

BÀI 31: ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA ĐẠO HÀM



LÝ THUYẾT.

1. MỘT SỐ BÀI TOÁN DẪN ĐẾN KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

2. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của $f(x)$ tại điểm x_0 , kí hiệu là $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$, tức là

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a; b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Tính $f(x) - f(x_0)$.

Bước 2. Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a; b), x \neq x_0$

Bước 3. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Chú ý: Trong định nghĩa và quy tắc trên đây, thay x_0 bởi x ta sẽ có định nghĩa và quy tắc tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x \in (a; b)$.

3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT KHOẢNG

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm thuộc $(a; b)$. Kí hiệu là: $y' = f'(x)$

Chú ý. Nếu phương trình chuyển động của vật là $s = f(t)$ thì $v(t) = f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t .

4. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

a) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đường thẳng đi qua P với hệ số góc $k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn, nghĩa là $k = f'(x_0)$. Điểm P gọi là tiếp điểm.

b) Phương trình tiếp tuyến

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $P(x_0; y_0)$ là: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ trong đó $y_0 = f(x_0)$.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: TÍNH ĐẠO HÀM TẠI MỘT ĐIỂM

1 PHƯƠNG PHÁP.

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a; b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Tính $f(x) - f(x_0)$.

Bước 2. Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a; b), x \neq x_0$

Bước 3. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

- $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- $f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- $f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0 \Leftrightarrow f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$
- Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm thì trước hết phải liên tục tại điểm đó.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Tính đạo hàm của hàm số sau:

$$y = f(x) = 2x^3 + x - 1 \text{ tại } x_0 = 0$$

Câu 2: Tính đạo hàm tại 1 điểm

a. $y = f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ tại $x_0 = -2$

b. $y = f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{2x - 1}$ tại $x_0 = 3$

Câu 3: Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ:

1. $f(x) = 2x^3 + 1$ tại $x = 2$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ tại $x = 1$

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$

Câu 4: Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 1$

DẠNG 2. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TRÊN 1 KHOẢNG

1 PHƯƠNG PHÁP.

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a; b)$ bất kì, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Tính $f(x) - f(x_0)$.

Bước 2. Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a; b), x \neq x_0$

Bước 3. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 5: Tính đạo hàm của hàm số sau:

a. $y = f(x) = x^2 - 3x + 1$ b. $y = f(x) = x^3 - 2x$ c. $y = f(x) = 4x + 3$

DẠNG 3. Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

1 PHƯƠNG PHÁP.

a. Ý nghĩa hình học

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M_0(x_0; f(x_0))$. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0; y_0)$ là $k = f'(x_0)$.

Phương trình tiếp tuyến của hàm số tại điểm M_0 có dạng:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

b. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

Phương trình quỹ đạo chuyển động của chất điểm: $s = f(t)$.

Vận tốc tức thời là đạo hàm của quãng đường $v = s' = f'(t)$.



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 6: Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 4$ có đồ thị (C)

- Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ thuộc (C) .
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ thuộc (C) .
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có tung độ $y_0 = -1$ thuộc (C) .
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng -4 .
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = 1 - 3x$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{3x}$ có đồ thị (C)

- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của (C) với trục Oy .
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của (C) với trục Ox .
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của (C) với đường thẳng $y = x + 1$.
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $k = -\frac{1}{3}$.
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $y = 3x - 4$.

Câu 8: Cho hàm số $y = x^3 - 2x + 1$

- Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của hàm số trên tại điểm có $x = 0$.
- Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số biết nó có $k = -2$.
- Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số trên, biết nó tạo với hai trục Oxy một tam giác vuông cân tại O.

Câu 9: Một chất điểm chuyển động thẳng biến đổi đều với phương trình $s = 2t^2 + t - 1$ (m)

- Tìm vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 2s$.
- Tìm vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian từ $t = 0$ tới $t = 2s$.

BÀI 31: ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA ĐẠO HÀM



LÝ THUYẾT.

1. MỘT SỐ BÀI TOÁN DẪN ĐẾN KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

2. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của $f(x)$ tại điểm x_0 , kí hiệu là $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$, tức là

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a; b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Tính $f(x) - f(x_0)$.

Bước 2. Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a; b), x \neq x_0$

Bước 3. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Chú ý: Trong định nghĩa và quy tắc trên đây, thay x_0 bởi x ta sẽ có định nghĩa và quy tắc tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x \in (a; b)$.

3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT KHOẢNG

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm thuộc $(a; b)$. Kí hiệu là: $y' = f'(x)$

Chú ý. Nếu phương trình chuyển động của vật là $s = f(t)$ thì $v(t) = f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t .

4. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

a) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đường thẳng đi qua P với hệ số góc $k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nếu giới hạn này tồn tại hữu hạn, nghĩa là $k = f'(x_0)$. Điểm P gọi là tiếp điểm.

b) Phương trình tiếp tuyến

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $P(x_0; y_0)$ là: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ trong đó $y_0 = f(x_0)$.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: TÍNH ĐẠO HÀM TẠI MỘT ĐIỂM

1 PHƯƠNG PHÁP.

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a; b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Tính $f(x) - f(x_0)$.

Bước 2. Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a; b), x \neq x_0$

Bước 3. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

- $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- $f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- $f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0 \Leftrightarrow f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$
- Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm thì trước hết phải liên tục tại điểm đó.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Tính đạo hàm của hàm số sau:

$$y = f(x) = 2x^3 + x - 1 \text{ tại } x_0 = 0$$

Lời giải

Tại $x_0 = 0$ ta có

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - f(0) = 2x^3 + x - 1 - (-1) = 2x^3 + x = x(2x^2 + 1)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x(2x^2 + 1)}{x} = 2x^2 + 1$$

$$\Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + 1) = 1$$

Câu 2: Tính đạo hàm tại 1 điểm

a. $y = f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ tại $x_0 = -2$

b. $y = f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{2x - 1}$ tại $x_0 = 3$

Lời giải

a. Tại $x_0 = -2$ ta có

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= f(x) - f(-2) = \frac{1}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{4 - 2 + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 - x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{-x^2 - x + 2}{x^2 + x + 1} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(x-1)(x+2)}{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(x-1)(x+2)}{x^2 + x + 1} \cdot \frac{1}{x + 2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(x-1)}{x^2 + x + 1}$$

$$\Rightarrow f'(-2) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow -2} \left[-\frac{1}{3} \cdot \frac{(x-1)}{x^2 + x + 1} \right] = -\frac{1}{3} \cdot \frac{(-2-1)}{(-2)^2 + (-2) + 1} = \frac{1}{3}$$

b. Tại $x_0 = 3$ ta có

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - f(3) = \frac{x^2 + x - 3}{2x - 1} - \frac{9}{5} = \frac{5x^2 - 13x - 6}{5(2x - 1)} = \frac{(x-3)(5x+2)}{5(2x-1)}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{(x-3)(5x+2)}{5(2x-1)} \cdot \frac{1}{x-3} = \frac{(5x+2)}{5(2x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(5x+2)}{5(2x-1)} = \frac{17}{25}$$

$$\Rightarrow f'(3) = \frac{17}{25}$$

Câu 3: Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ:

1. $f(x) = 2x^3 + 1$ tại $x = 2$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ tại $x = 1$

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases} \text{ tại } x = 0$$

Lời giải

$$1. \text{ Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 16}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} 2(x^2 + 2x + 4) = 24 \Rightarrow f'(2) = 24.$$

$$2. \text{ Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{x - 1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$3. \text{ Ta có } f(0) = 0, \text{ do đó: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } f'(0) = \frac{1}{2}.$$

Câu 4: Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 1$

Lời giải

Để hàm số có đạo hàm tại $x = 1$ thì trước hết $f(x)$ phải liên tục tại $x = 1$

$$\text{Hay } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 = f(1) = a.$$

$$\text{Khi đó, ta có: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2}{x - 1} = 1.$$

Vậy $a = 2$ là giá trị cần tìm.

ĐẠNG 2. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TRÊN 1 KHOẢNG



PHƯƠNG PHÁP.

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 \in (a; b)$ bất kì, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Tính $f(x) - f(x_0)$.

Bước 2. Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a; b), x \neq x_0$

Bước 3. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 5: Tính đạo hàm của hàm số sau:

a. $y = f(x) = x^2 - 3x + 1$

b. $y = f(x) = x^3 - 2x$

c. $y = f(x) = 4x + 3$

Lời giảia. Tại $x_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có:

$$f(x) - f(x_0) = x^2 - 3x - 1 - x_0^2 + 3x_0 - 1 = (x - x_0)(x + x_0 - 3)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0 - 3)}{x - x_0} = x + x_0 - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0 - 3) = 2x_0 - 3$$

$$\Rightarrow y' = 2x - 3$$

b. Tại $x_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có:

$$f(x) - f(x_0) = x^3 - 2x - x_0^3 + 2x_0 = (x - x_0)(x^2 + x.x_0 + x_0^2 - 2)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^2 + x.x_0 + x_0^2 - 2)}{x - x_0} = (x^2 + x.x_0 + x_0^2 - 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + x.x_0 + x_0^2 - 2) = 3x_0^2 - 2$$

$$\Rightarrow y' = 3x^2 - 2$$

c. Tại $x_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có:

$$f(x) - f(x_0) = 4x + 3 - 4x_0 + 3 = 4(x - x_0)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{4(x - x_0)}{x - x_0} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 4 = 4$$

$$\Rightarrow y' = 4$$

DẠNG 3. Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM**PHƯƠNG PHÁP.****a. Ý nghĩa hình học**

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M_0(x_0; f(x_0))$. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0; y_0)$ là $k = f'(x_0)$.

Phương trình tiếp tuyến của hàm số tại điểm M_0 có dạng:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

b. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

Phương trình quỹ đạo chuyển động của chất điểm: $s = f(t)$.

Vận tốc tức thời là đạo hàm của quãng đường $v = s' = f'(t)$.



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 6: Cho hàm số $y = x^2 + 2x - 4$ có đồ thị (C)

- Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ thuộc (C) .
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ thuộc (C) .
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có tung độ $y_0 = -1$ thuộc (C) .
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng -4 .
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = 1 - 3x$.

Lời giải

Tại $x_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có:

$$f(x) - f(x_0) = x^2 + 2x - 4 - x_0^2 - 2x_0 + 4 = (x - x_0)(x + x_0 + 2)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0 + 2)}{x - x_0} = x + x_0 + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0 + 2) = 2x_0 + 2$$

$$\Rightarrow y' = 2x + 2$$

- Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ thuộc (C) là $k = y'(1) = 4$
- Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ thuộc (C) là

$$y = y'(0)(x - 0) + y(0) \Leftrightarrow y = 2x - 4$$
- Với $y_0 = -1 \Rightarrow y = x_0^2 + 2x_0 - 4 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -3 \end{cases}$. Vậy có hai tiếp điểm thuộc (C) có tung độ
 $y_0 = -1$ là $(1; -1)$ và $(-3; -1)$. Nên ta có:

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(1; -1)$ là $y = y'(1)(x-1) + y(1) \Leftrightarrow y = 4x - 5$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(-3; -1)$ là $y = y'(-3)(x+3) + y(-3) \Leftrightarrow y = -4x - 13$

d. Gọi $M(a; b)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến của đồ thị (C) với hệ số góc $k = -4$

$$\Rightarrow y'(a) = -4 \Leftrightarrow 2a + 2 = -4 \Leftrightarrow a = -3 \Rightarrow b = -1$$

Suy ra phương trình tiếp tuyến với hệ số góc $k = -4$ là $y = -4(x+3) - 1 \Leftrightarrow y = -4x - 13$.

e. Vì tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = 1 - 3x$ nên tiếp tuyến có hệ số góc $k = -3$

Gọi $M(a; b)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến của đồ thị (C) với hệ số góc $k = -4$

$$\Rightarrow y'(a) = -3 \Leftrightarrow 2a + 2 = -3 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{2} \Rightarrow b = -\frac{11}{4}$$

Suy ra phương trình tiếp tuyến với hệ số góc $k = -3$ là $y = -3\left(x + \frac{5}{2}\right) - \frac{11}{4} \Leftrightarrow y = -3x - \frac{41}{4}$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{3x}$ có đồ thị (C)

a. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của (C) với trục Oy .

b. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của (C) với trục Ox .

c. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm của (C) với đường thẳng $y = x + 1$.

d. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $k = -\frac{1}{3}$.

e. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số, biết tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $y = 3x - 4$.

Lời giải

Tại $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tùy ý, ta có:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{x+1}{3x} - \frac{x_0+1}{3x_0} = \frac{-(x-x_0)}{3x \cdot x_0}$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{-(x-x_0)}{3x \cdot x_0} \cdot \frac{1}{x-x_0} = \frac{-1}{3x \cdot x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{3x \cdot x_0} = \frac{-1}{3x_0^2}$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{3x^2}$$

a. Vì (C) không cắt Oy nên không tồn tại tiếp tuyến thỏa YCBT.

b. Tọa độ giao điểm của (C) với trục Ox là $(-1;0)$

Suy ra phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (C) với trục Ox là

$$y = y'(-1)(x+1) + 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

c. Tọa độ giao điểm của (C) với đường thẳng $y = x + 1$ là nghiệm của phương trình

$$\frac{x+1}{3x} = x+1 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 0 \\ x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(-1;0)$ là $y = y'(-1)(x+1) + 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(\frac{1}{3}; \frac{4}{3})$ là $y = y'(\frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}) + \frac{4}{3} \Leftrightarrow y = -3x + \frac{7}{3}$

d. Gọi $M(a;b)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến của đồ thị (C) với hệ số góc $k = -\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow y'(a) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3a^2} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow b = \frac{2}{3} \\ a = -1 \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

Suy ra phương trình tiếp tuyến với hệ số góc $k = -\frac{1}{3}$ là $y = -\frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + 1$ và

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$$

e. Tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $y = 3x - 4$. Suy ra tiếp tuyến hệ số góc $k = -\frac{1}{3}$.

Vậy bài toán câu e trở về câu d.

Câu 8: Cho hàm số $y = x^3 - 2x + 1$

- Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của hàm số trên tại điểm có $x = 0$.
- Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số biết nó có $k = -2$.
- Viết phương trình tiếp tuyến của hàm số trên, biết nó tạo với hai trục Oxy một tam giác vuông cân tại O.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 2$

- Hệ số góc của tiếp tuyến của hàm số tại điểm có $x = 0$ là $k = 3 \cdot 0 - 2 = -2$
- Gọi $M(x_0; y_0)$ tiếp điểm của tiếp tuyến có hệ số góc

$$k = -2 \Rightarrow f'(x_0) = -2 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 2 = -2 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

$\Rightarrow$ PT tiếp tuyến tại điểm $M(0;1)$ chính là PT tiếp tuyến có hệ số góc $k = -2$ có dạng sau:

$$y = -2(x - 0) + 1 \Leftrightarrow y = -2x + 1$$

c. Gọi $M(x_0; y_0)$ hoành độ điểm tiếp xúc của (C) và (d)

Cách 1: Gọi PT đoạn chắn cắt 2 trục tọa độ và tạo với 2 trục 1 tam giác vuông cân tại O có dạng

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow y = b \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right) = -\frac{b}{a}x + b, (a, b \neq 0; |a| = |b|) (d)$$

$$(d) \text{ là tiếp tuyến của (C) thì } 3x_0^2 - 2 = \frac{-b}{a}$$

$$\text{Vì } |a| = |b| \Rightarrow \begin{cases} 3x_0^2 - 2 = 1 \\ 3x_0^2 - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0 \\ x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 2 \\ x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y_0 = \frac{9-5\sqrt{3}}{9} \\ x_0 = \frac{-\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y_0 = \frac{9+5\sqrt{3}}{9} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Có 4 PT tiếp tuyến ứng với các điểm tiếp xúc và hệ số góc trên như sau

$$y = 1 \cdot (x - 1) + 0 \Leftrightarrow y = x - 1$$

$$y = 1 \cdot (x + 1) + 2 \Leftrightarrow y = x + 3$$

$$y = -1 \cdot \left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{9-5\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow y = -x + \frac{9-2\sqrt{3}}{9}$$

$$y = -1 \cdot \left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{9+5\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow y = -x + \frac{9+2\sqrt{3}}{9}$$

Cách 2: Gọi PT tiếp tuyến của (C) thỏa mãn YCBT có dạng $y = kx + b (d)$

$$\text{Ta có } k = 3x_0^2 - 2$$

Có giao điểm của (d) với Ox tại $\left(\frac{-b}{k}; 0\right)$; với trục Oy tại $(0; b)$

Vì (d) tạo với hai trục Oxy một tam giác vuông cân tại O.

$$\Rightarrow \left|\frac{-b}{k}\right| = |b| \Leftrightarrow |b| \cdot \left(\frac{1}{|k|} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \Rightarrow L \\ k = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow k = \pm 1$$

$$\Rightarrow 3x_0^2 - 2 = \pm 1$$

Làm tiếp như cách 1.

Câu 9: Một chất điểm chuyển động thẳng biến đổi đều với phương trình $s = 2t^2 + t - 1$ (m)

a. Tìm vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 2s$.

b. Tìm vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian từ $t = 0$ tới $t = 2s$.

Lời giải

Ta có: $v = s' = 4t + 1$

a. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 2s$ là: $4 \cdot 2 + 1 = 9 (m/s)$

b. Trong khoảng thời gian từ $t = 0$ tới $t = 2s$ thì chất điểm di chuyển được quãng đường:

$$4 \cdot 2 + 2 - 1 = 9 (m)$$

Suy ra vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian $2s$ kể từ thời điểm $t = 0$ là:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{9-0}{2-0} = 4,5(m/s).$$

ĐẠO HÀM

BÀI 31: ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA ĐẠO HÀM



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 . Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

B. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x - x_0}$.

C. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x + x_0}$.

D. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x + x_0}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$. Kết quả đúng là

A. $f'(2) = 3$.

B. $f'(x) = 2$.

C. $f'(x) = 3$.

D. $f'(3) = 2$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Giá trị của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$ bằng

A. 12.

B. 2.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ bằng

A. 2.

B. 0.

C. $\frac{1}{2}$.

D. Không tồn tại.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \frac{3x}{1 + |x|}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0) = 0$.

B. $f'(0) = 1$.

C. $f'(0) = \frac{1}{3}$.

D. $f'(0) = 3$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1} - 2x}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -\frac{5}{4} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$.

A. Không tồn tại.

B. 0

C. $-\frac{7}{50}$.

D. $-\frac{9}{64}$.

- Câu 7:** Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1. \end{cases}$ Mệnh đề **sai** là
- A. $f'(1) = 2$. B. f không có đạo hàm tại $x_0 = 1$.
 C. $f'(0) = 2$. D. $f'(2) = 4$.
- Câu 8:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x - 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Để hàm số đã cho có đạo hàm tại $x = 1$ thì $2a + b$ bằng:
- A. 2. B. 5. C. -2. D. -5.
- Câu 9:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & x \geq 0 \\ ax - b - 1, & x < 0 \end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$. Hãy tính $T = a + 2b$.
- A. $T = -4$. B. $T = 0$. C. $T = -6$. D. $T = 4$.
- Câu 10:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4 - x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?
- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{16}$. C. $\frac{1}{32}$. D. Không tồn tại.
- Câu 11:** Tính đạo hàm của hàm số $y = x(x-1)(x-2)\dots(x-2021)$ tại điểm $x = 0$.
- A. $f'(0) = 0$. B. $f'(0) = 2021!$. C. $f'(0) = 2021$. D. $f'(0) = -2021!$.
- Câu 12:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x - 2}$.
- A. 0. B. $f'(2)$. C. $2f'(2) - f(2)$. D. $f(2) - 2f'(2)$.
- Câu 13:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$ là?
- A. $f'(0) = 0$. B. $f'(0) = 1$. C. $f'(0) = -2$. D. Không tồn tại.
- Câu 14:** Cho hàm số $y = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Biết hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2$. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng
- A. 20. B. 17. C. 18. D. 25.

ĐẠO HÀM

BÀI 31: ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA ĐẠO HÀM



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 . Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

B. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x - x_0}$.

C. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x + x_0}$.

D. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x + x_0}$.

Lời giải

Theo định nghĩa đạo hàm ta có $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$. Kết quả đúng là

A. $f'(2) = 3$.

B. $f'(x) = 2$.

C. $f'(x) = 3$.

D. $f'(3) = 2$.

Lời giải

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm ta có

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2 = f'(3).$$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Giá trị của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$ bằng

A. 12.

B. 2.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là D và $x_0 \in D$. Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn gọi là đạo hàm của hàm số tại x_0

Vậy kết quả của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = f'(6) = 2$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ bằng

A. 2.

B. 0.

C. $\frac{1}{2}$.

D. Không tồn tại.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x^2+1}-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x^2(\sqrt{4x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\sqrt{4x^2+1}+1} = 2.$$

Vậy $f'(0) = 2$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \frac{3x}{1+|x|}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0) = 0$.

B. $f'(0) = 1$.

C. $f'(0) = \frac{1}{3}$.

D. $f'(0) = 3$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{1+|x|}.$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{1+|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{1+x} = 3; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{1+|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{1-x} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{1+|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{1+|x|} = 3$$

$$\Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{1+|x|} = 3.$$

Kết luận: $f'(0) = 3$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1}-2x}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -\frac{5}{4} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$.

A. Không tồn tại.

B. 0

C. $-\frac{7}{50}$.

D. $-\frac{9}{64}$.

Lời giải

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1-4x^2}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4x-1}{(\sqrt{3x+1}+2x)} = \frac{-5}{4} = f(1)$$

$\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x = 1$.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt{3x+1} - 2x}{x-1} + \frac{5}{4}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4\sqrt{3x+1} - 3x - 5}{4(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{16(3x+1) - (3x+5)^2}{4(x-1)^2 (4\sqrt{3x+1} + 3x+5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-9}{4(4\sqrt{3x+1} + 3x+5)} = -\frac{9}{64} \end{aligned}$$

- Câu 7:** Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1. \end{cases}$ Mệnh đề **sai** là
- A.** $f'(1) = 2$. **B.** f không có đạo hàm tại $x_0 = 1$.
C. $f'(0) = 2$. **D.** $f'(2) = 4$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 2}{x - 1} = 2$;
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$.

Vậy $f'(1^-) = f'(1^+) = f'(1) = 2$. Suy ra hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 1$. Vậy B sai.

- Câu 8:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x - 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Để hàm số đã cho có đạo hàm tại $x = 1$ thì $2a + b$ bằng:
- A.** 2. **B.** 5. **C.** -2. **D.** -5.

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 1 - 1}{x - 1} = 2; \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax^2 + bx - a - b}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x^2 - 1) + b(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)[a(x + 1) + b]}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} [a(x + 1) + b] = 2a + b \end{aligned}$$

Theo yêu cầu bài toán: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow 2a + b = 2$.

- Câu 9:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & x \geq 0 \\ ax - b - 1, & x < 0 \end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$. Hãy tính $T = a + 2b$.
- A.** $T = -4$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = -6$. **D.** $T = 4$.

Lời giải

Ta có $f(0) = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + bx + 1) = 1. \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax - b - 1) = -b - 1. \end{aligned}$$

Để hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì hàm số phải liên tục tại $x_0 = 0$ nên

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x). \text{ Suy ra } -b - 1 = 1 \Leftrightarrow b = -2.$$

Khi đó $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 1, & x \geq 0 \\ ax + 1, & x < 0 \end{cases}$.

Xét:

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^2 - 2x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax - 2) = -2.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a) = a.$$

Hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì $a = -2$.

Vậy với $a = -2, b = -2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ khi đó $T = -6$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{16}$.

C. $\frac{1}{32}$.

D. Không tồn tại.

Lời giải

Với $x \neq 0$ xét:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 - \sqrt{4-x}}{4} - \frac{1}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - (4-x)}{4x(2 + \sqrt{4-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4(2 + \sqrt{4-x})} = \frac{1}{4(2 + \sqrt{4-0})} = \frac{1}{16} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Câu 11: Tính đạo hàm của hàm số $y = x(x-1)(x-2)\dots(x-2021)$ tại điểm $x = 0$.

A. $f'(0) = 0$.

B. $f'(0) = 2021!$.

C. $f'(0) = 2021$.

D. $f'(0) = -2021!$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-2021)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x-1)(x-2)\dots(x-2021) = (-1) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-2021) = -2021!. \end{aligned}$$

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x - 2}$.

A. 0.

B. $f'(2)$.

C. $2f'(2) - f(2)$.

D. $f(2) - 2f'(2)$.

Lời giải

Do hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$ suy ra $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$.

Ta có $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x - 2} \Leftrightarrow I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - 2f(2) + 2f(2) - xf(2)}{x - 2}$

$$\Leftrightarrow I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(f(x) - f(2))}{x - 2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2)(x - 2)}{x - 2} \Leftrightarrow I = 2f'(2) - f(2).$$

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$ là?

- A.** $f'(0) = 0$. **B.** $f'(0) = 1$. **C.** $f'(0) = -2$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải

Ta có: $f(0) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)^2 = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0$.

Ta thấy $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ nên hàm số không liên tục tại $x_0 = 0$.

Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

Câu 14: Cho hàm số $y = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Biết hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2$. Giá trị

của $a^2 + b^2$ bằng

- A.** 20. **B.** 17. **C.** 18. **D.** 25.

Lời giải

Ta có $y = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} 2x + a & \text{khi } x \geq 2 \\ 3x^2 - 2x - 8 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

Hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2 \Rightarrow 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4$.

Mặt khác hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2$ thì hàm số liên tục tại điểm $x = 2$.

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

$$\Rightarrow 4 + 2a + b = -2 \Rightarrow b = 2.$$

Vậy $a^2 + b^2 = 20$.

BÀI 32: CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM



LÝ THUYẾT.

1. ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

Từ định nghĩa đạo hàm ta có:

$$(c)' = 0 \quad (c = \text{const});$$

$$(x)' = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

a) Đạo hàm của hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

b) Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. ĐẠO HÀM CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG

Giả sử các hàm số $u = u(x), v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Khi đó

$$(u + v - w)' = u' + v' - w';$$

$$(uv)' = u'v + uv';$$

$$(ku)' = ku' \quad (k = \text{const});$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0);$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$$

3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP

a) Khái niệm hàm số hợp

Giả sử $u = g(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(a; b)$, có tập giá trị chứa khoảng $(c; d)$ và $y = f(u)$ là hàm số xác định trên $(c; d)$. Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là hàm số hợp của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$.

b) Đạo hàm của hàm số hợp

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm u'_x tại x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm y'_u tại u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm y'_x tại x là

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Từ đó ta có các kết quả sau:

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1);$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (u > 0).$$

4. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Chú ý: Giới hạn của $\frac{\sin x}{x}$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$.

a) Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$

Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$.

Đối với hàm số hợp $y = \sin u$ và $u = u(x)$ ta có $\boxed{(\sin u)' = u' \cdot \cos u}$.

b) Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$.

Đối với hàm số hợp $y = \cos u$ và $u = u(x)$ ta có $\boxed{(\cos u)' = -u' \sin u}$.

c) **Đạo hàm của hàm số** $y = \tan x$

Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $\boxed{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$.

Đối với hàm số hợp $y = \tan u$ và $u = u(x)$ ta có $\boxed{(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}}$.

d) **Đạo hàm của hàm số** $y = \cot x$

Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi$ và $\boxed{(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Đối với hàm số hợp $y = \cot u$ và $u = u(x)$ ta có $\boxed{(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}}$.

5. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

a) **Giới hạn liên quan đến hàm số mũ và hàm số logarit**

Nhận xét. Ta có các giới hạn sau:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$+) \text{ Nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln[1+u(x)]}{u(x)} = 1.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln a \cdot \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \right) = \ln a.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x \ln a} = \frac{1}{\ln a}.$$

b) Đạo hàm của hàm số mũ

- Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(e^x)' = e^x$.
Đối với hàm số hợp $y = e^u$, với $u = u(x)$, ta có: $(e^u)' = e^u \cdot u'$.
- Hàm số $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(a^x)' = a^x \ln a$.
Đối với hàm số hợp $y = a^u$, với $u = u(x)$, ta có: $(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$.

c) Đạo hàm của hàm số logarit

- Hàm số $y = \ln x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
Đối với hàm số hợp $y = \ln u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
- Hàm số $y = \log_a x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.
Đối với hàm số hợp $y = \log_a u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$.

BẢNG ĐẠO HÀM

$(x^n)' = nx^{n-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$ $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$ $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$ $(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = 4x^2 - \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

b. $y = x - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1$

c. $y = \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

d. $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x}$

Câu 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = (1-x)(1-2x)(1-3x)$ b. $y = (x + \sqrt{x})(x^2 + x + 1)$

c. $y = x^2(x+4)^3$ d. $y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x^2}\right)$ e. $y = (x^3 + 3x)(2-x)$

Câu 3: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = \frac{2}{x}$ b. $y = \frac{x+2}{2x-1}$ c. $y = \frac{x^2 + 4x - 1}{2x + 3}$

d. $y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ e. $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$ f. $y = \frac{3}{2x-1}$

Câu 4: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = (x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x})^5$ b. $y = \left(\sqrt{x^2 - \sqrt{x}} + \sqrt[3]{1 - \frac{x+1}{x^2}}\right)^7$

c. $y = (x^3 + 2)\sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt{x^3 - 1}$ d. $y = \frac{2x - \frac{1}{x^2} + 1}{x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3 - 1}}$

e. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ f. $y = (\sqrt[3]{x} + 2)\left(1 + \sqrt[3]{x^2} + 3x\right)$

Câu 5: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = 5 \sin x - 3 \cos x$ b. $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$.

c. $y = \sqrt{1 + 2 \tan x}$ d. $y = \tan 3x - \cot 3x$.

Câu 6: Tính đạo hàm của hàm số:

$$y = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x}}} \text{ với } x \in (0; \pi).$$

Câu 7: Chứng minh rằng:

a. Hàm số $y = \tan x$ thoả mãn hệ thức $y' - y^2 - 1 = 0$.

b. Hàm số $y = \cot 2x$ thoả mãn hệ thức $y' + 2y^2 + 2 = 0$.

Câu 8: Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$.**Câu 9:** Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{2x+1}-1} - e^{\sqrt[3]{1-3x}-1}}{x}$.**Câu 10:** Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\sqrt{x+1} - 1}$.**Câu 11:** Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$

Câu 12: Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^x} - 1}{\sin 2x}$.

Câu 13: Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{x-1} \right)^x$.

Câu 14: Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$.

Câu 15: Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)}$.

Câu 16: Tìm giới hạn $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + aa + \dots + \overbrace{aa \dots a}^{n \text{ số hạng}}}{10^n}$.

Câu 17: Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{1 - \cos 2x}$.

Câu 18: Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{\ln(1+6x) - \ln(1+3x)}$.

Câu 19: Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)}$.

Câu 20: Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{x}$.

Câu 21: Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt[3]{3x+1} + 1) - \ln(\sqrt{x+1} + 1)}{x}$.

Câu 22: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{x^2+2}$.

Câu 23: Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + 2x)e^x$.

Câu 24: Tính đạo hàm của hàm số $y = xe^{-x}$.

Câu 25: Tính đạo hàm của hàm số $y = e^{x^2-2} \cos x$.

Câu 26: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$.

