$ và $abc = w^3$ với u, v, w là các số thực dương. Khi đó $u \geq v \geq w$ và

$$3\left(\frac{v}{u}\right)^2 - 2\sqrt{\left(1 - \left(\frac{v}{u}\right)^2\right)^3} - 2 \leq \left(\frac{w}{u}\right)^3 \leq 3\left(\frac{v}{u}\right)^2 + 2\sqrt{\left(1 - \left(\frac{v}{u}\right)^2\right)^3} - 2. \quad (3.6)$$

II. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1.1. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng

$$(a^2 + b^2 + c^2)^3 \geq 24(a^3 + b^3 + c^3 - 1).$$

Ta có $m = 0$ nên (3.4) trở thành

$$|27p| \leq 2\sqrt{(-3n)^3} \Leftrightarrow -n^3 \geq \frac{27}{4}p^2 = 3\left(\frac{3}{2}p - 1\right)^2 + 9p - 3 \geq 9p - 3.$$

Hay là

$$-(ab + bc + ca)^3 \geq 9abc - 3.$$

Mặt khác $a + b + c = 0$ nên ta có $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và

$$-(ab + bc + ca) = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Do vậy, ta có

$$(a^2 + b^2 + c^2)^3 \geq 24(a^3 + b^3 + c^3 - 1).$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 1.2. Cho các số thực a, b, c có tổng bằng -1 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2abc + (ab + bc + ca)^2.$$

Ta có $m = -1$ nên áp dụng (3.4) ta có

$$|9n + 27p - 2| \leq 2\sqrt{(1 - 3n)^3} \Rightarrow p \geq -\frac{1}{3}n + \frac{2}{27} - \frac{2}{27}\sqrt{(1 - 3n)^3}.$$

Do đó

$$27P \geq -18n + 4 - 4\sqrt{(1 - 3n)^3} + 27n^2 = 3(3n - 1)^2 - 4\sqrt{(1 - 3n)^3} + 1.$$

Đặt $t = \sqrt{1 - 3n}, t \geq 0$ ta có

$$27P \geq 3t^4 - 4t^3 + 1 = (t - 1)^2(3t^2 - t + 1) \geq 0.$$

Do đó $P \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi $a = -1, b = c = 0$ và các hoán vị.

Vậy $\min P = 0$.

Ví dụ 1.3. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$3(abc - 2) \leq (a + b + c)(ab + bc + ca) \leq 3(abc + 2).$$

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ nên $(a + b + c)^2 = 2(ab + bc + ca) + 3$ hay $n = \frac{m^2 - 3}{2}$.

Từ (3.4) ta suy ra

$$2\left(m^3 - \sqrt{\left(\frac{9 - m^2}{2}\right)^3}\right) \leq 9mn - 27p \leq 2\left(m^3 + \sqrt{\left(\frac{9 - m^2}{2}\right)^3}\right).$$

1. ỨNG DỤNG ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Ta chứng minh

$$m^3 + \sqrt{\left(\frac{9-m^2}{2}\right)^3} \leq 27 \Leftrightarrow \left(\frac{9-m^2}{2}\right)^3 \leq (27-m^3)^2.$$

Khai triển và biến đổi ta được

$$(m-3)^2(m^4+6m^3+24m^2+42m+63) \geq 0.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng do

$$m^4+6m^3+24m^2+42m+63 = (m^2+3m+7)^2 + m^2 + 14 > 0.$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$m^3 - \sqrt{\left(\frac{9-m^2}{2}\right)^3} \geq -27.$$

Do vậy ta có được bất đẳng thức

$$-54 \leq 9mn - 27p \leq 54 \Leftrightarrow 3p - 6 \leq mn \leq 3p + 6.$$

Hay là

$$3(abc - 2) \leq (a + b + c)(ab + bc + ca) \leq 3(abc + 2).$$

Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 1.4. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{(a+b+c)^3 + (ab+bc+ca)^3}{(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2 + 27}.$$

Ta có $p = 1$ nên từ (3.4) ta được

$$|9mn - 27 - 2m^3| \leq 2\sqrt{(m^2 - 3n)^3}.$$

Bình phương hai vế và rút gọn ta thu được

$$(mn)^2 + 18mn \geq 4(m^3 + n^3) + 27.$$

Mặt khác $18mn \leq (mn)^2 + 81$ nên ta có

$$2(mn)^2 + 81 \geq 4(m^3 + n^3) + 27 \Leftrightarrow m^2n^2 + 27 \geq 2(m^3 + n^3).$$

Do đó

$$P = \frac{m^3 + n^3}{m^2n^2 + 27} \leq \frac{1}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} abc = 1 \\ (ab+bc+ca)(a+b+c) = 9 \end{cases}$, chẳng hạn $a = b = c = 1$.

Vậy $\max P = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 1.5. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{abc(a+b+c)^3 + 27}{(a+b+c+3abc)^2}.$$

1. ỨNG DỤNG ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Ta có $n = 3$ nên từ (3.4), suy ra

$$|27m - 27p - 2m^3| \leq 2\sqrt{(m^2 - 9)^3}.$$

Bình phương hai vế và rút gọn ta thu được

$$27p^2 + 4m^3p + 108 \leq 54mp + 9m^2,$$

hay

$$108p^2 + 4m^3p + 108 \leq 9(m + 3p)^2.$$

Suy ra

$$4m^3p + 108 \leq 9(m + 3p)^2 \Rightarrow P = \frac{m^3p + 27}{(m + 3p)} \leq \frac{9}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} abc = 0 \\ a + b + c = \pm 2\sqrt{3}, \text{ chẳng hạn ta chọn } a = 0, b = c = \sqrt{3}. \\ ab + bc + ca = 3 \end{cases}$

Vậy $\max P = \frac{9}{4}$.

Ví dụ 1.6. Cho các số thực a, b, c thỏa

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 5(ab + bc + ca).$$

Chứng minh rằng:

$$(a + b + c)^2 + 27\sqrt[3]{abc} + 1 \geq 0.$$

Ta có

$$2(m^2 - 2n) = 5n \Rightarrow n = \frac{2}{9}m^2.$$

Khi đó (3.4) trở thành

$$|27p| \leq 2\sqrt{\left(m^2 - \frac{2}{3}m^2\right)^3} \Rightarrow 27^2p^2 \leq \frac{4}{27}m^6 \Rightarrow m^2 \geq 27\sqrt[3]{\frac{p^2}{4}}.$$

Mặt khác $\left(\frac{p}{2} + 1\right)^2 \geq 0$ nên

$$\frac{p^2}{4} \geq -(p + 1),$$

suy ra

$$m^2 \geq -27\sqrt[3]{p + 1}$$

hay

$$(a + b + c)^2 + 27\sqrt[3]{abc} + 1 \geq 0.$$

Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 1.7. Cho các số thực a, b, c thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca + 1$. Chứng minh rằng:

$$(a + b + c)^2 \leq 4 + 3(ab + bc + ca)^2 + 18abc.$$

1. ỨNG DỤNG ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Ta có $(a + b + c)^2 = 3(ab + bc + ca) + 1$ nên $m^2 = 3n + 1$. Khi đó (2) trở thành:

$$\left| 9m \frac{m^2 - 1}{3} - 27p - 2m^3 \right| \leq 2 \Rightarrow 27p \geq m^3 - 3m - 2.$$

Đặt $T = (a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca) - 18abc$, ta cần chứng minh $T \leq 4$.

$$\begin{aligned} 3T &= 3m^2 - 9n^2 - 54p \\ &\leq 3m^2 - (m^2 - 1)^2 - 2(m^3 - 3m - 2) \\ &= -m^4 - 2m^3 + 5m^2 + 6m + 3 \\ &= -(m^2 + m - 3)^2 + 12 \leq 12. \end{aligned}$$

Suy ra $T \leq 4$. Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 1.8 (Iran MO 2014, vòng 2). Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx).$$

Chứng minh rằng: $\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{2xyz}$.

Nếu $x = y = z = 0$ thì bất đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên đúng. Ta xét $x + y + z > 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$u \geq \sqrt[3]{2} \cdot w \Leftrightarrow \left(\frac{w}{u} \right)^3 \leq \frac{1}{2}.$$

Áp dụng (3.6) ta chỉ cần chứng minh

$$\left(\frac{w}{u} \right)^3 \leq 3 \left(\frac{v}{u} \right)^2 + 2 \sqrt{\left(1 - \left(\frac{v}{u} \right)^2 \right)^3} - 2.$$

Mà $x^2 + y^2 + z^2 = 2(xy + yz + zx)$ nên

$$9u^2 = 4.3v^2 \Rightarrow \left(\frac{v}{u} \right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Do đó

$$\left(\frac{w}{u} \right)^3 \leq 3 \left(\frac{v}{u} \right)^2 + 2 \sqrt{\left(1 - \left(\frac{v}{u} \right)^2 \right)^3} - 2 = \frac{1}{2}.$$

Bài toán được chứng minh.

Ví dụ 1.9. Cho các số thực không âm a, b, c . Chứng minh rằng

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{ab + bc + ca} + \frac{3abc}{a + b + c} \geq \frac{2}{3} (a^2 + b^2 + c^2).$$

Ta có

$$a^4 + b^4 + c^4 = 81u^4 - 108u^2v^2 + 18v^4 + 12uw^3,$$

và

$$a^2 + b^2 + c^2 = 9u^2 - 6v^2.$$

1. ỨNG DỤNG ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Nên bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} \frac{81u^4 - 108u^2v^2 + 18v^4 + 12uw^3}{3v^2} + \frac{3w^3}{3u} &\geq \frac{2}{3}(9u^2 - 6v^2) \\ \Leftrightarrow \frac{27 - 36x + 6x^2 + 4y}{x} + y + 4x &\geq 6. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Trong đó $x = \left(\frac{v}{u}\right)^2$ và $y = \left(\frac{w}{u}\right)^3$.

Theo (3.6), ta có

$$y \geq 3x - 2\sqrt{(1-x)^3} - 2 \text{ và } x \leq 1$$

nên

$$\begin{aligned} VT(3.7) &= \frac{27}{x} - 36 + 10x + y \left(1 + \frac{4}{x}\right) \geq \frac{27}{x} - 36 + 10x + 5y \\ &\geq \frac{27}{x} - 36 + 10x + 5 \left(3x - 2\sqrt{(1-x)^3} - 2\right) \\ &= \frac{25x^2 - 52x + 27}{x} - 10\sqrt{(1-x)^2} + 6 \\ &\geq (1-x)(27 - 25x) - 10\sqrt{(1-x)^3} + 6 \\ &\geq (1-x)(1 + 25(1-x)) - 10\sqrt{(1-x)^3} + 6 \\ &\geq (1-x)10\sqrt{1-x} - 10\sqrt{(1-x)^3} + 6 = 6. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

III. Bài tập

Bài 1.1. Cho các số thực a, b, c không đồng thời bằng 0 thỏa $a + b + c = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{13a^2b^2c^2 - 2abc - 2}{(a^2 + b^2 + c^2)^3}.$$

Bài 1.2. Cho các số thực a, b, c có tổng bằng 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a^2 + b^2 + c^2)^5 - 32(ab + bc + ca)a^2b^2c^2 - 8|abc|.$$

Bài 1.3. Cho các số thực a, b, c thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = abc(a + b + c)^3 + \frac{1}{(abc)^4}.$$

Bài 1.4. Cho các số thực a, b, c thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca + 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 18(ab + bc + ca)^2 - (ab + bc + ca)(a + b + c - 48) + 9abc.$$

Bài 1.5. Cho các số thực dương a, b, c thỏa $(a + b + c)^3 = 32abc$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{(a + b + c)^4}.$$

§2. Bài toán tìm hằng số tốt nhất trong bất đẳng thức

I. Lý thuyết

Trong chuyên đề này ta đi giải quyết bài toán:

Tìm hằng số k lớn nhất (nhỏ nhất) để một BDT luôn đúng với một giả thiết nào đó của các biến.

Để giải dạng toán này, ta thường giải quyết theo hai hướng sau:

Hướng 1:

- *Bước 1:* Chọn giá trị đặc biệt của các biến hoặc đánh giá trực tiếp các biến để chỉ ra điều kiện cần của k .
- *Bước 2:* Chứng minh bất đẳng thức đã cho đúng với giá trị của k (lớn nhất, nhỏ nhất) vừa tìm được.

Hướng 2: Giả sử ta cần tìm k nhỏ nhất để bất đẳng thức

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq k$$

luôn đúng với mọi $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{D}$. Ta đi tìm giá trị lớn nhất M của $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ với $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathcal{D}$. Khi đó $k_{\min} = M$.

II. Ví dụ minh họa

Ví dụ 2.1. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\sqrt{a + k|b - c|^\alpha} + \sqrt{b + k|c - a|^\alpha} + \sqrt{c + k|a - b|^\alpha} \leq 2,$$

với mọi $\alpha \geq 1$ và a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$.

Cho $a = b = 0, c = 1, \alpha = 1$. Ta có

$$1 + \sqrt{k} + \sqrt{k} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{1}{4}.$$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau đúng

$$\sqrt{4a + |b - c|^\alpha} + \sqrt{4b + |c - a|^\alpha} + \sqrt{4c + |a - b|^\alpha} \leq 4. \quad (3.8)$$

đúng với mọi $\alpha \geq 1$ và $a, b, c \geq 0$ thỏa $a + b + c = 1$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$. Ta có

$$0 \leq |a - b|, |b - c|, |c - a| \leq 1, \alpha \geq 1$$

nên ta có

$$\begin{aligned} VT(3.8) &\leq \sqrt{4a + |b - c|} + \sqrt{4b + |c - a|} + \sqrt{4c + |a - b|} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4(4a + b - c)} + \sqrt{4b + a - c} + \sqrt{4c + a - b} \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{4 + 4a + b - c}{2} + \frac{1 + 4b + a - c}{2} + \frac{1 + 4c + a - b}{2} \\ &= \frac{8a + 7b + 5c + 8}{4} \leq \frac{8(a + b + c) + 8}{4} = 4. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } k_{\max} = \frac{1}{4}.$$

Ví dụ 2.2. Tìm số k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức

$$a^3 + b^3 + c^3 + kabc \leq \frac{k+3}{6} [a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)]$$

đúng với mọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác.

Cho $c = 1, a = b = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ ta có: $k \geq \frac{3\left(3 + \frac{2}{n}\right)}{1 + \frac{2}{n}} \rightarrow 9$. Ta chứng minh bất đẳng thức

$$a^3 + b^3 + c^3 + 9abc \leq 2[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)].$$

Giả sử $a = \max\{a, b, c\}$, ta có

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 + 9abc - 2[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)] \\ &= (a-b-c)(a-b)(a-c) + (b-c)^2(b+c-3a) \leq 0. \end{aligned}$$

Vậy $k_{\max} = 9$.

Ví dụ 2.3. Cho $a, b, c > 0$. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 3 \geq k \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} - 1 \right).$$

Cho $a = 1, b = c^3 \neq 1$, ta có

$$k \leq \frac{(c^3 + c^2 + 1)(c^3 + 3c^2 + 2c + 1)}{c^2(c^4 + 2c^3 + 2c^2 + c + 1)} \rightarrow 1.$$

Ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 3 \geq \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} - 1 \right),$$

hay

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + 2 \\ & \Leftrightarrow (ab + bc + ca) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \geq (a + b + c)^2. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối dễ dàng chứng minh được bằng cách áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz.

Ví dụ 2.4. Tìm số thực dương k lớn nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$:

$$\frac{x}{xy+1} + \frac{y}{yz+1} + \frac{z}{zx+1} + \frac{k}{\sqrt[3]{xy^2 + yz^2 + zx^2}} \geq \frac{3}{2} + \frac{k}{\sqrt[3]{3}}.$$

Do bất đẳng thức đã cho đúng với mọi $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xyz = 1$ nên nó sẽ đúng khi $x = n; y = 1; z = \frac{1}{n}$ với mọi $n > 0$. Khi đó ta có

$$\frac{2n}{n+1} + \frac{1}{2n} + \frac{k}{\sqrt[3]{2n + \frac{1}{n^2}}} \geq \frac{3}{2} + \frac{k}{\sqrt[3]{3}}; \forall n > 0.$$

Cho $n \rightarrow +\infty$ ta được

$$2 \geq \frac{3}{2} + \frac{k}{\sqrt[3]{3}} \Leftrightarrow k \leq \frac{\sqrt[3]{3}}{2}.$$

Ta sẽ chứng minh $k = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán, tức là

$$\frac{2x}{xy+1} + \frac{2y}{yz+1} + \frac{2z}{zx+1} + \sqrt[3]{\frac{3}{xy^2 + yz^2 + zx^2}} \geq 4.$$

Do $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xyz = 1$ nên tồn tại $a, b, c > 0$ thỏa mãn $x = \frac{b}{a}; y = \frac{c}{b}; z = \frac{a}{c}$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} + \sqrt[3]{\frac{3abc}{a^3 + b^3 + c^3}} \geq 4.$$

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} + \sqrt[3]{\frac{3abc}{a^3 + b^3 + c^3}} \\ & \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + \frac{9abc}{3\sqrt[3]{(3abc)^2(a^3 + b^3 + c^3)}} \\ & \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + \frac{9abc}{a^3 + b^3 + c^3 + 6abc}. \end{aligned}$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} - 3 \geq 1 - \frac{9abc}{a^3 + b^3 + c^3 + 6abc} \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{ab+bc+ca} \geq \frac{a+b+c}{a^3 + b^3 + c^3 + 6abc}. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo Schur. Vậy bất đẳng thức đã cho đúng khi $k = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$ hoặc $x \rightarrow +\infty; y = 1; z = \frac{1}{x}$.

Tóm lại giá trị k tốt nhất cần tìm là $k = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

Ví dụ 2.5 (VN TST 2012). Chứng minh rằng $C = 10\sqrt{24}$ là hằng số lớn nhất sao cho nếu có 17 số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_{17}$ thỏa các điều kiện

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{17}^2 = 24 \\ a_1^3 + \dots + a_{17}^3 + a_1 + \dots + a_{17} < C \end{cases}.$$

thì với mọi $1 \leq i \leq j \leq k \leq 17$ ta có a_i, a_j, a_k là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Trước hết ta có bổ đề sau

Bổ đề 1. Cho số nguyên $n \geq 3$. Giả sử n số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$(n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4) < (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2.$$

Hãy chứng minh ba số bất kì a_i, a_j, a_k ($1 \leq i < j < k \leq n$) là độ dài các cạnh của một tam giác.

Chứng minh.

- Với $n = 3$ thì ta có

$$\begin{aligned} 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4) &< (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 \\ \Leftrightarrow (a_1 + a_2 + a_3)(a_2 + a_3 - a_1)(a_3 + a_1 - a_2)(a_1 + a_2 - a_3) &> 0, \end{aligned}$$

suy ra a_1, a_2, a_3 là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

- Với $n > 3$, không mất tính tổng quát ta chứng minh a_1, a_2, a_3 là độ dài ba cạnh của một tam giác. Ta có

$$\begin{aligned} (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4) &< (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2 \\ &= \left[\sqrt{2} \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{\sqrt{2}} + a_4^2 + \dots + a_n^2 \right]^2 \\ &\leq \left(2 + \underbrace{1 + \dots + 1}_{n-3} \right) \left[\frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2}{2} + a_4^4 + \dots + a_n^4 \right] \\ &= (n-1) \left[\frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2}{2} + a_4^4 + \dots + a_n^4 \right]. \end{aligned}$$

Suy ra

$$2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4) < (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2,$$

do đó a_1, a_2, a_3 là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán.

Đặt $x_i = \frac{a_i}{\sqrt{24}}, i = \overline{1, 17}$, khi đó các số dương $x_1, x_2, \dots, x_{17}$ thỏa

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{17}^2 = 1 \\ 24(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{17}^3) + x_1 + \dots + x_{17} < 10 \end{cases}$$

Để chứng minh a_i, a_j, a_k là độ dài ba cạnh của một tam giác, ta chỉ cần chứng minh x_i, x_j, x_k là độ dài ba cạnh của một tam giác.

- Ta chứng minh bài toán đúng với $C = 10$.
Ta đi tìm số thực dương a thỏa :

$$16x^4 + (a-1)x^2 < \frac{a}{10}(24x^3 + x), \forall x \in (0; 1). \quad (1)$$

Vì nếu có bất đẳng thức (1) thì ta suy ra

$$16x_i^4 + (a-1)x_i^2 < \frac{a}{10}(24x_i^3 + x_i), \forall i = \overline{1, 17}.$$

Do đó

$$16 \sum_{i=1}^{17} x_i^4 + (a-1) \sum_{i=1}^{17} x_i^2 < \frac{a}{10} \sum_{i=1}^{17} (24x_i^3 + x_i).$$

Hay

$$16 \sum_{i=1}^{17} x_i^4 + (a-1) < a \Rightarrow 16 \sum_{i=1}^{17} x_i^4 < 1 = \left(\sum_{i=1}^{17} x_i^2 \right)^2,$$

khi đó theo bổ đề ta có đpcm.

Ta tìm a để (1) đúng? Ta viết lại (1) như sau

$$16x^3 + (a-1)x - \frac{a}{10} (24x^2 + 1) < 0. \quad (2)$$

Vì $x \in (0; 1)$ nên ta chọn a sao cho vế trái của (2) có thừa số $x-1$ hay

$$16 + a - 1 - \frac{5a}{2} = 0 \Rightarrow a = 10.$$

Khi đó (2) trở thành:

$$16x^3 - 24x^2 + 9x - 1 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(16x^2 - 8x + 1) < 0. \quad (3)$$

Rõ ràng (3) đúng với $x \in (0; 1)$. Từ đó, ta có đpcm.

- Ta chứng minh $C = 10$ là số lớn nhất. Giả sử tồn tại số $C' > 10$ sao cho với 17 số thực dương $x_1, x_2, \dots, x_{17}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{17}^2 = 1 \\ 24(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{17}^3) + x_1 + \dots + x_{17} < C' \end{cases}$$

thì x_i, x_j, x_k là độ dài ba cạnh của một tam giác với mọi $1 \leq i < j < k \leq 17$.

Ta xét 17 số thực dương

$$x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \sqrt{\frac{1}{16} - a}, x_3 = a, x_4 = \dots = x_{17} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{a-a^2}{14}}, 0 < a < \frac{1}{16}.$$

Ta có

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{17}^2 = 1,$$

và

$$x_1 - x_3 = \frac{1}{4} - a = \sqrt{\left(\frac{1}{4} - a\right)^2} < \sqrt{\frac{1}{16} - a} = x_2 \Rightarrow x_1 > x_2 + x_3,$$

hay x_1, x_2, x_3 không là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Ta có

$$\begin{aligned} S(a) &= 24 \sum_{i=1}^{17} x_i^3 + \sum_{i=1}^{17} x_i \\ &= 24 \left[\frac{1}{4^3} + \sqrt{\left(\frac{1}{16} - a\right)^3} + a^3 + 14 \sqrt{\left(\frac{1}{16} + \frac{a-a^2}{14}\right)^3} \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} - a} + a + 14 \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{a-a^2}{14}} \\ &\rightarrow 24 \left[\frac{1}{4^3} + \sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^3} + 14 \sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^3} \right] + \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16}} + 14 \sqrt{\frac{1}{16}} = 10 \text{ khi } a \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Do tính liên tục của S , nên tồn tại $a_0 \in \left(0; \frac{1}{16}\right)$ sao cho $S(a_0) < C'$ nhưng bộ

$$\left(\frac{1}{4}, \sqrt{\frac{1}{16} - a_0}, a_0, \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{a_0 - a_0^2}{14}}, \dots, \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{a_0 - a_0^2}{14}}\right)$$

thỏa mãn các điều kiện của bài toán, nhưng bộ (x_1, x_2, x_3) không tạo thành 3 cạnh của một tam giác.

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2.6. Tìm số thực k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng với mọi a, b là các số thực dương phân biệt thỏa mãn $ab = 1$

$$\frac{a^2 + b^2 - 2}{\sqrt{2(a+b)} - 2} \geq k.$$

Bài toán chuyển về tìm GTNN của biểu thức

$$P = \frac{a^2 + b^2 - 2}{\sqrt{2(a+b)} - 2},$$

với $a, b > 0$ và $ab = 1$.

Đặt $t = \sqrt{2(a+b)} > 2$, ta có

$$P = \frac{t^4 - 16}{4(t-2)} = \frac{(t+2)(t^2+4)}{4} > 8$$

khi $t > 2$.

Giả sử tồn tại $k > 8$ thỏa bài toán. Cho $t = 2 + \frac{1}{n}$, suy ra

$$k \leq \frac{1}{4} \left(4 + \frac{1}{n}\right) \left[\left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 + 4\right] \rightarrow 8 \text{ (vô lí)}.$$

Vậy $k_{\max} = 8$.

Ví dụ 2.7. Tìm hằng số dương k lớn nhất sao cho bất đẳng thức

$$|(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)| \leq k(a+b+c)^6$$

đúng với mọi $a, b, c \geq 0$.

Giả sử $a \geq b \geq c$, ta có

$$\begin{aligned} |(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)| &= (a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(a^2 - c^2) \\ &\leq (a^2 - b^2)a^2b^2 = (a+b)\sqrt{(a-b)^2 \cdot ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab} \\ &\leq (a+b)\sqrt{\left(\frac{(a-b)^2 + 4ab}{5}\right)^5} \\ &= \frac{(a+b)^6}{25\sqrt{5}} \leq \frac{1}{25\sqrt{5}}(a+b+c)^6. \end{aligned}$$

Từ đó ta có $k_{\max} = \frac{1}{25\sqrt{5}}$.

Ví dụ 2.8 (IMO 2006). Tìm hằng số M nhỏ nhất sao cho với mọi số thực a, b, c ta đều có

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Bằng biến đổi đơn giản, ta có

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| = |(b - c)(a - b)(a - c)(a + b + c)|$$

Bài toán trở thành: Tìm M nhỏ nhất để

$$|(b - c)(a - b)(a - c)(a + b + c)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2. \quad (1)$$

Giả sử $a = \max\{a, b, c\}$, ta có

$$\begin{aligned} 9(a^2 + b^2 + c^2)^2 &= [(a + b + c)^2 + 2(b - c)^2 + 2(a - b)(a - c)]^2 \\ &\geq [2\sqrt{2}|(a + b + c)(b - c)| + 2|(a - b)(a - c)|]^2 \\ &\geq 16\sqrt{2}|(b - c)(a - b)(a - c)(a + b + c)|. \end{aligned}$$

Do đó, ta có

$$|(b - c)(a - b)(a - c)(a + b + c)| \leq \frac{9\sqrt{2}}{32}(a^2 + b^2 + c^2)^2.$$

Có thể chọn $b = 1$ thì $a = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $c = 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}$ để đẳng thức xảy ra.

Vậy $\min M = \frac{9\sqrt{2}}{32}$.

Ví dụ 2.9 (Tổng quát IMO 2004). Với mỗi số nguyên dương $n \geq 3$, tìm hằng số dương $k = k(n)$ lớn nhất sao cho nếu n số thực dương $t_1, t_2, \dots, t_n$ thỏa mãn

$$(t_1 + t_2 + \dots + t_n) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \right) < k$$

thì t_i, t_j, t_k là độ dài ba cạnh của một tam giác với mọi i, j, k thỏa mãn $1 \leq i < j < k \leq n$.

Giả sử tồn tại ba số chẳng hạn t_1, t_2, t_3 thỏa mãn $t_1 + t_2 \leq t_3$. Khi đó

$$\begin{aligned} (t_1 + t_2 + t_3) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \right) &= 3 + \left(\frac{t_1}{t_2} + \frac{t_2}{t_1} \right) + \frac{t_1 + t_2}{t_3} + t_3 \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) \\ &\geq 3 + 2 + \frac{t_1 + t_2}{t_3} + \frac{4t_3}{t_1 + t_2} \\ &\geq 5 + 5\sqrt[5]{\frac{t_1 + t_2}{t_3} \left(\frac{t_3}{t_1 + t_2} \right)^4} \geq 10. \end{aligned}$$

Xét $n \geq 4$, ta có

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} \right) &= (t_1 + t_2 + t_3) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \right) + \\ &+ \sum_{i=4}^n \left[(t_1 + t_2 + t_3) \frac{1}{t_i} + \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \right) t_i \right] + \left(\sum_{i=4}^n t_i \right) \left(\sum_{i=4}^n \frac{1}{t_i} \right) \\ &\geq 10 + 2(n-3) \sqrt{(t_1 + t_2 + t_3) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \right) + (n-3)^2} \\ &\geq 10 + 2\sqrt{10}(n-3) + (n-3)^2 = \left(n + \sqrt{10} - 3 \right)^2. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $t_1 = t_2$, $t_3 = 2t_1$, $t_i = \frac{2\sqrt{10}t_1}{5}$, $\forall i = 4, \dots, n$.

Từ đó suy ra $k_{\max} = \left(n + \sqrt{10} - 3 \right)^2$.

Nhận xét 1.

a) Nội dung bài toán IMO 2004 như sau:

Cho số nguyên $n \geq 3$. Giả sử $t_1, t_2, \dots, t_n$ là các số thực dương sao cho

$$(t_1 + t_2 + \dots + t_n) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \right) < n^2 + 1.$$

Chứng minh rằng t_i, t_j, t_k là độ dài ba cạnh của một tam giác với mọi $1 \leq i < j < k \leq n$.

b) Ta có thể tổng quát bài toán trên theo hướng khác như sau:

Cho các số nguyên dương n, k với $n \geq k \geq 3$ và giả sử n số thực dương $t_1, t_2, \dots, t_n$ thỏa mãn

$$(t_1 + t_2 + \dots + t_n) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \right) < \left(n + \sqrt{2k^2 - 4k + 4} - k \right)^2.$$

Chứng minh rằng mỗi số trong k số $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$ đều nhỏ hơn tổng của $k-1$ số còn lại với $1 \leq i_1 < \dots < i_k$

III. Bài tập

Bài 2.1. Tìm giá trị lớn nhất của k để bất đẳng thức sau đúng với mọi giá trị a, b, c :

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq k(ab + bc + ca)^2.$$

Bài 2.2. Tìm số thực k lớn nhất sao cho với mọi số thực a, b, c không âm và thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 1$, ta luôn có

$$\frac{a}{1 + 9bc + k(b-c)^2} + \frac{b}{1 + 9ca + k(c-a)^2} + \frac{c}{1 + 9ab + k(a-b)^2} \geq \frac{1}{2}.$$

Bài 2.3 (Turkey National Olympiad Second Round 2013). Tìm số thực M lớn nhất sao cho với mọi a, b, c dương, ta luôn có

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq M(ab^2 + bc^2 + ca^2 - 3abc).$$

Bài 2.4. Cho các số dương x, y, z . Tìm số k lớn nhất sao cho:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + 3k \geq (k+1) \cdot \frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Bài 2.5. Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca=a+b+c$. Tìm số thực k lớn nhất sao cho ta luôn có bất đẳng thức:

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq k \cdot (a+b+c+1).$$

Bài 2.6 (Phạm Kim Hùng). Tìm số thực dương k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số dương a, b, c :

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + k \cdot \frac{(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 9+k.$$

Bài 2.7 (Kiểm tra Trường Hà Lê Quý Đôn năm 2014). Tìm hằng số k nhỏ nhất sao cho với mọi số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$ thì ta luôn có bất đẳng thức:

$$k(a^4+b^4+c^4-3) \geq a^3+b^3+c^3+3abc-6.$$

Bài 2.8. Với các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=ab+bc+ca$. Tìm số thực k lớn nhất sao cho

$$a+b+c+k \cdot abc \geq 3+k.$$

Bài 2.9. Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)} + k \cdot \frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2} \geq \frac{3}{8} + \frac{k}{3}.$$

Bài 2.10 (Vietnamese Team Selection Test 2009). Tìm tất cả các hằng số k sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số dương a, b, c :

$$\left(\frac{a}{b+c} + k \right) \left(\frac{b}{c+a} + k \right) \left(\frac{c}{a+b} + k \right) \geq \left(k + \frac{1}{2} \right)^3.$$

Bài 2.11 (VN TST – 2013). Tìm số nguyên dương k lớn nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc=1$:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{k}{a+b+c+1} \geq 3 + \frac{k}{4}.$$

Bài 2.12. Xét các số dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Tìm số k lớn nhất sao cho

$$a^2+b^2+c^2+3k \geq (k+1) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Bài 2.13. Xét các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm k lớn nhất sao cho

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 3 \geq k(a^2 + b^2 + c^2 - 3).$$

Bài 2.14 (Tập chí Pi - P47 – 7/2017). Tìm số thực k bé nhất sao cho với mọi bộ ba số thực a, b, c mà $abc \geq 0$, ta luôn có

$$abc + k \cdot ((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2) + 2 \geq a + b + c.$$

Bài 2.15 (Tập chí Pi - P68 – 9/2017). Tìm số thực k nhỏ nhất sao cho với mọi số thực dương x, y, z mà $\min\{xy, yz, zx\} \geq 1$, ta luôn có

$$\sqrt[3]{(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1)} \leq \left(\frac{x + y + z}{3}\right)^2 + k.$$

Bài 2.16 (Tập chí Pi - P61 – 9/2017). Tìm số thực k nhỏ nhất sao cho với mọi số thực a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, ta luôn có

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} + k \cdot \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{3}{2} + k.$$

Bài 2.17 (P5 – 2/2017). Tìm số dương k nhỏ nhất sao cho với mọi số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$, ta luôn có

$$\frac{1}{x + y + k} + \frac{1}{y + z + k} + \frac{1}{z + x + k} \leq \frac{9k + 3}{2}.$$

Bài 2.18 (BMO 2012). Tìm số thực k lớn nhất để đối với mọi a, b, c khác 0 thỏa mãn $\left|\frac{1}{a}\right| + \left|\frac{1}{b}\right| + \left|\frac{1}{c}\right| \leq 3$, ta đều có bất đẳng thức

$$[a^2 + 4(b^2 + c^2)][b^2 + 4(a^2 + c^2)][c^2 + 4(a^2 + b^2)] \geq k.$$

Bài 2.19. Cho $a_1, a_2, \dots, a_5$ là các số thực bất kỳ có tổng bằng 0. Tìm hằng số $c = c(n)$ lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng:

$$c \sum_{i=1}^n |a_i| \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j|.$$

Bài 2.20. Tìm hằng số M lớn nhất sao cho với mỗi n nguyên dương tồn tại các số $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ và $b_1, b_2, \dots, b_n > 0$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện;

- i) $\sum_{k=1}^n b_k = 1$; $2b_k \geq b_{k-1} + b_{k+1}, \forall k = 2, \dots, n$;
- ii) $a_k^2 \leq 1 + \sum_{i=1}^k a_i b_i, k = \overline{1, n}$;
- iii) $a_n = M$.

ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Chương 1

Các bất đẳng thức cổ điển

§1. Bất đẳng thức AM-GM

Câu 1.1.

a) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt[3]{\frac{1.1.1}{(1+a)(1+b)(1+c)}} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \leq 1.$$

Đặt :

$$\begin{aligned} T &= \sqrt[3]{\frac{1.1.1}{(1+a)(1+b)(1+c)}} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \\ T &\leq \frac{1}{3} \left[\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \right] \\ T &\leq \frac{1}{3} \left[\frac{a+1}{1+a} + \frac{b+1}{1+b} + \frac{c+1}{1+c} \right] = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c \geq 0$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right) \\ &= 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \\ &= \left(\frac{a+b}{c} + 1\right) + \left(\frac{b+c}{a} + 1\right) + \left(\frac{c+a}{b} + 1\right) - 1 \\ &= (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 1 \\ &\geq \frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} - 1 \geq \frac{2(a+b+c)}{\sqrt[3]{abc}} + 2. \end{aligned}$$

Câu 1.2. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}} + \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}} \leq 1. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$VT(1) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1+a_i} = 1.$$

Bài toán được chứng minh.

Câu 1.3. Ta có $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

Khi đó

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\right)^3 \geq 64.$$

Suy ra $(1+a)(1+b)(1+c) \geq 64abc$.

Câu 1.4. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n)}} + \sqrt[n]{\frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n)}} \leq 1. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n)}} &\leq \frac{1}{n} \left(\frac{a_1}{a_1 + b_1} + \cdots + \frac{a_n}{a_n + b_n} \right) \\ \sqrt[n]{\frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \cdots (a_n + b_n)}} &\leq \frac{1}{n} \left(\frac{b_1}{a_1 + b_1} + \cdots + \frac{b_n}{a_n + b_n} \right) \end{aligned}$$

Cộng hai bất đẳng thức trên theo về ta có đpcm.

Câu 1.5. Vì α_i là các số hữu tỉ dương và $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ nên tồn tại các số nguyên dương $N, k_1, k_2, \dots, k_n$ sao cho $\alpha_i = \frac{k_i}{N}$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho N số, ta có

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot a_i = \frac{\underbrace{a_1 + a_1 + \cdots + a_1}_{k_1 \text{ số}} + \cdots + \underbrace{a_n + a_n + \cdots + a_n}_{k_n \text{ số}}}{N} \geq \frac{k_1}{a_1^N} \cdots \frac{k_n}{a_n^N} = a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 1.6. Chuẩn hóa $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$, ta cần chứng minh

$$a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k \geq n. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho k số gồm $k - 1$ số 1 và a_i^k ta có

$$a_i^k + k - 1 \geq k a_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i^k + n(k - 1) \geq k \sum_{i=1}^n a_i = kn \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i^k \geq n.$$

Vậy (1) đúng, hay bài toán được chứng minh.

Câu 1.7. Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+2c+a} &\geq \frac{4}{(a+3b) + (b+2c+a)} = \frac{2}{a+2b+c} \\ \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{2a+b+c} &\geq \frac{2}{a+b+2c} \\ \frac{1}{c+3a} + \frac{1}{a+2b+c} &\geq \frac{2}{2a+b+c}. \end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo về ta có đpcm.

Câu 1.8. Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số ta có

$$\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} \geq 2\sqrt[8]{ab} \Rightarrow \left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^4 \geq 16\sqrt{ab} \text{ và } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}.$$

Suy ra

$$\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^4 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 16\sqrt{ab} \cdot \frac{2}{\sqrt{ab}} = 32.$$

Dẫn tới

$$\frac{1}{\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^4} \leq \frac{1}{32} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Tương tự:

$$\frac{1}{\left(\sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c}\right)^4} \leq \frac{1}{32} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right), \quad \frac{1}{\left(\sqrt[4]{c} + \sqrt[4]{a}\right)^4} \leq \frac{1}{32} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right).$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{1}{\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^4} + \frac{1}{\left(\sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c}\right)^4} + \frac{1}{\left(\sqrt[4]{c} + \sqrt[4]{a}\right)^4} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Mặt khác, theo giả thiết ta có $ab + bc + ca \leq 3abc$ nên suy ra

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3.$$

Suy ra

$$\frac{1}{\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)^4} + \frac{1}{\left(\sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c}\right)^4} + \frac{1}{\left(\sqrt[4]{c} + \sqrt[4]{a}\right)^4} \leq \frac{3}{16} \text{ (đpcm)}.$$

Câu 1.9. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{2a}{b+2c} + \frac{2b}{c+2a} + \frac{2c}{a+2b} &\geq 4 - \frac{2a}{b+2a} - \frac{2b}{c+2b} - \frac{2c}{a+2c} \\ \Leftrightarrow a \left(\frac{1}{b+2c} + \frac{1}{b+2a} \right) &+ b \left(\frac{1}{c+2a} + \frac{1}{c+2b} \right) + c \left(\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+2c} \right) \geq 2. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ ta có

$$\frac{1}{b+2c} + \frac{1}{b+2a} \geq \frac{4}{2a+2b+2c} = \frac{2}{a+b+c}.$$

Suy ra

$$a \left(\frac{1}{b+2c} + \frac{1}{b+2a} \right) \geq \frac{2a}{a+b+c}.$$

Tương tự:

$$b \left(\frac{1}{c+2a} + \frac{1}{c+2b} \right) \geq \frac{2b}{a+b+c}, \quad c \left(\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+2c} \right) \geq \frac{2c}{a+b+c}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta có

$$a \left(\frac{1}{b+2c} + \frac{1}{b+2a} \right) + b \left(\frac{1}{c+2a} + \frac{1}{c+2b} \right) + c \left(\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{a+2c} \right) \geq 2 \text{ (đpcm)}.$$

Câu 1.10. Áp dụng AM – GM, ta có

$$1 + x^3 = (1 + x)(1 - x + x^2) \leq \frac{(1 + x + 1 - x + x^2)^2}{4} = \frac{(2 + x^2)^2}{4}.$$

Tương tự

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y^3}} \geq \frac{2}{2 + y^2}; \frac{1}{\sqrt{1 + z^3}} \geq \frac{2}{2 + z^2}.$$

Vậy

$$P = \frac{1}{\sqrt{1 + x^3}} + \frac{1}{\sqrt{1 + y^3}} + \frac{1}{\sqrt{1 + z^3}} \geq \frac{2}{2 + x^2} + \frac{2}{2 + y^2} + \frac{2}{2 + z^2}.$$

Áp dụng Cauchy – Swarzt, ta được:

$$P \geq \frac{18}{x^2 + y^2 + z^2 + 6} \geq 1.$$

Dấu ‘=’ xảy ra khi $x = y = z = 2$. Vậy GTNN của biểu thức là $P = 1$.

Câu 1.11. Ta có:

$$\frac{a}{1 + b^2} = \frac{a(1 + b^2) - ab^2}{1 + b^2} = a - \frac{ab^2}{1 + b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}.$$

Do đó:

$$\frac{a}{1 + b^2} + \frac{b}{1 + c^2} + \frac{c}{1 + a^2} \geq a + b + c - \frac{1}{2}(ab + bc + ca).$$

Mà:

$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 = 3.$$

Nên suy ra:

$$\frac{a}{1 + b^2} + \frac{b}{1 + c^2} + \frac{c}{1 + a^2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Câu 1.12. Ta có:

$$\frac{a^2}{a + 2b^2} = \frac{a(a + 2b^2) - 2ab^2}{a + 2b^2} = a - \frac{2ab^2}{a + b^2 + b^2} \geq a - \frac{2ab^2}{2\sqrt{2}ab} = a - \frac{1}{\sqrt{2}}b.\sqrt{a}.$$

Suy ra:

$$\frac{a^2}{a + 2b^2} + \frac{b^2}{b + 2c^2} + \frac{c^2}{c + 2a^2} \geq a + b + c - \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a}.b + \sqrt{b}.c + \sqrt{c}.a).$$

Mặt khác:

$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 = \frac{3}{4}.$$

Và

$$\sqrt{ab}.\sqrt{b} + \sqrt{bc}.\sqrt{c} + \sqrt{ca}.\sqrt{a} \leq \sqrt{(ab + bc + ca)(a + b + c)} \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

Vậy:

$$\frac{a^2}{a + 2b^2} + \frac{b^2}{b + 2c^2} + \frac{c^2}{c + 2a^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Câu 1.13. $ax^2 + ay^2 \geq 2axy$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y$.
 $by^2 + cz^2 \geq 2\sqrt{bc}yz$. Đẳng thức xảy ra khi $by^2 = cz^2$.
 $cz^2 + bx^2 \geq 2\sqrt{cb}zx$. Đẳng thức xảy ra khi $cz^2 = bx^2$.
 Bây giờ ta chọn a, b, c sao cho :

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 2c = 1 \\ a = \sqrt{bc} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Suy ra: $x^2 + y^2 \geq 2xy$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y$.

$2y^2 + \frac{1}{2}z^2 \geq 2yz$. Đẳng thức xảy ra khi $2y^2 = \frac{1}{2}z^2$.

$\frac{1}{2}z^2 + 2x^2 \geq 2zx$. Đẳng thức xảy ra khi $\frac{1}{2}z^2 = 2x^2$.

Cộng vế theo vế ta được :

$$3x^2 + 3y^2 + z^2 \geq 2(xy + yz + zx) \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + z^2 \geq 10 \text{ (đpcm)}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi : } \begin{cases} x = y \\ 2y^2 = \frac{1}{2}z^2 \\ \frac{1}{2}z^2 = 2x^2 \\ xy + yz + zx = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ z = 2 \end{cases}.$$

Câu 1.14. Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số thực dương ta có

$$\frac{a^3}{(a+2b)(b+2c)} + \frac{a+2b}{27} + \frac{b+2c}{27} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(a+2b)(b+2c)} \cdot \frac{a+2b}{27} \cdot \frac{b+2c}{27}} = \frac{1}{3}a.$$

Tương tự:

$$\frac{b^3}{(b+2c)(c+2a)} + \frac{b+2c}{27} + \frac{c+2a}{27} \geq \frac{1}{3}b,$$

và

$$\frac{c^3}{(c+2a)(a+2b)} + \frac{c+2a}{27} + \frac{a+2b}{27} \geq \frac{1}{3}c.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{a^3}{(a+2b)(b+2c)} + \frac{b^3}{(b+2c)(c+2a)} + \frac{c^3}{(c+2a)(a+2b)} + \frac{2(a+b+c)}{9} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Suy ra

$$\frac{a^3}{(a+2b)(b+2c)} + \frac{b^3}{(b+2c)(c+2a)} + \frac{c^3}{(c+2a)(a+2b)} \geq \frac{a+b+c}{9}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Câu 1.15. Ta thấy đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Khi đó $\frac{a^4}{b^2(c+2)} = \frac{1}{3}, b = 1, c + 2 = 3$ nên áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 4 số ta được

$$\frac{a^4}{b^2(c+2)} + \frac{b}{3} + \frac{b}{3} + \frac{c+2}{9} \geq 4\sqrt[4]{\frac{a^4}{b^2(c+2)} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{c+2}{9}} = \frac{4}{3}a$$

Tương tự:

$$\frac{b^4}{c^2(a+2)} + \frac{2b}{3} + \frac{a+2}{9} \geq \frac{4}{3}b, \quad \frac{c^4}{a^2(b+2)} + \frac{2a}{3} + \frac{b+2}{9} \geq \frac{4}{3}c.$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{a^4}{b^2(c+2)} + \frac{b^4}{c^2(a+2)} + \frac{c^4}{a^2(b+2)} + \frac{7(a+b+c)+6}{9} \geq \frac{4(a+b+c)}{3}.$$

Hay

$$\frac{a^4}{b^2(c+2)} + \frac{b^4}{c^2(a+2)} + \frac{c^4}{a^2(b+2)} \geq \frac{5(a+b+c)-6}{9}.$$

Mà $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$ nên ta có

$$\frac{a^4}{b^2(c+2)} + \frac{b^4}{c^2(a+2)} + \frac{c^4}{a^2(b+2)} \geq 1 \text{ (đpcm)}.$$

Câu 1.16. Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$, ta có :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right). \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, ta có :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) \geq \frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{2\sqrt{2b}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \frac{2\sqrt{2c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$, ta có :

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{2\sqrt{2b}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \frac{2\sqrt{2c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &\geq \frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{2(b+c)}} + \frac{2\sqrt{2b}}{\sqrt{2(a+c)}} + \frac{2\sqrt{2c}}{\sqrt{2(a+b)}} \\ &= 2 \left(\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \right). \end{aligned}$$

Câu 1.17. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{a^4}{b+2} + \frac{b+2}{9} \geq 2\sqrt{\frac{a^4}{b+2} \cdot \frac{b+2}{9}} = \frac{2}{3}a^2.$$

Tương tự:

$$\frac{b^4}{c+2} + \frac{c+2}{9} \geq \frac{2}{3}b^2, \quad \frac{c^4}{a+2} + \frac{a+2}{9} \geq \frac{2}{3}c^2.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{a^4}{b+2} + \frac{b^4}{c+2} + \frac{c^4}{a+2} + \frac{a+b+c+6}{9} \geq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2) = 2.$$

Suy ra

$$\frac{a^4}{b+2} + \frac{b^4}{c+2} + \frac{c^4}{a+2} \geq \frac{12-(a+b+c)}{9}.$$

Mặt khác:

$$a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} = 3$$

nên suy ra

$$\frac{a^4}{b+2} + \frac{b^4}{c+2} + \frac{c^4}{a+2} \geq \frac{12-3}{9} = 1 \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 1.18. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{4}{3-a^2} + 1\right) \left(\frac{4}{3-b^2} + 1\right) \left(\frac{4}{3-c^2} + 1\right) \geq 3(a+b+c)^2.$$

Từ đề bài, ta suy ra $a^2, b^2, c^2 < 3$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si ta có:

$$\frac{4}{3-a^2} + (3-a^2) \geq 2\sqrt{\frac{4}{3-a^2}(3-a^2)} = 4,$$

suy ra

$$\frac{4}{3-a^2} + 1 \geq a^2 + 2.$$

Tương tự:

$$\frac{4}{3-b^2} + 1 \geq b^2 + 2, \quad \frac{4}{3-c^2} + 1 \geq c^2 + 2.$$

Do đó

$$\left(\frac{4}{3-a^2} + 1\right) \left(\frac{4}{3-b^2} + 1\right) \left(\frac{4}{3-c^2} + 1\right) \geq (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2).$$

Mặt khác:

$$3(a+b+c)^2 = 3\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot c\right)^2 \leq 3\left[\frac{(a+b)^2}{2} + 1\right](c^2 + 2).$$

Ta chứng minh

$$3\left[\frac{(a+b)^2}{2} + 1\right] \leq (a^2 + 2)(b^2 + 2). \quad (*)$$

Khai triển và rút gọn, bất đẳng thức (*) trở thành

$$2a^2b^2 + a^2 + b^2 + 2 \geq 6ab.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì:

$$2(a^2b^2 + 1) \geq 4ab, \quad a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 1.19. Ta có: $b + c \leq \sqrt{2(b^2 + c^2)}$ Suy ra

$$\frac{a^2}{b+c} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{2(b^2 + c^2)}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{b^2 + c^2}.$$

Tương tự:

$$\frac{b^2}{c+a} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{2(c^2 + a^2)}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{c^2 + a^2}; \quad \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Suy ra

$$VT \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + a^2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \right).$$

Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + a^2}} \geq \frac{9}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2}}$$

và

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{6} \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \right)^2.$$

Suy ra

$$VT \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \right).$$

Đặt

$$t = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} \geq \sqrt{2} \left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \right) \geq 3\sqrt{2}\sqrt{abc}.$$

Suy ra $\frac{1}{54\sqrt{2}}t^3 \geq abc$ nên từ giả thiết ta suy ra

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{c^2 + a^2} = \frac{7 - abc}{\sqrt{2}} \geq \frac{7}{\sqrt{2}} - \frac{1}{108}t^3 \\ &\Leftrightarrow t^3 + 108t - 378\sqrt{2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (t - 3\sqrt{2})(t^2 + 3\sqrt{2}t + 126) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $VT \geq \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = b = c \\ 3\sqrt{2}a = \frac{7 - a^3}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a^3 + 6a - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1.$

Câu 1.20. Nhận thấy đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ và $3 = 1 + 2$ nên ta có đánh giá

$$a^2 + 2b^2 + 3 = (a^2 + b^2) + (b^2 + 1) + 2 \geq 2ab + 2b + 2.$$

Do đó:

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ab + b + 1}.$$

Suy ra:

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} \right)$$

Vậy ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} \leq 1.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì đó là đẳng thức. Để chứng minh ta thay $c = \frac{1}{ab}$ vào vế trái và biến đổi ta có đpcm.

Câu 1.21. Ta có

$$\sum \frac{1}{\sqrt{a^3 + b}} \leq \sum \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{a^3b}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum \sqrt[4]{\left(\frac{1}{a}\right)^3 \cdot \frac{1}{b}} \leq \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum \left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Câu 1.22. Ta có

$$ab + 1 \geq \frac{2ab + a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}{2} = \frac{(a+b)^2 + (c+a)(c+b)}{2}.$$

Suy ra

$$VT \geq \frac{1}{2} \left(3 + \frac{(a+c)(b+c)}{(a+b)^2} + \frac{(a+b)(a+c)}{(b+c)^2} + \frac{(b+a)(b+c)}{(c+a)^2} \right) \geq 3.$$

Câu 1.23. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a + b + c = a + \frac{b+c}{2} + \frac{b+c}{2} \geq 3\sqrt[3]{a \frac{(b+c)^2}{4}},$$

suy ra

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2a}{b+c}\right)^2} \geq \frac{3a}{a+b+c}.$$

Chúng minh tương tự, ta cũng có

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2b}{c+a}\right)^3} \geq \frac{3b}{a+b+c} \text{ và } \sqrt[3]{\left(\frac{2c}{a+b}\right)^2} \geq \frac{3c}{a+b+c}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta có đpcm.

Câu 1.24. Bài toán này có thể chứng minh bằng cách sử dụng đánh giá sau:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} \leq \frac{a^2 + b^2}{a + b}.$$

Chú ý rằng: $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = a + b - \frac{2ab}{a + b}$

Như vậy ta phải chứng minh:

$$2 \left[\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \right] + a + b + c \geq 6.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM với $abc = 1$, ta có ngay:

$$\frac{2ab}{a+b} + \frac{a+b}{2} + \frac{2bc}{b+c} + \frac{b+c}{2} + \frac{2ca}{c+a} + \frac{c+a}{2} \geq 6.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 1.25. Ta có

$$\frac{13a^2b^2c^2 - 2abc - 2}{(a^2 + b^2 + c^2)^3} = \frac{27a^2b^2c^2 - (abc + 2)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)^3} \leq \frac{27a^2b^2c^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)^3}.$$

Ta chứng minh:

$$\frac{27a^2b^2c^2}{2(a^2 + b^2 + c^2)^3} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{a^2b^2c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^3} \leq \frac{1}{54}.$$

Vì $a + b + c = 0$ nên trong ba số a, b, c có hai số cùng dấu, ta giả sử hai số đó là a, b . Khi đó $ab \geq 0$ nên

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)^3 &= [a^2 + b^2 + (a+b)^2]^3 = \left[a^2 + b^2 + \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(a+b)^2}{2} \right]^3 \\ &\geq \frac{27}{4} (a^2 + b^2) (a+b)^2 (a+b)^2 \geq \frac{27}{4} \cdot 2ab \cdot 4ab \cdot c^2 = 54a^2b^2c^2. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{a^2b^2c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^3} \leq \frac{1}{54} \text{ (đpcm).}$$

Câu 1.26. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $c = \min\{a, b, c\}$.

Nếu $a \geq b$ suy ra $6\sqrt{3}(a-b)(b-c)(c-a) \leq 0$ nên bất đẳng thức cần chứng minh luôn đúng.

Nếu $a \leq b$, ta có:

$$\begin{aligned} 6\sqrt{3}(a-b)(b-c)(c-a) &= 6\sqrt{3}(b-a)(b-c)(a-c) \\ &\leq 6\sqrt{3}(b-a)ba = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{(a-b)^2 2ab \cdot 2ab} \\ &\leq 3\sqrt{3} \sqrt{\left(\frac{(a-b)^2 + 2ab + 2ab}{3}\right)^3} \\ &= \sqrt{(a+b)^3} \leq \sqrt{(a+b+c)^3} \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} c = 0 \\ (a-b)^2 = 2ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = (2 \pm \sqrt{2})b \end{cases}$.

Câu 1.27. Trước hết ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a > b > c$. Khi đó

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{a-c} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}} \\ &\geq \frac{8}{a-b+b-c} + \frac{2}{a-c} + \frac{5}{\sqrt{ab+bc+ca}} \\ &= \frac{10}{a-c} + \frac{10}{2\sqrt{ab+bc+ca}} \\ &\geq \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a-c)^2 + 4(ab+bc+ca)}} \\ &= \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(a+c)^2 + 4b(a+c)}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{(1-b)(1+3b)}}. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$(1-b)(1+3b) = \frac{1}{3}(3-3b)(1+3b) \leq \frac{1}{3} \left(\frac{3-3b+1+3b}{2} \right)^2 = \frac{4}{3}.$$

Do đó $P \geq 10\sqrt{6}$. Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} b = \frac{1}{3} \\ a = \frac{2}{3}, c = 0 \end{cases}$. Vậy $\min P = 10\sqrt{6}$.

Câu 1.28. Ta có

$$\sum \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \sum \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{c}\right) = \sum ab + \sum \frac{a}{c} + \sum \frac{1}{ab} + 3.$$

Áp dụng $\sum \frac{1}{ab} = \sum a$ và $\sum ab + \sum \frac{a}{c} \geq 2 \sum a$, ta có đpcm.

Cách 2: Ta có

$$a^2 + \frac{1}{b^2} + \frac{b}{c} \geq 3\sqrt[3]{a^2 \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{b}{c}} = 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}} = 3\sqrt[3]{\frac{a^2 \cdot abc}{bc}} = 3a.$$

Tương tự

$$b^2 + \frac{1}{c^2} + \frac{c}{a} \geq 3b,$$

và

$$c^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{a}{b} \geq 3c.$$

Kết hợp với

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3.$$

ta có đpcm.

Câu 1.29. Ta có $b + 2a + \frac{2}{b+1} \geq \frac{5}{2} + \frac{3}{2}a$ nên

$$\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right) \left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geq \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}a\right) \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}b\right)$$

và

$$\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}a\right) \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}b\right) = \frac{25}{4} + \frac{15}{4}(a+b) + \frac{9}{4}ab \geq 16$$

nên ta có đpcm.

Câu 1.30. Ta có

$$2a + b + c = a + b + a + c \geq 2\sqrt{(a+b)(a+c)}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(a+b)(a+c)}.$$

Do đó

$$VT \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b+c}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Mặt khác ta có:

$$9(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8(a+b+c)(ab+bc+ca),$$

và

$$(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c).$$

Từ giả thiết, ta suy ra $ab+bc+ca = abc(a+b+c)$ nên $ab+bc+ca \geq 3$. Suy ra

$$\frac{a+b+c}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \cdot \frac{1}{ab+bc+ca} \leq \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{8}.$$

Từ đó, suy ra đpcm.

Câu 1.31. Áp dụng bất đẳng thức Bunhia ta có:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)^2 &= (a\sqrt{a} \cdot a + b\sqrt{b} \cdot b)^2 \leq (a^3 + b^3)(a+b) \leq (a^3 + b^3) \sqrt{2(a^2 + b^2)} \\ &\Rightarrow \sqrt{(a^2 + b^2)^3} \leq \sqrt{2}(a^3 + b^3) \Rightarrow a^2 + b^2 \leq \sqrt[3]{2(a^3 + b^3)^2} \\ &\Rightarrow \frac{c^3}{a^2 + b^2} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{c^3}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{a^3 + b^3 + c^3}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{a^3 + b^3}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ta cũng có hai bất đẳng thức tương tự

$$\frac{b^3}{c^2 + a^2} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{a^3 + b^3 + c^3}{\sqrt[3]{(c^3 + a^3)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{c^3 + a^3}, \quad (2)$$

$$\frac{a^3}{b^2 + c^2} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{a^3 + b^3 + c^3}{\sqrt[3]{(b^3 + c^3)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sqrt[3]{b^3 + c^3}. \quad (3)$$

Cộng ba bất đẳng thức (1), (2) và (3), ta được

$$P \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} (a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3)^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3)^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3)^2}} \right) - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left(\sqrt[3]{a^3 + b^3} + \sqrt[3]{b^3 + c^3} + \sqrt[3]{c^3 + a^3} \right).$$

Đặt $x = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$, $y = \sqrt[3]{b^3 + c^3}$, $z = \sqrt[3]{c^3 + a^3}$. Suy ra:

$$P \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left[(x^3 + y^3 + z^3) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) - (x + y + z) \right].$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có được:

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) &\geq 9 \\ \Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} &\geq \frac{9}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \Rightarrow (x^3 + y^3 + z^3) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) &\geq 9 \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \\ \Rightarrow P &\geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \left[9 \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} - (x + y + z) \right]. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow (x + y + z)^2 (x^2 + y^2 + z^2) \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)^2$$

mà

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)^2 &= (x\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} + y\sqrt{y} \cdot \sqrt{y} + z\sqrt{z} \cdot \sqrt{z})^2 \leq (x + y + z)(x^3 + y^3 + z^3) \\ \Rightarrow (x + y + z)^2 (x^2 + y^2 + z^2) &\leq 3(x + y + z)(x^3 + y^3 + z^3) \\ \Rightarrow \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} &\geq \frac{1}{3}(x + y + z). \end{aligned}$$

Do đó

$$P \geq \sqrt[3]{4}(x + y + z) = \sqrt[3]{4} \left(\sqrt[3]{a^3 + b^3} + \sqrt[3]{b^3 + c^3} + \sqrt[3]{c^3 + a^3} \right)$$

Vì

$$t = \sqrt[3]{a^3 + b^3} + \sqrt[3]{b^3 + c^3} + \sqrt[3]{c^3 + a^3} \geq \sqrt[3]{2} \left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \right) \geq 3\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{abc}$$

Suy ra $abc \leq \frac{1}{54}t^3$.

Nên từ giả thiết ta suy ra:

$$3 \leq t + \frac{1}{54}t^3 \Leftrightarrow t^3 + 54t - 162 \geq 0. \quad (*)$$

Vì hàm số $f(t) = t^3 + 54t - 162$ là hàm đồng biến và $f(2)f(3) < 0$ nên $f(t)$ có nghiệm duy nhất $x = m \in (2; 3)$.

Suy ra $(*) \Leftrightarrow t \geq m \Rightarrow P \geq \sqrt[6]{32} \cdot m$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a^3 + 3\sqrt[3]{2}a - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \alpha$.

Trong đó α là nghiệm duy nhất của phương trình $X^3 + 3\sqrt[3]{2}X - 3 = 0$ và $\alpha > 0$.
Vậy $\min P = \sqrt[6]{32} \cdot m$ (đpcm).

Câu 1.32. Ta chứng minh $a + bc \leq 2$ (1).

Do $bc \leq \frac{b^2 + c^2}{2} < 2$ nên 1 tương đương $a^2 \leq (2 - bc)^2$. Do

$$a^2 \leq 3 - (b^2 + c^2) \text{ và } (2 - bc)^2 - (3 - b^2 - c^2) = (bc - 1)^2 + (b - c)^2 \geq 0$$

nên (1) đúng.

Ta chứng minh $\sqrt{(4 - a^2)(4 - c^2)} \geq ac + 2b$ (2).

Ta có $abc \leq \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \leq 1$ nên

$$(4 - a^2)(4 - c^2) - (ac + 2b)^2 = 16 - 4(a^2 + b^2 + c^2 + abc) \geq 0.$$

Suy ra (2) đúng.

Ta chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \geq a^b + b^2c + c^2a$ (3).

Ta có $a^2 + \frac{1}{4}(ab + c^2)^2 \geq a(ab + c^2) = a^2b + c^2a$ (4) và

$$\frac{1}{4}[(4 - a^2)b^2 + (4 - c^2)c^2] \geq \frac{1}{2}bc\sqrt{(4 - a^2)(4 - b^2)} \geq bc^2 + \frac{abc^2}{2} \quad (5)$$

Cộng (4) và (5) theo về suy ra (3) được chứng minh.

Quay trở lại bài toán. Từ (1) ta có $a^2b + ab^2c \leq 2ab$, $b^2c + abc^2 \leq 2bc$, $c^2a + a^2bc \leq 2ca$. Suy ra

$$\begin{aligned} 2(ab + bc + ca) &\geq a^2b + b^2c + c^2a + abc(a + b + c) \\ \Leftrightarrow (a + b + c)^2 &\geq a^2 + b^2 + c^2 + abc(a + b + c) + a^2b + b^2c + c^2a. \end{aligned} \quad (6)$$

Từ (3) và (6) ta có

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &\geq abc(a + b + c) + 2(a^2b + b^2c + c^2a) \\ \Leftrightarrow (a + b + c)(a + b + c - abc) &\geq 2(a^2b + b^2c + c^2a). \end{aligned}$$

Câu 1.33. Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \max\{a; b; c\}$.

Khi đó $b + c + 1 \leq c + a + 1$ và $b + c + 1 \leq a + b + 1$

Suy ra $\frac{b}{c + a + 1} \leq \frac{b}{b + c + 1}$; $\frac{c}{a + b + 1} \leq \frac{c}{b + c + 1}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$

Mặt khác theo BĐT AM-GM ta có

$$(1 - b)(1 - c)(b + c + 1) \leq \left(\frac{1 - b + 1 - c + b + c + 1}{3}\right)^3 = 1$$

Suy ra

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leq \frac{1 - a}{b + c + 1}$$

Do đó

$$P \leq \frac{a}{b + c + 1} + \frac{b}{b + c + 1} + \frac{c}{b + c + 1} + \frac{1 - a}{b + c + 1} = 1$$

Dấu = xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 1.34.

- Cách 1: Theo BDT AM-GM ta có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$; $b + c \geq 2\sqrt{bc}$; $c + a \geq 2\sqrt{ca}$.

$$\text{Ta có: } P = \frac{3a + 2b + c}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{3a + 2b + c}{2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca}} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{ab} + \frac{2}{ac} + \frac{3}{bc} \right).$$

$$\text{Lại có: } 3bc + 4ac + 5ab \leq 6abc \Leftrightarrow \frac{3}{a} + \frac{4}{b} + \frac{5}{c} \leq 6. \text{ Đặt } S = \frac{3}{a} + \frac{4}{b} + \frac{5}{c}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} + \frac{25}{c^2} + \frac{24}{ab} + \frac{30}{ac} + \frac{40}{bc} = 9 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) + 16 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) + \frac{24}{ab} + \frac{30}{ac} + \frac{40}{bc} \\ &\Rightarrow S^2 \geq \frac{18}{ac} + \frac{32}{bc} + \frac{24}{ab} + \frac{30}{ac} + \frac{40}{bc} = \frac{24}{ab} + \frac{48}{ac} + \frac{72}{bc} = 24 \left(\frac{1}{ab} + \frac{2}{ac} + \frac{3}{bc} \right) \\ &\Rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{2}{ac} + \frac{3}{bc} \leq \frac{S^2}{24} \leq \frac{3}{2} \\ &\Rightarrow P \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{16}$ khi $a = b = c = 2$.

