CHƯƠNG I

# ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

## BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

### I. LÝ THUYẾT.

**1. Định nghĩa:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $K$ với $K$ là một khoảng.

+) Hàm số $y=f(x)$ được gọi là đồng biến trên $K$ nếu

$\forall x_1,\ x_2\in K,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

+) Hàm số $y=f(x)$ được gọi là nghịch biến trên $K$ nếu

$\forall x_1,\ x_2\in K,\ x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

+) Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên $K$ được gọi chung là đơn điệu trên $K$.

**2. Định lý:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $K$.

+) Nếu $f'(x)\ge 0,\ \forall x\in K$ và $f'(x)=0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên $K$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $K$.

+) Nếu $f'(x)\le 0,\ \forall x\in K$ và $f'(x)=0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên $K$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $K$.

**3. Lưu ý:**

+) Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f'(x)>0,\ \forall x\in(a;b)$ thì ta nói hàm số đồng biến trên đoạn $[a;b]$.

+) Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f'(x)<0,\ \forall x\in(a;b)$ thì ta nói hàm số nghịch biến trên đoạn $[a;b]$.

+) Tương tự với các khái niệm hàm số đồng biến, nghịch biến trên các nửa khoảng.

## PHƯƠNG PHÁP XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

**Xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ trên tập xác định**

**Bước 1:** Tìm tập xác định $D$.

**Bước 2:** Tính đạo hàm $y'=f'(x)$.

**Bước 3:** Tìm nghiệm của $f'(x)$ hoặc những giá trị $x$ làm cho $f'(x)$ không xác định.

**Bước 4:** Lập bảng biến thiên.

**Bước 5:** Kết luận.

**Chú ý:** Đối với bài toán trắc nghiệm, ta có thể sử dụng **Phương pháp sử dụng MTCT.**

**Cách 1**: Sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của máy tính Casio. Quan sát bảng kết quả nhận được về tính tăng, giảm giá trị của f(x) và dự đoán.

**Cách 2**: Tính đạo hàm, thiết lập bất phương trình đạo hàm. Sử dụng tính năng giải bất phương trình INEQ của máy tính Casio (đối với bất phương trình bậc hai, bậc ba).

## II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

### DẠNG 1: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ CHO BỞI BIỂU THỨC

**Câu 1:** Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=x^3-3x^2+1$.

**Câu 2:** Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+4x+1$.

**Câu 3:** Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+5x^2-26x-1$.

**Câu 4:** Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x-1$.

**Câu 5:** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=x^4-2x^2$.

**Câu 6:** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=x^4+4x^2$.

**Câu 7:** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=-2x^4+4x^2-7$.

**Câu 8:** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=\frac{3x+1}{1-x}$.

**Câu 9:** Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y=\frac{3-2x}{x+7}$.

**Câu 10:** Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số: $y=\frac{-x^2+2x-1}{x+2}$.

**Câu 11:** Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=\frac{x^2+4x+4}{x+1}$.

**Câu 12:** Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số: $y=\frac{-x^2-x+5}{x+2}$.

**Câu 13:** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=\frac{\tan x-2}{\tan x-1}$ trên $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

**Câu 14:** Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số: $y=\begin{cases}-x+2 & \text{nếu } x<-1\\ -2x^2+2x+7 & \text{nếu } -1\le x\le 2\\ 3x-3 & \text{nếu } x>2\end{cases}$.

**Câu 15:** Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

a) $y=\left|x^2-2x-3\right|$. b) $y=\left|x^2-4x+3\right|+4x+3$.

**Câu 16:** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=x\sqrt{4-x^2}$.

### DẠNG 2: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP CHO BỞI BBT HOẶC

## ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ HOẶC $y = f'(x)$.

**Câu 17:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = f(2x+1)$.

**Câu 18:** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | |

Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(-2x+6)$.

**Câu 19:** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

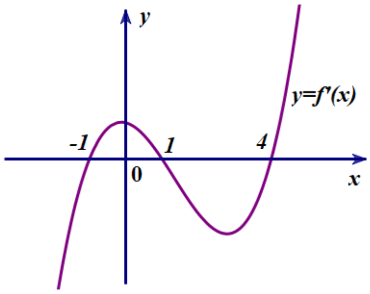
Hỏi hàm số $y = f\left(\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6\right)$ nghịch biến trên các khoảng nào?

**Câu 20:** Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | |

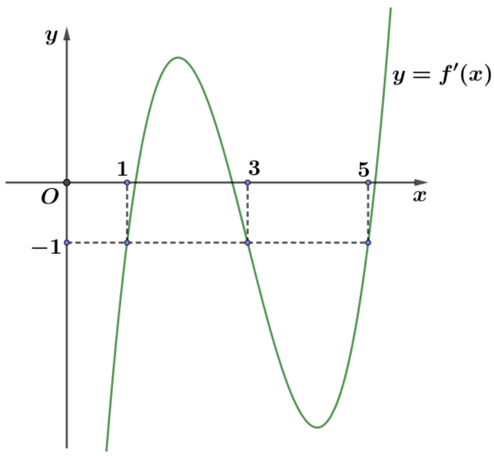
Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = f\left(-x^2 + 2x\right)$?

**Câu 21:** Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ như hình bên.



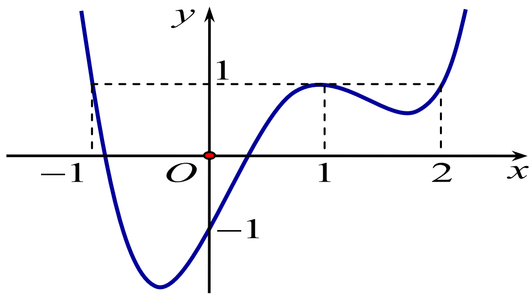

Xét tính đơn điệu của hàm số $y = g\left(x\right) = f\left(x\right) + 3$.

**Câu 22:** Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



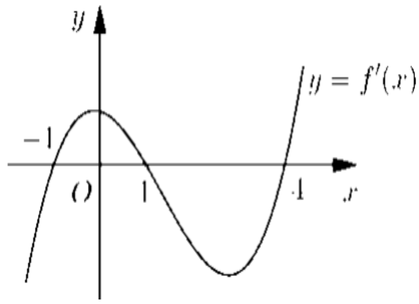

Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $g\left(x\right) = f\left(x\right) + x + 1$.

**Câu 23:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên.



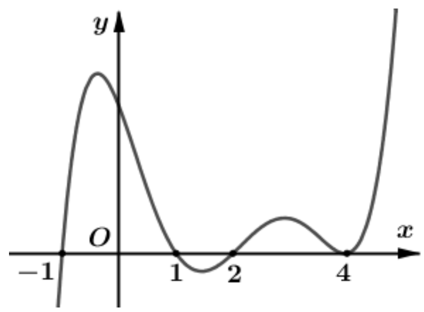

Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)-x+2020$.

**Câu 24:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.




Hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(2-x\right)$ đồng biến trên khoảng nào?

**Câu 25:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.




Hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(2x-4\right)$ nghịch biến trên khoảng nào?

**Câu 26:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $f(x)$ | ↘ | | $0$ | ↘ | | ↗ | $0$ | ↗ | |

Hỏi hàm số $y=f\left(f\left(x\right)\right)$ đồng biến trên những khoảng nào?

**Câu 27:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{28}{5}$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{5}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

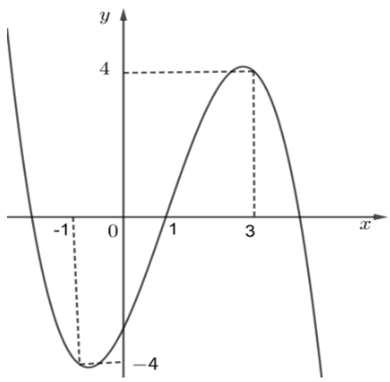
Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(4-2x\right)-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-6x+1$.

**Câu 28:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

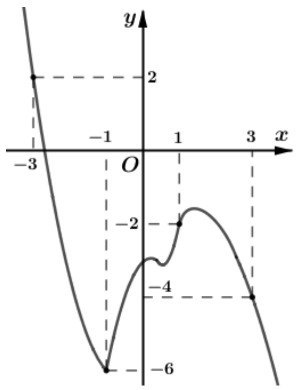
Biết $1<f\left(x\right)<3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)+x^3-6x^2-1$ có ít nhất bao nhiêu khoảng đồng biến?

**Câu 29:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ.



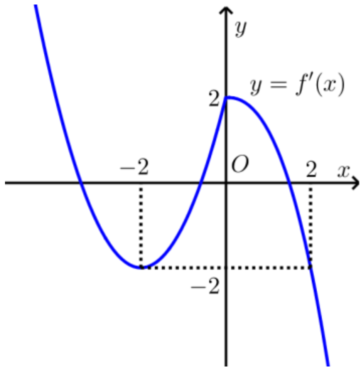

Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y=f(x)-x^2+2x$.

**Câu 30:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên.



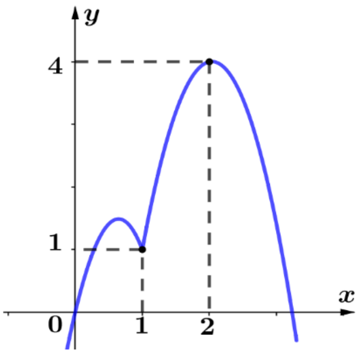

Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $g\left(x\right)=2f(x)+x^2+2x-2019$.

**Câu 31:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.



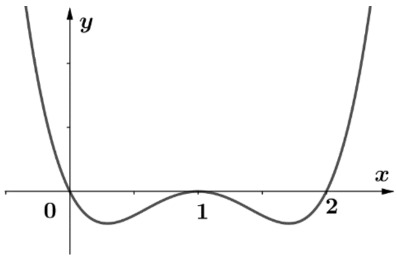

Hàm số $y=f(x)-\frac{1}{3}x^3+6x$ đồng biến trên khoảng nào?

**Câu 32:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.



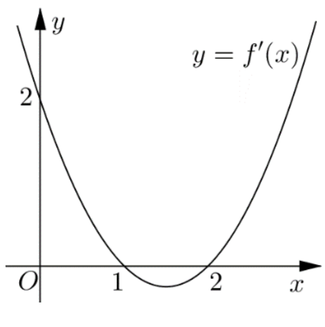

Hàm số $g(x)=3f(x)-x^3$ đồng biến trên khoảng nào?

**Câu 33:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.



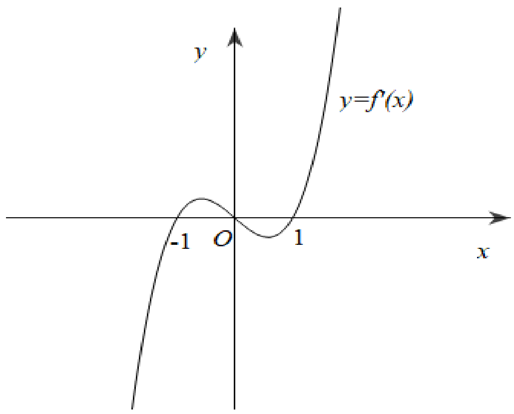

Hàm số $g(x)=f\left(\frac{5x}{x^2+4}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào?

**Câu 34:** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



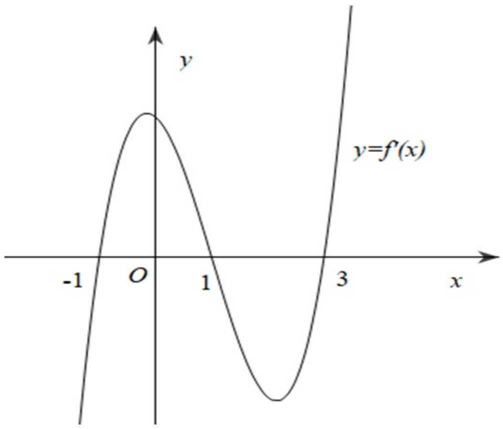

Hàm số $y=g(x)=f(1+2x-x^2)$ đồng biến trên khoảng nào?

**Câu 35:** Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



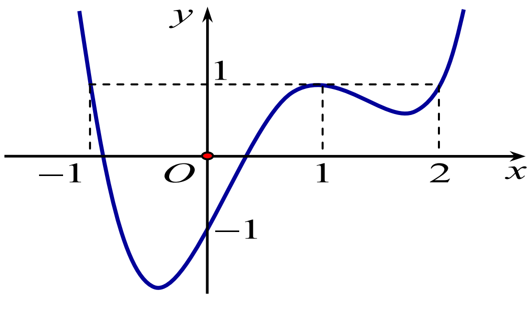

Hàm số $y = g(x) = f(x^3)$ đồng biến trên khoảng nào?

**Câu 36:** Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



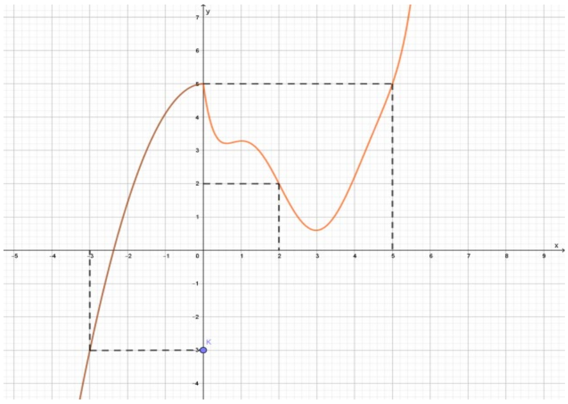

Hàm số $y = g(x) = f\left(\sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào?

**Câu 37:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



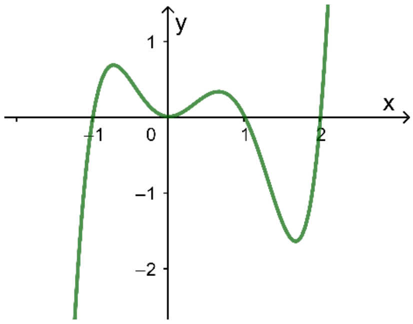

Hàm số $y = g(x) = f(x-1) + \dfrac{2019 - 2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng nào?

**Câu 38:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



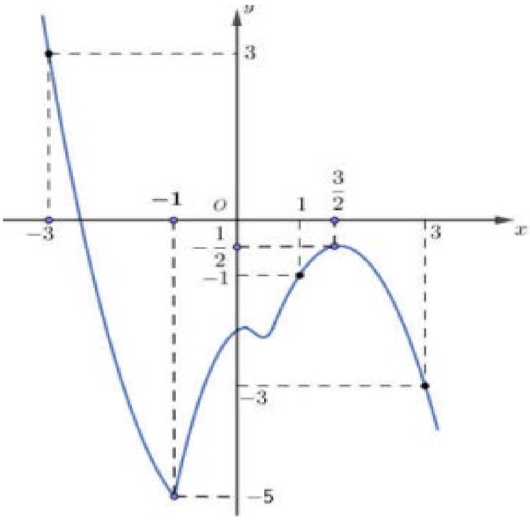
Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = g(x) = f(-2x+1) + (x+1)(-2x+4)$.

**Câu 39:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



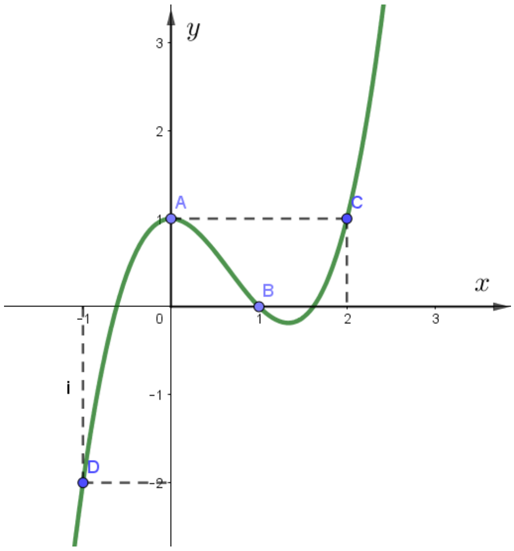

Hàm số $g(x) = f(x-2) + \frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 12x + 1$ có ít nhất bao nhiêu khoảng nghịch biến?

**Câu 40:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ




Hàm số $y = f(1-x) + \frac{x^2}{2} - x$ nghịch biến trên khoảng nào?

**Câu 41:** Cho hàm số $y = f(x)$ với đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.




Hàm số $y = g(x) = 3f(x) - x^3 + 3x^2 - 3x + 2019$ đồng biến trong khoảng nào?

## DẠNG 3: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

**Phương pháp: Xét tính đơn điệu của hàm số** $y = f\left(u\left(x\right)\right)$.

- Tìm tập xác định $D$.

- Đổi biến $t = u\left(x\right)$. Tìm điều kiện cần và đủ của t, giả sử $t \in K$.

- Tìm khoảng đơn điệu của hàm số $f\left(t\right)$ trên $K$.

- Kết luận khoảng đơn điệu của hàm số $y = f\left(u\left(x\right)\right)$.

**Chú ý:**

**1)** Nếu hàm số $t = u\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(\alpha;\beta\right)$, ta có:

 Hàm số $y = f\left(u\left(x\right)\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(\alpha;\beta\right) \Leftrightarrow$ Hàm số $y = f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(u\left(\alpha\right);u\left(\beta\right)\right)$.

 Hàm số $y = f\left(u\left(x\right)\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\alpha;\beta\right) \Leftrightarrow$ Hàm số $y = f\left(t\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(u\left(\alpha\right);u\left(\beta\right)\right)$.