Câu 27: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x \cdot e^{\tan x}$.

Câu 28: Cho hàm số $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$. Tính $f'(1)$.

Câu 29: Chứng minh rằng, nếu $y = e^{2x} + 2e^{-x}$ thì $y''' - y'' - 2y' = 0$.

Câu 30: Cho hàm số $y = \ln(\cos x)$. Với điều kiện hàm số đã cho, tìm đạo hàm của hàm số đó.

Câu 31: Cho hàm số $y = \ln(x^2 + \sqrt{x^2 + 1})$. Với điều kiện hàm số đã cho, tìm đạo hàm của hàm số đó.

BÀI 32: CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM



LÝ THUYẾT.

1. ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

Từ định nghĩa đạo hàm ta có:

$$(c)' = 0 \quad (c = \text{const});$$

$$(x)' = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

a) Đạo hàm của hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

b) Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. ĐẠO HÀM CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG

Giả sử các hàm số $u = u(x), v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Khi đó

$$(u + v - w)' = u' + v' - w';$$

$$(uv)' = u'v + uv';$$

$$(ku)' = ku' \quad (k = \text{const});$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0);$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0)$$

3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP

a) Khái niệm hàm số hợp

Giả sử $u = g(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(a; b)$, có tập giá trị chứa khoảng $(c; d)$ và $y = f(u)$ là hàm số xác định trên $(c; d)$. Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là hàm số hợp của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$.

b) Đạo hàm của hàm số hợp

Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm u'_x tại x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm y'_u tại u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm y'_x tại x là

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Từ đó ta có các kết quả sau:

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1);$$

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (u > 0).$$

4. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Chú ý: Giới hạn của $\frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$.

a) Đạo hàm của hàm số $y = \sin x$

Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\sin x)' = \cos x$.

Đối với hàm số hợp $y = \sin u$ và $u = u(x)$ ta có $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$.

b) Đạo hàm của hàm số $y = \cos x$

Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(\cos x)' = -\sin x$.

Đối với hàm số hợp $y = \cos u$ và $u = u(x)$ ta có $(\cos u)' = -u' \sin u$.

c) Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$

Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Đối với hàm số hợp $y = \tan u$ và $u = u(x)$ ta có $\boxed{(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}}$.

d) **Đạo hàm của hàm số** $y = \cot x$

Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi$ và $\boxed{(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Đối với hàm số hợp $y = \cot u$ và $u = u(x)$ ta có $\boxed{(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}}$.

5. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

a) Giới hạn liên quan đến hàm số mũ và hàm số logarit

Nhận xét. Ta có các giới hạn sau:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$+) \text{ Nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \text{ thì } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln[1+u(x)]}{u(x)} = 1.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln a \cdot \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \right) = \ln a.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x \ln a} = \frac{1}{\ln a}.$$

b) **Đạo hàm của hàm số mũ**

- Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(e^x)' = e^x$.
Đối với hàm số hợp $y = e^u$, với $u = u(x)$, ta có: $(e^u)' = e^u \cdot u'$.
- Hàm số $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(a^x)' = a^x \ln a$.
Đối với hàm số hợp $y = a^u$, với $u = u(x)$, ta có: $(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$.

c) Đạo hàm của hàm số logarit

- Hàm số $y = \ln x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
Đối với hàm số hợp $y = \ln u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
- Hàm số $y = \log_a x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.
Đối với hàm số hợp $y = \log_a u$, với $u = u(x)$, ta có: $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$.

BẢNG ĐẠO HÀM

$(x^n)' = nx^{n-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$ $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$ $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$ $(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = 4x^2 - \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ b. $y = x - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1$

c. $y = \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ d. $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x}$

Lời giải

a. $y' = 8x - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$

b. $y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$

c. $y = \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x + 2 + \frac{1}{x} + x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{x^2} + 2x - \frac{2}{x^3}$

$$d. y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

Câu 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$a. y = (1-x)(1-2x)(1-3x) \quad b. y = (x + \sqrt{x})(x^2 + x + 1)$$

$$c. y = x^2(x+4)^3 \quad d. y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x^2}\right) \quad e. y = (x^3 + 3x)(2-x)$$

Lời giải

$$a. y = (1-x)(1-2x)(1-3x) = (1-3x+2x^2)(1-3x)$$

$$= 1 - 3x - 3x + 9x^2 + 2x^2 - 6x^3 = 1 - 6x + 11x^2 - 6x^3$$

$$\Rightarrow y' = -6 + 22x - 18x^2$$

$$b. y = (x + \sqrt{x})(x^2 + x + 1) = x^3 + x^2 + x - x^2\sqrt{x} - x\sqrt{x} - \sqrt{x}$$

$$y' = 3x^2 + 2x + 1 - \frac{5}{2}\sqrt{x^3} - \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$c. y = x^2(x+4)^3 = x^2(x^3 + 12x^2 + 48x + 64) = x^5 + 12x^4 + 48x^3 + 64x^2$$

$$y' = 5x^4 + 48x^3 + 144x^2 + 128x$$

$$d. y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x^2}\right) = x - \frac{1}{x^2} - 1 + \frac{1}{x^3} \Rightarrow y' = 1 + \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}$$

$$e. y = (x^3 + 3x)(2-x) = 2x^3 - x^4 + 6x - 3x^2 \Rightarrow y' = 6x^2 - 4x^3 + 6 - 6x$$

Câu 3: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$a. y = \frac{2}{x} \quad b. y = \frac{x+2}{2x-1} \quad c. y = \frac{x^2+4x-1}{2x+3}$$

$$d. y = \frac{\sqrt{x}}{x+1} \quad e. y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2} \quad f. y = \frac{3}{2x-1}$$

Lời giải

$$a. y' = \frac{-2}{x^2}$$

$$b. y' = \frac{2x-1-2(x+2)}{(2x-1)^2} = \frac{5}{(2x-1)^2}$$

$$c. y' = \frac{(2x+3)(2x+4)-2(x^2+4x-1)}{(2x+3)^2} = \frac{4x^2+14x+12-2x^2-8x+2}{(2x+3)^2} = \frac{2x^2+6x+14}{(2x+3)^2}$$

$$d. y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

$$e. y = \frac{2}{1-x+x^2} - 1 \Rightarrow y' = -\frac{2(-1+2x)}{(1-x+x^2)^2} = \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$$

$$f. y' = -\frac{6}{(2x-1)^2}$$

Câu 4: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$a. y = (x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x})^5 \quad b. y = \left(\sqrt{x^2 - \sqrt{x}} + \sqrt[3]{1 - \frac{x+1}{x^2}} \right)^7$$

$$c. y = (x^3 + 2)^{\sqrt[3]{1-x^2}} + \sqrt{x^3 - 1} \quad d. y = \frac{2x - \frac{1}{x^2} + 1}{x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3 - 1}}$$

$$e. y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \quad f. y = (\sqrt[3]{x} + 2) \left(1 + \sqrt[3]{x^2} + 3x \right)$$

Lời giải

$$a. y' = 5 \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} \right) (x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x})^4$$

$$b. y' = 7 \left(\sqrt{x^2 - \sqrt{x}} + \sqrt[3]{1 - \frac{x+1}{x^2}} \right)' \left(\sqrt{x^2 - \sqrt{x}} + \sqrt[3]{1 - \frac{x+1}{x^2}} \right)^6$$

$$y' = 7 \left(\frac{(x^2 + \sqrt{x})'}{2\sqrt{x^2 - \sqrt{x}}} + \frac{\left(1 - \frac{x+1}{x^2}\right)'}{3\sqrt[3]{\left(1 - \frac{x+1}{x^2}\right)^2}} \right) \left(\sqrt{x^2 - \sqrt{x}} + \sqrt[3]{1 - \frac{x+1}{x^2}} \right)^6$$

$$y' = 7 \left(\frac{2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x^2 - \sqrt{x}}} + \frac{-\left(\frac{x^2 - 2x(x+1)}{x^4}\right)'}{3\sqrt[3]{\left(1 - \frac{x+1}{x^2}\right)^2}} \right) \left(\sqrt{x^2 - \sqrt{x}} + \sqrt[3]{1 - \frac{x+1}{x^2}} \right)^6$$

$$y' = 7 \left(\frac{2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x^2 - \sqrt{x}}} + \frac{\frac{-x-2}{x^3}}{3\sqrt[3]{\left(1 - \frac{x+1}{x^2}\right)^2}} \right) \left(\sqrt{x^2 - \sqrt{x}} + \sqrt[3]{1 - \frac{x+1}{x^2}} \right)^6$$

$$c. y' = (x^3 + 2)' \sqrt[3]{1-x^2} + (x^3 + 2) \left(\sqrt[3]{1-x^2} \right)' + \left(\sqrt{x^3 - 1} \right)'$$

$$y' = 3x^2 \sqrt[3]{1-x^2} + (x^3 + 2) \cdot \frac{-2x}{3 \cdot \sqrt[3]{(1-x^2)^2}} + \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$$

$$d. y' = \frac{\left(2x - \frac{1}{x^2} + 1\right)' \left(x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3-1}\right) - \left(2x - \frac{1}{x^2} + 1\right) \left(x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3-1}\right)'}{\left(x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3-1}\right)^2}$$

$$y' = \frac{\left(2 + \frac{2}{x^3}\right) \left(x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3-1}\right) - \left(2x - \frac{1}{x^2} + 1\right) \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}\right)}{\left(x + \sqrt{x} + \sqrt{x^3-1}\right)^2}$$

$$e. y' = \frac{\sqrt{x^2+x+1} - x \cdot \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2} = \frac{2x^2+2x+2-2x^2-x}{2\sqrt{x^2+x+1}(x^2+x+1)} = \frac{x+2}{2\sqrt{x^2+x+1}(x^2+x+1)}$$

Câu 5: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = 5 \sin x - 3 \cos x$. b. $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$.

c. $y = \sqrt{1+2 \tan x}$. d. $y = \tan 3x - \cot 3x$.

Lời giải

a. Ta có: $y' = 5 \cos x + 3 \sin x$

b. Ta có: $y' = (x^2 - 3x + 2)' \cdot \cos(x^2 - 3x + 2) = (2x - 3) \cdot \cos(x^2 - 3x + 2)$.

c. Ta có:

$$y' = \frac{(2 \tan x)'}{2\sqrt{1+2 \tan x}} = \frac{\frac{2}{\cos^2 x}}{2\sqrt{1+2 \tan x}} = \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{1+2 \tan x}}.$$

d. Ta có các cách thực hiện sau:

Cách 1: Ta có ngay:

$$y' = y' = \frac{3}{\cos^2 3x} + \frac{3}{\sin^2 3x} = \frac{3}{\sin^2 3x \cdot \cos^2 3x} = \frac{3}{\frac{1}{4} \sin^2 6x} = \frac{12}{\sin^2 6x}.$$

Cách 2: Ta biến đổi:

$$y = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \frac{\sin^2 3x - \cos^2 3x}{\cos 3x \cdot \sin 3x} = -\frac{2 \cos 6x}{\sin 6x} = -2 \cot 6x$$

$$\Rightarrow y' = \frac{12}{\sin^2 6x}.$$

Câu 6: Tính đạo hàm của hàm số:

$$y = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x}}} \text{ với } x \in (0; \pi).$$

Lời giải

Biến đổi hàm số về dạng:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{x}{2}}}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\cos^2 \frac{x}{4}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{4}} \\ &= \sqrt{\cos^2 \frac{x}{8}} = \cos \frac{x}{8}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } y' = \left(\cos \frac{x}{8} \right)' = -\frac{1}{8} \sin \frac{x}{8}.$$

Câu 7: Chứng minh rằng:

- Hàm số $y = \tan x$ thỏa mãn hệ thức $y' - y^2 - 1 = 0$.
- Hàm số $y = \cot 2x$ thỏa mãn hệ thức $y' + 2y^2 + 2 = 0$.

Lời giải

a. Trước tiên, ta có:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Khi đó, ta có:

$$y' - y^2 - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = 0.$$

b. Trước tiên, ta có:

$$y' = -\frac{2}{\sin^2 2x}.$$

Khi đó, ta có:

$$y' + 2y^2 + 2 = -\frac{2}{\sin^2 2x} + 2 \cot^2 2x + 2 = -\frac{2}{\sin^2 2x} + \frac{2}{\sin^2 2x} = 0.$$

Câu 8: Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$.

Lời giải

Ta có $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(a \frac{e^{ax} - 1}{ax} - b \frac{e^{bx} - 1}{bx} \right) = a - b.$

Vậy $A = a - b.$

Câu 9: Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{2x+1}-1} - e^{\sqrt[3]{1-3x}-1}}{x}.$

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{2x+1}-1} - e^{\sqrt[3]{1-3x}-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} \cdot \frac{e^{\sqrt{2x+1}-1} - 1}{\sqrt{2x+1}-1} - \frac{\sqrt[3]{1-3x}-1}{x} \cdot \frac{e^{\sqrt[3]{1-3x}-1} - 1}{\sqrt[3]{1-3x}-1} \right).$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{2x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2x+1}+1} = 1.$

Nên $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{x} \cdot \frac{e^{\sqrt{2x+1}-1} - 1}{\sqrt{2x+1}-1} = 1$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-3x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x}{x \left[\sqrt[3]{(1-3x)^2} + \sqrt[3]{1-3x} + 1 \right]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3}{\left[\sqrt[3]{(1-3x)^2} + \sqrt[3]{1-3x} + 1 \right]} = -1.$

Nên $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-3x}-1}{x} \cdot \frac{e^{\sqrt[3]{1-3x}-1} - 1}{\sqrt[3]{1-3x}-1} = -1.$ Vậy $A = 2.$

Câu 10: Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\sqrt{x+1} - 1}.$

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\sqrt{x+1} - 1} \cdot \frac{e^x - 1}{x}.$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\sqrt{x+1} - 1} = -\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1} + 1) = -2.$

Nên $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{\sqrt{x+1} - 1} \cdot \frac{e^x - 1}{x} = -2.$ Vậy $A = -2.$

Câu 11: Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} = \alpha. \text{ Vậy } A = \alpha.$$

Câu 12: Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^x} - 1}{\sin 2x}$.

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^x} - 1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{2(\sqrt{e^x} + 1)} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} = \frac{1}{4}. \text{ Vậy } A = \frac{1}{4}.$$

Câu 13: Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{x-1} \right)^x$.

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{x-1} \right)^x, \text{ đặt } t = x-1, \text{ khi } x \rightarrow +\infty \text{ thì } t \rightarrow +\infty.$$

$$\Rightarrow A = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t+2}{t} \right)^{t+1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+2}{t} \left(\frac{t+2}{t} \right)^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+2}{t} \left[\left(1 + \frac{2}{t} \right)^{\frac{t}{2}} \right]^2 = e^2.$$

Vậy $A = e^2$.

Câu 14: Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$.

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^2} \right).$$

$$\Rightarrow A = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \text{ Vậy } A = \frac{3}{2}.$$

Câu 15: Tìm giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)}$.

Lời giải

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(-3) \frac{e^{-3x^2} - 1}{(-3x^2)} \cdot \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} + \frac{1 - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)} \right].$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} (-3) \frac{e^{-3x^2} - 1}{(-3x^2)} \cdot \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} = -3.$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{1 + \sqrt[3]{1+x^2} + (\sqrt[3]{1+x^2})^2} \cdot \frac{x^2}{\ln(1+x^2)} \right] = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Nên } A = -3 - \frac{1}{3} = -\frac{10}{3}. \text{ Vậy } A = -\frac{10}{3}.$$

Câu 16: Tìm giới hạn $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \overbrace{aa + \dots + aa \dots a}^{n \text{ số hạng}}}{10^n}.$

Lời giải

$$a + aa + aaa + \dots + \overbrace{aa \dots a}^{n \text{ số hạng}} = a \left(1 + 11 + 111 + \dots + \overbrace{111 \dots 1}^{n \text{ số hạng}} \right) = \frac{a}{9} \left(9 + 99 + 999 + \dots + \overbrace{999 \dots 9}^{n \text{ số hạng}} \right).$$

$$= \frac{a}{9} (10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + \dots + 10^n - 1) = \frac{a}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right].$$

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \overbrace{aa + \dots + aa \dots a}^{n \text{ số hạng}}}{10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{9 \cdot 10^n} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{9} \left[\frac{10(10^n - 1)}{9 \cdot 10^n} - \frac{n}{10^n} \right].$$

$$\text{Mặt khác } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10(10^n - 1)}{9 \cdot 10^n} = \frac{10}{9}.$$

$$\text{Và } n \leq C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n \Rightarrow 0 \leq \frac{n}{10^n} \leq \left(\frac{2}{10} \right)^n = \frac{1}{5^n}, \text{ mà } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5^n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{10^n} = 0.$$

$$\text{Vậy } A = \frac{10a}{81}.$$

Câu 17: Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{1 - \cos 2x}.$

Lời giải

$$\text{Ta có } L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{2 \sin^2 x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3 \ln(1+3x^2)}{3x^2} : \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \right] = \frac{3}{2}.$$

Câu 18: Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{\ln(1+6x) - \ln(1+3x)}.$

Lời giải

$$\text{Ta có } L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{\ln(1+6x) - \ln(1+3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{6^x - 1}{x} - \frac{3^x - 1}{x} \right) : \left(\frac{\ln(1+6x)}{x} - \frac{\ln(1+3x)}{x} \right).$$

$$= (\ln 6 - \ln 3) : (6 - 3) = \frac{1}{3} \ln 2.$$

Câu 19: Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - \sqrt[3]{1+x^2}}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-2x^2} - 1}{x^2} - \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} \right) : \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}. \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-2 \frac{e^{-2x^2} - 1}{-2x^2} - \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1} \right) : \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = -\frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Câu 20: Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{x}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(\sin x + \cos x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin x + \cos x)^2}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1 + \sin 2x)}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \right] = 1. \end{aligned}$$

Câu 21: Tìm giới hạn $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt[3]{3x+1} + 1) - \ln(\sqrt{x+1} + 1)}{x}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt[3]{3x+1} + 1) - \ln(\sqrt{x+1} + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt[3]{3x+1} + 1) - \ln 2 - [\ln(\sqrt{x+1} + 1) - \ln 2]}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln\left(1 + \frac{\sqrt[3]{3x+1} - 1}{2}\right)}{x} - \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{x+1} - 1}{2} + 1\right)}{x} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\sqrt[3]{3x+1} - 1}{2}\right)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2} \frac{3x}{\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{3x+1} + 1}\right)}{\frac{2}{3} \left(\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{3x+1} + 1\right) \cdot \frac{1}{2} \frac{3x}{\left(\sqrt[3]{(3x+1)^2} + \sqrt[3]{3x+1} + 1\right)}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Và } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{2}+1\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}+1\right)}{2(\sqrt{x+1}+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } L = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Câu 22: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{x^2+2}$.

Lời giải

$$y = 2^{x^2+2} \Rightarrow y' = (x^2+2)' \cdot 2^{x^2+2} \cdot \ln 2 = 2x \cdot 2^{x^2+2} \cdot \ln 2 = x \cdot 2^{x^2+3} \cdot \ln 2.$$

Câu 23: Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + 2x)e^x$.

Lời giải

$$y = (x^2 + 2x)e^x \Rightarrow y' = (2x+2) \cdot e^x + (x^2 + 2x) \cdot e^x = (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x.$$

Câu 24: Tính đạo hàm của hàm số $y = xe^{-x}$.

Lời giải

$$y = xe^{-x} \Rightarrow y' = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = (1-x) \cdot e^{-x}.$$

Câu 25: Tính đạo hàm của hàm số $y = e^{x^2-2} \cos x$.

Lời giải

$$y = e^{x^2-2} \cos x \Rightarrow y' = 2x \cdot e^{x^2-2} \cos x - e^{x^2-2} \sin x = (2x \cos x - \sin x) e^{x^2-2}.$$

Câu 26: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} y = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} &\Rightarrow y' = \frac{(3^x \ln 3 + 3^{-x} \ln 3)(3^x + 3^{-x}) - (3^x - 3^{-x})(3^x \ln 3 - 3^{-x} \ln 3)}{(3^x + 3^{-x})^2} \\ &= \frac{(3^x + 3^{-x})^2 - (3^x - 3^{-x})^2}{(3^x + 3^{-x})^2} \ln 3 = \frac{4 \ln 3}{(3^x + 3^{-x})^2}. \end{aligned}$$

Câu 27: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x \cdot e^{\tan x}$.

Lời giải

$$y = \cos x \cdot e^{\tan x} \Rightarrow y' = -\sin x \cdot e^{\tan x} + \cos x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot e^{\tan x} = e^{\tan x} \left(\frac{1}{\cos x} - \sin x \right).$$

Câu 28: Cho hàm số $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$. Tính $f'(1)$.

Lời giải

Sử dụng công thức: $(e^u)' = u' \cdot e^u$.

$$f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{x \cdot e^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}. \text{ Vậy } f'(1) = \frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}.$$

Câu 29: Chứng minh rằng, nếu $y = e^{2x} + 2e^{-x}$ thì $y''' - y'' - 2y' = 0$.

Lời giải

Ta có $y' = 2e^{2x} - 2e^{-x}$; $y'' = (y')' = 4e^{2x} + 2e^{-x}$; $y''' = (y'')' = 8e^{2x} - 2e^{-x}$.

Suy ra: $y''' - y'' - 2y' = 0$.

Câu 30: Cho hàm số $y = \ln(\cos x)$. Với điều kiện hàm số đã cho, tìm đạo hàm của hàm số đó.

Lời giải

Phân tích: Sử dụng các công thức: $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$; $(\cos x)' = -\sin x$.

$$\text{Đạo hàm: } y' = \frac{(\cos x)'}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x.$$

Câu 31: Cho hàm số $y = \ln(x^2 + \sqrt{x^2+1})$. Với điều kiện hàm số đã cho, tìm đạo hàm của hàm số đó.

Lời giải

Phân tích: Sử dụng các công thức: $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$; $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

$$\text{Đạo hàm: } y' = \frac{(x^2 + \sqrt{x^2+1})'}{x^2 + \sqrt{x^2+1}} = \frac{2x + \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2 + \sqrt{x^2+1}} = \frac{2x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2 + \sqrt{x^2+1}} = \frac{x(2\sqrt{x^2+1} + 1)}{(x^2 + \sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}.$$

BÀI 32: CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.
VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M_0(x_0; f(x_0))$. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0; y_0)$ là $k = f'(x_0)$.

Phương trình tiếp tuyến của hàm số tại điểm M_0 có dạng:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

- Câu 1:** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung có phương trình là
- Câu 2:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x - 1$ tại điểm $M(1; 0)$ là
- Câu 3:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ tại điểm $(-1; -1)$.
- Câu 4:** Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm $(-2; -8)$.
- Câu 5:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung.
- Câu 6:** Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1; 3)$ là
- Câu 7:** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x + 1$ tại giao điểm của (C) với trục Oy có phương trình là:
- Câu 8:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ $x = 1$.
- Câu 9:** Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ với trục hoành. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trên tại điểm M là
- Câu 10:** Cho hàm số $y = x^2 + 3x + 4$ có đồ thị (C) . Hệ số góc k ($k > 0$) của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là:
- Câu 11:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(5-x) + xf'(x) = 2x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ là 5.
- Câu 12:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(3x-3) + f(6-3x) = 3x^2 - 5x$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 3 là

- Câu 13:** Cho hàm số $y = f(x)$ luôn dương $\forall x > 0$ và thỏa mãn điều kiện $f^4(2x) - xf^2(4x-1) = x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.
- Câu 14:** Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2x+3) = g(x) + x^2 - 2022x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết $f(5) = f'(5) = -2023$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ có phương trình là
- Câu 15:** Cho đồ thị hàm số $(C): y = x^2 - 2x + 2023$ và đường thẳng $(d): y = 2x + 7$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với $(d): y = 2x + 7$.
- Câu 16:** Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = 2x^3 - 3x^2 - 1$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 12x + 2022$ là
- Câu 17:** Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = x^4 + 2x^2 - 1$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = -\frac{x}{8} - 2022$ là
- Câu 18:** Cho đường cong $(C): y = x^3 - 3x^2 - 2x - 1$ và đường thẳng $d: 2x + y + 1 = 0$. Tiếp tuyến của đường cong (C) và song song với d có phương trình là
- Câu 19:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$.
- Câu 20:** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m; 0)$ sao cho từ M vẽ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C) trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau. Khi đó tìm m .
- Câu 21:** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $N(0; 1)$ và hoành độ tiếp điểm là số thực âm.
- Câu 22:** Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị là (C) . Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ?
- Câu 23:** Cho hàm số $y = \frac{3x+2}{x+1}(C)$, có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) cắt trục Oy, Ox lần lượt tại hai điểm A và B sao cho diện tích tam giác AOB bằng 2?
- Câu 24:** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị là đường cong (C) . Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B sao cho $OA = 2OB$.
- Câu 25:** Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}(C)$ mà tiếp tuyến đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân?

BÀI 32: CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M_0(x_0; f(x_0))$. Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0; y_0)$ là $k = f'(x_0)$.
Phương trình tiếp tuyến của hàm số tại điểm M_0 có dạng:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung có phương trình là

Lời giải

Giao điểm của đồ thị (C) và trục tung là $M(0; -1)$.

$$y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(0; -1)$.

$$y = y'(0)(x - 0) - 1 = -2x - 1.$$

Câu 2: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x - 1$ tại điểm $M(1; 0)$ là

Lời giải

Ta có $y' = -3x^2 + 2$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x - 1$ tại điểm $M(1; 0)$ là:

$$y = y'(1)(x - 1) + 0 = -x + 1.$$

Câu 3: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$ tại điểm $(-1; -1)$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 \Rightarrow y'(-1) = 3$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 3(x + 1) - 1 = 3x + 2$.

Câu 4: Viết phương trình tiếp của đường cong $y = x^3$ tại điểm $(-2; -8)$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2$.

Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $(-2; -8)$ là $y'(-2) = 12$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 12(x + 2) - 8 \Leftrightarrow y = 12x + 16$.

Câu 5: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung.

Lời giải

$y' = 3x^2 - 3$.

Đồ thị hàm số cắt Oy tại điểm $A(x_0; y_0) \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$.

Gọi tiếp tuyến (d) tiếp xúc đồ thị hàm số tại điểm $A(0; 1)$

$\Rightarrow$ Hệ số góc $k = y'(x_0) = y'(0) = -3$

$\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến (d) : $y = -3(x - 0) + 1 \Leftrightarrow y = -3x + 1$.

Câu 6: Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1; 3)$ là

Lời giải

Ta có: $y' = 4x^3 + 4x \Rightarrow y'(1) = 8$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(1; 3)$ là

$y = 8(x - 1) + 3 \Leftrightarrow y = 8x - 5$.

Câu 7: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = x^3 - 3x + 1$ tại giao điểm của (C) với trục Oy có phương trình là:

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 3$.

Giao điểm M của đồ thị hàm số (C) với trục Oy là $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại $M(0; 1)$ là: $k = y'(0) = -3$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(0; 1)$ là: $y = k(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = -3x + 1$.

Câu 8: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ $x = 1$.

Lời giải

Ta có $y' = 12x^2 - 12x \Rightarrow y'(1) = 0$.

Ta có $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -1$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $y = -1$.

Câu 9: Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ với trục hoành. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trên tại điểm M là

Lời giải

Hoành độ điểm M là nghiệm của phương trình $\frac{x+1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Do đó $M(-1; 0)$. Mặt khác, $y' = -\frac{3}{(x-2)^2}$ nên $y'(-1) = -\frac{1}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến tại M là $y = -\frac{1}{3}(x+1) + 0 \Leftrightarrow 3y + x + 1 = 0$.

Câu 10: Cho hàm số $y = x^2 + 3x + 4$ có đồ thị (C) . Hệ số góc k ($k > 0$) của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là:

Lời giải

Ta có hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến là nghiệm của phương trình $x^2 + 3x + 4 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$.

Ta có $y' = 2x + 3$.

Với $x = 0$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(0) = 3$.

Với $x = -3$ hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(-3) = -3$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(5-x) + xf(x) = 2x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ là 5.

Lời giải

Thay $x = 0$ vào $2f(5-x) + xf(x) = 2x$ ta được $2f(5) = 0 \Rightarrow f(5) = 0$.

Thay $x = 5$ vào $2f(5-x) + xf(x) = 2x$ ta được $2f(0) + 5f(5) = 10 \Rightarrow f(0) = 5$.

$2f(5-x) + xf(x) = 2x \Rightarrow -2f'(5-x) + f(x) + xf'(x) = 2$ (*).

Thay $x = 0$ vào (*) ta có $-2f'(5) + f(0) = 2 \Rightarrow f'(5) = \frac{3}{2}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ là 5 là

$y = f'(5)(x-5) + f(5) = \frac{3}{2}(x-5) + 0 = \frac{3}{2}x - \frac{15}{2}$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $2f(3x-3) + f(6-3x) = 3x^2 - 5x$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 3 là

Lời giải

$2f(3x-3) + f(6-3x) = 3x^2 - 5x$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 3 có dạng $y = f'(3)(x-3) + f(3)$.

Thay $x = 1$ vào ta được: $2f(0) + f(3) = -2$.

Thay $x = 2$ vào ta được: $2f(3) + f(0) = 2$.

Từ và suy ra $f(3) = 2$.

Lấy đạo hàm hai vế của ta được $6f'(3x-3) - 3f'(6-3x) = 6x - 5$.

Thay $x = 1$ vào ta được: $6f'(0) - 3f'(3) = -5$.

Thay $x = 2$ vào ta được: $6f'(3) - 3f'(0) = 7$.

Từ và suy ra $f'(3) = 1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 3 là $y = 1(x-3) + 2 = x - 1$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ luôn dương $\forall x > 0$ và thỏa mãn điều kiện $f^4(2x) - xf^2(4x-1) = x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

Lời giải

Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(1; f(1))$.

Suy ra $d: y = f'(1) \cdot (x-1) + f(1)$.

Xét điều kiện: $f^4(2x) - xf^2(4x-1) = x$.

+) Cho $x = \frac{1}{2}$ ta được:

$$f^4(1) - \frac{1}{2}f^2(1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f^4(1) - f^2(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(1) = 1 \\ f^2(1) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(1) = -1 \end{cases} (L)$$

+) Đạo hàm hai vế của ta được:

$$8f^3(2x) \cdot f'(2x) - [f^2(4x-1) + 8x \cdot f(4x-1) \cdot f'(4x-1)] = 1.$$

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào điều kiện được: $8f^3(1) \cdot f'(1) - f^2(1) - 4f(1) \cdot f'(1) = 1$.

Lại có $f(1) = 1$ khi đó trở thành: $8 \cdot 1 \cdot f'(1) - 1 - 4 \cdot 1 \cdot f'(1) = 1 \Leftrightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$.

Suy ra phương trình của d là $y = \frac{1}{2}(x-1) + 1$.

Vậy tiếp tuyến d có phương trình là $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Câu 14: Cho các hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2x+3) = g(x) + x^2 - 2022x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết $f(5) = f'(5) = -2023$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ có phương trình là

Lời giải

Ta có $f(2x+3) = g(x) + x^2 - 2022x \Rightarrow 2f'(2x+3) = g'(x) + 2x - 2022$.