- Cách 2: $3bc + 4ac + 5ab \leq 6abc \Leftrightarrow \frac{3}{a} + \frac{4}{b} + \frac{5}{c} \leq 6$. Đặt $S = \frac{3}{a} + \frac{4}{b} + \frac{5}{c}$.

Ta có:

$$S^2 = \frac{9}{a^2} + \frac{16}{b^2} + \frac{25}{c^2} + \frac{24}{ab} + \frac{30}{ac} + \frac{40}{bc} = 9 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) + 16 \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) + \frac{24}{ab} + \frac{30}{ac} + \frac{40}{bc}$$

$$\Rightarrow S^2 \geq \frac{18}{ac} + \frac{32}{bc} + \frac{24}{ab} + \frac{30}{ac} + \frac{40}{bc} = \frac{24}{ab} + \frac{48}{ac} + \frac{72}{bc} = 24 \left(\frac{1}{ab} + \frac{2}{ac} + \frac{3}{bc} \right).$$

$$\frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2}; \frac{1}{bc} \geq \frac{4}{(b+c)^2}; \frac{1}{ac} \geq \frac{4}{(a+c)^2}$$

$$\Rightarrow S^2 \geq 24 \left[\frac{4}{(a+b)^2} + \frac{8}{(a+c)^2} + \frac{12}{(c+b)^2} \right] = 96 \left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{2}{(a+c)^2} + \frac{3}{(c+b)^2} \right]$$

$$\Rightarrow S^2 \geq 96 \left[\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + 2 \left(\frac{1}{(a+c)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow S^2 \geq 96 \left[\frac{2}{(a+b)(b+c)} + \frac{4}{(a+c)(b+c)} \right]$$

$$S^2 \geq 192 \left[\frac{1}{(a+b)(b+c)} + \frac{2}{(a+c)(b+c)} \right] = 192 \frac{3a + 2b + c}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$P \leq \frac{S^2}{192} = \frac{36}{192} = \frac{3}{16}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{3}{16}$ khi $a = b = c = 2$.

Câu 1.35. Biến đổi tương đương ta chứng minh được: $a+b+c \leq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$, $\forall a, b, c > 0$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ta có

$$\begin{aligned} VT &\leq \sqrt{3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x^3+2y^3+6}} + \frac{1}{\sqrt{y^3+2z^3+6}} + \frac{1}{\sqrt{z^3+2x^3+6}} \right)} \\ &\leq \sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \left(\frac{1}{x^3+2y^3+6} + \frac{1}{y^3+2z^3+6} + \frac{1}{z^3+2x^3+6} \right)}} \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức TTBC-TBN ta có:

$$x^3 + 2y^3 + 6 = (x^3 + y^3 + 1) + (y^3 + 1 + 1) + 3 \geq 3xy + 3y + 3 = 3(xy + y + 1)$$

Tương tự:

$$y^3 + 2z^3 + 6 \geq 3(yz + z + 1)$$

$$z^3 + 2x^3 + 6 \geq 3(xz + x + 1)$$

Do đó

$$\begin{aligned} VT^4 &\leq 9 \left(\frac{1}{xy + y + 1} + \frac{1}{yz + z + 1} + \frac{1}{zx + x + 1} \right) \\ &= 9 \left(\frac{1}{xy + y + 1} + \frac{xy}{xy(yz + z + 1)} + \frac{1}{zx + x + 1} \right) \\ &= 9. \text{ (do } xyz = 1) \end{aligned}$$

Hay $VT \leq \sqrt[4]{9}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Câu 1.36. Ta có $P + \frac{2\sqrt{3} + 1}{3} = \left(\frac{1}{3x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3}x^3 \right) + \left(\frac{1}{y^2} + \frac{y^2}{3} \right) + \left(\frac{1}{z^3} + \frac{z}{9} + \frac{z}{9} + \frac{z}{9} \right)$

Áp dụng Bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\frac{1}{3x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3}x^3 \geq 4\sqrt[4]{\left(\frac{1}{3x}\right)^3 \cdot \frac{x^3}{3}} = \frac{4}{3}. \quad (1)$$

$$\frac{1}{y^2} + \frac{y^2}{3} \geq \frac{2\sqrt{3}}{3}. \quad (2)$$

$$\frac{1}{z^3} + \frac{z}{9} + \frac{z}{9} + \frac{z}{9} \geq \frac{4\sqrt{3}}{9} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có $P + \frac{2\sqrt{3} + 1}{3} \geq \frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{9}$ hay $P \geq \frac{4\sqrt{3} + 9}{9}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \frac{1}{3x} = \frac{x^3}{3} \\ \frac{1}{y^2} = \frac{y^2}{3} \\ \frac{1}{z^3} = \frac{z}{9} \\ x^3 + y^2 + z = 2\sqrt{3} + 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt[4]{3} \\ z = \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy $\min P = \frac{4\sqrt{3} + 9}{9}$ khi $(x, y, z) = (1, \sqrt[4]{3}, \sqrt{3})$

Câu 1.37. Ta có: $a^6b^6 + b^6c^6 + c^6a^6 = a^5b^5.ab + b^5c^5.bc + c^5a^5.ca$
 $\leq a^5b^5 \frac{a^5 + b^5 + 1 + 1 + 1}{5} + b^5c^5 \frac{b^5 + c^5 + 1 + 1 + 1}{5} + c^5a^5 \frac{c^5 + a^5 + 1 + 1 + 1}{5}$
 $= \frac{1}{5} (a^5b^5(a^5 + b^5 + 3) + b^5c^5(b^5 + c^5 + 3) + c^5a^5(c^5 + a^5 + 3))$

Đặt $x = a^5, y = b^5, z = c^5$. Ta có: $x + y + z = 3$; với $x, y, z > 0$.

Cần chứng minh: $xy(x + y + 3) + yz(y + z + 3) + zx(z + x + 3) \leq 15$

hay $xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) + 3(xy + yz + zx) \leq 15$

$$\Leftrightarrow (xy + yz + zx)(x + y + z + 3) - 3xyz \leq 15$$

$$\Leftrightarrow 2(xy + yz + zx) - xyz \leq 5 \quad (1)$$

Mặt khác: $xyz \geq (3 - 2x)(3 - 2y)(3 - 2z) \Rightarrow 9xyz \geq 12(xy + yz + zx) - 27$

$$\Rightarrow xyz \geq \frac{4}{3}(xy + yz + zx) - 3.$$

Ta có: $VT(1) \leq 2(xy + yz + zx) - \frac{4}{3}(xy + yz + zx) + 3 = \frac{2}{3}(xy + yz + zx) + 3 \leq 5.$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 1.38. Với $k = 1$ thì bộ $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2\right)$ không thỏa mãn.

Với $k = 2$ thì bộ $\left(\frac{4}{5}; \frac{4}{5}; \frac{7}{5}\right)$ không thỏa mãn.

Ta chứng minh với $k = 3$ thì bất đẳng thức đúng hay $x^3y^3z^3(x^3 + y^3 + z^3) \leq 3$.

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử z nhỏ nhất suy ra $z \leq 1$. Ta có $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = (3 - z)^3 - 3xy(x + y)$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$(3 - z)^3 + z^3 \leq \frac{3}{x^3y^3z^3} + 3xy(x + y) \Leftrightarrow 3z^2 - 9z + 9 \leq \frac{1}{x^3y^3z^3} + x^2y + xy^2$$

Ta có $\frac{1}{x^3y^3z^3} + x^2y + xy^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^3y^3}{x^3y^3z^3}} = \frac{3}{z}$, như vậy chỉ cần chứng minh

$$3z^2 - 9z + 9 \leq \frac{3}{z} \Leftrightarrow 3(z - 1)^2 \leq 0$$

Câu 1.39. Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\begin{aligned} a + b + \sqrt{2(a + c)} &= (a + b) + \sqrt{\frac{a + c}{2}} + \sqrt{\frac{a + c}{2}} \\ &\geq 3\sqrt[3]{(a + b) \cdot \left(\sqrt{\frac{a + c}{2}}\right)^2} = 3\sqrt[3]{\frac{(a + b)(a + c)}{2}}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{1}{\left(a + b + \sqrt{2(a + c)}\right)^3} \leq \frac{2}{27(a + b)(a + c)}.$$

Tương tự với hai biểu thức còn lại. Do đó:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{\left(a + b + \sqrt{2(a + c)}\right)^3} \leq \sum_{sym} \frac{2}{27(a + b)(a + c)} = \frac{4(a + b + c)}{27(a + b)(b + c)(c + a)}.$$

Hơn nữa, ta thấy với mọi a, b, c dương:

$$\begin{aligned} 9(a + b)(b + c)(c + a) - 8(a + b + c)(ab + bc + ca) &= \sum_{sym} a(b - c)^2 \geq 0 \\ \Rightarrow (a + b)(b + c)(c + a) &\geq \frac{8}{9}(a + b + c)(ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Do đó:

$$\sum_{cyc} \frac{1}{\left(a + b + \sqrt{2(a + c)}\right)^3} \leq \frac{1}{6(ab + bc + ca)}. \quad (1)$$

Mặt khác, ta cũng có: $(ab + ca + cb)^2 \geq 3abc(a + b + c)$ nên theo giả thiết:

$$16(a + b + c) \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc + ca}{abc} \geq \frac{3(a + b + c)}{ab + bc + ca} \Rightarrow ab + bc + ca \geq \frac{3}{16}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra:

$$\frac{1}{\left(a + b + \sqrt{2(a + c)}\right)^3} + \frac{1}{\left(b + c + \sqrt{2(b + a)}\right)^3} + \frac{1}{\left(c + a + \sqrt{2(c + b)}\right)^3} \leq \frac{8}{9}.$$

Ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi dấu bằng ở tất cả các bất đẳng thức trên xảy ra hay: $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a = b = c \\ 16(a + b + c) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \end{cases} \Rightarrow a = b = c = \frac{1}{4}.$

Câu 1.40. Gọi P là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a + b + c = 1$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + a(a^2 + 8bc) \geq 3a \Leftrightarrow \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + a(a^2 + 8bc) \geq 3a.$$

Tương tự :

$$\frac{2b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + b(b^2 + 8ca) \geq 3b ; \frac{2c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} + c(c^2 + 8ab) \geq 3c$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại với nhau ta được :

$$2P + a^3 + b^3 + c^3 + 24abc \geq 3$$

Mặt khác ta lại có :

$$1 = (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc.$$

Suy ra :

$$2P \geq 3 - (a^3 + b^3 + c^3 + 24abc) \geq 3 - 1 = 2 \Rightarrow P \geq 1 \text{ đpcm.}$$

Câu 1.41. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a^3b + 2b = a^3b + b + b \geq 3ab, b^3c + 2c \geq 3bc, c^3a + 2a \geq 3ca.$$

Suy ra

$$a^3b + b^3c + c^3a + 2(a + b + c) \geq 3(ab + bc + ca),$$

hay

$$a^3b + b^3c + c^3a + 6 \geq 3(ab + bc + ca).$$

Mặt khác

$$ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 3,$$

nên ta có

$$a^3b + b^3c + c^3a + 9 \geq 4(ab + bc + ca).$$

Câu 1.42. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a = \sqrt[4]{\frac{a^4}{abcd}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{a}{d} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{2a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{a}{d} \right).$$

Tương tự:

$$b \leq \frac{1}{4} \left(\frac{2b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{b}{a} \right), c \leq \frac{1}{4} \left(\frac{2c}{d} + \frac{d}{a} + \frac{c}{b} \right), d \leq \frac{1}{4} \left(\frac{2d}{a} + \frac{a}{b} + \frac{d}{c} \right).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} a + b + c + d &\leq \frac{3}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} \right) \\ &\leq \frac{3}{4} (a + b + c + d) + \frac{1}{4} \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d} \right). \end{aligned}$$

Nên

$$a + b + c + d \leq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{d}{c} + \frac{a}{d}.$$

Câu 1.43. Ta giả sử $a = \min \{a, b, c\}$.

Ta có $VT = \prod (a + b) (a^2 - ab + b^2)$.

Mà

$$\begin{aligned} (a + b) (b + c) (c + a) &= (a + b + c) (ab + bc + ca) - 3abc \\ &\leq (a + b + c) (ab + bc + ca) = 2 (ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Suy ra $VT \leq 2 (ab + bc + ca) \prod (a^2 - ab + b^2)$.

Do $a = \min \{a, b, c\}$ nên $a^2 - ab + b^2 \leq b^2$ và $c^2 - ca + a^2 \leq c^2$.

Tiếp theo ta chứng minh

$$b^2 c^2 (ab + bc + ca) (b^2 - bc + c^2) \leq 1. \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\begin{aligned} b^2 c^2 (ab + bc + ca) (b^2 - bc + c^2) &\leq \left(\frac{bc + bc + ab + bc + ca + b^2 - bc + c^2}{4} \right)^4 \\ &= \frac{1}{4^4} (b^2 + c^2 + 2bc + ab + ca)^4. \end{aligned}$$

Lại có

$$b^2 + c^2 + 2bc + ca + ab = (b + c)^2 + a(b + c) = (2 - a)^2 + a(2 - a) = -2a + 4 \leq 4.$$

Từ đó, ta có đpcm.

Câu 1.44. Xét $x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy$ là các số thực dương. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$P \leq \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)}{3} \right)^3$$

Mặt khác

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2 \geq 0,$$

suy ra

$$xy + yz + zx \geq -\frac{1}{2}.$$

Do đó

$$P \leq \frac{1}{8}.$$

Xét $x^2 - yz > 0 > y^2 - zx, z^2 - xy$, khi đó áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$P = (x^2 - yz)(yz - x^2)(xy - z^2) \leq \left(\frac{xy + xz + x^2 - yz - y^2 - z^2}{3} \right)^3$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} x^2 + xy + xz - yz - y^2 - z^2 &= x^2 + xy + xz + yz - (y + z)^2 \\ &\leq x^2 + xy + xz + yz \\ &= \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - (x - 2y)^2 - (x - 2z)^2 \\ &\leq \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $P \leq \frac{1}{8}$. Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z = 0$.

Vậy GTLN của P bằng: $\frac{1}{8}$.

Câu 1.45. Ta có

$$(x + y)^2 \geq 4xy \Rightarrow \frac{x^2 y^2}{1 - z} = \frac{x^2 y^2}{x + y} \leq \frac{1}{4} xy(x + y).$$

Do đó, $VT \leq \frac{1}{4}(xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)) + 3xyz$. Tiếp theo ta chứng minh

$$xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) + 12xyz \leq \frac{2}{3} = \frac{2(x + y + z)^3}{3}. \quad (1)$$

Ta có (1) tương đương với

$$2(x^3 + y^3 + z^3) + 3(xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x)) \geq 24xyz. \quad (2)$$

Vì

$$2(x^3 + y^3 + z^3) \geq 2xy\sqrt{xy} + 2yz\sqrt{yz} + 2zx\sqrt{zx},$$

nên

$$VT(2) \geq 8(xy\sqrt{xy} + yz\sqrt{yz} + zx\sqrt{zx}) \geq 24\sqrt{xyz} \geq 24xyz.$$

(Do $xyz \leq 1$ nên $\sqrt{xyz} \geq xyz$).

Câu 1.46. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$\frac{a^2}{b + 2c} + \frac{(b + 2c)a^2}{9} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b + 2c} \frac{(b + 2c)a^2}{9}} = \frac{2a^2}{3}.$$

Tương tự

$$\frac{b^2}{c + 2a} + \frac{(c + 2a)b^2}{9} \geq \frac{2b^2}{3}, \quad \frac{c^2}{a + 2b} + \frac{(a + 2b)c^2}{9} \geq \frac{2c^2}{3}.$$

Suy ra:

$$\begin{aligned} F &= \frac{a^2}{b + 2c} + \frac{b^2}{c + 2a} + \frac{c^2}{a + 2b} \\ &\geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}[a^2(b + 2c) + b^2(c + 2a) + c^2(a + 2b)]. \quad (1) \end{aligned}$$

Lại áp dụng AM – GM, ta có

$$a^2c + b^2a + c^2b \leq \frac{a^3 + a^3 + c^3}{3} + \frac{b^3 + b^3 + a^3}{3} + \frac{c^3 + c^3 + b^3}{3} = a^3 + b^3 + c^3. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\begin{aligned} F &\geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \\ &\geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}$, từ giả thiết ta có:

$$\begin{aligned} 25(a^2 + b^2 + c^2) - 48 &= 9(a^4 + b^4 + c^4) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)^2 \\ \Rightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 25(a^2 + b^2 + c^2) + 48 &\leq 0 \\ \Rightarrow 3 \leq a^2 + b^2 + c^2 &\leq \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Do đó

$$F \geq \frac{2}{9}t^2 - \frac{1}{27}t^3 = f(t).$$

với $t \in [3; 4]$ (3) Mà $\min_{t \in [3; 4]} f(t) = f(3) = 1$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $F \geq 1$.

Vậy $\min F = 1$ xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 1.47. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \sum (\sqrt{5a^2 + 4bc} - 2\sqrt{bc}) &\geq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \\ \Leftrightarrow \sum \left(\frac{a^2}{\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}(\sqrt{5a^2 + 4bc} + 2\sqrt{bc})} \right) &\geq \frac{1}{5}. \quad (1) \end{aligned}$$

Áp dụng đt AM-GM ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}(5a^4bc) &\leq \frac{8a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4bc}{2} \\ \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \cdot 2\sqrt{bc} &\leq a^2 + b^2 + c^2 + 3bc. \end{aligned}$$

Do đó

$$\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}(\sqrt{5a^2 + 4bc} + 2\sqrt{bc}) \leq \frac{10a^2 + 5(b+c)^2}{2} \leq 5(a^2 + b^2 + c^2).$$

Suy ra

$$VT(1) \geq \sum \frac{a^2}{5(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{1}{5}.$$

Câu 1.48. Gọi P là vế trái. Ta có

$$\frac{4a^2b}{1+a+b} = \frac{a^2b(1+a+b+c)}{1+a+b} = a^2b + \frac{a^2bc}{1+a+b}.$$

Tương tự

$$\frac{4b^2c}{1+b+c} = b^2c + \frac{ab^2c}{1+b+c}, \quad \frac{4c^2a}{1+c+a} = c^2a + \frac{abc^2}{1+c+a}.$$

Do đó

$$4P = 4 \sum \frac{a^2b}{1+a+b} = \sum a^2b + abc \sum \frac{a}{1+a+b}.$$

Mặt khác

$$4 \sum \frac{a}{1+a+b} = \sum \frac{a(1+a+b+c)}{1+a+b} = 3 + \sum \frac{ac}{1+a+b}.$$

Lại có

$$\frac{ac}{1+a+b} = \frac{3ac}{2(2a+b) + (2b+c)} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2ac}{2a+b} + \frac{ac}{2b+c} \right).$$

Nên

$$\sum \frac{ac}{1+a+b} \leq \frac{1}{3}(a+b+c) = 1.$$

Suy ra

$$4P \leq a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq 4 \Rightarrow P \leq 1.$$

Câu 1.49. Ký hiệu P là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu đề bài. Tiếp theo, có thể giải bài đã ra theo một trong các cách sau:

Cách 1 Vì $a, b, c > 0$ nên ta có:

$$P = \frac{a^2 + bc}{\sqrt{a(b+c) \cdot (a^2 + bc)}} + \frac{b^2 + ca}{\sqrt{b(c+a) \cdot (b^2 + ca)}} + \frac{c^2 + ab}{\sqrt{c(a+b) \cdot (c^2 + ab)}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số thực dương $a(b+c)$ và $(a^2 + bc)$, ta được:

$$\sqrt{a(b+c) \cdot (a^2 + bc)} \leq \frac{ab + ac + a^2 + bc}{2} = \frac{(a+b)(a+c)}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{a^2 + bc}{\sqrt{a(b+c) \cdot (a^2 + bc)}} \geq \frac{2(a^2 + bc)}{(a+b)(a+c)}. \quad (1.1)$$

Chứng minh tương tự, ta được:

$$\frac{b^2 + ca}{\sqrt{b(c+a) \cdot (b^2 + ca)}} \geq \frac{2(b^2 + ca)}{(b+c)(a+c)}. \quad (1.2)$$

$$\frac{c^2 + ab}{\sqrt{c(a+b) \cdot (c^2 + ab)}} \geq \frac{2(c^2 + ab)}{(c+a)(c+b)}. \quad (1.3)$$

Cộng vế theo vế, các bất đẳng thức (1.1), (1.2) và (1.3), ta được:

$$P \geq 2 \left(\frac{a^2 + bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2 + ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2 + ab}{(c+a)(c+b)} \right). \quad (1.4)$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{a^2 + bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2 + ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2 + ab}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{2}. \quad (1.5)$$

Thật vậy, vì $a, b, c > 0$ nên

$$\begin{aligned} (1.5) &\Leftrightarrow 2 \left[(a^2 + bc)(b+c) + (b^2 + ca)(a+c) + (c^2 + ab)(a+b) \right] \geq 3(a+b)(b+c)(c+a) \\ &\Leftrightarrow 4(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2) \geq 3(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc) \\ &\Leftrightarrow a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 \geq 6abc \\ &\Leftrightarrow a(b^2 + c^2 - 2abc) + b(c^2 + a^2 - 2ac) + c(a^2 + b^2 - 2ab) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Hiển nhiên, (1.6) là bất đẳng thức đúng. Vì thế, (1.5) được chứng minh. Từ (1.4) và (1.5), suy ra $P \geq 3$. Từ các chứng minh trên ta thấy, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi dấu bằng xảy ra đồng thời ở (1.1), (1.2), (1.3) và (1.6). Dễ thấy, điều cuối cùng có được khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 2 Vì $a, b, c > 0$ nên ta có:

$$P = \frac{\sqrt{(a^2 + bc)(ab + ac)}}{a(b+c)} + \frac{\sqrt{(b^2 + ca)(bc + ba)}}{b(c+a)} + \frac{\sqrt{(c^2 + ab)(ca + cb)}}{c(a+b)}. \quad (2.1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho hai bộ 2 số $(a, \sqrt{bc})$ và $(\sqrt{ab}, \sqrt{ac})$, ta được:

$$(a^2 + bc)(ab + ac) \geq (a \cdot \sqrt{ab} + \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ac})^2 = ab \cdot (a+c)^2.$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{(a^2 + bc)(ab + ac)} \geq \sqrt{ab} \cdot (a + c). \quad (2.2)$$

Bằng cách tương tự, ta cũng chứng minh được:

$$\sqrt{(b^2 + ac)(bc + ba)} \geq \sqrt{bc} \cdot (b + a) \quad (2.3)$$

$$\sqrt{(c^2 + ab)(ca + cb)} \geq \sqrt{ca} \cdot (c + b). \quad (2.4)$$

Từ (2.1), (2.2), (2.3) và (2.4), suy ra

$$P \geq \frac{\sqrt{ab}(a + c)}{a(b + c)} + \frac{\sqrt{bc}(b + a)}{b(c + a)} + \frac{\sqrt{ca}(c + b)}{c(a + b)}. \quad (2.5)$$

Ký hiệu Q là vế phải của (2.5). Theo bất đẳng thức Cauchy cho 3 số thực dương, ta có:

$$Q \geq \sqrt[3]{\frac{\sqrt{ab}(a + c)}{a(b + c)} + \frac{\sqrt{bc}(b + a)}{b(c + a)} + \frac{\sqrt{ca}(c + b)}{c(a + b)}} = 3. \quad (2.6)$$

Từ (2.5) và (2.6), suy ra $P \geq 3$. Từ các chứng minh trên ta thấy, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi dấu bằng xảy ra đồng thời ở (2.2), (2.3), (2.4) và (2.6). Dễ thấy, điều cuối cùng có được khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách 3 Theo bất đẳng thức Cauchy cho 3 số thực dương, ta có:

$$P \geq 3 \sqrt[6]{\frac{a^2 + bc}{a(b + c)} \cdot \frac{b^2 + ca}{b(c + a)} \cdot \frac{c^2 + ab}{c(a + b)}}. \quad (3.1)$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh:

$$\frac{a^2 + bc}{a(b + c)} \cdot \frac{b^2 + ca}{b(c + a)} \cdot \frac{c^2 + ab}{c(a + b)} \geq 1. \quad (3.2)$$

Thật vậy, do $a, b, c > 0$ nên

$$(3.2) \Leftrightarrow (a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab) \geq abc(a + b)(b + c)(c + a). \quad (3.3)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho hai bộ 2 số $(a, \sqrt{bc})$ và $(b, \sqrt{bc})$, ta được:

$$(a^2 + bc)(b^2 + bc) \geq (ab + bc)^2.$$

Hay

$$b(a^2 + bc)(b + c) \geq b^2(a + c)^2. \quad (3.4)$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$$c(b^2 + ca)(c + a) \geq c^2(b + a)^2. \quad (3.5)$$

$$a(c^2 + ab)(a + b) \geq a^2(c + b)^2. \quad (3.6)$$

Vì các vế của (3.4), (3.5) và (3.6) đều dương nên nhân các bất đẳng thức đó với nhau, vế theo vế, rồi chia cả 2 vế của bất đẳng thức thu được cho $abc(a + b)(b + c)(c + a)$, ta sẽ nhận được bất đẳng thức (3.3). Vì thế, (3.2) được chứng minh. Từ (3.1) và (3.2), hiển nhiên suy ra $P \geq 3$. Từ các chứng minh trên ta thấy, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi dấu bằng xảy ra đồng thời ở (3.1), (3.4), (3.5) và (3.6). Dễ thấy, điều cuối cùng có được khi và chỉ khi $a = b = c$.

Câu 1.50. Áp dụng Cauchy ta có:

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2018})^2 &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_{2018}) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2018}} \right) \\ &\geq 2018 \sqrt[2018]{a_1 a_2 \cdots a_{2018}} \cdot \frac{2018}{\sqrt[2018]{a_1 a_2 \cdots a_{2018}}} = 2018^2.\end{aligned}$$

$$\text{Hay } a_1 + a_2 + \cdots + a_{2018} \geq 2018. \quad (1)$$

$$\text{Ta có } P = a_1 + \frac{a_2^2 + 1}{2} + \frac{a_3^3 + 2}{3} + \cdots + \frac{a_{2018}^{2018} + 2017}{2018} - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{2017}{2018} \right). \quad (2)$$

Tiếp tục sử dụng Cauchy và sử dụng (1) ta thu được

$$a_1 + \frac{a_2^2 + 1}{2} + \frac{a_3^3 + 2}{3} + \cdots + \frac{a_{2018}^{2018} + 2017}{2018} \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_{2018} \geq 2018. \quad (3)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2018} = 1$.

Từ (2) và (3) suy ra $P \geq 2018 - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{2017}{2018} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2018}$.

§2. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Câu 2.1. Bình phương hai vế và rút gọn, ta có

$$\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)} \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n).$$

Đây chính là bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng đa thức. Đẳng thức xảy ra khi $a_i = kb_i$.

Câu 2.2. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1) = (a^2 + 1)(1 + b^2) \geq (a + b)^2.$$

Tương tự, ta cũng có

$$(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (b + c)^2, (c^2 + 1)(a^2 + 1) \geq (a + c)^2.$$

Nhân ba bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (a + b)(b + c)(c + a).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 2.3. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$(a^2 + b^2 + 1)(1 + 1 + c^2) \geq (a + b + c)^2 = 9$$

hay là

$$a^2 + b^2 + 1 \geq \frac{9}{c^2 + 2}.$$

Tương tự

$$b^2 + c^2 + 1 \geq \frac{9}{a^2 + 2} \text{ và } c^2 + a^2 + 1 \geq \frac{9}{b^2 + 2}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế, ta được

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 3 \geq 9 \left(\frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + 2} \right).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 2.4. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\begin{aligned} VT &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{a^3 + 8abc} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{b^3 + 8abc} + \sqrt{c} \cdot \sqrt{c^3 + 8abc} \\ &\leq \sqrt{(a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3 + 24abc)}. \end{aligned}$$

Mặt khác

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 24abc$$

Suy ra

$$VT \leq \sqrt{(a + b + c)(a + b + c)^3} = (a + b + c)^2 = 1.$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Câu 2.5. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\begin{aligned} VT &= \sum \frac{a^4}{a(b+2c)} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)}{a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)} \\ &= \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} = 1. \end{aligned}$$

Câu 2.6. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\begin{aligned} VT &= \sum \frac{a^4}{a\sqrt{b^2+c^2+7}} \\ &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a\sqrt{b^2+c^2+7}+b\sqrt{c^2+a^2+7}+c\sqrt{a^2+b^2+7}} \\ &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(2a^2+2b^2+2c^2+21)}} \\ &= \frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{2t+21}}, \quad t = a^2+b^2+c^2 \geq 3. \end{aligned}$$

Ta chứng minh

$$\frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{2t+21}} \geq 1 \Leftrightarrow t^3 \geq 2t+21 \Leftrightarrow (t-3)(t^2+3t+9) \geq 0 \text{ (đúng)}.$$

Câu 2.7. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có:

$$\begin{aligned} \frac{9}{4a^2+b^2+c^2} &= \frac{(a+b+c)^2}{2a^2+(a^2+b^2)+(a^2+c^2)} \\ &\leq \frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2} = \frac{1}{2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2}. \end{aligned}$$

Tương tự:

$$\frac{9}{a^2+4b^2+c^2} \leq \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{c^2+b^2} + \frac{1}{2}$$

và

$$\frac{9}{a^2+b^2+4c^2} \leq \frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2} + \frac{1}{2}.$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế ta có đpcm.

Câu 2.8. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{3}{2a^2+3}\right) + \left(1 - \frac{3}{2b^2+3}\right) + \left(1 - \frac{3}{2c^2+3}\right) &\leq \frac{6}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{a^2}{2a^2+3} + \frac{b^2}{2b^2+3} + \frac{c^2}{2c^2+3} &\leq \frac{3}{5}. \quad (1) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\begin{aligned} \frac{25}{3(2a^2+3)} &= \frac{25}{6a^2+(a+b+c)^2} \\ &= \frac{(2+2+1)^2}{2(2a^2+bc)+2a(a+b+c)+a^2+b^2+c^2} \\ &\leq \frac{2}{2a^2+bc} + \frac{2}{a(a+b+c)} + \frac{1}{a^2+b^2+c^2}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{a^2}{2a^2 + 3} \leq \frac{3}{25} \left(\frac{2a^2}{2a^2 + bc} + \frac{2a}{a + b + c} + \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right).$$

Suy ra

$$VT(1) \leq \frac{3}{25} \left(\frac{2a^2}{2a^2 + bc} + \frac{2b^2}{2b^2 + ca} + \frac{2c^2}{2c^2 + ab} + 3 \right).$$

Ta chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ca} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} \leq 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{bc}{2a^2 + bc} + \frac{ca}{2b^2 + ca} + \frac{ab}{2c^2 + ab} \geq 1. \quad (2) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$VT(2) \geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{2abc(a + b + c) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} = \frac{(ab + bc + ca)^2}{(ab + bc + ca)^2} = 1.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 2.9. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{a^2 + 1} \right) + \left(1 - \frac{1}{b^2 + 1} \right) + \left(1 - \frac{1}{c^2 + 1} \right) \leq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{a^2}{a^2 + 1} + \frac{b^2}{b^2 + 1} + \frac{c^2}{c^2 + 1} \leq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow & \frac{4a^2}{3a^2 + ab + bc + ca} + \frac{4b^2}{3b^2 + ab + bc + ca} + \frac{4c^2}{3c^2 + ab + bc + ca} \leq 2. \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có

$$\frac{4a^2}{3a^2 + ab + bc + ca} = \frac{(a + a)^2}{(2a^2 + bc) + a(a + b + c)} \leq \frac{a}{2a^2 + bc} + \frac{a}{a + b + c}.$$

Suy ra

$$VT(1) \leq \frac{a^2}{2a^2 + bc} + \frac{b^2}{2b^2 + ca} + \frac{c^2}{2c^2 + ab} + 1 \leq 1 + 1 = 2.$$

Câu 2.10. Ta có

$$\begin{aligned} \frac{3}{3 - ab} &= 1 + \frac{ab}{a^2 + b^2 + c^2 - ab} = \frac{2ab}{a^2 + b^2 + 2c^2 + (a - b)^2} \\ &\leq 1 + \frac{(a + b)^2}{2(a^2 + b^2 + 2c^2)} \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{a^2 + c^2} + \frac{b^2}{b^2 + c^2} \right). \end{aligned}$$

Tương tự

$$\frac{3}{3 - bc} \leq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b^2}{b^2 + a^2} + \frac{c^2}{c^2 + a^2} \right)$$

và

$$\frac{3}{3 - ca} \leq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{c^2}{c^2 + b^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2} \right).$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta có đpcm.