**2)** Nếu hàm số $t = u\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\alpha;\beta\right)$, ta có:

 Hàm số $y = f\left(u\left(x\right)\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(\alpha;\beta\right) \Leftrightarrow$ Hàm số $y = f\left(t\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(u\left(\alpha\right);u\left(\beta\right)\right)$.

 Hàm số $y = f\left(u\left(x\right)\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\alpha;\beta\right) \Leftrightarrow$ Hàm số $y = f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(u\left(\alpha\right);u\left(\beta\right)\right)$.

**Câu 42:** Xét tính đơn điệu của hàm số $y = x^2 - 6x + 6\sqrt{2x+1} - 1$.

## DẠNG 4: TÌM ĐK CỦA THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN TRÊN MỘT MIỀN.

**Câu 43:** Tìm các giá trị của tham số $m$ để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

1) $y=x^3+3x^2+mx+m$ 2) $y=mx^3-(2m+1)x^2+(m+2)x-2$

**Câu 44:** Tìm các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=(m-1)x^3-3(m-1)x^2+3(2m-3)x+m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

**Câu 45:** Tìm các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x-m}{2x-1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

**Câu 46:** Tìm $m$ để hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định?

**Câu 47:** Có bao nhiêu giá trị $m$ nguyên để hàm số $y=x^3+3x^2-3(m^2-1)x$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$?

**Câu 48:** Tìm $m$ để hàm số $y=-x^3+3x^2+(m-1)x+m$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

**Câu 49:** Tìm $m$ để hàm số $y=-x^3+3mx^2-3(m^2-1)x-2m+3$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

**Câu 50:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=-x^3+3mx^2-6(m^2-2)x$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

**Câu 51:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x^2-4x}{x+m}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

**Câu 52:** Cho hàm số $y=\dfrac{-2x^2+(m+2)x-3m+1}{x-1}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

**Câu 53:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10;+\infty)$?

**Câu 54:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**Câu 55:** Tìm $m$ để hàm số $y=\dfrac{\sin x+m}{\sin x-1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$?

**Câu 56:** Tìm $m$ để hàm số $y=-x^3+3x^2+(m-1)x+2m-3$ đồng biến trên đoạn có độ dài lớn nhất bằng 3?

**Câu 57:** Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-10;10)$ sao cho hàm số $y=x^4-2(4m-1)x^2+1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

**Câu 58:** Tìm tập hợp các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\sqrt{x^2+1}-mx-1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

**Câu 59:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-3)^2(x^2+mx+16)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số $y=g(x)=f(5-x)$ đồng biến trên khoảng $(6;+\infty)$.

**Câu 60:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

**Câu 61:** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để hàm số $y = \dfrac{2\cos x - 1}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**Câu 62:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = \dfrac{2\cos x + 3}{2\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$.

**Câu 63:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m + 1}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

**Câu 64:** Tìm các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = \dfrac{\tan x + m}{m\tan x + 1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

**Câu 65:** Tìm giá trị $m$ để hàm số $y = \dfrac{\cot x - 2}{\cot x - m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$?

**Câu 66:** Tìm $m$ để hàm số $y = \dfrac{2\cot x + 1}{\cot x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

CHƯƠNG I

# ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

## BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

### I LÝ THUYẾT.

**1. Định nghĩa:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $K$ với $K$ là một khoảng.

+) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên $K$ nếu

$\forall x_1,\ x_2 \in K,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$

+) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên $K$ nếu

$\forall x_1,\ x_2 \in K,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$

+) Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên $K$ được gọi chung là đơn điệu trên $K$.

**2. Định lý:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $K$.

+) Nếu $f'(x) \ge 0,\ \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên $K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $K$.

+) Nếu $f'(x) \le 0,\ \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên $K$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $K$.

**3. Lưu ý:**

+) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f'(x) > 0,\ \forall x \in (a;b)$ thì ta nói hàm số đồng biến trên đoạn $[a;b]$.

+) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f'(x) < 0,\ \forall x \in (a;b)$ thì ta nói hàm số nghịch biến trên đoạn $[a;b]$.

+) Tương tự với các khái niệm hàm số đồng biến, nghịch biến trên các nửa khoảng.

## PHƯƠNG PHÁP XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

**Xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định**

**Bước 1:** Tìm tập xác định $D$.

**Bước 2:** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.

**Bước 3:** Tìm nghiệm của $f'(x)$ hoặc những giá trị $x$ làm cho $f'(x)$ không xác định.

**Bước 4:** Lập bảng biến thiên.

**Bước 5:** Kết luận.

**Chú ý:** Đối với bài toán trắc nghiệm, ta có thể sử dụng **Phương pháp sử dụng MTCT.**

**Cách 1**: Sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của máy tính Casio. Quan sát bảng kết quả nhận được về tính tăng, giảm giá trị của f(x) và dự đoán.

**Cách 2**: Tính đạo hàm, thiết lập bất phương trình đạo hàm. Sử dụng tính năng giải bất phương trình INEQ của máy tính Casio (đối với bất phương trình bậc hai, bậc ba).

## II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

### DẠNG 1: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ CHO BỞI BIỂU THỨC

**Câu 1:** Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

**Lời giải**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$ ; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

**Câu 2:** Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 4x + 1$.

**Lời giải**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

**Câu 3:** Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 - 26x - 1$.

**Lời giải**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -x^2 + 10x - 26 = -(x-5)^2 - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

**Câu 4:** Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x - 1$.

**Lời giải**

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ; $y' = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$.

**Câu 5:** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=x^4-2x^2$.

**Lời giải**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-4x=4x\left(x^2-1\right)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-1;0\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$, nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(0;1\right)$.

**Câu 6:** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=x^4+4x^2$.

**Lời giải**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3+8x=4x\left(x^2+2\right)$; $y'=0\Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;0\right)$.

**Câu 7:** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=-2x^4+4x^2-7$.

**Lời giải**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-8x^3+8x=-8x\left(x^2-1\right)$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-5$ | $\searrow$ | $-7$ | $\nearrow$ | $-5$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(0;1\right)$, nghịch biến trên các khoảng $\left(-1;0\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$.

**Câu 8:** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{3x+1}{1-x}$.

**Lời giải**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $y'=\dfrac{3.1-(-1).1}{(1-x)^2}=\dfrac{4}{(1-x)^2}>0,\ \forall x\in D$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

**Câu 9:** Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y=\dfrac{3-2x}{x+7}$.

**Lời giải**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-7\}$.

Ta có $y'=\dfrac{(-2).7-1.3}{(x+7)^2}=\dfrac{-17}{(x+7)^2}<0,\forall x\in D$.

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-7)$ và $(-7;+\infty)$.

**Câu 10:** Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số: $y=\dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$.

**Lời giải**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Ta có: $y'=\dfrac{-x^2-4x+5}{(x+2)^2}$.

$$y'=0\Leftrightarrow\frac{-x^2-4x+5}{(x+2)^2}=0\Leftrightarrow -x^2-4x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\\x=1\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $12$ | $\nearrow$ | $+\infty\ \|\|\ -\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(1;+\infty)$.

**Câu 11:** Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y=\dfrac{x^2+4x+4}{x+1}$.

**Lời giải**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | $\searrow$ | $4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(-1;0)$.

**Câu 12:** Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số: $y=\dfrac{-x^2-x+5}{x+2}$.

**Lời giải**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Ta có: $y'=\dfrac{-x^2-4x-7}{(x+2)^2}<0,\ \forall x\in D$.

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

**Câu 13:** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-1}$ trên $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

**Lời giải**

Trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ thì $\tan x\in(0;1)$; $\cos x\neq 0$.

Ta có: $y'=\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{(\tan x-1)^2}>0,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

**Câu 14:** Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số

$$y=\begin{cases}-x+2 & \text{nếu } x<-1\\ -2x^2+2x+7 & \text{nếu } -1\le x\le 2\\ 3x-3 & \text{nếu } x>2\end{cases}.$$

**Lời giải**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$$y'=\begin{cases}-1 & \text{nếu } x<-1\\ -4x+2 & \text{nếu } -1<x<2\\ 3 & \text{nếu } x>2\end{cases};\ y'=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Bảng xét dấu của $y'$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | |

Từ bảng xét dấu của $y'$ ta có hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

**Câu 15:** Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

a) $y=\left|x^2-2x-3\right|$. b) $y=\left|x^2-4x+3\right|+4x+3$.

**Lời giải**

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

**Cách 1:**

$$y=\left|x^2-2x-3\right|=\begin{cases} x^2-2x-3 & \text{nếu } x\le -1 \text{ hoặc } x\ge 3 \\ -\left(x^2-2x-3\right) & \text{nếu } -1<x<3 \end{cases}.$$

$$y'=\begin{cases} 2x-2 & \text{nếu } x<-1 \text{ hoặc } x>3 \\ -\left(2x-2\right) & \text{nếu } -1<x<3 \end{cases};\ y'=0\Leftrightarrow x=1.$$

Bảng xét dấu $y'$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | |

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

**Cách 2**: Ta có $y'=\dfrac{2\left(x^2-2x-3\right)(x-1)}{\sqrt{\left(x^2-2x-3\right)^2}}$; $y'=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng xét dấu của $y'$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | |

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

b) Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y=\left|x^2-4x+3\right|+4x+3=\begin{cases} x^2+6 & \text{nếu } x\le 1 \text{ hoặc } x\ge 3 \\ -x^2+8x & \text{nếu } 1<x<3 \end{cases}$.

$y'=\begin{cases} 2x & \text{nếu } x<1 \text{ hoặc } x>3 \\ -2x+8 & \text{nếu } 1<x<3 \end{cases}$.

$y'=0\Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|\|$ | $+$ | $\|\|$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $6$ | $\nearrow$ | | | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

**Câu 16:** Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=x\sqrt{4-x^2}$.

**Lời giải**

Tập xác định $D=[-2;2]$.

$y'=\sqrt{4-x^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$; $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{2} \\ x=\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của $y'$:

| $x$ | $-2$ | | $-\sqrt{2}$ | | $\sqrt{2}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ |

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$, nghịch biến trên các khoảng $(-2;-\sqrt{2})$ và $(\sqrt{2};2)$.

## DẠNG 2: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP CHO BỞI BBT HOẶC ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ HOẶC $y = f'(x)$.

**Câu 17:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = f(2x+1)$.

**Lời giải**

Đặt $g(x) = f(2x+1)$. Ta có $g'(x) = 2.f'(2x+1)$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=-1 \\ 2x+1=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Vậy hàm số $y = f(2x+1)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

**Câu 18:** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | |

Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(-2x+6)$.

**Lời giải**

Đặt $g(x) = f(-2x+6)$.

$g'(x) = -2.f'(-2x+6)$.

$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(-2x+6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2x+6=0\\-2x+6=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Vậy hàm số $y=f(-2x+6)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

**Câu 19:** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Hỏi hàm số $y=f\left(\frac{1}{2}x^2+3x+6\right)$ nghịch biến trên các khoảng nào?

**Lời giải**

Đặt $g(x)=f\left(\frac{1}{2}x^2+3x+6\right)$. Ta có $g'(x)=(x+3).f'\left(\frac{1}{2}x^2+3x+6\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+3=0\\ \frac{1}{2}x^2+3x+6=6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-3\\x=0\\x=-6\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-6$ | | $-3$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Vậy hàm số $y=f\left(\frac{1}{2}x^2+3x+6\right)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-6)$ và $(-3;0)$.

**Câu 20:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | |

Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y=f\left(-x^2+2x\right)$?

**Lời giải**

Đặt $g\left(x\right)=f\left(-x^2+2x\right)$; $g'\left(x\right)=(-2x+2).f'\left(-x^2+2x\right)$.

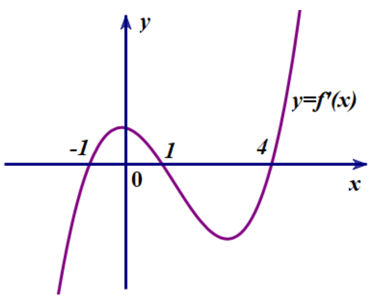
$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow(-2x+2).f'\left(-x^2+2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2x+2=0\\ f'\left(-x^2+2x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2x+2=0\\ -x^2+2x=0\\ -x^2+2x=1\\ -x^2+2x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=2\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Vậy hàm số $y=f\left(-x^2+2x\right)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;0\right)$ và $\left(1;2\right)$.

**Câu 21:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình bên.




Xét tính đơn điệu của hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(x\right)+3$.

**Lời giải**

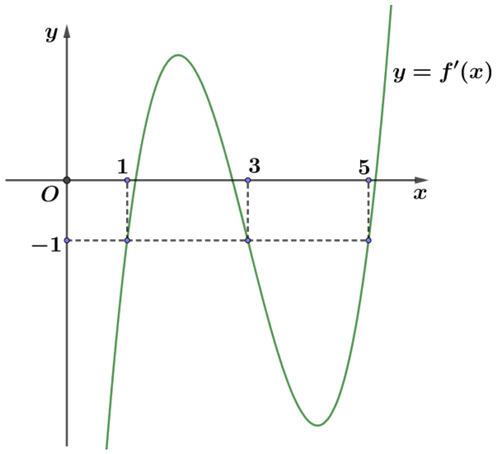
Ta có $g'(x) = f'(x)$.

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 1 \\ x > 4 \end{array}\right.$.

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ 1 < x < 4 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y = g(x) = f(x) + 3$ đồng biến trên các khoảng $(-1;1)$ và $(4;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;4)$.

**Câu 22:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:




Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $g(x) = f(x) + x + 1$.

**Lời giải**

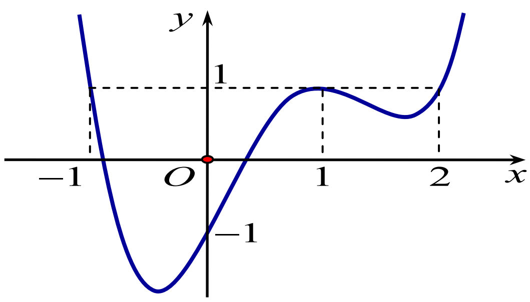
Ta có: $g'(x) = f'(x) + 1$.

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta có:

$f'(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow f'(x) > -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 < x < 3 \\ x > 5 \end{array}\right.$; $f'(x) + 1 < 0 \Leftrightarrow f'(x) < -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ 3 < x < 5 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x) = f(x) + x + 1$ đồng biến trên các khoảng $(1;3)$ và $(5;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(3;5)$.

**Câu 23:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.

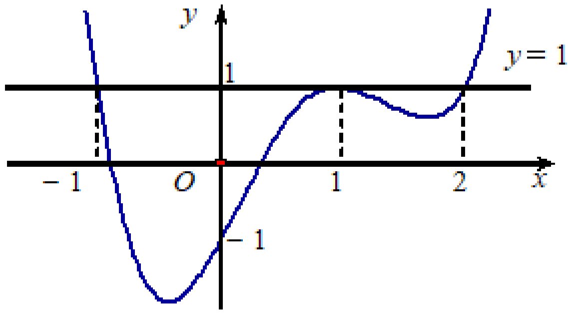



Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $g(x) = f(x) - x + 2020$.

**Lời giải**

Ta có: $g'(x)=f'(x)-1$ nên $g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x)>1$.

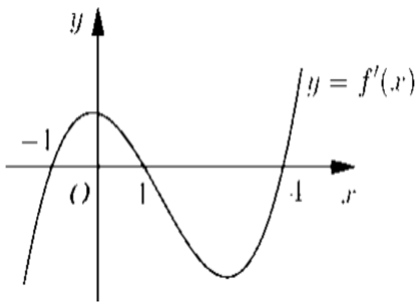
Vẽ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=1$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ:




Quan sát đồ thị ta có : $f'(x)>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>2 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)=f(x)-x+2020$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(2;+\infty)$.

**Câu 24:** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.




Hàm số $y=g(x)=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng nào?

**Lời giải**

Ta có $g'(x)=-f'(2-x)$.

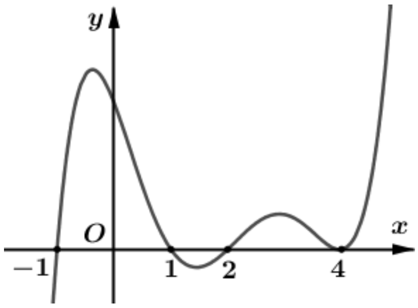
$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x=-1 \\ 2-x=1 \\ 2-x=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Vậy hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2;1)$ và $(3;+\infty)$.

**Câu 25:** Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.




Hàm số $y = g(x) = f(2x-4)$ nghịch biến trên khoảng nào?

**Lời giải**

Ta có $g'(x) = 2.f'(2x-4)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-4=-1 \\ 2x-4=1 \\ 2x-4=2 \\ 2x-4=4 \text{(nghiệm bội chẵn)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{5}{2} \\ x=3 \\ x=4 \text{(nghiệm bội chẵn)} \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3}{2}$ | | $\frac{5}{2}$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | |

Vậy hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{5}{2};3\right)$.

**Câu 26:** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

Hỏi hàm số $y = f(f(x))$ đồng biến trên những khoảng nào?

**Lời giải**

+ Đặt $g(x) = f(f(x))$.

+ $g'(x)=f'(x).f'(f(x))$.