Ta chọn $x = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2f'(5) = g'(1) + 2 - 2022 \\ f(5) = g(1) + 1^2 - 2022 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g'(1) = -2026 \\ g(1) = -2 \end{cases}.$$

Từ đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = g(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là $y = g'(1) \cdot (x-1) + g(1) \Leftrightarrow y = -2026(x-1) - 2 \Leftrightarrow y = -2026x + 2024$.

Câu 15: Cho đồ thị hàm số $(C): y = x^2 - 2x + 2023$ và đường thẳng $(d): y = 2x + 7$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với $(d): y = 2x + 7$.

Lời giải

Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến và đồ thị (C) .

$y' = 2x - 2$ suy ra hệ số góc $k = y'(x_0) = 2x_0 - 2$.

Mặt khác tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): y = 2x + 7 \Rightarrow k = 2$

$$\Leftrightarrow 2x_0 - 2 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 2023 \text{ suy ra } M(2; 2023).$$

Vậy phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = 2(x-2) + 2023 = 2x + 2019$.

Câu 16: Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = 2x^3 - 3x^2 - 1$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 12x + 2022$ là

Lời giải

$$\text{Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình: } 6x^2 - 6x = 12 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Với $x = -1$ suy ra tọa độ tiếp điểm $M(-1; -6)$ do đó phương trình tiếp tuyến $d_1: y = 12x + 6$.

Với $x = 2$ suy ra tọa độ tiếp điểm $N(2; 3)$ suy ra phương trình tiếp tuyến là: $d_2: y = 12x - 21$.

Câu 17: Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = x^4 + 2x^2 - 1$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = -\frac{x}{8} - 2022$ là

Lời giải

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = -\frac{x}{8} - 2022$ nên $k_t \left(-\frac{1}{8}\right) = -1 \Leftrightarrow k_t = 8$

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình: $4x^3 + 4x = 8 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Với $x = 1$ suy ra tọa độ tiếp điểm $M(1; 2)$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = 8x - 6$.

Câu 18: Cho đường cong $(C): y = x^3 - 3x^2 - 2x - 1$ và đường thẳng $d: 2x + y + 1 = 0$. Tiếp tuyến của đường cong (C) và song song với d có phương trình là

Lời giải

Ta có đường thẳng $d: 2x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -2x - 1$.

Tiếp tuyến song song với d nên phương trình tiếp tuyến có hệ số góc là $k = -2$.

Gọi x_0 là hoành độ của tiếp điểm.

Khi đó $y'(x_0) = k \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 - 2 = -2 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}$.

Với $x_0 = 0 \Rightarrow M(0; -1)$, phương trình tiếp tuyến là: $y = -2x - 1$ trùng với d .

Với $x_0 = 2 \Rightarrow N(2; -9)$, phương trình tiếp tuyến là: $y = -2x - 5$.

Câu 19: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$.

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$ nên

$f'(x_0) = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$.

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x + 1) - 2 \Leftrightarrow y = 9x + 7$

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 2$. Phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x - 3) + 2 \Leftrightarrow y = 9x - 25$.

Câu 20: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m; 0)$ sao cho từ M vẽ được 3 tiếp tuyến đến

đồ thị (C) trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau. Khi đó tìm m.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 6x$.

Phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) tại $A(x_0; x_0^3 + 3x_0^2)$ là:

$$y = (3x_0^2 + 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2.$$

$$M(m; 0) \in \Delta \Leftrightarrow (3x_0^2 + 6x_0)(m - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0[(3x_0 + 6)(m - x_0) + x_0^2 + 3x_0] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ 2x_0^2 + (3 - 3m)x_0 - 6m = 0 \quad (*) \end{cases}.$$

Do $y'(0) = 0$ nên để từ M vẽ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C) trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 0 và thỏa mãn điều kiện $y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ -6m \neq 0 \\ (3x_1^2 + 6x_1)(3x_2^2 + 6x_2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 30m + 9 > 0 \\ 9(x_1x_2)^2 + 18x_1x_2(x_1 + x_2) + 36x_1x_2 = -1 \quad (I) \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Vì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (*) nên theo định lý Vi-et, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3m-3}{2} \\ x_1x_2 = -3m \end{cases}$.

$$\text{Do đó } (I) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m < -3 \\ m > \frac{-1}{3} \end{cases} \\ 9.9m^2 - 54m\left(\frac{3m-3}{2}\right) + 36.(-3m) = -1 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m < -3 \\ m > \frac{-1}{3} \end{cases} \\ m \neq 0 \\ m = \frac{1}{27} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{27}.$$

Câu 21: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $N(0; 1)$ và hoành độ tiếp điểm là số thực âm.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x - 6$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ có dạng:

$$y = (3x_0^2 + 6x_0 - 6)(x - x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1$$

Vì tiếp tuyến đi qua $N(0;1)$ nên ta có:

$$1 = (3x_0^2 + 6x_0 - 6)(-x_0) + x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 + 1 \Leftrightarrow 2x_0^3 + 3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \text{ (loại)} \\ x_0 = -\frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

$$\text{Với } x_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow y_0 = \frac{107}{8}, y'(x_0) = -\frac{33}{4}.$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: } y = -\frac{33}{4}\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{107}{8} = -\frac{33}{4}x + 1.$$

$$\text{Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là } y = -\frac{33}{4}x + 1.$$

Câu 22: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$ có đồ thị là (C) . Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ?

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị (C) .

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow y'(x_0) = 4x_0^3 - 4x_0; y_0 = x_0^4 - 2x_0^2.$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến } \Delta \text{ của } (C) \text{ tại } M(x_0; y_0) \text{ là: } y = (4x_0^3 - 4x_0)(x - x_0) + x_0^4 - 2x_0^2.$$

Tiếp tuyến đi qua gốc tọa độ nên

$$(4x_0^3 - 4x_0)(-x_0) + x_0^4 - 2x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0^2(-3x_0^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = \pm \frac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}.$$

Với $x_0 = 0$, ta có $y_0 = 0$, $y'(0) = 0$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 0$.

$$\text{Với } x_0 = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ ta có } y_0 = -\frac{8}{9}, y'\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{6}}{9}. \text{ Phương trình tiếp tuyến là: } y = -\frac{4\sqrt{6}}{9}x.$$

$$\text{Với } x_0 = -\frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ ta có } y_0 = -\frac{8}{9}, y'\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{6}}{9}. \text{ Phương trình tiếp tuyến là: } y = \frac{4\sqrt{6}}{9}x.$$

Vậy có 3 tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua gốc tọa độ.

Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{3x+2}{x+1}(C)$, có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) cắt trục Oy, Ox lần lượt tại

hai điểm A và B sao cho diện tích tam giác AOB bằng 2?

Lời giải

Tập xác định hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến d của đồ thị hàm số tại điểm $M\left(x_0; \frac{3x_0+2}{x_0+1}\right) \in (C)$ là:

$$d: y = \frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \frac{3x_0+2}{x_0+1} \text{ hay } d: y = \frac{1}{(x_0+1)^2}x + \frac{3x_0^2+4x_0+2}{(x_0+1)^2}.$$

Đường thẳng d cắt Oy tại hai điểm $A\left(0; \frac{3x_0^2+4x_0+2}{(x_0+1)^2}\right)$ và cắt Ox tại $B\left(-\left(3x_0^2+4x_0+2\right); 0\right)$

$$\text{Ta có } S_{AOB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}\left|\frac{3x_0^2+4x_0+2}{(x_0+1)^2}\right| \cdot |3x_0^2+4x_0+2| = 2 \Rightarrow (3x_0^2+4x_0+2)^2 = 4(x_0+1)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_0^2+4x_0+2=2x_0+2 \\ 3x_0^2+4x_0+2=-2x_0-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0^2+2x_0=0 \\ 3x_0^2+6x_0+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=0 \\ x_0=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

Với $x_0=0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $d: y=x+2$.

Với $x_0=-\frac{2}{3} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $d: y=9x+6$.

Vậy có 2 tiếp tuyến của đồ thị hàm số thỏa mãn bài ra.

Câu 24: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị là đường cong (C) . Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B sao cho $OA = 2OB$.

Lời giải

Giả sử d là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$.

Do d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B sao cho $OA = 2OB$ nên $\tan \widehat{OAB} = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{2}$

. Suy ra hệ số góc k của d bằng $\frac{1}{2}$ hoặc $-\frac{1}{2}$.

$$\text{Ta có } k = y'(x_0) = \frac{-2}{(x_0-1)^2} < 0 \text{ nên } k = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{(x_0-1)^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (x_0-1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0-1=2 \\ x_0-1=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=3 \\ x_0=-1 \end{cases}.$$

+) Với $x_0 = -1$: phương trình của d là $y = -\frac{1}{2}(x+1) + y(-1) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

+) Với $x_0 = 3$: phương trình của d là $y = -\frac{1}{2}(x-3) + y(3) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 2 = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Vậy có 2 tiếp tuyến của đồ thị (C) thỏa mãn là $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ và $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$.

Câu 25: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}(C)$ mà tiếp tuyến đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân?

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) : $y = \frac{2x+1}{x+1}$ tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C) (x_0 \neq -1)$ có dạng

$$y = \frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0+1}{x_0+1}.$$

Giả sử tiếp tuyến cắt Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A, B và tam giác OAB cân. Khi đó tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = x$ hoặc $y = -x$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} \frac{1}{(x_0+1)^2} = -1 & (1) \\ \frac{1}{(x_0+1)^2} = 1 & (2) \end{cases}.$$

Dễ thấy không xảy ra vì vế trái dương vế phải âm.

$$\text{Ta có } (2) \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{cases}.$$

Với $x_0 = 0$ phương trình tiếp tuyến là $y = x + 1$.

Với $x_0 = -2$ phương trình tiếp tuyến là $y = x + 5$.

Vậy có 2 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán.

BÀI 32: CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. TÍNH ĐẠO HÀM TẠI ĐIỂM

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{4}{x-1}$. Khi đó $y'(-1)$ bằng

- A. -1. B. -2. C. 2. D. 1.

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+7}{x+4}$ tại $x=2$ ta được:

- A. $f'(2) = \frac{1}{36}$. B. $f'(2) = \frac{11}{6}$. C. $f'(2) = \frac{3}{2}$. D. $f'(2) = \frac{5}{12}$.

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $y = x(x+1)(x+2)(x+3)$ tại điểm $x_0 = 0$ là:

- A. $y'(0) = 5$. B. $y'(0) = 6$. C. $y'(0) = 0$. D. $y'(0) = -6$.

Câu 4: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x} + x$ tại điểm $x_0 = 4$ là:

- A. $y'(4) = \frac{9}{2}$. B. $y'(4) = 6$. C. $y'(4) = \frac{3}{2}$. D. $y'(4) = \frac{5}{4}$.

Câu 5: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ tại điểm $x = -1$.

- A. $f'(-1) = 1$. B. $f'(-1) = -\frac{1}{2}$. C. $f'(-1) = -2$. D. $f'(-1) = 0$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ bởi $f(x) = 2x^2 + 1$. Giá trị $f'(-1)$ bằng

- A. 2. B. 6. C. -4. D. 3.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + 1$. Giá trị $f'(-1)$ bằng:

- A. 6. B. 3. C. -2. D. -6.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$. Đạo hàm của hàm số tại $x=1$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. 0. D. Không tồn tại.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$, tính $f'(2)$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $2\sqrt{3}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x}{x-2}$. Đạo hàm của hàm số tại $x=1$ là

- A. $y'(1) = -4$. B. $y'(1) = -5$. C. $y'(1) = -3$. D. $y'(1) = -2$.

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2}$. Tính $y'(3)$.

- A. $y'(3) = 5$. B. $y'(3) = -5$. C. $y'(3) = 0$. D. $y'(3) = 7$.

Câu 12: Cho hàm số $y = x^2 - x + 2$. Tính $y'(1)$.

- A. $y'(1) = -1$. B. $y'(1) = 1$. C. $y'(1) = 2$. D. $y'(1) = 0$.

Câu 13: Cho $f(x) = x^5 + x^3 - 2x - 3$. Tính $f'(1) + f'(-1) + 4f'(0)$?

- A. 4. B. 7. C. 6. D. 5.

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$. Tính $y'(3)$

- A. $\frac{5}{2}$. B. $-\frac{3}{4}$. C. $-\frac{3}{2}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

- A. Không tồn tại. B. $f'(0) = \frac{1}{16}$. C. $f'(0) = \frac{1}{4}$. D. $f'(0) = \frac{1}{32}$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+4}}$. Tính giá trị biểu thức $f'(0)$.

- A. -3. B. -2. C. $\frac{3}{2}$. D. 3.

DẠNG 2. TÍNH ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

Câu 17: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 + 2x + 1$.

- A. $y' = 3x^2 + 2x$. B. $y' = 3x^2 + 2$. C. $y' = 3x^2 + 2x + 1$. D. $y' = x^2 + 2$.

Câu 18: Đạo hàm của hàm số $y = x^4 - 4mx^2 - 3m - 1$ (m là tham số) là

- A. $y' = 4x^3 - 8mx$. B. $y' = 4x^3 - 8mx - 3m - 1$.
C. $y' = 4x^3 - 8mx - 1$. D. $y' = 4x^2 - 8mx$.

Câu 19: Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$. B. $(x)' = 0$.
C. $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$. D. $(k.x)' = k$, với k là hằng số.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ là hàm số trên $\mathbb{R}$ định bởi $f(x) = 2x$. Chọn câu đúng.

- A. $f'(x) = 2$ B. $f'(x) = 1$ C. $f'(x) = x$ D. $f'(x)$ không tồn tại.

Câu 21: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0,25x^4$ là

- A. $y' = -\frac{1}{3} + 2x - 2x^3$. B. $y' = -\frac{1}{3} + x - 2x^3$. C. $y' = \frac{1}{3} + x - 2x^3$. D. $y' = -\frac{1}{3} + 2x - x^3$.

Câu 22: Cho hàm số $y = \frac{3x+5}{-1+2x}$. Đạo hàm y' của hàm số là:

- A. $\frac{7}{(2x-1)^2}$. B. $\frac{1}{(2x-1)^2}$. C. $-\frac{13}{(2x-1)^2}$. D. $\frac{13}{(2x-1)^2}$.

Câu 23: Đạo hàm của hàm số $y = -2x^3 + 3$ là

- A. $y' = -6x$. B. $y' = -6x^2 + 3$. C. $y' = -6x^2$. D. $y' = -3x^2$.

Câu 24: Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = (x^3 - 2x^2)^2$.

- A. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3$. B. $f'(x) = 6x^5 + 16x^3$.
C. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 4x^3$. D. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 - 16x^3$

Câu 25: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 - 2021x + 2022$ bằng biểu thức nào sau đây?

- A. $y' = x^4 - 6x^2 - 2021$ B. $y' = x^3 - 6x - 2021$
C. $y' = \frac{3}{4}x^3 - 6x - 2021$ D. $y' = x^3 - 6x - 2021x + 2022$

Câu 26: Hàm số nào sau đây là đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x+3}{3x-1}$.

- A. $y' = \frac{-11}{(3x-1)^2}$ B. $y' = \frac{7}{(3x-1)^2}$ C. $y' = \frac{2}{(3x-1)^2}$ D. $y' = \frac{2}{3}$

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$. Biết $f'(x) = \frac{ax+b}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $\forall x$. Tính $S = 2a + b$

- A. $S = 3$. B. $S = 1$. C. $S = -1$. D. $S = 5$.

Câu 28: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{1-2x^2}$ là kết quả nào sau đây?

- A. $y' = \frac{1}{2\sqrt{1-2x^2}}$. B. $y' = \frac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}}$. C. $y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$. D. $y' = \frac{2x}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Câu 29: Đạo hàm của hàm số $y = (1-2x)^3$ là

- A. $y' = 3.(1-2x)^2$. B. $y' = 6.(1-2x)^2$. C. $y' = -3.(1-2x)^2$. D. $y' = -6.(1-2x)^2$.

Câu 30: Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2)(2x - 1)$.

- A. $y' = 4x$. B. $y' = 3x^2 - 6x + 2$. C. $y' = 6x^2 - 2x - 4$. D. $y' = 2x^2 - 2x + 4$.

Câu 31: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 2}$.

- A. $y' = 1 + \frac{3}{(x+2)^2}$. B. $y' = \frac{x^2 + 6x + 7}{(x+2)^2}$. C. $y' = \frac{x^2 + 4x + 5}{(x+2)^2}$. D. $y' = \frac{x^2 + 8x + 1}{(x+2)^2}$.

Câu 32: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{1-3x}$.

- A. $y' = \frac{4}{(1-3x)^2}$. B. $y' = \frac{4x}{(1-3x)^2}$. C. $y' = \frac{-4}{(1-3x)^2}$. D. $y' = \frac{4}{1-3x}$.

Câu 33: Hàm số $y = -\frac{1}{\sin^2 x}$ là đạo hàm của hàm số nào dưới đây?

- A. $y = \tan x$. B. $y = \cot x$. C. $y = -\cot x$. D. $y = \frac{1}{\sin x}$.

Câu 34: Cho hàm số $f(x) = \sin^2 2x$. Tính $f'(x)$.

- A. $f'(x) = 2 \sin 2x$. B. $f'(x) = 2 \cos^2 2x$. C. $f'(x) = 2 \sin 4x$. D. $f'(x) = -2 \sin 4x$.

Câu 35: Đạo hàm của hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 3$ là

- A. $y' = -4x^3 + 8x$. B. $y' = 4x^2 - 8x$. C. $y' = 4x^3 - 8x$. D. $y' = -4x^2 + 8x$

Câu 36: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \sqrt{2x} + a^2$ (a là hằng số) bằng.

- A. $2x^3 + 5x^2 - \frac{1}{\sqrt{2x}} + 2a$. B. $2x^3 + 5x^2 + \frac{1}{2\sqrt{2x}}$.
C. $2x^3 + 5x^2 - \frac{1}{\sqrt{2x}}$. D. $2x^3 + 5x^2 - \sqrt{2}$.

Câu 37: Hàm số nào sau đây có đạo hàm bằng $\frac{1}{\sqrt{2x}}$?

- A. $f(x) = 2\sqrt{x}$. B. $f(x) = \sqrt{x}$. C. $f(x) = \sqrt{2x}$. D. $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

Câu 38: Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 5)\sqrt{x}$.

- A. $y' = \frac{7}{2}\sqrt[5]{x^2} - \frac{5}{2\sqrt{x}}$. B. $y' = \frac{7}{2}\sqrt{x^5} - \frac{5}{2\sqrt{x}}$. C. $y' = 3x^2 - \frac{5}{2\sqrt{x}}$. D. $y' = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Câu 39: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ là:

- A. $\frac{1-3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. B. $\frac{1+3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. C. $\frac{1-3x}{x^2+1}$. D. $\frac{2x^2-x-1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Câu 40: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+3}$. Tính giá trị của biểu thức $S = f(1) + 4f'(1)$.

- A. $S = 4$. B. $S = 2$. C. $S = 6$. D. $S = 8$.

Câu 41: Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2+5x-4}$. Đạo hàm y' của hàm số là

- A. $y' = \frac{4x+5}{2\sqrt{2x^2+5x-4}}$. B. $y' = \frac{2x+5}{2\sqrt{2x^2+5x-4}}$.
C. $y' = \frac{2x+5}{\sqrt{2x^2+5x-4}}$. D. $y' = \frac{4x+5}{\sqrt{2x^2+5x-4}}$.

Câu 42: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 - \frac{1}{x}$.

- A. $y' = 2x - \frac{1}{x^2}$. B. $y' = x - \frac{1}{x^2}$. C. $y' = x + \frac{1}{x^2}$. D. $y' = 2x + \frac{1}{x^2}$.

Câu 43: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$

- A. $y' = \frac{2}{(x-1)^2}$. B. $y' = \frac{2}{(x-1)}$. C. $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$. D. $y' = \frac{-2}{(x-1)}$.

Câu 44: Hàm số $y = \frac{1}{x^2+5}$ có đạo hàm bằng:

- A. $y' = \frac{1}{(x^2+5)^2}$. B. $y' = \frac{2x}{(x^2+5)^2}$. C. $y' = \frac{-1}{(x^2+5)^2}$. D. $y' = \frac{-2x}{(x^2+5)^2}$.

Câu 45: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x^2-3x+7}{x^2+2x+3}$.

- A. $y' = \frac{-7x^2+2x+23}{(x^2+2x+3)^2}$. B. $y' = \frac{7x^2-2x-23}{(x^2+2x+3)^2}$
C. $y' = \frac{7x^2-2x-23}{(x^2+2x+3)}$ D. $y' = \frac{8x^3+3x^2+14x+5}{(x^2+2x+3)^2}$

Câu 46: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+a}{x-b}$ ($a, b \in \mathbb{R}; b \neq 1$). Ta có $f'(1)$ bằng:

- A. $\frac{-a+2b}{(b-1)^2}$. B. $\frac{a-2b}{(b-1)^2}$. C. $\frac{a+2b}{(b-1)^2}$. D. $\frac{-a-2b}{(b-1)^2}$.

Câu 47: Cho $f(x) = \sqrt{1-4x} + \frac{1-x}{x-3}$. Tính $f'(x)$.

- A. $\frac{2}{\sqrt{1-4x}} - \frac{2}{x-3}$. B. $\frac{2}{\sqrt{1-4x}} - \frac{2}{(x-3)^2}$.
C. $\frac{1}{2\sqrt{1-4x}} + 1$ D. $\frac{-2}{\sqrt{1-4x}} + \frac{2}{(x-3)^2}$.

Câu 48: Đạo hàm của hàm số $y = (2x-1)\sqrt{x^2+x}$ là

- A. $y' = \frac{8x^2+4x-1}{2\sqrt{x^2+x}}$. B. $y' = \frac{8x^2+4x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$. C. $y' = \frac{4x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$. D. $y' = \frac{6x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

Câu 49: Đạo hàm của hàm số $y = (-x^2+3x+7)^7$ là

- A. $y' = 7(-2x+3)(-x^2+3x+7)^6$. B. $y' = 7(-x^2+3x+7)^6$.
C. $y' = (-2x+3)(-x^2+3x+7)^6$. D. $y' = 7(-2x+3)(-x^2+3x+7)^6$.

Câu 50: Đạo hàm của hàm số $y = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^3$ bằng

- A. $y' = 6\left(x + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$. B. $y' = 3\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$.
C. $y' = 6\left(x - \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$. D. $y' = 6\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$

Câu 51: Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $y' = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$.

B. $y' = \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{2}{3}}$.

C. $y' = \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{8}{3}}$.

D. $y' = \frac{2x+1}{2\sqrt[3]{x^2+x+1}}$.

Câu 52: Đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^2$ bằng:

A. $6x^5 - 20x^4 - 16x^3$.

B. $6x^5 - 20x^4 + 4x^3$.

C. $6x^5 + 16x^3$.

D. $6x^5 - 20x^4 + 16x^3$.

Câu 53: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2-3x^2}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{-3x}{\sqrt{2-3x^2}}$.

B. $\frac{1}{2\sqrt{2-3x^2}}$.

C. $\frac{-6x^2}{2\sqrt{2-3x^2}}$.

D. $\frac{3x}{\sqrt{2-3x^2}}$.

Câu 54: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x$. Tập nghiệm của bất phương trình $y' \geq 0$ là

A. $[-1; 5]$.

B. $\emptyset$.

C. $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

D. $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

Câu 55: Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 3x - 5$ với m là tham số. Tìm tập hợp M tất cả các giá trị của m để $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt:

A. $M = (-3; 3)$.

B. $M = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

C. $M = \mathbb{R}$.

D. $M = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

Câu 56: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2017$. Bất phương trình $y' < 0$ có tập nghiệm là:

A. $S = (-1; 1)$.

B. $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(-\infty; -1)$.

Câu 57: Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3$. Tìm x để $f'(x) > 0$?

A. $-1 < x < 0$.

B. $x < 0$.

C. $x > 0$.

D. $x < -1$.

Câu 58: Cho hàm số $y = (m+2)x^3 + \frac{3}{2}(m+2)x^2 + 3x - 1$, m là tham số. Số các giá trị nguyên m để $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

A. 5.

B. Có vô số giá trị nguyên m .

C. 3.

D. 4

Câu 59: Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3mx^2 - 12x + 3$ với m là tham số thực. Số giá trị nguyên của m để $f'(x) \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ là

A. 1.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Câu 60: Cho hàm số $f(x) = \frac{mx^3}{3} - \frac{mx^2}{2} + (3-m)x - 2$. Tìm m để $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

A. $0 \leq m \leq \frac{12}{5}$.

B. $0 < m < \frac{12}{5}$.

C. $0 \leq m < \frac{12}{5}$.

D. $0 < m \leq \frac{12}{5}$.

- Câu 61:** Cho hàm số $f(x) = \sqrt{-5x^2 + 14x - 9}$. Tập hợp các giá trị của x để $f'(x) < 0$ là
- A. $\left(\frac{7}{5}; +\infty\right)$. B. $\left(-\infty; \frac{7}{5}\right)$. C. $\left(\frac{7}{5}; \frac{9}{5}\right)$. D. $\left(1; \frac{7}{5}\right)$.
- Câu 62:** Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Tìm tập nghiệm S của phương trình $f'(x) \geq f(x)$ có bao nhiêu giá trị nguyên?
- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.
- Câu 63:** Cho $\left(\frac{3-2x}{\sqrt{4x-1}}\right)' = \frac{ax-b}{(4x-1)\sqrt{4x-1}}, \forall x > \frac{1}{4}$. Tính $\frac{a}{b}$.
- A. -16. B. -4. C. -1. D. 4.
- Câu 64:** Cho $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$, $y' = \frac{ax+b}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$. Khi đó giá trị $a.b$ là:
- A. -4. B. -1. C. 0. D. 1.
- Câu 65:** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + \frac{b}{x}$ có $f'(1) = 1, f'(-2) = -2$. Khi đó $f'(\sqrt{2})$ bằng:
- A. $\frac{12}{5}$. B. $-\frac{2}{5}$. C. 2. D. $-\frac{12}{5}$.
- Câu 66:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+5m}$ có đạo hàm dương trên khoảng $(-\infty; -10)$?
- A. 1. B. 2. C. 3. D. vô số.
- Câu 67:** Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)\dots(x-2022)}$. Tính $f'(0)$
- A. $\frac{1}{2023}$. B. $\frac{1}{2022}$. C. $\frac{1}{2023!}$. D. $\frac{1}{2022!}$.
- Câu 68:** Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn: $f^3(2-x) - 2f^2(2+3x) + x^2.g(x) + 36x = 0$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $A = 3f(2) + 4f'(2)$.
- A. 11 B. 13 C. 14 D. 10

DẠNG 3. BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN

- Câu 69:** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{2x-3}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ có hệ số góc bằng
- A. 5. B. $-\frac{1}{5}$. C. -5. D. $\frac{1}{5}$.
- Câu 70:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 5$ tại điểm có hoành độ $x = -1$.
- A. $y = 4x - 6$. B. $y = 4x + 2$. C. $y = 4x + 6$. D. $y = 4x - 2$.
- Câu 71:** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-2}$ tại điểm có hoành độ bằng 3, tương ứng là
- A. $y = 7x + 13$. B. $y = -7x + 30$. C. $y = 3x + 9$. D. $y = -x - 2$.

- Câu 72:** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$ có đồ thị là (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là:
- A. $y = 3x - 2$. B. $y = -3x + 2$. C. $y = x - \frac{2}{3}$. D. $y = -x + \frac{2}{3}$.
- Câu 73:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ tại điểm có hoành độ bằng 2.
- A. $y = -9x + 16$. B. $y = -9x + 20$. C. $y = 9x - 20$. D. $y = 9x - 16$.
- Câu 74:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = 3x - 4x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là
- A. $y = 0$. B. $y = 3x$. C. $y = 3x - 2$. D. $y = -12x$.
- Câu 75:** Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.
- A. $y = -2x + 1$. B. $y = 2x + 1$. C. $y = 3x - 2$. D. $y = -3x - 2$.
- Câu 76:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = x^4 - 8x^2 + 9$ tại điểm M có hoành độ bằng -1.
- A. $y = 12x + 14$. B. $y = 12x - 14$. C. $y = 12x + 10$. D. $y = -20x - 22$.
- Câu 77:** Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trên tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.
- A. $y = 3x - 2$. B. $y = -3x - 2$. C. $y = 3x - 3$. D. $y = 3x + 2$.
- Câu 78:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{-x+3}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 0$ là
- A. $y = -2x + 3$. B. $y = -2x - 3$. C. $y = 2x - 3$. D. $y = 2x + 3$.
- Câu 79:** Cho hàm số $y = x^3 - 2x + 1$ có đồ thị (C) . Hệ số góc k của tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 bằng
- A. $k = -5$. B. $k = 10$. C. $k = 25$. D. $k = 1$.
- Câu 80:** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{-x+1}{3x-2}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có hệ số góc là
- A. -1. B. $\frac{1}{4}$. C. $-\frac{5}{4}$. D. $-\frac{1}{4}$.
- Câu 81:** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 3. Tìm hệ số góc k của đường thẳng d .
- A. $-\frac{1}{2}$. B. -2 C. 2. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 82:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = x^2 + x - 2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.
- A. $x + y - 1 = 0$. B. $x - y - 2 = 0$. C. $x + y + 3 = 0$. D. $x - y - 1 = 0$.
- Câu 83:** Hệ số góc tiếp tuyến tại $A(1; 0)$ của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ là
- A. 1. B. -1. C. -3. D. 0.

- Câu 84:** Gọi I là giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ và trục tung của hệ trục tọa độ Oxy . Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số trên tại I là
A. -2 . **B.** 0 . **C.** -1 . **D.** 2 .
- Câu 85:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là
A. $y = 2x + 9$. **B.** $y = -2x + 9$. **C.** $y = 2x - 9$. **D.** $y = -2x - 9$.
- Câu 86:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (H) : $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại giao điểm của (H) và trục hoành là:
A. $y = x - 3$. **B.** $y = \frac{1}{3}(x-1)$. **C.** $y = 3x$. **D.** $y = 3(x-1)$.
- Câu 87:** Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ có đồ thị. Hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến với đồ thị là.
A. 1 **B.** 6 **C.** 12 **D.** 9
- Câu 88:** Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1;4)$ là
A. $y = 8x - 4$. **B.** $y = x + 3$. **C.** $y = -8x + 12$. **D.** $y = 8x + 4$.
- Câu 89:** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại điểm $A(2;3)$ có phương trình $y = ax + b$. Tính $a + b$
A. 9 . **B.** 5 . **C.** 1 . **D.** -1 .
- Câu 90:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 5$ tại điểm có hoành độ $x = 2$.
A. $y = -8x - 16$. **B.** $y = 8x - 19$. **C.** $y = -8x + 16$. **D.** $y = 8x + 19$.
- Câu 91:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại điểm có tung độ bằng -2 là
A. $y = 3x + 1$. **B.** $y = -3x - 1$. **C.** $y = -3x + 1$. **D.** $y = -3x + 3$.
- Câu 92:** Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + 1$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại M song song với đường thẳng $d: y = 3x - 1$?
A. 3 . **B.** 2 . **C.** 0 . **D.** 1 .
- Câu 93:** Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ (C) . Số các tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y = 3x - 10$ là
A. 2 . **B.** 1 . **C.** 3 . **D.** 0 .
- Câu 94:** Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3$ có đồ thị (C) . Số tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x + 2017$ là
A. 2 . **B.** 1 . **C.** 0 . **D.** 3 .
- Câu 95:** Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$, (C) . Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = -3x$ có phương trình là
A. $y = -3x - 1; y = -3x + 11$. **B.** $y = -3x + 10; y = -3x - 4$.
C. $y = -3x + 5; y = -3x - 5$. **D.** $y = -3x + 2; y = -3x - 2$.