Câu 2.11. Ta có

$$VT = \frac{4}{x^2 + y^2 + 3yz} + \frac{4}{y^2 + z^2 + 3zx} + \frac{4}{z^2 + x^2 + 3xy} \\ + \frac{\frac{5}{x}}{x^2 + y^2 + 3yz} + \frac{\frac{5}{y}}{y^2 + z^2 + 3zx} + \frac{\frac{5}{z}}{z^2 + x^2 + 3xy}$$

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz ta được:

$$VT \geq \frac{4.9}{2(x^2 + y^2 + z^2) + 3(xy + yz + zx)} + \frac{5\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2}{2(x^2 + y^2 + z^2) + 3(xy + yz + zx)} \\ \geq \frac{36}{2(x^2 + y^2 + z^2) + 3(xy + yz + zx)} + \frac{45}{2(x^2 + y^2 + z^2) + 3(xy + yz + zx)} \\ = \frac{84}{2(x^2 + y^2 + z^2) + 3(xy + yz + zx)} \geq \frac{162}{x^2 + y^2 + z^2 + 27}.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 2.12. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} = \frac{a^2}{a(b+2c)} + \frac{b^2}{b(c+2a)} + \frac{c^2}{c(a+2b)} \\ \geq \frac{(a+b+c)^2}{a(b+2c) + b(c+2a) + c(a+2b)} = \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq 1.$$

Do đó

$$VT \geq \frac{\left(\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b}\right)^2}{2(a+b+c)} \geq \frac{1}{2}.$$

Câu 2.13. Đặt $x = \sqrt{ab}$, $y = \sqrt{bc}$, $z = \sqrt{ca}$, ta có

$$\frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c} - c\sqrt{a}} = \frac{ba}{4b\sqrt{ca} - ca} = \frac{x^2}{4yz - z^2}, \quad \frac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a} - a\sqrt{b}} = \frac{y^2}{4xz - x^2}, \quad \frac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b} - b\sqrt{c}} = \frac{z^2}{4xy - y^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$VT \geq \frac{(x+y+z)^2}{4(xy+yz+zx) - (x^2+y^2+z^2)} \geq \frac{3(xy+yz+zx)}{4(xy+yz+zx) - (xy+yz+zx)} = 1.$$

Câu 2.14. Đặt $\frac{1}{a} = x, \frac{1}{b} = y, \frac{1}{c} = z$ ta có $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$ và ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{x^3}{y^2 + z^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ta có:

$$\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{x^3}{y^2 + z^2} = \frac{x^4}{x(y^2 + z^2)} + \frac{y^4}{y(z^2 + x^2)} + \frac{z^4}{z(x^2 + y^2)} \\ \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{z(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2)}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$x(y^2 + z^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2x^2(y^2 + z^2)(y^2 + z^2)} \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} (x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y(z^2 + x^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2y^2(z^2 + x^2)(z^2 + x^2)} \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} (x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$z(x^2 + y^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2z^2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)} \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} (x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Suy ra

$$\frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{y^3}{z^2 + x^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \sqrt{3}$.

Câu 2.15. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\begin{aligned} (3S)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{100} a_{k+1}(a_k^2 + 2a_{k+1}a_{k+2}) \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{100} a_{k+1}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{100} (a_k^2 + 2a_{k+1}a_{k+2})^2 \right) \\ &= 1 \cdot \left(\sum_{k=1}^{100} (a_k^2 + 2a_{k+1}a_{k+2})^2 \right) = \sum_{k=1}^{100} (a_k^4 + 4a_k^2a_{k+1}a_{k+2} + 4a_{k+1}^2a_{k+2}^2) \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{100} a_k^4 + 2a_k^2(a_{k+1}^2 + a_{k+2}^2) + 4a_{k+1}^2a_{k+2}^2 \right) \\ &= \sum_{k=1}^{100} (a_k^4 + 6a_k^2a_{k+1}^2 + 2a_k^2a_{k+2}^2). \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\sum_{k=1}^{100} (a_k^4 + 2a_k^2a_{k+1}^2 + 2a_k^2a_{k+2}^2) \leq \left(\sum_{k=1}^{100} a_k^2 \right)^2$$

và

$$\sum_{k=1}^{100} a_k^2a_{k+1}^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{50} a_{2i-1}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{50} a_{2j}^2 \right),$$

nên ta có

$$(3S)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{100} a_k^2 \right)^2 + 4 \left(\sum_{i=1}^{50} a_{2i-1}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{50} a_{2j}^2 \right) \leq 1 + \left(\sum_{i=1}^{50} a_{2i-1}^2 + \sum_{j=1}^{50} a_{2j}^2 \right)^2 = 2.$$

Suy ra $S \leq \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 2.16. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a(a+b+c) + 2(ab+bc+ca)} &\leq \frac{1}{ab+bc+ca} \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{2(ab+bc+ca)}{a(a+b+c) + 2(ab+bc+ca)} &\leq 2 \end{aligned}$$

Hay

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a(a+b+c)}{a(a+b+c) + 2(ab+bc+ca)} \geq 1. \quad (4)$$

Ta có

$$\begin{aligned} VT(4) &= (a+b+c) \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{a^2(a+b+c) + 2a(ab+bc+ca)} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^3}{\sum_{\text{cyc}} [a^2(a+b+c) + 2a(ab+bc+ca)]} = 1 \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 2.17. Đặt $S = a\sqrt{3 + \frac{b^2}{c^2}} + b\sqrt{3 + \frac{c^2}{a^2}} + c\sqrt{3 + \frac{a^2}{b^2}}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$(3+1) \left(3 + \frac{b^2}{c^2}\right) \geq \left(3 + \frac{b}{c}\right)^2$$

Suy ra

$$a\sqrt{3 + \frac{b^2}{c^2}} \geq \frac{1}{2} \left(3a + \frac{ab}{c}\right).$$

Do đó

$$S \geq \frac{1}{2} \left(3(a+b+c) + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right).$$

Lại có

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a+b+c.$$

Nên ta có $S \geq 2(a+b+c)$.

Đặt $x = ab$, $y = bc$, $z = ca$, khi đó bất đẳng thức

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \right) &\geq S \\ \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) &\geq x\sqrt{x^2 + 3z^2} + y\sqrt{y^2 + 3x^2} + z\sqrt{z^2 + 3y^2} \quad (4). \end{aligned}$$

Áp dụng AM-GM ta có

$$x\sqrt{x^2 + 3z^2} = \frac{1}{2}(2x)\sqrt{x^2 + 3z^2} \leq \frac{1}{4}(4x^2 + x^2 + 3z^2) = \frac{1}{4}(5x^2 + 3z^2).$$

Tương tự cho hai bất đẳng thức còn lại và cộng 3 bất đẳng thức đó theo vế ta có đpcm.

Câu 2.18. Đặt $a = 1 + x^2$, $b = 1 + y^2$, $c = 1 + z^2$. Ta có

$$x \leq \frac{x^2 + 1}{2} = \frac{a}{2}, \quad y \leq \frac{b}{2}, \quad z \leq \frac{c}{2}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} VT &\geq 2 \left(\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \right) \\ &\geq 2 \frac{(a+b+c)^2}{a(b+2c) + b(c+2a) + c(a+2b)} \geq 1. \end{aligned}$$

Câu 2.19. Theo bất đẳng thức Cauchy-Shwarz, ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} &= \frac{a^2}{a\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}} + \frac{b^2}{bc+ab} + \frac{c^2}{bc+ca} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt[3]{4(b^3+c^3)} + 2bc + a(b+c)}. \end{aligned}$$

Từ đó, để chứng minh bất đẳng thức của bài ra, ta sẽ chứng minh

$$\frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt[3]{4(b^3+c^3)} + 2bc + a(b+c)} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

với mọi $a, b, c > 0$.

Vì $a, b, c > 0$ nên

$$(1) \Leftrightarrow 2a^2 + a(b+c) + 2(b^2 - bc + c^2) \geq 3a\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}. \quad (2)$$

Vì $b^2 - bc + c^2 > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số thực dương $2a^2$, $a(b+c)$ và $b^2 - bc + c^2$, ta được

$$2a^2 + a(b+c) + 2(b^2 - bc + c^2) \geq 3\sqrt[3]{2a^2 \cdot a(b+c) \cdot 2(b^2 - bc + c^2)} = 3a\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}.$$

Vậy (2) được chứng minh; do đó (1) được chứng minh và vì thế bất đẳng thức của bài toán được chứng minh. Dễ thấy, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Câu 2.20. Kí hiệu P là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh theo yêu cầu đề bài.

- Nếu $a = 0$ thì từ các ràng buộc đối với a, b, c suy ra $c > 0$. Do đó $P = \frac{b}{c} + 2 > 1$.
- Nếu $b = 0$ thì từ các ràng buộc đối với a, b, c suy ra $c > 0$. Do đó

$$P = \frac{a}{c} + \frac{2c}{c+2a} > \frac{a}{a+c} + \frac{2c}{2c+2a} = 1.$$

- Nếu $c = 0$ thì từ các ràng buộc đối với a, b, c suy ra $a, b > 0$.

Do đó $P = \frac{a}{b} + \frac{b}{4a} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{4a}} = 1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b = 2a$.

- Xét $a, b, c > 0$. Khi đó, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$P = \frac{4a^2}{4ab+4ac} + \frac{b^2}{bc+4ab} + \frac{4c^2}{2c^2+4ac} \geq \frac{(2a+b+2c)^2}{8ab+8ac+bc+2c^2}. \quad (1.1)$$

$$\text{Tiếp theo, ta sẽ chứng minh } \frac{(2a+b+2c)^2}{8ab+8ac+bc+2c^2} > 1 \quad (1.2)$$

Thật vậy, ta có

$$(1.2) \Leftrightarrow 4a^2 + b^2 + 4c^2 + 4ab + 8ac + abc > 8ab + 8ac + bc + 2c^2 \Leftrightarrow (2a-b)^2 + (3b+2c)c > 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng và vì thế (1.2) được chứng minh.

Từ (1.1) và (1.2), hiển nhiên suy ra $P > 1$.

Vậy, tóm lại, bất đẳng thức đề bài được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = 2a$ và $c = 0$.

Câu 2.21. Ta có $a+b+c \leq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} = 3$ Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{2-a} + \frac{b}{2-b} + \frac{c}{2-c} \geq 3. \quad (1)$$

Ta có

$$VT(1) = \frac{a^2}{a(2-a)} + \frac{b^2}{b(2-b)} + \frac{c^2}{c(2-c)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)-3}.$$

Ta chứng minh $\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)-3} \geq 3 \Leftrightarrow (a+b+c-3)^2 \geq 0$ (bđt luôn đúng). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Câu 2.22. Để ý rằng $\frac{1}{1-ab} = 2 - \frac{1-2ab}{1-ab}$. Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1-2ab}{1-ab} + \frac{1-2bc}{1-bc} + \frac{1-2cd}{1-cd} + \frac{1-2da}{1-da} \geq \frac{8}{3}.$$

Vì $1-2ab = (a-b)^2 + c^2 + d^2 \geq 0$ nên ta có thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz như sau

$$\begin{aligned} & \frac{1-2ab}{1-ab} + \frac{1-2bc}{1-bc} + \frac{1-2cd}{1-cd} + \frac{1-2da}{1-da} \geq \\ & \geq \frac{[(1-2ab) + (1-2bc) + (1-2cd) + (1-2da)]^2}{(1-2ab)(1-ab) + (1-2bc)(1-bc) + (1-2cd)(1-cd) + (1-2da)(1-da)} \\ & = \frac{4[2 - (a+c)(b+d)]^2}{4 - 3(a+c)(b+d) + 2(a^2+c^2)(b^2+d^2)}. \end{aligned}$$

Bài toán được quy về chứng minh

$$3[2 - (a+c)(b+d)]^2 \geq 2[4 - 3(a+c)(b+d) + 2(a^2+c^2)(b^2+d^2)].$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$4 - 6(a+c)(b+d) + 3(a+c)^2(b+d)^2 - 4(a^2+c^2)(b^2+d^2) \geq 0,$$

hay

$$3[1 - (a+c)(b+d)]^2 + 1 - 4(a^2+c^2)(b^2+d^2) \geq 0.$$

Ta có

$$\begin{aligned} 1 - 4(a^2+c^2)(b^2+d^2) &= (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 - 4(a^2+c^2)(b^2+d^2) \\ &= (a^2+c^2-b^2-d^2)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Nên bất đẳng thức cuối đúng. Bài toán được chứng minh.

Câu 2.23. Từ giả thiết, ta có thể đặt $x = \frac{2a^2}{bc}, y = \frac{2b^2}{ca}$ và $z = \frac{2c^2}{ab}$ với $a, b, c > 0$. Thay vào bất đẳng thức đã cho, ta có thể viết nó dưới dạng sau

$$\frac{a^4}{a^4 + a^2bc + b^2c^2} + \frac{b^4}{b^4 + b^2ca + c^2a^2} + \frac{c^4}{c^4 + c^2ab + a^2b^2} \geq 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta dễ thấy

$$VT \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(a^4 + b^4 + c^4) + abc(a+b+c) + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)},$$

suy ra ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau nữa là đủ

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2)^2 &\geq a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \\ \Leftrightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &\geq abc(a+b+c) \\ \Leftrightarrow (ab-ac)^2 + (bc-ba)^2 + (ca-cb)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh xong.

Câu 2.24. Từ giả thiết, ta có thể đặt $x = \frac{2a^2}{bc}, y = \frac{2b^2}{ca}$ và $z = \frac{2c^2}{ab}$ với $a, b, c > 0$. Thay vào bất đẳng thức đã cho, ta có thể viết nó dưới dạng sau

$$\frac{a^4}{a^4 + a^2bc + b^2c^2} + \frac{b^4}{b^4 + b^2ca + c^2a^2} + \frac{c^4}{c^4 + c^2ab + a^2b^2} \geq 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta dễ thấy

$$VT \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(a^4 + b^4 + c^4) + abc(a + b + c) + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)},$$

suy ra ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau nữa là đủ

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2,$$

hay

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c) \Leftrightarrow (ab - ac)^2 + (bc - ba)^2 + (ca - cb)^2 \geq 0.$$

Bài toán được chứng minh xong.

Câu 2.25. Từ $xyz = 1 \Rightarrow x = \frac{a^2}{bc}, y = \frac{b^2}{ca}, z = \frac{c^2}{ab}$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a^4}{(a^2 - bc)^2} + \frac{b^4}{(b^2 - ca)^2} + \frac{c^4}{(c^2 - ab)^2} \geq 1. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Schwarz ta có:

$$VT(1) \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(a^2 - bc)^2 + (b^2 - ca)^2 + (c^2 - ab)^2}.$$

Ta chứng minh:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq (a^2 - bc)^2 + (b^2 - ca)^2 + (c^2 - ab)^2 \Leftrightarrow (ab + bc + ca)^2 \geq 0.$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 2.26. Đặt $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z} \Rightarrow x; y; z > 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức sau

$$\frac{x}{\sqrt{z(3x+y)}} + \frac{y}{\sqrt{x(3y+z)}} + \frac{z}{\sqrt{y(3z+x)}} \geq \frac{3}{2}.$$

Đặt vế trái là P , sử dụng bất đẳng thức C - S ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2}{x \cdot \sqrt{z(3x+y)}} + \frac{y^2}{y \cdot \sqrt{x(3y+z)}} + \frac{z^2}{z \cdot \sqrt{y(3z+x)}} \\ &\geq \frac{(x+y+z)^2}{x\sqrt{z(3x+y)} + y\sqrt{x(3y+z)} + z\sqrt{y(3z+x)}} \end{aligned}$$

Đặt $Q = x\sqrt{z(3x+y)} + y\sqrt{x(3y+z)} + z\sqrt{y(3z+x)}$ Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{x} \cdot \sqrt{xz(3x+y)} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{yx(3y+z)} + \sqrt{z} \cdot \sqrt{zy(3z+x)} \\ &\leq \sqrt{(x+y+z)[xz(3x+y) + xy(3y+z) + zy(3z+x)]} \\ &= \sqrt{3(x+y+z)(x^2z + y^2x + z^2y + xyz)} \end{aligned}$$

Mặt khác, ta chứng minh được: $x^2z + y^2x + z^2y + xyz \leq \frac{4}{27}(x+y+z)^3$ Thật vậy, không mất tính tổng quát ta giả sử y là số nằm giữa x và z . Khi đó

$$\begin{aligned}(y-x)(y-z) &\leq 0 \Leftrightarrow y^2 + xz \leq xy + yz \Leftrightarrow y^2x + x^2z \leq x^2y + xyz \\ &\Rightarrow x^2z + y^2x + z^2y + xyz \leq x^2y + z^2y + 2xyz = y(x+z)^2 = 4y \cdot \frac{x+z}{2} \cdot \frac{x+z}{2} \\ &\leq 4 \cdot \left(\frac{y + \frac{x+z}{2} + \frac{x+z}{2}}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}(x+y+z)^3\end{aligned}$$

Do đó $Q \leq \frac{2}{3}(x+y+z)^2 \Rightarrow P \geq \frac{3}{2}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

Câu 2.27. Khi thay a, b, c bởi $-a, -b, -c$ thì bất đẳng thức không đổi, do đó ta giả sử $a \leq 0 \leq b, c$. Khi đó ta thay a bởi $-a$ ta cần chứng minh BĐT

$$(a^2 - ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \geq 3(bc - ab - ac)^3. \quad (1)$$

với $a, b, c \geq 0$.

Ta chỉ xét $bc - ca - ab \geq 0$. Do

$$b^2 + bc + c^2 - (bc - ac - ab) = b^2 + c^2 + a(b+c) \geq 0,$$

nên ta chứng minh

$$(a^2 - ab + b^2)(c^2 - ca + a^2) \geq 3(bc - ab - ac)^2. \quad (2)$$

Ta có

$$\begin{aligned}4(a^2 - ab + b^2) \cdot 4(c^2 - ca + a^2) &= [(a+b)^2 + 3(b-c)^2] \cdot [(c+a)^2 + 3(c-a)^2] \\ &\geq [(a+b)(a+c) + 3(a-c)(a-b)]^2.\end{aligned}$$

Ta chứng minh

$$(a+b)(a+c) + 3(a-b)(a-c) \geq 4(bc - ab - ac).$$

Bất đẳng thức này đúng vì nó tương đương với

$$\Leftrightarrow a(2a + b + c) \geq 0.$$

Câu 2.28. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$VT = \sum \frac{a^4}{a^2(2b^2 - bc + 2c^2)} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{\sum a^2(2b^2 - bc + 2c^2)}.$$

Ta chứng minh

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq \sum a^2(2b^2 - bc + 2c^2),$$

hay

$$\sum a^4 + abc \sum a \geq 2 \sum a^2b^2. \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Schur ta có

$$\sum a^4 + abc \sum a \geq \sum ab(a^2 + b^2) \geq 2 \sum a^2b^2,$$

nên (1) đúng.

Câu 2.29. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} P^2 &= \left(a(2 - bc) + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}(b + c) \right)^2 \\ &\leq (a^2 + 2) \left((2 - bc)^2 + 2(b + c)^2 \right) \\ &= (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2). \end{aligned}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} (a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) &= \frac{1}{6} 3(a^2 + 2) \cdot 2(b^2 + 2) \cdot (c^2 + 2) \\ &\leq \frac{1}{6} \left(\frac{3(a^2 + 2) + 2(b^2 + 2) + (c^2 + 2)}{3} \right)^3 = 36. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $P^2 \leq 36$. Suy ra $-6 \leq P \leq 6$. Mặt khác với $a = 0, b = 1, c = 2$ thì $P = 6$; $a = 0, b = 1, c = 2$ thì $P = -6$.

Vậy $P_{\max} = 6$ và $P_{\min} = -6$.

Câu 2.30. Đặt $P = \frac{a+b}{(a+b+1)^2} + \frac{b+c}{(b+c+1)^2} + \frac{c+a}{(c+a+1)^2}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$2(a+b+c)P \geq \left(\frac{a+b}{a+b+1} + \frac{b+c}{b+c+1} + \frac{c+a}{c+a+1} \right)^2.$$

Tiếp theo ta chứng minh

$$\frac{a+b}{a+b+1} + \frac{b+c}{b+c+1} + \frac{c+a}{c+a+1} \geq 2,$$

hay

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{c+a+1} \leq 1.$$

Bất đẳng thức này đúng do

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Câu 2.31. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$(x^4 + y) \left(\frac{z^2}{y} + 1 \right) \geq (x^2 + z)^2 \Rightarrow (x^4 + y)(z^2 + y) \geq y(x^2 + z)^2.$$

Tương tự:

$$\begin{aligned} (y^4 + z)(x^2 + z) &\geq z(y^2 + x)^2 \\ (x^4 + y)(z^2 + y) &\geq y(x^2 + z)^2 \\ (z^4 + x)(y^2 + x) &\geq x(z^2 + y)^2. \end{aligned}$$

Nhân các bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$(x^4 + y)(y^4 + z)(z^4 + x) \geq xyz(x + y^2)(y + z^2)(z + x^2) \geq (x + y^2)(y + z^2)(z + x^2).$$

Câu 2.32. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$VT \leq \sqrt{\left(\frac{a}{3a+b} + \frac{b}{3b+c} + \frac{c}{3c+a} \right) \cdot (a+b+c)}.$$

Ta chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{a}{3a+b} + \frac{b}{3b+c} + \frac{c}{3c+a} &\leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{b}{3a+b} &\geq \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Ta có

$$\sum_{cyc} \frac{b}{3a+b} = \sum_{cyc} \frac{b^2}{3ab+b^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}.$$

Do đó, ta chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)} &\geq \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 &\geq ab+bc+ca \text{ (đúng)}. \end{aligned}$$

Câu 2.33. Từ giả thiết có

$$(1-b^2)(1-c^2) \geq (a-bc)^2.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(1-b^6)(1-c^6) \geq (a^3-b^3c^3)^2,$$

hay

$$(1-b^2)(1-c^2)(1+b^2+b^4)(1+c^2+c^4) \geq (a-bc)^2(a^2+abc+b^2c^2)^2.$$

Như vậy cần chứng minh

$$(1+b^2+b^4)(1+c^2+c^4) \geq (a^2+abc+b^2c^2)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} (1+b^2+b^4)(1+c^2+c^4) &\geq (1+|bc|+b^2c^2)^2 \\ &\geq (a^2+|abc|+b^2c^2)^2 \geq (a^2+abc+b^2c^2)^2. \end{aligned}$$

Do $-1 \leq a \leq 1$. Suy ra điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 2.34. Ta có

$$\begin{aligned} (a^2+b^2+c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) &\geq \frac{1}{2} \left(\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right)^2 + \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right)^2 \right) \\ &\geq \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right)^2 \\ &\geq \frac{6}{4} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right) \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \right) \end{aligned}$$

Suy ra

$$2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}.$$

Câu 2.35. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{(n-2)x_1^2 + 2x_1}{(n-1)x_1^2 + 1} + \frac{1}{n-1} \right) \geq 1 - \frac{(n-2) \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k \right)^2 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} x_k}{(n-1) \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k \right)^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{((n-1)x_k + 1)^2}{(n-1)((n-1)x_k^2 + 1)} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k + 1 \right)^2}{(n-1) \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k \right)^2 + 1}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{((n-1)x_k + 1)^2}{(n-1)((n-1)x_k^2 + 1)} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k + 1 \right)^2}{\sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 + 1}.$$

Nên ta chứng minh

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k + 1 \right)^2}{\sum_{k=1}^{n-1} x_k^2 + 1} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k + 1 \right)^2}{(n-1) \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k \right)^2 + 1},$$

hay

$$(n-1) \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k \right)^2 \geq \sum_{k=1}^{n-1} x_k^2. \quad (1)$$

Câu 2.36. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$\frac{1}{2a^2 + bc} + \frac{1}{2b^2 + ac} + \frac{1}{2c^2 + ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ac}$$

$$\geq \frac{4(a+b+c)^2}{\sum (2a^2 + bc)(b^2 + c^2 + 2bc)}.$$

Ta chứng minh

$$\sum (2a^2 + bc)(b^2 + c^2 + 2bc) \leq 4(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca),$$

hay

$$\sum ab(a^2 + b^2) \geq 2 \sum a^2 b^2.$$

Bất đẳng thức này đúng theo AM-GM

Câu 2.37. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có $P \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2 + bc}{a(b+c)} \cdot \frac{b^2 + ac}{b(a+c)} \cdot \frac{c^2 + ab}{c(a+b)}}.$

(1)

Ta chứng minh $\frac{a^2 + bc}{a(b+c)} \cdot \frac{b^2 + ac}{b(a+c)} \cdot \frac{c^2 + ab}{c(a+b)} \geq 1.$ (2)

Thật vậy: Do a, b, c dương nên bất đẳng thức (1) đưa về

$$(a^2 + bc)(b^2 + ac)(c^2 + ab) \geq abc(a+b)(b+c)(c+a) \quad (3).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz cho 2 bộ 2 số $(a, \sqrt{bc})$ và $(b, \sqrt{bc})$ ta được

$$(a^2 + bc)(b^2 + bc) \geq (ab + bc)^2$$

$$\text{hay } b(a^2 + bc)(b + c) \geq b^2(a + c)^2. \quad (4)$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có } c(b^2 + ac)(a + c) \geq c^2(a + b)^2 \quad (5)$$

$$a(c^2 + ab)(a + b) \geq a^2(c + b)^2 \quad (6)$$

Vì các vế của (4), (5), (6) đều dương. Nhân vế với vế các bất đẳng thức đó với nhau, rồi chia cả 2 vế của bất đẳng thức thu được cho $abc(a + b)(b + c)(c + a)$ ta được (3), do đó có (2), suy ra $P \geq 3$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi dấu bằng xảy ra đồng thời ở (1), (4), (5) và (6), khi đó $a = b = c$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 3.

Câu 2.38. $a^3 + 5 = (a^3 + 1 + 1) + 3 \geq 3\sqrt[3]{a^3 \cdot 1 \cdot 1} + 3 = 3a + 3$.

Tương tự: $b^3 + 5 \geq 3b + 3$; $c^3 + 5 \geq 3c + 3$.

$$\frac{a^3 + 5}{a^3(b + c)} + \frac{b^3 + 5}{b^3(c + a)} + \frac{c^3 + 5}{c^3(a + b)} \geq \frac{3a + 3}{a^3(b + c)} + \frac{3b + 3}{b^3(c + a)} + \frac{3c + 3}{c^3(a + b)}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{3a + 3}{a^3(b + c)} + \frac{3b + 3}{b^3(c + a)} + \frac{3c + 3}{c^3(a + b)} &= \frac{3a(abc) + 3(abc)^2}{a^3(b + c)} + \frac{3b(abc) + 3(abc)^2}{b^3(c + a)} + \frac{3c(abc) + 3(abc)^2}{c^3(a + b)} \\ &= \frac{3(bc + b^2c^2)}{ab + bc} + \frac{3(ca + c^2a^2)}{bc + ca} + \frac{3(ab + a^2b^2)}{ca + ab} \end{aligned}$$

Đặt $x = bc$, $y = ca$, $z = ab$; $x, y, z > 0$, $xyz = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{3a + 3}{a^3(b + c)} + \frac{3b + 3}{b^3(c + a)} + \frac{3c + 3}{c^3(a + b)} &\geq 3 \left(\frac{x + x^2}{y + z} + \frac{y + y^2}{z + x} + \frac{z + z^2}{x + y} \right) \\ &= 3 \left(\frac{x}{y + z} + \frac{y}{z + x} + \frac{z}{x + y} \right) + 3 \left(\frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{z + x} + \frac{z^2}{x + y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{y + z} + \frac{y}{z + x} + \frac{z}{x + y} &\geq \frac{3}{2} \\ \frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{z + x} + \frac{z^2}{x + y} &\geq \frac{x + y + z}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{a^3 + 5}{a^3(b + c)} + \frac{b^3 + 5}{b^3(c + a)} + \frac{c^3 + 5}{c^3(a + b)} \geq 9.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 2.39. Biến đổi và áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwartz:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k(b_k + a_{k+1}) &= \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1} \\ &\leq \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)} + \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1} \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1}} \\ &= \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j + \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{1 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j} + \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1}. \quad (1)$$

Đặt $x = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$ và $y = \sum_{k=1}^n a_k a_{k+1}$ ta có ngay $x > y$. (2)

Đồng thời cũng có

$$1 = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2x > y \Rightarrow y < 1.$$

Do (1) nên ta cần chứng minh:

$$\sqrt{1 - 2x} + y < 1 \Leftrightarrow 1 - 2x < 1 - 2y + y^2 \Leftrightarrow 2(y - x) < y^2 \text{ (hiển nhiên đúng)}.$$

§3. Một số bất đẳng thức khác

Câu 3.1. Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} + \sqrt[3]{\frac{3abc}{a^3+b^3+c^3}} \\ & \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + \frac{9abc}{3\sqrt[3]{(3abc)^2(a^3+b^3+c^3)}} \\ & \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} + \frac{9abc}{a^3+b^3+c^3+6abc}. \end{aligned}$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} - 3 \geq 1 - \frac{9abc}{a^3+b^3+c^3+6abc} \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{ab+bc+ca} \geq \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3+6abc}. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo Schur.

Câu 3.2. Vì $a+b+c=1$, nên ta có

$$\begin{aligned} \left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \right) &= (a+b+c) \left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \right) \\ &= ab+bc+ca + abc \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \\ &\geq ab+bc+ca + \frac{9abc}{2(a+b+c)} \\ &= ab+bc+ca + \frac{9}{2}abc. \end{aligned}$$

Suy ra

$$2 \left(\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \right) + 1 \geq 2(ab+bc+ca) + 9abc + 1.$$

Do đó, ta chứng minh

$$9abc + 1 \geq 4(ab+bc+ca). \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Schur ta có

$$a^2+b^2+c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca).$$

Suy ra

$$1 + 9abc \geq 4(ab+bc+ca),$$

hay (1) được chứng minh.

Câu 3.3. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(a+b+c) \sum_{cyc} \sqrt[3]{(a^2+bc)(a^2+b^2)(a^2+c^2)} \geq 9 \sqrt[3]{(a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2)abc}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$(a^2+b^2)(a^2+c^2) \geq (a^2+bc)^2,$$

và theo AM-GM

$$9\sqrt[3]{(a^2+b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2)abc} \leq 3 \sum_{cyc} c(a^2+b^2).$$

Do đó, ta chứng minh

$$(a+b+c) \sum_{cyc} (a^2+bc) \geq 3 \sum_{cyc} c(a^2+b^2),$$

Đây chính là bất Schur.

Câu 3.4. Ta có

$$VT = a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4(a^2 + b^2 + c^2) + 8.$$

Mặt khác

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 3 = a^2b^2 + 1 + b^2c^2 + 1 + c^2a^2 + 1 \geq 2(ab + bc + ca)$$

và

$$\begin{aligned} a^2b^2c^2 + 2 &= a^2b^2c^2 + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = \frac{3abc}{\sqrt[3]{abc}} \\ &\geq \frac{9abc}{a+b+c} \geq 2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2). \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} VT &\geq 2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2) + 2.2(ab+bc+ca) + 4(a^2+b^2+c^2) \\ &= 6(ab+bc+ca) + 3(a^2+b^2+c^2) \geq 6(ab+bc+ca) + 3(ab+bc+ca) \geq 9(ab+bc+ca). \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh.

Câu 3.5. Gọi P là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a+b+c=3$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt{\frac{(a+b)^3}{8ab(4a+4b+c)}} + \sqrt{\frac{(a+b)^3}{8ab(4a+4b+c)}} + \frac{ab(4a+4b+c)}{27} \geq \frac{1}{2}(a+b)$$

Suy ra

$$\sqrt{\frac{(a+b)^3}{8ab(4a+4b+c)}} + \frac{ab(4a+4b+c)}{54} \geq \frac{1}{4}(a+b).$$

Tương tự

$$\sqrt{\frac{(b+c)^3}{8bc(4b+4c+a)}} + \frac{bc(4b+4c+a)}{54} \geq \frac{1}{4}(b+c)$$

và

$$\sqrt{\frac{(c+a)^3}{8ca(4c+4a+b)}} + \frac{ca(4c+4a+b)}{54} \geq \frac{1}{4}(c+a).$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}P + A \geq B.$$

Với

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{54} [ab(4a+4b+c) + bc(4b+4c+a) + ca(4c+4a+b)] \\ &= \frac{1}{54} [4ab(a+b) + 4bc(b+c) + 4ca(c+a) + 3abc] \\ &= \frac{1}{54} [4(a+b+c)(ab+bc+ca) - 9abc] \leq \frac{1}{54}(a+b+c)^3 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

và

$$B = \frac{1}{4} \cdot 2(a + b + c) = \frac{3}{2}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}P \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow P \geq 2\sqrt{2}.$$

Bài toán được chứng minh.