+ $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'(f(x))=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

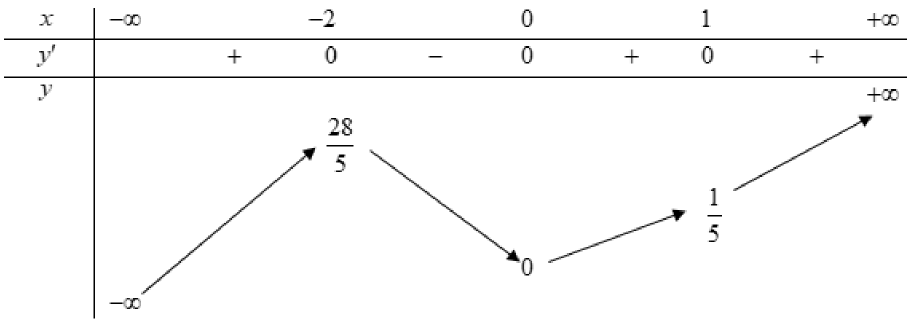
+ Xét $f'(f(x))>0 \Leftrightarrow f(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-2 \end{array}\right.$.

+ Bảng xét dấu:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $f'((f(x))$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

**Câu 27:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau




Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y=g(x)=f(4-2x)-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{5}{2}x^2-6x+1$.

**Lời giải**

Ta có: $y'=g'(x)=-2f'(4-2x)-x^2+5x-6$.

$-2f'(4-2x)>0 \Leftrightarrow f'(4-2x)<0 \Leftrightarrow -2<4-2x<0 \Leftrightarrow 2<x<3$.

$-x^2+5x-6>0 \Leftrightarrow 2<x<3$.

Bảng xét dấu $y'=g'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2f'(4-2x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $-x^2+5x-6$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Vậy hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

**Câu 28:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Biết $1 < f(x) < 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = g(x) = f(f(x)) + x^3 - 6x^2 - 1$ có ít nhất bao nhiêu khoảng đồng biến?

**Lời giải**

Ta có: $g'(x) = f'(x)f'(f(x)) + 3x^2 - 12x$.

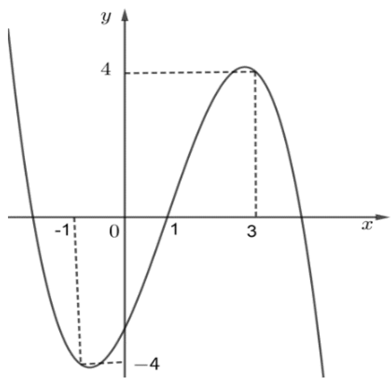
Dựa vào bảng xét dấu $f'(x)$ đề bài cho, vì $1 < f(x) < 3$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(f(x)) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bảng xét dấu $y' = g'(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x).f'(f(x))$ | | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $3x^2 - 12x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g'(x)$ | | Chưa xđ | $\vert$ | $-$ | $\vert$ | chưa xđ | $\vert$ | chưa xđ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Vậy hàm số có ít nhất một khoảng đồng biến.

**Câu 29:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



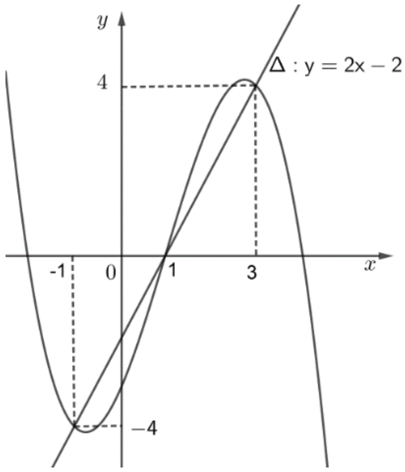

Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(x) - x^2 + 2x$.

**Lời giải**

Đặt $y = g(x) = f(x) - x^2 + 2x$.

Ta có: $g'(x) = f'(x) - 2x + 2 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2x - 2$.

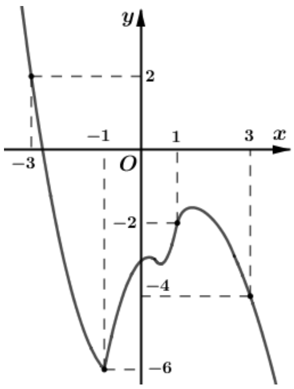
Số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$ chính bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $(\Delta): y = 2x - 2$ (như hình vẽ dưới).




Dựa vào đồ thị ta thấy trên $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm hoàn toàn phía dưới đường thẳng $(\Delta): y = 2x-2$ nên $g'(x) < 0 \;\; \forall x \in (-1;1) \cup (3;+\infty)$.

Vậy hàm số $y = f(x) - x^2 + 2x$ nghịch biến trên các khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$.

**Câu 30:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



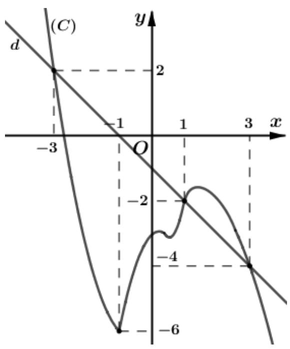

Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $g(x) = 2f(x) + x^2 + 2x - 2019$.

**Lời giải**

Ta có: $g'(x) = 2f'(x) + 2x + 2 = 2.\left[f'(x) + x + 1\right]$.

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > -x-1$.

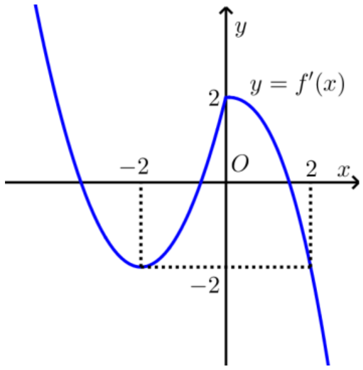
Quan sát đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $y = -x-1$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Ta thấy với $x \in (-\infty;-3) \cup (1;3)$ thì đồ thị hàm số $y = f'(x)$ luôn nằm phía trên đường thẳng $y = -x - 1$. Suy ra $f'(x) + x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-3) \cup (1;3)$.

Vậy hàm số $g(x) = 2f(x) + x^2 + 2x - 2019$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;3)$.

**Câu 31:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.

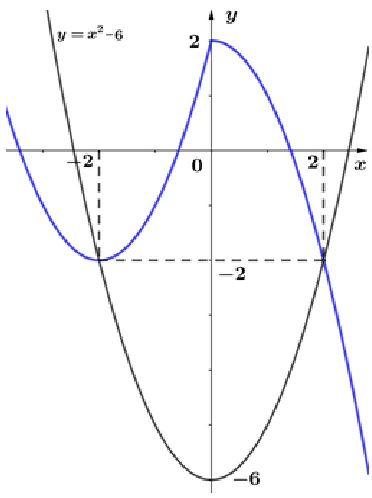



Hàm số $y = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + 6x$ đồng biến trên khoảng nào?

**Lời giải**

+ Ta có $y = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + 6x$ nên $y' = f'(x) - x^2 + 6$.

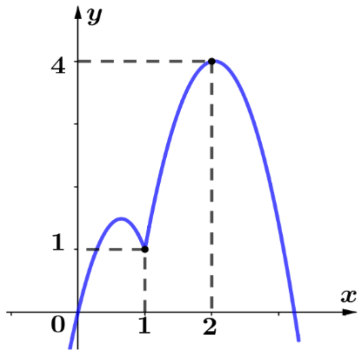
Quan sát đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và parabol $(P): y = x^2 - 6$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ.




+ Từ đồ thị ta có: $y' = f'(x) - x^2 + 6 > 0 \Leftrightarrow f'(x) > x^2 - 6 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Vậy hàm số $y = f(x) - \frac{1}{3}x^3 + 6x$ đồng biến trên khoảng $(-2;2)$.

**Câu 32:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



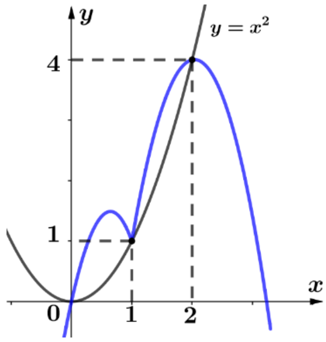

Hàm số $g(x)=3f(x)-x^3$ đồng biến trên khoảng nào?

**Lời giải**

+ Ta có $g'(x)=3f'(x)-3x^2$.

+ $g'(x)=3f'(x)-3x^2>0 \Leftrightarrow f'(x)>x^2$.

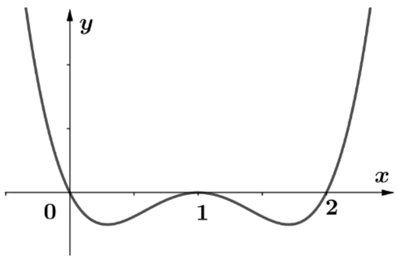
+ Vẽ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và parabol $y=x^2$ trên cùng 1 hệ trục tọa độ như hình vẽ:




+ Quan sát đồ thị ta thấy $g'(x)=3f'(x)-3x^2\ge 0 \Leftrightarrow f'(x)\ge x^2 \Leftrightarrow x\in[0;2]$.

Vậy hàm số $g(x)=3f(x)-x^3$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

**Câu 33:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.




Hàm số $g(x)=f\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$ nghịch biến trên khoảng nào?

**Lời giải**

+ Ta có $g(x)=f\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right) \Rightarrow g'(x)=\dfrac{5(-x^2+4)}{(x^2+4)^2}.f'\left(\dfrac{5x}{x^2+4}\right)$.

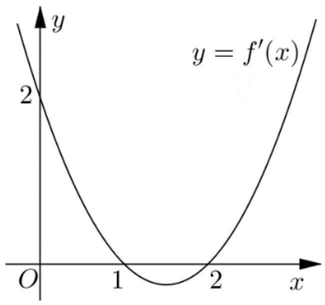
+ $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{5x}{x^2+4}=0 \\ \dfrac{5x}{x^2+4}=1 \\ \dfrac{5x}{x^2+4}=2 \\ -x^2+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \text{ (nghiệm bội chẵn)} \\ x=4 \text{ (nghiệm bội chẵn)} \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu: chẵn

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

**Câu 34:** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.




Hàm số $y=g(x)=f(1+2x-x^2)$ đồng biến trên khoảng nào?

**Lời giải**

Ta có $g'(x)=(2-2x).f'(1+2x-x^2)$.

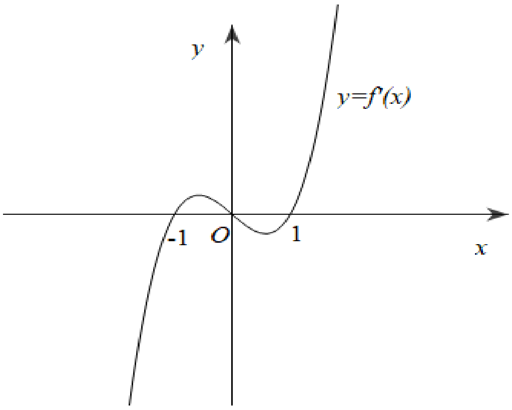
$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-2x=0 \\ f'(1+2x-x^2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ 1+2x-x^2=1 \\ 1+2x-x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \text{ (nghiệm bội 3)} \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;2)$.

**Câu 35:** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.




Hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(x^3\right)$ đồng biến trên khoảng nào?

**Lời giải**

Ta có $g'\left(x\right)=3x^2.f'\left(x^3\right)$.

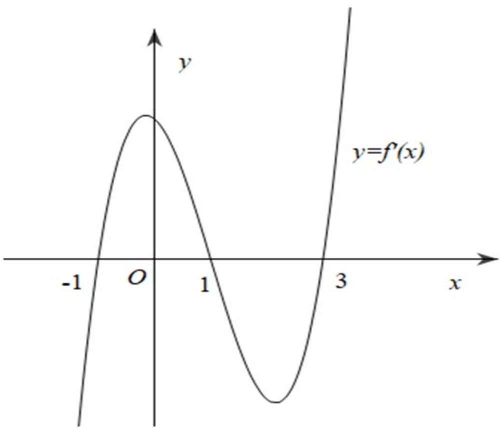
$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\f'\left(x^3\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\x^3=-1\\x^3=0\\x^3=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=1\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Vậy hàm số $y=g\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-1;0\right)$ và $\left(1;+\infty\right)$.

**Câu 36:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.




Hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào?

**Lời giải**

Ta có $g'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$.

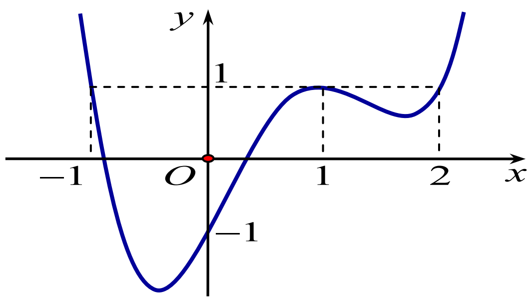
$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\ f'\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ \sqrt{x^2+2x+2}=1\\ \sqrt{x^2+2x+2}=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1(\text{nghiệm bội }3)\\ x=-1-2\sqrt{2}\\ x=-1+2\sqrt{2}\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1-2\sqrt{2}$ | | $-1$ | | $-1+2\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

Vậy hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(-1-2\sqrt{2};-1\right)$ và $\left(-1+2\sqrt{2};+\infty\right)$.

**Câu 37:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.




Hàm số $y=g(x)=f(x-1)+\dfrac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng nào?

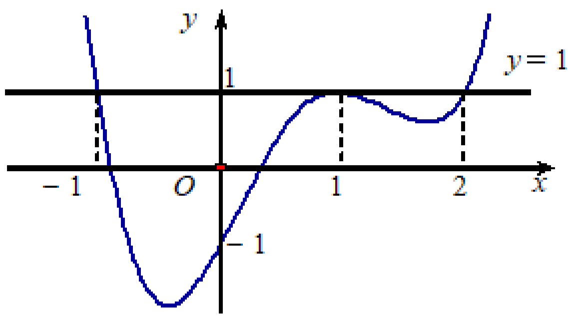
**Lời giải**

+ Ta có $g'(x)=f'(x-1)-1$.

+ $g'(x)>0\Leftrightarrow f'(x-1)-1>0\Leftrightarrow f'(x-1)>1$.

+ Đặt $x-1=t$, xét bất phương trình $f'(t)>1$.

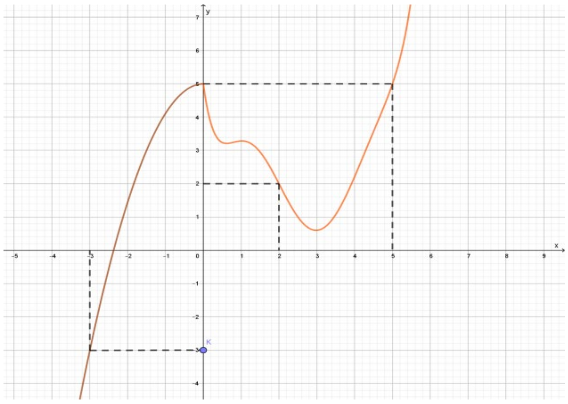
+ Vẽ đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và đường thẳng $y=1$ trên cùng hệ trục tọa độ như hình vẽ:



+ Quan sát đồ thị ta thấy với $\left[\begin{array}{l} t<-1 \\ t>2 \end{array}\right.$ thì đồ thị hàm số $y=f'(t)$ nằm hoàn toàn bên trên đường thẳng $y=1$. Suy ra $f'(x-1)>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1<-1 \\ x-1>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>3 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y=g(x)=f(x-1)+\dfrac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(3;+\infty)$.

**Câu 38:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y=g(x)=f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)$.

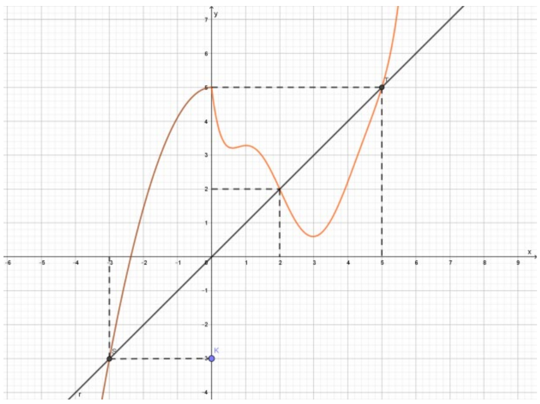
**Lời giải**

+) $g(x)=f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)=f(-2x+1)+\left(-2x^2+2x+4\right)$.

$\Rightarrow g'(x)=-2f'(-2x+1)-4x+2=-2\left[f'(-2x+1)+2x-1\right]$.

+) $g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(-2x+1)+2x-1<0 \Leftrightarrow f'(-2x+1)<-2x+1 \quad (1)$.

Đặt $t=-2x+1$ thì $(1)$ trở thành $f'(t)<t$.



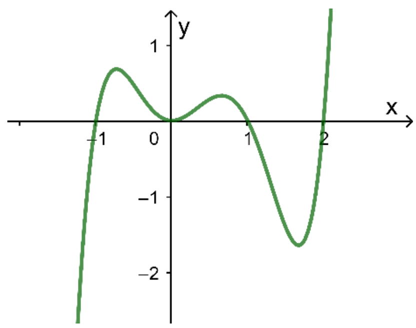
Quan sát đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=t$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta thấy với $t\in(-\infty;-3)$ và $t\in(2;5)$ thì đồ thị hàm số $y=f'(t)$ luôn nằm phía dưới đường thẳng $y=t$.

Suy ra $f'(t) < t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -3 \\ 2 < t < 5 \end{array}\right.$.

Như vậy $f'(-2x+1) < -2x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x+1 < -3 \\ 2 < -2x+1 < 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ -2 < x < -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y = g(x) = f(-2x+1) + (x+1)(-2x+4)$ đồng biến trên các khoảng $(2;+\infty)$ và $\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$.

