

Câu 1 (4 điểm). Cho parabol $(P): y = x^2 + bx + c$ (b, c là các tham số thực).

a) Tìm giá trị của b, c biết parabol (P) đi qua điểm $M(-3; 2)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x = -1$.

b) Với giá trị của b, c tìm được ở câu a), tìm m để đường thẳng $d: y = -x - m$ cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O (với O là gốc tọa độ).

Câu 2 (7 điểm).

a) Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$.

b) Tìm m để bất phương trình $\frac{x^2 - mx - 2}{x^2 - 3x + 4} < -1$ vô nghiệm.

c) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{2x + y} + 2\sqrt{x - 2y + 1} = 5 \\ 3\sqrt{x - 2y + 1} + y = 3x + 2 \end{cases}$$

Câu 3 (2 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-1; 1)$ và $B(2; 4)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .

Câu 4 (5 điểm). Cho tam giác ABC có M là trung điểm AC , N là điểm thuộc cạnh BC thỏa mãn $NC = 2NB$. Gọi I là trung điểm của MN .

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$.

b) Biểu diễn vector $\overrightarrow{IA}$ theo hai vector $\overrightarrow{IB}$ và $\overrightarrow{IC}$.

c) Giả sử độ dài các cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh rằng:

Nếu $3a\overrightarrow{IA} + 4b\overrightarrow{IB} + 5c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ thì tam giác ABC đều.

Câu 5 (2 điểm). Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x > 1, y > 1, z > 1$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 2$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = (x - 1)(y - 1)(z - 1)$.

-----HẾT-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ ký giám thị coi thi số 1:

Chữ ký giám thị coi thi số 2:

I. Hướng dẫn chung

II. Đáp án và thang điểm

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (4 điểm)	a) Cho parabol $(P): y = x^2 + bx + c$ (b, c là các tham số thực). Tìm giá trị của b, c biết parabol (P) đi qua điểm $M(-3; 2)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x = -1$.	
	Do parabol (P) có trục đối xứng là đường thẳng $x = -1$ nên ta có $-\frac{b}{2} = -1 \Rightarrow b = 2$.	1
	Do parabol (P) đi qua điểm $M(-3; 2)$ nên ta có $2 = (-3)^2 + b(-3) + c \Leftrightarrow c = 3b - 7 \Rightarrow c = 3 \cdot 2 - 7 = -1$. Vậy $b = 2, c = -1$.	1
	b) Với giá trị của b, c tìm được ở câu a), tìm m để đường thẳng $d: y = -x - m$ cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O (với O là gốc tọa độ).	
	Với $b = 2, c = -1$ ta có $(P): y = x^2 + 2x - 1$. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là $x^2 + 2x - 1 = -x - m \Leftrightarrow x^2 + 3x + m - 1 = 0$ (1) Để d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 13 - 4m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{13}{4}$.	0.5
	Khi đó giả sử 2 nghiệm của phương trình (1) là x_1, x_2 lần lượt là hoành độ 2 điểm A, B . Do $A, B \in d \Rightarrow A(x_1; -x_1 - m), B(x_2; -x_2 - m) \Rightarrow \overrightarrow{OA}(x_1; -x_1 - m), \overrightarrow{OB}(x_2; -x_2 - m)$.	0.5
	Tam giác OAB vuông tại O khi và chỉ khi $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + (x_1 + m)(x_2 + m) = 0 \Leftrightarrow 2x_1 \cdot x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 = 0$ (2)	0.5
	Do x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1) nên theo định lý Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$ Khi đó (2) $\Leftrightarrow 2(m - 1) + m(-3) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$. Kết hợp với điều kiện $m < \frac{13}{4}$ ta có các giá trị của m cần tìm là $m = -1, m = 2$.	0.5
Câu 2 (7 điểm)	a) Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 3x + 6} = 3$.	
	Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 6} - 2 = 0$	0.5

	$\Leftrightarrow \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x^2-3x+3}+1} + \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x^2-3x+6}+1} = 0$	0.5
	$\Leftrightarrow (x^2-3x+2) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+3}+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+6}+1} \right) = 0$	0.5
	$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \left(\text{Do } \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+3}+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+6}+1} > 0 \right)$	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$ Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x=1, x=2$.	0.5
	b) Tìm m để bất phương trình $\frac{x^2-mx-2}{x^2-3x+4} < -1$ vô nghiệm.	
	Bất phương trình $\frac{x^2-mx-2}{x^2-3x+4} < -1$ vô nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình $\frac{x^2-mx-2}{x^2-3x+4} \geq -1$ (1) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.	0.5
	Ta có (1) $\Leftrightarrow x^2-mx-2 \geq -x^2+3x-4$ (Do $x^2-3x+4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow 2x^2-(m+3)x+2 \geq 0$ (2)	0.5
	Bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\Delta \leq 0$	0.5
	$\Leftrightarrow (m+3)^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m+3 \leq 4 \Leftrightarrow -7 \leq m \leq 1$ Vậy để bất phương trình $\frac{x^2-mx-2}{x^2-3x+4} < -1$ vô nghiệm thì $-7 \leq m \leq 1$.	0.5
	c) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x+y} + 2\sqrt{x-2y+1} = 5 \\ 3\sqrt{x-2y+1} + y = 3x+2 \end{cases}$	
	Đặt $\begin{cases} \sqrt{2x+y} = a \\ \sqrt{x-2y+1} = b \end{cases} (a, b \geq 0)$. Suy ra $a^2 + b^2 = 3x - y + 1$.	0.5
	Hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} a+2b=5 \\ 3b=a^2+b^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-2b \\ a^2+b^2-3b+1=0 \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$	0.5
	Thay (1) vào (2) ta được $(5-2b)^2 + b^2 - 3b + 1 = 0 \Leftrightarrow 5b^2 - 23b + 26 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{13}{5} \\ b = 2 \end{cases}$	0.5
	Với $b = \frac{13}{5} \Rightarrow a = -\frac{1}{5}$ (Loại vì $a \geq 0$). Với $b = 2 \Rightarrow a = 1$.	0.5
	Khi đó ta có $\begin{cases} \sqrt{2x+y} = 1 \\ \sqrt{x-2y+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ x-2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x; y)$ là $(1; -1)$.	0.5
Câu 3 (2 điểm)	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-1;1)$ và $B(2;4)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho tam giác ABC vuông cân tại A .	