Câu 3.6. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có:

$$\begin{aligned} & 12(a^2 + b^2 + c^2) + 6abc + 48 - 30(a + b + c) \\ &= 12(a^2 + b^2 + c^2) + 3(2abc + 1) + 45 - 5 \cdot 2 \cdot 3(a + b + c) \\ &\geq 12(a^2 + b^2 + c^2) + 9\sqrt[3]{a^2b^2c^2} + 45 - 5((a + b + c)^2 + 9) \\ &= 7(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{9abc}{\sqrt[3]{abc}} - 10(ab + bc + ca) \\ &\geq 7(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{27}{a + b + c} - 10(ab + bc + ca) \end{aligned}$$

Mặt khác sử dụng bất đẳng thức Schur,

$$\frac{9}{a + b + c} \geq 4(ab + bc + ca) - (a + b + c)^2 = 2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2)$$

Do đó

$$\begin{aligned} & 7(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{27}{a + b + c} - 10(ab + bc + ca) \\ &\geq 7(a^2 + b^2 + c^2) + 6(ab + bc + ca) - 3(a^2 + b^2 + c^2) - 10(ab + bc + ca) \\ &= 4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Câu 3.7. Đặt $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(xy + yz + zx) \\ &\Leftrightarrow (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 + 3) \geq 2(x + y + z)(xy + yz + zx) \end{aligned}$$

Hay

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z) \geq x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) + 6 \quad (1).$$

Ta có

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3(x + y + z) \geq x^3 + y^3 + z^3 + 9 = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz + 6 \geq VP(1).$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 3.8. Đặt $x = \sqrt[3]{a^2}$, $y = \sqrt[3]{b^2}$, $z = \sqrt[3]{c^2}$, ta có $xyz = 1$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq 2(xy\sqrt{xy} + yz\sqrt{yz} + zx\sqrt{zx}). \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Schur ta có

$$\begin{aligned} & x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) \\ &\geq 2xy\sqrt{xy} + 2yz\sqrt{yz} + 2zx\sqrt{zx}. \end{aligned}$$

Suy ra (1) đúng, hay bài toán được chứng minh.

Câu 3.9. Áp dụng bất đẳng thức Holder với chú ý $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ ta có

$$4a^3 + 9b^3 + 36c^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right)^2 \geq (a + b + c)^3 = 1.$$

Từ đó ta có đpcm.

Câu 3.10. Đặt P là vế trái của bất đẳng thức. Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có:

$$P^3 \left(\sum a(a + 2b) \right) \geq (a + b + c)^4.$$

Mặt khác

$$\sum a(a + 2b) = (a + b + c)^2,$$

nên ta có

$$P^3 \geq (a + b + c)^2 = 1 \Rightarrow P \geq 1.$$

Câu 3.11. Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$(x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right)^2 \geq \left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} \right)^3.$$

Từ đó ta có đpcm.

Câu 3.12. Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có

$$(x^n + y^n + z^n) \left(\sqrt[n-1]{a^n} + \sqrt[n-1]{b^n} + \sqrt[n-1]{c^n} \right)^{n-1} \geq (ax + by + cz)^n = 1.$$

Suy ra

$$x^n + y^n + z^n \geq \left(\sqrt[n-1]{a^n} + \sqrt[n-1]{b^n} + \sqrt[n-1]{c^n} \right)^{1-n}.$$

Câu 3.13.

$$\begin{aligned} & (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + 4\sqrt{2} \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 9 + 4\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 9 \geq 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \\ \Leftrightarrow & \frac{(a - b)^2}{ab} + \frac{(b - c)^2}{bc} + \frac{(c - a)^2}{ca} \geq 2\sqrt{2} \frac{(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned} \quad (*)$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow \frac{(a - b)^2}{b} = \frac{(a - c)^2}{c}$ Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev ta có:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(a - b)^2}{b} + \frac{(a - c)^2}{c} \right] (b + c) \geq 2 [(a - b)^2 + (a - c)^2] \\ \Rightarrow & \frac{(a - b)^2}{ab} + \frac{(a - c)^2}{ac} \geq \frac{2 [(a - b)^2 + (a - c)^2]}{a(b + c)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = c$.

Mặt khác theo bất đẳng thức $AM - GM$:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2a^2 + (b + c)^2 \geq 2\sqrt{2}a(b + c)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{2}{a(b+c)} &\geq \frac{2\sqrt{2}}{a^2+b^2+c^2} \\ \Rightarrow \frac{2[(a-b)^2+(a-c)^2]}{a(b+c)} &\geq 2\sqrt{2} \frac{(a-b)^2+(a-c)^2}{a^2+b^2+c^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a\sqrt{2} = b + c$.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &\geq 3bc > 2\sqrt{2}bc \text{ (do } a \geq b \geq c) \\ \Rightarrow \frac{(b-c)^2}{bc} &\geq 2\sqrt{2} \frac{(b-c)^2}{a^2+b^2+c^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (1),(2),(3) suy ra bất đẳng thức (*) đúng. Suy ra điều phải chứng minh.

Chương 2

Một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức

§1. Phương pháp quy nạp

§2. Phương pháp phân tích bình phương SOS

Câu 5.1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
 & 2(a^3 + b^3 + c^3) - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a) - (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2 + (b+c)(b-c)^2 + (c+a)(c-a)^2 \\
 & - \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow (a+b-c)(a-b)^2 + (b+c-a)(b-c)^2 + (c+a-b)(c-a)^2 \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow S_c(a-b)^2 + S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow S_b \geq 0, S_c \geq 0$ Ta có $S_a + S_b = 2c \geq 0$

Câu 5.2. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{ab - bc + ca}{b^2 + c^2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{bc - ca + ab}{c^2 + a^2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{ca - ab + bc}{a^2 + b^2} - \frac{1}{2} \right) \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow \sum \frac{(b+c)(2a-b-c)}{b^2 + c^2} \geq 0 \Leftrightarrow \sum \frac{(b+c)(a-b)}{b^2 + c^2} + \sum \frac{(b+c)(a-c)}{b^2 + c^2} \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow \sum \frac{(b+c)(a-b)}{b^2 + c^2} + \sum \frac{(c+a)(b-a)}{c^2 + a^2} \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow \sum \frac{(a-b)^2(ab+bc+ca-c^2)}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geq 0. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Mặt khác

$$ab + bc + ca - c^2 = (b-c)(c-a) + 2bc \geq (b-c)(c-a),$$

nên để chứng minh (1) ta chứng minh

$$\begin{aligned}
 \sum \frac{(a-b)^2(b-c)(c-a)}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)} & \geq 0 \Leftrightarrow \sum (a^2+b^2)(a-b)^2(b-c)(c-a) \geq 0 \\
 & \Leftrightarrow (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng.

Câu 5.3. BDT cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
 & 2(a^3 + b^3 + c^3) - ab(a+b) - bc(b+c) - ca(c+a) - (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \\
 & \geq ab \left(\sqrt{2(a^2+b^2)} - a - b \right) + bc \left(\sqrt{2(b^2+c^2)} - b - c \right) + ca \left(\sqrt{2(c^2+a^2)} - c - a \right) \\
 & \Leftrightarrow S_c(a-b)^2 + S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 \geq 0,
 \end{aligned}$$

với

$$\begin{aligned}
 S_c &= a + b - c - \frac{2ab}{\sqrt{2(a^2+b^2)} + a + b}, \\
 S_a &= b + c - a - \frac{2bc}{\sqrt{2(b^2+c^2)} + b + c}, \\
 S_b &= c + a - b - \frac{2ca}{\sqrt{2(c^2+a^2)} + c + a}.
 \end{aligned}$$

Do a, b, c bình đẳng, không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$.

Ta có

$$S_c \geq a + b - c - \frac{2ab}{4b} = \frac{a}{2} + b - c \geq 0, \quad S_b \geq c + a - b - \frac{ca}{a+c} \geq 0$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} S_b + S_a &= 2c \left(1 - \frac{a}{\sqrt{2(c^2 + a^2)} + c + a} - \frac{b}{\sqrt{2(b^2 + c^2)} + b + c} \right) \\ &\geq 2b \left(1 - \frac{a}{2(a+c)} - \frac{b}{2(b+c)} \right) = \frac{bc}{a+c} + \frac{bc}{b+c} \geq 0. \end{aligned}$$

Câu 5.4. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} &\frac{4a^2 + 2bc - 3(b^2 + c^2)}{b^2 + c^2} + \frac{4b^2 + 2ca - 3(c^2 + a^2)}{c^2 + a^2} + \frac{4c^2 + 2ab - 3(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{2(a^2 - b^2) + 2(a^2 - c^2) - (b - c)^2}{b^2 + c^2} + \frac{2(b^2 - c^2) + 2(b^2 - a^2) - (c - a)^2}{c^2 + a^2} \\ &+ \frac{2(c^2 - a^2) + 2(c^2 - b^2) - (a - b)^2}{a^2 + b^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow &S_c(a - b)^2 + S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

với

$$\begin{aligned} S_c &= \frac{2(a+b)^2}{(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)} - \frac{1}{a^2 + b^2}, \\ S_b &= \frac{2(c+a)^2}{(b^2 + c^2)(b^2 + a^2)} - \frac{1}{c^2 + a^2}, \\ S_a &= \frac{2(b+c)^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} - \frac{1}{b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Giả sử $a \geq b \geq c$ suy ra $S_b \geq 0, S_c \geq 0, S_c \geq S_b \geq S_a$ Ta cần chứng minh $S_a + S_b \geq 0$, hay

$$2(c+a)^2(c^2 + a^2) + 2(b+c)^2(b^2 + c^2) \geq (b^2 + c^2)(b^2 + a^2) + (a^2 + b^2)(a^2 + c^2)$$

Ta thấy hệ số c^2 ở vế trái là $2(c+a)^2 + 2(b+c)^2$ lớn hơn hoặc bằng vế phải là $2(a^2 + b^2)$ nên ta chỉ cần chứng minh khi $c = 0$.

Hay

$$2(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}.$$

Câu 5.5. Ta có : BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} &4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) + 6(ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^3 - b^3 - c^3) \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a - a^3 - b^3 - c^3) \\ \Leftrightarrow &2(a+b+c)[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \\ &- 2[(2b+a)(a-b)^2 + (2c+b)(b-c)^2 + (2a+c)(c-a)^2] \\ &+ (2a+b)(a-b)^2 + (2b+c)(b-c)^2 + (2c+a)(c-a)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow &(2a-b+2c)(a-b)^2 + (2b-c+2a)(b-c)^2 + (2c-a+2b)(c-a)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow &S_c(a-b)^2 + S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Nếu $a \geq b \geq c \Rightarrow S_a \geq 0, S_c \geq 0$, mặt khác

$$S_a + 2S_b \geq 0, S_c + 2S_b \geq 0.$$

Theo tiêu chuẩn 3 suy ra ĐPCM.

Nếu $a \leq b \leq c \Rightarrow S_b \geq 0, S_c \geq 0$.

Theo tiêu chuẩn 2 ta cần chứng minh $S_a + S_b \geq 0$ (hiển nhiên) Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 5.6. Trước hết ta thấy rằng :

$$(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 9 = \sum \frac{(x-y)^2}{xy},$$

$$6 \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) - 9 = \sum \frac{(x-y)^2}{(y+z)(z+x)}.$$

Ta cần chứng minh :

$$(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 6 \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) \Leftrightarrow \sum \frac{(x-y)^2}{xy} \geq \sum \frac{3(x-y)^2}{(y+z)(z+x)}.$$

với mọi số thực x, y, z thuộc đoạn $[1; 2]$. Đặt $S_x = \frac{1}{yz} - \frac{3}{(x+y)(x+z)}$, $S_y = \frac{1}{zx} - \frac{3}{(y+x)(y+z)}$,
 $S_z = \frac{1}{xy} - \frac{3}{(z+x)(z+y)}$.

Bất đẳng thức đã cho viết dưới dạng tương đương là:

$$S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq 0.$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $2 \geq x \geq y \geq z \geq 1$. Ta sẽ chứng minh rằng $S_x, S_y \geq 0$.
 Thật vậy:

$$S_x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + xy + xz - 2yz \geq 0, \quad (\text{đúng}).$$

$$S_y \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + yx + yz - 2zx \geq x(y-z) + z(z+y-x) \geq 0$$

(do $x, y, z \in [1; 2]$ nên $y+z-x \geq 0$).

- Nếu $S_z \geq 0$, ta có đpcm.

- Nếu $S_z < 0$, ta chứng minh được rằng $S_x + 2S_z \geq 0$, $S_y + 2S_z \geq 0$.

Khi đó dễ dàng thấy rằng vì: $(x-y)^2 \leq 2[(y-z)^2 + (z-x)^2]$ và $S_z < 0$ nên

$$S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq (S_x + 2S_z)(y-z)^2 + (S_y + 2S_z)(z-x)^2 \geq 0.$$

Vậy trong mọi trường hợp, ta luôn có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$ hoặc $y = z = 1, x = 2$ và các hoán vị của chúng.

Câu 5.8.

$$\text{a) Chứng minh } \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \leq a^3 + b^3 + c^3, \quad (1).$$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3(a^3 + b^3 + c^3) \\ &\Leftrightarrow a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b \leq 2(a^3 + b^3 + c^3) \\ &\Leftrightarrow (b+c)(b-c)^2 + (c+a)(c-a)^2 + (a+b)(a-b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên đúng nên (1) đúng. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{2}{3}$.

$$\text{b) Chứng minh } a^3 + b^3 + c^3 \leq \frac{4}{3}(a^2 + b^2 + c^2) - 3abc, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow 3(a^3 + b^3 + c^3) \leq 2(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) - 9abc \\ &\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 9abc \leq 2(a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b) \\ &\Leftrightarrow S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0, \quad (3). \end{aligned}$$

trong đó $S_a = 3a - b - c$; $S_b = 3b - a - c$; $S_c = 3c - a - b$.

Không mất tính tổng quát giả sử $1 \geq a \geq b \geq c$.

Ta có $VT(3) = S_a(b-c)^2 + S_b[(c-a)^2 - (a-b)^2] + (S_b + S_c)(a-b)^2$

Mà $S_a \geq 0; S_b = 2(1-a) + 2(b-c) \geq 0;$

$(c-a)^2 - (a-b)^2 \geq 0; S_b + S_c = 4(1-a) \geq 0.$

Suy ra $VT(3) \geq 0 \Rightarrow (2)$ đúng.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{2}{3}; a = 1, b = c = \frac{1}{2}$ và các hoán vị.

§3. Phương pháp dồn biến

Câu 6.1.

a) Ta có bất đẳng thức sau với mọi $a, b, c > 0$

$$abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b).$$

Thật vậy, giả sử $a \geq b \geq c$, ta có

$$\begin{aligned} abc - (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \\ = (a + b - c)(a - b)^2 + c(a - c)(b - c) \geq 0. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} abc &\geq (3 - 2c)(3 - 2a)(3 - 2b) \\ \Leftrightarrow abc &\geq 27 - 18(a + b + c) + 12(ab + bc + ca) - 8abc \\ \Leftrightarrow 3abc &\geq 4(ab + bc + ca) - 9 \\ \Leftrightarrow abc &\geq \frac{4}{3}(ab + bc + ca) - 3. \end{aligned}$$

Suy ra

$$P = abc + \frac{12}{ab + bc + ca} \geq \frac{4}{3}(ab + bc + ca) + \frac{12}{ab + bc + ca} - 3 \geq 8 - 3 = 5.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 5.

b) Do bất đẳng thức đã cho đúng với mọi $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$ nên nó cũng đúng với bộ số $a = b = x$, $c = 3 - 2x$ với mọi $x \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$. Khi đó

$$\begin{aligned} k \left(\frac{1}{x^2 + 2x(3 - 2x)} - \frac{1}{3} \right) &\geq 1 - x^2(3 - 2x), \forall x \in \left(0; \frac{3}{2}\right) \\ \Leftrightarrow k &\geq 3x(2 - x)(2x + 1), \forall x \in \left(0; \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Với $x = \frac{4}{3}$ ta có $k \geq \frac{88}{9} > 9$. Do k nguyên nên $k \geq 10$.

Với $k = 10$, ta cần chứng minh $f(a, b, c) := abc + \frac{10}{ab + bc + ca} \geq \frac{13}{3}$.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó $0 < c \leq 1$.

Ta sẽ chứng minh $f(a, b, c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right)$. Thật vậy, điều này tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{10}{ab + bc + ca} - \frac{10}{\frac{(a+b)^2}{4} + bc + ca} &\geq c \left[\frac{(a+b)^2}{4} - ab \right] \\ \Leftrightarrow \frac{10(a-b)^2}{(ab + bc + ca) \left[\frac{(a+b)^2}{4} + c(a+b) \right]} &\geq c(a-b)^2. \end{aligned}$$

Điều này đúng do $c \leq 1$, $ab + bc + ca \leq 3$ và

$$3(a+b)(a+b+4c) \leq \frac{(4a+4b+4c)^2}{4} = 36.$$

Ta sẽ chứng minh $f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \geq \frac{13}{3}$. Thật vậy, điều này tương đương với

$$\begin{aligned} & \frac{c(3-c)^2}{4} + \frac{40}{(3-c)^2 + 4c(3-c)} \geq \frac{13}{3} \\ \Leftrightarrow & \frac{c(3-c)^2 - 4}{4} + \frac{40 - 10(1+c)(3-c)}{3(1+c)(3-c)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (c-1)^2 \left[\frac{c-4}{4} + \frac{10}{3(1+c)(3-c)} \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Điều này đúng do

$$\begin{aligned} & 3(4-c)(1+c)(3-c) - 40 \\ &= 3c^3 - 18c^2 + 15c - 4 \\ &= 3c(1-c)(5-c) - 4 < 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 5 - 4 < 0, \forall c \in (0, 1]. \end{aligned}$$

Vậy số nguyên k nhỏ nhất cần tìm là $k = 10$.

Câu 6.2. Từ điều kiện $a + b + c = 3$ ta sẽ nghĩ đến việc dồn biến về trung bình cộng. Bài toán này ngoài trường hợp dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$. Còn xảy ra tại $a = b = 0, c = 3$ hoặc các hoán vị của bộ số $(0, 0, 3)$. Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \max\{a, b, c\}$, suy ra $a \leq c, b \leq c$ và $1 \leq c \leq 3, 0 \leq a + b \leq 2$.

Đặt

$$f(a, b, c) = \sqrt{3a^2 + 4bc + 9} + \sqrt{3b^2 + 4ca + 9} + \sqrt{3c^2 + 4ab + 9}.$$

Ta sẽ chứng minh $f(a, b, c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right)$.

Bước 1: Ta sẽ chứng minh rằng

$$\sqrt{3a^2 + 4bc + 9} + \sqrt{3b^2 + 4ca + 9} \geq \sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36 + \frac{5(a-b)^2}{2}}.$$

Bình phương hai vế và sử dụng $(x+y)^2 = 2(x^2 + y^2) - (x-y)^2$, ta được

$$\begin{aligned} & 2(3a^2 + 4bc + 9 + 3b^2 + 4ca + 9 - (\sqrt{3a^2 + 4bc + 9} - \sqrt{3b^2 + 4ca + 9})^2) \\ & \geq 3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36 + \frac{5(a-b)^2}{2}. \end{aligned}$$

Tương đương với

$$\frac{(a-b)^2}{2} \geq (\sqrt{3a^2 + 4bc + 9} - \sqrt{3b^2 + 4ca + 9})^2.$$

Ta có

$$\sqrt{3a^2 + 4bc + 9} - \sqrt{3b^2 + 4ca + 9} = \frac{(a-b)[3(a+b) - 4c]}{\sqrt{3a^2 + 4bc + 9} + \sqrt{3b^2 + 4ca + 9}}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{2} \geq \frac{[3(a+b) - 4c]^2}{(\sqrt{3a^2 + 4bc + 9} + \sqrt{3b^2 + 4ca + 9})^2}.$$

Suy ra

$$(\sqrt{3a^2 + 4bc + 9} + \sqrt{3b^2 + 4ca + 9})^2 \geq 2[3(a+b) - 4c]^2. \quad (1)$$

Kết hợp với $c = \max\{a, b, c\}$ và bất đẳng thức Minkowski, ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{3a^2 + 4bc + 9} + \sqrt{3b^2 + 4ca + 9} &\geq \sqrt{3a^2 + 4b^2 + 9} + \sqrt{3b^2 + 4a^2 + 9} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 + (2b)^2 + 3^2} + \sqrt{(\sqrt{3}b)^2 + (2a)^2 + 3^2} \\ &\geq \sqrt{3(a+b)^2 + 4(a+b)^2 + 36} \\ &= \sqrt{7(a+b)^2 + 36}.\end{aligned}$$

Từ $1 \leq c \leq 3$, ta có

$$[3(a+b) - 4c]^2 \leq [3(a+b) - 4]^2 = 9(a+b)^2 - 24(a+b) + 16.$$

Kết hợp với (1), ta chỉ cần chứng minh

$$7(a+b)^2 + 36 \geq 2[9(a+b)^2 - 24(a+b) + 16].$$

Tương đương với

$$11(a+b)[3 - (a+b)] + 15(a+b) + 4 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối là đúng, bởi vì $0 \leq a+b \leq 2$. Bước 1 được giải quyết hoàn toàn.

Bước 2. Để hoàn thành bước dồn biến, ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned}&\sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36} + \frac{5(a-b)^2}{2} + \sqrt{3c^2 + 4ab + 9} \\ &\geq \sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36} + \sqrt{3c^2 + (a+b)^2 + 9}.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned}&\sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36} + \frac{5(a-b)^2}{2} - \sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36} \\ &\geq \sqrt{3c^2 + (a+b)^2 + 9} - \sqrt{3c^2 + 4ab + 9}.\end{aligned}$$

Nhân liên hợp và phân tích thành tổng bình phương, ta đưa về chứng minh

$$\begin{aligned}&5\sqrt{3c^2 + (a+b)^2 + 9} + 5\sqrt{3c^2 + 4ab + 9} \\ &\geq 2\sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36} + \frac{5(a-b)^2}{2} + 2\sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36}.\end{aligned}\quad (2)$$

(i) Ta sẽ chứng minh

$$5\sqrt{3c^2 + (a+b)^2 + 9} \geq 2\sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36} + \frac{5(a-b)^2}{2}.$$

Thật vậy, ta có $a \leq c, b \leq c$ và $1 \leq c \leq 3$. Do đó, ta có

$$\begin{aligned}&2\sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36} + \frac{5(a-b)^2}{2} \\ &= \sqrt{12(a^2 + 2ab + b^2) + 32(a+b)c + 144} + 10(a^2 - 2ab + b^2) \\ &= \sqrt{22(a^2 + b^2) + 2ab + 32(a+b)c + 144} \\ &\leq \sqrt{22(c^2 + c^2) + 2c^2 + 32(a+b)c + 144} \\ &= \sqrt{46c^2 + 32(a+b)c + 144}.\end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh rằng

$$5\sqrt{3c^2 + (a+b)^2 + 9} \geq \sqrt{46c^2 + 32(a+b)c + 144}.$$

Bình phương hai vế và rút gọn, ta được

$$29c^2 + 25(a+b)^2 + 81 - 32(a+b)c \geq 0.$$

Từ $a+b+c=3$, ta có

$$29c^2 + 25(a+b)^2 + 9(a+b+c)^2 - 32(a+b)c \geq 0.$$

hay

$$10c^2 + 34(a+b)^2 + 14c[2c - (a+b)] \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối là đúng vì

$$2c - (a+b) = 2c - (3-c) = 3c - 3 = 3(c-1) \geq 0, \forall 1 \leq c \leq 3.$$

(ii) Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$5\sqrt{3c^2 + 4ab + 9} \geq 2\sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36}.$$

Thật vậy, từ $c = \max\{a, b, c\}$, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36} &\leq \sqrt{3(c+c)^2 + 8(a+b)c + 36} \\ &= \sqrt{12c^2 + 8(a+b)c + 36}. \end{aligned}$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$5\sqrt{3c^2 + 4ab + 9} \geq 2\sqrt{12c^2 + 8(a+b)c + 36}.$$

Bình phương hai vế, ta được

$$25(3c^2 + 4ab + 9) \geq 4[12c^2 + 8(a+b)c + 36].$$

Chú ý rằng $a+b+c=3$ nên

$$8c^2 + 100ab + 9(a+b)^2 + 14c[2c - (a+b)] \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối là đúng tương tự trường hợp trên.

Do đó, bất đẳng thức (2) được chứng minh. Bước 2 được giải quyết hoàn toàn.

Bước 3. Để hoàn thành lời giải, ta chỉ cần chứng minh

$$f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) = \sqrt{3(a+b)^2 + 8(a+b)c + 36} + \sqrt{3c^2 + (a+b)^2 + 9} \geq 12.$$

Từ $a+b+c=3$, ta có

$$\sqrt{3(3-c)^2 + 8(3-c)c + 36} + \sqrt{3c^2 + (3-c)^2 + 9} \geq 12.$$

Suy ra

$$\sqrt{63 + 6c - 5c^2} + \sqrt{4c^2 - 6c + 18} \geq 12.$$

Bình phương hai vế và khử căn hai lần, ta đưa về được

$$(c-1)^2(3-c)(3c+7) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối là đúng bởi vì ta có $1 \leq c \leq 3$. Bước 3 được giải quyết hoàn toàn. Vậy bài toán 1 được giải quyết hoàn toàn.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=3, b=c=0$ hoặc $b=3, c=a=0$ hoặc $c=3, a=b=0$.

Câu 6.3. Bài toán này ngoài trường hợp dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$. Còn xảy ra tại $a = b = \frac{3}{2}, c = 0$ hoặc các hoán vị của các bộ số $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$. Không mất tính tổng quát giả sử rằng $c = \min\{a, b, c\}$. Từ đây suy ra $0 \leq c \leq 1$.

Đặt

$$f(a, b, c) = \sqrt{9 - 6ab + a^2 + b^2} + \sqrt{9 - 6bc + b^2 + c^2} + \sqrt{9 - 6ca + c^2 + a^2}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$f(a, b, c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right).$$

Bước 1. Ta sẽ chứng minh rằng

$$\sqrt{9 - 6bc + b^2 + c^2} + \sqrt{9 - 6ca + c^2 + a^2} \geq \sqrt{36 - 12(a+b)c + (a+b)^2 + 4c^2} - \frac{(a-b)^2}{5}.$$

Bình phương hai vế và biến đổi, ta thu được

$$\frac{6(a-b)^2}{5} \geq \left(\sqrt{9 - 6bc + b^2 + c^2} - \sqrt{9 - 6ca + c^2 + a^2}\right)^2.$$

Nhân liên hợp và phân tích tổng bình phương, ta đưa về chứng minh rằng

$$\frac{6}{5} \geq \frac{[6c - (a+b)]^2}{(\sqrt{9 - 6bc + b^2 + c^2} + \sqrt{9 - 6ca + c^2 + a^2})^2}.$$

hay

$$6 \left(\sqrt{9 - 6bc + b^2 + c^2} + \sqrt{9 - 6ca + c^2 + a^2}\right)^2 \geq 5[6c - (a+b)]^2. \quad (3)$$

Từ $c = \min\{a, b, c\}$ và $a + b + c = 3$, ta chứng minh được rằng

$$\sqrt{9 - 6bc + b^2 + c^2} \geq \sqrt{b^2 + (c+a)^2 + (b-c)^2}.$$

và

$$\sqrt{9 - 6ca + c^2 + a^2} \geq \sqrt{a^2 + (b+c)^2 + (c-a)^2}.$$

Cộng hai đánh giá trên lại và áp dụng thêm bất đẳng thức Minkowski, ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{b^2 + (c+a)^2 + (b-c)^2} + \sqrt{a^2 + (b+c)^2 + (c-a)^2} \\ & \geq \sqrt{(a+b)^2 + (a+b+2c)^2 + (a-b)^2} \\ & \geq \sqrt{(a+b)^2 + (a+b+2c)^2} \\ & = \sqrt{18 + 2c^2}. \end{aligned}$$

Ngoài ra, $[6c - (a+b)]^2 = [6c - (3-c)]^2 = 49c^2 - 42c + 9$. Kết hợp với (3), ta đưa về

$$6(18 + 2c^2) \geq 5(49c^2 - 42c + 9).$$

Bất đẳng thức cuối tương đương với $-233c^2 + 210c + 63 = (1-c)(233c + 23) + 40 \geq 0$ đúng vì $c \leq 1$. Bước 1 được giải quyết hoàn toàn.

Bước 2. Để hoàn thành bước dồn biến, ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} & \sqrt{9 - 6ab + a^2 + b^2} + \sqrt{36 - 12(a+b)c + (a+b)^2 + 4c^2} - \frac{(a-b)^2}{5} \\ & \geq \sqrt{9 - (a+b)^2} + \sqrt{36 - 12(a+b)c + (a+b)^2 + 4c^2}. \end{aligned}$$

Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{9 - 6ab + a^2 + b^2} - \sqrt{9 - (a + b)^2} \\ & \geq \sqrt{36 - 12(a + b)c + (a + b)^2 + 4c^2} - \sqrt{36 - 12(a + b)c + (a + b)^2 + 4c^2 - \frac{(a - b)^2}{5}}. \end{aligned}$$

Tiếp tục nhân liên hợp và phân tích tổng bình phương, ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} & 10\sqrt{36 - 12(a + b)c + (a + b)^2 + 4c^2} + 10\sqrt{36 - 12(a + b)c + (a + b)^2 + 4c^2 - \frac{(a - b)^2}{5}} \\ & \geq \sqrt{9 - 6ab + a^2 + b^2} + \sqrt{9 - (a + b)^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

(i) Ta sẽ chứng minh

$$10\sqrt{36 - 12(a + b)c + (a + b)^2 + 4c^2} \geq \sqrt{9 - 6ab + a^2 + b^2}.$$

Thật vậy, từ $a + b + c = 3$ và $c = \min\{a, b, c\}$, suy ra $a \geq c, b \geq c, 0 \leq c \leq 1$ và

$$a^2 + b^2 - 6ab = (a + b)^2 - 2ab - 6ab = (a + b)^2 - 8ab \leq (a + b)^2 - 8c^2.$$

Suy ra

$$\sqrt{9 - 6ab + a^2 + b^2} \leq \sqrt{9 + (a + b)^2 - 8c^2}.$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$10\sqrt{36 - 12(a + b)c + (a + b)^2 + 4c^2} \geq \sqrt{9 + (a + b)^2 - 8c^2}.$$

Từ $a + b + c = 3$, ta có

$$10\sqrt{36 - 12(3 - c)c + (3 - c)^2 + 4c^2} \geq \sqrt{9 + (3 - c)^2 - 8c^2}.$$

Khai triển và thu gọn, ta được

$$1707c^2 + 4194(1 - c) + 288 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng là đúng vì $0 \leq c \leq 1$.

(ii) Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$10\sqrt{36 - 12(a + b)c + (a + b)^2 + 4c^2} - \frac{(a - b)^2}{5} \geq \sqrt{9 - (a + b)^2}.$$

Ta có:

$$10\sqrt{36 - 12(a + b)c + (a + b)^2 + 4c^2} - \frac{(a - b)^2}{5} = \sqrt{3600 - 1200(a + b)c + 80(a + b)^2 + 400c^2 + 80ab}.$$

Ta cần chứng minh

$$\sqrt{3600 - 1200(a + b)c + 80(a + b)^2 + 400c^2 + 80ab} \geq \sqrt{9 - (a + b)^2}.$$

Bình phương hai vế và biến đổi, ta thu được

$$4086(1 - c) + 234 + 1681c^2 + 80ab \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối là đúng vì $0 \leq c \leq 1$ và a, b là các số thực dương.

Do đó, bất đẳng thức (4) là được chứng minh. Bước 2 được giải quyết hoàn toàn.

Bước 3. Để hoàn thành lời giải, ta chỉ cần chứng minh

$$f\left(\frac{a + b}{2}, \frac{a + b}{2}, c\right) = \sqrt{9 - (a + b)^2} + \sqrt{36 - 12(a + b)c + (a + b)^2 + 4c^2} \geq 3\sqrt{5}.$$

Từ $a + b + c = 3$, ta có

$$\sqrt{9 - (3 - c)^2} + \sqrt{36 - 12(3 - c)c + (3 - c)^2 + 4c^2} \geq 3\sqrt{5}.$$

Suy ra

$$\sqrt{6c - c^2} + \sqrt{17c^2 - 42c + 45} \geq 3\sqrt{5}.$$

Lại bình phương hai vế và phân tích, ta thu được

$$c(c - 1)^2(10 - 3c) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối là đúng vì $0 \leq c \leq 1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = \frac{3}{2}$, $c = 0$ hoặc $b = 0$, $c = a = \frac{3}{2}$.

Tương tự bài toán 1 ở trên, đánh giá ở bước 1 chính là chìa khóa để giải quyết bài toán này.

Câu 6.4. Bài toán này ngoài trường hợp dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$, còn xảy ra tại $a = b = 0$, $c = 3$ hoặc các hoán vị của bộ số $(0; 0; 3)$. Không mất tính tổng quát giả sử $c = \max\{a, b, c\}$, suy ra $a \leq c$, $b \leq c$. Từ $a + b + c = 3$, suy ra $1 \leq c \leq 3$ kéo theo $0 \leq a + b \leq 2$. Bất đẳng thức được viết lại như sau

$$\sqrt{12 + 22ab + 7(a^2 + b^2)} + \sqrt{12 + 22bc + 7(b^2 + c^2)} + \sqrt{12 + 22ca + 7(c^2 + a^2)} \leq 12\sqrt{3}.$$

Ta đặt

$$f(a; b; c) = \sqrt{12 + 22ab + 7(a^2 + b^2)} + \sqrt{12 + 22bc + 7(b^2 + c^2)} + \sqrt{12 + 22ca + 7(c^2 + a^2)}.$$

Ta sẽ chứng minh $f(a; b; c) \leq f\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}; c\right)$.