- Câu 96:** Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ (C). Tiếp tuyến của vuông góc với đường thẳng $x+3y+2=0$ tại điểm có hoành độ
- A. $x=0$. B. $x=-2$. C. $\begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$.
- Câu 97:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = 9x + 10$ là
- A. $y = 9x + 6, y = 9x - 28$. B. $y = 9x, y = 9x - 26$.
C. $y = 9x - 6, y = 9x - 28$. D. $y = 9x + 6, y = 9x - 26$.
- Câu 98:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 9x - y + 7 = 0$ là
- A. $y = 9x + 25$. B. $y = -9x - 25$. C. $y = 9x - 25$ D. $y = -9x + 25$.
- Câu 99:** Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$, tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 5$ của đồ thị hàm số là:
- A. $y = 9(x+3)$. B. $y = 9(x-3)$. C. $y = 9x + 5$ và $y = 9(x-3)$ D. $y = 9x + 5$.
- Câu 100:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = \sqrt{2x+1}$, biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $x - 3y + 6 = 0$.
- A. $y = \frac{1}{3}x - 1$. B. $y = \frac{1}{3}x + 1$. C. $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$. D. $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.
- Câu 101:** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ đồ thị (C). Có bao nhiêu cặp điểm A, B thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau:
- A. 1. B. Không tồn tại cặp điểm nào.
C. Vô số cặp điểm D. 2.
- Câu 102:** Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ có đồ thị là (C_m). Với giá trị nào của m thì tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ bằng 0 song song với đường thẳng $d: y = 3x + 1$.
- A. $m = 3$. B. $m = 2$. C. $m = 1$. D. $m = -2$.
- Câu 103:** Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ song song với đường thẳng $y = x$?
- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.
- Câu 104:** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + 2$ có đồ thị (C). Phương trình các tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -2x + \frac{10}{3}$ là
- A. $y = -2x + 2$. B. $y = -2x - 2$.
C. $y = -2x + 10, y = -2x - \frac{2}{3}$. D. $y = -2x - 10, y = -2x + \frac{2}{3}$.
- Câu 105:** Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$.
- A. $y + 16 = -9(x+3)$. B. $y = -9(x+3)$. C. $y - 16 = -9(x-3)$.. D. $y - 16 = -9(x+3)$.

- Câu 106:** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ biết nó song song với đường thẳng $y = 9x + 6$.
- A. $y = 9x + 6$, $y = 9x - 6$. B. $y = 9x - 26$.
 C. $y = 9x + 26$. D. $y = 9x - 26$, $y = 9x + 6$.
- Câu 107:** Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ song song với đường thẳng $y = x$?
- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.
- Câu 108:** Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ song song với trục hoành là
- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.
- Câu 109:** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = \frac{2x+1}{x+2}$ song song với đường thẳng $\Delta: y = 3x + 2$ là
- A. $y = 3x + 2$. B. $y = 3x - 2$. C. $y = 3x + 14$. D. $y = 3x + 5$.
- Câu 110:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị. Tìm số tiếp tuyến của đồ thị song song với đường thẳng $d: y = 9x - 25$.
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.
- Câu 111:** Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.
- A. $M\left(-1; \frac{4}{3}\right)$. B. $M(-2; 0)$. C. $M\left(2; \frac{4}{3}\right)$. D. $M(-2; -4)$.
- Câu 112:** Tìm các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ biết các tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = -3x$.
- A. $y = -3x + 11; y = -3x - 1$. B. $y = -3x - 6; y = -3x - 11$.
 C. $y = -3x + 1$. D. $y = -3x + 6$.
- Câu 113:** Cho đường cong $(C): y = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đường cong (C) có hệ số góc bằng 7?
- A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.
- Câu 114:** Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m - 2$ có đồ thị (C) . Gọi S là tập các giá trị của m sao cho đồ thị (C) có đúng một tiếp tuyến song song với trục Ox . Tổng các phần tử của S là
- A. 3. B. 8. C. 5. D. 2.
- Câu 115:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Tìm số tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $d: y = 9x - 25$.
- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.
- Câu 116:** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ song song với đường thẳng $d: 12x + y = 0$ có dạng là $y = ax + b$. Tính giá trị của $2a + b$.
- A. -23 hoặc -24 B. -23. C. -24. D. 0.
- Câu 117:** Đường thẳng $y = 6x + m + 1$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x - 1$ khi m bằng
- A. -4 hoặc -2. B. -4 hoặc 0. C. 0 hoặc 2. D. -2 hoặc 2.

- Câu 118:** Tính tổng S tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3mx + m^2 - 2m^3$ tiếp xúc với trục hoành.
- A. $S = \frac{4}{3}$. B. $S = 1$. C. $S = 0$. D. $S = \frac{2}{3}$.
- Câu 119:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x$. Có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1; 0)$?
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 120:** Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến kẻ từ $M(2; -1)$ đến đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{4} - x + 1$.
- A. $y = -2x + 3$. B. $y = -1$. C. $y = x - 3$. D. $y = 3x - 7$.
- Câu 121:** Cho hàm số $y = \frac{x-2}{1-x}$ có đồ thị (C) và điểm $A(m; 1)$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A . Tính tổng bình phương các phần tử của tập S .
- A. $\frac{25}{4}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{13}{4}$. D. $\frac{9}{4}$.
- Câu 122:** Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ đi qua $A(3; 2)$?
- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.
- Câu 123:** Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a; 1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A . Tổng tất cả các giá trị các phần tử của S là
- A. 1. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{5}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 124:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 1$ có đồ thị. Tiếp tuyến của có hệ số góc nhỏ nhất là bao nhiêu?
- A. 4. B. 3. C. 1. D. 2.
- Câu 125:** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ có đồ thị (C) . Đường thẳng d có phương trình $y = ax + b$ là tiếp tuyến của (C) , biết d cắt trục hoành tại A và cắt trục tung tại B sao cho tam giác $\triangle OAB$ cân tại O , với O là gốc tọa độ. Tính $a + b$.
- A. -1 . B. -2 . C. 0. D. -3 .
- Câu 126:** Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị. Có bao nhiêu tiếp tuyến của cắt trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A và B thỏa mãn điều kiện $OA = 4OB$.
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.
- Câu 127:** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (1). Đường thẳng $d: y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1). Biết d cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho $\triangle OAB$ cân tại O . Khi đó $a + b$ bằng
- A. -1 . B. 0. C. 2. D. -3 .

Câu 128: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + mx + 1$. Gọi S là tổng tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, B , C sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại B , C vuông góc với nhau. Giá trị của S bằng

- A. $\frac{9}{2}$. B. $\frac{9}{5}$. C. $\frac{9}{4}$. D. $\frac{11}{5}$.

Câu 129: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}(C)$. Điểm M thuộc (C) có hoành độ lớn hơn 1, tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận của (C) lần lượt tại A, B . Diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB bằng.

- A. $4 + 2\sqrt{2}$. B. 4. C. $4\sqrt{2}$. D. $4 + \sqrt{2}$.

Câu 130: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) và điểm $A(1;m)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để qua A có thể kẻ được đúng ba tiếp tuyến tới đồ thị (C) . Số phần tử của S là

- A. 9. B. 7. C. 3. D. 5

Câu 131: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 3. Tìm hệ số góc k của đường thẳng d .

- A. $-\frac{1}{2}$. B. -2 C. 2. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 132: Cho hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(2;1)$. Diện tích tam giác được tạo bởi Δ và các trục bằng

- A. 3. B. $\frac{3}{2}$. C. 9. D. $\frac{9}{2}$.

DẠNG 4. BÀI TOÁN QUẢNG ĐƯỜNG, VẬN TỐC

Câu 133: Cho chuyển động được xác định bởi phương trình $s = 2t^3 + 6t^2 - t$, trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét. Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ s là:

- A. 89 m/s. B. 105 m/s. C. 48 m/s. D. 20 m/s.

Câu 134: Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $S(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t - 1$ (t được tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 4$ là

- A. $6(m/s)$. B. $4(m/s)$. C. $5(m/s)$. D. $3(m/s)$.

Câu 135: Một chất điểm chuyển động có quãng đường được cho bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 10$, trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây và s tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì quãng đường vật đi được bằng bao nhiêu?

- A. 13 m. B. 3 m. C. 16 m. D. 10 m.

Câu 136: Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = 4t^2 - 2t^3 + 5$, với t là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Biết tại thời điểm m thì vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất là $n(m/s)$. Giá trị $T = mn$ bằng

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{16}{9}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{8}{9}$.

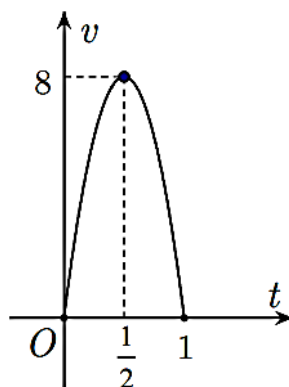
Câu 137: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = 6t^2 - t^3$, vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (s) bằng

- A. 4 (s). B. 12 (s). C. 6 (s). D. 2 (s).

Câu 138: Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quãng đường đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian t được cho bởi phương trình $s(t) = 10 + t + 9t^2 - t^3$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây. Trong 5 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, đoàn tàu đạt vận tốc lớn nhất bằng bao nhiêu?

- A. $1m/s$. B. $28m/s$. C. $16m/s$. D. $3m/s$.

Câu 139: Một vật chuyển động trong 1 giờ với vận tốc v phụ thuộc vào thời gian t có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(\frac{1}{2}; 8)$ và trục đối xứng song song với trục tung. Tính gia tốc của vật lúc $t = 0,25(h)$



- A. $16(km/h^2)$. B. $-16(km/h^2)$. C. $8(km/h^2)$. D. $-8(km/h^2)$.

BÀI 32: CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. TÍNH ĐẠO HÀM TẠI ĐIỂM

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{4}{x-1}$. Khi đó $y'(-1)$ bằng

A. -1.

B. -2.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = -\frac{4}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(-1) = -1.$$

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+7}{x+4}$ tại $x=2$ ta được:

A. $f'(2) = \frac{1}{36}$.

B. $f'(2) = \frac{11}{6}$.

C. $f'(2) = \frac{3}{2}$.

D. $f'(2) = \frac{5}{12}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{1}{(x+4)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{36}.$$

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $y = x(x+1)(x+2)(x+3)$ tại điểm $x_0 = 0$ là:

A. $y'(0) = 5$.

B. $y'(0) = 6$.

C. $y'(0) = 0$.

D. $y'(0) = -6$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = x(x+1)(x+2)(x+3) = (x^2+x)(x^2+5x+6)$$

$$\Rightarrow y' = (2x+1)(x^2+5x+6) + (x^2+x)(2x+5)$$

$$\Rightarrow y'(0) = 6.$$

Câu 4: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x} + x$ tại điểm $x_0 = 4$ là:

A. $y'(4) = \frac{9}{2}$.

B. $y'(4) = 6$.

C. $y'(4) = \frac{3}{2}$.

D. $y'(4) = \frac{5}{4}$.

Lời giải

Ta có $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \Rightarrow y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} + 1 = \frac{5}{4}$.

Câu 5: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ tại điểm $x = -1$.

- A. $f'(-1) = 1$. B. $f'(-1) = -\frac{1}{2}$. C. $f'(-1) = -2$. D. $f'(-1) = 0$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$. Vậy $f'(-1) = -\frac{1}{2}$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ bởi $f(x) = 2x^2 + 1$. Giá trị $f'(-1)$ bằng

- A. 2. B. 6. C. -4. D. 3.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 4x \Rightarrow f'(-1) = -4$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = 2x^3 + 1$. Giá trị $f'(-1)$ bằng:

- A. 6. B. 3. C. -2. D. -6.

Lời giải

Có $f(x) = 2x^3 + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 \Rightarrow f'(-1) = 6 \cdot (-1)^2 = 6$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$. Đạo hàm của hàm số tại $x = 1$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. 0. D. Không tồn tại.

Lời giải

Ta có $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$, tính $f'(2)$.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} \Rightarrow f'(2) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **Chọn C**

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x}{x-2}$. Đạo hàm của hàm số tại $x = 1$ là

- A. $y'(1) = -4$. B. $y'(1) = -5$. C. $y'(1) = -3$. D. $y'(1) = -2$.

Lời giải

Vậy $y'(1) = -5$.

Câu 11: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2}$. Tính $y'(3)$.

A. $y'(3) = 5$.

B. $y'(3) = -5$.

C. $y'(3) = 0$.

D. $y'(3) = 7$.

Lời giải

$$\text{Có } y'(x) = \frac{(2x+1)'(x-2) - (2x+1)(x-2)'}{(x-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = \frac{2(x-2) - (2x+1).1}{(x-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow y'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2} \Rightarrow y'(3) = \frac{-5}{(3-2)^2} = -5$$

Câu 12: Cho hàm số $y = x^2 - x + 2$. Tính $y'(1)$.

A. $y'(1) = -1$.

B. $y'(1) = 1$.

C. $y'(1) = 2$.

D. $y'(1) = 0$.

Lời giải

$$y' = 2x - 1 \Rightarrow y'(1) = 2.1 - 1 = 1.$$

Câu 13: Cho $f(x) = x^5 + x^3 - 2x - 3$. Tính $f'(1) + f'(-1) + 4f'(0)$?

A. 4.

B. 7.

C. 6.

D. 5.

Lời giải:

□ Phương pháp tự luận:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 - 2$.

$$\Rightarrow f'(1) = 6; f'(-1) = 6; f'(0) = -2 \Rightarrow f'(1) + f'(-1) + 4f'(0) = 4.$$

□ Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng Casio

$$\text{Bấm } \left. \frac{d(x^5 + x^3 - 2x - 3)}{dx} \right|_{x=1} + \left. \frac{d(x^5 + x^3 - 2x - 3)}{dx} \right|_{x=-1} - 4 \left. \frac{d(x^5 + x^3 - 2x - 3)}{dx} \right|_{x=0} = 4.$$

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$. Tính $y'(3)$

A. $\frac{5}{2}$.

B. $-\frac{3}{4}$.

C. $-\frac{3}{2}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

$$y'(3) = \frac{-3}{(3-1)^2} = -\frac{3}{4}.$$

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

- A. Không tồn tại. B. $f'(0) = \frac{1}{16}$. C. $f'(0) = \frac{1}{4}$. D. $f'(0) = \frac{1}{32}$.

Lời giải

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3-\sqrt{4-x}}{4} - \frac{1}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-\sqrt{4-x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4-(4-x)}{4x(2+\sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4(2+\sqrt{4-x})} = \frac{1}{16}$$

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+4}}$. Tính giá trị biểu thức $f'(0)$.

- A. -3. B. -2. C. $\frac{3}{2}$. D. 3.

Lời giải

Cách 1: Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{3\sqrt{x^2+4} - (3x+1) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2} = \frac{12-x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{3}{2}.$$

DẠNG 2. TÍNH ĐẠO HÀM CỦA MỘT SỐ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP

Câu 17: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 + 2x + 1$.

- A. $y' = 3x^2 + 2x$. B. $y' = 3x^2 + 2$. C. $y' = 3x^2 + 2x + 1$. D. $y' = x^2 + 2$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 + 2$.

Câu 18: Đạo hàm của hàm số $y = x^4 - 4mx^2 - 3m - 1$ (m là tham số) là

- A. $y' = 4x^3 - 8mx$. B. $y' = 4x^3 - 8mx - 3m - 1$.
C. $y' = 4x^3 - 8mx - 1$. D. $y' = 4x^2 - 8mx$.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 - 8mx$.

Câu 19: Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$. B. $(x)' = 0$.

C. $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$.

D. $(k.x)' = k$, với k là hằng số.

Lời giải

Đáp án A sai vì $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Đáp án B sai vì $(x)' = 1$

Đáp án C sai vì $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

Đáp án D đúng.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ là hàm số trên $\mathbb{R}$ định bởi $f(x) = 2x$. **Chọn câu đúng.**

A. $f'(x) = 2$

B. $f'(x) = 1$

C. $f'(x) = x$

D. $f'(x)$ không tồn tại.

Lời giải

Ta thấy: $f'(x) = (2x)' = 2$

Câu 21: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0,25x^4$ là

A. $y' = -\frac{1}{3} + 2x - 2x^3$.

B. $y' = -\frac{1}{3} + x - 2x^3$.

C. $y' = \frac{1}{3} + x - 2x^3$.

D. $y' = -\frac{1}{3} + 2x - x^3$.

Lời giải

$$y' = \left(\frac{1}{4}\right)' - \left(\frac{1}{3}x\right)' + (x^2)' - (0,25x^4)' = -\frac{1}{3} + 2x - x^3.$$

Câu 22: Cho hàm số $y = \frac{3x+5}{-1+2x}$. Đạo hàm y' của hàm số là:

A. $\frac{7}{(2x-1)^2}$.

B. $\frac{1}{(2x-1)^2}$.

C. $-\frac{13}{(2x-1)^2}$.

D. $\frac{13}{(2x-1)^2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = \frac{(3x+5)' \cdot (2x-1) - (3x+5)(2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{3(2x-1) - 2(3x+5)}{(2x-1)^2} = \frac{-13}{(2x-1)^2}$$

Câu 23: Đạo hàm của hàm số $y = -2x^3 + 3$ là

A. $y' = -6x$.

B. $y' = -6x^2 + 3$.

C. $y' = -6x^2$.

D. $y' = -3x^2$.

Lời giải

$$y' = -3 \cdot 2 \cdot x^2 = -6x^2.$$

Câu 24: Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = (x^3 - 2x^2)^2$.

A. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3$.

B. $f'(x) = 6x^5 + 16x^3$.

C. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 4x^3$.

D. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 - 16x^3$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 2(x^3 - 2x^2) \cdot (x^3 - 2x^2)'$

$$= 2(x^3 - 2x^2) \cdot (3x^2 - 4x)$$

$$= 6x^5 - 8x^4 - 12x^4 + 16x^3$$

$$= 6x^5 - 20x^4 + 16x^3.$$

Câu 25: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 - 2021x + 2022$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $y' = x^4 - 6x^2 - 2021$ **B.** $y' = x^3 - 6x - 2021$

C. $y' = \frac{3}{4}x^3 - 6x - 2021$ **D.** $y' = x^3 - 6x - 2021x + 2022$

Lời giải

Ta

có:

$$y = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 - 2021x + 2022$$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{1}{4}x^4 - 3x^2 - 2021x + 2022 \right)' = \left(\frac{1}{4}x^4 \right)' - (3x^2)' - (2021x)' + (2022)' = x^3 - 6x - 2021.$$

Câu 26: Hàm số nào sau đây là đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x+3}{3x-1}$.

A. $y' = \frac{-11}{(3x-1)^2}$

B. $y' = \frac{7}{(3x-1)^2}$

C. $y' = \frac{2}{(3x-1)^2}$

D. $y' = \frac{2}{3}$

Lời giải

Ta có:

$$y' = \left(\frac{2x+3}{3x-1} \right)' = \frac{(2x+3)'(3x-1) - (2x+3)(3x-1)'}{(3x-1)^2} = \frac{2(3x-1) - (2x+3) \cdot 3}{(3x-1)^2} = \frac{-11}{(3x-1)^2}$$

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$. Biết $f'(x) = \frac{ax+b}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $\forall x$. Tính $S = 2a + b$

A. $S = 3$.

B. $S = 1$.

C. $S = -1$.

D. $S = 5$.

Lời giải

Ta có:

$$\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{(x-1)' \sqrt{x^2+1} - (x-1)(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1} = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x-1) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2+x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

Vậy $S = 2a + b = 3$.

Câu 28: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{1-2x^2}$ là kết quả nào sau đây?

A. $y' = \frac{1}{2\sqrt{1-2x^2}}$. **B.** $y' = \frac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}}$. **C.** $y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$. **D.** $y' = \frac{2x}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}} = \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Câu 29: Đạo hàm của hàm số $y = (1-2x)^3$ là

A. $y' = 3 \cdot (1-2x)^2$. **B.** $y' = 6 \cdot (1-2x)^2$. **C.** $y' = -3 \cdot (1-2x)^2$. **D.** $y' = -6 \cdot (1-2x)^2$.

Lời giải

Áp dụng công thức $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$, với $u = 1-2x$, $n = 3$.

Suy ra $y' = 3 \cdot (1-2x)^2 \cdot (1-2x)' = -6 \cdot (1-2x)^2$.

Câu 30: Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2-2)(2x-1)$.

A. $y' = 4x$. **B.** $y' = 3x^2 - 6x + 2$. **C.** $y' = 6x^2 - 2x - 4$. **D.** $y' = 2x^2 - 2x + 4$.

Lời giải

Ta có: $y' = (x^2-2)'(2x-1) + (x^2-2)(2x-1)' = 2x(2x-1) + 2(x^2-2) = 6x^2 - 2x - 4$.

Câu 31: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2+2x-3}{x+2}$.

A. $y' = 1 + \frac{3}{(x+2)^2}$. **B.** $y' = \frac{x^2+6x+7}{(x+2)^2}$. **C.** $y' = \frac{x^2+4x+5}{(x+2)^2}$. **D.** $y' = \frac{x^2+8x+1}{(x+2)^2}$.

Lời giải

Ta có $y = x - \frac{3}{x+2} \Rightarrow y' = 1 + \frac{3}{(x+2)^2}$.

Câu 32: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{1-3x}$.

A. $y' = \frac{4}{(1-3x)^2}$. **B.** $y' = \frac{4x}{(1-3x)^2}$. **C.** $y' = \frac{-4}{(1-3x)^2}$. **D.** $y' = \frac{4}{1-3x}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có } y &= \frac{x+1}{1-3x} \Rightarrow y' = \left(\frac{x+1}{1-3x} \right)' \\ &= \frac{(x+1)' \cdot (1-3x) - (x+1) \cdot (1-3x)'}{(1-3x)^2} = \frac{(1-3x) + 3(x+1)}{(1-3x)^2} = \frac{4}{(1-3x)^2}.\end{aligned}$$

Câu 33: Hàm số $y = -\frac{1}{\sin^2 x}$ là đạo hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $y = \tan x$.

B. $y = \cot x$.

C. $y = -\cot x$.

D. $y = \frac{1}{\sin x}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Câu 34: Cho hàm số $f(x) = \sin^2 2x$. Tính $f'(x)$.

A. $f'(x) = 2 \sin 2x$.

B. $f'(x) = 2 \cos^2 2x$.

C. $f'(x) = 2 \sin 4x$.

D. $f'(x) = -2 \sin 4x$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = 2 \cdot \sin 2x \cdot (\sin 2x)' = 2 \cdot \sin 2x \cdot 2 \cdot \cos 2x = 2 \cdot \sin 4x.$$

Câu 35: Đạo hàm của hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 3$ là

A. $y' = -4x^3 + 8x$.

B. $y' = 4x^2 - 8x$.

C. $y' = 4x^3 - 8x$.

D. $y' = -4x^2 + 8x$

Lời giải

$$y' = (x^4 - 4x^2 - 3)' = 4x^3 - 8x.$$

Câu 36: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \sqrt{2x} + a^2$ (a là hằng số) bằng.

A. $2x^3 + 5x^2 - \frac{1}{\sqrt{2x}} + 2a$.

B. $2x^3 + 5x^2 + \frac{1}{2\sqrt{2x}}$.

C. $2x^3 + 5x^2 - \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

D. $2x^3 + 5x^2 - \sqrt{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 2x^3 + 5x^2 - \frac{1}{\sqrt{2x}}.$$

Câu 37: Hàm số nào sau đây có đạo hàm bằng $\frac{1}{\sqrt{2x}}$?

A. $f(x) = 2\sqrt{x}$.

B. $f(x) = \sqrt{x}$.

C. $f(x) = \sqrt{2x}$.

D. $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = (\sqrt{2x})' = \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

Câu 38: Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 5)\sqrt{x}$.

A. $y' = \frac{7}{2}\sqrt{x^2} - \frac{5}{2\sqrt{x}}$.

B. $y' = \frac{7}{2}\sqrt{x^5} - \frac{5}{2\sqrt{x}}$.

C. $y' = 3x^2 - \frac{5}{2\sqrt{x}}$.

D. $y' = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 \cdot \sqrt{x} + (x^3 - 5) \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3x^2 \sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2 \sqrt{x} - \frac{5}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2}x^2 \sqrt{x} - \frac{5}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2}\sqrt{x^5} - \frac{5}{2\sqrt{x}}$.

Câu 39: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ là:

A. $\frac{1-3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

B. $\frac{1+3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

C. $\frac{1-3x}{x^2+1}$.

D. $\frac{2x^2-x-1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải

Ta có $y' = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{(x+3)x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1-3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

Câu 40: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+3}$. Tính giá trị của biểu thức $S = f(1) + 4f'(1)$.

A. $S = 4$.

B. $S = 2$.

C. $S = 6$.

D. $S = 8$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = \sqrt{x^2+3} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

Vậy $S = f(1) + 4f'(1) = 4$.

Câu 41: Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2+5x-4}$. Đạo hàm y' của hàm số là

A. $y' = \frac{4x+5}{2\sqrt{2x^2+5x-4}}$.

B. $y' = \frac{2x+5}{2\sqrt{2x^2+5x-4}}$.

C. $y' = \frac{2x+5}{\sqrt{2x^2+5x-4}}$.

D. $y' = \frac{4x+5}{\sqrt{2x^2+5x-4}}$.

Lời giải

Ta có $y' = \left(\sqrt{2x^2 + 5x - 4} \right)' = \frac{(2x^2 + 5x - 4)'}{2\sqrt{2x^2 + 5x - 4}} = \frac{4x + 5}{2\sqrt{2x^2 + 5x - 4}}$

Câu 42: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 - \frac{1}{x}$.

A. $y' = 2x - \frac{1}{x^2}$. B. $y' = x - \frac{1}{x^2}$. C. $y' = x + \frac{1}{x^2}$. **D. $y' = 2x + \frac{1}{x^2}$.**

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Có $y' = 2x + \frac{1}{x^2}$.

Câu 43: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$

A. $y' = \frac{2}{(x-1)^2}$. B. $y' = \frac{2}{(x-1)}$. **C. $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$.** D. $y' = \frac{-2}{(x-1)}$.

Lời giải

$$y = \frac{2x}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

Câu 44: Hàm số $y = \frac{1}{x^2 + 5}$ có đạo hàm bằng:

A. $y' = \frac{1}{(x^2 + 5)^2}$. B. $y' = \frac{2x}{(x^2 + 5)^2}$. C. $y' = \frac{-1}{(x^2 + 5)^2}$. **D. $y' = \frac{-2x}{(x^2 + 5)^2}$.**

Lời giải

$$y' = \frac{-2x}{(x^2 + 5)^2}$$

Câu 45: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 7}{x^2 + 2x + 3}$.

A. $y' = \frac{-7x^2 + 2x + 23}{(x^2 + 2x + 3)^2}$. **B. $y' = \frac{7x^2 - 2x - 23}{(x^2 + 2x + 3)^2}$**

C. $y' = \frac{7x^2 - 2x - 23}{(x^2 + 2x + 3)}$ D. $y' = \frac{8x^3 + 3x^2 + 14x + 5}{(x^2 + 2x + 3)^2}$

Lời giải

$$y = \frac{2x^2 - 3x + 7}{x^2 + 2x + 3} \Rightarrow y' = \frac{(4x - 3)(x^2 + 2x + 3) - (2x + 2)(2x^2 - 3x + 7)}{(x^2 + 2x + 3)^2} = \frac{7x^2 - 2x - 23}{(x^2 + 2x + 3)^2}$$

Câu 46: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+a}{x-b}$ ($a, b \in \mathbb{R}; b \neq 1$). Ta có $f'(1)$ bằng:

A. $\frac{-a+2b}{(b-1)^2}$.

B. $\frac{a-2b}{(b-1)^2}$.

C. $\frac{a+2b}{(b-1)^2}$.

D. $\frac{-a-2b}{(b-1)^2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{2(x-b) - 2x - a}{(x-b)^2} = \frac{-a-2b}{(x-b)^2}$$

Câu 47: Cho $f(x) = \sqrt{1-4x} + \frac{1-x}{x-3}$. Tính $f'(x)$.

A. $\frac{2}{\sqrt{1-4x}} - \frac{2}{x-3}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{1-4x}} - \frac{2}{(x-3)^2}$.

C. $\frac{1}{2\sqrt{1-4x}} + 1$

D. $\frac{-2}{\sqrt{1-4x}} + \frac{2}{(x-3)^2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt{1-4x} + \frac{1-x}{x-3} \right)' = (\sqrt{1-4x})' + \left(\frac{1-x}{x-3} \right)' \\ &= \frac{(1-4x)'}{2\sqrt{1-4x}} + \frac{(1-x)'(x-3) - (1-x)(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{-2}{\sqrt{1-4x}} + \frac{2}{(x-3)^2}. \end{aligned}$$

Câu 48: Đạo hàm của hàm số $y = (2x-1)\sqrt{x^2+x}$ là

A. $y' = \frac{8x^2+4x-1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

B. $y' = \frac{8x^2+4x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

C. $y' = \frac{4x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

D. $y' = \frac{6x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y' &= 2\sqrt{x^2+x} + \frac{(2x-1)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}} \\ &= \frac{4x^2+4x+4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}} = \frac{8x^2+4x-1}{2\sqrt{x^2+x}}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } y' = \frac{8x^2+4x-1}{2\sqrt{x^2+x}}.$$

Câu 49: Đạo hàm của hàm số $y = (-x^2+3x+7)^7$ là

A. $y' = 7(-2x+3)(-x^2+3x+7)^6$.

B. $y' = 7(-x^2+3x+7)^6$.

C. $y' = (-2x+3)(-x^2+3x+7)^6$.

D. $y' = 7(-2x+3)(-x^2+3x+7)^6$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 7(-x^2+3x+7)^6 (-x^2+3x+7)' = 7(-2x+3)(-x^2+3x+7)^6.$$

Câu 50: Đạo hàm của hàm số $y = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^3$ bằng

A. $y' = 6\left(x + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$.

B. $y' = 3\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$.

C. $y' = 6\left(x - \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$.

D. $y' = 6\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$

Lời giải

$$y' = 3 \cdot \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)' \cdot \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2 = 6\left(x + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2.$$

Câu 51: Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $y' = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$. **B.** $y' = \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{2}{3}}$.