**Câu 39:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới




Hàm số $g(x) = f(x-2) + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{7}{2}x^2 + 12x + 1$ có ít nhất bao nhiêu khoảng nghịch biến?

**Lời giải**

**Cách 1:** $g'(x) = f'(x-2) + x^2 - 7x + 12$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta có:

$$f'(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=-1 \\ x-2=0 \\ x-2=1 \\ x-2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \\ x=4 \end{array}\right..$$

$$f'(x-2) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2 < -1 \\ 1 < x-2 < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ 3 < x < 4 \end{array}\right..$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 4 \end{array}\right..$$

Lập bảng xét dấu

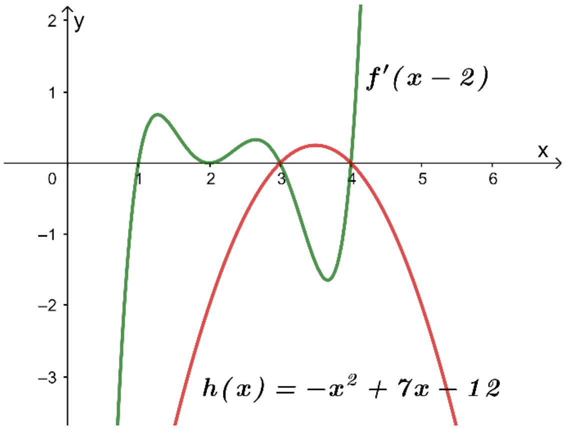
| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x-2)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $x^2-7x+12$ | | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $g'(x)$ | | Chưa xác định | \| | $+$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Vậy hàm số có ít nhất một khoảng nghịch biến.

**Cách 2:** $g'(x)=f'(x-2)+x^2-7x+12$.

$g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x-2)+x^2-7x+12<0 \Leftrightarrow f'(x-2)<-x^2+7x-12$.

Ta vẽ đồ thị của các hàm số $y=f'(x-2)$ và $y=h(x)=-x^2+7x-12$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ như sau

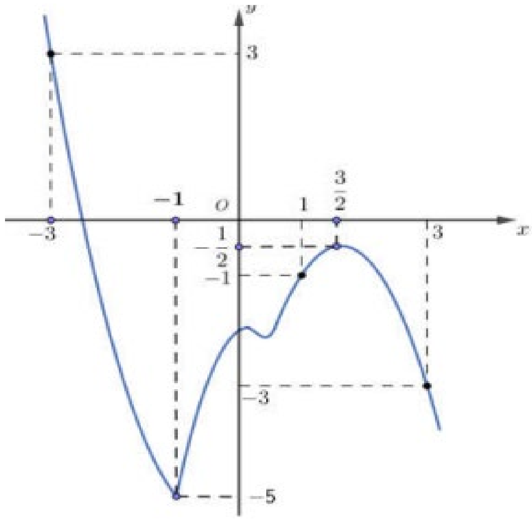



Nhận thấy $f'(x-2)<-x^2+7x-12$, $\forall x\in(3;4)$. Hay $g'(x)<0$, $\forall x\in(3;4)$.

Do đó hàm số $y=g(x)$ luôn nghịch biến trên khoảng $(3;4)$.

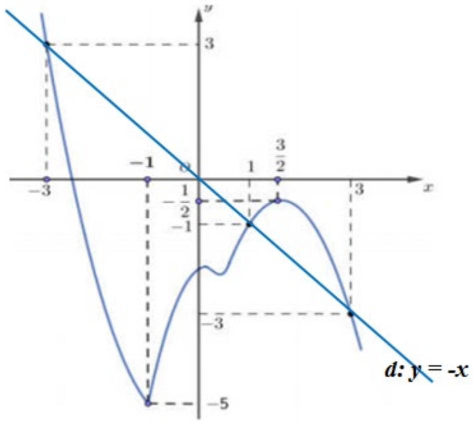
Vậy hàm số có ít nhất một khoảng nghịch biến.

**Câu 40:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ




Hàm số $y=f(1-x)+\dfrac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên khoảng nào?

**Lời giải**




Xét hàm số $y=g\left(x\right)=f\left(1-x\right)+\dfrac{x^2}{2}-x$; $g'\left(x\right)=-f'\left(1-x\right)+x-1$.

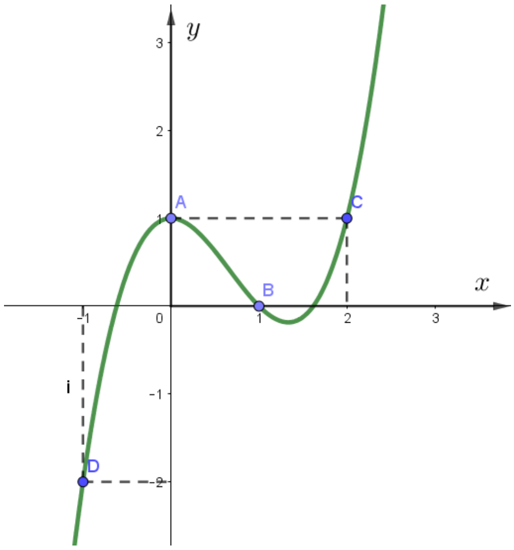
$g'\left(x\right)<0\Leftrightarrow f'\left(1-x\right)>x-1$

Đặt $t=1-x$, bất phương trình trở thành $\Leftrightarrow f'\left(t\right)>-t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<t<3\\t<-3\end{array}\right.$.

Khi đó $g'\left(x\right)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<1-x<3\\1-x<-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x<0\\x>4\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y=f\left(1-x\right)+\dfrac{x^2}{2}-x$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-2;0\right)$ và $\left(4;+\infty\right)$.

**Câu 41:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ với đạo hàm $f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



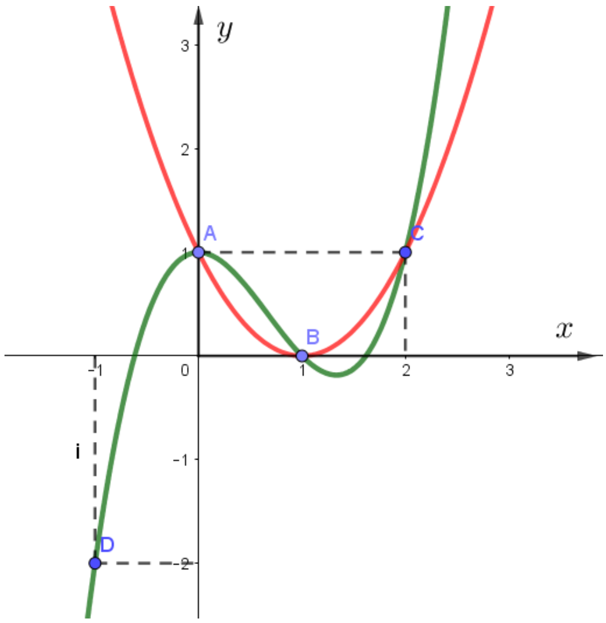

Hàm số $y=g\left(x\right)=3f\left(x\right)-x^3+3x^2-3x+2019$ đồng biến trong khoảng nào?

**Lời giải**

Ta có: $g'\left(x\right)=3f'\left(x\right)-3x^2+6x-3$.

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 3f'\left(x\right)-3x^2+6x-3=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=x^2-2x+1$.

Xét tương giao của hai đồ thị hàm số: $y=f'\left(x\right)$ và $y=x^2-2x+1$.




Quan sát đồ thị ta thấy: đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 1$ cắt nhau tại ba điểm phân biệt $A, B, C$ có hoành độ lần lượt là $x = 0; x = 1; x = 2$.

Do đó $f'(x) = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $g(0)$ | $\nearrow$ | $g(1)$ | $\searrow$ | $g(2)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;1)$ và $(2;+\infty)$.

## DẠNG 3: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

**Phương pháp: Xét tính đơn điệu của hàm số** $y=f\left(u\left(x\right)\right)$.

- Tìm tập xác định $D$.

- Đổi biến $t=u\left(x\right)$. Tìm điều kiện cần và đủ của t, giả sử $t\in K$.

- Tìm khoảng đơn điệu của hàm số $f\left(t\right)$ trên $K$.

- Kết luận khoảng đơn điệu của hàm số $y=f\left(u\left(x\right)\right)$.

**Chú ý:**

**1)** Nếu hàm số $t=u\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(\alpha;\beta\right)$, ta có:

- Hàm số $y=f\left(u\left(x\right)\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(\alpha;\beta\right)\Leftrightarrow$ Hàm số $y=f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(u\left(\alpha\right);u\left(\beta\right)\right)$.

- Hàm số $y=f\left(u\left(x\right)\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\alpha;\beta\right)\Leftrightarrow$ Hàm số $y=f\left(t\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(u\left(\alpha\right);u\left(\beta\right)\right)$.

**2)** Nếu hàm số $t=u\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\alpha;\beta\right)$, ta có:

- Hàm số $y=f\left(u\left(x\right)\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(\alpha;\beta\right)\Leftrightarrow$ Hàm số $y=f\left(t\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(u\left(\alpha\right);u\left(\beta\right)\right)$.

- Hàm số $y=f\left(u\left(x\right)\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\alpha;\beta\right)\Leftrightarrow$ Hàm số $y=f\left(t\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(u\left(\alpha\right);u\left(\beta\right)\right)$.

**Câu 42:** Xét tính đơn điệu của hàm số $y=x^2-6x+6\sqrt{2x+1}-1$.

**Lời giải**

TXĐ: $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$. Đặt $t=\sqrt{2x+1}$ $\left(t\in\left[0;+\infty\right)\right)\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{2}$.

Xét hàm số $y=\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2-6\left(\frac{t^2-1}{2}\right)+6t-1=\frac{1}{4}\left(t^4-14t^2+24t+9\right)$.

$y'=t^3-7t+6$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=2\\t=-3\left(\text{loại}\right)\end{array}\right.$.

Với $t=1\Rightarrow x=0$ ; Với $t=2\Rightarrow x=\frac{3}{2}$.

Ta có bảng dấu của $y'$

| $t$ | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

Dễ thấy hàm số $y=\sqrt{2x+1}$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Vậy hàm số $y=x^2-6x+6\sqrt{2x+1}-1$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{1}{2};0\right)$, $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

## DẠNG 4: TÌM ĐK CỦA THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN TRÊN MỘT MIỀN.

**Câu 43:** Tìm các giá trị của tham số $m$ để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

1) $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ 2) $y = mx^3 - (2m+1)x^2 + (m+2)x - 2$

**Lời giải**

1) TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x + m$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta' \le 0$ (vì $a = 3 > 0$)

$\Leftrightarrow 9 - 3m \le 0 \Leftrightarrow m \ge 3$.

Vậy $m \ge 3$ thì hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

2) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

+) Với $m = 0$, hàm số trở thành $y = -x^2 + 2x - 2$. Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Vậy $m = 0$ không thỏa mãn.

+) Với $m \ne 0$, ta có: $y' = 3mx^2 - 2(2m+1)x + m + 2$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \le 0 \\ 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 + 4m + 1 - 3m(m+2) \le 0 \\ m > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 \le 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn).

Vậy $m = 1$.

**Câu 44:** Tìm các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3(2m-3)x + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

**Lời giải**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

+)Với $m = 1$, hàm số trở thành $y = -3x + 1$. Suy ra hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$, chọn $m = 1$ thỏa.

+)Với $m \ne 1$, ta có $y' = 3(m-1)x^2 - 6(m-1)x + 3(2m-3)$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1) < 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 9(m-1)^2 - 9(m-1)(2m-3) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ (m-1)(-m+2) \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \in (-\infty;1] \cup [2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m < 1$.

Vậy $m \le 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 45:** Tìm các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x-m}{2x-1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

**Lời giải**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. Ta có: $y'=\dfrac{-1+2m}{(2x-1)^2}$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y'>0,\forall x\in D\Leftrightarrow -1+2m>0\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{2}$.

Vậy $m>\dfrac{1}{2}$.

**Câu 46:** Tìm $m$ để hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định?

**Lời giải**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có $y'=\dfrac{-2m-1}{(x-m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y'<0,\forall x\in D\Leftrightarrow -2m-1<0\Leftrightarrow m>-\dfrac{1}{2}$.

**Câu 47:** Có bao nhiêu giá trị $m$ nguyên để hàm số $y=x^3+3x^2-3\left(m^2-1\right)x$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$ ?

**Lời giải**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$ ; $y'=3x^2+6x-3\left(m^2-1\right)$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;2)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in(1;2)$.

$\Leftrightarrow m^2-1\le x^2+2x,\forall x\in(1;2)$.

BBT

| $x$ | 1 | | 2 |
|---|---|---|---|
| $y=x^2+2x$ | 3 | $\nearrow$ | 8 |

Từ bbt suy ra ycbt $\Leftrightarrow m^2-1\le \min\limits_{[1;2]}\left(x^2+2x\right)\Leftrightarrow m^2-1\le 3\Leftrightarrow -2\le m\le 2$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ suy ra $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy có 5 giá trị của $m$ thỏa mãn.

**Câu 48:** Tìm $m$ để hàm số $y=-x^3+3x^2+(m-1)x+m$ nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

**Lời giải**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y'=-3x^2+6x+m-1$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;+\infty\right) \Leftrightarrow y' \le 0, \forall x \in \left(-1;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow m \le 3x^2 - 6x + 1,\ \forall x \in \left(-1;+\infty\right)\ (1)$.

Xét hàm số $g\left(x\right) = 3x^2 - 6x + 1$ trên khoảng $\left(-1;+\infty\right)$.

$g'\left(x\right) = 6x - 6$; $g'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | \|\| $10$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{(-1;+\infty)} g\left(x\right) = -2$.

Do đó $\left(1\right) \Leftrightarrow m \le \min\limits_{(-1;+\infty)} g\left(x\right) \Leftrightarrow m \le -2$.

Vậy $m \le -2$ thoả yêu cầu bài toán.

**Câu 49:** Tìm $m$ để hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3\left(m^2 - 1\right)x - 2m + 3$ đồng biến trên khoảng $\left(1;2\right)$.

**Lời giải**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$y' = -3x^2 + 6mx - 3\left(m^2 - 1\right)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(1;2\right) \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \left(1;2\right)$.

Ta có $\Delta' = 9m^2 - 9(m^2 - 1) = 9 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Suy ra $y'$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1 = m - 1$; $x_2 = m + 1$ $(x_1 < x_2)$.

Do đó: $y' \ge 0, \forall x \in \left(1;2\right) \Leftrightarrow x_1 \le 1 < 2 \le x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \le 1 \\ x_2 \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \le 1 \\ m + 1 \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le m \le 2$.

Vậy giá trị $m$ cần tìm là $1 \le m \le 2$.

**Câu 50:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 6\left(m^2 - 2\right)x$ nghịch biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$.

**Lời giải**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$y' = -3x^2 + 6mx - 6\left(m^2 - 2\right)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right) \Leftrightarrow y' \le 0,\ \forall x \in \left(2;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2\left(m^2 - 2\right) \ge 0,\ \forall x \in \left(2;+\infty\right)\ (1)$.

Đặt $f\left(x\right) = x^2 - 2mx + 2\left(m^2 - 2\right)$. Ta có: $\Delta' = -m^2 + 4$.

+) Th1: $\Delta' \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ m \le -2 \end{array}\right.$.

Khi đó $f(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra $\left[\begin{array}{l} m\geq 2\\ m\leq -2\end{array}\right.$ ( thỏa mãn $(1)$) $(*)$.

+) Th1: $\Delta'>0 \Leftrightarrow -2<m<2$.

Khi đó $f(x)$ có hai nghiệm là $x_1$, $x_2$ $(x_1<x_2)$.

$(1)\Leftrightarrow x_2\leq 2\Leftrightarrow m+\sqrt{4-m^2}\leq 2\Leftrightarrow \sqrt{4-m^2}\leq 2-m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-m\geq 0\\ 4-m^2\leq (2-m)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\leq 2\\ \left[\begin{array}{l} m\geq 2\\ m\leq 0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2\\ m\leq 0\end{array}\right.$.

Kết hợp với $-2<m<2$ ta được $-2<m\leq 0$ $(**)$.

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $m\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

**Câu 51:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x^2-4x}{x+m}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

**Lời giải**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$ ; $y'=\dfrac{x^2+2mx-4m}{(x+m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)\Leftrightarrow y'\geq 0$, $\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow \begin{cases} -m\leq 1\\ x^2+2mx-4m\geq 0,\ \forall x\in(1;+\infty)\end{cases}$.

Ta có: $x^2+2mx-4m\geq 0,\ \forall x\in[1;+\infty)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta'\leq 0\\ \begin{cases}\Delta'>0\\ x_1<x_2\leq 1\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2+4m\leq 0\\ \begin{cases} m^2+4m>0\\ -m+\sqrt{m^2+4m}\leq 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4\leq m\leq 0\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l} m>0\\ m<-4\end{array}\right.\\ m\geq -1\\ m\leq \dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow -4\leq m\leq \dfrac{1}{2}$.

Kết hợp với điều kiện $m>-1$ ta được $-1<m\leq\dfrac{1}{2}$.

**Câu 52:** Cho hàm số $y=\dfrac{-2x^2+(m+2)x-3m+1}{x-1}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

**Lời giải**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-2x^2+4x+2m-3}{(x-1)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định

$\Leftrightarrow y' \le 0,\ \forall x \in D \Leftrightarrow -2x^2 + 4x + 2m - 3 \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \le 0$ (vì $a = -2 < 0$)

$\Leftrightarrow 4m - 2 \le 0 \Leftrightarrow m \le \dfrac{1}{2}$. Vậy $m \le \dfrac{1}{2}$.