	Gọi $C(x; y)$ là điểm cần tìm. Để tam giác ABC vuông cân tại A thì $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ AB = AC \end{cases} \quad (1)$	0.5
	Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 3), \overrightarrow{AC} = (x+1; y-1)$. Từ (1) suy ra	0.5
	$\begin{cases} 3(x+1) + 3(y-1) = 0 \\ \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 18 \end{cases}$	0.5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ (x+1)^2 + (-x-1)^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ (x+1)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4 \\ y = 4 \end{cases} \end{cases}$ Vậy có hai điểm C thỏa mãn điều kiện bài toán là $C(2; -2)$ hoặc $C(-4; 4)$.	0.5
Câu 4 (5 điểm)	Cho tam giác ABC có M là trung điểm AC, N là điểm thuộc cạnh BC thỏa mãn $NC = 2NB$. Gọi I là trung điểm của MN. a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$. b) Biểu diễn vector $\overrightarrow{IA}$ theo hai vector $\overrightarrow{IB}$ và $\overrightarrow{IC}$. c) Giả sử độ dài các cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh rằng: Nếu $3a\overrightarrow{IA} + 4b\overrightarrow{IB} + 5c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ thì tam giác ABC đều.	
	a) Do $N \in BC$ và thỏa mãn $NC = 2NB$ nên ta có $2\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$ $\Rightarrow 2(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IN}) + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IN} = \vec{0}$ $\Rightarrow 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} - 3\overrightarrow{IN} = \vec{0}$ $\Rightarrow \overrightarrow{IN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$	1
	b) Do M là trung điểm AC nên ta có $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$	0.5
	Do I là trung điểm MN nên ta có $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$	0.5
	$\Rightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{IB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{IA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{IB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{IC} = \vec{0}$	0.5
	$\Rightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{IA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{IB} - \frac{5}{6}\overrightarrow{IC} \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{IB} - \frac{5}{3}\overrightarrow{IC}$	0.5
	c) Theo câu b) ta có $\overrightarrow{IA} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{IB} - \frac{5}{3}\overrightarrow{IC} \Rightarrow 3\overrightarrow{IA} = -4\overrightarrow{IB} - 5\overrightarrow{IC}$. Khi đó	0.5
	$3a\overrightarrow{IA} + 4b\overrightarrow{IB} + 5c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow a(-4\overrightarrow{IB} - 5\overrightarrow{IC}) + 4b\overrightarrow{IB} + 5c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$	0.5
	$\Leftrightarrow 4(b-a)\overrightarrow{IB} + 5(c-a)\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 4(b-a)\overrightarrow{IB} = 5(a-c)\overrightarrow{IC} \quad (1)$	0.5

	Do $\overrightarrow{IB}$ và $\overrightarrow{IC}$ không cùng phương nên từ (1) suy ra $\begin{cases} b-a=0 \\ a-c=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c$. Từ đó suy ra tam giác ABC là tam giác đều.	0.5
Câu 5 (2 điểm)	Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x > 1, y > 1, z > 1$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = (x-1)(y-1)(z-1)$.	
	Từ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{x} \geq 1 - \frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{z} = \frac{y-1}{y} + \frac{z-1}{z} \geq 2\sqrt{\frac{y-1}{y} \cdot \frac{z-1}{z}}$ Tương tự ta có $\frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{z-1}{z} \cdot \frac{x-1}{x}}$ và $\frac{1}{z} \geq 2\sqrt{\frac{x-1}{x} \cdot \frac{y-1}{y}}$	0.5
	Suy ra $\frac{1}{xyz} \geq 8\sqrt{\frac{(x-1)^2(y-1)^2(z-1)^2}{x^2y^2z^2}}$	0.5
	$\Rightarrow \frac{1}{xyz} \geq \frac{8(x-1)(y-1)(z-1)}{xyz} \Rightarrow (x-1)(y-1)(z-1) \leq \frac{1}{8} \Rightarrow A \leq \frac{1}{8}$	0.5
	Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức A là $\frac{1}{8}$ đạt được khi $x = y = z = \frac{3}{2}$.	0.5

-----Hết-----

Ghi chú: Nếu học sinh làm theo cách khác mà đúng vẫn cho điểm tối đa.