C. $y' = \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{8}{3}}$. **D.** $y' = \frac{2x+1}{2\sqrt[3]{x^2+x+1}}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}-1}(x^2+x+1)' = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}.$$

Câu 52: Đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^2$ bằng:

A. $6x^5 - 20x^4 - 16x^3$.

B. $6x^5 - 20x^4 + 4x^3$.

C. $6x^5 + 16x^3$.

D. $6x^5 - 20x^4 + 16x^3$.

Lời giải

$$y' = 2(x^3 - 2x^2) \cdot (x^3 - 2x^2)' = 2(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 4x) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3.$$

Câu 53: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2-3x^2}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{-3x}{\sqrt{2-3x^2}}$.

B. $\frac{1}{2\sqrt{2-3x^2}}$.

C. $\frac{-6x^2}{2\sqrt{2-3x^2}}$.

D. $\frac{3x}{\sqrt{2-3x^2}}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{2-3x^2}\right)' = \frac{(2-3x^2)'}{2\sqrt{2-3x^2}} = \frac{-6x}{2\sqrt{2-3x^2}} = \frac{-3x}{\sqrt{2-3x^2}}.$$

Câu 54: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x$. Tập nghiệm của bất phương trình $y' \geq 0$ là

A. $[-1; 5]$.

B. $\emptyset$.

C. $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

D. $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

Lời giải

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x \Rightarrow y' = x^2 - 4x - 5$$

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty).$$

Câu 55: Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 3x - 5$ với m là tham số. Tìm tập hợp M tất cả các giá trị của m để $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt:

A. $M = (-3; 3)$. **B.** $M = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

C. $M = \mathbb{R}$. **D.** $M = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

Lời giải

$$y = x^3 + mx^2 + 3x - 5 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2mx + 3.$$

$$y' = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow m < -3 \vee 3 < m.$$

Câu 56: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2017$. Bất phương trình $y' < 0$ có tập nghiệm là:

A. $S = (-1; 1)$. **B.** $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

C. $(1; +\infty)$. **D.** $(-\infty; -1)$.

Lời giải

$$y = x^3 - 3x + 2017 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3, y' < 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Câu 57: Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3$. Tìm x để $f'(x) > 0$?

A. $-1 < x < 0$.

B. $x < 0$.

C. $x > 0$.

D. $x < -1$.

Lời giải

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x > 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

Câu 58: Cho hàm số $y = (m+2)x^3 + \frac{3}{2}(m+2)x^2 + 3x - 1$, m là tham số. Số các giá trị nguyên m để

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ là}$$

A. 5.

B. Có vô số giá trị nguyên m .

C. 3.

D. 4

Lời giải

$$y' = 3(m+2)x^2 + 3(m+2)x + 3 \geq 0 \Rightarrow (m+2)x^2 + (m+2)x + 1 \geq 0(1)$$

Để phương trình (1) luôn thỏa mãn $\forall x \in \mathbb{R}$

TH1: $m+2 = 0 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow y' = 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

TH2: $m+2 \neq 0 \Rightarrow m \neq -2 \Rightarrow \begin{cases} m+2 > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m^2 - 4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > -2 \\ -2 \leq m \leq 2 \end{cases} \Rightarrow -2 < m \leq 2$

Kết hợp hai trường hợp: $m = -2; -1; 0; 1; 2$.

Câu 59: Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3mx^2 - 12x + 3$ với m là tham số thực. Số giá trị nguyên của m để $f'(x) \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ là

- A. 1. B. 5. C. 4. D. 3.

Lời giải

$$f(x) = -x^3 + 3mx^2 - 12x + 3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6mx - 12$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3x^2 + 6mx - 12 \leq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < 0 \\ 9m^2 - 36 \leq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 60: Cho hàm số $f(x) = \frac{mx^3}{3} - \frac{mx^2}{2} + (3-m)x - 2$. Tìm m để $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

- A. $0 \leq m \leq \frac{12}{5}$. B. $0 < m < \frac{12}{5}$. C. $0 \leq m < \frac{12}{5}$. D. $0 < m \leq \frac{12}{5}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = mx^2 - mx + (3-m)$$

$$+ \text{ Nếu } m = 0 \text{ thì } f'(x) = 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$+ \text{ Nếu } m \neq 0 \text{ thì } f'(x) = mx^2 - mx + (3-m) \text{ là tam thức bậc hai,}$$

$$f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = m^2 - 4m(3-m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 5m^2 - 12m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{12}{5}$$

$$\text{Vậy } 0 \leq m < \frac{12}{5}.$$

Câu 61: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{-5x^2 + 14x - 9}$ Tập hợp các giá trị của x để $f'(x) < 0$ là

- A. $\left(\frac{7}{5}; +\infty\right)$. B. $\left(-\infty; \frac{7}{5}\right)$. C. $\left(\frac{7}{5}; \frac{9}{5}\right)$. D. $\left(1; \frac{7}{5}\right)$.

Lời giải

$$\text{Tập xác định: } D = \left[1; \frac{9}{5}\right].$$

$$\text{Ta có } f(x) = \sqrt{-5x^2 + 14x - 9} \Rightarrow f'(x) = \frac{-5x + 7}{\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}}, \forall x \in \left(1; \frac{9}{5}\right).$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{-5x + 7}{\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 7 < 0 \\ 1 < x < \frac{9}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{5} < x < \frac{9}{5}.$$

Câu 62: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Tìm tập nghiệm S của phương trình $f'(x) \geq f(x)$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là: $D = (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

Ta có: $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$. Vậy $f'(x) \geq f(x) \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \geq \sqrt{x^2-2x} \Leftrightarrow \frac{-x^2+3x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \geq 0$.

Với $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, ta có: $\frac{-x^2+3x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \geq 0 \Leftrightarrow -x^2+3x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right]$

Kết hợp với điều kiện $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, ta có: $x \in \left[2; \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right]$. Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $x \in \emptyset$.

Vậy $S = \emptyset$.

Câu 63: Cho $\left(\frac{3-2x}{\sqrt{4x-1}} \right)' = \frac{ax-b}{(4x-1)\sqrt{4x-1}}, \forall x > \frac{1}{4}$. Tính $\frac{a}{b}$.

A. -16.

B. -4.

C. -1.

D. 4.

Lời giải

Với $\forall x > \frac{1}{4}$, ta có:

$$\left(\frac{3-2x}{\sqrt{4x-1}} \right)' = \frac{(3-2x)' \sqrt{4x-1} - (3-2x)(\sqrt{4x-1})'}{(4x-1)} = \frac{-2\sqrt{4x-1} - \frac{6-4x}{\sqrt{4x-1}}}{(4x-1)} = \frac{-4x-4}{(4x-1)\sqrt{4x-1}}.$$

Do đó $a = -4, b = 4 \Rightarrow \frac{a}{b} = -1$.

Câu 64: Cho $y = \sqrt{x^2-2x+3}$, $y' = \frac{ax+b}{\sqrt{x^2-2x+3}}$. Khi đó giá trị $a.b$ là:

A. -4.

B. -1.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

$$y = \sqrt{x^2-2x+3} \Rightarrow y' = \frac{(x^2-2x+3)'}{2\sqrt{x^2-2x+3}} = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+3}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}} \Rightarrow a = 1; b = -1.$$

Câu 65: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + \frac{b}{x}$ có $f'(1) = 1, f'(-2) = -2$. Khi đó $f'(\sqrt{2})$ bằng:

A. $\frac{12}{5}$.

B. $-\frac{2}{5}$.

C. 2.

D. $-\frac{12}{5}$.

Lời giải

$$f'(x) = 3ax^2 - \frac{b}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = 3a - b \\ f'(-2) = 12a - \frac{b}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a - b = 1 \\ 12a - \frac{b}{4} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{8}{5} \end{cases}.$$

$$f'(\sqrt{2}) = 6a - \frac{b}{2} = -\frac{2}{5}.$$

Câu 66: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+5m}$ có đạo hàm dương trên khoảng $(-\infty; -10)$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. vô số.

Lời giải

Tập xác định: $D = (-\infty; -5m) \cup (-5m; +\infty)$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{5m-2}{(x+5m)^2}$$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m-2 > 0 \\ -10 \leq -5m \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < m \leq 2$$

$$\text{Vì } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2\}.$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn YCBT

Câu 67: Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)\dots(x-2022)}$. Tính $f'(0)$

A. $\frac{1}{2023}$.

B. $\frac{1}{2022}$.

C. $\frac{1}{2023!}$.

D. $\frac{1}{2022!}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } g(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-2022) \Rightarrow f(x) = \frac{x}{g(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x' \cdot g(x) - x \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \frac{g(x) - x \cdot g'(x)}{g^2(x)} = \frac{1}{g(x)} - x \cdot \frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

$$f'(0) = \frac{1}{g(0)} - 0 \cdot \frac{g'(0)}{g^2(0)} = \frac{1}{g(0)} = \frac{1}{(-1) \cdot (-2) \dots (-2022)} = \frac{1}{2022!}$$

Câu 68: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn: $f^3(2-x) - 2f^2(2+3x) + x^2 \cdot g(x) + 36x = 0$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $A = 3f(2) + 4f'(2)$.

A. 11

B. 13

C. 14

D. 10

Lời giải

$$\text{Với } \forall x \in \mathbb{R}, \text{ ta có } f^3(2-x) - 2f^2(2+3x) + x^2 \cdot g(x) + 36x = 0 \quad (1).$$

Đạo hàm hai vế của (1), ta được

$$-3f^2(2-x) \cdot f'(2-x) - 12f(2+3x) \cdot f'(2+3x) + 2x \cdot g(x) + x^2 \cdot g'(x) + 36 = 0 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2), thay } x=0, \text{ ta có } \begin{cases} f^3(2) - 2f^2(2) = 0 & (3) \\ -3f^2(2) \cdot f'(2) - 12f(2) \cdot f'(2) + 36 = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\text{Từ (3), ta có } \begin{cases} f(2) = 0 \\ f(2) = 2 \end{cases}.$$

Với $f(2) = 0$, thế vào (4) ta được $36 = 0$.

Với $f(2) = 2$, thế vào (4) ta được $-36 \cdot f'(2) + 36 = 0 \Leftrightarrow f'(2) = 1$.

$$\text{Vậy } A = 3f(2) + 4f'(2) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 10.$$

DẠNG 3. BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN

Câu 69: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{2x-3}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ có hệ số góc bằng

- A. 5. B. $-\frac{1}{5}$. C. -5. D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{-5}{(2x-3)^2}$$

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$:

$$f'(-1) = \frac{-5}{(2 \cdot (-1) - 3)^2} = \frac{-1}{5}$$

Câu 70: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 5$ tại điểm có hoành độ $x = -1$.

- A. $y = 4x - 6$. B. $y = 4x + 2$. C. $y = 4x + 6$. D. $y = 4x - 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 8x, \quad y'(-1) = 4.$$

Điểm thuộc đồ thị đã cho có hoành độ $x = -1$ là: $M(-1; 2)$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(-1; 2)$ là:

$$y = y'(-1)(x+1) + 2 \Leftrightarrow y = 4(x+1) + 2 \Leftrightarrow y = 4x + 6.$$

Câu 71: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-2}$ tại điểm có hoành độ bằng 3, tương ứng là

- A. $y = 7x + 13$. B. $y = -7x + 30$. C. $y = 3x + 9$. D. $y = -x - 2$.

Lời giải

$$x = 3 \Rightarrow y = 9;$$

$$y' = \frac{-7}{(x-2)^2} \Rightarrow y'(3) = -7.$$

Phương trình tiếp tuyến tương ứng là $y = -7(x-3) + 9 \Leftrightarrow y = -7x + 30$.

Câu 72: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$ có đồ thị là (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm

$M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là:

A. $y = 3x - 2$.

B. $y = -3x + 2$.

C. $y = x - \frac{2}{3}$.

D. $y = -x + \frac{2}{3}$.

Lời giải

$$y' = x^2 + 2x - 2$$

$$y'(1) = 1 + 2 - 2 = 1$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là:

$$y = y'(1)(x-1) + \frac{1}{3} = x - 1 + \frac{1}{3} = x - \frac{2}{3}$$

Câu 73: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ tại điểm có hoành độ bằng 2.

A. $y = -9x + 16$.

B. $y = -9x + 20$.

C. $y = 9x - 20$.

D. $y = 9x - 16$.

Lời giải

$$y' = 3x^2 - 3$$

Ta có $y(2) = 2$ và $y'(2) = 9$. Do đó PTTT cần tìm là: $y = 9(x-2) + 2 \Leftrightarrow y = 9x - 16$

Câu 74: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = 3x - 4x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là

A. $y = 0$.

B. $y = 3x$.

C. $y = 3x - 2$.

D. $y = -12x$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = 3 - 8x$.

Phương trình tiếp tuyến: $y = y'_{(0)} \cdot (x - 0) + y_{(0)} \Rightarrow \Delta: y = 3x$.

Câu 75: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

A. $y = -2x + 1$.

B. $y = 2x + 1$.

C. $y = 3x - 2$.

D. $y = -3x - 2$.

Lời giải

$$+) y' = -3x^2 + 3$$

+) Giao điểm của (C) với trục tung có tọa độ là $(0; -2)$.

+) Tiếp tuyến của (C) tại điểm $(0; -2)$ có phương trình là:

$$y = y'(0)(x - 0) - 2 \Leftrightarrow y = 3x - 2.$$

Câu 76: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = x^4 - 8x^2 + 9$ tại điểm M có hoành độ bằng -1.

A. $y = 12x + 14.$

B. $y = 12x - 14.$

C. $y = 12x + 10.$

D. $y = -20x - 22.$

Lời giải

Tập xác định $\mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 16x. \Rightarrow y'(-1) = 12.$$

$$M(-1; y_0) \in (C) \Leftrightarrow y_0 = 2.$$

Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(-1; 2)$ có phương trình là $y = y'(-1)(x + 1) + 2 \Leftrightarrow y = 12x + 14$.

Vậy tiếp tuyến cần tìm có phương trình là $y = 12x + 14$.

Câu 77: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trên tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.

A. $y = 3x - 2.$

B. $y = -3x - 2.$

C. $y = 3x - 3.$

D. $y = 3x + 2.$

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$y = \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{3}{(x+1)^2}.$$

$$y(0) = -2, y'(0) = 3$$

$\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trên tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là

$$y = 3(x - 0) - 2 \Leftrightarrow y = 3x - 2.$$

Câu 78: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{-x+3}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 0$ là

A. $y = -2x + 3.$

B. $y = -2x - 3.$

C. $y = 2x - 3.$

D. $y = 2x + 3.$

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$y' = \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(0) = -2.$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = -3$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -2x - 3$.

Câu 79: Cho hàm số $y = x^3 - 2x + 1$ có đồ thị (C) . Hệ số góc k của tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 bằng

A. $k = -5$.

B. $k = 10$.

C. $k = 25$.

D. $k = 1$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 2$.

Hệ số góc k của tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 bằng $k = y'(1) = 1$.

Câu 80: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{-x+1}{3x-2}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có hệ số góc là

A. -1 .

B. $\frac{1}{4}$.

C. $-\frac{5}{4}$.

D. $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{-1}{(3x-2)^2}$.

Gọi M là tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung $\Rightarrow M\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

Vậy hệ số góc cần tìm là: $k = y'(0) = -\frac{1}{4}$.

Câu 81: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 3.

Tìm hệ số góc k của đường thẳng d .

A. $-\frac{1}{2}$.

B. -2

C. 2 .

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Với $y = 3$, ta có: $\frac{x+1}{x-1} = 3 \Rightarrow 3x - 3 = x + 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Ta có: $y' = -\frac{2}{(x-1)^2}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 2 là:

$k = y'(2) = -\frac{2}{(2-1)^2} = -2$.

Câu 82: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = x^2 + x - 2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

A. $x + y - 1 = 0$.

B. $x - y - 2 = 0$.

C. $x + y + 3 = 0$.

D. $x - y - 1 = 0$.

Lời giải

Đặt $y = f(x) = x^2 + x - 2$

Ta có $y' = f'(x) = 2x + 1$

Tại $x_0 = -1 \Rightarrow \begin{cases} f'(-1) = -1 \\ y_0 = f(-1) = -2 \end{cases}$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

$$y = -(x+1) - 2 \Leftrightarrow y = -x - 3 \Leftrightarrow x + y + 3 = 0.$$

Câu 83: Hệ số góc tiếp tuyến tại $A(1;0)$ của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ là

- A. 1. B. -1. C. -3. D. 0.

Lời giải

$$y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x.$$

Hệ số góc tiếp tuyến tại $A(1;0)$ của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ là $f'(1) = 3.1^2 - 6.1 = -3$.

Câu 84: Gọi I là giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ và trục tung của hệ trục tọa độ Oxy . Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số trên tại I là

- A. -2. B. 0. C. -1. D. 2.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ta có $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

Theo bài ra ta có $I(0;-1)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại I là $y'(0) = \frac{-2}{(0-1)^2} = -2$.

Câu 85: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

- A. $y = 2x + 9$. B. $y = -2x + 9$. C. $y = 2x - 9$. D. $y = -2x - 9$.

Lời giải

Ta có $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$, $y'(2) = -2$. Khi $x = 2$ thì $y = 5$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

$$y = -2(x-2) + 5 \Leftrightarrow y = -2x + 9.$$

Câu 86: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (H) : $y = \frac{x-1}{x+2}$ tại giao điểm của (H) và trục hoành là:

- A. $y = x - 3$. B. $y = \frac{1}{3}(x-1)$. C. $y = 3x$. D. $y = 3(x-1)$.

Lời giải

Giao điểm của (H) và trục hoành là điểm $M(1;0)$.

Ta có $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$ nên $y'(1) = \frac{1}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến với (H) tại điểm M là: $y = y'(1)(x-1) + 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(x-1)$.

Câu 87: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ có đồ thị. Hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến với đồ thị là.

A. 1

B. 6

C. 12

D. 9

Lời giải

Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ có đồ thị có tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số (C) là $y' = -3x^2 + 6x + 9 = 12 - 3(x+1)^2 \leq 12$

Vậy hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến với đồ thị hàm số là 12

Câu 88: Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1; 4)$ là

A. $y = 8x - 4$.

B. $y = x + 3$.

C. $y = -8x + 12$.

D. $y = 8x + 4$.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 + 4x \Rightarrow y'(1) = 8$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 8(x-1) + 4 = 8x - 4$.

Câu 89: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại điểm $A(2; 3)$ có phương trình $y = ax + b$. Tính $a + b$

A. 9.

B. 5.

C. 1.

D. -1.

Lời giải

Điều kiện $x \neq 1$.

Ta có $y' = \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(2) = -2$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $A(2; 3)$ là: $y = -2(x-2) + 3 = -2x + 7$.

Do đó $a = -2; b = 7 \Rightarrow a + b = 5$.

Câu 90: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 5$ tại điểm có hoành độ $x = 2$.

A. $y = -8x - 16$.

B. $y = 8x - 19$.

C. $y = -8x + 16$.

D. $y = 8x + 19$.

Lời giải

Ta có $y(2) = 2^4 - 6 \cdot 2^2 + 5 = -3$.

$y' = 4x^3 - 12x \Rightarrow y'(2) = 4 \cdot (2)^3 - 12 \cdot 2 = 8$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số: $y = y'(2) \cdot (x-2) + y(2)$.

$$\Rightarrow y = 8(x-2) - 3 = 8x - 19.$$

Câu 91: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại điểm có tung độ bằng -2 là

A. $y = 3x + 1.$

B. $y = -3x - 1.$

C. $y = -3x + 1.$

D. $y = -3x + 3.$

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ mà $y_0 = -2$.

Khi đó $\frac{x_0+1}{x_0-2} = -2 \Rightarrow x_0 + 1 = -2(x_0 - 2) \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow M(1; -2).$

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-2)^2}$, suy ra $y'(1) = -3$. Do đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$y = \frac{x+1}{x-2}$ tại $M(1; -2)$ là $y = -3(x-1) - 2 = -3x + 1.$

Câu 92: Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + 1$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại M song song với đường thẳng $d: y = 3x - 1$?

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Gọi $M(a; a^3 + 1)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + 1$ (C).

Ta có $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:

$$y = 3a^2(x-a) + a^3 + 1 \Leftrightarrow y = 3a^2x - 2a^3 + 1(\Delta).$$

$$\Delta // d \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 = 3 \\ -2a^3 + 1 \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1.$$

Vậy, có duy nhất điểm M thỏa mãn yêu cầu là $M(-1; 0).$

Câu 93: Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ (C). Số các tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y = 3x - 10$ là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

$$y = x^3 - 3x \Rightarrow y' = 3x^2 - 3$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 3x - 10$ nên

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 3 \Leftrightarrow x_0 = \pm\sqrt{2}$$

+ Với $x_0 = \sqrt{2} \Rightarrow y_0 = -\sqrt{2}$: phương trình tiếp tuyến là $y = 3(x - \sqrt{2}) - \sqrt{2} = 3x - 4\sqrt{2}$

+ Với $x_0 = -\sqrt{2} \Rightarrow y_0 = \sqrt{2}$: phương trình tiếp tuyến là $y = 3(x + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 3x + 4\sqrt{2}$

Câu 94: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3$ có đồ thị (C) . Số tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x + 2017$ là

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có $y' = -3x^2 + 6x$.

Vì tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x + 2017$ nên $y'(x_0) \cdot \left(\frac{1}{9}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow y'(x_0) = -9 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 6x_0 + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}.$$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1$, suy ra PTTT là: $y = -9(x + 1) + 1 \Leftrightarrow y = -9x - 8$.

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -3$, suy ra PTTT là: $y = -9(x - 3) - 3 \Leftrightarrow y = -9x + 24$.

Câu 95: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}, (C)$. Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = -3x$ có phương trình là

A. $y = -3x - 1; y = -3x + 11$.

B. $y = -3x + 10; y = -3x - 4$.

C. $y = -3x + 5; y = -3x - 5$.

D. $y = -3x + 2; y = -3x - 2$.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến. Theo giả thiết ta có

$$f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow \frac{-3}{(x_0 - 1)^2} = -3 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}.$$

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1$: Phương trình tiếp tuyến: $y = -3(x - 0) - 1 \Leftrightarrow y = -3x - 1$.

Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 5$: Phương trình tiếp tuyến: $y = -3(x - 2) + 5 \Leftrightarrow y = -3x + 11$.

Ta thấy cả hai tiếp tuyến đều thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 96: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1} (C)$. Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $x + 3y + 2 = 0$ tại điểm có hoành độ

A. $x = 0$.

B. $x = -2$.

C. $\begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Lời giải

Tiếp tuyến của vuông góc với đường thẳng $x + 3y + 2 = 0$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = 3$.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình: $y' = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{(x+1)^2} = 3 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Vậy hoành độ tiếp điểm cần tìm là: $\begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

Câu 97: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = 9x + 10$ là

A. $y = 9x + 6, y = 9x - 28$.

B. $y = 9x, y = 9x - 26$.

C. $y = 9x - 6, y = 9x - 28$.

D. $y = 9x + 6, y = 9x - 26$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$

Hệ số góc: $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow x_0 = 3; x_0 = -1$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(3;1)$: $y = 9(x-3) + 1 = 9x - 26$.

Phương trình tiếp tuyến tại $N(-1;-3)$: $y = 9(x+1) - 3 = 9x + 6$.

Câu 98: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 9x - y + 7 = 0$ là

A. $y = 9x + 25$.

B. $y = -9x - 25$.

C. $y = 9x - 25$

D. $y = -9x + 25$.

Lời giải

Gọi (Δ) là tiếp tuyến của đồ thị (C) và $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

$y' = 3x^2 - 6x$

Theo giả thiết: (Δ) song song với (d) : $y = 9x + 7 \Rightarrow k_{\Delta} = k_d = 9 = y'(x_0)$

$\Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2$: $(\Delta): y = 9(x+1) - 2 = 9x + 7$

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 2$: $(\Delta): y = 9(x-3) + 2 = 9x - 25$.

Câu 99: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$, tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 5$ của đồ thị hàm số là:

A. $y = 9(x+3)$.

B. $y = 9(x-3)$.

C. $y = 9x + 5$ và $y = 9(x-3)$

D. $y = 9x + 5$.

Lời giải

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 5$ nên $3x^2 - 6x = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Với $x = -1 \Rightarrow y = -4, f'(-1) = 9$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 9x + 5$

Với $x = 3 \Rightarrow y = 0, f'(3) = 9$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = 9(x - 3)$

Câu 100: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = \sqrt{2x+1}$, biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $x - 3y + 6 = 0$.

- A. $y = \frac{1}{3}x - 1$. B. $y = \frac{1}{3}x + 1$. C. $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$. D. $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

$$y = \sqrt{2x+1} \Rightarrow y' = f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

Ta có $x - 3y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + 2 \Rightarrow$ Tiếp tuyến có hệ số góc bằng $\frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2x_0+1}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = 3 \Rightarrow \text{PTTT: } y - 3 = \frac{1}{3}(x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Câu 101: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ đồ thị (C) . Có bao nhiêu cặp điểm A, B thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau:

- A. 1. B. Không tồn tại cặp điểm nào.
C. Vô số cặp điểm D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

Giả sử $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ với $x_1 \neq x_2$.

$$\text{Tiếp tuyến tại } A \text{ và tại } B \text{ song song nhau nên } y'(x_1) = y'(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{(x_1-1)^2} = \frac{1}{(x_2-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x_1-1)^2 = (x_2-1)^2 \begin{cases} x_1-1 = x_2-1 \\ x_1-1 = -x_2+1 \end{cases} \Leftrightarrow x_1+x_2 = 2$$

Vậy trên đồ thị hàm số tồn tại vô số cặp điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1+x_2 = 2$ thì các tiếp tuyến tại A và tại B song song nhau.

$$* y_1 + y_2 = \frac{x_1+1}{x_1-1} + \frac{x_2+1}{x_2-1} = \frac{2x_1x_2-2}{x_1x_2-1} = 2. \text{ Như vậy } x_1+x_2 = 2 \text{ và } y_1+y_2 = 2 \text{ hay đoạn thẳng}$$

AB có trung điểm là tâm đối xứng $I(1;1)$ của đồ thị.

Câu 102: Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ có đồ thị là (C_m) . Với giá trị nào của m thì tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ bằng 0 song song với đường thẳng $d: y = 3x + 1$.

A. $m = 3$.B. $m = 2$.C. $m = 1$.D. $m = -2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{m+1}{(x+1)^2}.$$

Gọi $M(0; -m) \in (C_m)$; k là hệ số góc của tiếp tuyến của (C_m) tại M và $d: y = 3x + 1$.Do tiếp tuyến tại M song song với d nên $k = 3 \Leftrightarrow y'(0) = 3 \Leftrightarrow 1 + m = 3 \Leftrightarrow m = -2$

Chú ý: Do đặc thù đáp án của câu này nên trong quá trình giải khi ra $m = -2$ thì ta chọn ngay đáp án, tuy nhiên trên thực tế để giải toán thuộc dạng này ta cần chú ý sau khi tìm ra m ta cần phải viết phương trình tiếp tuyến tại M để kiểm tra lại xem tiếp tuyến có song song với đường thẳng đề bài cho không vì khi hai đường này trùng nhau thì hệ số góc của chúng vẫn bằng nhau.

Câu 103: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ song song với đường thẳng $y = x$?

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = x$ của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$, khi đó ta có:

$$y'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 4x_0 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 1/3 \end{cases}.$$

Với $x_0 = 1$ ta được $M(1; 1)$, phương trình tiếp tuyến: $y = 1 \cdot (x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = x$.

Với $x_0 = \frac{1}{3}$ ta được $M\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{27}\right)$, phương trình tiếp tuyến: $y = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{27} \Leftrightarrow y = x - \frac{4}{27}$.

Vậy chỉ có một tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 104: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x + 2$ có đồ thị (C) . Phương trình các tiếp tuyến với đồ thị (C) biết

tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -2x + \frac{10}{3}$ là

A. $y = -2x + 2$.B. $y = -2x - 2$.C. $y = -2x + 10, y = -2x - \frac{2}{3}$.D. $y = -2x - 10, y = -2x + \frac{2}{3}$.

Lời giải

Giả sử $M_0(x_0; y_0)$ là tiếp điểm

Hệ số góc của tiếp tuyến tại $M_0(x_0; y_0)$ là: $f'(x_0) = x_0^2 - 4x_0 + 1$

Hệ số góc của đường thẳng $d: y = -2x + \frac{10}{3}$ là -2

Tiếp tuyến song song với đường thẳng d thì $x_0^2 - 4x_0 + 1 = -2$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

* **Th1:** $x_0 = 1, y_0 = \frac{4}{3}, f'(x_0) = -2$

Phương trình tiếp tuyến: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = -2x + \frac{10}{3}$

* **Th2:** $x_0 = 3, y_0 = -4, f'(x_0) = -2$

Phương trình tiếp tuyến: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Rightarrow y = -2x + 2$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -2x + 2$

Câu 105: Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có đồ thị là (C) . Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$.

A. $y + 16 = -9(x + 3)$. **B.** $y = -9(x + 3)$. **C.** $y - 16 = -9(x - 3)$. **D.** $y - 16 = -9(x + 3)$.

Lời giải

+ Ta có $y' = x^2 + 6x$, $y'(x_0) = -9 \Leftrightarrow x_0^2 + 6x_0 + 9 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -3$ ($y_0 = 16$)

+ Vậy $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = -9(x + 3) + 16$ hay $y - 16 = -9(x - 3)$.

Câu 106: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ biết nó song song với đường thẳng $y = 9x + 6$.

A. $y = 9x + 6$, $y = 9x - 6$.

B. $y = 9x - 26$.

C. $y = 9x + 26$.

D. $y = 9x - 26$, $y = 9x + 6$.

Lời giải

$$y' = 3x^2 - 6x$$

Gọi hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến Δ là x_0 .

Tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ biết song song với đường thẳng $y = 9x + 6$

$$\Rightarrow y'(x_0) = 9 \Rightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y(-1) = -3 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x + 1) - 3 \Rightarrow y = 9x + 6$.

Với $x_0 = 3 \Rightarrow y(3) = 1 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x - 3) + 1 \Rightarrow y = 9x - 26$.

Câu 107: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ song song với đường thẳng $y = x$?

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Giả sử tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ tại $M(x_0; y_0)$ có dạng: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = x$ nên $y'(x_0) = 1 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 4x_0 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$

+ Với $x_0 = 1, y_0 = 1 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y = x$

+ Với $x_0 = \frac{1}{3}, y_0 = \frac{5}{27} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là $y = x - \frac{4}{27}$ hay $27x - 27y - 4 = 0$.

Vậy có một tiếp tuyến thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 108: Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ song song với trục hoành là

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

$$y' = -4x^3 + 4x.$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Vì tiếp tuyến song song với trục hoành nên có hệ số góc bằng 0.

$$\text{Suy ra } y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -4x_0^3 + 4x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -1 \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

Với $x_0 = 0$ thì $y_0 = 0$, tiếp tuyến là: $y = 0$.

Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = 1$, tiếp tuyến là $y = 1$.

Với $x_0 = 1$ thì $y_0 = 1$, tiếp tuyến là $y = 1$.

Vậy có một tiếp tuyến song song với trục hoành có phương trình $y = 1$.