Bước 1. Ta sẽ chứng minh rằng

$$\begin{aligned} & \sqrt{12 + 22bc + 7(b^2 + c^2)} + \sqrt{12 + 22ca + 7(c^2 + a^2)} \\ & \leq \sqrt{48 + 44(a+b)c + 7(a+b)^2 + 28c^2 + 2(a-b)^2}. \end{aligned}$$

Bình phương hai vế và biến đổi, ta thu được

$$5(a-b)^2 \leq \left[\sqrt{12 + 22bc + 7(b^2 + c^2)} - \sqrt{12 + 22ca + 7(c^2 + a^2)} \right]^2.$$

hay

$$5 \left[\sqrt{12 + 22bc + 7(b^2 + c^2)} + \sqrt{12 + 22ca + 7(c^2 + a^2)} \right]^2 \leq [7(a+b) + 22c]^2. (5)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} & \left[\sqrt{12 + 22bc + 7(b^2 + c^2)} + \sqrt{12 + 22ca + 7(c^2 + a^2)} \right]^2 \\ & \leq (1+1) [12 + 22bc + 7(b^2 + c^2) + 12 + 22ca + 7(c^2 + a^2)] \\ & = 48 + 44(a+b)c + 28c^2 + 14(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Kết hợp với (5), ta chỉ cần chứng minh

$$5 [48 + 44(a+b)c + 28c^2 + 14(a^2 + b^2)] \leq [7(a+b) + 22c]^2.$$

Tương đương với

$$(a+b)[88c - 21(a+b)] + 240(c^2 - 1) + 104c^2 + 140ab \geq 0.$$

3. PHƯƠNG PHÁP DỒN BIẾN

Bất đẳng thức cuối cùng đúng vì $0 \leq a + b \leq 2$ và $1 \leq c \leq 3$. Bước 1 được giải quyết hoàn toàn.

Bước 2. Để hoàn thành bước dồn biến ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} & \sqrt{12 + 22ab + 7(a^2 + b^2)} + \sqrt{48 + 44(a + b)c + 7(a + b)^2 + 28c^2 + 2(a - b)^2} \\ & \leq \sqrt{12 + 9(a + b)^2} + \sqrt{48 + 44(a + b)c + 7(a + b)^2 + 28c^2}. \end{aligned}$$

Thật vậy bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{48 + 44(a + b)c + 7(a + b)^2 + 28c^2 + 2(a - b)^2} - \sqrt{48 + 44(a + b)c + 7(a + b)^2 + 28c^2} \\ & \leq \sqrt{12 + 9(a + b)^2} - \sqrt{12 + 22ab + 7(a^2 + b^2)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Bằng cách nhân liên hợp và phân tích tổng bình phương, ta đưa về chứng minh

$$\begin{aligned} & \sqrt{48 + 44(a + b)c + 7(a + b)^2 + 28c^2 + 2(a - b)^2} + \sqrt{48 + 44(a + b)c + 7(a + b)^2 + 28c^2} \\ & \geq \sqrt{12 + 9(a + b)^2} + \sqrt{12 + 22ab + 7(a^2 + b^2)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Đầu tiên ta chứng minh

$$\sqrt{48 + 44(a + b)c + 7(a + b)^2 + 28c^2 + 2(a - b)^2} \geq \sqrt{12 + 9(a + b)^2}.$$

Bình phương hai vế và thu gọn ta thu được

$$36 + 2(a + b)[22c - (a + b)] + 28c^2 + 2(a - b)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối là đúng vì $0 \leq a + b \leq 2$ và $1 \leq c \leq 3$.

Tiếp theo ta chứng minh

$$\sqrt{48 + 44(a + b)c + 7(a + b)^2 + 28c^2} \geq \sqrt{12 + 22ab + 7(a^2 + b^2)}.$$

Bình phương hai vế và thu gọn ta thu được

$$36 + 44(a + b)c + 28c^2 - 8ab \geq 0.$$

Vì $c = \max\{a, b, c\}$ nên $28c^2 - 8ab \geq 0$ và bất đẳng thức trên là đúng. Do đó, bất đẳng thức (7) được chứng minh. Bước 2 được giải quyết hoàn toàn.

Bước 3. Để hoàn thành lời giải ta cần chứng minh

$$f\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}; c\right) = \sqrt{12 + 9(a + b)^2} + \sqrt{48 + 44(a + b)c + 7(a + b)^2 + 28c^2} \leq 12\sqrt{3}.$$

Từ $a + b + c = 3$ ta được điều phải chứng minh trở thành

$$\sqrt{93 - 54c + 9c^2} + \sqrt{111 + 90c - 9c^2} \leq 12\sqrt{3}$$

Bình phương hai vế và thu gọn ta được

$$(c - 1)^2(c - 3)(c - 11) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do $1 \leq c \leq 3$. Bước 3 được giải quyết hoàn toàn hay bài toán được chứng minh xong.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = 3, b = c = 0$ hoặc $b = 3, a = c = 0$ hoặc $c = 3, a = b = 0$.

Bước đánh giá ở bước 1 là mấu chốt để ta giải quyết bài toán.

Câu 6.5. Bài toán này ngoài trường hợp dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$ còn xảy ra tại $a = b = \frac{3}{2}, c = 0$ hoặc các hoán vị của bộ số $\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$. Không mất tính tổng quát giả sử $c = \min\{a, b, c\}$, khi đó $0 \leq c \leq 1$.

Đặt $f(a; b; c) = \sqrt{2(a^2 + b^2) + 21c} + \sqrt{2(b^2 + c^2) + 21a} + \sqrt{2(c^2 + a^2) + 21b}$. Ta sẽ chứng minh rằng

$$f(a; b; c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}; c\right).$$

Bước 1. Ta sẽ chứng minh

$$\sqrt{2(b^2 + c^2) + 21a} + \sqrt{2(c^2 + a^2) + 21b} \geq \sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b) - 2(a-b)^2}.$$

Bình phương hai vế và khai triển ta có

$$4(a-b)^2 \geq \left[\sqrt{2(b^2 + c^2) + 21a} - \sqrt{2(c^2 + a^2) + 21b}\right]^2.$$

Nhân liên hợp cho bất đẳng thức trên ta đưa về

$$4\left[\sqrt{2(b^2 + c^2) + 21a} + \sqrt{2(c^2 + a^2) + 21b}\right]^2 \geq [21 - 2(a+b)]^2. (8)$$

Áp dụng tính chất $2(x^2 + y^2) \geq (x+y)^2$ và bất đẳng thức Minkowski, ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{2(b^2 + c^2) + 21a} + \sqrt{2(c^2 + a^2) + 21b} \\ & \geq \sqrt{(b+c)^2 + 21a} + \sqrt{(c+a)^2 + 21b} \\ & = \sqrt{(b+c)^2 + (\sqrt{21a})^2} + \sqrt{(c+a)^2 + (\sqrt{21b})^2} \\ & \geq \sqrt{(a+b+2c)^2 + (\sqrt{21a} + \sqrt{21b})^2}. \end{aligned}$$

Từ $a + b + c = 3$ và $c = \min\{a; b; c\}$, suy ra

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a+b+2c)^2 + (\sqrt{21a} + \sqrt{21b})^2} \\ & = \sqrt{(3-c+2c)^2 + 21(a+b+2\sqrt{ab})} \\ & \geq \sqrt{(3+c)^2 + 21(3-c+2c)} = \sqrt{c^2 + 27c + 72}. \end{aligned}$$

Ngoài ra $[21 - 2(a+b)]^2 = [21 - 2(3-c)]^2 = 225 + 60c + 4c^2$, kết hợp với (8) ta cần có

$$4(c^2 + 27c + 72) \geq 225 + 60c + 4c^2 \Leftrightarrow 16c + 21 \geq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng vì $0 \leq c \leq 1$. Bước 1 được giải quyết hoàn toàn.

Bước 2. Để hoàn thành bước dồn biến, ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} & \sqrt{2(a^2 + b^2) + 21c} + \sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b) - 2(a-b)^2} \\ & \geq \sqrt{(a+b)^2 + 21c} + \sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b)}. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b)} - \sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b) - 2(a-b)^2} \\ & \leq \sqrt{2(a^2 + b^2) + 21c} - \sqrt{(a+b)^2 + 21c}. \end{aligned}$$

Nhân lượng liên hợp ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b)} + \sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b) - 2(a-b)^2} \\ & \geq 2\sqrt{2(a^2 + b^2) + 21c} + 2\sqrt{(a+b)^2 + 21c}. \end{aligned} \quad (9)$$

Đầu tiên ta chứng minh

$$\sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b)} \geq 2\sqrt{2(a^2 + b^2) + 21c}.$$

Thật vậy ta có $c = \min\{a, b, c\}$ suy ra $2(a^2 + b^2) = 2(a+b)^2 - 4ab \leq 2(a+b)^2 - 4c^2$. Khi đó ta thu được

$$2\sqrt{2(a^2 + b^2) + 21c} \geq 2\sqrt{2(a+b)^2 - 4c^2 + 21c}.$$

Do đó ta cần chứng minh

$$\sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b)} \geq 2\sqrt{2(a+b)^2 - 4c^2 + 21c}.$$

Từ $a + b + c = 3$, bình phương hai vế và biến đổi ta cần chứng minh

$$2(3-c)^2 + 8c^2 + 42(3-c) \geq 8(3-c)^2 - 16c^2 + 84c \Leftrightarrow (1-c)(4-c) \geq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng do $0 \leq c \leq 1$.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh

$$\sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b) - 2(a-b)^2} \geq 2\sqrt{(a+b)^2 + 21c}.$$

Để ý rằng $\sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b) - 2(a-b)^2} = \sqrt{8c^2 + 42(a+b) + 8ab}$ nên ta cần chứng minh

$$\sqrt{8c^2 + 42(a+b) + 8ab} \geq 2\sqrt{(a+b)^2 + 21c}.$$

Từ $a + b + c = 3$ nên điều này tương đương với

$$8c^2 + 42(3-c) + 8ab \geq 4[(3-c)^2 + 21c].$$

Từ $c = \min\{a, b, c\}$ ta có $8ab \geq 8c^2$, do đó ta chỉ cần chứng minh

$$8c^2 + 42(3-c) + 8c^2 \geq 4[(3-c)^2 + 21c] \Leftrightarrow (1-c)(15-2c) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do $0 \leq c \leq 1$. Đến đây thì bất đẳng thức (9) đã được chứng minh hay bước 2 được giải quyết hoàn toàn.

Bước 3. Ta chỉ cần chứng minh

$$f\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}; c\right) = \sqrt{(a+b)^2 + 21c} + \sqrt{2(a+b)^2 + 8c^2 + 42(a+b)} \geq 15.$$

Từ $a + b + c = 3$ thì ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt{(3-c)^2 + 21c} + \sqrt{2(3-c)^2 + 8c^2 + 42(3-c)} \geq 15.$$

Bình phương khử căn ta đưa về

$$c(c-1)^2(40-3c) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $0 \leq c \leq 1$. Bước 3 được giải quyết hoàn toàn. Vậy bài toán đã được giải quyết.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = \frac{3}{2}, c = 0$ hoặc $b = c = \frac{3}{2}, a = 0$ hoặc $a = c = \frac{3}{2}, b = 0$.

Câu 6.6. Bài toán này ngoài trường hợp dấu bằng xảy ra $a = b = c = 1$. Còn xảy ra tại $a = b = \frac{3}{2}, c = 0$ hoặc các hoán vị bộ $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$. Không mất tính tổng quát giả sử rằng $c = \min\{a, b, c\}$. Từ đây suy ra $0 \leq c \leq 1$.

Đặt $f(a, b, c) = \sqrt{3a^2 - a + 1} + \sqrt{3b^2 - b + 1} + \sqrt{3c^2 - c + 1} - \sqrt{6(a^2 + b^2 + c^2) + 9}$.

Bước 1. Ta dễ chứng minh được

$$\sqrt{3a^2 - a + 1} + \sqrt{3b^2 - b + 1} + \sqrt{3c^2 - c + 1} \leq \sqrt{6(a^2 + b^2 - 2(a + b) + 4 - (a + b)^2)}.$$

Bước 2. Để hoàn thành bước dồn biến ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} & \sqrt{6(a^2 + b^2 - 2(a + b) + 4 - (a + b)^2)} - \sqrt{6(a^2 + b^2 + c^2) + 9} \leq \\ & \leq \sqrt{3(a + b)^2 - 2(a + b) + 4} + \sqrt{3(a + b)^2 + 6c^2 + 9}. \end{aligned}$$

Nhân liên hợp và phân tích tổng bình phương, ta đưa về

$$\begin{aligned} & 3 \left[\sqrt{6(a^2 + b^2) - 2(a + b) + 4 - (a - b)^2} + \sqrt{3(a + b)^2 - 2(a + b) + 4} \right] \geq \\ & \geq 2 \left[\sqrt{6(a^2 + b^2 + c^2) + 9} + \sqrt{3(a + b)^2 + 6c^2 + 9} \right]. \end{aligned}$$

- Ta dễ chứng minh được

$$3\sqrt{3(a + b)^2 - 2(a + b) + 4} \geq 2\sqrt{3(a + b)^2 + 6c^2 + 9}.$$

- Ta dễ chứng minh được

$$3\sqrt{6(a^2 + b^2) - 2(a + b) + 4 - (a - b)^2} \geq 2\sqrt{6(a^2 + b^2 + c^2) + 9}.$$

Bước 3. Ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt{3(a + b)^2 - 2(a + b) + 4} + \sqrt{3c^2 - c + 1} \leq \sqrt{3(a + b)^2 + 6c^2 + 9}.$$

Từ $a + b + c = 3$ ta suy ra

$$\sqrt{3c^2 - 16c + 25} + \sqrt{3c^2 - c + 1} \leq \sqrt{9(c^2 - 2c + 4)}.$$

Bình phương hai vế và rút gọn, ta được

$$9c(c - 1)^2(16 - 3c) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $0 \leq c \leq 1$. Bước 3 được giải quyết hoàn toàn. Vậy bài toán được giải quyết.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = \frac{3}{2}, c = 0$, hoặc $a = 0, b = c = \frac{3}{2}$, hoặc $b = 0, c = a = \frac{3}{2}$.

Câu 6.7. Bài toán này ngoài trường hợp dấu bằng xảy ra $a = b = c = \frac{2}{3}$. Còn xảy ra tại $a = b = 1$ hoặc các hoán vị bộ $(1, 1, 0)$. Không mất tính tổng quát giả sử rằng $c = \min\{a, b, c\}$. Từ đây suy ra $0 \leq c \leq \frac{2}{3}$.

Đặt $f(a, b, c) = \sqrt{a + b - 2ab} + \sqrt{b + c - 2bc} + \sqrt{c + a - 2ca}$.

Bước 1. Ta chứng minh được

$$\sqrt{b + c - 2bc} + \sqrt{c + a - 2ca} \geq \sqrt{2(a + b) + 4c - 4(a + b)c - \frac{1}{2}(a - b)^2}.$$

Bước 2. Để hoàn thành bước dồn biến, ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} & \sqrt{a+b-2ab} + \sqrt{2(a+b)+4c-4(a+b)c-\frac{1}{2}(a-b)^2} \geq \\ & \geq \sqrt{a+b+\frac{(a+b)^2}{2}} + \sqrt{2(a+b)+4c-4c(a+b)}. \end{aligned}$$

Nhân lượng liên hợp, ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{2(a+b)+4c-4c(a+b)} + \sqrt{2(a+b)+4c-4(a+b)c-\frac{1}{2}(a-b)^2} \geq \\ & \sqrt{a+b-2ab} + \sqrt{a+b+\frac{(a+b)^2}{2}}. \end{aligned}$$

(i) Ta chứng minh được

$$\sqrt{2(a+b)+4c-4c(a+b)} \geq \sqrt{a+b-2ab}.$$

(ii) Ta chứng minh được

$$\sqrt{2(a+b)+4c-4c(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)^2} \geq \sqrt{a+b+\frac{(a+b)^2}{2}}.$$

Bước 3. Ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt{\frac{2c-c^2}{2}} + \sqrt{4-6c+4c^2} \geq 2.$$

Bình phương hai vế và rút gọn, ta được

$$c(3c-2)^2(16-9c) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $0 \leq c \leq \frac{2}{3}$. Bước 3 được giải quyết hoàn toàn. Vậy bài toán đã cho được giải quyết.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{2}{3}$, hoặc $a = b = 1, c = 0$, hoặc $a = 0, b = c = 1$, hoặc $b = 0, c = a = 1$.

Câu 6.8. Bài toán ngày ngoài trường hợp dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$. Còn xảy ra tại $a = b = \frac{2}{3}, c = \frac{5}{3}$, hoặc các hoán vị của bộ số $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Không mất tính tổng quát giả sử rằng $c = \min\{a, b, c\}$. Từ đây suy ra $1 \leq c \leq 3$. Đặt

$$f(a, b, c) = \sqrt{2a^2 - a + 1} + \sqrt{2b^2 - b + 1} + \sqrt{2c^2 - c + 1} - \frac{1}{3}\sqrt{21(a^2 + b^2 + c^2) + 99}.$$

Bước 1. Dễ dàng chứng minh được

$$\sqrt{2a^2 - a + 1} + \sqrt{2b^2 - b + 1} + \geq \sqrt{2(a+b)^2 - 2(a+b) + 4 + \frac{7}{16}(a-b)^2}.$$

Bước 2. Để hoàn thành bước dồn biến, ta cần chứng minh

$$\sqrt{2(a+b)^2 - 2(a+b) + 4 + \frac{7}{16}(a-b)^2} - \frac{1}{3}\sqrt{21(a^2 + b^2 + c^2) + 99} \geq$$

$$\geq \sqrt{2(a+b)^2 - 2(a+b) + 4} - \frac{1}{3}\sqrt{21c^2 + \frac{21}{2}(a+b)^2 + 99}.$$

Nhân lượng liên hợp và biến đổi ta đưa về

$$\begin{aligned} & \sqrt{21(a^2 + b^2 + c^2) + 99} + \sqrt{21c^2 + \frac{21}{2}(a+b)^2 + 99} \geq \\ & \geq 8\sqrt{2(a+b)^2 - 2(a+b) + 4} + \frac{7}{16}(a-b)^2 + 8\sqrt{2(a+b)^2 - 2(a+b) + 4}. \end{aligned}$$

Ta dễ dàng chứng minh được các kết quả sau:

$$\sqrt{21c^2 + \frac{21}{2}(a+b)^2 + 99} \geq 8\sqrt{2(a+b)^2 - 2(a+b) + 4}.$$

và

$$\sqrt{21(a^2 + b^2 + c^2) + 99} \geq 8\sqrt{2(a+b)^2 - 2(a+b) + 4} + \frac{7}{16}(a-b)^2.$$

Bước 3. Ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt{2(a+b)^2 - 2(a+b) + 4} + \sqrt{2c^2 - c + 1} - \frac{1}{3}\sqrt{21c^2 + \frac{21}{2}(a+b)^2 + 99} \geq 0.$$

Từ $a + b + c = 3$, ta suy ra

$$\sqrt{2c^2 - 10c + 16} + \sqrt{2c^2 - c + 1} \geq \sqrt{\frac{7c^2 - 14c + 43}{2}}.$$

Bình phương hai vế và rút gọn, ta được

$$7(3c - 5)^2(c - 1)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối cùng là đúng. Bước 3 giải quyết hoàn toàn và cũng kết thúc bài toán.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = \frac{2}{3}, c = \frac{5}{3}$ hoặc $a = \frac{5}{3}, b = \frac{2}{3}, c = a = \frac{2}{3}$.

Câu 6.15. Chuẩn hóa $ab + bc + ca = 3$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Đặt $f(a, b, c) = \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}$ và t là số thực dương thỏa mãn $2at + t^2 = 3$. Xét

$$P = f(a, b, c) - f(a, t, t) = \left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} - \frac{2}{(a+t)^2} \right) + \left(\frac{1}{(b+c)^2} - \frac{1}{4t^2} \right).$$

Ta có

$$2at + t^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow a(b + c - 2t) = t^2 - bc. \quad (1)$$

Nếu $b + c < 2t$ thì $VT(1) < 0$ và $t^2 > \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \geq ab$ nên $VP(1) \geq 0$, dẫn đến mâu thuẫn với (1). Từ đó, suy ra $b + c \geq 2t \Rightarrow (b+c)^2 \geq 4t^2 \Rightarrow \frac{1}{(a+b)^2}$

§4. Phương pháp p, q, r

Câu 1.1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$1 + \frac{3}{p} \geq \frac{6}{q} \Leftrightarrow pq + 3q - 6p \geq 0 \Leftrightarrow q \geq \frac{6p}{p+3}. \quad (1)$$

Ta có $p^2 \geq 3pr = 3p$, nên $q \geq \sqrt{3p}$. Do đó, để chứng minh (1) ta chứng minh

$$\sqrt{3p} \geq \frac{6p}{p+3} \Leftrightarrow p(p+3)^2 \geq 12p^2 \Leftrightarrow (p-3)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}.$$

Câu 1.2. Ta có $q + 6r = 9$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$p + 3r \geq 6 \Leftrightarrow 2p \geq q + 3. \quad (2)$$

Theo BĐT Schur ta có

$$9r \geq 4pq - p^3 \Leftrightarrow 9 \cdot \frac{9-q}{6} \geq 4pq - p^3 \Leftrightarrow q \leq \frac{27+2p^3}{8p+3}.$$

Do đó để chứng minh (2) ta chứng minh

$$2p \geq \frac{27+2p^3}{8p+3} + 3 \Leftrightarrow p^3 - 2p^2 + 9p + 18 \leq 0 \Leftrightarrow (p+1)(p-3)(p-6) \leq 0. \quad (3)$$

Ta có $9 = q + 6r \leq \frac{p^2}{3} + \frac{6p^3}{27} \Leftrightarrow p \geq 3$ nên (3) đúng khi $p \leq 6$. Nếu $p > 6$ thì $a + b + c + 3abc > 6$.

Câu 1.3. Nếu $a + b + c > 4$ thì ta có $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3 \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^3 > \frac{64}{9}$ Áp dụng BĐT Schur, ta có:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 3abc &\geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \\ \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 6abc &\geq (ab+bc+ca)(a+b+c) = pq = 3p \end{aligned}$$

và

$$r \geq \frac{p(4q-p^2)}{9} = \frac{p(12-p^2)}{9}.$$

Ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} 3p + \frac{p(12-p^2)}{9} &\geq 10 \\ \Leftrightarrow \frac{(p-3)[(16-p^2) + 3(4-p) + 2]}{9} &\geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng nên ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Câu 1.4. Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại như sau:

$$3r + 12 \geq 5q. \quad (1)$$

Mặt khác, theo BDT Schur, ta có:

$$3r \geq \frac{3p(4q-p^2)}{9} = 4q - 9.$$

Nên ta chứng minh

$$4q - 9 + 12 \geq 5q \Leftrightarrow q \leq 3 \text{ (đúng)}.$$

Câu 1.5. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$8p + 3r \geq 12 + 5q. \quad (1)$$

Áp dụng BDT Schur, ta có:

$$3r \geq \frac{p(4q - p^2)}{3} = \frac{p(2q - 3)}{3}.$$

Từ giả thiết $p^2 - 2q = 3 \Rightarrow q = \frac{p^2 - 3}{2}$.

Nên ta chỉ cần chứng minh:

$$8p + \frac{p(p^2 - 6)}{3} \geq 12 + \frac{5(p^2 - 3)}{2} \Leftrightarrow (2p - 3)(p - 3)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên ta có đpcm.

Câu 1.6. Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh và chuyển về dạng p, q, r , ta có:

$$8(243 - 18p + 3r) \leq 3(729 - 81q + 27r - r^2) \Leftrightarrow 243 - 99q + 57r - 3r^2 \geq 0.$$

Theo BDT AM-GM thì $3 = 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^6 \geq 3(abc)^2 = r^2$.

Theo BDT Schur, ta có:

$$r \geq \frac{p(4q - p^2)}{3} = \frac{4q - 9}{3} \Rightarrow 57r \geq 19(4q - 9).$$

Nên ta cần chứng minh:

$$72 - 23q - 3r^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3(1 - r^2) + 23(3 - q) \geq 0.$$

Vậy BDT được chứng minh.

Câu 1.7. Đưa bất đẳng thức về dạng p, q, r , từ giả thiết, ta có $q + r = 4$.
và lúc đó, bất đẳng thức trở thành

$$p^2 - 2q + 5r \geq 8 \Leftrightarrow p^2 - 7q + 12 \geq 0.$$

Nếu $4 \geq p$, sử dụng BDT Schur, ta có:

$$r \geq \frac{p(4q - p^2)}{9},$$

suy ra

$$\begin{aligned} 4 &\geq q + \frac{p(4q - p^2)}{9} \Leftrightarrow q \leq \frac{p^3 + 36}{4p + 9} \\ \Rightarrow p^2 - \frac{7(p^3 + 36)}{4p + 9} + 12 &\geq 0 \Leftrightarrow (p - 3)(p^2 - 16) \leq 0. \end{aligned}$$

điều này đúng vì $4 \geq p \geq \sqrt{3q} \geq 3$.

Nếu $p \geq 4$, ta có $p^2 \geq 16 \geq 4q$ và

$$p^2 - 2q + 5r \geq p^2 - 2q \geq \frac{p^2}{2} \geq 8.$$

Vậy BDT được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$ hoặc $x = y = 2, z = 0$ và các hoán vị

§5. Phương pháp tiếp tuyến và cát tuyến

Câu 2.1. Vì BĐT đã cho thuận nhất nên ta chỉ cần chứng minh Bđt đúng với mọi số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, khi đó bđt cần chứng minh trở thành: $f(a) + f(b) + f(c) \geq 1$ trong đó: $f(x) = \frac{1 + \sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{x} - x$ với $0 < x < 1$. Dễ thấy hàm số $f(x)$ có $f''(x) > 0 \forall x \in (0; 1)$.

Theo BĐT tiếp tuyến ta có :

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq f' \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) (a + b + c - \sqrt{3}) + 3f \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

$$\text{Do } \begin{cases} f' \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) < 0 \\ a + b + c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 1.$$

Câu 2.2. Đặt $a_i = \tan x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) $\Rightarrow a_i > 0 \ i = 1, 2, \dots, n$ và $\sum_{i=1}^n a_i \leq n$.

Ta cần chứng minh :

$$\prod_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{1 + a_i^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2^n}}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$, $x > 0$ có

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(1 + x^2)^3}} \Rightarrow f''(x) < 0 \forall x > 0.$$

Do đó

$$f(x) \leq f'(1)(x - 1) + f(1) = \frac{1}{\sqrt{2^3}}(x - 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x + 1).$$

Suy ra

$$\prod_{i=1}^n \frac{a_i}{\sqrt{1 + a_i^2}} = \prod_{i=1}^n f(a_i) \leq \frac{1}{\sqrt{8^n}} \prod_{i=1}^n (a_i + 1) \leq \frac{1}{\sqrt{8^n}} \left(\frac{\sum_{i=1}^n (a_i + 1)}{n} \right)^n \leq \frac{2^n}{\sqrt{8^n}} = \frac{1}{\sqrt{2^n}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ hay $\tan x_1 = \tan x_2 = \dots = \tan x_n = 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{\pi}{4}$.

Câu 2.3. Ta có :

$$bc \leq \left(\frac{b+c}{2} \right)^2 = \left(\frac{1-a}{2} \right)^2; \quad ca \leq \left(\frac{a+c}{2} \right)^2 = \left(\frac{1-b}{2} \right)^2; \quad ab \leq \left(\frac{b+a}{2} \right)^2 = \left(\frac{1-c}{2} \right)^2$$

nên

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{4a}{a^2 - 2a + 5} + \frac{4b}{b^2 - 2b + 5} + \frac{4c}{c^2 - 2c + 5} = f(a) + f(b) + f(c).$$

Ta thấy đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ và tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{4x}{x^2 - 2x + 5}$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{3}$ là $y = \frac{99x - 3}{100}$, nên ta xét

$$\frac{4x}{x^2 - 2x + 5} - \frac{99x - 3}{100} = \frac{(3x - 1)^2(15 - 11x)}{100(x^2 - 2x + 5)} \geq 0 \forall x \in (0; 1).$$

Suy ra

$$\frac{4a}{a^2 - 2a + 5} + \frac{4b}{b^2 - 2b + 5} + \frac{4c}{c^2 - 2c + 5} \geq \frac{99(a + b + c) - 9}{100} = \frac{9}{10}.$$

Bài toán được chứng minh.

Câu 2.4. Vì Bđt cần chứng minh là thuần nhất nên ta chỉ cần chứng minh Bđt đúng với mọi số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Khi đó Bđt đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} & \frac{(1-2a)^2}{(1-a)^2 + a^2} + \frac{(1-2b)^2}{(1-b)^2 + b^2} + \frac{(1-2c)^2}{(1-c)^2 + c^2} \geq \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow & \frac{4a^2 - 4a + 1}{2a^2 - 2a + 1} + \frac{4b^2 - 4b + 1}{2b^2 - 2b + 1} + \frac{4c^2 - 4c + 1}{2c^2 - 2c + 1} \geq \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2a^2 - 2a + 1} + \frac{1}{2b^2 - 2b + 1} + \frac{1}{2c^2 - 2c + 1} \leq \frac{27}{5} \\ \Leftrightarrow & f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{27}{5}. \end{aligned}$$

Trong đó $f(x) = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}$ với $x \in (0; 1)$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = \frac{1}{3}$ là $y = \frac{54x + 27}{25}$.

Ta có

$$\frac{54x + 27}{25} - f(x) = \frac{2(54x^3 - 27x^2 + 1)}{25(2x^2 - 2x + 1)} = \frac{2(3x - 1)^2(6x + 1)}{25(2x^2 - 2x + 1)} \geq 0 \quad \forall x \in (0; 1).$$

Suy ra

$$f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{54(a + b + c) + 81}{25} = \frac{27}{5}. \text{ (đpcm).}$$

Câu 2.5. Phân tích. Với điều kiện $a + b + c = 1$ ta chọn điểm rơi tại $a = b = c = \frac{1}{3} = x_0$ và đặt $f(a) = a^3 + 5a^2$. Khi đó $f'(a) = 3a^2 + 10a$, $f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{3}$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{27}$.

Ta chứng minh

$$\begin{aligned} & a^3 + 5a^2 \geq \frac{11}{3} \left(a - \frac{1}{3}\right) + \frac{16}{27} \\ \Leftrightarrow & a^3 + 5a^2 - \frac{11}{3}a + \frac{17}{27} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \left(a - \frac{1}{3}\right)^2 \left(a + \frac{17}{3}\right) \geq 0 \text{ (BDT cuối luôn đúng với điều kiện } a > -1). \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự với các biểu thức còn lại:

$$\begin{aligned} b^3 + 5b^2 & \geq \frac{11}{3} \left(b - \frac{1}{3}\right) + \frac{16}{27}, \\ c^3 + 5c^2 & \geq \frac{11}{3} \left(c - \frac{1}{3}\right) + \frac{16}{27}. \end{aligned}$$

Cộng vế với vế, ta được

$$S \geq \frac{11}{3}(a + b + c - 1) + \frac{16}{9} = \frac{16}{9}.$$

Khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ thì $S = \frac{16}{9}$.

Vậy $\min S = \frac{16}{9}$ tại $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Câu 2.6. Phân tích. Chọn điểm rơi $a = b = c = -2$ và đặt $f(a) = \frac{a}{a^2 + a + 1}$. Tính được $f'(-2) = -\frac{1}{3}$, $f(-2) = -\frac{2}{3}$. Ghép vào công thức (**).

Ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{a}{a^2 + a + 1} &\leq -\frac{1}{3}(a + 2) - \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow -a^3 - 5a^2 - 8a - 4 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a + 2)^2(a + 1) &\leq 0 \text{ (luôn đúng với } a < -1). \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự với các biến b, c , ta có

$$\begin{aligned} \frac{b}{b^2 + b + 1} &\leq -\frac{1}{3}(b + 2) - \frac{2}{3}, \\ \frac{c}{c^2 + c + 1} &\leq -\frac{1}{3}(c + 2) - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Cộng vế với vế được $S \leq -\frac{1}{3}(a + b + c) - 4 = 2 - 4 = -2$.

Với $a = b = c = -2$ thì $S = -2$.

Vậy $\max S = -2$ tại $a = b = c = -2$.

Câu 2.7. Phân tích. Lần này 3 biến không còn đối xứng (chỉ là hoán vị vòng quanh) và cũng không nhóm dạng phân ly biến được. Ta sẽ nhóm riêng $(a^3 + 2a^2b)$ để đánh giá và coi b là tham số (hoặc có thể nhóm $a^3 + 2c^2a$). Từ điều kiện ta có thể nhẩm ra dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$ và đặt $f(a) = a^3 + 2a^2b \Rightarrow f'(a) = 3a^2 + 4ab$, $f'(1) = 3 + 4b$, $f(1) = 1 + 2b$.

