

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Họ, tên thí sinh: Số báo danh:

Câu 1 (6 điểm): Giải các phương trình, bất phương trình sau:

1) $\sqrt{3} \sin 2x - 3 + 6 \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$

2)
$$\frac{2 \sin^2 \left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{3} \cos^3 x (1 - 3 \tan^2 x)}{2 \sin x - 1} = -1$$

3) $\sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{x - 2} > 3$

Câu 2 (2 điểm): Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = \frac{3 \sin 2x - 2 \cos^2 x}{\sin 2x - 2 \cos 2x + 4}$

Câu 3 (4 điểm):

1) Tính tổng $S = \frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} + \dots + \frac{1}{A_{2020}^2}$.

2) Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 lập được bao nhiêu số có 4 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 11 đồng thời tổng của 4 chữ số của nó cũng chia hết cho 11.

Câu 4 (2 điểm): Trong mặt phẳng Oxy, cho hình bình hành ABCD, hình chiếu của điểm D lên AB, BC lần lượt là M(-2;2), N(2;-2). Biết rằng đường thẳng DB có phương trình là $3x - 5y + 1 = 0$ và hoành độ điểm B lớn hơn 0. Tìm tọa độ điểm B.

Câu 5 (4 điểm): Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình bình hành, M là trung điểm của SA và E là trung điểm của SB; P thuộc cạnh SC sao cho $SC = 3SP$.

1) Dựng giao điểm của DB với mặt phẳng (MPE).

2) Gọi N là một điểm thuộc cạnh SB, mặt phẳng (MNP) cắt SD tại Q.

Chứng minh $\frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SQ} = 5$

Câu 6 (2 điểm): Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn: $a + b + c = 3$

Chứng minh rằng $P = \frac{a}{ab+3c} + \frac{b}{bc+3a} + \frac{c}{ca+3b} \geq \frac{3}{4}$

----- Hết -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.
Họ tên, Chữ kí của cán bộ coi thi:

ĐÁP ÁP ĐỀ THI HSG MÔN TOÁN – KHỐI 11- LẦN1- NĂM HỌC 2020-2021

Câu	Đáp án	Điểm
1	1) Biến đổi thành $(2\sin x - 1)(\sqrt{3}\cos x + 3) = 0$	1
	giải ta được $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$; $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ ($\sqrt{3}\cos x + 3 = 0$ vô nghiệm)	1
	2) Điều kiện $\sin x \neq \frac{1}{2}$ và $\cos x \neq 0$ Biến đổi thành	
	$\sin(3x - \frac{\pi}{3}) = \sin x$	1
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}$	1
	Đổi chiều đk pt có nghiệm $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{\pi}{3} + k\pi$	
2	3) Đk $x \geq 2$ Bpt đưa về $(\sqrt{x^2 - x - 2} - 2) + (\sqrt{x - 2} - 1) > 0$	1
	$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{\sqrt{x^2 - x - 2} + 2} + \frac{x-3}{\sqrt{x-2} + 1} > 0$	1
	$\Leftrightarrow x > 3$	
	Từ gt ta có $(y-3)\sin 2x - (2y-1)\cos 2x = -1 - 4y$ Pt trên có nghiệm cho ta $-\frac{9+6\sqrt{5}}{11} \leq y \leq \frac{-9+6\sqrt{5}}{11}$	0,5
3	kết luận GTLN của y bằng $\frac{-9+6\sqrt{5}}{11}$	1,25
	GTNN của y bằng $\frac{-9-6\sqrt{5}}{11}$	0,25
3	1) Ta có $\frac{1}{A_k^2} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$	1
	Cho $k = 2, 3, \dots, 2020 \Rightarrow S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020} = \frac{2019}{2020}$	1
	2) Gọi số cần tìm là $\overline{abcd}$ $\Rightarrow (a+c) - (b+d) : 11$ $(a+c) + (b+d) : 11$ suy ra a+c và b+d đều chia hết cho 11	1
	Có $2+9=3+8=4+7=5+6$ nên có $4.2.3.2=48$ số	1

	Gọi I(x;y) là tâm hình bình hành ABCD, do IM=IN nên x=y cô I thuộc BD nên $3x-5y+1=0$ từ đó suy ra $x=y=0,5$ có $IB=ID=IM=\frac{\sqrt{34}}{2}$ do đó D,B thuộc đường tròn đường kính BD có pt là $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{17}{2}$ (1). Lại có tọa độ B,D thỏa mãn $3x-5y+1=0$ (2) Giải hệ (1),(2) với hoành độ điểm B lớn hơn 0 ta được B(3;2)	0,75 0,75 0,5
4		
5	1) Gọi O là tâm của đáy ,SO cắt MP tại I,IE cắt DB tại J là điểm cần dựng 2)Ta c/m bổ đề :cho tam giác SAB ,O là trung điểm của AB.Một đt cắt SA,SO ,SB tại M,N,P CMR $\frac{SA}{SM}+\frac{SB}{SP}=2\frac{SO}{SN}$ (1) CM : kẻ AH//MN ,BK//MN (H,K thuộc SO) ta có $\frac{SA}{SM}=\frac{SH}{SN},\frac{SB}{SP}=\frac{SK}{SN},OH=OK\Rightarrow$ (1) Áp dụng bổ đề trên ta được $\frac{SB}{SN}+\frac{SD}{SQ}=\frac{SA}{SM}+\frac{SC}{SP}=(\frac{2SO}{SI})=5$	2 1 1
6	1) (1điểm) ta có $P=\frac{a}{(a+c)(b+c)}+\frac{b}{(b+c)(b+a)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}$ $\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{a(a+c)}{8}+\frac{a(b+c)}{8}\geq\frac{3a}{4}$,tương tự và cộng lại ta được P $\geq\frac{9}{4}-\frac{(a+b+c)^2+ab+ac+bc}{8}$ $\geq\frac{9}{4}-\frac{(a+b+c)^2}{8}-\frac{1}{24}(a+b+c)^2=\frac{3}{4}$ (Do $ab+bc+ca\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}$) Dấu bằng khi a=b=c=1	1 1