Câu 109: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = \frac{2x+1}{x+2}$ song song với đường thẳng

$$\Delta: y = 3x + 2 \text{ là}$$

A. $y = 3x + 2$.

B. $y = 3x - 2$.

C. $y = 3x + 14$.

D. $y = 3x + 5$.

Lời giải

Vì tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với $\Delta: y = 3x + 2$ nên gọi tọa độ tiếp điểm là $M(x_0; y_0)$ ta có

$$y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{(x_0 + 2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x_0 + 2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = -3 \end{cases}$$

$$x_0 = -1 \Rightarrow (d): y = 3(x + 1) - 1 = 3x + 2.$$

$$x_0 = -3 \Rightarrow (d): y = 3(x + 3) + 5 = 3x + 14.$$

Câu 110: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị. Tìm số tiếp tuyến của đồ thị song song với đường thẳng $d: y = 9x - 25$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$, có $y' = 3x^2 - 6x$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến và đồ thị (C) , khi đó hệ số góc của tiếp tuyến là $k = 3x_0^2 - 6x_0$.

Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = 9x - 25$ khi

$$3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2 \\ x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 2 \end{cases}$$

+ Với $M(-1; -2)$ phương trình tiếp tuyến của (C) là $y = 9x + 7$.

+ Với $M(3; 2)$ phương trình tiếp tuyến của (C) là $y = 9x - 25$.

Vậy tiếp tuyến của (C) song song với $y = 3x + 1$ là $y = 9x + 7$, nên ta có 1 tiếp tuyến cần tìm

Câu 111: Tìm điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C): y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

A. $M\left(-1; \frac{4}{3}\right)$.

B. $M(-2; 0)$.

C. $M\left(2; \frac{4}{3}\right)$.

D. $M(-2; -4)$.

Lời giải

Tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ nên tiếp tuyến có hệ số góc $k = 3$

Ta có: $y'(x) = x^2 - 1$

$$\text{Xét phương trình: } y'(x) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Do M có hoành độ âm nên $x = -2$ thỏa mãn, $x = 2$ loại.

Với $x = -2$ thay vào phương trình $(C) \Rightarrow y = 0$. Vậy điểm M cần tìm là: $M(-2; 0)$

Câu 112: Tìm các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ biết các tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = -3x$.

A. $y = -3x + 11; y = -3x - 1$.

B. $y = -3x - 6; y = -3x - 11$.

C. $y = -3x + 1$.

D. $y = -3x + 6$.

Lời giải

Gọi Δ là tiếp tuyến cần tìm

Tiếp tuyến Δ song song với đường thẳng $y = -3x$ suy ra hệ số góc của tiếp tuyến Δ là $k = -3$.

Tiếp tuyến Δ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ có phương trình dạng $y = -3(x - x_0) + y_0$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{-3}{(x-1)^2}.$$

$$y'(x_0) = k \Leftrightarrow \frac{-3}{(x_0-1)^2} = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 5 \Rightarrow M_0(2; 5)$$

$$\Rightarrow \text{Tiếp tuyến } \Delta: y = -3(x-2) + 5 \Leftrightarrow y = -3x + 11.$$

$$+ \text{ Với } x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1 \Rightarrow M_0(0; -1)$$

$$\Rightarrow \text{Tiếp tuyến } \Delta: y = -3(x-0) - 1 \Leftrightarrow y = -3x - 1.$$

Vậy có 2 tiếp tuyến cần tìm là $y = -3x + 11$ và $y = -3x - 1$.

Câu 113: Cho đường cong $(C): y = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đường cong (C) có hệ số góc bằng 7?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 9x^2 + 4x$$

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình: $4x^3 - 9x^2 + 4x = 7$.

Phương trình có 1 nghiệm nên có 1 tiếp tuyến có hệ số góc bằng 7.

Câu 114: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + m - 2$ có đồ thị (C) . Gọi S là tập các giá trị của m sao cho đồ thị (C) có đúng một tiếp tuyến song song với trục Ox . Tổng các phần tử của S là

A. 3.

B. 8.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

Vì tiếp tuyến song song với trục Ox nên hệ số góc của tiếp tuyến $k = 0$.

$$\text{Gọi tiếp điểm là } M(x_0; y_0) \in (C), \text{ khi đó } y'(x_0) = 4x_0^3 - 4x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = m - 2 \\ x_0 = \pm 1 \Rightarrow y_0 = m - 3 \end{cases}$$

$$\text{Để có đúng một tiếp tuyến song song với trục } Ox \text{ thì } \begin{cases} m = 2 \\ m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3; m = 2 \quad \begin{cases} m = 3 \\ m - 2 \neq 0 \end{cases}$$

Vậy tổng các giá trị của m là $3+2=5$.

Câu 115: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Tìm số tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $d: y = 9x - 25$.

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 6x.$$

Vì tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d: y = 9x - 25$ nên có:

$$3x^2 - 6x = 9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } x = -1 \Rightarrow y(-1) = -2.$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến: } y = 9(x+1) + 2 \Leftrightarrow y = 9x + 11.$$

+ Với $x = 3 \Rightarrow y(3) = 2$. Phương trình tiếp tuyến: $y = 9(x - 3) + 2 \Leftrightarrow y = 9x - 25$.

Vậy chỉ có 1 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 116: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ song song với đường thẳng $d: 12x + y = 0$ có dạng là $y = ax + b$. Tính giá trị của $2a + b$.

A. -23 hoặc -24 B. -23. C. -24. D. 0.

Lời giải

Ta có: $d: 12x + y = 0 \Rightarrow d: y = -12x$. Hệ số góc của đường thẳng d là $k_d = -12$.

Do tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ song song với đường thẳng d nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k_t = k_d = -12$.

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \Rightarrow y' = 6x^2 - 6x - 12.$$

Giải sử $M(x_0; y_0)$ là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến. Khi đó:

$$y'(x_0) = 6x_0^2 - 6x_0 - 12 = -12 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(0; 1) \\ M(1; -12) \end{cases} \text{ Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại } M(0; 1)$$

$$\text{là: } y = -12(x - 0) + 1 = -12x + 1.$$

$$\text{Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại } M(1; -12) \text{ là: } y = -12(x - 1) - 12 = -12x.$$

$$\text{Vậy } y = -12x + 1, \text{ như vậy } a = -12, b = 1 \Rightarrow 2a + b = -23.$$

Câu 117: Đường thẳng $y = 6x + m + 1$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x - 1$ khi m bằng

A. -4 hoặc -2. B. -4 hoặc 0. C. 0 hoặc 2. D. -2 hoặc 2.

Lời giải

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x - 1$.

$$\text{Có } y' = 3x^2 + 3.$$

$$y' = 6 \Leftrightarrow 3x^2 + 3 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 3 \\ x = -1 \Rightarrow y = -5 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1; 3)$ là: $y = 6x - 3$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(-1; -5)$ là: $y = 6x + 1$.

$$\text{Để đường thẳng } y = 6x + m + 1 \text{ là tiếp tuyến của } (C) \text{ thì } \begin{cases} m + 1 = -3 \\ m + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = 0 \end{cases}$$

Câu 118: Tính tổng S tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3mx + m^2 - 2m^3$ tiếp xúc với trục hoành.

A. $S = \frac{4}{3}$. B. $S = 1$. C. $S = 0$. D. $S = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Ta không xét $m = 0$ vì giá trị này không ảnh hưởng đến tổng S .

$$\text{Với } m \neq 0 \text{ đồ thị hàm số } f(x) \text{ tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi: } \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{I}) \text{ có nghiệm.}$$

$$\begin{aligned} (I) &\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3mx^2 + 3mx + m^2 - 2m^3 = 0 \\ 3x^2 - 6mx + 3m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 2mx) - mx^2 + 3mx + m^2 - 2m^3 = 0 \\ x^2 - 2mx = -m \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -mx^2 + 2mx + m^2 - 2m^3 = 0 \\ x^2 - 2mx + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 2x + m - 2m^2 = 0 \\ x^2 - 2mx + m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2mx - 2m^2 + 2m = 0 \\ x^2 - 2mx + m = 0 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

$$(1) \Leftrightarrow (x+m)(1-m) \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ x=-m \end{cases}$$

Với $m=1$ thay vào (2) $\Rightarrow x=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\text{Với } x=-m \text{ thay vào (2)} \Rightarrow -3m^2 + m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } S = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Câu 119: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x$. Có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1;0)$?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Phương trình đường thẳng qua điểm $A(-1;0)$ có dạng: $y = a(x+1) = ax + a$ (d).

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến khi hệ $\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2x = ax + a \\ 3x^2 - 6x + 2 = a \end{cases}$ có nghiệm. Dễ thấy hệ có ba nghiệm $(a; x)$ phân biệt nên có ba tiếp tuyến.

Câu 120: Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến kẻ từ $M(2;-1)$ đến đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{4} - x + 1$.

- A.** $y = -2x + 3$. **B.** $y = -1$. **C.** $y = x - 3$. **D.** $y = 3x - 7$.

Lời giải

Phương trình đường thẳng qua $M(2;-1)$ có dạng $y = k(x-2) - 1 = kx - 2k - 1$ (d).

(d) là tiếp tuyến của parabol $y = \frac{x^2}{4} - x + 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} kx - 2k - 1 = \frac{x^2}{4} - x + 1 \\ k = \frac{x}{2} - 1 \end{cases}$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \\ k=\frac{x}{2}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ k=-1 \\ x=4 \\ k=1 \end{cases}. \text{ Vậy (d): } y = -x + 1 \text{ hoặc (d): } y = x - 3.$$

Câu 121: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{1-x}$ có đồ thị (C) và điểm $A(m;1)$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A. Tính tổng bình phương các phần tử của tập S.

A. $\frac{25}{4}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{13}{4}$.

D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = \frac{1-x+x-2}{(1-x)^2} = \frac{-1}{(1-x)^2}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0; y_0)$: $y - \frac{x_0 - 2}{1 - x_0} = \frac{-1}{(1 - x_0)^2} (x - x_0)$

Tiếp tuyến đi qua $A(m; 1) \Rightarrow 1 - \frac{x_0 - 2}{1 - x_0} = \frac{-1}{(1 - x_0)^2} (m - x_0) \Leftrightarrow 2x_0^2 - 6x_0 + m + 3 = 0 (x_0 \neq 1) \quad (1)$

Để có 1 tiếp tuyến qua $A(m; 1) \Rightarrow$ phương trình (1) có 1 nghiệm $x_0 \neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta > 0; 2 - 6 + m + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m < \frac{3}{2}; m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = 1 \end{cases}$$

$$S = \left\{ 1; \frac{3}{2} \right\}. \text{ Ta có } 1^2 + \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{13}{4}$$

Câu 122: Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ đi qua $A(3; 2)$?

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$

Phương trình tiếp tuyến d với đồ thị hàm số tại $M(x_0; y_0)$ có dạng

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2 \quad (1)$$

đi qua $A(3; 2)$ nên ta được phương trình

$$2 = (3x_0^2 - 6x_0)(3 - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^3 - 12x_0^2 + 18x_0 = 0 \Leftrightarrow 2x_0(x_0 - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

+) $x_0 = 0$ thay vào ta được phương trình tiếp tuyến d_1 là $y = 2$.

+) $x_0 = 3$ thay vào ta được phương trình tiếp tuyến d_2 là $y = 9x - 25$.

Vậy có 2 tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua $A(3; 2)$.

Câu 123: Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a;1)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số a để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A . Tổng tất cả các giá trị các phân tử của S là

A. 1.

B. $\frac{3}{2}$.C. $\frac{5}{2}$.D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{ĐK: } x \neq 1; y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Đường thẳng d qua A có hệ số góc k là $y = k(x-a)+1$

$$d \text{ tiếp xúc với (C)} \Leftrightarrow \begin{cases} k(x-a)+1 = \frac{-x+2}{x-1} (1) \\ k = \frac{-1}{(x-1)^2} (2) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

$$\text{Thế (2) vào (1) ta có: } \frac{-1}{(x-1)^2}(x-a)+1 = \frac{-x+2}{x-1} \Leftrightarrow -x+a+x^2-2x+1 = -x^2+3x-2, x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + a + 3 = 0 (3)$$

Để đồ thị hàm số có một tiếp tuyến qua A thì hệ là số nghiệm của hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có nghiệm duy nhất khác 1

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + a + 3 = 0 (3) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - 2a - 6 = 0 \\ 2 - 6 + a + 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\text{Cách 2: TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}; y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Giả sử tiếp tuyến đi qua $A(a;1)$ là tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = x_0$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = \frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{-x_0+2}{x_0-1} (d)$

Vì $A \in d$ nên thay tọa độ điểm A vào phương trình đường thẳng d ta có:

$$1 = \frac{-1}{(x_0-1)^2}(a-x_0) + \frac{-x_0+2}{x_0-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 - 6x_0 + 3 + a = 0 (1) \\ x_0 \neq 1 \end{cases}$$

Để chỉ có một tiếp tuyến duy nhất đi qua A thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - 2a - 6 = 0 \\ 1 - 6 + a + 3 \neq 0 \\ \Delta' = 9 - 2a - 6 > 0 \\ 2 - 6 + a + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

Câu 124: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 1$ có đồ thị. Tiếp tuyến của nó có hệ số góc nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 6$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số là

$$k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 + 6 = 3(x_0^2 - 2x_0 + 1) + 3 = 3(x_0 - 1)^2 + 3 \geq 3$$

Vậy hệ số góc lớn nhất là 3 đạt được tại $M(3; 19)$.

Câu 125: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ có đồ thị (C) . Đường thẳng d có phương trình $y = ax + b$ là tiếp

tuyến của (C) , biết d cắt trục hoành tại A và cắt trục tung tại B sao cho tam giác $\triangle OAB$ cân tại O , với O là gốc tọa độ. Tính $a + b$.

A. -1.

B. -2.

C. 0.

D. -3.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$.

Ta có $y' = \frac{-1}{(2x+3)^2} < 0; \forall x \in D$.

Tam giác $\triangle OAB$ cân tại O , suy ra hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1 .

Do $y' = \frac{-1}{(2x+3)^2} < 0; \forall x \in D \Rightarrow k_t = -1$.

Gọi tọa độ tiếp điểm là $(x_0; y_0); x_0 \in D$, ta có: $\frac{-1}{(2x_0+3)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = -2 \vee x_0 = -1$.

• Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = -x$.

• Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = -x - 2$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow a + b = -3.$$

Câu 126: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị. Có bao nhiêu tiếp tuyến của cắt trục Ox , Oy lần lượt tại hai điểm A và B thỏa mãn điều kiện $OA = 4OB$.

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Giả sử tiếp tuyến của (C) tại $M(x_0; y_0)$ cắt Ox tại A , Oy tại B sao cho $OA = 4OB$.

Do tam giác OAB vuông tại O nên $\tan A = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ Hệ số góc tiếp tuyến bằng $\frac{1}{4}$ hoặc $-\frac{1}{4}$.

$$\text{Hệ số góc tiếp tuyến là } f'(x_0) = -\frac{1}{(x_0-1)^2} < 0 \Rightarrow -\frac{1}{(x_0-1)^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{cases}.$$

$$x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = \frac{5}{2} : d : y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}.$$

$$x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = \frac{3}{2} : d : y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}.$$

Câu 127: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ (1). Đường thẳng $d : y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1). Biết d cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho ΔOAB cân tại O . Khi đó $a + b$ bằng

A. -1.

B. 0.

C. 2.

D. -3.

Lời giải

$$\text{Tập xác định của hàm số } y = \frac{x+2}{2x+3} \text{ là } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}.$$

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-1}{(2x+3)^2} < 0, \forall x \in D.$$

Mặt khác, ΔOAB cân tại $O \Rightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến là -1 .

Gọi tọa độ tiếp điểm $(x_0; y_0)$, với $x_0 \neq -\frac{3}{2}$.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-1}{(2x_0+3)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = -2 \vee x_0 = -1.$$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 1$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -x$ loại vì $A \equiv B \equiv O$.

Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -x - 2$ thỏa mãn.

Vậy $d : y = ax + b$ hay $d : y = -x - 2 \Rightarrow a = -1; b = -2 \Rightarrow a + b = -3$.

Câu 128: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + mx + 1$. Gọi S là tổng tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, B , C sao cho các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại B , C vuông góc với nhau. Giá trị của S bằng

A. $\frac{9}{2}$.

B. $\frac{9}{5}$.

C. $\frac{9}{4}$.

D. $\frac{11}{5}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = 1$ là:

$$x^3 + 3x^2 + mx + 1 = 1 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 3x + m = 0 \end{cases}.$$

Để hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt thì phương trình $x^2 + 3x + m = 0$ phải có hai nghiệm

$$\text{phân biệt khác } 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^2 - 4.1.m > 0 \\ 0^2 + 3.0 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m > -9 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}.$$

Với điều kiện trên, hai đồ thị cắt nhau tại ba điểm phân biệt $A(0;1)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$, ở

đó x_B, x_C là nghiệm của phương trình $x^2 + 3x + m = 0$.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 6x + m$.

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại B , C lần lượt là

$$k_B = f'(x_B) = 3x_B^2 + 6x_B + m; \quad k_C = f'(x_C) = 3x_C^2 + 6x_C + m.$$

Để hai tiếp tuyến này vuông góc thì $k_B \cdot k_C = -1$.

$$\text{Suy ra: } (3x_B^2 + 6x_B + m)(3x_C^2 + 6x_C + m) = -1$$

$$\Leftrightarrow 9(x_B x_C)^2 + 18x_B^2 x_C + 3mx_B^2 + 18x_B x_C^2 + 36x_B x_C + 6mx_B + 3mx_C^2 + 6mx_C + m^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow 9(x_B x_C)^2 + 18x_B x_C (x_B + x_C) + 3m(x_B^2 + x_C^2) + 36x_B x_C + 6m(x_B + x_C) + m^2 + 1 = 0.$$

Ta lại có theo Vi-et: $\begin{cases} x_B + x_C = -3 \\ x_B x_C = m \end{cases}$. Từ đó $x_B^2 + x_C^2 = (x_B + x_C)^2 - 2x_B x_C = 9 - 2m$.

$$\text{Suy ra: } 9m^2 + 18m(-3) + 3m(9 - 2m) + 36m + 6m(-3) + m^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 9m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{9 + \sqrt{65}}{8} \\ m = \frac{9 - \sqrt{65}}{8} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{9 + \sqrt{65}}{8} + \frac{9 - \sqrt{65}}{8} = \frac{9}{4}.$$

Câu 129: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}(C)$. Điểm M thuộc (C) có hoành độ lớn hơn 1, tiếp tuyến của (C) tại

M cắt hai tiệm cận của (C) lần lượt tại A, B . Diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB bằng.

A. $4 + 2\sqrt{2}$.

B. 4.

C. $4\sqrt{2}$.

D. $4 + \sqrt{2}$.

Lời giải

$$y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{-2}{(x-1)^2} (x \neq 1).$$

Giả sử $M\left(a; \frac{a+1}{a-1}\right) \in (C) (a > 1) \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến tại $M: y = \frac{-2}{(a-1)^2}(x-a) + \frac{a+1}{a-1}$

$$\Leftrightarrow 2x + (a-1)^2 y - (a^2 + 2a - 1) = 0 (\Delta).$$

Hai đường tiệm cận của (C) là $x=1; y=1$.

Ta có $(\Delta) \cap (x=1)$ tại $A\left(1; \frac{a+3}{a-1}\right)$, $(\Delta) \cap (y=1)$ tại $B(2a-1; 1)$.

$$AB = \sqrt{(2a-2)^2 + \left(\frac{-4}{a-1}\right)^2} = \frac{2}{|a-1|} \sqrt{(a-1)^4 + 4} = \frac{2}{a-1} \sqrt{(a-1)^4 + 4}.$$

$$d(O, (\Delta)) = \frac{|a^2 + 2a - 1|}{\sqrt{4 + (a-1)^4}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } S_{\Delta OAB} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{|a-1|} \sqrt{(a-1)^4 + 4} \cdot \frac{|a^2 + 2a - 1|}{\sqrt{4 + (a-1)^4}} = \frac{a^2 + 2a - 1}{a-1} = \frac{(a-1)^2 + 4(a-1) + 2}{a-1} \\ &= a-1 + \frac{2}{a-1} + 4 \geq 4 + 2\sqrt{(a-1) \cdot \frac{2}{a-1}} = 4 + 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Câu 130: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) và điểm $A(1; m)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để qua A có thể kẻ được đúng ba tiếp tuyến tới đồ thị (C) . Số phần tử của S là

A. 9.

B. 7.

C. 3.

D. 5

Lời giải

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng d qua A .

Ta có phương trình của d có dạng: $y = kx + m - k$.

$$d \text{ tiếp xúc } (C) \Leftrightarrow \text{hệ sau có nghiệm: } \begin{cases} kx + m - k = x^3 + 3x^2 + 1 \\ k = 3x^2 + 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2x^3 + 6x + 1 (*) \\ k = 3x^2 + 6x \end{cases}$$

Để qua A có thể kẻ được đúng 3 tiếp tuyến tới (C) thì phương trình phải có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow y_{CT} < m < y_{CB} \text{ với } f(x) = -2x^3 + 6x + 1.$$

$$\text{Ta có } f'(x) = -6x^2 + 6; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$f(1) = 5 = f_{CB}; f(-1) = -3 = f_{CT}.$$

Suy ra $-3 < m < 5$.

Vậy số phần tử của S là 7.

Câu 131: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 3.

Tìm hệ số góc k của đường thẳng d .

A. $-\frac{1}{2}$.

B. -2 .

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Với $y = 3$, ta có: $\frac{x+1}{x-1} = 3 \Rightarrow 3x - 3 = x + 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Ta có: $y' = -\frac{2}{(x-1)^2}$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 2 là:

$k = y'(2) = -\frac{2}{(2-1)^2} = -2$.

Câu 132: Cho hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(2;1)$. Diện tích tam giác được tạo bởi Δ và các trục bằng

A. 3.

B. $\frac{3}{2}$.

C. 9.

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

$y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$. Theo đề $x_0 = 2; y_0 = 1; y'(x_0) = -1$.

Suy ra pttt Δ là: $y = -x + 3$.

Tiếp tuyến Δ cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại $A(3;0), B(0;3)$. Do đó diện tích tam giác được

tạo bởi Δ và các trục tọa độ bằng: $S = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{9}{2}$.

DẠNG 4. BÀI TOÁN QUẢNG ĐƯỜNG, VẬN TỐC

Câu 133: Cho chuyển động được xác định bởi phương trình $s = 2t^3 + 6t^2 - t$, trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét. Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 3s$ là:

A. $89 m/s$.

B. $105 m/s$.

C. $48 m/s$.

D. $20 m/s$.

Lời giải

Ta có $v(t) = S'(t) = 6t^2 + 12t - 1$.

Vận tốc tức thời của chuyển động khi $t = 3s$ là: $v(3) = 6 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 1 = 89(m/s)$.

Câu 134: Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $S(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t - 1$ (t được tính bằng giây, s tính bằng mét). Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 4$ là

A. $6(m/s)$.

B. $4(m/s)$.

C. $5(m/s)$.

D. $3(m/s)$.

Lời giải

Ta có: $v(t) = S'(t) = t^2 - 4t + 3$;

$$S'(4) = 3.$$

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 4$ là: $3(m/s)$.

Câu 135: Một chất điểm chuyển động có quãng đường được cho bởi phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 10$, trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây và s tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì quãng đường vật đi được bằng bao nhiêu?

A. 13 m.

B. 3 m.

C. 16 m.

D. 10 m.

Lời giải

Vận tốc của chuyển động là: $v(t) = 3t^2 - 6t + 5$.

Dễ thấy: $v(t) = 3t^2 - 6t + 5 = 3(t-1)^2 + 2 \geq 2$ với mọi t . Dấu “=” xảy ra khi $t = 1$.

Khi đó, vận tốc của chuyển động là $s(1) = 13$ m.

Câu 136: Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = 4t^2 - 2t^3 + 5$, với t là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Biết tại thời điểm m thì vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất là $n(m/s)$. Giá trị $T = mn$ bằng

A. $\frac{4}{3}$.

B. $\frac{16}{9}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{8}{9}$.

Lời giải

Ta có: $s(t) = 4t^2 - 2t^3 + 5 \Rightarrow v(t) = s'(t) = -6t^2 + 8t$ ($a = -6, b = 8$).

Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi $t = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{3}(s) \Rightarrow v_{\max} = v\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}$.

Vậy $T = mn = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{9}$.

Câu 137: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S = 6t^2 - t^3$, vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (s) bằng

A. 4 (s).

B. 12 (s).

C. 6 (s).

D. 2 (s).

Lời giải

Ta có: $S(t) = 6t^2 - t^3 \Rightarrow v(t) = S'(t) = 12t - 3t^2 \Rightarrow v'(t) = 12 - 6t$.

$v'(t) = 0 \Leftrightarrow 12 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

$v(t) = 0 \Leftrightarrow 12t - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

t	0	2	4
$v'(t)$	+	0	-
$v(t)$	0	12	0

Vậy: vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t = 2$ (s).

Câu 138: Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quãng đường đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian t được cho bởi phương trình $s(t) = 10 + t + 9t^2 - t^3$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây. Trong 5 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, đoàn tàu đạt vận tốc lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $1m/s$.

B. $28m/s$.

C. $16m/s$.

D. $3m/s$.

Lời giải

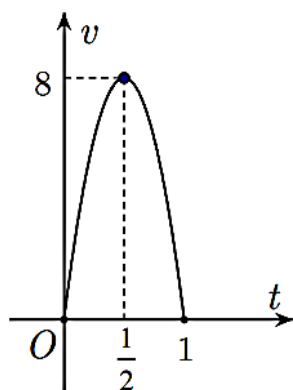
$$v(t) = s'(t) = -3t^2 + 18t + 1.$$

Dễ thấy hàm số $v(t)$ là hàm bậc hai có đồ thị dạng parabol với hệ số $a = -3 < 0$.

Ta có hoành độ đỉnh của parabol là $t = 3 \in [0; 5]$. Do đó $v_{\max} = v(3) = 28$.

Vậy giá trị lớn nhất của vận tốc đoàn tàu chuyển động trong 5 giây đầu là $28m/s$.

Câu 139: Một vật chuyển động trong 1 giờ với vận tốc v phụ thuộc vào thời gian t có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(\frac{1}{2}; 8)$ và trục đối xứng song song với trục tung. Tính gia tốc của vật lúc $t = 0,25(h)$



A. $16(km/h^2)$.

B. $-16(km/h^2)$.

C. $8(km/h^2)$.

D. $-8(km/h^2)$.

Lời giải

Gọi $v(t) = pt^2 + qt + r$ đi qua $O(0;0)$; $I(\frac{1}{2};8)$ và $M(1;0)$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} r = 0 \\ \frac{1}{4}p + \frac{1}{2}q + r = 8 \\ p + q + r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ q = 32 \\ p = -32 \end{cases} . \text{ Vậy } v(t) = -32t^2 + 32t$$

Gia tốc vật là $a = v'(t) = -64t + 32$

Lúc $t = 0,25(h)$ thì gia tốc là $a = 16(km / h^2)$.

BÀI 32: CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 5. TÍNH ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ

Câu 140: Tính đạo hàm của hàm số $y = 3^x$

- A. $y' = 3^x$. B. $y' = \frac{3^x}{\ln 3}$. C. $y' = 3^x \ln 3$. D. $y' = x \cdot 3^{x-1}$.

Câu 141: Đạo hàm của hàm số $y = 5^x$ là

- A. $y' = -5^x \ln 5$. B. $y' = 5^x \ln 5$. C. $y' = \frac{5^x}{\ln 5}$. D. $y' = -\frac{5^x}{\ln 5}$.

Câu 142: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^x$.

- A. $y' = x \cdot 2^{x-1}$. B. $y' = 2^x \ln 2$. C. $y' = 2^x$. D. $y' = 2^x \ln x$.

Câu 143: Đạo hàm của hàm số $y = 6^x$ là

- A. $y' = \frac{6^x}{\ln 6}$. B. $y' = 6^x \ln 6$. C. $y' = 6^x$. D. $y' = x 6^{x-1}$.

Câu 144: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \pi^x$.

- A. $y' = x \pi^{x-1} \ln \pi$. B. $y' = \pi^x \ln \pi$. C. $y' = \frac{\pi^x}{\ln \pi}$. D. $y' = x \pi^{x-1}$.

Câu 145: Tìm đạo hàm của hàm số $y = 2022^x$

- A. $y' = x \cdot 2022^{x-1}$. B. $y' = \frac{2022^x}{\ln 2022}$. C. $y' = 2022^x \cdot \ln 2022$. D. 2022^x .

Câu 146: Đạo hàm của hàm số $y = (2 - \sqrt{3})^x$ trên tập $\mathbb{R}$ là:

- A. $y' = (2 + \sqrt{3})^{-x} \ln(2 - \sqrt{3})$. B. $y' = (2 + \sqrt{3})^{-x} \ln(2 + \sqrt{3})$.
C. $y' = (2 + \sqrt{3})^x \ln(2 - \sqrt{3})$. D. $y' = (2 - \sqrt{3})^x \ln(2 + \sqrt{3})$.

Câu 147: Trên tập số thực $\mathbb{R}$, đạo hàm của hàm số $y = 3^{x^2-x}$ là:

- A. $y' = (2x - 1) \cdot 3^{x^2-x}$. B. $y' = (2x - 1) \cdot 3^{x^2-x} \cdot \ln 3$.
C. $y' = (x^2 - x) \cdot 3^{x^2+x+1}$. D. $y' = 3^{x^2-x-1}$

Câu 148: Đạo hàm của hàm số $y = 2022^{2-x}$ là

- A. $y' = \frac{2022^{2-x}}{\ln 2022}$. B. $y' = -2022^{2-x} \ln 2022$.
 C. $y' = 2022^{2-x} \ln 2022$. D. $y' = x \cdot 2022^{2-x}$.

Câu 149: Hàm số $f(x) = 2^{3x+4}$ có đạo hàm là

- A. $f'(x) = \frac{3 \cdot 2^{3x+4}}{\ln 2}$. B. $f'(x) = 3 \cdot 2^{3x+4} \cdot \ln 2$.
 C. $f'(x) = 2^{3x+4} \cdot \ln 2$. D. $f'(x) = \frac{2^{3x+4}}{\ln 2}$.

Câu 150: Hàm số $y = 2^{2x}$ có đạo hàm là

- A. $y' = 2^{2x} \ln 2$. B. $y' = 2^{2x+1} \ln 2$. C. $y' = 2^{2x-1}$. D. $y' = 2x \cdot 2^{2x-1}$.

Câu 151: Tính đạo hàm của hàm số: $y = 9^{2x+1}$.

- A. $y' = 2 \cdot 9^{2x+1} \cdot \ln 9$. B. $y' = (2x+1) \cdot 9^{2x+1}$.
 C. $y' = 9^{2x+1} \cdot \ln 9$. D. $y' = (2x+1) \cdot 9^{2x+1} \cdot \ln 9$.

Câu 152: Đạo hàm của hàm số $y = 2^{2x}$ bằng.

- A. $y' = 2^{2x} \ln 2$. B. $y' = \frac{2^{2x+1}}{\ln 2}$. C. $y' = 4^x \ln 4$. D. $y' = \frac{2^{2x}}{\ln 2}$.