**Câu 53:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y = \dfrac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10;+\infty)$?

**Lời giải**

TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$.

Ta có $y' = \dfrac{5m-6}{(x+5m)^2}$. Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(10;+\infty)$ thì $\begin{cases} y' < 0 \\ -5m \notin (10;+\infty) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m - 6 < 0 \\ -5m \le 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{6}{5} \\ m \ge -2 \end{cases}$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2;-1;\ 0;\ 1\}$.

**Câu 54:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = \dfrac{2\sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**Lời giải**

Đặt $t = \sin x$, với $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0;1)$. Ta có hàm số $t = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Do đó hàm số $y = \dfrac{2\sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $f(t) = \dfrac{2t-1}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

$\Leftrightarrow f'(t) > 0$, với $\forall t \in (0;\ 1) \Leftrightarrow \dfrac{-2m+1}{(t-m)^2} > 0$, với $\forall t \in (0;1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m + 1 > 0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \le 0$.

Vậy $m \le 0$.

**Câu 55:** Tìm $m$ để hàm số $y = \dfrac{\sin x + m}{\sin x - 1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$?

**Lời giải**

**Cách 1**: Đặt $t = \sin x$. Ta có hàm số $t = \sin x$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$.

Khi $x \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ thì $t \in (0;1)$.

Xét hàm $y=\dfrac{t+m}{t-1}$ trên khoảng $(0;1)$. Ta có $y'=\dfrac{-1-m}{(t-1)^2}$.

Hàm đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)\Leftrightarrow$ hàm số $y=\dfrac{t+m}{t-1}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)\Leftrightarrow -1-m>0\Leftrightarrow m<-1$.

**Cách 2**: Xét hàm số $y=\dfrac{\sin x+m}{\sin x-1}$. Ta có $y'=\dfrac{-(m+1).\cos x}{(\sin x-1)^2}$.

Khi $x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ thì $-1<\cos x<0$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ khi và chỉ khi $m+1<0\Leftrightarrow m<-1$. Vậy $m<-1$

**Câu 56:** Tìm $m$ để hàm số $y=-x^3+3x^2+(m-1)x+2m-3$ đồng biến trên đoạn có độ dài lớn nhất bằng 3?

**Lời giải**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=-3x^2+6x+m-1$.

Vì hệ số của $x^2$ của $y'$ là $-3<0$ nên hàm số đã cho đồng biến trên đoạn có độ dài lớn nhất bằng 3 khi và chỉ khi $y'=0$ có 2 nghiệm $x_1,x_2$ phân biệt thỏa mãn $|x_2-x_1|=3$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=9+3(m-1)>0\\(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=9\end{cases}(*)$.

Theo Vi-et ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2\\x_1x_2=\dfrac{1-m}{3}\end{cases}$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}m>-2\\4+4.\dfrac{m-1}{3}=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-2\\m=\dfrac{19}{4}\end{cases}\Leftrightarrow m=\dfrac{19}{4}$.

Vậy $m=\dfrac{19}{4}$.

**Câu 57:** Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-10;10)$ sao cho hàm số $y=x^4-2(4m-1)x^2+1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

**Lời giải**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y'=4x^3-4(4m-1)x=4x\left[x^2-(4m-1)\right]$.

+) Với $4m-1\le 0\Leftrightarrow m\le\dfrac{1}{4}$.

Khi đó $y'=0\Leftrightarrow x=0$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Vì $m\in(-10;10)$ và $m$ nguyên nên có 10 giá trị $m$ thoả mãn.

+ Với $4m-1>0\Leftrightarrow m>\frac{1}{4}$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{4m-1}\\x=-\sqrt{4m-1}\end{array}\right..$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)\Leftrightarrow\sqrt{4m-1}\le 1\Leftrightarrow\frac{1}{4}<m\le\frac{1}{2}$.

Vì $m\in(-10;10)$ và $m$ nguyên nên không có giá trị $m$ nào thoả mãn.

Vậy không có giá trị $m$ nguyên thoả mãn bài toán.

**Câu 58:** Tìm tập hợp các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\sqrt{x^2+1}-mx-1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

**Lời giải**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$, $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow y'\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ge m,\forall x\in\mathbb{R}.\ (1)$.

Xét hàm số $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ |

Từ bảng biến thiên suy ra $(1)\Leftrightarrow m\le -1$. Vậy $m\le -1$.

**Câu 59:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-3)^2(x^2+mx+16)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số $y=g(x)=f(5-x)$ đồng biến trên khoảng $(6;+\infty)$.

**Lời giải**

Ta có $g(x)=f(5-x)\Rightarrow g'(x)=-f'(5-x)=(x-5)(2-x)^2\left[(5-x)^2+m(5-x)+16\right]$.

Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(6;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0,\ \forall x\in(6;+\infty)$

$\Leftrightarrow (x-5)(2-x)^2\left[(5-x)^2+m(5-x)+16\right]\ge 0,\ \forall x\in(6;+\infty)$

$\Leftrightarrow (5-x)^2+m(5-x)+16\ge 0,\ \forall x\in(6;+\infty)$ (vì $x-5>0$ và $(2-x)^2>0,\forall x\in(6;+\infty)$)

$\Leftrightarrow m\le \dfrac{(x-5)^2+16}{x-5},\ \forall x\in(6;+\infty)$.

Đặt $h(x)=\dfrac{(x-5)^2+16}{x-5}$, với $x\in(6;+\infty)$.

Do $x\in(6;+\infty)$ nên $x-5>0$, áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$h(x)=\dfrac{(x-5)^2+16}{x-5}=(x-5)+\dfrac{16}{x-5}\ge 2\sqrt{(x-5).\dfrac{16}{x-5}}=8$, dấu "=" xảy ra khi $x=9$.

Do đó ycbt $\Leftrightarrow m\le 8$, kết hợp với điều kiện $m$ nguyên dương ta được $m\in\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

Vậy có $8$ giá trị của $m$ thỏa mãn.

**Câu 60:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

**Lời giải**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)$.

$y'=0\Leftrightarrow x^2-(2m+1)x+m(m+1)=0$.

Ta có $\Delta=(2m+1)^2-4(m^2+m)=1$ nên $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=m+1\end{array}\right.$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;m)$, $(m+1;+\infty)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)\Leftrightarrow m+1\le 2\Leftrightarrow m\le 1$.

Vậy $m\le 1$.

**Câu 61:** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để hàm số $y=\dfrac{2\cos x-1}{\cos x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**Lời giải**

Đặt $t=\cos x$. Ta có $\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$.

Vì $t' = -\sin x < 0, \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số $t = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó hàm số $y = \frac{2\cos x - 1}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $f(t) = \frac{2t-1}{t-m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;1) \Leftrightarrow y' = \frac{-2m+1}{(t-m)^2} < 0$, $\forall t \in (0;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m+1<0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 1.$$ Vậy $m \ge 1$.

**Câu 62:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = \frac{2\cos x + 3}{2\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{3}\right)$.

**Lời giải**

Đặt $t = \cos x$, với $x \in \left(0;\frac{\pi}{3}\right)$ khi đó $t \in \left(\frac{1}{2};1\right)$.

Hàm số trở thành $y = g(t) = \frac{2t+3}{2t-m} \Rightarrow g'(t) = \frac{-2m-6}{(2t-m)^2}$.

Ta có $t' = -\sin x < 0,\ \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{3}\right)$, do đó hàm số $t = \cos x$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{3}\right)$.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ hàm số $y = g(t)$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};1\right)$

$$\Leftrightarrow g'(t) > 0,\ \forall t \in \left(\frac{1}{2};1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -2m-6>0 \\ \frac{m}{2} \notin \left(\frac{1}{2};1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m \notin (1;2) \end{cases} \Leftrightarrow m < -3.$$ Vậy $m < -3$.

**Câu 63:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m + 1}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

**Lời giải**

Đặt $t = \tan x$. Với $x \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ ta có $t \in (0;1)$.

Hàm số trở thành $y = g(t) = \frac{t-2}{t-m+1} \Rightarrow g'(t) = \frac{3-m}{(t-m+1)^2}$.

Ta có $t' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0,\ \forall x \in \left(0;\frac{\pi}{4}\right)$, do đó hàm số $t = \tan x$ đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y=g(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;1) \Leftrightarrow g'(t)>0,\ \forall t\in(0;1) \Leftrightarrow \begin{cases}3-m>0\\(m-1)\notin(0;1)\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\le 1\\2\le m<3\end{array}\right.$.

Vậy $\left[\begin{array}{l}m\le 1\\2\le m<3\end{array}\right.$.

**Câu 64:** Tìm các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{\tan x+m}{m\tan x+1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

**Lời giải**

Đặt $t=\tan x$, ta có hàm số $t=\tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

Do đó hàm số $y=\dfrac{\tan x+m}{m\tan x+1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y=g(t)=\dfrac{t+m}{mt+1}$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

<u>TH1:</u> $m=0\Rightarrow y=t$ là hàm số đồng biến trên $(0;1)$ $\Rightarrow m=0$ không thỏa yêu cầu.

<u>TH2:</u> $m\ne 0$ .Ta có $y=\dfrac{t+m}{mt+1}\Rightarrow y'=\dfrac{1-m^2}{(mt+1)^2}$.

Hàm số $y=\dfrac{t+m}{mt+1}$ nghịch biến trên $(0;1)$ $\Leftrightarrow \begin{cases}1-m^2<0\\-\frac{1}{m}\notin(0;1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<-1\vee m>1\\ \left[\begin{array}{l}-\frac{1}{m}\le 0\\-\frac{1}{m}\ge 1\end{array}\right.\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}m<-1\vee m>1\\-1\le m<0\vee m>0\end{cases} \Leftrightarrow m>1$. Vậy $m>1$.

**Câu 65:** Tìm giá trị $m$ để hàm số $y=\dfrac{\cot x-2}{\cot x-m}$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$?

**Lờigiải**

Đặt $t=\cot x$, với $x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có $t'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}<0$, $\forall x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số $t=\cot x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

$\forall x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$.

Khi đó hàm số trở thành $y=f(t)=\dfrac{t-2}{t-m}\Rightarrow f'(t)=\dfrac{-m+2}{(t-m)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;1) \Leftrightarrow f'(t)>0,\ \forall t\in(0;1) \Leftrightarrow \frac{-m+2}{(t-m)^2}>0,\ \forall t\in(0;1) \Leftrightarrow \begin{cases}-m+2>0\\ m\notin(0;1)\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ 1\le m<2\end{array}\right.$.

Vậy $\left[\begin{array}{l}m\le 0\\ 1\le m<2\end{array}\right.$.

**Câu 66:** Tìm $m$ để hàm số $y=\frac{2\cot x+1}{\cot x+m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

**Lời giải**

Đặt $t=\cot x$, $x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

Vì $t'=\frac{-1}{\sin^2 x}<0,\ \forall x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số $t=\cot x$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$.

Xét hàm số $y=f(t)=\frac{2t+1}{t+m}$ trên khoảng $(0;1)$, $t\ne -m$.

Ta có $f'(t)=\frac{2m-1}{(t+m)^2}$, $\forall t\in(0;1), t\ne -m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y=f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ $\Leftrightarrow f'(t)<0,\forall t\in(0;1) \Leftrightarrow \begin{cases}2m-1<0\\ -m\notin(0;1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<\frac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}-m\le 0\\ -m\ge 1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<\frac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}m\ge 0\\ m\le -1\end{array}\right.\end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\le -1\\ 0\le m<\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

Vậy $\left[\begin{array}{l}m\le -1\\ 0\le m<\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

CHƯƠNG I

# ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

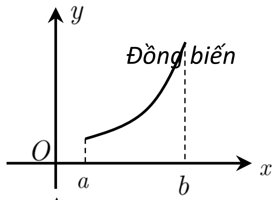
## BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

**1.** ***Định lí*** *(thừa nhận): Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $K$.*

*Nếu $f'(x) > 0,\ \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $K$.*

*Nếu $f'(x) < 0,\ \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $K$.*

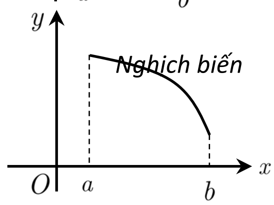
*Nếu $f'(x) = 0,\ \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng $K$.*




**2.** ***Hình dáng đồ thị***

*Nếu hàm số* ***đồng biến*** *trên $K$ thì từ trái sang phải* ***đồ thị đi lên****.*

*Nếu hàm số* ***nghịch biến*** *trên $K$ thì từ trái sang phải* ***đồ thị đi xuống****.*




## III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY**

**Câu 1:** **(MĐ 101-2022)** Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** $y = x^4 - x^2$. **B.** $y = x^3 - x$. **C.** $y = \dfrac{x-1}{x+2}$. **D.** $y = x^3 + x$.

**Câu 2:** **(MĐ 102-2022)** Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$

**A.** $y = x^4 - x^2$. **B.** $y = x^3 + x$. **C.** $y = \dfrac{x-1}{x+2}$. **D.** $y = x^3 - x$.

**Câu 3:** **(MĐ 103-2022)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x+1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-1;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-\infty;1)$.

**Câu 4:** **(MĐ 104-2022)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x+1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-\infty;-1)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(1;+\infty)$.

**Câu 5:** **(MĐ 101-2022)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $3$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(0;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;+\infty)$.

**Câu 6:** **(MĐ 102-2022)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $3$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(0;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;1)$.

**Câu 7:** **(MĐ 103-2022)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| x | $-\infty$ | | -1 | | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | |
| f(x) | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | 3 | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(0;3)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

**Câu 8:** **(MĐ 104-2022)** Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $3$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**A.** $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

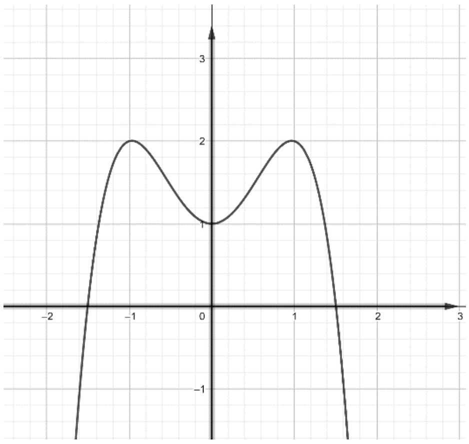
**Câu 9:** **(ĐTK 2021)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào, trong các khoảng dưới đây?

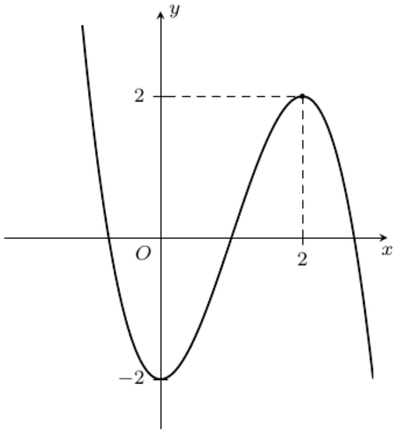
**A.** $(-2;2)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;+\infty)$.

**Câu 10:** **(MĐ 102 - 2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như đường cong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



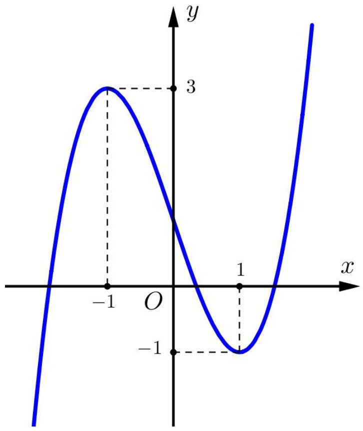

**A.** $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(0;+\infty)$.

**Câu 11:** **(MĐ 103 - 2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?




**A.** $(-\infty;2)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

**Câu 12:** **(MĐ 104 - 2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.




Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-1;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(0;3)$.

**Câu 13:** **(MĐ 2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(0;+\infty)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

**Câu 14:** **(MĐ 2021 – ĐỢT 2)** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$. **B.** $y=x^3-x$. **C.** $y=x^4-4x$. **D.** $x^3+x$.

**Câu 15:** **(MĐ 2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;+\infty)$.

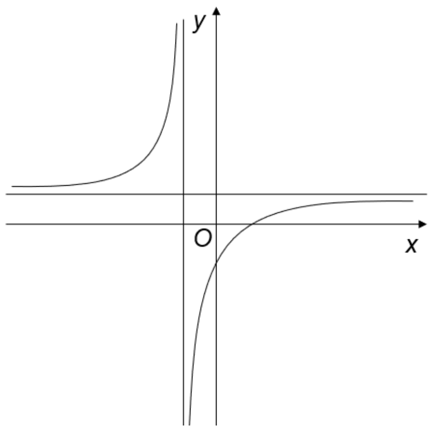
**Câu 16:** **(MĐ 103 - 2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | $0$ | $+$ | $0$ | - | $0$ | $+$ | |

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-1;1)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-1;0)$.

