

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (6,0 điểm).

a) Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{6-3|x|}}{x^2+4x+3}$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị $(P): y = x^2 + 3x + m$ cắt đường thẳng

$y = -2x + 2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 - x_2)^2 + 8x_1x_2 = 1$.

c) Cho bất phương trình $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)} \leq m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in [-3; 6]$.

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Cho tam giác ABC có $AB = c, AC = b, BC = a$ thỏa mãn $\frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2$. Tính góc

$\widehat{BAC}$.

b) Cho tam giác ABC đều cạnh a và M là điểm di động trên đường thẳng AB . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$.

Câu 3 (4,0 điểm).

a) Giải phương trình $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$.

b) Nhà máy dự định dùng hai loại nguyên liệu để sản xuất ít nhất 140 kg chất A và 18 kg chất B. Với mỗi tấn nguyên liệu loại I, nhà máy chiết xuất được 20 kg chất A và 1,2 kg chất B. Với mỗi tấn nguyên liệu loại II, nhà máy chiết xuất được 10 kg chất A và 3 kg chất B. Giá mỗi tấn nguyên liệu loại I là 8 triệu đồng và loại II là 6 triệu đồng. Hỏi nhà máy phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất mà vẫn đạt mục tiêu đề ra. Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp tối đa 9 tấn nguyên liệu loại I và 8 tấn nguyên liệu loại II.

Câu 4 (2,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có phương trình đường thẳng chứa cạnh AB là $x + 2y - 2 = 0$, phương trình đường thẳng chứa cạnh AC là $2x + y + 1 = 0$, biết điểm $M(1; 2)$ thuộc đoạn thẳng BC . Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}$ có giá trị nhỏ nhất.

Câu 5 (4,0 điểm).

a) Cho tam giác ABC có ba cạnh $AB = c, BC = a, AC = b$; độ dài các đường cao hạ từ đỉnh A; B; C lần lượt là $h_a; h_b; h_c$ thỏa mãn $a \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c$. Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều.

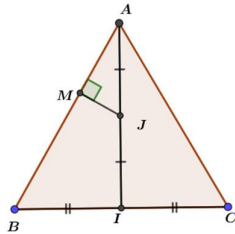
b) Xét các số thực x, y, z thỏa mãn đồng thời $0 < x < y \leq z \leq 1$ và $3x + 2y + z \leq 4$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 3x^2 + 2y^2 + z^2$.

..... HẾT

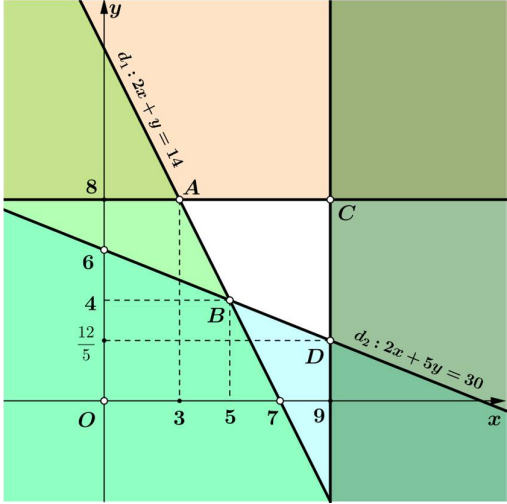
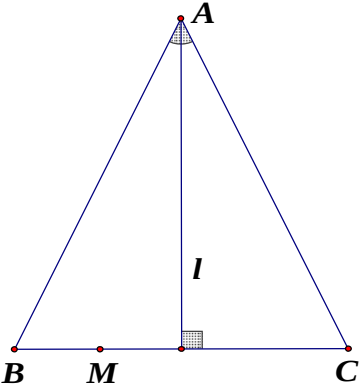
Họ và tên thí sinh.....; Số báo danh.....
Chữ ký cán bộ coi thi số 1:.....Chữ ký cán bộ coi thi số 2:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Nội dung	Điểm
1a (2 điểm)	Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{6-3 x }}{x^2+4x+3}$.	
	Điều kiện: $\begin{cases} 6-3 x \geq 0 \\ x^2+4x+3 \neq 0 \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \neq -1 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq -1 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq -1 \end{cases}$.	1,0
	Tập xác định $D = [-2;2] \setminus \{-1\}$.	0,5
1b (2 điểm)	Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị $(P): y = x^2 + 3x + m$ cắt đường thẳng ...	
	Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 + 3x + m = -2x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 5x + m - 2 = 0 \quad (1)$	0,5
	Ta có $\Delta = 5^2 - 4(m-2) = 33 - 4m$. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khi và chỉ khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow 33 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{33}{4}$.	0,5
	Áp dụng định lí Vi ét cho phương trình (1) ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 x_2 = m - 2 \end{cases}$ Theo đề ra ta có $(x_1 - x_2)^2 + 8x_1 x_2 = 1$ $\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + 8x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + 4x_1 x_2 = 1$	0,5
	$\Leftrightarrow (-5)^2 + 4(m-2) = 1 \Leftrightarrow 17 + 4m = 1 \Leftrightarrow m = -4$. (Thỏa mãn điều kiện).	0,5
1c (2 điểm)	Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)} \leq m$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-3;6]$	
	Đặt $t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} \Rightarrow t^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} \geq 9$. (1) Ta có: $1 \cdot \sqrt{3+x} + 1 \cdot \sqrt{6-x} \leq \sqrt{[(3+x) + (6-x)](1+1)} \Rightarrow t \leq 3\sqrt{2}$. (2) Từ (1) và (2), suy ra $3 \leq t \leq 3\sqrt{2}$.	0,5