Câu 153: Đạo hàm của hàm số $y = e^{2-x}$ là

- A. $y' = e^{2-x}$. B. $y' = 2e^{2-x}$. C. $y' = -e^{2-x}$. D. $y' = (2-x)e^{2-x}$.

Câu 154: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = e^{2x-3}$.

- A. $f'(x) = 2 \cdot e^{2x-3}$. B. $f'(x) = e^{2x-3}$. C. $f'(x) = -2 \cdot e^{2x-3}$. D. $f'(x) = 2 \cdot e^{x-3}$.

Câu 155: Đạo hàm của hàm số $y = 10^{x^2}$ là

- A. $10^{x^2} \cdot \ln 10$ B. $2x \cdot 10^{x^2}$ C. $2x \cdot 10^{x^2} \cdot \ln 10$ D. $\frac{1}{2} + \log_2 a$

Câu 156: Đạo hàm của hàm số $y = 3^{2x-1}$ là

- A. $2 \cdot 3^{2x-1}$. B. $3^{2x-1} \cdot \ln 3$. C. $2 \cdot 3^{2x-1} \cdot \ln 2$. D. $2 \cdot 3^{2x-1} \cdot \ln 3$.

Câu 157: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2021^{3-5x}$.

- A. $y' = 2021^{3-5x} \cdot \ln 2021$. B. $y' = -5 \cdot 2021^{3-5x} \cdot \ln 2021$.
 C. $y' = 2021^{3-5x}$. D. $y' = -5 \cdot 2021^{3-5x} \cdot \log 2021$.

Câu 158: Đạo hàm của hàm số $y = \pi^{x^2+2x}$ là

- A. $y' = (2x+2) \cdot \pi^{x^2+2x}$. B. $y' = (2x+2) \cdot \frac{\pi^{x^2+2x}}{\ln \pi}$.
 C. $y' = (2x+2) \cdot \pi^{x^2+2x} \cdot \ln \pi$. D. $y' = \frac{(2x+2)}{\pi^{x^2+2x} \cdot \ln \pi}$.

Câu 159: Hàm số $y = 2^{x^2-x}$ có đạo hàm là

- A. $2^{x^2-x} \cdot \ln 2$. B. $(2x-1) \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2$.
 C. $(x^2-x) \cdot 2^{x^2-x-1}$. D. $(2x-1) \cdot 2^{x^2-x}$.

Câu 160: Hàm số $y = 3^{x^2-x}$ có đạo hàm là

- A. $(2x-1).3^{x^2-x}$. B. $(x^2-x).3^{x^2-x-1}$. C. $(2x-1).3^{x^2-x}.\ln 3$. D. $3^{x^2-x}.\ln 3$.

Câu 161: Tính đạo hàm của hàm số $y = 13^x$

- A. $y' = \frac{13^x}{\ln 13}$ B. $y' = x.13^{x-1}$ C. $y' = 13^x \ln 13$ D. $y' = 13^x$

Câu 162: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{4^x}$

- A. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$ B. $y' = \frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$
C. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$ D. $y' = \frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$

Câu 163: Hàm số $y = 2^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

- A. $(2x-3)2^{x^2-3x} \ln 2$. B. $2^{x^2-3x} \ln 2$. C. $(2x-3)2^{x^2-3x}$. D. $(x^2-3x)2^{x^2-3x+1}$.

Câu 164: Hàm số $y = 3^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

- A. $(2x-3).3^{x^2-3x}$. B. $3^{x^2-3x}.\ln 3$. C. $(x^2-3x).3^{x^2-3x-1}$. D. $(2x-3).3^{x^2-3x}.\ln 3$.

Câu 165: Đạo hàm của hàm số $y = e^{3x}$ là

- A. $y' = e^{3x}$. B. $y' = e^{3x}.\ln 3$. C. $y' = 3e^{3x}$. D. $y' = \frac{e^{3x}}{3}$.

Câu 166: Đạo hàm của hàm số $y = 3^{x^3+2}$ là

- A. $y = 3x^2.3^{x^3+2}$. B. $y = x^2.3^{x^3+3}.\ln 3$.
C. $y = 3x^2.(x^3+2).3^{x^3+1}$. D. $y = 3^{x^3+2}.\ln 3$.

Câu 167: Hàm số $f(x) = 5^{2x^2-1}$ có đạo hàm là

- A. $2x.5^{2x^2-1}.\ln 5$. B. $4x.5^{2x^2-1}$. C. $4x.5^{2x^2-1}.\ln 5$. D. 5^{2x^2-1} .

Câu 168: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{2x+3}$.

- A. $y' = 2^{2x+2} \ln 4$. B. $y' = 4^{x+2} \ln 4$. C. $y' = 2^{2x+2} \ln 16$. D. $y' = 2^{2x+3} \ln 2$.

Câu 169: Cho hàm số $y = 2^{x^2-mx+1}$. Với giá trị nào của tham số m thì $y'(0) = \ln 2$?

- A. $-\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 2 . D. -2 .

DẠNG 6. TÍNH ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LOGARIT

Câu 170: Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = \log_2 x$ là

- A. $y' = \frac{1}{x \ln 2}$. B. $y' = \frac{\ln 2}{x}$. C. $y' = \frac{1}{x}$. D. $y' = \frac{1}{2x}$.

Câu 171: Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = \log_{\sqrt{3}} x$ là

- A. $y' = \frac{\sqrt{3}}{x \ln 3}$. B. $y' = \frac{1}{2x \ln 3}$. C. $y' = \frac{1}{x \ln \sqrt{3}}$. D. $y' = \frac{\sqrt{3}}{x}$.

Câu 172: Trên khoảng $(0; +\infty)$, hàm số $y = \log_3 x$ có đạo hàm là:

- A. $y' = \frac{x}{\ln 3}$. B. $y' = x \ln 3$. C. $y' = \frac{1}{x \ln 3}$. D. $y' = \frac{\ln 3}{x}$.

Câu 173: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \log x$.

- A. $y' = \frac{\ln 10}{x}$ B. $y' = \frac{1}{x \ln 10}$ C. $y' = \frac{1}{10 \ln x}$ D. $y' = \frac{1}{x}$

Câu 174: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2(2x+1)$?

- A. $y' = \frac{1}{(2x+1) \ln 2}$. B. $y' = \frac{2}{(2x+1) \ln 2}$. C. $y' = \frac{2}{2x+1}$. D. $y' = \frac{1}{2x+1}$.

Câu 175: Hàm số $y = \ln(2x+1)$ có đạo hàm là

- A. $y' = \frac{2}{x \ln(2x+1)}$. B. $y' = \frac{1}{2x+1}$. C. $y' = \frac{2}{2x+1}$. D. $y' = \frac{1}{(2x+1) \ln 2}$.

Câu 176: Đạo hàm của hàm số $y = \log_2(2x+1)$ là

- A. $y' = \frac{1}{(2x+1) \ln 2}$. B. $y' = \frac{1}{2x+1}$. C. $\frac{2}{2x+1}$. D. $\frac{2}{(2x+1) \ln 2}$.

Câu 177: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2(3x)$

- A. $y' = \frac{1}{x \ln 4}$. B. $y' = \frac{3}{x \ln 2}$. C. $y' = \frac{1}{x \ln 2}$. D. $y' = \frac{3}{x \ln 4}$.

Câu 178: Đạo hàm của hàm số $y = \ln(1-x^2)$ là

- A. $\frac{2x}{x^2-1}$. B. $\frac{-2x}{x^2-1}$. C. $\frac{1}{1-x^2}$. D. $\frac{1}{x^2-1}$.

Câu 179: Đạo hàm của hàm số $y = \log_4(2x+5)$ là

- A. $y' = \frac{1}{(2x+5) \ln 4}$. B. $y' = \frac{1}{(2x+5) \ln 2}$. C. $y' = \frac{2 \ln 4}{(2x+5)}$. D. $y' = \frac{2}{(2x+5) \ln 5}$.

Câu 180: Trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, đạo hàm của hàm số $y = \log(2x-1)$ là

- A. $y' = \frac{1}{(2x-1) \ln 10}$. B. $y' = \frac{2}{(2x-1) \ln 10}$.
C. $y' = \frac{2}{2x-1}$. D. $y' = \frac{1}{2x-1}$.

Câu 181: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2(2x+1)$.

- A. $y' = \frac{2}{(2x+1) \ln 2}$ B. $y' = \frac{1}{(2x+1) \ln 2}$ C. $y' = \frac{2}{2x+1}$ D. $y' = \frac{1}{2x+1}$

Câu 182: Hàm số $f(x) = \log_2(x^2 - 2x)$ có đạo hàm

- A. $f'(x) = \frac{\ln 2}{x^2 - 2x}$ B. $f'(x) = \frac{1}{(x^2 - 2x) \ln 2}$
C. $f'(x) = \frac{(2x-2) \ln 2}{x^2 - 2x}$ D. $f'(x) = \frac{2x-2}{(x^2 - 2x) \ln 2}$

- Câu 183:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- A. $m \leq 2$ B. $m > 2$ C. $m \geq 0$ D. $m < 0$
- Câu 184:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x + m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- A. $0 < m < 3$ B. $m < -1$ hoặc $m > 0$ C. $m > 0$ D. $m = 0$
- Câu 185:** Đạo hàm của hàm số $y = \log_4(2x^2 - 3)$ là
- A. $y' = \frac{4x}{(2x^2 - 3)\ln 2}$ B. $y' = \frac{4x}{2x^2 - 3}$ C. $y' = \frac{1}{(2x^2 - 3)\ln 4}$ D. $y' = \frac{2x}{(2x^2 - 3)\ln 2}$
- Câu 186:** Đạo hàm của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$ là
- A. $y = -4$ B. $y' = \frac{1 + \ln x}{x^2}$ C. $y' = -\frac{1}{x^3}$ D. $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$
- Câu 187:** Cho hàm số $f(x) = \ln 2021 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$. Tính giá trị biểu thức $S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2020)$, tổng gồm 2020 số hạng.
- A. $\frac{2021}{2020}$ B. $\frac{2020}{2021}$ C. $\frac{2021}{2022}$ D. $\frac{2022}{2021}$
- Câu 188:** Đạo hàm của hàm số $y = \ln \frac{x}{x+1}$
- A. $-\frac{1}{x(x+1)}$ B. $\frac{x}{x+1}$ C. $\frac{x+1}{x}$ D. $\frac{1}{x(x+1)}$
- Câu 189:** Cho hàm số $f(x) = \ln(\cos x)$. Giá trị của $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ là.
- A. 0 B. -1 C. 1 D. $\sqrt{2}$
- Câu 190:** Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$ là
- A. $y' = (2x - 2)e^x$ B. $y' = x^2 e^x$ C. $y' = (x^2 + 2)e^x$ D. $y' = -2xe^x$
- Câu 191:** Cho hàm số $y = \ln(\cos x + 1 + m^2)$. Với giá trị nào của m thì $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{5}$.
- A. $m = \pm 2$ B. $m = 2$ C. $m = \frac{1}{2}$ D. $m = \pm 1$
- Câu 192:** Cho hàm số $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$. Biết rằng $f'(2) + f'(3) + \dots + f'(2019) + f'(2020) = \frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Giá trị của $2a - b$ bằng
- A. 2 B. 4 C. -2 D. -4
- Câu 193:** Cho hàm số $f(x) = \ln 2018 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$. Tính $S = f'(1) + f'(2) + f'(3) + \dots + f'(2017)$.
- A. $S = \frac{4035}{2018}$ B. $S = \frac{2017}{2018}$ C. $S = \frac{2016}{2017}$ D. $S = 2017$

Câu 194: Cho hàm số $f(x) = \ln \frac{2018x}{x+1}$. Tính tổng $S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2018)$.

- A. $\ln 2018$. B. 1. C. 2018. D. $\frac{2018}{2019}$.

Câu 195: Cho hàm số $f(x) = \ln \left(\frac{x}{x+2} \right)$. Tổng $f'(1) + f'(3) + f'(5) + \dots + f'(2021)$ bằng

- A. $\frac{4035}{2021}$. B. $\frac{2021}{2022}$. C. 2021. D. $\frac{2022}{2023}$.

Câu 196: Cho hàm số $f(x) = \ln \frac{x+1}{x+4}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = f'(0) + f'(3) + f'(6) + \dots + f'(2019).$$

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{2024}{2023}$. C. $\frac{2022}{2023}$. D. $\frac{2020}{2023}$.

Câu 197: Cho hàm số $y = f(x) = (2m-1)e^x + 3$. Giá trị của m để $f'(-\ln 3) = \frac{5}{3}$ là

- A. $m = \frac{7}{9}$. B. $m = \frac{2}{9}$. C. $m = 3$. D. $m = -\frac{3}{2}$.

BÀI 32: CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 5. TÍNH ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ

Câu 140: Tính đạo hàm của hàm số $y = 3^x$

- A. $y' = 3^x$. B. $y' = \frac{3^x}{\ln 3}$. **C. $y' = 3^x \ln 3$.** D. $y' = x \cdot 3^{x-1}$.

Lời giải

Áp dụng công thức $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

Câu 141: Đạo hàm của hàm số $y = 5^x$ là

- A. $y' = -5^x \ln 5$. **B. $y' = 5^x \ln 5$.** C. $y' = \frac{5^x}{\ln 5}$. D. $y' = -\frac{5^x}{\ln 5}$.

Lời giải

Ta có $y' = 5^x \ln 5$.

Câu 142: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^x$.

- A. $y' = x \cdot 2^{x-1}$. **B. $y' = 2^x \ln 2$.** C. $y' = 2^x$. D. $y' = 2^x \ln x$.

Lời giải

Ta có $y' = 2^x \ln 2$

Câu 143: Đạo hàm của hàm số $y = 6^x$ là

- A. $y' = \frac{6^x}{\ln 6}$. **B. $y' = 6^x \ln 6$.** C. $y' = 6^x$. D. $y' = x 6^{x-1}$.

Lời giải

Có $y = 6^x \Rightarrow y' = 6^x \ln 6$.

Câu 144: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \pi^x$.

- A. $y' = x \pi^{x-1} \ln \pi$. **B. $y' = \pi^x \ln \pi$.** C. $y' = \frac{\pi^x}{\ln \pi}$. D. $y' = x \pi^{x-1}$.

Lời giải

Áp dụng $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ($a > 0, a \neq 1$).

Câu 145: Tìm đạo hàm của hàm số $y = 2022^x$

- A. $y' = x \cdot 2022^{x-1}$. B. $y' = \frac{2022^x}{\ln 2022}$. **C. $y' = 2022^x \cdot \ln 2022$** . D. 2022^x .

Lời giải

Câu 146: Đạo hàm của hàm số $y = (2 - \sqrt{3})^x$ trên tập $\mathbb{R}$ là:

- A. $y' = (2 + \sqrt{3})^{-x} \ln(2 - \sqrt{3})$** . B. $y' = (2 + \sqrt{3})^{-x} \ln(2 + \sqrt{3})$.
C. $y' = (2 + \sqrt{3})^x \ln(2 - \sqrt{3})$. D. $y' = (2 - \sqrt{3})^x \ln(2 + \sqrt{3})$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = (2 - \sqrt{3})^x \ln(2 - \sqrt{3}) = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^x} \ln(2 - \sqrt{3}) = (2 + \sqrt{3})^{-x} \ln(2 - \sqrt{3}).$$

Câu 147: Trên tập số thực $\mathbb{R}$, đạo hàm của hàm số $y = 3^{x^2-x}$ là:

- A. $y' = (2x - 1) \cdot 3^{x^2-x}$. **B. $y' = (2x - 1) \cdot 3^{x^2-x} \cdot \ln 3$** .
C. $y' = (x^2 - x) \cdot 3^{x^2+x+1}$. D. $y' = 3^{x^2-x-1}$

Lời giải

$$\text{Ta có } y = 3^{x^2-x} \Rightarrow y' = (x^2 - x)' \cdot 3^{x^2-x} \cdot \ln 3 = (2x - 1) \cdot 3^{x^2-x} \cdot \ln 3.$$

Câu 148: Đạo hàm của hàm số $y = 2022^{2-x}$ là

- A. $y' = \frac{2022^{2-x}}{\ln 2022}$. **B. $y' = -2022^{2-x} \ln 2022$** .
C. $y' = 2022^{2-x} \ln 2022$. D. $y' = x \cdot 2022^{2-x}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = (2 - x)' \cdot 2022^{2-x} \cdot \ln 2022 = -2022^{2-x} \cdot \ln 2022.$$

Câu 149: Hàm số $f(x) = 2^{3x+4}$ có đạo hàm là

- A. $f'(x) = \frac{3 \cdot 2^{3x+4}}{\ln 2}$. **B. $f'(x) = 3 \cdot 2^{3x+4} \cdot \ln 2$** .
C. $f'(x) = 2^{3x+4} \cdot \ln 2$. D. $f'(x) = \frac{2^{3x+4}}{\ln 2}$.

Lời giải

$$\text{Công thức } f'(x) = 3 \cdot 2^{3x+4} \cdot \ln 2.$$

Câu 150: Hàm số $y = 2^{2x}$ có đạo hàm là

- A. $y' = 2^{2x} \ln 2$. **B. $y' = 2^{2x+1} \ln 2$** . C. $y' = 2^{2x-1}$. D. $y' = 2x \cdot 2^{2x-1}$.

Lời giải

$$y' = (2^{2x})' = (2x)' \cdot 2^{2x} \ln 2 = 2^{2x+1} \ln 2.$$

Câu 151: Tính đạo hàm của hàm số: $y = 9^{2x+1}$.

- A.** $y' = 2 \cdot 9^{2x+1} \cdot \ln 9$. **B.** $y' = (2x+1) \cdot 9^{2x+1}$.
C. $y' = 9^{2x+1} \cdot \ln 9$. **D.** $y' = (2x+1) \cdot 9^{2x+1} \cdot \ln 9$.

Lời giải

Áp dụng công thức tính đạo hàm $(a^u)' = u' \cdot a^u \ln a$.

$$\text{Ta có: } (9^{2x+1})' = (2x+1)' \cdot 9^{2x+1} \ln 9 = 2 \cdot 9^{2x+1} \ln 9.$$

Câu 152: Đạo hàm của hàm số $y = 2^{2x}$ bằng.

- A.** $y' = 2^{2x} \ln 2$. **B.** $y' = \frac{2^{2x+1}}{\ln 2}$. **C.** $y' = 4^x \ln 4$. **D.** $y' = \frac{2^{2x}}{\ln 2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a.$$

$$\text{Nên } (2^{2x})' = (2x)' \cdot 2^{2x} \cdot \ln 2 = 2 \cdot 2^{2x} \cdot \ln 2 = 4^x \cdot 2 \cdot \ln 2 = 4^x \cdot \ln 4.$$

Câu 153: Đạo hàm của hàm số $y = e^{2-x}$ là

- A.** $y' = e^{2-x}$. **B.** $y' = 2e^{2-x}$. **C.** $y' = -e^{2-x}$. **D.** $y' = (2-x)e^{2-x}$.

Lời giải

$$y' = -e^{2-x}.$$

Câu 154: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = e^{2x-3}$.

- A.** $f'(x) = 2 \cdot e^{2x-3}$. **B.** $f'(x) = e^{2x-3}$. **C.** $f'(x) = -2 \cdot e^{2x-3}$. **D.** $f'(x) = 2 \cdot e^{x-3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = (2x-3)' \cdot e^{2x-3} = 2 \cdot e^{2x-3}.$$

Câu 155: Đạo hàm của hàm số $y = 10^{x^2}$ là

- A.** $10^{x^2} \cdot \ln 10$ **B.** $2x \cdot 10^{x^2}$ **C.** $2x \cdot 10^{x^2} \cdot \ln 10$ **D.** $\frac{1}{2} + \log_2 a$

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 10^{x^2} \cdot \ln 10 \cdot (x^2)' = 2x \cdot 10^{x^2} \cdot \ln 10.$$

Câu 156: Đạo hàm của hàm số $y = 3^{2x-1}$ là

- A.** $2 \cdot 3^{2x-1}$. **B.** $3^{2x-1} \cdot \ln 3$. **C.** $2 \cdot 3^{2x-1} \cdot \ln 2$. **D.** $2 \cdot 3^{2x-1} \cdot \ln 3$.

Lời giải

$$y' = (3^{2x-1})' = 2 \cdot 3^{2x-1} \cdot \ln 3.$$

Câu 157: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2021^{3-5x}$.

A. $y' = 2021^{3-5x} \cdot \ln 2021$. B. $y' = -5 \cdot 2021^{3-5x} \cdot \ln 2021$.

C. $y' = 2021^{3-5x}$. D. $y' = -5 \cdot 2021^{3-5x} \cdot \log 2021$.

Lời giải

Ta có $y' = (3-5x)' \cdot 2021^{3-5x} \cdot \ln 2021 = -5 \cdot 2021^{3-5x} \cdot \ln 2021$

Câu 158: Đạo hàm của hàm số $y = \pi^{x^2+2x}$ là

A. $y' = (2x+2) \cdot \pi^{x^2+2x}$. B. $y' = (2x+2) \cdot \frac{\pi^{x^2+2x}}{\ln \pi}$.

C. $y' = (2x+2) \cdot \pi^{x^2+2x} \cdot \ln \pi$. D. $y' = \frac{(2x+2)}{\pi^{x^2+2x} \cdot \ln \pi}$.

Lời giải

Ta có $y = \pi^{x^2+2x} \Rightarrow y' = (x^2+2x)' \cdot \pi^{x^2+2x} \cdot \ln \pi = (2x+2) \cdot \pi^{x^2+2x} \cdot \ln \pi$.

Câu 159: Hàm số $y = 2^{x^2-x}$ có đạo hàm là

A. $2^{x^2-x} \cdot \ln 2$. B. $(2x-1) \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2$.

C. $(x^2-x) \cdot 2^{x^2-x-1}$. D. $(2x-1) \cdot 2^{x^2-x}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = (x^2-x)' \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2 = (2x-1) \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2$.

Câu 160: Hàm số $y = 3^{x^2-x}$ có đạo hàm là

A. $(2x-1) \cdot 3^{x^2-x}$. B. $(x^2-x) \cdot 3^{x^2-x-1}$. C. $(2x-1) \cdot 3^{x^2-x} \cdot \ln 3$. D. $3^{x^2-x} \cdot \ln 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ nên $(3^{x^2-x})' = (2x-1) \cdot 3^{x^2-x} \cdot \ln 3$.

Câu 161: Tính đạo hàm của hàm số $y = 13^x$

A. $y' = \frac{13^x}{\ln 13}$ B. $y' = x \cdot 13^{x-1}$ C. $y' = 13^x \ln 13$ D. $y' = 13^x$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 13^x \ln 13$.

Câu 162: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{4^x}$

A. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$ **B.** $y' = \frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$
C. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$ **D.** $y' = \frac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } y' &= \frac{(x+1)' \cdot 4^x - (x+1) \cdot (4^x)'}{(4^x)^2} = \frac{4^x - (x+1) \cdot 4^x \cdot \ln 4}{(4^x)^2} \\ &= \frac{4^x \cdot (1 - x \cdot \ln 4 - \ln 4)}{(4^x)^2} = \frac{1 - x \cdot 2 \ln 2 - 2 \ln 2}{4^x} = \frac{1 - 2(x+1) \ln 2}{2^{2x}}. \end{aligned}$$

Câu 163: Hàm số $y = 2^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

A. $(2x-3)2^{x^2-3x} \ln 2$. **B.** $2^{x^2-3x} \ln 2$. **C.** $(2x-3)2^{x^2-3x}$. **D.** $(x^2-3x)2^{x^2-3x+1}$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = (2^{x^2-3x})' = (2x-3)2^{x^2-3x} \ln 2.$$

Câu 164: Hàm số $y = 3^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

A. $(2x-3) \cdot 3^{x^2-3x}$. **B.** $3^{x^2-3x} \cdot \ln 3$. **C.** $(x^2-3x) \cdot 3^{x^2-3x-1}$. **D.** $(2x-3) \cdot 3^{x^2-3x} \cdot \ln 3$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } y' = (3^{x^2-3x})' = (2x-3) \cdot 3^{x^2-3x} \cdot \ln 3.$$

Câu 165: Đạo hàm của hàm số $y = e^{3x}$ là

A. $y' = e^{3x}$. **B.** $y' = e^{3x} \cdot \ln 3$. **C.** $y' = 3e^{3x}$. **D.** $y' = \frac{e^{3x}}{3}$.

Lời giải

$$y' = (e^{3x})' = (3x)' \cdot e^{3x} = 3e^{3x}.$$

Câu 166: Đạo hàm của hàm số $y = 3^{x^3+2}$ là

A. $y = 3x^2 \cdot 3^{x^3+2}$. **B.** $y = x^2 \cdot 3^{x^3+3} \cdot \ln 3$.
C. $y = 3x^2 \cdot (x^3+2) \cdot 3^{x^3+1}$. **D.** $y = 3^{x^3+2} \cdot \ln 3$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = (3^{x^3+2})' = (x^3+2)' \cdot 3^{x^3+2} \cdot \ln 3 = 3x^2 \cdot 3^{x^3+2} \cdot \ln 3 = x^2 \cdot 3^{x^3+3} \cdot \ln 3$$

Câu 167: Hàm số $f(x) = 5^{2x^2-1}$ có đạo hàm là

- A. $2x \cdot 5^{2x^2-1} \cdot \ln 5$. B. $4x \cdot 5^{2x^2-1}$. **C. $4x \cdot 5^{2x^2-1} \cdot \ln 5$.** D. 5^{2x^2-1} .

Lời giải

Áp dụng công thức $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ suy ra $(5^{2x^2-1})' = (2x^2-1)' \cdot 5^{2x^2-1} \cdot \ln 5 = 4x \cdot 5^{2x^2-1} \cdot \ln 5$.

Câu 168: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{2x+3}$.

- A. $y' = 2^{2x+2} \ln 4$. B. $y' = 4^{x+2} \ln 4$. **C. $y' = 2^{2x+2} \ln 16$.** D. $y' = 2^{2x+3} \ln 2$.

Lời giải

Áp dụng công thức đạo hàm $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$.

Ta có $y' = (2x+3)' \cdot 2^{2x+3} \ln 2 = 2^{2x+3} \ln 4 = 2^{2x+2} \ln 16$.

Câu 169: Cho hàm số $y = 2^{x^2-mx+1}$. Với giá trị nào của tham số m thì $y'(0) = \ln 2$?

- A. $-\frac{1}{2}$.** B. $\frac{1}{2}$. C. 2. D. -2.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = 2^{1-mx} \Rightarrow y' = (x^2 - mx + 1)' \cdot 2^{x^2-mx+1} \cdot \ln 2 = (2x - m) \cdot 2^{x^2-mx+1} \cdot \ln 2$.

Khi đó $y'(0) = (-m) \cdot 2^1 \cdot \ln 2 = \ln 2 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

DẠNG 6. TÍNH ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LOGARIT

Câu 170: Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = \log_2 x$ là

- A. $y' = \frac{1}{x \ln 2}$.** B. $y' = \frac{\ln 2}{x}$. C. $y' = \frac{1}{x}$. D. $y' = \frac{1}{2x}$.

Lời giải

Áp dụng công thức $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$. Ta có $y' = \frac{1}{x \ln 2}$

Câu 171: Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = \log_{\sqrt{3}} x$ là

- A. $y' = \frac{\sqrt{3}}{x \ln 3}$. B. $y' = \frac{1}{2x \ln 3}$. **C. $y' = \frac{1}{x \ln \sqrt{3}}$.** D. $y' = \frac{\sqrt{3}}{x}$.

Lời giải

Ta có $y' = \frac{1}{x \ln \sqrt{3}}$.

Câu 172: Trên khoảng $(0; +\infty)$, hàm số $y = \log_3 x$ có đạo hàm là:

- A. $y' = \frac{x}{\ln 3}$. B. $y' = x \ln 3$. **C. $y' = \frac{1}{x \ln 3}$.** D. $y' = \frac{\ln 3}{x}$.

Lời giải

Ta có: $y' = (\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}$.

Câu 173: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \log x$.

A. $y' = \frac{\ln 10}{x}$

B. $y' = \frac{1}{x \ln 10}$

C. $y' = \frac{1}{10 \ln x}$

D. $y' = \frac{1}{x}$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, ta được $y' = \frac{1}{x \ln 10}$.

Câu 174: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2 (2x+1)$?

A. $y' = \frac{1}{(2x+1) \ln 2}$

B. $y' = \frac{2}{(2x+1) \ln 2}$

C. $y' = \frac{2}{2x+1}$

D. $y' = \frac{1}{2x+1}$

Lời giải

Áp dụng công thức tính đạo hàm: $y' = (\log_2 (2x+1))' = \frac{(2x+1)'}{(2x+1) \ln 2} = \frac{2}{(2x+1) \ln 2}$.

Câu 175: Hàm số $y = \ln(2x+1)$ có đạo hàm là

A. $y' = \frac{2}{x \ln(2x+1)}$

B. $y' = \frac{1}{2x+1}$

C. $y' = \frac{2}{2x+1}$

D. $y' = \frac{1}{(2x+1) \ln 2}$

Lời giải

Hàm số $y = \ln(2x+1)$ có đạo hàm là $y' = \frac{2}{2x+1}$.

Câu 176: Đạo hàm của hàm số $y = \log_2 (2x+1)$ là

A. $y' = \frac{1}{(2x+1) \ln 2}$

B. $y' = \frac{1}{2x+1}$

C. $y' = \frac{2}{2x+1}$

D. $y' = \frac{2}{(2x+1) \ln 2}$

Lời giải

Ta có $(\log_2 (2x+1))' = \frac{(2x+1)'}{(2x+1) \ln 2} = \frac{2}{(2x+1) \ln 2}$.

Câu 177: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2 (3x)$

A. $y' = \frac{1}{x \ln 4}$

B. $y' = \frac{3}{x \ln 2}$

C. $y' = \frac{1}{x \ln 2}$

D. $y' = \frac{3}{x \ln 4}$

Lời giải

Ta có: $y' = (\log_2 (3x))' = \frac{(3x)'}{3x \ln 2} = \frac{1}{x \ln 2}$.

Câu 178: Đạo hàm của hàm số $y = \ln(1-x^2)$ là

A. $\frac{2x}{x^2-1}$

B. $\frac{-2x}{x^2-1}$

C. $\frac{1}{1-x^2}$

D. $\frac{1}{x^2-1}$

Lời giải

Ta có $y' = \frac{(1-x^2)'}{1-x^2} = \frac{-2x}{1-x^2} = \frac{2x}{x^2-1}$.