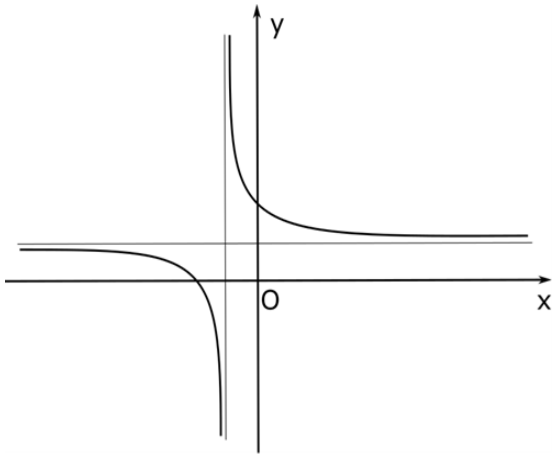
**Câu 17:** **(MĐ 102 - 2021 – ĐỢT 1)** Biết hàm số $y=\dfrac{x+a}{x+1}$ ($a$ là số thực cho trước, $a\neq 1$) có đồ thị như hình vẽ sau:




Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $y'<0,\forall x\neq -1$. **B.** $y'>0,\forall x\neq -1$. **C.** $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$. **D.** $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

**Câu 18:** **(MĐ 102 - 2021 – ĐỢT 1)** Biết hàm số $y=\dfrac{x+a}{x+1}$ ($a$ là số thực cho trước, $a \neq 1$) có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?




**A.** $y'<0, \forall x \in \mathbb{R}$. **B.** $y'>0, \forall x \neq -1$. **C.** $y'<0, \forall x \neq -1$. **D.** $y'>0, \forall x \in \mathbb{R}$.

**Câu 19:** **(Mã 101 – 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $4$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;0)$

**Câu 20:** **(Đề Minh Họa 2020 – Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ |

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-\infty;0)$.

**Câu 21:** **(Đề Minh Họa 2020 – Lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↘ | $1$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;1)$.

**Câu 22:** **(Mã 102 – 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

**Câu 23:** **(Mã 103 – 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Hàm số đã chođồng biến trên khoảng nào dưới đây

**A.** $(-2;2)$ **B.** $(0;2)$ **C.** $(-2;0)$ **D.** $(2;+\infty)$.

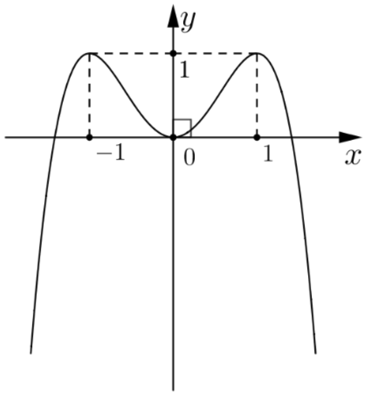
**Câu 24:** **(Mã 104 – 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

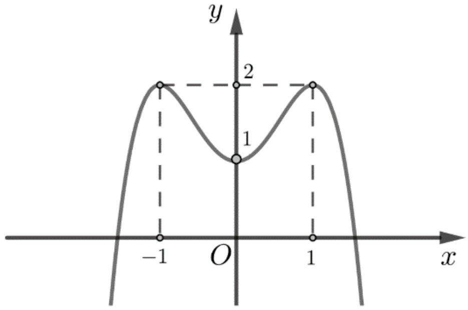
**A.** $(-3;0)$. **B.** $(-3;3)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(-\infty;-3)$.

**Câu 25:** **(Mã 102 – 2020 – Lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?




**A.** $(-1;0)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(0;+\infty)$.

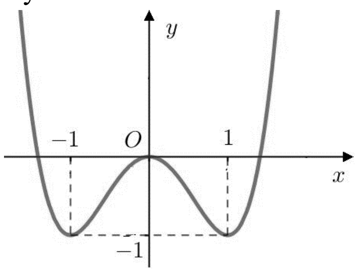
**Câu 26:** **(Mã 107 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.




Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(0;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

**Câu 27:** **(Mã 103 – 2020 – Lần 2)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?




**A.** $(-1;0)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(0;1)$.

**Câu 28:** **(Đề minh họa 1, Năm 2017)** Hỏi hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

**A.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(-\infty;0)$

**Câu 29:** **(Đề minh họa 2, Năm 2017)** Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$.

**C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

**Câu 30:** **(Đề Minh họa lần 3, Năm 2017)** Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$. **B.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$.

**C.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên $(-1;+\infty)$.

**Câu 31:** **(Đề minh họa lần 3, Năm 2017)** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

**A.** $y = 3x^3 + 3x - 2$. **B.** $y = 2x^3 - 5x + 1$. **C.** $y = x^4 + 3x^2$. **D.** $y = \frac{x-2}{x+1}$.

**Câu 32:** **(Mã 101, Năm 2017)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(0;1\right)$. **B.** $\left(-\infty;0\right)$. **C.** $\left(1;+\infty\right)$. **D.** $\left(-1;0\right)$.

**Câu 33:** **(Mã 102, Năm 2017)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| y | $-\infty$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(-1;+\infty\right)$. **B.** $\left(1;+\infty\right)$. **C.** $\left(-1;1\right)$. **D.** $\left(-\infty;1\right)$.

**Câu 34:** **(Mã 103, Năm 2017)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạp hàm $f'\left(x\right)=x^2+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;0\right)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

**C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$.

**Câu 35:** **(Mã 103, Năm 2017)** Cho hàm số $y=x^4-2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-2\right)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-2\right)$.

**C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$. **D.** Hàm sô nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$.

**Câu 36:** **(Mã 104, Năm 2017)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-2;0\right)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;0\right)$.

**C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;2\right)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-2\right)$.

**Câu 37:** **(Mã 104, Năm 2017)** Cho hàm số $y=\sqrt{2x^2+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

**C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;0\right)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

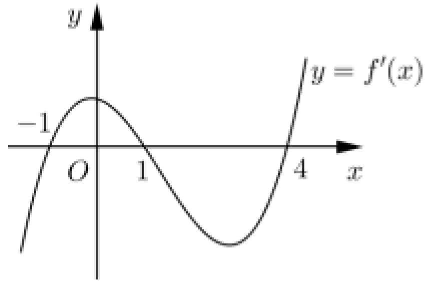
**Câu 38:** **(ĐỀ THAM KHẢO 2018)** Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Hàm số $y = f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

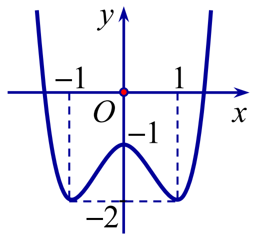
**A.** $\left(-2;0\right)$. **B.** $\left(-\infty;-2\right)$. **C.** $\left(0;2\right)$. **D.** $\left(0;+\infty\right)$.

**Câu 39:** **(ĐỀ THAM KHẢO 2018)** Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng




**A.** $\left(1;3\right)$. **B.** $\left(2;+\infty\right)$. **C.** $\left(-2;1\right)$. **D.** $\left(-\infty;-2\right)$.

**Câu 40:** **(Đề minh họa, Năm 2019)** Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?




**A.** $\left(0;1\right)$. **B.** $\left(-\infty;1\right)$. **C.** $\left(-1;1\right)$. **D.** $\left(-1;0\right)$.

**Câu 41:** **(Mã 101, Năm 2018)** Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(0;1\right)$. **B.** $\left(-\infty;0\right)$. **C.** $\left(1;+\infty\right)$. **D.** $\left(-1;0\right)$.

**Câu 42:** **(Mã 102, Năm 2018)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | + | 0 | - | 0 | + | |
| y | $-\infty$ | ↗ | 3 | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(-1;+\infty\right)$. **B.** $\left(1;+\infty\right)$. **C.** $\left(-1;1\right)$. **D.** $\left(-\infty;1\right)$.

**Câu 43:** **(Mã 103, Năm 2018)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | + | 0 | $-$ | 0 | + | 0 | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(-1;0\right)$. **B.** $\left(1;+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;1\right)$. **D.** $\left(0;1\right)$.

**Câu 44:** **(Mã 104, Năm 2018)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | 0 | + | 0 | $-$ | |
| $y$ | $+\infty$ | ↘ | 1 | ↗ | 4 | ↘ | $-\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(-2;+\infty\right)$. **B.** $\left(-2;3\right)$. **C.** $\left(3;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-2\right)$.

**Câu 45:** **(Mã 101, Năm 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | + | 0 | $-$ | 0 | + | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | 1 | ↗ | 3 | ↘ | 1 | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(-2;0\right)$. **B.** $\left(2;+\infty\right)$. **C.** $\left(0;2\right)$. **D.** $\left(0;+\infty\right)$.

**Câu 46:** **(Mã 102, Năm 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $3$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(0;+\infty\right)$. **B.** $\left(0;2\right)$. **C.** $\left(-2;0\right)$. **D.** $\left(-\infty;-2\right)$.

**Câu 47:** **(Mã 103, Năm 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $3$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(-1;0\right)$. **B.** $\left(-1;+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;-1\right)$. **D.** $\left(0;1\right)$.

**Câu 48:** **(Mã 104, Năm 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $3$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(0;1\right)$. **B.** $\left(1;+\infty\right)$. **C.** $\left(-1;0\right)$. **D.** $\left(0;+\infty\right)$.

**Câu 49:** **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $y=3f\left(x+2\right)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(-\infty;-1\right)$. **B.** $\left(-1;0\right)$. **C.** $\left(0;2\right)$. **D.** $\left(1;+\infty\right)$.

**Câu 50:** **(Mã 101, Năm 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)$, bảng xét dấu của $f'\left(x\right)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $y=f\left(3-2x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(4;+\infty\right)$. **B.** $\left(-2;1\right)$. **C.** $\left(2;4\right)$. **D.** $\left(1;2\right)$.

**Câu 51:** **(Mã 102, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $y=f(5-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(2;3)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(3;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

**Câu 52:** **(Mã 103, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $y=f(3-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(3;4)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(0;2)$.

**Câu 53:** **(Mã 104, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$, có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $y=f(5-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-\infty;-3)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(1;3)$.

**Câu 54:** **(Đề minh họa 1, Năm 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

**A.** $m\le 0$ hoặc $1\le m<2$. **B.** $m\le 0$.
**C.** $1\le m<2$. **D.** $m\ge 2$.

**Câu 55:** **(Đề minh họa lần 3, Năm 2017)** Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$?

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

**Câu 56:** **(Mã 102, Năm 2017)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-10)$?

**A.** $2$. **B.** Vô số. **C.** $1$. **D.** $3$.

**Câu 57:** **(Mã 102, Năm 2017)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10;+\infty)$?

**A.** $3$. **B.** Vô số. **C.** $4$. **D.** $5$.

**Câu 58:** **(Mã 103, Năm 2017)** Cho hàm số $y=\dfrac{mx-2m-3}{x-m}$ với $m$ là tham số. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của $m$ để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của $S$.

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** Vô số. **D.** $3$.

**Câu 59:** **(Mã 104, Năm 2017)** Cho hàm số $y=\dfrac{mx+4m}{x+m}$ với $m$ là tham số. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của $m$ để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của $S$.

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** Vô số. **D.** $3$.

**Câu 60:** **(Đề minh họa, Năm 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

**A.** $(-\infty;0]$. **B.** $\left[-\dfrac{3}{4};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;-\dfrac{3}{4}\right]$. **D.** $[0;+\infty)$

**Câu 61:** **(Mã 101, Năm 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-10)$?

**A.** $2$. **B.** Vô số. **C.** $1$. **D.** $3$.

**Câu 62:** **(Mã 102, Năm 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10;+\infty)$?

**A.** $3$. **B.** Vô số. **C.** $4$. **D.** $5$.

**Câu 63:** **(Mã 103, Năm 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6;+\infty)$?

**A.** $3$. **B.** Vô số. **C.** $0$. **D.** $6$.

**Câu 64:** **(Mã 104, Năm 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$.

**A.** $2$. **B.** $6$. **C.** Vô số. **D.** $1$.

**Câu 65:** **(Đề Tham Khảo Lần 2 2020)**Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+mx^2+4x+3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Câu 66:** **(Đề Tham Khảo Lần 1 2020)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{mx-4}{x-m}$ ($m$ là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Câu 67:** **(Mã 101 – 2020 – Lần 1)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+4}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7)$ là

**A.** $[4;7)$. **B.** $(4;7]$. **C.** $(4;7)$. **D.** $(4;+\infty)$.

**Câu 68:** **(Mã 102 – 2020 – Lần 1)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ là

**A.** $(5;+\infty)$. **B.** $(5;8]$. **C.** $[5;8)$. **D.** $(5;8)$.

**Câu 69:** **(Mã 103 – 2020 – Lần 1)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5)$

**A.** $(2;5]$. **B.** $[2;5)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(2;5)$.

**Câu 70:** **(Mã 104- 2020 – Lần 1)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ là

**A.** $(3;6]$. **B.** $(3;6)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $[3;6)$.

**Câu 71:** **(Mã 101 – 2020 -Lần 2)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=x^3-3x^2+(4-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

**A.** $(-\infty;1]$ **B.** $(-\infty;4]$ **C.** $(-\infty;1)$ **D.** $(-\infty;4)$

**Câu 72:** **(Mã 102 – 2020 – Lần 2)** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=x^3-3x^2+(5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

**A.** $(-\infty;2)$. **B.** $(-\infty;5)$. **C.** $(-\infty;5]$. **D.** $(-\infty;2]$.

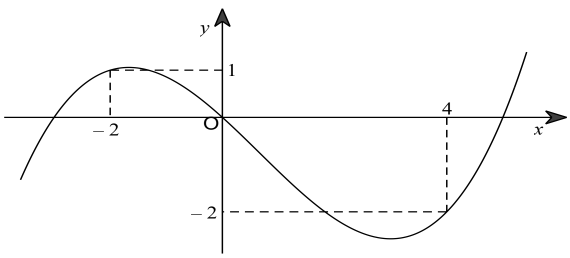
**Câu 73:** **(Mã 103 – 2020 – Lần 2)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=x^3-3x^2+(2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

**A.** $(-\infty;-1]$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-\infty;2]$.

**Câu 74:** **(Mã 104 – 2020 – Lần 2)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=x^3-3x^2+(1-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

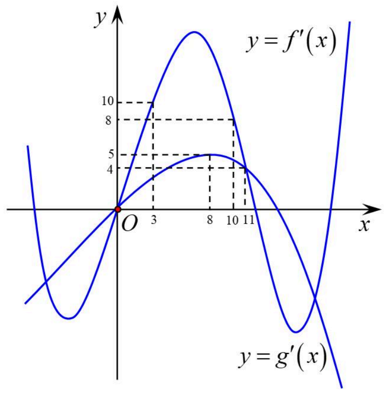
**A.** $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-\infty;-2]$. **D.** $(-\infty;1]$.

**Câu 75:** **(Đề Tham Khảo 2020 – Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?



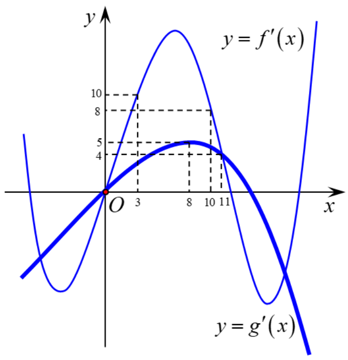

**A.** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;3)$.

**Câu 76:** **(Mã 102, Năm 2017)** Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị hàm số $y=g'(x)$. Hàm số $h(x)=f(x+7)-g\left(2x+\dfrac{9}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?




**A.** $\left(2;\dfrac{16}{5}\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{3}{4};0\right)$. **C.** $\left(\dfrac{16}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left(3;\dfrac{13}{4}\right)$.

**Câu 77:** **(Mã 101, Năm 2018)** Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$. Hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó **đường cong đậm hơn** là đồ thị của hàm số $y=g'(x)$.

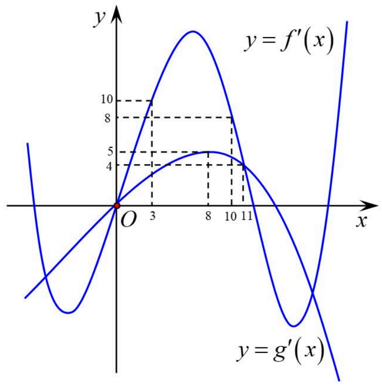



Hàm số $h(x)=f(x+4)-g\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(5;\dfrac{31}{5}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{9}{4};3\right)$. **C.** $\left(\dfrac{31}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left(6;\dfrac{25}{4}\right)$.

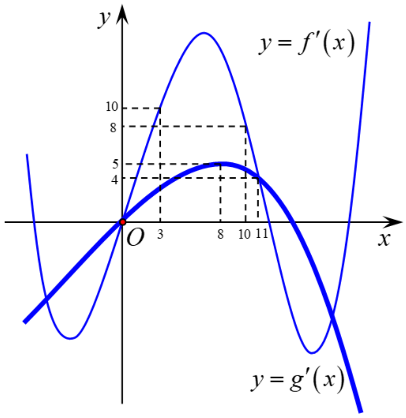
**Câu 78:** **(Mã 102, Năm 2018)** Cho hai hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$. Hai hàm số $y=f'\left(x\right)$ và $y=g'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị hàm số $y=g'\left(x\right)$.

Hàm số $h\left(x\right)=f\left(x+7\right)-g\left(2x+\dfrac{9}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?




**A.** $\left(2;\dfrac{16}{5}\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{3}{4};0\right)$. **C.** $\left(\dfrac{16}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left(3;\dfrac{13}{4}\right)$.