	Khi đó: $t^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} \Rightarrow \sqrt{(3+x)(6-x)} = \frac{t^2 - 9}{2}$. Bất phương trình thành: $-t^2 + 2t + 9 \leq 2m, \forall t \in [3; 3\sqrt{2}]$.	0,5
	Xét $f(t) = -t^2 + 2t + 9$ có đồ thị là parabol có đỉnh $I(1;10)$. Lập bảng biến thiên trên $[3; 3\sqrt{2}] \Rightarrow \underset{[3; 3\sqrt{2}]}{\text{Max}} f(t) = 6$ khi $t = 3$.	0,5
	Vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 2m \geq 6 \Leftrightarrow m \geq 3$.	0,5
2a (2 điểm)	Cho tam giác ABC có $AB = c, AC = b, BC = a$ thỏa mãn $\frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2$. Tính góc $\widehat{BAC}$.	
	Ta có $\frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \Leftrightarrow b^3 + c^3 = a^2b + a^2c$	0,5
	$\Leftrightarrow b^2 - bc + c^2 = a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc$	0,5
	$\Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 60^\circ$.	1,0
2b (2 điểm)	Cho tam giác ABC đều cạnh a và M là điểm di động trên đường thẳng AB. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \left 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right$.	
		0,5
	Gọi I là trung điểm BC và gọi J là trung điểm AI. Ta có $\left 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right = \left 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} \right = \left 4\overrightarrow{MJ} \right = 4MJ$	
	Do M là điểm di động trên đường thẳng AB nên để $MJ_{\min}$ $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của J lên đường thẳng AB.	0,5
	Vì tam giác ABC đều có cạnh $a \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow JA = \frac{1}{2}AI = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.	0,5
3a (2 điểm)	Xét $\triangle JAM$ vuông ở M có: $JM = JA \cdot \sin \widehat{MAJ} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{8}$. $\Rightarrow \left 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right _{\min} = 4MJ = 4 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{8} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.	0,5
	Giải phương trình: $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$. Điều kiện: $x \geq 1$ (*). Ta có: $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x) \Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x-1} + x - 1 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$	0,5

	$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x-1})^2 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$	
	Đặt $x + \sqrt{x-1} = y$ (Điều kiện: $y \geq 1$ (* *)), phương trình trở thành: $y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 3 \end{cases}$	0,5
	Với $y = -1$ (không thỏa mãn điều kiện (* *)) Với $y = 3$ (thỏa mãn điều kiện (* *)), ta có phương trình: $x + \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x-1 = 9-6x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn điều kiện (*))}$	0,5
	Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.	
3b (2 điểm)	Nhà máy dự định dùng hai loại nguyên liệu để sản xuất ít nhất 140 kg chất A và 18 kg chất B...	
	Gọi x, y lần lượt là số tấn nguyên liệu loại I và loại II cần dùng Điều kiện: $0 \leq x \leq 9; 0 \leq y \leq 8$ ❖ Khối lượng chất A được chiết xuất từ ☞ Nguyên liệu loại I là 0,020x (tấn) ☞ Nguyên liệu loại II là 0,010y (tấn) Theo giả thiết, ta có bất phương trình $0,02x + 0,01y \geq 0,14$ hay $2x + y \geq 14$	0,5
	❖ Khối lượng chất B được chiết xuất từ ☞ Nguyên liệu loại I là 0,0012x (tấn) ☞ Nguyên liệu loại II là 0,003y (tấn) Theo giả thiết, ta có bất phương trình $0,0012x + 0,003y \geq 0,018$ hay $2x + 5y \geq 30$ Khi đó để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất mà vẫn đạt mục tiêu đề ra thì ta cần tìm x, y sao cho biểu thức $F(x, y) = 8x + 6y$ nhỏ nhất với x, y thỏa mãn hệ $\text{bất phương trình } \begin{cases} 0 \leq x \leq 9 \\ 0 \leq y \leq 8 \\ 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases}$	0,5

	Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên, ta được miền nghiệm của hệ là miền trong tứ giác $ABCD$ (như hình vẽ), với $A(8;3), B(5;4), C(9;8), D\left(9;\frac{12}{5}\right)$ 	0,5
	❖ Tại đỉnh B, ta có $F = 64$ ❖ Tại đỉnh C, ta có $F = 120$ ❖ Tại đỉnh D, ta có $F = 86,4$ Vậy cơ sở cần mua 5 tấn nguyên liệu loại I và 4 tấn nguyên liệu loại II thì chi phí thấp nhất 64 triệu đồng.	0,5
4 (2 điểm)	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có phương trình đường thẳng chứa cạnh AB là: $x + 2y - 2 = 0$, ...  +) Các đường phân giác góc A là tập hợp các điểm cách đều AB, AC nên có phương trình: $\frac{ x + 2y - 2 }{\sqrt{5}} = \frac{ 2x + y + 1 }{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 3x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$ +) Do ΔABC cân tại A nên phân giác trong (l_a) của góc A vuông góc với BC. +) TH1: $(l_a) : x - y + 3 = 0$, khi đó BC đi qua $M(1;2)$ và có vptp $\vec{n}_1 = (1;1)$; $\Rightarrow$ Phương trình $BC : x + y - 3 = 0$ Tọa độ B là nghiệm hệ PT: $\begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow B(4; -1)$ Tọa độ C là nghiệm hệ PT: $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow C(-4; 7)$ Khi đó $\vec{MB} = (3; -3)$; $\vec{MC} = (-5; 5) \Rightarrow \vec{MB} = -\frac{3}{5}\vec{MC} \Rightarrow B, C$ nằm về hai phía (l_a) 0,5	

	(thỏa mãn)	
	+) TH2: (l_a): $3x + 3y - 1 = 0$, khi đó BC đi qua M(1;2) và có vtpt $\vec{n}_2 = (1; -1)$ $\Rightarrow$ Phương trình BC: $x - y + 1 = 0$ Tọa độ B là nghiệm hệ PT: $\begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow B(0;1)$ Tọa độ C là nghiệm hệ PT: $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow C(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$ Khi đó $\vec{MB} = (-1; -1)$; $\vec{MC} = (-\frac{5}{3}; -\frac{5}{3})$ cùng hướng (loại).	0,5
	Với $B(4; -1); C(-4; 7)$. Gọi $D(x; y) \Rightarrow \vec{DB} = (4 - x; -1 - y)$, $\vec{DC} = (-4 - x; 7 - y)$ $\Rightarrow \vec{DB} \cdot \vec{DC} = x^2 + y^2 - 6y - 23 = x^2 + (y - 3)^2 - 32 \geq -32$. Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$ Vậy $D(0; 3)$ thì $\vec{DB} \cdot \vec{DC}$ nhỏ nhất bằng -32.	0,5
5a (2 điểm)	Cho tam giác ABC có ba cạnh $AB = c, BC = a, AC = b$; độ dài các đường cao hạ từ đỉnh A; B; C lần lượt là $h_a; h_b; h_c$ thỏa mãn...	
	Ta có: $\frac{a^2}{2R} + \frac{b^2}{2R} + \frac{c^2}{2R} = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} \Leftrightarrow \frac{1}{R}(a^2 + b^2 + c^2) = 4S \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$	0,5
	$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = abc \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$	0,5
	Do: $a, b, c > 0$ nên áp dụng BĐT Cô Si, ta có: $\begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2ab \\ b^2 + c^2 \geq 2bc \\ c^2 + a^2 \geq 2ca \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$	0,5
	Đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC là tam giác đều.	0,5
5b (2 điểm)	Xét các số thực x, y, z thỏa mãn đồng thời $0 < x < y \leq z \leq 1$ và $3x + 2y + z \leq 4$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 3x^2 + 2y^2 + z^2$.	
	Ta có: $4 \geq 3x + 2y + z > 6x \Rightarrow 0 < x < \frac{2}{3}$.	0,5
	TH1: $\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$.	0,5

	Vì $0 < y \leq z \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} y^2 \leq y \\ z^2 \leq z \end{cases} \Rightarrow S \leq 3x^2 + 2y + z \leq 3x^2 - 3x + 4.$									
	Đặt $f(x) = 3x^2 - 3x + 4$ với $\frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}$. Lập bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{2}{3}$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$\frac{10}{3}$</td><td>$\frac{7}{4}$</td><td>$\frac{10}{3}$</td></tr></table> Suy ra: $S \leq \frac{10}{3}$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}; y = z = 1.$	x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$f(x)$	$\frac{10}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{10}{3}$	0,5
x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$							
$f(x)$	$\frac{10}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{10}{3}$							
	TH2: $0 < x < \frac{1}{3} \Rightarrow S < 3 \cdot \frac{1}{9} + 1 + 1 = \frac{10}{3}.$ Vậy $\max S = \frac{10}{3}.$	0,5								

Các cách giải khác đáp án nếu đúng vẫn cho điểm tối đa tương ứng.