Câu 179: Đạo hàm của hàm số $y = \log_4(2x+5)$ là

A. $y' = \frac{1}{(2x+5)\ln 4}$

B. $y' = \frac{1}{(2x+5)\ln 2}$

C. $y' = \frac{2\ln 4}{(2x+5)}$

D. $y' = \frac{2}{(2x+5)\ln 5}$

Lời giải

$$y = \log_4(2x+5) \Rightarrow y' = \frac{2}{(2x+5)\ln 4} = \frac{2}{(2x+5) \cdot 2\ln 2} = \frac{1}{(2x+5)\ln 2}$$

Câu 180: Trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, đạo hàm của hàm số $y = \log(2x-1)$ là

A. $y' = \frac{1}{(2x-1)\ln 10}$

B. $y' = \frac{2}{(2x-1)\ln 10}$

C. $y' = \frac{2}{2x-1}$

D. $y' = \frac{1}{2x-1}$

Lời giải

Trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, ta có $y = \log(2x-1) \Rightarrow y' = \frac{(2x-1)'}{(2x-1)\ln 10} = \frac{2}{(2x-1)\ln 10}$.

Câu 181: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2(2x+1)$.

A. $y' = \frac{2}{(2x+1)\ln 2}$

B. $y' = \frac{1}{(2x+1)\ln 2}$

C. $y' = \frac{2}{2x+1}$

D. $y' = \frac{1}{2x+1}$

Lời giải**Chọn A**

Ta có $y' = (\log_2(2x+1))' = \frac{(2x+1)'}{(2x+1)\ln 2} = \frac{2}{(2x+1)\ln 2}$.

Câu 182: Hàm số $f(x) = \log_2(x^2 - 2x)$ có đạo hàm

A. $f'(x) = \frac{\ln 2}{x^2 - 2x}$

B. $f'(x) = \frac{1}{(x^2 - 2x)\ln 2}$

C. $f'(x) = \frac{(2x-2)\ln 2}{x^2 - 2x}$

D. $f'(x) = \frac{2x-2}{(x^2 - 2x)\ln 2}$

Lời giải**Chọn D**

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 2x)'}{(x^2 - 2x) \ln 2} = \frac{2x - 2}{(x^2 - 2x) \ln 2}$$

Câu 183: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m \leq 2$

B. $m > 2$

C. $m \geq 0$

D. $m < 0$

Lời giải

Chọn D

Để hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2 - 2x - m + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 1 \cdot (-m + 1) < 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

Câu 184: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2x + m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $0 < m < 3$

B. $m < -1$ hoặc $m > 0$

C. $m > 0$

D. $m = 0$

Lời giải

Chọn C

Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$x^2 - 2x + m + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 (ld) \\ \Delta' = 1 - (1 + m) < 0 \Leftrightarrow m > 0 \end{cases}$$

Câu 185: Đạo hàm của hàm số $y = \log_4(2x^2 - 3)$ là

A. $y' = \frac{4x}{(2x^2 - 3) \ln 2}$

B. $y' = \frac{4x}{2x^2 - 3}$

C. $y' = \frac{1}{(2x^2 - 3) \ln 4}$

D. $y' = \frac{2x}{(2x^2 - 3) \ln 2}$

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = \frac{4x}{(2x^2 - 3) \ln 4} = \frac{4x}{(2x^2 - 3) 2 \ln 2} = \frac{2x}{(2x^2 - 3) \ln 2}.$$

Câu 186: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$ là

A. $y = -4$

B. $y' = \frac{1 + \ln x}{x^2}$

C. $y' = -\frac{1}{x^3}$

D. $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - x' \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Câu 187: Cho hàm số $f(x) = \ln 2021 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$. Tính giá trị biểu thức $S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2020)$, tổng gồm 2020 số hạng.

A. $\frac{2021}{2020}$

B. $\frac{2020}{2021}$

C. $\frac{2021}{2022}$

D. $\frac{2022}{2021}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\frac{x}{x+1}} = \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$\text{Suy ra: } f'(1) = 1 - \frac{1}{2}$$

$$f'(2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$f'(3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

...

$$f'(2020) = \frac{1}{2020} - \frac{1}{2021}$$

$$\text{Vậy } S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2020) = 1 - \frac{1}{2021} = \frac{2020}{2021}.$$

Câu 188: Đạo hàm của hàm số $y = \ln \frac{x}{x+1}$

A. $-\frac{1}{x(x+1)}.$

B. $\frac{x}{x+1}.$

C. $\frac{x+1}{x}.$

D. $\frac{1}{x(x+1)}.$

Lời giải

$$y' = \left(\ln \frac{x}{x+1} \right)' = \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Câu 189: Cho hàm số $f(x) = \ln(\cos x)$. Giá trị của $f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ là.

A. 0.

B. -1.

C. 1.

D. $\sqrt{2}.$

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = [\ln(\cos x)]' = \frac{(\cos x)'}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

Câu 190: Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$ là

A. $y' = (2x - 2)e^x.$

B. $y' = x^2 e^x.$

C. $y' = (x^2 + 2)e^x.$

D. $y' = -2xe^x.$

Lời giải

$$y = (x^2 - 2x + 2)e^x$$

$$\Rightarrow y' = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x = x^2 e^x$$

Câu 191: Cho hàm số $y = \ln(\cos x + 1 + m^2)$. Với giá trị nào của m thì $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{5}$.

A. $m = \pm 2$.

B. $m = 2$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = \pm 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = \ln(\cos x + 1 + m^2) \Rightarrow y' = \frac{-\sin x}{\cos x + 1 + m^2} \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{1 + m^2}.$$

$$\text{Mà } y'(0) = \frac{-1}{5} \Rightarrow \frac{-1}{1 + m^2} = \frac{-1}{5} \Rightarrow m = \pm 2.$$

Câu 192: Cho hàm số $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$. Biết rằng $f'(2) + f'(3) + \dots + f'(2019) + f'(2020) = \frac{a}{b}$ với

a, b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Giá trị của $2a - b$ bằng

A. 2.

B. 4.

C. -2.

D. -4.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x(x+1)}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} & f'(2) + f'(3) + \dots + f'(2019) + f'(2020) \\ &= \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2018.2019} - \frac{1}{2019.2020} + \frac{1}{2019.2020} - \frac{1}{2020.2021} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2020.2021} = \frac{1010.2021 - 1}{2020.2021} \end{aligned}$$

$$\text{Nên } a = 1010.2021 - 1, b = 2020.2021 \Rightarrow 2a - b = -2.$$

Câu 193: Cho hàm số $f(x) = \ln 2018 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$. Tính $S = f'(1) + f'(2) + f'(3) + \dots + f'(2017)$.

A. $S = \frac{4035}{2018}$

B. $S = \frac{2017}{2018}$

C. $S = \frac{2016}{2017}$

D. $S = 2017$

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x) = \ln 2018 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$\text{Do đó } S = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} = 1 - \frac{1}{2018} = \frac{2017}{2018}.$$

Câu 194: Cho hàm số $f(x) = \ln \frac{2018x}{x+1}$. Tính tổng $S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2018)$.

A. $\ln 2018$.

B. 1.

C. 2018.

D. $\frac{2018}{2019}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = \left(\ln \frac{2018x}{x+1} \right)' = \frac{1}{\frac{2018x}{x+1}} \cdot \left(\frac{2018x}{x+1} \right)' = \frac{x+1}{2018x} \cdot \frac{2018}{(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)}$$

$$\text{Vậy } S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2018)$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{2018 \cdot 2019} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2019} \\ = 1 - \frac{1}{2019} = \frac{2018}{2019}.$$

Câu 195: Cho hàm số $f(x) = \ln \left(\frac{x}{x+2} \right)$. Tổng $f'(1) + f'(3) + f'(5) + \dots + f'(2021)$ bằng

A. $\frac{4035}{2021}$.B. $\frac{2021}{2022}$.

C. 2021.

D. $\frac{2022}{2023}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x) = \ln \left(\frac{x}{x+2} \right) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x(x+2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$$

Vậy

$$f'(1) + f'(3) + f'(5) + \dots + f'(2021) = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2021} - \frac{1}{2023} \\ = 1 - \frac{1}{2023} = \frac{2022}{2023}.$$

Câu 196: Cho hàm số $f(x) = \ln \frac{x+1}{x+4}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = f'(0) + f'(3) + f'(6) + \dots + f'(2019).$$

A. $\frac{1}{4}$.B. $\frac{2024}{2023}$.C. $\frac{2022}{2023}$.D. $\frac{2020}{2023}$.

Lời giải

$$\text{Với } x \in [0; +\infty) \text{ ta có } x+1 > 0 \text{ và } x+4 > 0 \text{ nên } f(x) = \ln \frac{x+1}{x+4} = \ln(x+1) - \ln(x+4).$$

$$\text{Từ đó } f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+4}.$$

$$\text{Do đó } P = f'(0) + f'(3) + f'(6) + \dots + f'(2019)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2020} - \frac{1}{2023} \right) = 1 - \frac{1}{2023} = \frac{2022}{2023}.$$

Câu 197: Cho hàm số $y = f(x) = (2m - 1)e^x + 3$. Giá trị của m để $f'(-\ln 3) = \frac{5}{3}$ là

A. $m = \frac{7}{9}$.

B. $m = \frac{2}{9}$.

C. $m = 3$.

D. $m = -\frac{3}{2}$.

Lời giải

$$f'(x) = (2m - 1)e^x.$$

$$\Rightarrow f'(-\ln 3) = (2m - 1)e^{-\ln 3} = \frac{2m - 1}{e^{\ln 3}} = \frac{2m - 1}{3}.$$

$$f'(-\ln 3) = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{2m - 1}{3} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow m = 3.$$

BÀI 33: ĐẠO HÀM CẤP HAI

I LÝ THUYẾT.

1. KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM CẤP HAI

Giải sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x \in (a; b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của $y' = f'(x)$ là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x , kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

Khi đó: $(f'(x))' = f''(x)$.

2. Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI

Một chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $s = f(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s = s(t)$ tại thời điểm t . Ta có $a(t) = f''(t)$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: TÍNH ĐẠO HÀM CẤP HAI

1 PHƯƠNG PHÁP.

+ Áp dụng trực tiếp công thức để tính đạo hàm cấp hai $y'' = (y')'$.

+ Tính $y''(x_0)$.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho $f(x) = (x-3)^6$. Tính $f''(2)$.

Câu 2: Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ tại điểm $x = 2$ là:

Câu 3: Cho $f(x) = \sin 3x$. Giá trị của $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ bằng:

Câu 4:

a) Cho $f(x) = (x+10)^6$. Tính $f''(2)$.

b) Cho $f(x) = \sin 3x$. Tính $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f''(0)$, $f''\left(\frac{\pi}{18}\right)$.

Câu 5: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ là:

Câu 6: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin 5x \cos 2x$ là

Câu 7: Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{1-x}$. b) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. c) $y = \tan x$. d) $y = \cos^2 x$.

Câu 8: Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \sin 5x \cos 2x$

b) $y = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$

c) $y = \frac{x}{x^2-1}$

d) $y = \frac{x-1}{x+2}$ e) $y = x^2 \sin x$

f) $y = x\sqrt{1+x^2}$

g) $y = (1-x^2) \cos x$

h) $y = \sqrt{x}$

i) $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$

j) $y = \frac{x^2}{1-x}$

k) $y = x \cos 2x$

l) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

DẠNG 2: GIA TỐC



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 9: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Câu 10: Một chuyển động xác định bởi phương trình $S(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$. Trong đó t được tính bằng giây, S được tính bằng mét. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3s$?

Câu 11: Một chất điểm chuyển động có phương trình $S = 2t^4 + 6t^2 - 3t + 1$ với t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Hỏi gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3(s)$ bằng bao nhiêu?

BÀI 33: ĐẠO HÀM CẤP HAI

I LÝ THUYẾT.

1. KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM CẤP HAI

Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x \in (a; b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của $y' = f'(x)$ là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x , kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.

Khi đó: $(f'(x))' = f''(x)$.

2. Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI

Một chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $s = f(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s = s(t)$ tại thời điểm t . Ta có $a(t) = f''(t)$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: TÍNH ĐẠO HÀM CẤP HAI

1 PHƯƠNG PHÁP.

+ Áp dụng trực tiếp công thức để tính đạo hàm cấp hai $y'' = (y')'$.

+ Tính $y''(x_0)$.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho $f(x) = (x-3)^6$. Tính $f''(2)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 6(x-3)^5$

Suy ra $f''(x) = 6.5.(x-3)^4 = 30(x-3)^4$

Từ đó: $f''(2) = 30.(2-3)^4 = 30$.

Câu 2: Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ tại điểm $x = 2$ là:

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 2x$

Suy ra: $f''(x) = 6x - 2$

Nên: $f''(2) = 10$

Câu 3: Cho $f(x) = \sin 3x$. Giá trị của $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ bằng:

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 3\cos 3x$ suy ra $f''(x) = -9\sin 3x$

Do đó: $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -9\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 9$.

Câu 4:

a) Cho $f(x) = (x+10)^6$. Tính $f''(2)$.

b) Cho $f(x) = \sin 3x$. Tính $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f''(0)$, $f''\left(\frac{\pi}{18}\right)$.

Lời giải

a) Ta có: $f'(x) = 6(x+10)^5$

Suy ra $f''(x) = 6.5.(x+10)^4 = 30(x+10)^4$

Từ đó: $f''(2) = 30.(2+10)^4 = 622080$.

b) Ta có $f'(x) = 3\cos 3x$ và $f''(x) = -9\sin 3x$

Khi đó: $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -9\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -9$; $f''(0) = -9\sin(0) = 0$ và $f''\left(\frac{\pi}{18}\right) = -9\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-9}{2}$.

Câu 5: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ là:

Lời giải

Ta có: $y = \frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2} \Rightarrow y' = -\frac{3}{(x-2)^2}$ và $y'' = \frac{6}{(x-2)^3}$

Câu 6: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin 5x \cos 2x$ là

Lời giải

Ta có: $y = \sin 5x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin 3x)$

Do đó $y' = \frac{1}{2}(7\cos 7x + 3\cos 3x) \Rightarrow y'' = \frac{1}{2}(-49\sin 7x - 9\sin 3x)$

Câu 7: [Bài 2 – Tr174-SGKCB] Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{1-x}$. b) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. c) $y = \tan x$. d) $y = \cos^2 x$.

Lời giải

a) Ta có: $y' = \frac{1}{(1-x)^2}$ và $y'' = \frac{-2}{(1-x)^3}$.

b) Ta có: $y' = \frac{1}{2(1-x)\sqrt{1-x}}$ và $y'' = \frac{3}{4(1-x)^2\sqrt{1-x}}$.

c) Ta có: $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$ và $y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$.

d) Ta có: $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$. Khi đó: $y' = -\cos 2x$ và $y'' = -2 \cos 2x$.

Câu 8: Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \sin 5x \cos 2x$ b) $y = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$ c) $y = \frac{x}{x^2-1}$

d) $y = \frac{x-1}{x+2}$ e) $y = x^2 \sin x$ f) $y = x\sqrt{1+x^2}$

g) $y = (1-x^2) \cos x$ h) $y = \sqrt{x}$ i) $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$

j) $y = \frac{x^2}{1-x}$ k) $y = x \cos 2x$ l) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Lời giải

a) Ta có: $y = \sin 5x \cos 2x = \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin 3x)$

Khi đó: $y' = \frac{1}{2}(7 \cos 7x + 3 \cos 3x)$ và $y'' = -\frac{1}{2}(49 \sin 7x + 9 \sin 3x)$

b) Ta có: $y = \frac{2x+1}{x^2+x-2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}$

Khi đó: $y' = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2}$ và $y'' = \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x+2)^3}$

c) Ta có: $y = \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right)$

Khi đó: $y' = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{-1}{(x-1)^2} \right)$ và $y'' = \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x-1)^3}$

d) Ta có: $y = \frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}$

Khi đó: $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$ và $y'' = -\frac{6}{(x+2)^3}$

e) Ta có: $y' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$ và $y'' = (2 - x^2) \sin x + 4x \cos x$

f) Ta có: $y' = \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{1 + x^2}}$ và $y'' = \frac{2x^3 + 3x}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}$

g) Ta có: $y' = -2x \cos x - (1 - x^2) \sin x$ và $y'' = (x^2 - 3) \cos x + 4x \sin x$

h) Ta có: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ và $y'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$

i) Ta có: $y = \sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 6x$

Khi đó: $y' = \frac{1}{2} \cos 2x + \cos 4x - \frac{3}{2} \cos 6x$ và $y'' = -\sin 2x - 4 \sin 4x + 9 \sin 6x$

j) Ta có: $y = \frac{x^2}{1 - x} = -x - 1 + \frac{1}{1 - x}$

Khi đó: $y' = -1 + \frac{1}{(1 - x)^2}$ và $y'' = \frac{-2}{(1 - x)^3}$

k) Ta có: $y' = \cos 2x - 2x \sin 2x$ và $y'' = -4 \sin 2x - 4x \cos 2x$

l) Ta có: $y' = -\frac{1}{x\sqrt{x}}$ và $y'' = \frac{3}{4\sqrt{x^5}}$

DẠNG 2: GIA TỐC



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 9: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Lời giải

Vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp một của quãng đường: $v = S' = -3t^2 + 6t + 9$

Gia tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp hai của quãng đường: $a = S'' = -6t + 6$

Gia tốc triệt tiêu khi $S'' = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Khi đó vận tốc của chuyển động là $S'(1) = 12 \text{ m/s}$.

Câu 10: Một chuyển động xác định bởi phương trình $S(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$. Trong đó t được tính bằng giây, S được tính bằng mét. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3 \text{ s}$?

Lời giải

Vận tốc của chuyển động tại thời điểm t có phương trình là $v(t) = S'(t) = 3t^2 - 6t - 9$.

Gia tốc của chuyển động tại thời điểm t có phương trình là $a(t) = v'(t) = 6t - 6$.

Tại thời điểm $t = 3\text{ s}$ ta có $a(3) = 6.3 - 6 = 12\text{ m/s}^2$.

Câu 11: Một chất điểm chuyển động có phương trình $S = 2t^4 + 6t^2 - 3t + 1$ với t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Hỏi gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3(\text{s})$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có vận tốc tức thời của chuyển động được tính theo công thức:

$$v(t) = (S(t))' = 8t^3 + 12t - 3.$$

Khi đó gia tốc tức thời của chuyển động được tính theo công thức:

$$a(t) = 24t^2 + 12 \Rightarrow a(3) = 24.3^2 + 12 = 228(\text{m/s}^2).$$

Vậy gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3(\text{s})$ là $228(\text{m/s}^2)$.

BÀI 33: ĐẠO HÀM CẤP HAI



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho $f(x) = x^3$. Tính $f''(1)$.

- A. $f''(1) = 3$. B. $f''(1) = 2$. C. $f''(1) = 6$. D. $f''(1) = 1$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 2x$, giá trị của $f''(1)$ bằng

- A. 6. B. 8. C. 3. D. 2.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = (3x - 7)^5$. Tính $f''(2)$.

- A. $f''(2) = 0$. B. $f''(2) = 20$. C. $f''(2) = -180$. D. $f''(2) = 30$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-1}$. Tính $f''(-1)$.

- A. $-\frac{8}{27}$ B. $\frac{2}{9}$. C. $\frac{8}{27}$ D. $-\frac{4}{27}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$. Tính y'' .

- A. $y'' = \frac{-5}{(x+3)^3}$. B. $y'' = \frac{10}{(x+3)^2}$. C. $y'' = \frac{-10}{(x+3)^3}$. D. $y'' = \frac{5}{(x+3)^3}$.

Câu 6: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = x^6 - 4x^3 + 2x + 2022$ với $x \in \mathbb{R}$ là

- A. $y'' = 30x^4 - 24x + 2$. B. $y'' = 30x^4 - 24x$. C. $y'' = 6x^5 - 12x^2 + 2$. D. $y'' = 6x^5 - 12x^2$.

Câu 7: Cho hàm số $y = x \cos x$. Tìm hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

- A. $y'' + y = \sin x + 2x \cos x$. B. $y'' + y = 2 \sin x$.
C. $y'' + y = -\sin x + x \cos x$. D. $y'' + y = -2 \sin x$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \sin 2x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y^2 + (y')^2 = 4$. B. $y = y' \cdot \tan 2x$. C. $4y - y'' = 0$. D. $4y + y'' = 0$.

Câu 9: Cho hàm số $y = \sin^3 x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $y'' + 9y - \sin x = 0$. B. $y'' + 9y - 6 \sin x = 0$. C. $y'' + 9y - 6 \cos x = 0$. D. $y'' + 9y + 6 \sin x = 0$.

Câu 10: Cho hàm số $y = x^5 - 3x^4 + x + 1$ với $x \in \mathbb{R}$. Đạo hàm y'' của hàm số là

- A. $y'' = 5x^3 - 12x^2 + 1$. B. $y'' = 5x^4 - 12x^3$.
C. $y'' = 20x^2 - 36x^3$. D. $y'' = 20x^3 - 36x^2$.

Câu 11: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = -3\cos x$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

- A. $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$. B. $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$. C. $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. D. $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

Câu 12: Cho $y = \sqrt{2x - x^2}$, tính giá trị biểu thức $A = y^3 \cdot y''$.

- A. 1. B. 0. C. -1. D. Đáp án khác.

Câu 13: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \frac{3x+1}{x+2}$ là

- A. $y'' = \frac{10}{(x+2)^2}$ B. $y'' = -\frac{5}{(x+2)^4}$ C. $y'' = -\frac{5}{(x+2)^3}$ D. $y'' = -\frac{10}{(x+2)^3}$

Câu 14: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \cos^2 x$ là

- A. $y'' = -2\cos 2x$. B. $y'' = -2\sin 2x$. C. $y'' = 2\cos 2x$. D. $y'' = 2\sin 2x$.

Câu 15: Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Khi đó $y''(x)$ bằng

- A. $y'' = \frac{1}{2}\cos 2x$. B. $y'' = 2\sin 2x$. C. $y'' = 2\cos 2x$. D. $y'' = 2\cos x$.

Câu 16: Cho hàm số $y = -\frac{1}{x}$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là

- A. $y'' = \frac{2}{x^3}$. B. $y'' = \frac{-2}{x^2}$. C. $y'' = \frac{-2}{x^3}$. D. $y'' = \frac{2}{x^2}$.

Câu 17: Cho hàm số $y = \sqrt{1+3x-x^2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $(y')^2 + y \cdot y'' = -1$. B. $(y')^2 + 2y \cdot y'' = 1$. C. $y \cdot y'' - (y')^2 = 1$. D. $(y')^2 + y \cdot y'' = 1$.

Câu 18: Cho hàm số $y = \sin 2x$. Hãy chọn đúng.

- A. $y^2 + (y')^2 = 4$. B. $4y - y'' = 0$. C. $4y + y'' = 0$. D. $y = y' \tan 2x$.

Câu 19: Phương trình chuyển động của một chất điểm được biểu thị bởi công thức $S(t) = 4 - 2t + 4t^2 + 2t^3$, trong đó $t > 0$ và t tính bằng giây (s), $S(t)$ tính bằng mét (m). Tìm gia tốc a của chất điểm tại thời điểm $t = 5(s)$.

- A. $a = 68(m/s^2)$. B. $a = 115(m/s^2)$. C. $a = 100(m/s^2)$. D. $a = 225(m/s^2)$.

BÀI 33: ĐẠO HÀM CẤP HAI



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho $f(x) = x^3$. Tính $f''(1)$.

A. $f''(1) = 3$.

B. $f''(1) = 2$.

C. $f''(1) = 6$.

D. $f''(1) = 1$.

Lời giải

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f''(x) = 3 \cdot 2x = 6x$$

$$f''(1) = 6 \cdot 1 = 6$$

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 2x$, giá trị của $f''(1)$ bằng

A. 6.

B. 8.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

$$f'(x) = 3x^2 + 2, f''(x) = 6x \Rightarrow f''(1) = 6.$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = (3x - 7)^5$. Tính $f''(2)$.

A. $f''(2) = 0$.

B. $f''(2) = 20$.

C. $f''(2) = -180$.

D. $f''(2) = 30$.

Lời giải

$$f(x) = (3x - 7)^5$$

$$f'(x) = 15(3x - 7)^4.$$

$$f''(x) = 180(3x - 7)^3.$$

$$\text{Vậy } f''(2) = -180.$$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-1}$. Tính $f''(-1)$.

A. $-\frac{8}{27}$

B. $\frac{2}{9}$.

C. $\frac{8}{27}$

D. $-\frac{4}{27}$.

Lời giải

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}.$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2}, f''(x) = \frac{8}{(2x-1)^3}.$$

Khi đó $f''(-1) = -\frac{8}{27}.$

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$. Tính y'' .

A. $y'' = \frac{-5}{(x+3)^3}$. **B.** $y'' = \frac{10}{(x+3)^2}$. **C.** $y'' = \frac{-10}{(x+3)^3}$. **D.** $y'' = \frac{5}{(x+3)^3}$.

Lời giải

TXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Có $y' = \frac{5}{(x+3)^2} \Rightarrow y'' = 5 \cdot \frac{-2(x+3)}{(x+3)^4} = \frac{-10}{(x+3)^3}.$

Câu 6: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = x^6 - 4x^3 + 2x + 2022$ với $x \in \mathbb{R}$ là

A. $y'' = 30x^4 - 24x + 2$. **B.** $y'' = 30x^4 - 24x$. **C.** $y'' = 6x^5 - 12x^2 + 2$. **D.** $y'' = 6x^5 - 12x^2$.

Lời giải

Ta có $y' = 6x^5 - 12x^2 + 2$

Suy ra $y'' = 30x^4 - 24x$.

Câu 7: Cho hàm số $y = x \cdot \cos x$. Tìm hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

A. $y'' + y = \sin x + 2x \cos x$. **B.** $y'' + y = 2 \sin x$.
C. $y'' + y = -\sin x + x \cos x$. **D.** $y'' + y = -2 \sin x$.

Lời giải

Ta có $y' = \cos x - x \sin x \Rightarrow y'' = -2 \sin x - x \cos x$.

Khi đó $y'' + y = -2 \sin x - x \cos x + x \cos x = -2 \sin x$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \sin 2x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y^2 + (y')^2 = 4$. **B.** $y = y' \cdot \tan 2x$. **C.** $4y - y'' = 0$. **D.** $4y + y'' = 0$.

Lời giải

Ta có $y' = 2 \cos 2x \Rightarrow y'' = -4 \sin 2x$

$4y + y'' = 4 \sin 2x - 4 \sin 2x = 0$

Câu 9: Cho hàm số $y = \sin^3 x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $y'' + 9y - \sin x = 0$. **B.** $y'' + 9y - 6 \sin x = 0$. **C.** $y'' + 9y - 6 \cos x = 0$. **D.** $y'' + 9y + 6 \sin x = 0$.

Lời giải

Ta có $y = \sin^3 x \Rightarrow y' = 3 \sin^2 x \cdot \cos x$ và $y'' = 6 \sin x \cdot \cos^2 x - 3 \sin^3 x$.

Khi đó $y'' + 9y = 6 \sin x \cdot \cos^2 x - 3 \sin^3 x + 9 \sin^3 x = 6 \sin x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 6 \sin x$.

Câu 10: Cho hàm số $y = x^5 - 3x^4 + x + 1$ với $x \in \mathbb{R}$. Đạo hàm y'' của hàm số là

A. $y'' = 5x^3 - 12x^2 + 1$.

B. $y'' = 5x^4 - 12x^3$.

C. $y'' = 20x^2 - 36x^3$.

D. $y'' = 20x^3 - 36x^2$.

Lời giải

Ta có $y = x^5 - 3x^4 + x + 1 \Rightarrow y' = 5x^4 - 12x^3 + 1 \Rightarrow y'' = 20x^3 - 36x^2$.

Câu 11: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = -3 \cos x$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

A. $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$.

B. $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$.

C. $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

D. $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

Lời giải

$y = -3 \cos x \Rightarrow y' = 3 \sin x; y'' = 3 \cos x$.

$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Câu 12: Cho $y = \sqrt{2x - x^2}$, tính giá trị biểu thức $A = y^3 \cdot y''$.

A. 1.

B. 0.

C. -1.

D. Đáp án khác.

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}, y'' = \frac{-1}{\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^3}$

Do đó: $A = y^3 \cdot y'' = -1$.

Câu 13: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \frac{3x+1}{x+2}$ là

A. $y'' = \frac{10}{(x+2)^2}$

B. $y'' = -\frac{5}{(x+2)^4}$

C. $y'' = -\frac{5}{(x+2)^3}$

D. $y'' = -\frac{10}{(x+2)^3}$

Lời giải

Ta có $y = 3 - \frac{5}{x+2} \Rightarrow y' = \frac{5}{(x+2)^2}; y'' = -\frac{10}{(x+2)^3}$

Câu 14: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \cos^2 x$ là

A. $y'' = -2 \cos 2x$.

B. $y'' = -2 \sin 2x$.

C. $y'' = 2 \cos 2x$.

D. $y'' = 2 \sin 2x$.

Lời giải

$y' = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x \Rightarrow y'' = -2 \cos 2x$.

Câu 15: Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Khi đó $y''(x)$ bằng

- A. $y'' = \frac{1}{2} \cos 2x$. B. $P = 2 \sin 2x$.
 C. $y'' = 2 \cos 2x$. D. $y'' = 2 \cos x$.

Lời giải

$$y = \sin^2 x \Rightarrow y' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x \Rightarrow y'' = 2 \cos 2x$$

Câu 16: Cho hàm số $y = -\frac{1}{x}$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là

- A. $y'' = \frac{2}{x^3}$. B. $y'' = \frac{-2}{x^2}$. C. $y'' = \frac{-2}{x^3}$. D. $y'' = \frac{2}{x^2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = \frac{1}{x^2} \text{ nên } y'' = -\frac{(x^2)'}{x^4} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}.$$

Câu 17: Cho hàm số $y = \sqrt{1+3x-x^2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $(y')^2 + y \cdot y'' = -1$. B. $(y')^2 + 2y \cdot y'' = 1$. C. $y \cdot y'' - (y')^2 = 1$. D. $(y')^2 + y \cdot y'' = 1$.

Lời giải

$$y = \sqrt{1+3x-x^2} \Rightarrow y^2 = 1+3x-x^2$$

$$\Rightarrow 2y \cdot y' = 3-2x \Rightarrow 2 \cdot (y')^2 + 2y \cdot y'' = -2 \Rightarrow (y')^2 + y \cdot y'' = -1$$

Câu 18: Cho hàm số $y = \sin 2x$. Hãy chọn đúng.

- A. $y^2 + (y')^2 = 4$. B. $4y - y'' = 0$. C. $4y + y'' = 0$. D. $y = y' \tan 2x$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 2 \cos 2x$ và $y'' = -4 \sin 2x$.

$$4y + y'' = 4 \sin 2x - 4 \sin 2x = 0.$$

Câu 19: Phương trình chuyển động của một chất điểm được biểu thị bởi công thức $S(t) = 4 - 2t + 4t^2 + 2t^3$, trong đó $t > 0$ và t tính bằng giây (s), $S(t)$ tính bằng mét (m). Tìm gia tốc a của chất điểm tại thời điểm $t = 5(s)$.

- A. $a = 68(m/s^2)$. B. $a = 115(m/s^2)$. C. $a = 100(m/s^2)$. D. $a = 225(m/s^2)$.

Lời giải

Theo ứng dụng đạo hàm của hàm số có:

$$v(t) = S'(t) = -2 + 8t + 6t^2 \text{ và } a(t) = v'(t) = 8 + 12t \Rightarrow a(5) = 68(m/s^2).$$