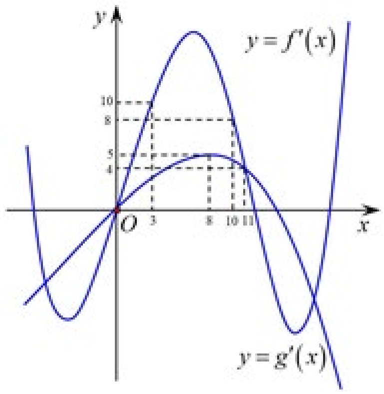
**Câu 79:** **(Mã 103, Năm 2018)** Cho hai hàm số $y=f\left(x\right)$, $y=g\left(x\right)$. Hai hàm số $y=f'\left(x\right)$ và $y=g'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên




trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=g'(x)$. Hàm số $h\left(x\right)=f\left(x+3\right)-g\left(2x-\dfrac{7}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

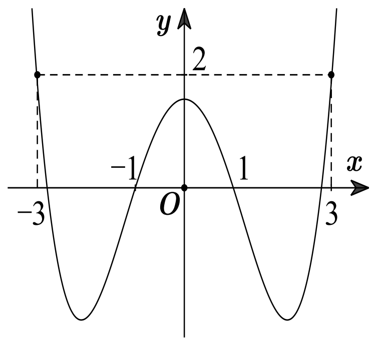
**A.** $\left(\dfrac{13}{4};4\right)$. **B.** $\left(7;\dfrac{29}{4}\right)$. **C.** $\left(6;\dfrac{36}{5}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{36}{5};+\infty\right)$.

**Câu 80:** **(Mã 104, Năm 2018)** Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị hàm số $y = g'(x)$. Hàm số $h(x) = f(x+6) - g\left(2x + \frac{5}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



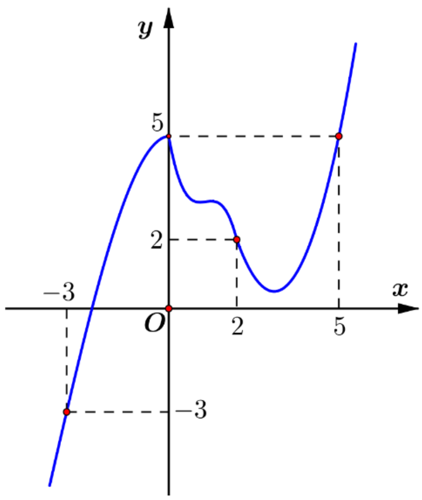

**A.** $\left(\frac{21}{5}; +\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$. **C.** $\left(3; \frac{21}{5}\right)$. **D.** $\left(4; \frac{17}{4}\right)$.

**Câu 81:** Cho hàm số $y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ với $a, b, c, d, e, f$ là các số thực, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(1-2x) - 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?




**A.** $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. **C.** $(-1; 0)$. **D.** $(1; 3)$.

**Câu 82:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ

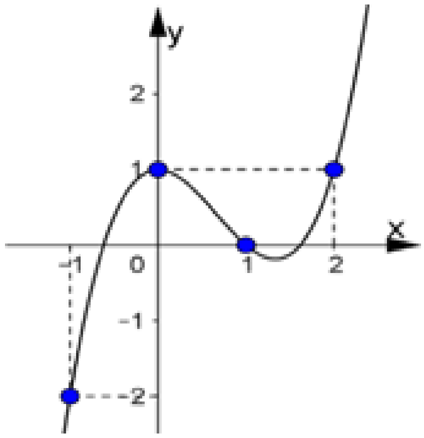



Hàm số $g(x) = f(-2x+1) + (x+1)(-2x+4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(-\infty; -2)$.

**C.** $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

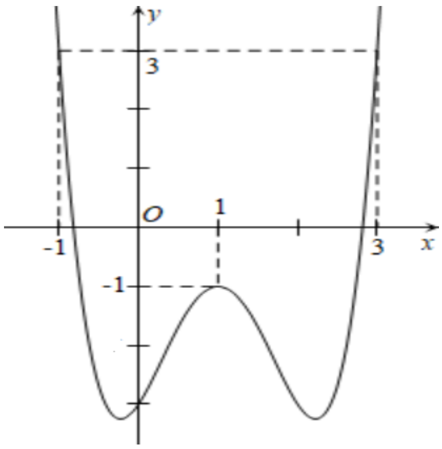
**Câu 83:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.




Hàm số $g(x)=f(x-1)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(1;2)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(-\infty;1)$.

**Câu 84:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.




Hàm số $g(x)=f(3x-1)-27x^3+54x^2-27x+4$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

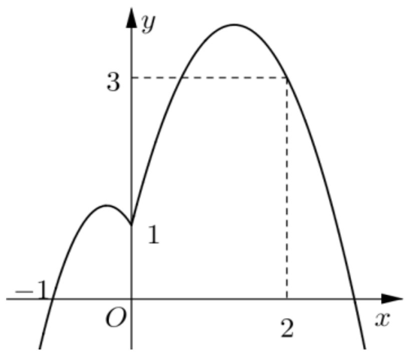
**A.** $\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{2}{3};3\right)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(4;+\infty)$.

**Câu 85:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(-1)=0$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.

Hàm số $y=\left|2f(x-1)-x^2\right|$ đồng biến trên khoảng

**A.** $(3;+\infty)$. **B.** $(-1;2)$.

**C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(0;3)$.



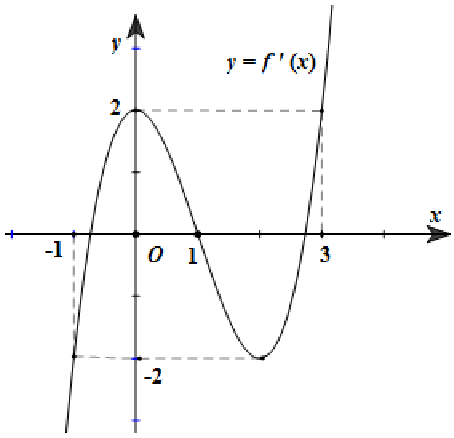
**Câu 86:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=x(2x-1)\cdot(x^2+3)+2$. Hàm số $y=f(3-x)+2x+2019$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

**A.** $(3;5)$. **B.** $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$. **D.** $(-\infty;3)$.

**Câu 87:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+2x-3,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $g(x)=f(x^2+3x-m)+m^2+1$ đồng biến trên $(0;2)$?

**A.** 16. **B.** 17. **C.** 18. **D.** 19.

**Câu 88:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.




Đặt $g(x)=f(x-m)-\frac{1}{2}(x-m-1)^2+2019$ với $m$ là tham số thực. Gọi $S$ là tập các giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoản $(5;6)$.Tổng các phần tử của $S$ bằng:

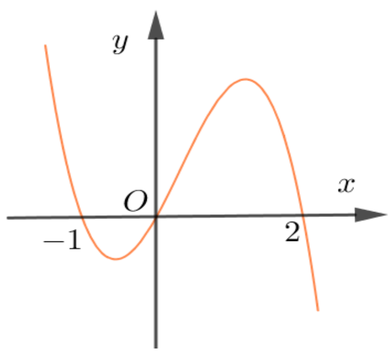
**A.** 4. **B.** 11. **C.** 14. **D.** 20.

**Câu 89:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn: $f'(x)=(1-x^2)(x-5)$ Hàm số $y=3f(x+3)-x^3+12x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

**A.** $(1;5)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

**Câu 90:** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên dưới và $f(-1)=f(2)=0$

Hàm số $g(x)=\left[f(x^3-3)\right]^2$ đồng biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau




**A.** $(1;2)$ **B.** $(0;1)$

**C.** $(-1;0)$ **D.** $(-2;-1)$

CHƯƠNG I

# ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

## BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

**1.** ***Định lí*** *(thừa nhận): Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $K$.*

*Nếu $f'(x) > 0,\ \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $K$.*

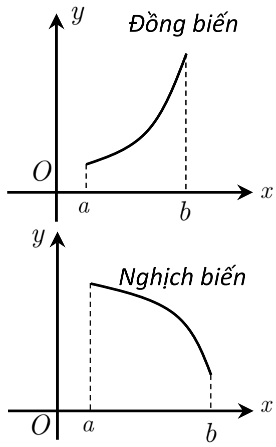
*Nếu $f'(x) < 0,\ \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $K$.*

*Nếu $f'(x) = 0,\ \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng $K$.*

**2.** ***Hình dáng đồ thị***

*Nếu hàm số **đồng biến** trên $K$ thì từ trái sang phải **đồ thị đi lên**.*

*Nếu hàm số **nghịch biến** trên $K$ thì từ trái sang phải **đồ thị đi xuống**.*




## III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY**

**Câu 1:** **(MĐ 101-2022)** Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** $y = x^4 - x^2$. **B.** $y = x^3 - x$. **C.** $y = \dfrac{x-1}{x+2}$. **D.** $y = x^3 + x$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Xét $y = x^3 + x$ có $y' = 3x^2 + 1 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số trên đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**Câu 2:** **(MĐ 102-2022)** Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$

**A.** $y = x^4 - x^2$. **B.** $y = x^3 + x$. **C.** $y = \dfrac{x-1}{x+2}$. **D.** $y = x^3 - x$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta thấy, chỉ có hàm số $y = x^3 + x$ có $y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $y = x^3 + x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**Câu 3:** **(MĐ 103-2022)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-1; +\infty)$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $(-\infty; -1)$. **D.** $(-\infty; 1)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $f'(x)=x+1$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | -1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

**Câu 4:** **(MĐ 104-2022)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x+1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-\infty;-1)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(1;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 5:** **(MĐ 101-2022)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | | 0 | | 3 | | 0 | | $+\infty$ |

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(0;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$.

Suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1);(0;1)$.

**Câu 6:** **(MĐ 102-2022)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | | 0 | | 3 | | 0 | | $+\infty$ |

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(0;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;1)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

**Câu 7:** **(MĐ 103-2022)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| x | -∞ | | -1 | | 0 | | 1 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | |
| f(x) | +∞ | ↘ | 0 | ↗ | 3 | ↘ | 0 | ↗ | +∞ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(0;3)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

**Câu 8:** **(MĐ 104-2022)** Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $3$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**A.** $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Quan sát BBT ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

**Câu 9:** **(ĐTK 2021)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-\infty$ |

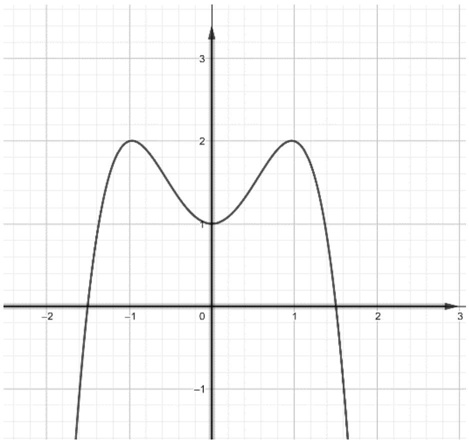
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào, trong các khoảng dưới đây?

**A.** $(-2;2)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;+\infty)$.

**Lời giải**

Ta thấy trên $(0;2)$ thì $f'(x)>0$ và mũi tên có chiều hướng lên.

**Câu 10:** **(MĐ 102 - 2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như đường cong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

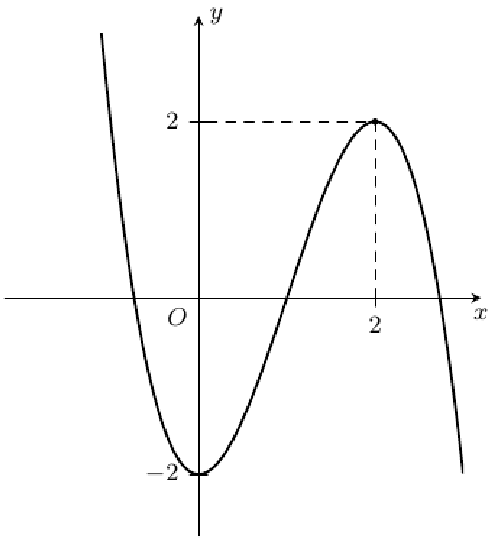



**A.** $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(0;+\infty)$.

**Lời giải**

Dựa vào đồ thị ta có hàm số đồng biến trên các khoảng: $(-\infty;-1);(0;1)$

**Câu 11:** **(MĐ 103 - 2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

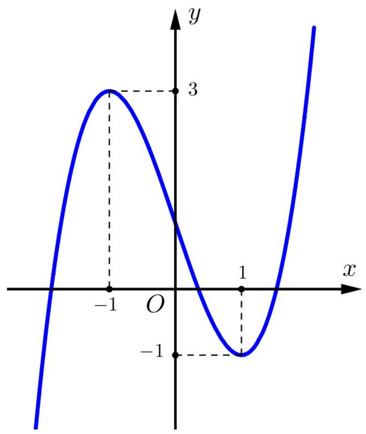



**A.** $(-\infty;2)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

**Lời giải**

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

**Câu 12:** **(MĐ 104 - 2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.




Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-1;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(0;3)$.

**Lời giải**

Từ hình vẽ ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

**Câu 13:** **(MĐ 2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(0;+\infty)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

**Lời giải**

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm ta thấy, $f'(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<x<0\\ x>2\end{array}\right.$.

Do đó, trong các khoảng đã cho, hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

**Câu 14:** **(MĐ 2021 – ĐỢT 2)** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$. **B.** $y=x^3-x$. **C.** $y=x^4-4x$. **D.** $x^3+x$.

**Lời giải**

Hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x+1}$ có tập xác định là $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ nên không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=x^3-x$ có đạo hàm là $y'=3x^2-1$ đổi dấu qua $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ nên không đồng biến trên $\mathbb{R}$

.

Hàm số $y=x^4-4x$ có đạo hàm là $y'=4x^3-4$ đổi dấu qua $x=1$ nên không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=x^3+x$ có đạo hàm là $y'=3x^2+1$ luôn dương với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**Câu 15:** **(MĐ 2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;+\infty)$.

**Lời giải**

Ta có $f'(x)>0$ trên mỗi khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$ nên hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

**Câu 16:** **(MĐ 103 - 2021 – ĐỢT 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | |

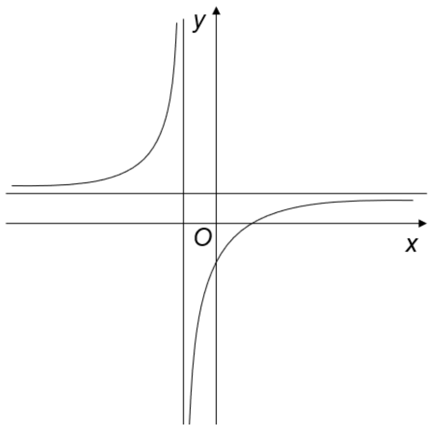
Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-1;1)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-1;0)$.

**Lời giải**

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm ta có hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$

**Câu 17:** **(MĐ 102 - 2021 – ĐỢT 1)** Biết hàm số $y=\dfrac{x+a}{x+1}$ ($a$ là số thực cho trước, $a\neq 1$) có đồ thị như hình vẽ sau:




Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $y'<0,\forall x\neq -1$. **B.** $y'>0,\forall x\neq -1$. **C.** $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$. **D.** $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

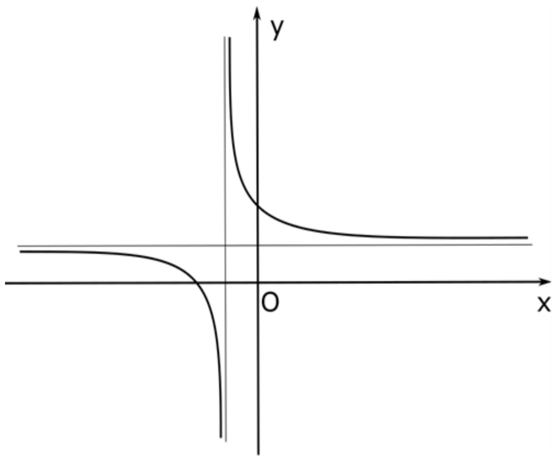
**Lời giải**

Hàm số đã cho có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Do đó $y'>0,\forall x\neq -1$.

**Câu 18:** **(MĐ 102 - 2021 – ĐỢT 1)** Biết hàm số $y=\dfrac{x+a}{x+1}$ ($a$ là số thực cho trước, $a\neq 1$) có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?




**A.** $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **B.** $y' > 0, \forall x \neq -1$. **C.** $y' < 0, \forall x \neq -1$. **D.** $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

**Lời giải**

ĐK: $x \neq -1$.

Đặt $y = f(x) = \dfrac{x+a}{x+1}$. Từ đồ thị hàm số đã cho ta có:

Với $\forall x_1, x_2 \in (-1; +\infty)$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Do đó $f(x)$ nghịch biến trên $(-1; +\infty)$.

Với $\forall x_1, x_2 \in (-\infty; -1)$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Do đó $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.

Suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$. Vậy $y' < 0, \forall x \neq -1$.

**Câu 19:** **(Mã 101 – 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $4$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-\infty; -1)$. **B.** $(0; 1)$. **C.** $(-1; 1)$. **D.** $(-1; 0)$

**Lời giải**

**Chọn D**

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

**Câu 20:** **(Đề Minh Họa 2020 – Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ |

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-\infty;0)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 21:** **(Đề Minh Họa 2020 – Lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;1)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

**Câu 22:** **(Mã 102 – 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

**Câu 23:** **(Mã 103 – 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Hàm số đã chođồng biến trên khoảng nào dưới đây

**A.** $(-2;2)$ **B.** $(0;2)$ **C.** $(-2;0)$ **D.** $(2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 24:** **(Mã 104 – 2020 Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

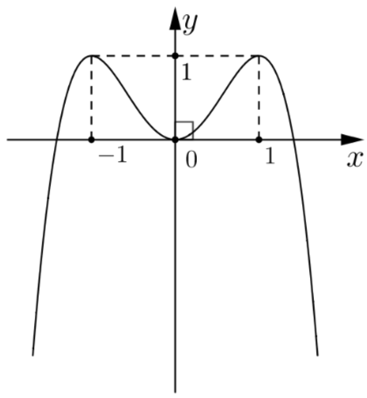
**A.** $(-3;0)$. **B.** $(-3;3)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(-\infty;-3)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-3;0)$ và $(3;+\infty)$.