Ta có sẽ chứng minh

$$\begin{aligned} a^3 + 2a^2b &\geq (3 + 4b)(a - 1) + (1 + 2b) \\ \Leftrightarrow (a^3 - 1) + (2a^2b - 2b) - (3 + 4b)(a - 1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)^2(a + 2b + 2) &\geq 0 \text{ (BDT cuối luôn đúng với điều kiện ban đầu)}. \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$\begin{aligned} b^3 + 2b^2c &\geq (3 + 4c)(b - 1) + (1 + 2c), \\ c^3 + 2c^2a &\geq (3 + 4a)(c - 1) + (1 + 2a). \end{aligned}$$

Cộng vế với vế được $S \geq 4(ab + bc + ca) + a + b + c - 6 \geq 15 - 6 = 9$.

Với $a = b = c = 1$ thì $S = 9$.

Vậy $\min S = 9$ tại $a = b = c = 1$.

Câu 2.8. Phân tích. Từ điều kiện đề bài nhẩm ra $a = b = c = 1$. Đặt $f(a) = 2a^3 - 3a^2b$ suy ra $f'(1) = 6 - 6b$, $f(1) = 2 - 3b$.

Ta có sẽ chứng minh

$$\begin{aligned} 2a^3 - 3a^2b &\geq (6 - 6b)(a - 1) + 2 - 3b \\ \Leftrightarrow (a - 1)^2(2a - 3b + 4) &\geq 0 \text{ (BDT cuối luôn đúng bởi điều kiện xác định)}. \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$\begin{aligned} 2b^3 - 3b^2c &\geq (6 - 6c)(b - 1) + 2 - 3c, \\ 2c^3 - 3c^2a &\geq (6 - 6a)(c - 1) + 2 - 3a. \end{aligned}$$

Cộng vế với vế ta được $S \geq 9(a + b + c) - 6(ab + bc + ac) - 12 \geq 3 \cdot 3 - 12 = -3$.

Với $a = b = c = 1$ thì $S = -3$.

Vậy $\min S = -3$ tại $a = b = c = 1$.

Câu 2.9. Phân tích. Đặt $f(a) = 5a^3 + 2a^2b$, tính được $f'(1) = 15 + 4b$, $f(1) = 5 + 2b$.
Ta có

$$\begin{aligned} 5a^3 + 2a^2b &\geq (15 + 4b)(a - 1) + 5 + 2b \\ \Leftrightarrow 5(a - 1)(a^2 + a + 1) + 2b(a - 1)(a + 1) - (15 + 4b)(a - 1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)[5a^2 + 5a - 10 + 2b(a - 1)] &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)^2(5a + 2b + 10) &\geq 0 \text{ (BDT cuối luôn đúng vì điều kiện xác định).} \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự rồi cộng về với về được $S \geq 13(a + b + c) + 4(ab + bc + ca) - 30$.

Lại có $a + b + c \geq \sqrt{3(ab + bc + ca)} = 3$.

Suy ra $S \geq 13 \cdot 3 + 4 \cdot 3 - 30 = 21$.

Với $a = b = c = 1$ thì $S = 21$.

Vậy $\min S = 21$ tại $a = b = c = 1$.

Câu 2.10. Phân tích. Đặt $f(a) = \frac{1}{a^2} - \frac{b}{a}$, tính được $f'(1) = -2 + b$, $f(1) = 1 - b$.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} - \frac{b}{a} &\geq (-2 + b)(a - 1) + 1 - b \\ \Leftrightarrow (1 - a) \left(\frac{1 + a}{a^2} \right) + b \left(\frac{a - 1}{a} \right) + (-2 + b)(1 - a) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (1 - a) \left(\frac{1 + a}{a^2} - 2 + b - \frac{b}{a} \right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (1 - a)^2 \left(\frac{2a + 1}{a^2} - \frac{b}{a} \right) &\geq 0 \text{ (BDT cuối luôn đúng vì điều kiện xác định).} \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự rồi cộng về với về được $T \geq -4(a + b + c) + ab + bc + ca + 9 = 0$.

Với $a = b = c = 1$ thì $T = 0$.

Vậy $\min T = 0$ tại $a = b = c = 1$.

Câu 2.11. Phân tích. Đặt $f(a) = a^5 + 3a^4b$, tính được $f'(1) = 5 + 12b$, $f(1) = 1 + 3b$.

Ta có

$$\begin{aligned} a^5 + 3a^4b &\geq (5 + 12b)(a - 1) + 1 + 3b \\ \Leftrightarrow (a - 1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) + 3b(a - 1)(a^3 + a^2 + a + 1) - (5 + 12b)(a - 1) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)[3b(a^3 + a^2 + a - 3) + a^4 + a^3 + a^2 + a - 4] &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)^2[3b(a^2 + 2a + 3) + a^3 + 2a^2 + 3a + 4] &\geq 0 \text{ (BDT cuối luôn đúng vì điều kiện xác định).} \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự rồi cộng về với về được $A \geq 12(ab + bc + ca) - 4(a + b + c) - 12 \geq 24 - 12 = 12$.

Với $a = b = c = 1$ thì $A = 12$.

Vậy $\min A = 12$ tại $a = b = c = 1$.

Câu 2.12. Phân tích. Đặt $f(a) = a^2 + b\sqrt{3a + 1}$, tính được $f'(1) = 2 + \frac{3}{4}b$, $f(1) = 1 + 2b$.

Ghép vào công thức.

Ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b\sqrt{3a + 1} &\geq \left(2 + \frac{3}{4}b \right) (a - 1) + 1 + 2b \\ \Leftrightarrow (a - 1) \left(a + 1 + \frac{3b}{\sqrt{3a + 1} + 2} - 2 - \frac{3}{4}b \right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)^2 \left[1 - \frac{9b}{4(\sqrt{3a + 1} + 2)^2} \right] &\geq 0 \text{ (BDT cuối luôn đúng vì điều kiện xác định).} \end{aligned}$$

Chúng minh tương tự rồi cộng vế với vế được $B \geq \frac{3}{4}(ab + bc + ca) + \frac{13}{4}(a + b + c) - 3 \geq 9$.

Với $a = b = c = 1$ thì $B = 9$.

Vậy $\min B = 9$ tại $a = b = c = 1$.

Câu 2.13. Xét hàm số $f(x) = \tan x$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, có $f'(x) = 1 + \tan^2 x$, suy ra $f''(x) = 2 \tan x(1 + \tan^2 x) > 0$, $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Áp dụng BĐT tiếp tuyến với $\triangle MNP$ nhọn, ta có :

$$f(A) \geq f'(M)(A - M) + f(M) = \frac{1}{\cos^2 M}(A - M) + \tan M,$$

suy ra

$$\cos^2 M \cdot f(A) \geq \frac{1}{2} \sin 2M + A - M.$$

Tương tự :

$$\cos^2 N \cdot f(B) \geq \frac{1}{2} \sin 2N + B - N; \quad \cos^2 P \cdot f(C) \geq \frac{1}{2} \sin 2P + C - P.$$

Suy ra

$$\cos^2 M \cdot f(A) + \cos^2 N \cdot f(B) + \cos^2 P \cdot f(C) \geq \frac{\sin 2M + \sin 2N + \sin 2P}{2}.$$

Ta chọn các góc M, N, P sao cho

$$\cos M = k > 0; \quad \cos N = \sqrt{2}k; \quad \cos P = \sqrt{3}k.$$

Vì M, N, P là ba góc của tam giác nên ta có đẳng thức :

$$\cos^2 M + \cos^2 N + \cos^2 P + 2 \cos M \cdot \cos N \cdot \cos P = 1,$$

nên ta có $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})k + 2\sqrt{6}k^3 = 1$, do đó k là nghiệm dương của phương trình :

$$2\sqrt{6}x^3 + (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})x - 1 = 0. \quad (1)$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \sin 2M &= 2\sqrt{1 - \cos^2 M} \cdot \cos M = 2k\sqrt{1 - k^2}; \\ \sin 2N &= 2k\sqrt{2(1 - 2k^2)}; \quad \sin 2P = 2k\sqrt{3(1 - 3k^2)}. \end{aligned}$$

Dẫn tới

$$F \geq \frac{\sin 2M + \sin 2N + \sin 2P}{2k^2} = \frac{\sqrt{1 - k^2} + \sqrt{2(1 - 2k^2)} + \sqrt{3(1 - 3k^2)}}{k}.$$

Vậy $\min F = \frac{\sqrt{1 - k^2} + \sqrt{2(1 - 2k^2)} + \sqrt{3(1 - 3k^2)}}{k}$ đạt được khi $A = M; B = N; C = P$ với M, N, P là ba góc của tam giác nhọn được xác định bởi

$$\cos M = k > 0; \quad \cos N = \sqrt{2}k; \quad \cos P = \sqrt{3}k,$$

trong đó k là nghiệm dương duy nhất của (1).

Câu 2.14. Ta có các hàm số $f(t) = t^3$; $g(t) = \sqrt{1+t^2}$; $h(t) = \sqrt[4]{1+t^4}$, $t \in (0; 1)$ là những hàm số có đạo hàm cấp hai dương trên khoảng $(0; 1)$. Nên với $a, b, c > 0$ thỏa $a + b + c = 1$ áp dụng BDT tiếp tuyến, ta có:

$$f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a), h(y) \geq h'(b)(y - b) + h(b), g(z) \geq g'(c)(z - c) + g(c).$$

Ta chọn a, b, c sao cho

$$f'(a) = g'(b) = h'(c) = k \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 = k \\ \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} = k \\ \frac{c^3}{\sqrt[4]{(1+c^4)^3}} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{\frac{k}{3}} \\ b = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \\ c = \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt[4]{1-k\sqrt[3]{k}}} \end{cases} \quad (1)$$

Do $a + b + c = 1$ nên ta có

$$\sqrt{\frac{k}{3}} + \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} + \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt[4]{1-k\sqrt[3]{k}}} = 1. \quad (2)$$

Dễ thấy phương trình (2) luôn có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$. Suy ra

$$P = f(x) + g(y) + h(z) \geq f(a) + h(b) + g(c) = \frac{k\sqrt{3k}}{9} + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1-k\sqrt[3]{k}}}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = a; y = b; z = c$.

Vậy $\min P = \frac{k\sqrt{3k}}{9} + \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1-k\sqrt[3]{k}}}$ với k là nghiệm nằm trong $(0; 1)$ của (2).

Chương 3

Một số chuyên đề

§1. Ứng dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc ba

Câu 1.1. Đặt $n = ab + bc + ca$, $p = -abc$ Suy ra a, b, c là ba nghiệm của phương trình : $x^3 - mx + n = 0$ (4) Ta có:

$$p^2 \leq -\frac{4}{27}n^3 \Rightarrow n^3 \leq -\frac{27}{4}p^2.$$

Do đó:

$$13p^2 + 2p - 2 + 2n^3 \leq 13p^2 + 2p - 2 - \frac{27}{2}p^2 = -\left(\frac{1}{2}p - 1\right)^2 \leq 0.$$

Suy ra:

$$13p^2 + 2p - 2 \leq -2n^3 \Leftrightarrow 13a^2b^2c^2 - 2ab - 2 \leq -2(ab + bc + ca)^3.$$

Mà:

$$(a + b + c)^2 = 0 \Rightarrow ab + bc + ca = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2),$$

dẫn tới:

$$13a^2b^2c^2 - 2abc - 2 \leq \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)^3 \Rightarrow P \leq \frac{1}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a, b, c$ là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -2.$$

Vậy $\max P = \frac{1}{4}$ đạt được khi $(a, b, c) = (1, 1, -2)$ và các hoán vị.

Câu 1.2. Đặt $n = ab + bc + ca$, $p = -abc$ Ta có:

$$p^2 \leq -\frac{4}{27}n^3 \Rightarrow -n^3 \geq \frac{27}{4}p^2 \Rightarrow |n^3| \geq \frac{27}{4}p^2.$$

Vì

$$a + b + c = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca) = -2n \Rightarrow n \leq 0.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} P &= -32n^5 - 32np^2 - 8|p| = 32[(-n)^5 + (-n)p^2] - 8|p| \\ &\geq 64|n^3||p| - 8|p| \geq 8(54|p|^3 - |p|). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = 54t^3 - t, t \geq 0$ ta có:

$$f'(t) = 162t^2 - 1, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{18}.$$

Lập bảng biến thiên ta có $\min_{t \geq 0} f(t) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{18}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{27}$.

Suy ra $P \geq -\frac{8\sqrt{2}}{27}$. Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} p = \frac{\sqrt{2}}{18} \\ n = -\frac{1}{\sqrt[3]{24}} \end{cases}$ hay a, b, c là nghiệm của phương trình

$$t^3 - \frac{1}{\sqrt[3]{24}}t + \frac{\sqrt{2}}{18} = 0 \Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{\sqrt[3]{6\sqrt{3}}}\right)^2 \left(t + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{9}}\right) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt[3]{6\sqrt{3}}}, t = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{9}}.$$

Vậy $\min P = -\frac{8\sqrt{2}}{27}$. Đạt được khi $a = b = \frac{1}{\sqrt[3]{6\sqrt{3}}}, c = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{9}}$ và các hoán vị.

Câu 1.3. Đặt $m = -(a + b + c), n = ab + bc + ca, p = -abc$. Từ giả thiết ta suy ra:

$$(a + b + c)^2 = 4(ab + bc + ca) \Leftrightarrow n = \frac{m^2}{4}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \left|27p - \frac{m^3}{4}\right| &\leq \frac{|m^3|}{4} \\ \Leftrightarrow |108p - m^3| &\leq |m^3| \\ \Leftrightarrow p(54p - m^3) &\leq 0 \Leftrightarrow pm^3 \geq 54p^2. \end{aligned}$$

Do đó:

$$P = pm^3 + \frac{1}{p^4} \geq 54p^2 + \frac{1}{p^4} = 27p^2 + 27p^2 + \frac{1}{p^4} \geq 3\sqrt[3]{27p^2 \cdot 27p^2 \cdot \frac{1}{p^4}} = 27 \text{ (đpcm)}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{m^2}{4} \\ 27p^2 = \frac{1}{p^4} \\ 54p = m^3 \end{cases}, \text{ chẳng hạn ta chọn } \begin{cases} p = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ m = \sqrt[3]{18\sqrt{3}} \\ n = \frac{\sqrt[3]{972}}{4} \end{cases} \text{ hay } a, b, c \text{ là nghiệm của}$$

phương trình:

$$t^3 + \sqrt[3]{18\sqrt{3}}t^2 + \frac{\sqrt[3]{972}}{4}t + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{\sqrt[3]{18\sqrt{3}}}{6}\right)^2 \left(t + \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}\right) = 0.$$

Vậy $\min P = 27$ đạt được khi $a = b = -\frac{\sqrt[3]{18\sqrt{3}}}{6}, c = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}}$ và các hoán vị.

Câu 1.4. Đặt $m = -(a + b + c), n = ab + bc + ca, p = -abc$. Từ giả thiết ta suy ra:

$$(a + b + c)^2 = 3(ab + bc + ca) + 4 \Rightarrow m^2 = 3n + 4.$$

Mặt khác :

$$|27p + 2m^3 - 9mn| \leq 2\sqrt{(m^2 - 3n)^3}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} |27p + 2m(3n + 4) - 9mn| &\leq 18 \\ \Leftrightarrow |27p - 3mn + 8m| &\leq 16 \\ \Rightarrow mn - 9p &\geq \frac{8m - 16}{3}. \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} P &= 18(ab + bc + ca)^2 + 48(ab + bc + ca) - (ab + bc + ca)(a + b + c) + 9abc \\ &= 2[3(ab + bc + ca) + 4]^2 - (ab + bc + ca)(a + b + c) + 9abc - 16 \\ &= 2(a + b + c)^2 - (ab + bc + ca)(a + b + c) + 9abc - 16 \\ &= 2m^4 + mn - 9p - 16 \geq 2m^4 + \frac{8m - 16}{3} - 16 = \frac{1}{3}(6m^4 + 8m - 64). \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(m) = 6m^4 + 8m - 64$, ta có:

$$f'(m) = 24m^3 + 8 \Rightarrow f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

Suy ra

$$f(m) \geq f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) = -\frac{6}{\sqrt[3]{3}} - 64.$$

$$\text{Nên } P \geq -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}} + 64\right).$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} m = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}} - 4\right) \\ p = \frac{1}{9}\left(\frac{4}{\sqrt[3]{3}} + \frac{47}{9}\right) \end{cases}, \text{ suy ra } a, b, c \text{ là nghiệm của phương trình}$$

$$: t^3 - \frac{1}{\sqrt[3]{3}}t^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}} - 4\right)t + \frac{1}{9}\left(\frac{4}{\sqrt[3]{3}} + \frac{47}{9}\right) = 0.$$

$$\text{Vậy } \min P = -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}} + 64\right).$$

Câu 1.5. Chuẩn hoá $abc = 2 \Rightarrow a + b + c = 4$. Đặt $n = ab + bc + ca$, suy ra

$$\begin{aligned} |18n - 91| &\leq \sqrt{(16 - 3n)^3} \\ \Leftrightarrow 3n^3 - 12n^2 - 108n + 465 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (n - 5)(3n^2 + 3n - 93) &\leq 0 \Leftrightarrow 5 \leq n \leq \frac{-1 + 5\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\ &= (16 - 2n)^2 - 2(n^2 - 16) = 2n^2 - 64n + 288. \end{aligned}$$

Nên

$$P = \frac{1}{256}(a^4 + b^4 + c^4) = \frac{1}{128}(n^2 - 32n + 144)$$

Vì hàm $f(n) = n^2 - 32n + 144$ nghịch biến trên $\left[5; \frac{5\sqrt{5} - 1}{2}\right]$ nên ta suy ra

$$\max P = \frac{1}{128}f(5) = \frac{9}{128} \text{ và } \min P = \frac{1}{128}f\left(\frac{5\sqrt{5} - 1}{2}\right) = \frac{383 - 165\sqrt{5}}{2}.$$

§2. Bài toán tìm hằng số tốt nhất

Câu 2.1. Vì bất đẳng thức đúng với mọi giá trị a, b, c nên phải đúng với $a = b = c = 1 \Rightarrow k \leq \frac{2}{3}$.

Ta chứng minh $k = \frac{2}{3}$ là giá trị lớn nhất.

Xét $k = \frac{2}{3}$ bất đẳng thức trở thành

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq \frac{2}{3}(ab + bc + ca)^2,$$

hay

$$3(a^4 + b^4 + c^4) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + abc(a + b + c). \quad (1)$$

Áp dụng bất AM – GM ta có

$$(a^4 + b^4) + (b^4 + c^4) + (c^4 + a^4) \geq 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2.$$

Suy ra

$$3(a^4 + b^4 + c^4) \geq 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2). \quad (2)$$

Mặt khác

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - abc(a + b + c) = \frac{1}{2}(ab - bc)^2 + \frac{1}{2}(bc - ca)^2 + \frac{1}{2}(ca - ab)^2 \geq 0. \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra (1) được chứng minh.

Vậy số k lớn nhất $k = \frac{2}{3}$.

Câu 2.2. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a = \min\{a; b; c\}$. Chọn $b = c$. Từ điều kiện, ta có $a + 2b = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq b \leq \frac{1}{2}$.

Bất đẳng thức trở thành:

$$\begin{aligned} & \frac{a}{1 + 9b^2} + \frac{2b}{1 + 9ab + k(a - b)^2} \geq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{1 - 2b}{1 + 9b^2} - \frac{1}{6} \right) + \left[\frac{2b}{1 + 9b(1 - 2b) + k(1 - 3b)^2} - \frac{1}{3} \right] \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(3b + 5)(1 - 3b)}{6(1 + 9b^2)} + \frac{(3b - 1)(6b + 1) - k(3b - 1)^2}{3[9b - 18b^2 + 1 + k(1 - 3b)^2]} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{6b + 1 - k(3b - 1)}{9b - 18b^2 + 1 + k(1 - 3b)^2} \geq \frac{3b + 5}{6(1 + 9b^2)} \\ \Leftrightarrow & \frac{54b^3 + 27b^2 + 12b - 1}{9b^2 + 4b - 1} \geq k \\ \Leftrightarrow & \frac{18b^2 + 15b + 1}{9b^2 + 4b - 1} \geq k \\ \Leftrightarrow & \frac{7b + 3}{9b^2 + 4b - 1} \geq k - 2. \end{aligned}$$

Ta xét hàm số $f(b) = \frac{7b + 3}{9b^2 + 4b - 1}$ trên $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$.

Ta dễ dàng thấy được f nghịch biến trên đoạn $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$ nên suy ra $f(b) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

Do đó $k - 2 \leq 2 \Leftrightarrow k \leq 4$.

Ta chứng minh $k = 4$ là giá trị lớn nhất cần tìm. Tức là ta cần chứng minh:

$$\frac{a}{1 + 9bc + 4(b - c)^2} + \frac{b}{1 + 9ca + 4(c - a)^2} + \frac{c}{1 + 9ab + 4(a - b)^2} \geq \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Áp dụng Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có:

$$\begin{aligned} VT &\geq \frac{(a + b + c)^2}{(a + b + c) + 27abc + 4a(b - c)^2 + 4b(c - a)^2 + 4c(a - b)^2} \\ &= \frac{1}{1 + 3abc + 4ab(a + b) + 4bc(b + c) + 4ca(c + a)}. \end{aligned}$$

Do đó để chứng minh (1) ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} 1 &\geq 3abc + 4ab(a + b) + 4bc(b + c) + 4ca(c + a) \\ &\Leftrightarrow (a + b + c)^3 \geq 3abc + 4ab(a + b) + 4bc(b + c) + 4ca(c + a) \\ &\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) \end{aligned}$$

(điều này đúng, do đây là bất đẳng thức Schur).

Do đó (1) đúng với mọi a, b, c không âm và thỏa $a + b + c = 1$ và với $k_{\max} = 4$.

Vậy $k = 4$ là số cần tìm.

Câu 2.3. Thử chọn $b = c$ rồi xét hàm theo biến $\frac{a}{b}$, ta không dẫn đến kết quả cần tìm. Như vậy ta sẽ thử chọn một biến bằng 0, ở đây là một biến tiến dần đến 0.

Trong bất đẳng thức, ta cho $c \rightarrow 0$, khi đó $a^3 + b^3 \geq Mab^2$. Nhưng lại theo bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$a^3 + b^3 = a^3 + \frac{b^3}{2} + \frac{b^3}{2} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \cdot ab^2.$$

Như vậy ta thấy $M \leq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$. Do đó ta chứng minh $M = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ là giá trị lớn nhất cần tìm như sau:

Không giảm tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$. Đặt $a = u + c$, $b = v + c$ với $u, v \geq 0$.

Ta chứng minh:

$$\begin{aligned} &(u + c)^3 + (v + c)^3 + c^3 - 3c(u + c)(v + c) \\ &\geq M[(u + c)(v + c)^2 + (v + c)c^2 + c(u + c)^2 - 3c(u + c)(v + c)] \\ &\Leftrightarrow (3 - M)(u^2 - uv + v^2) + u^3 + v^3 - Muv^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng vì, $3 - M > 0$, $u^2 - uv + v^2 \geq uv \geq 0$ và

$$u^3 + v^3 = u^3 + \frac{v^3}{2} + \frac{v^3}{2} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}uv^2 = Muv^2.$$

Từ đó ta hoàn tất phần chứng minh.

Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là: $M = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Câu 2.4. Vì tính thuần nhất của bất đẳng thức nên ta chuẩn hóa $xyz = 1$. Từ đó ta biến đổi:

$x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$, $z = \frac{c}{a}$. Khi đó bất đẳng thức trở thành:

$$\begin{aligned} &\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} + 3k \geq (k + 1) \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \\ &\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3k \cdot abc \geq (k + 1)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \\ &\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq (k + 1)(ab^2 + bc^2 + ca^2 - 3abc). \end{aligned}$$

Đây là bất đẳng thức ở bài trên.

$$\text{Vậy } k + 1 = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \Leftrightarrow k = -1 + \frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

Câu 2.5. Ta chọn $b = c$ thì giả thiết trở thành:

$$a + 2b = b^2 + 2ab \Rightarrow a = \frac{2b - b^2}{2b - 1}.$$

Vì $a > 0$ nên

$$\frac{2b - b^2}{2b - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < b \leq 2.$$

Bất đẳng thức trở thành:

$$\begin{aligned} (a + 2b) \left(\frac{1}{2b} + \frac{2}{a + b} \right) &\geq k(a + 2b + 1) \\ \Rightarrow \left(\frac{2b - b^2}{2b - 1} + 2b \right) \left(\frac{1}{2b} + \frac{2}{\frac{2b - b^2}{2b - 1} + b} \right) &\geq k \left(\frac{2b - b^2}{2b - 1} + 2b + 1 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{3b^2 - b}{3b^3 + 5b^2 + b - 1} &\geq \frac{2k}{9}. \end{aligned}$$

$$\text{Xét hàm số } f(b) = \frac{3b^2 - b}{3b^3 + 5b^2 + b - 1} \text{ trên } \left[\frac{1}{2}; 2 \right].$$

Ta có

$$f'(b) = 0 \Leftrightarrow \frac{-(b^2 - 1)(3b - 1)^2}{(3b^3 + 5b^2 + b - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow b = 1.$$

Bằng cách lập bảng biến thiên ta tìm được $\min_{\left[\frac{1}{2}; 2 \right]} f(b) = \frac{2}{9}$ khi $b = 2$. Từ đó tìm được $k \leq 1$.

Ta chứng minh $k = 1$ là giá trị lớn nhất cần tìm. Thực vậy ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} (a + b + c) \left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \right) &\geq a + b + c + 1 \\ \Leftrightarrow (ab + bc + ca) \left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} \right) &\geq a + b + c + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{ab}{a + b} + \frac{bc}{b + c} + \frac{ca}{c + a} &\geq 1. \end{aligned}$$

Nhận thấy rằng dấu “=” đạt được tại một biến bằng 0 và hai biến bằng 2 nên nếu đánh giá bằng những bất đẳng thức thông thường có dấu “=” tại tâm sẽ không dẫn đến kết quả. Để đảm bảo dấu “=” ta sẽ loại bỏ dấu “=” tại biên này bằng cách sử dụng $abc \geq 0$ như sau:

Theo Cauchy - Schwarz:

$$\begin{aligned} \frac{ab}{a + b} + \frac{bc}{b + c} + \frac{ca}{c + a} &\geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)} \\ &= \frac{(ab + bc + ca)^2}{(a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc} \\ &\geq \frac{(ab + bc + ca)^2}{(a + b + c)(ab + bc + ca)} = 1. \end{aligned}$$

Chứng minh hoàn thành. Ta kết luận số k lớn nhất cần tìm là $k = 1$.

Câu 2.6. Cho $b = c$, ta có bất đẳng thức trở thành:

$$\begin{aligned} (a + 2b) \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} \right) - 9 &\geq k \left(1 - \frac{2ab + b^2}{a^2 + 2b^2} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{2(a - b)^2}{ab} &\geq k \cdot \frac{(a - b)^2}{a^2 + 2b^2} \\ \Leftrightarrow \frac{a^2 + 2b^2}{ab} &\geq \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$\frac{a^2 + 2b^2}{ab} \geq 2\sqrt{2}.$$

Suy ra $k \leq 4\sqrt{2}$.

Ta chứng minh đây là giá trị k lớn nhất cần tìm. Sử dụng bất đẳng thức Schur – SOS như sau:

$$\begin{aligned} (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 9 &\geq 4\sqrt{2} \left(1 - \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{(a + b + c)(ab + bc + ca) - 9abc}{abc} &\geq 4\sqrt{2} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}{a^2 + b^2 + c^2} \\ \Leftrightarrow \frac{2c(a - b)^2 + (a + b)(a - c)(b - c)}{abc} &\geq 4\sqrt{2} \cdot \frac{(a - b)^2 + (a - c)(b - c)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ \Leftrightarrow M \cdot (a - b)^2 + N \cdot (a - c)(b - c) &\geq 0. \end{aligned}$$

Trong đó: $M = \frac{2c}{abc} - \frac{4\sqrt{2}}{a^2 + b^2 + c^2}$, $N = \frac{a + b}{abc} - \frac{4\sqrt{2}}{a^2 + b^2 + c^2}$.

Giả sử $c = \max\{a, b, c\}$ thì mọi việc hoàn tất nếu chỉ ra $N \geq 0$, hay

$$(a + b)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\sqrt{2}abc.$$

Do tính thuần nhất nên ta chuẩn hóa $a + b + c = 1$. Ta đi chứng minh kết quả mạnh hơn sau:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq c(a + b)\sqrt{2} \Leftrightarrow 1 - 2c(a + b) \geq c(a + b)\sqrt{2} + 2ab.$$

Và mạnh hơn nữa:

$$\begin{aligned} 1 - 2 \cdot c(a + b) &\geq \sqrt{2} \cdot c(a + b) + \frac{(a + b)^2}{2} \\ \Leftrightarrow 1 - 2 \cdot t(1 - t) &\geq \sqrt{2} \cdot t(1 - t) + \frac{t^2}{2}, \text{ với } t = a + b \\ \Leftrightarrow \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2}t^2 - (2 + \sqrt{2})t + 1 &\geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{(-2 + \sqrt{2})t}{2} - 1 \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Điều này đúng. Như vậy chứng minh hoàn tất.

Vậy số k lớn nhất thỏa đề bài là $k = 4\sqrt{2}$.

Câu 2.7. Ta chọn $a = b = t$, $c = 3 - 2t$. Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned} k[2t^4 + (3 - 2t)^4 - 3] &\geq 2t^3 + (3 - 2t)^3 + 3t^2(3 - 2t) - 6 \\ \Leftrightarrow k &\geq \frac{-12t^3 + 45t^2 - 54t + 21}{18t^4 - 96t^3 + 216t^2 - 216t + 78} \\ &= \frac{3(t - 1)^2(7 - 4t)}{(t - 1)^2(18t^2 - 60t + 78)} \\ &= \frac{7 - 4t}{2(3t^2 - 10t + 13)} = f(t). \end{aligned}$$

Ta có:

$$f'(t) = \frac{12(2t^2 - 7t + 3)}{4(3t^2 - 10t + 13)^2} = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{3; \frac{1}{2}\right\}.$$

Khoảng giá trị của t là $(0; 3)$, từ đó ta thấy $\min_{(0;3)} f(t) = \frac{2}{7}$ khi $t = \frac{1}{2}$.

Vậy trở lại bài toán, ta cho $a = b = \frac{1}{2}$, $c = 2$ thì ta được $k \geq \frac{2}{7}$, ta chứng minh giá trị nhỏ nhất của k là $\frac{2}{7}$ bằng cách chứng minh:

$$\frac{2}{7}(a^4 + b^4 + c^4 - 3) \geq a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - 6.$$

Đặt $f(a, b, c) = VT - VP$. Ta chứng minh:

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &\geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{7}\left[a^4 + b^4 - \frac{(a+b)^4}{8}\right] - \left[a^3 + b^3 - \frac{(a+b)^3}{4}\right] - 3c\left[ab - \frac{(a+b)^2}{4}\right] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(a-b)^4 + 6(a-b)^2(a+b)^2}{28} - \frac{3(a+b)(a-b)^2}{4} + 3c \cdot \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{7a^2 + 7b^2 + 10ab}{28} - \frac{3}{4}(a+b) + \frac{3c}{4} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 7(a^2 + b^2) + 10ab - 21(a+b) + 21c \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 7(a^2 + b^2) + 10ab - 21(a+b) + 21(3-a-b) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 5(a+b)^2 + 2(a^2 + b^2) - 42(a+b) + 63 \geq 0. \end{aligned}$$

Do $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$ nên ta sẽ chứng minh:

$$6(a+b)^2 - 42(a+b) + 63 \geq 0.$$

Và điều này sẽ đúng nếu ta giả sử $c = \max\{a, b, c\}$ vì khi đó $a+b \leq 2$.

Vậy ta chỉ cần chỉ ra:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) &\geq 0 \Leftrightarrow f(t; t; 3-t) \geq 0, t = \frac{a+b}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{7}[2t^4 + (3-2t)^4 - 3] \geq 2t^3 + (3-2t)^3 + 3t^2(3-2t) - 6. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này đúng theo lập luận chặn t phía trên.

Vậy $k = \frac{2}{7}$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm.

Câu 2.8. Cho $b = c$ giả thiết đã cho viết thành:

$$a + 2b = b^2 + 2ab \Rightarrow a = \frac{b^2 - 2b}{1 - 2b} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq b \leq 2.$$

Lưu ý vì tìm số thực k lớn nhất nên xét $k > 0$.

Thay vào bất đẳng thức, ta được:

$$\begin{aligned} 2b + \frac{b^2 - 2b}{1 - 2b} + k \frac{b^2(b^2 - 2b)}{1 - 2b} &\geq k + 3 \\ \Leftrightarrow 2b(1 - 2b) + (b^2 - 2b) + kb^2(b^2 - 2b) &\geq k(1 - 2b) + 3(1 - 2b) \\ \Leftrightarrow 3(b-1)^2 \geq k(b^2 - 1)(b-1)^2 &\Leftrightarrow \frac{3}{k} \geq b^2 - 1. \end{aligned}$$

Mà $b^2 - 1 \leq 2^2 - 1 = 3$ suy ra $k \leq 1$. Ta chứng minh $k = 1$ là giá trị lớn nhất cần tìm.
Với giả thiết $a + b + c = ab + bc + ca$, ta chỉ cần chứng tỏ

$$ab + bc + ca + abc \geq 4.$$

Ta phản chứng $ab + bc + ca + abc = 4$ và đi chứng minh $a + b + c \geq ab + bc + ca$.
Đây là một kết quả quen thuộc của kì thi VMO 1996.

Câu 2.9. Trong bất đẳng thức ban đầu, ta cho $b = c$, ta được:

$$\begin{aligned} & \frac{a^3 + 2b^3}{2b(a+b)} + k \cdot \frac{b^2 + 2ab}{(a+2b)^2} \geq \frac{3}{8} + \frac{k}{3} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \left[\frac{a^3 + 2b^3}{b(a+b)^2} - \frac{1}{4} \right] \geq k \cdot \left[\frac{1}{3} - \frac{b^2 + 2ab}{(a+2b)^2} \right] \\ \Leftrightarrow & \frac{(a-b)^2(4a+5b)}{8b(a+b)^2} \geq k \cdot \frac{(a-b)^2}{3(a+2b)^2} \\ \Leftrightarrow & \frac{8k}{3} \leq \frac{(a+2b)^2(4a+5b)}{b(a+b)^2}. \end{aligned}$$

Do tính thuần nhất nên ta có thể chọn $b = 1$. Khi đó, ta có:

$$\frac{8k}{3} \leq \frac{(a+2)^2(4a+5)}{(a+1)^2}.$$

Ta xét hàm $f(a) = \frac{(a+2)^2(4a+5)}{(a+1)^2}$, $a > 0$. Ta có:

$$f'(a) = \frac{2(a+2)(2a^2+2a-1)}{(a+1)^3} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \text{ (do } a > 0 \text{)}.$$

Lập bảng biến thiên ta được $f(a) \geq f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) = 9+6\sqrt{3}$. Suy ra: $k \leq \frac{3(9+6\sqrt{3})}{8}$.

Ta chứng minh giá trị k lớn nhất cần tìm là $\frac{3(9+6\sqrt{3})}{8}$.

Ta sử dụng kĩ thuật Schur – SOS trong phần chứng minh. Bất đẳng thức cần chứng minh viết dưới dạng:

$$\frac{8(a^3+b^3+c^3-3abc) - 3((a+b)(b+c)(c+a) - 8abc)}{8(a+b)(b+c)(c+a)} \geq k \cdot \frac{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}{3(a+b+c)^2}.$$

Ta sử dụng các khai triển:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c) [(a-b)^2 + (a-c)(b-c)] \\ (a+b)(b+c)(c+a) - 8abc &= 2c(a-b)^2 + (a+b)(a-c)(b-c) \\ a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &= (a-b)^2 + (a-c)(b-c). \end{aligned}$$

Từ đó ta nhóm được điều cần chứng minh thành:

$$M(a-b)^2 + N(a-c)(b-c) \geq 0,$$

trong đó:

$$\begin{aligned} M &= \frac{8a+8b+2c}{8(a+b)(b+c)(c+a)} - \frac{k}{3(a+b+c)^2} \\ N &= \frac{5a+5b+8c}{8(a+b)(b+c)(c+a)} - \frac{k}{3(a+b+c)^2}. \end{aligned}$$

Bây giờ, không giảm tổng quát ta giả sử $c = \min \{a, b, c\}$ nên $a + b \geq 2c$.

Từ đó $8a + 8b + 2c \geq 5a + 5b + 8c$.

Từ đây ta thấy ngay $M \geq N$. Hơn nữa cũng có $(a - c)(b - c) \geq 0$.

Hơn nữa cũng có $(a - c)(b - c) \geq 0$.

Như vậy bất đẳng thức chứng minh hoàn tất nếu ta chỉ ra được $N \geq 0$. Tức là:

$$3(5a + 5b + 8c)(a + b + c)^2 \geq 8k(a + b)(b + c)(c + a).$$

Đổi biến $(a + b, b + c, c + a) \rightarrow (X, Y, Z)$. Khi đó cần chứng minh:

$$3(X + 4Y + 4Z)(X + Y + Z)^2 \geq 32k \cdot XYZ.$$

Ta chứng minh kết quả mạnh hơn là:

$$3(X + 4Y + 4Z)(X + Y + Z)^2 \geq 8k \cdot X(Y + Z)^2 = (27 + 18\sqrt{3})X(Y + Z)^2.$$

Vì tính thuần nhất nên ta có thể chuẩn hóa $X + Y + Z = 1$. Từ đó ta cần chứng minh:

$$3(4 - 3X) \geq (27 + 18\sqrt{3})X(1 - X)^2 \Leftrightarrow g(X) = \frac{4 - 3X}{X(1 - X)^2} \geq 9 + 6\sqrt{3},$$

trong đó $0 < X < 1$.

Khảo sát hàm g trên khoảng $(0; 1)$ ta được $g(X) \geq 9 + 6\sqrt{3}$.

Như vậy ta hoàn tất chứng minh.

Vậy k lớn nhất bằng $\frac{3(9 + 6\sqrt{3})}{8}$.

Câu 2.10. Cho $b = c$ ta được:

$$\left(\frac{a}{2b} + k\right) \left(\frac{b}{b+a} + k\right)^2 \geq \left(k + \frac{1}{2}\right)^3.$$

Cho $a \rightarrow 0$ ta được:

$$8k(k+1)^2 \geq (2k+1)^3 \Leftrightarrow 4k^2 + 2k \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} k \leq \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} \\ k \geq \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \end{cases}.$$

Ta chứng minh đây là toàn bộ giá trị k cần tìm. Đặt $x = \frac{2a}{b+c}$, $y = \frac{2b}{c+a}$, $z = \frac{2c}{a+b}$ thì

$$xy + yz + zx + xyz = 4.$$

Ta cần chứng minh:

$$\begin{aligned} (x + 2k)(y + 2k)(z + 2k) &\geq (2k + 1)^3 \\ \Leftrightarrow xyz + 2k(xy + yz + zx) + 4k^2(x + y + z) + 8k^3 &\geq (2k + 1)^3. \end{aligned}$$

Theo kết quả VMO 1996, ta được:

$$x + y + z \geq xy + yz + zx.$$

Từ đó:

$$\begin{aligned} &xyz + 2k(xy + yz + zx) + 4k^2(x + y + z) + 8k^3 \\ &\geq xyz + 2k(xy + yz + zx) + 4k^2(xy + yz + zx) + 8k^3 \\ &= (xy + yz + zx + xyz) + (4k^2 + 2k - 1)(xy + yz + zx) + 8k^3 \\ &= 8k^3 + 4 + (4k^2 + 2k - 1)(xy + yz + zx). \end{aligned}$$

Hơn nữa ta có:

$$xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} \Rightarrow xyz \leq \frac{\sqrt{(xy + yz + zx)^3}}{3\sqrt{3}}.$$

Từ đó:

$$4 = xy + yz + zx + xyz \leq xy + yz + zx + \frac{\sqrt{(xy + yz + zx)^3}}{3\sqrt{3}} = t^2 + \frac{t^3}{3\sqrt{3}},$$

với $t = \sqrt{xy + yz + zx}$. Suy ra: $t \geq \sqrt{3} \Rightarrow xy + yz + zx \geq 3$. Suy ra:

$$\begin{aligned} & xyz + 2k(xy + yz + zx) + 4k^2(x + y + z) + 8k^3 \\ & \geq 8k^3 + 4 + (4k^2 + 2k - 1)(xy + yz + zx) \\ & \geq 8k^3 + 4 + 3(4k^2 + 2k - 1) = (2k + 1)^3. \end{aligned}$$

Bài toán hoàn tất.

Câu 2.11. Trước hết ta đi tìm điều kiện cần cho k .

Thay $a = b = x$, $c = \frac{1}{x^2}$ với $x > 0$, $x \neq 1$, bất đẳng thức đã cho có thể viết lại thành

$$\begin{aligned} & x^2 + \frac{2}{x} + \frac{k}{2x + \frac{1}{x^2} + 1} \geq 3 + \frac{k}{4} \\ & \Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{x} - 3 \geq k \left(\frac{1}{4} - \frac{x^2}{2x^3 + x^2 + 1} \right) \\ & \Leftrightarrow \frac{(x - 1)^2(x + 2)}{x} \geq \frac{k(x - 1)^2(2x + 1)}{4(2x^3 + x^2 + 1)} \\ & \Leftrightarrow \frac{k}{4} \leq \frac{(x + 2)(2x^3 + x^2 + 1)}{x(2x + 1)} \\ & \Leftrightarrow \frac{k}{4} \leq x^2 + 2x + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x + 1}, \forall x > 0, x \neq 1. \end{aligned}$$

Bây giờ, ta sẽ cho $x = \frac{\sqrt{3} + 1}{4}$ và tính giá trị của biểu thức

$$f(x) = x^2 + 2x + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x + 1}$$

ở bên vế phải. Để ý rằng x là nghiệm của phương trình, do đó ta có $x^2 = \frac{4x + 1}{8}$, $\frac{1}{x} = 8x - 4$, $\frac{3}{2x + 1} = 4 - 4x$. Suy ra

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x + 1}{8} + 2x + 2(8x - 4) - (4 - 4x) \\ &= \frac{45}{2}x - \frac{95}{8} = \frac{45}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{4} - \frac{95}{8} = \frac{45\sqrt{3} - 50}{8}. \end{aligned}$$

Với kết quả này, ta thu được

$$k \leq \frac{45\sqrt{3} - 50}{2} = 45 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 25 \approx 45 \times 0.866 - 25 \approx 13.97.$$

Mặt khác, vì k là số nguyên nên từ đây có $k \leq 13$. Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $k = 13$ thỏa mãn yêu cầu bài toán, tức là

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{13}{a+b+c+1} \geq \frac{25}{4}.$$

Đặt

$$f(a, b, c) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{13}{a+b+c+1}.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a = \max\{a, b, c\}$, ta có

$$\begin{aligned} f(a, b, c) - f(a, \sqrt{bc}, \sqrt{bc}) &= \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{2}{\sqrt{bc}} \right) + 13 \left(\frac{1}{a+b+c+1} - \frac{1}{a+2\sqrt{bc}+1} \right) \\ &= (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \left[\frac{1}{bc} - \frac{13}{(a+b+c+1)(a+2\sqrt{bc}+1)} \right]. \end{aligned}$$

Do $a = \max\{a; b; c\}$ và giả thiết $abc = 1$ nên ta có $bc \leq 1$, suy ra $\frac{1}{bc} \geq 1$. Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức AM - GM, ta lại có

$$\frac{13}{(a+b+c+1)(a+2\sqrt{bc}+1)} \leq \frac{13}{(3\sqrt[3]{abc}+1)(3\sqrt[3]{abc}+1)} = \frac{13}{16} < 1.$$

Từ đây ta đưa bài toán về chứng minh

$$f\left(\frac{1}{x^2}, x, x\right) \geq \frac{25}{4}$$

với $x = \sqrt{bc}$, $0 < x \leq 1$.

Nếu $x = 1$ thì bất đẳng thức trên trở thành đẳng thức. Trong trường hợp $0 < x < 1$ bằng cách sử dụng lại biến đổi đã thực hiện trong quá trình tìm điều kiện cho k , ta thấy bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{(x+2)(2x^3+x^2+1)}{x(2x+1)} &\geq \frac{13}{4} \\ \Leftrightarrow 4(x+2)(2x^3+x^2+1) &\geq 13x(2x+1) \\ \Leftrightarrow 4(2x^4+5x^3+2x^2+x+2) &\geq 26x^2+13x \\ \Leftrightarrow 8x^4+20x^3-18x^2-9x+8 &\geq 0. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} 8x^4+20x^3-18x^2-9x+8 &= (8x^4-8x^2+2) + (20x^3-20x^2+5x) + (10x^2-14x+6) \\ &= 2(2x^2-1)^2 + 5x(2x-1)^2 + 2(5x^2-7x+3) > 0. \end{aligned}$$

Do $2(2x^2-1)^2 \geq 0$, $5 \cdot x(2x-1)^2 \geq 0$ và $5x^2-7x+3 > 0$ (tam thức bậc hai có hệ số cao nhất dương và biệt thức $\Delta = -11 < 0$).

Như vậy, bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng. Vậy $k = 13$ là giá trị cần tìm.

Câu 2.12. Cho $a = b = t > 0$, $c = \frac{1}{t^2}$ ta được

$$\begin{aligned} 2t^2 + \frac{1}{t^4} + 3k &\geq (k+1) \left(\frac{2}{t} + t^2 \right) \Leftrightarrow \frac{2t^6 + 1}{t^4} + 3k \geq (k+1) \cdot \frac{t^3 + 2}{t} \\ \Leftrightarrow k \left(3 - \frac{t^3 + 2}{t} \right) &\geq \frac{t^3 + 2}{t} - \frac{2t^6 + 1}{t^4} \Leftrightarrow k \left(\frac{3t - t^3 - 2}{t} \right) \geq \frac{-t^6 + 2t^3 - 1}{t^4} \\ \Leftrightarrow k(t-1)^2(t+2) &\leq \frac{(t^3 - 1)^2}{t^3} \\ \Leftrightarrow k(t+2) &\leq \frac{(t^2 + t + 1)^2}{t^3} \\ \Leftrightarrow k &\leq \frac{(t^2 + t + 1)^2}{t^4 + 2t^3} \Leftrightarrow k \leq \frac{\left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \right)^2}{1 + \frac{2}{t}}. \end{aligned}$$

Đặt $z = \frac{1}{t}$. Khi đó

$$k \leq \frac{(z^2 + z + 1)^2}{2z + 1}.$$

Khi $t \rightarrow +\infty$ thì $z \rightarrow 0$. Như vậy

$$k_{\max} = \min_{[0; +\infty)} f(z),$$

với $f(z) = \frac{(z^2 + z + 1)^2}{2z + 1}$, với $z \geq 0$. Ta có

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{2(z^2 + z + 1)(2z + 1)^2 - 2(z^2 + z + 1)}{(2z + 1)^2} \\ &= \frac{2(z^2 + z + 1)[(2z + 1)^2 - 1]}{(2z + 1)^2} \geq 0, \forall z \geq 0. \end{aligned}$$

Suy ra hàm số f đồng biến trên $[0; +\infty)$, do đó với $z \geq 0$ thì $f(z) \geq f(0) = 1$. Do đó $k \leq 1$. Từ đó $k_{\max} = 1$ nếu chỉ ra được

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + 3 &\geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 3 &\geq 2(ab + bc + ca) \quad (\text{do } abc = 1) \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 &\geq 2(ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Đây là một kết quả quen thuộc được chứng minh bằng nguyên lí Diricle (ta cũng có thể dùng dồn biến để chứng minh).

Dấu đẳng thức xảy ra khi $(a, b, c) = (1; 1; 1)$; $a = b \rightarrow +\infty$, $c \rightarrow 0$ và các hoán vị.

Câu 2.13. Thông thường trong những dạng toán này, đẳng thức đạt được ngoài giá trị tâm $(1; 1; 1)$ thì còn đạt được khi hai biến bằng nhau. Như vậy để chặn k , ta chọn $a = b = t$, $c = 3 - 2t$. Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{2}{t} + \frac{1}{3-2t} - 3 &\geq k(2t^2 + (3-2t)^2 - 3) \\ \Leftrightarrow \frac{6-4t+t-3(3t-2t^2)}{3t-2t^2} &\geq k(6t^2-12t+6) \\ \Leftrightarrow k &\leq \frac{6t^2-12t+6}{(3t-2t^2)(6t^2-12t+6)} \Leftrightarrow k \leq \frac{1}{t(3-2t)}. \end{aligned}$$

Như vậy giá trị $c = 3 - 2t$ lớn nhất cần tìm chính là giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(t) = \frac{1}{t(3-2t)}, t \in \left(0; \frac{3}{2}\right).$$

Theo bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$t(3-2t) = \frac{1}{2} \cdot 2t(3-2t) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{(2t+3-2t)^2}{4} = \frac{9}{8}.$$

Từ đó kết luận được $k_{\max} = \frac{8}{9}$ nếu chứng tỏ được

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 3 \geq \frac{9}{8} (a^2 + b^2 + c^2 - 3). \quad (1)$$

Đặt $f(a, b, c) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 3 - \frac{9}{8} (a^2 + b^2 + c^2 - 3)$. Xét hiệu

$$\begin{aligned} f(a, b, c) - f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 3 - \frac{9}{8} (a^2 + b^2 + c^2 - 3) - \\ &\quad - \frac{4}{a+b} - \frac{1}{c} + 3 + \frac{9}{8} \left(\frac{(a+b)^2}{2} + c^2 - 3 \right) \\ &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{4}{a+b} \right) - \frac{9}{8} \left(a^2 + b^2 - \frac{(a+b)^2}{2} \right) \\ &= \frac{(a+b)^2 - 4ab}{ab(a+b)} - \frac{9}{8} \cdot \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{2} \\ &= (a-b)^2 \left(\frac{1}{ab(a+b)} - \frac{9}{8} \right). \end{aligned}$$

Ta giả sử $c = \max\{a, b, c\}$. Khi đó $a + b \leq 2$, suy ra

$$ab(a+b) \leq \frac{(a+b)^3}{4} \leq \frac{8}{4} < \frac{9}{4}.$$

Như vậy

$$f(a, b, c) \geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right).$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \geq 0 \Leftrightarrow f(t, t, 3-2t) \geq 0, \text{ với } t = \frac{a+b}{2}.$$

Tức là chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{2}{t} + \frac{1}{3-2t} - 3 &\geq \frac{9}{8} (2t^2 + (3-2t)^2 - 3) \\ \Leftrightarrow \frac{8}{9} &\leq \frac{1}{t(3-2t)} \Leftrightarrow \frac{24t - 16t^2 - 9}{t(3-2t)} \leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{16t^2 - 24t + 9}{t(3-2t)} &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(4t-3)^2}{t(3-2t)} \geq 0 \text{ (đúng)}. \end{aligned}$$

Vậy (*) được chứng minh. Từ đó kết luận $k_{\max} = \frac{8}{9}$.

Câu 2.14. Kí hiệu (1) là bất đẳng thức đã nêu trong đề bài. Giả sử k là số thực sao cho bất đẳng thức (1) đúng với mọi bộ ba số thực a, b, c , mà $abc \geq 0$.

Trong (1) thay $a = 0, b = c = 2$, ta được $2 + 8k \geq 4$. Suy ra $k \geq \frac{1}{4}$.

Ta sẽ chứng minh $k = \frac{1}{4}$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm, tức chứng minh với mọi bộ ba số thực không âm a, b, c , ta luôn có

$$abc + \frac{1}{4} ((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) + 2 \geq a + b + c.$$

hay

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 4 \geq ab + bc + ca + 2(a + b + c). \quad (2)$$

Xét 3 số $(b-1)(c-1), (c-1)(a-1), (a-1)(b-1)$, ta có

$$a(b-1)(c-1) \cdot b(c-1)(a-1) \cdot c(a-1)(b-1) = abc(a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2 \geq 0.$$

Suy ra có ít nhất một số trong 3 số nêu trên không âm. Không mất tính tổng quát, giả sử $a(b-1)(c-1) \geq 0$. Khi đó, ta có $abc \geq a(b+c-1)$.

Do vậy, bất đẳng thức (2) sẽ được chứng minh, nếu ta chứng minh được

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2a(b+c-1) + 4 \geq ab + bc + ca + 2(a+b+c),$$

hay

$$a^2 - (4-b-c)a + b^2 + c^2 - bc - 2(b+c) + 4 \geq 0, \quad (3)$$

với mọi a, b, c , mà $abc \geq 0$.

Ta xem vế trái của (3) là một tam thức bậc hai theo ẩn a , ta có:

$$\Delta = (b+c-4)^2 - 4b^2 - 4c^2 + 4bc + 8(b+c) - 16 = -3b^2 - 3c^2 + 6bc = -3(b-c)^2 \leq 0,$$

với mọi b, c nên (3) đúng với mọi a, b, c , mà $abc \geq 0$.

Vậy $k = \frac{1}{4}$ là giá trị cần tìm, theo yêu cầu của đề bài.

Câu 2.15. Rõ ràng, các giá trị $x = y = z = 1$ thỏa mãn ràng buộc nêu trong đề bài. Vì thế, trong bất đẳng thức của đề bài, cho $x = y = z = 1$ ta được $k+1 \geq 2$. Suy ra $k \geq 1$.

Tiếp theo, ta chứng minh với $k = 1$, bất đẳng thức của đề bài là một bất đẳng thức đúng; tức ta sẽ chứng minh

$$\sqrt[3]{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)} \leq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^2 + 1, \quad (1)$$

với mọi số thực dương x, y, z mà $\min\{xy, yz, zx\} \geq 1$.

Thật vậy, trước hết, ta chứng minh nhận xét sau: **Nhận xét:** Với a, b là hai số thực dương thỏa mãn $ab \geq 1$, ta luôn có:

$$(a^2+1)(b^2+1) \leq \left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + 1 \right).$$

Chứng minh: Vì $ab \geq 1$ nên $\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - 1 \geq ab - 1 \geq 0$. Do đó

$$(a^2+1)(b^2+1) = (ab-1)^2 + (a+b)^2 \leq \left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - 1 \right)^2 + (a+b)^2 = \left(\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + 1 \right)^2.$$

Nhận xét được chứng minh.

Không mất tổng quát, giả sử $x \leq y \leq z$. Khi đó, từ ràng buộc của đề bài, suy ra $x \geq 1$.

Đặt $t = \frac{x+y+z}{3}$. Ta có

$$xt = \frac{x(x+y+z)}{3} = \frac{x^2 + xy + xz}{3} \geq \frac{1+1+1}{3} = 1.$$

Do đó, áp dụng nhận xét lần lượt cho cặp (x, t) và cặp (y, z) , ta được

$$(x^2 + 1)(t^2 + 1) \leq \left(\left(\frac{x+t}{2} \right)^2 + 1 \right)^2, \quad (2)$$

và

$$(y^2 + 1)(z^2 + 1) \leq \left(\left(\frac{y+z}{2} \right)^2 + 1 \right)^2. \quad (3)$$

Nhân (2) và (3), về theo về, ta được

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1)(t^2 + 1) \leq \left(\left(\frac{x+t}{2} \right)^2 + 1 \right)^2 \left(\left(\frac{y+z}{2} \right)^2 + 1 \right)^2. \quad (4)$$

Nhận thấy $\frac{x+t}{2} \cdot \frac{y+z}{2} \geq \sqrt{xt} \cdot \sqrt{yz} \geq 1$. Do đó, theo nhận xét, ta có

$$\left(\left(\frac{x+t}{2} \right)^2 + 1 \right)^2 \left(\left(\frac{y+z}{2} \right)^2 + 1 \right)^2 \leq \left(\left(\frac{x+y+z+t}{4} \right)^2 + 1 \right)^4. \quad (5)$$

Từ (4) và (5), suy ra

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1)(t^2 + 1) \leq (t^2 + 1)^4.$$

Do đó

$$\sqrt[3]{(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1)(t^2 + 1)} \leq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^2 + 1.$$

Suy ra (1) được chứng minh và vì thế, giá trị k nhỏ nhất cần tìm theo yêu cầu bài là $k = 1$.

Câu 2.16. Kí hiệu (1) là bất đẳng thức đã nêu trong đề bài. Giả sử k là số thực sao cho bất đẳng thức (1) đúng với mọi bộ ba số thực a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Trong (1) thay $b = c > 0$ ta được

$$\frac{a}{2b} + \frac{2b}{a+b} + k \cdot \frac{2ab+b^2}{a^2+2b^2} \leq \frac{3}{2} + k.$$

Cố định b và cho a tiến tới 0^+ ta được $2 + \frac{k}{2} \leq \frac{3}{2} + k$. Suy ra $k \geq 1$.

Ta sẽ chứng minh $k = 1$ là giá trị nhỏ nhất cần tìm, tức chứng minh với mọi bộ ba số thực a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, ta luôn có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{5}{2}. \quad (2)$$

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned}
 (2) &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{a}{b+c}\right) + \left(1 - \frac{b}{c+a}\right) + \left(1 - \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{1}{2} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \\
 &\Leftrightarrow \frac{b+c-a}{b+c} + \frac{c+a-b}{c+a} + \frac{a+b-c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} \\
 &\Leftrightarrow \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)(b+c-a)} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)(c+a-b)} + \frac{(a+b-c)^2}{(a+b)(a+b-c)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Do a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $b+c-a > 0, c+a-b > 0, a+b-c > 0$. Do đó tất cả các phân thức nằm ở vế trái của (3) đều có mẫu thức dương. Vì thế, kí hiệu VT là biểu thức nằm ở vế trái của (3), theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz dạng Engel, ta có:

$$VT \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Vì

$$(b+c-a) + (c+a-b) + (a+b-c) = a+b+c$$

và

$$(b+c-a)(b+c) + (c+a-b)(c+a) + (a+b-c)(a+b) = 2(a^2+b^2+c^2).$$

Nên (3) được chứng minh và vì thế (2) được chứng minh.

Vậy $k = 1$ là giá trị cần tìm, theo yêu cầu của đề bài.

Câu 2.17. Rõ ràng, các giá trị $x = y = z = \frac{1}{3}$ thỏa mãn ràng buộc nêu trong đề bài. Vì thế, trong bất đẳng thức của đề bài, cho $x = y = z = \frac{1}{3}$ ta được $\frac{9}{3k+2} \leq \frac{9k+3}{2}$, mà $k > 0$ nên suy ra $k \geq \frac{1}{3}$.

Tiếp theo, ta chứng minh với $k = \frac{1}{3}$, bất đẳng thức của đề bài là một bất đẳng thức đúng; tức ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{x+y+\frac{1}{3}} + \frac{1}{y+z+\frac{1}{3}} + \frac{1}{z+x+\frac{1}{3}} \leq 3, \quad (1)$$

với mọi số thực dương x, y, z mà $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$.

Thật vậy, đặt

$$T = (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 = x + y + z + 2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho hai bộ 3 số dương, ta có

$$\left(x + y + \frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + z\right) \geq \left(\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{z}\right)^2 = \frac{T}{3}$$

hay

$$\frac{1}{x+y+\frac{1}{3}} \leq \frac{3z+2}{T}.$$

Tương tự ta có:

$$\frac{1}{y+z+\frac{1}{3}} \leq \frac{3x+2}{T}; \quad \frac{1}{z+x+\frac{1}{3}} \leq \frac{3y+2}{T}.$$

Cộng 3 bất đẳng thức vừa nêu trên, vế với vế, với lưu ý $T = x + y + z + 2$, ta được

$$\frac{1}{x+y+\frac{1}{3}} + \frac{1}{y+z+\frac{1}{3}} + \frac{1}{z+x+\frac{1}{3}} \leq \frac{3z+2+3x+2+3y+2}{T} = 3.$$

(1) được chứng minh.

Vậy $k = \frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm, theo yêu cầu của đề bài.

Câu 2.18. Kí hiệu (1) là bất đẳng thức cần chứng minh.

Trong (1) cho $a = b = c = 1$, suy ra $k \leq 729$. Ta chứng minh (1) đúng với $k = 729$. Từ giả thiết ta có

$$3|abc| \geq |ab| + |bc| + |ca| \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \Rightarrow abc \geq 1.$$

Do đó

$$\begin{aligned} & [a^2 + 4(b^2 + c^2)] [b^2 + 4(a^2 + c^2)] [c^2 + 4(a^2 + b^2)] \\ & \geq (a^2 + 8|bc|) (b^2 + 8|ac|) (c^2 + 8|ab|) \\ & \geq 9^3 (abc)^2 \geq 729. \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho chín số a^2 và 8 số $|bc|$. Vậy $\max k = 729$.

Câu 2.19. Gọi (1) là bất đẳng thức cần tìm. Trong (1) cho $a_1 = 1; a_2 = \dots = a_n = -\frac{1}{n-1}$ ta được $c \leq \frac{n}{2}$.

Ta chứng minh BDT (1) đúng với $c = \frac{n}{2}$. Tức là cần chứng minh

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| \geq \frac{n}{2} \sum_{i=1}^n |a_i| \quad (2)$$

Ta có thể giả sử $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ khi đó tồn tại k với $(1 \leq k \leq n-1)$ sao cho $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq 0 \geq a_{k+1} \geq \dots \geq a_n$. Khi đó ta có $a_1 + a_2 + \dots + a_k = -(a_{k+1} + \dots + a_n)$ và

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - a_j| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j) = \sum_{i=1}^n (n+1-2i) a_i; \quad \sum_{i=1}^n |a_i| = 2 \sum_{i=1}^n a_i.$$

BDT (2) trở thành

$$\sum_{i=1}^n (n+1-2i) a_i \geq n \sum_{i=1}^k a_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k (n+1-2i) a_i + \sum_{i=k+1}^n (n+1-2i) a_i \geq n \sum_{i=1}^k a_i \quad (3)$$

Ta có $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k$ và $n+1-2.1 \geq \dots \geq n+1-2.k$.

Áp dụng bất đẳng thức Chebychev ta được

$$\sum_{i=1}^k (n+1-2i) a_i \geq \frac{1}{k} \left[\left(\sum_{i=1}^k (n+1-2i) \right) \left(\sum_{i=1}^k a_i \right) \right] = (n-k) \left(\sum_{i=1}^k a_i \right). \quad (4)$$

Tương tự thì $a_{k+1} \geq \dots \geq a_n$ và $n+1-2(k+1) \geq \dots \geq n+1-2.n$ nên

$$\sum_{i=k+1}^n (n+1-2i) a_i \geq \frac{1}{n-k} \left[\left(\sum_{i=k+1}^n (n+1-2i) \right) \left(\sum_{i=k+1}^n a_i \right) \right] = -k \left(\sum_{i=k+1}^n a_i \right) = k \left(\sum_{i=1}^k a_i \right).$$

Từ (4) và (5) suy ra BDT (3) đúng.

Vậy $\max c_n = \frac{n}{2}$.

Câu 2.20. Ta chứng minh $\max_{k=\overline{1,n}} a_k < 2$ và $\max_{k=\overline{1,n}} b_k < \frac{2}{n-1}$.

Thật vậy, đặt $L = \max_{k=\overline{1,n}} a_k$, từ (ii) suy ra $L^2 \leq 1 + L \Rightarrow L < 2$.

Đặt $b_m = \max_{k=\overline{1,n}} b_k$, từ (i) dễ thấy

$$b_k \geq \frac{(k-1)b_m + (m-k)b_1}{m-1}, \text{ nếu } 1 \leq k \leq m \text{ và}$$

$$b_k \geq \frac{(k-m)b_n + (n-k)b_m}{n-m}, \text{ nếu } m \leq k \leq n.$$

Suy ra $b_k > \frac{(k-1)b_m}{m-1}$ nếu $1 \leq k \leq m$ và $b_k \geq \frac{(n-k)b_m}{n-m}$ nếu $m \leq k \leq n$.

Do đó

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^m b_k + \sum_{k=m+1}^n b_k > \frac{1}{m-1} \left(\sum_{k=1}^m (k-1) \right) b_m \\ &+ \frac{1}{n-m} \left(\sum_{k=m+1}^n (n-k) \right) b_m = \frac{n-1}{2} \cdot b_m \Rightarrow b_m < \frac{2}{n-1}. \end{aligned}$$

Đặt $x_0 = 1$; $x_k = 1 + \sum_{i=1}^k a_i b_i$, $k = \overline{1,n}$ thì $x_k - x_{k-1} = a_k b_k$. Từ (ii) suy ra $a_k^2 \leq x_k \Rightarrow a_k \leq \sqrt{x_k}$.
Từ $\max_{k=\overline{1,n}} a_k < 2$ suy ra $x_k - x_{k-1} < 2b_k$. Do đó với mọi $k = \overline{1,n}$ thì

$$\begin{aligned} \sqrt{x_k} - \sqrt{x_{k-1}} &< b_k \cdot \frac{\sqrt{x_k}}{\sqrt{x_k} + \sqrt{x_{k-1}}} = b_k \left(\frac{1}{2} + \frac{x_k - x_{k-1}}{2(\sqrt{x_k} + \sqrt{x_{k-1}})^2} \right) \\ &< b_k \left(\frac{1}{2} + \frac{b_k}{4} \right) < b_k \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(n-1)} \right). \end{aligned}$$

Lấy tổng k từ 1 đến n ta được

$$a_n \leq \sqrt{x_n} < \sqrt{x_0} + \sum_{k=1}^n b_k \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(n-1)} \right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2(n-1)}.$$

Cho $n \rightarrow +\infty$ ta được $M = a_n \leq \frac{3}{2}$.

Cuối cùng chọn bộ $a_k = 1 + \frac{k}{2n}$; $b_k = \frac{1}{n}$ thỏa các điều kiện đề bài. Vậy $\max M = \frac{3}{2}$.