**Câu 25:** **(Mã 102 – 2020 – Lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?




**A.** $(-1;0)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(0;+\infty)$.

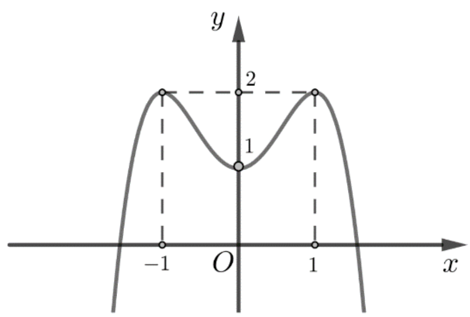
**Lời giải**

**Chọn A**

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ta có:

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$, đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

**Câu 26:** **(Mã 107 – 2020 Lần 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.




Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(0;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

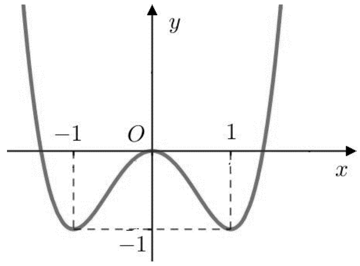
**Lời giải**

**Chọn A**

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có hàm số đồng biến trên hai khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(0;1\right)$

$\Rightarrow$ chọn đáp án **A.**

**Câu 27:** **(Mã 103 – 2020 – Lần 2)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?




**A.** $\left(-1;0\right)$. **B.** $\left(-\infty;-1\right)$. **C.** $\left(0;+\infty\right)$. **D.** $\left(0;1\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 28:** **(Đề minh họa 1, Năm 2017)** Hỏi hàm số $y=2x^4+1$ đồng biến trên khoảng nào?

**A.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(0;+\infty\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;0\right)$

**Lời giải**

**Chọn B**

$y=2x^4+1$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=8x^3$; $y'=0\Leftrightarrow 8x^3=0\Leftrightarrow x=0$ su ra $y\left(0\right)=1$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | | | | $+\infty$ |
| | | | $1$ | | |

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

**Câu 29:** **(Đề minh họa 2, Năm 2017)** Cho hàm số $y=x^3-2x^2+x+1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$.

**C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $y'=3x^2-4x+1\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=\dfrac{1}{3}$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

**Câu 30:** **(Đề Minh họa lần 3, Năm 2017)** Cho hàm số $y=\frac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$.

**B.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$.

**C.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

**D.** Hàm số nghịch biến trên $(-1;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Phương pháp:**

□ Bước 1: Tìm tập xác định, tính y'.

□ Bước 2: giải phương trình y' = 0 tìm các nghiệm.

□ Bước 3: Lập bảng biến thiên và kết luận các khoảng đồng biến và nghịch biến.

**Cách giải:** $y=\frac{x-2}{x+1}\Rightarrow y'=\frac{3}{(x+1)^2}>0,\forall x.$

**Câu 31:** **(Đề minh họa lần 3, Năm 2017)** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

**A.** $y=3x^3+3x-2.$ **B.** $y=2x^3-5x+1.$ **C.** $y=x^4+3x^2.$ **D.** $y=\frac{x-2}{x+1}.$

**Lời giải**

**Chọn A**

**Phương pháp:** Tính đạo hàm các hàm số và xét dấu đạo hàm, nếu $y'>0$ với mọi x thì hàm số đó đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**Cách giải:** Ta có: $\begin{cases}(3x^3+3x-2)'=9x^2+3>0,\forall x\\(2x^3-5x+1)'=6x^2-5\\(x^4+3x^2)'=4x^3+6x\\\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2=\frac{3}{(x+1)^2}\end{cases}$

**Câu 32:** **(Mã 101, Năm 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(0;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(-\infty;-1)$.

**Câu 33:** **(Mã 102, Năm 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| y | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-1;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-\infty;1)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 34:** **(Mã 103, Năm 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạp hàm $f'(x)=x^2+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

**B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

**C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

**D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $f'(x)=x^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

**Câu 35:** **(Mã 103, Năm 2017)** Cho hàm số $y=x^4-2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

**B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

**C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

**D.** Hàm sô nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $y'=4x^3-4x$.

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

**Câu 36:** **(Mã 104, Năm 2017)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

**B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

**C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

**D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Dễ thấy mệnh đề hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ đúng.

**Câu 37:** **(Mã 104, Năm 2017)** Cho hàm số $y=\sqrt{2x^2+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

**B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

**D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $D=\mathbb{R}$, $y'=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**Câu 38:** **(ĐỀ THAM KHẢO 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

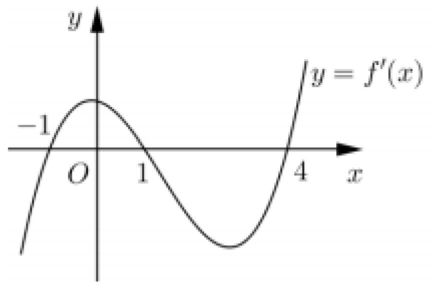
Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-2;0)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 39:** **(ĐỀ THAM KHẢO 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng




**A.** $(1;3)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Cách 1:**

Ta thấy $f'(x)<0$ với $\left[\begin{array}{l}x\in(1;4)\\x<-1\end{array}\right.$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $(1;4)$ và $(-\infty;-1)$ suy ra $g(x)=f(-x)$ đồng biến trên $(-4;-1)$ và $(1;+\infty)$. Khi đó $f(2-x)$ đồng biến biến trên khoảng $(-2;1)$ và $(3;+\infty)$

**Cách 2:**

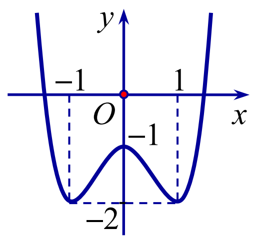
Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có $f'(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\1<x<4\end{array}\right.$.

Ta có $\left(f(2-x)\right)'=(2-x)'.f'(2-x)=-f'(2-x)$.

Để hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến thì $\left(f(2-x)\right)'>0\Leftrightarrow f'(2-x)<0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-x<-1\\1<2-x<4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\-2<x<1\end{array}\right.$.

**Câu 40:** **(Đề minh họa, Năm 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?




**A.** $(0;1)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;0)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Quan sát đồ thị ta thấy đồ thị đi lên trong khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Quan sát đáp án **chọn D**

**Câu 41:** **(Mã 101, Năm 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(0;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(-\infty;-1)$.

**Câu 42:** **(Mã 102, Năm 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| y | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-1;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-\infty;1)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 43:** **(Mã 103, Năm 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-1;0)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(0;1)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 44:** **(Mã 104, Năm 2018)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-2;+\infty)$. **B.** $(-2;3)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 45:** **(Mã 101, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-2;0)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $f'(x)<0 \Leftrightarrow \forall x\in(0;2) \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

**Câu 46:** **(Mã 102, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(0;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

Căn cứ các phương án, ta chọn đáp án $D$.

**Câu 47:** **(Mã 103, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-1;0)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(0;1)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Nhìn BBT ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-1;\,0)$ và $(1;\,+\infty)$. Đáp án A đúng.

**Câu 48:** **(Mã 104, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(0;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 49:** **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $y=3f(x+2)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(1;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $y'=3\left[f'(x+2)-(x^2-3)\right]$

Với $x\in(-1;0)\Rightarrow x+2\in(1;2)\Rightarrow f'(x+2)>0$, lại có $x^2-3<0\Rightarrow y'>0;\forall x\in(-1;0)$

Vậy hàm số $y=3f(x+2)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Chú ý:

+) Ta xét $x\in(1;2)\subset(1;+\infty)\Rightarrow x+2\in(3;4)\Rightarrow f'(x+2)<0;x^2-3>0$

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ nên loại hai phương án $\mathrm{A},\mathrm{D}$.

+) Tương tự ta xét

$x \in (-\infty;-2) \Rightarrow x+2 \in (-\infty;0) \Rightarrow f'(x+2) < 0; x^2 - 3 > 0 \Rightarrow y' < 0; \forall x \in (-\infty;-2)$

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ nên loại hai phương án B.

**Câu 50:** **(Mã 101, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(4;+\infty)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(1;2)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $y' = -2f'(3-2x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-3 < 3-2x < -1 \\ 3-2x > 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3 > x > 2 \\ x < 1\end{array}\right.$.

Vì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ nên nghịch biến trên $(-2;1)$.

**Câu 51:** **(Mã 102, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $y = f(5-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(2;3)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(3;5)$. **D.** $(5;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét hàm số $y = f(5-2x)$.

$y' = [f(5-2x)]' = -2f'(5-2x)$.

Xét bất phương trình: $y' < 0 \Leftrightarrow f'(5-2x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-3 < 5-2x < -1 \\ 5-2x > 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3 < x < 4 \\ x < 2\end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $y = f(5-2x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và khoảng $(3;4)$.

Vì $(0;2) \subset (-\infty;2)$ nên chọn đáp án B

**Câu 52:** **(Mã 103, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $y = f(3-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(3;4)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(0;2)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $y' = f'(3-2x) = (3-2x)' f'(3-2x) = -2f'(3-2x)$.

*) $y' = 0 \Leftrightarrow -2f'(3-2x) = 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-2x=-3 \\ 3-2x=-1 \\ 3-2x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$.

*) $y' \geq 0 \Leftrightarrow -2f'(3-2x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-2x \leq -3 \\ -1 \leq 3-2x \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 2 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Hàm số $y = f(3-2x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ nên đồng biến trên khoảng $(3;4)$.

**Câu 53:** **(Mã 104, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$, có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Hàm số $y = f(5-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-\infty;-3)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(1;3)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $y' = -2f'(5-2x)$.

Hàm số $y = f(5-2x)$ đồng biến $\Leftrightarrow -2f'(5-2x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(5-2x) \leq 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5-2x < -3 \\ -1 < 5-2x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ 2 < x < 3 \end{array}\right.$.

Vậy chọn đáp án **B.**

**Câu 54:** **(Đề minh họa 1, Năm 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

**A.** $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$. **B.** $m \leq 0$. **C.** $1 \leq m < 2$. **D.** $m \geq 2$.

**Lời giải.**

**Chọn A**

Đặt $t = \tan x$, vì $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (0;1)$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t-2}{t-m}\ \forall t\in(0;1)$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

Ta có $f'(t)=\dfrac{2-m}{(t-m)^2}$.

Để hàm số $y$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi: $f'(t)>0\ \forall t\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow \frac{2-m}{(t-m)^2}>0\ \forall t\in(0;1)\Leftrightarrow\begin{cases}2-m>0\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;0]\cup[1;2)$$

**CASIO:** Đạo hàm của hàm số ta được $y'=\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}(\tan x-m)-(\tan x-2)\dfrac{1}{\cos^2 x}}{(\tan x-m)^2}$

Ta nhập vào máy tính thằng $y'$\CALC\Calc $x=\dfrac{\pi}{8}$

\= \ $m=?$ 1 giá trị bất kỳ trong 4 đáp án.

Đáp án D $m\ge 2$. Ta chọn $m=3$. Khi đó $y'=-0,17<0$

Đáp án C $1\le m<2$ Ta chọn $m=1,5$. Khi đó $y'=0,49>0$

Đáp án B $m\ge 0$ Ta chọn $m=0$. Khi đó $y'=13,6>0$

Vậy đáp án B và C đều đúng

**Câu 55:** **(Đề minh họa lần 3, Năm 2017)** Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$?

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Phương pháp:** Hàm số nghịch biến trên đâu thì $f'(x)\le 0$ tại đó với dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm.

**Cách giải:** Xét $m=1$ thì $y=-x+4$ (thỏa mãn nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$). Xét $m\ne 1$, ta có:

$f'(x)=3(m^2-1)x^2+2(m-1)x-1$

$$f'(x)\le 0,\forall x\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-1<0\\ \Delta'=(m-1)^2+3(m^2-1)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2<1\\ 2m^2-m-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<1\\ m>\dfrac{-2}{2}\end{cases}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}<m<1.$$

Mà m là số nguyên nên m = 0 hoặc m = 1.

**Câu 56:** **(Mã 102, Năm 2017)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-10)$?

**A.** $2$. **B.** Vô số. **C.** $1$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-5m\}$.

$y'=\dfrac{5m-2}{(x+5m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-10)$ khi và chỉ khi $\begin{cases}5m-2>0\\-5m\in[-10;+\infty)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{2}{5}\\-5m\geq-10\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{2}{5}<m\leq2$.

Vì $m$ nguyên nên $m\in\{1;2\}$. Vậy có $2$ giá trị của tham số $m$.

**Câu 57:** **(Mã 102, Năm 2017)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10;+\infty)$?

**A.** $3$. **B.** Vô số. **C.** $4$. **D.** $5$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-5m\}$.

$y'=\dfrac{5m-6}{(x+5m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên $(10;+\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases}y'<0,\forall x\in D\\-5m\notin(10;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5m-6<0\\-5m\leq10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{6}{5}\\m\geq-2\end{cases}$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$.

**Câu 58:** **(Mã 103, Năm 2017)** Cho hàm số $y=\dfrac{mx-2m-3}{x-m}$ với $m$ là tham số. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của $m$ để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của $S$.

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** Vô số. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $y'=\dfrac{-m^2+2m+3}{(x-m)^2}$

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định thì $y' \geq 0 \Leftrightarrow -m^2 + 2m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \in [-1;3]$

Xét tại $m = -1; m = 3$ thấy không thỏa mãn. Vậy $m = 0; m = 1; m = 2$.

**Câu 59:** **(Mã 104, Năm 2017)** Cho hàm số $y = \dfrac{mx + 4m}{x + m}$ với $m$ là tham số. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của $m$ để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của $S$.

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** Vô số. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$; $y' = \dfrac{m^2 - 4m}{(x + m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định khi $y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên có $3$ giá trị thỏa.

**Câu 60:** **(Đề minh họa, Năm 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m - 9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ là

**A.** $(-\infty; 0]$. **B.** $\left[-\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty; -\dfrac{3}{4}\right]$. **D.** $[0; +\infty)$

**Lời giải**

**Chọn C**

Theo đề $y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9 \leq 0, \forall x \in (-\infty; -1) \Leftrightarrow 4m \leq 3x^2 + 12x + 9,\ \forall x \in (-\infty; -1)$

Đặt $g(x) = 3x^2 + 12x + 9 \Rightarrow g'(x) = 6x + 12$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $6$ |

Vậy $4m \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{3}{4}$.

**Câu 61:** **(Mã 101, Năm 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y = \dfrac{x + 2}{x + 5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$?

**A.** $2$. **B.** Vô số. **C.** $1$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$.

$y' = \dfrac{5m - 2}{(x + 5m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-10)$ khi và chỉ khi $\begin{cases}5m-2>0\\-5m\in[-10;+\infty)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{2}{5}\\-5m\geq -10\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{2}{5}<m\leq 2$.

Vì $m$ nguyên nên $m\in\{1;2\}$. Vậy có $2$ giá trị của tham số $m$.

**Câu 62:** **(Mã 102, Năm 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10;+\infty)$?

**A.** $3$. **B.** Vô số. **C.** $4$. **D.** $5$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{-5m\}$.

$y'=\dfrac{5m-6}{(x+5m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên $(10;+\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases}y'<0,\forall x\in D\\-5m\notin(10;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5m-6<0\\-5m\leq 10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{6}{5}\\m\geq -2\end{cases}$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$.

**Câu 63:** **(Mã 103, Năm 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6;+\infty)$?

**A.** $3$. **B.** Vô số. **C.** $0$. **D.** $6$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{-3m\}$; $y'=\dfrac{3m-1}{(x+3m)^2}$.

Hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6;+\infty)$ khi và chỉ khi:

$\begin{cases}y'<0\\(6;+\infty)\subset D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3m-1<0\\-3m\leq 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{1}{3}\\m\geq -2\end{cases}\Leftrightarrow -2\leq m<\dfrac{1}{3}$.

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;0\}$.

**Câu 64:** **(Mã 104, Năm 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$.

**A.** $2$. **B.** $6$. **C.** Vô số. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tập xác định: $D=(-\infty;-3m)\cup(-3m;+\infty)$.

Ta có $y'=\dfrac{3m-2}{(x+3m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)\Leftrightarrow\begin{cases}3m-2>0\\-6\le -3m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{2}{3}\\m\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}<m\le 2$.

Mà $m$ nguyên nên $m=\{1;2\}$.

**Câu 65:** **(Đề Tham Khảo Lần 2 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+mx^2+4x+3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $f'(x)=x^2+2mx+4$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ (Dấu '=' xảy ra tại hữu hạn điểm).

Ta có $f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \Delta'\le 0$

$\Leftrightarrow \Delta'=m^2-4\le 0$

$\Leftrightarrow -2\le m\le 2$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$, vậy có $5$ giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn.

**Câu 66:** **(Đề Tham Khảo Lần 1 2020)** Cho hàm số $f(x)=\frac{mx-4}{x-m}$ ($m$ là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Đạo hàm $f'(x)=\frac{-m^2+4}{(x-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$f'(x)>0\,\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+4>0\\ m\notin(0;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\ m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -2<m\le 0.$$

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{-1;0\}$. Vậy có hai giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn đề bài.

**Câu 67:** **(Mã 101 – 2020 – Lần 1)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\frac{x+4}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7)$ là

**A.** $[4;7)$. **B.** $(4;7]$. **C.** $(4;7)$. **D.** $(4;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có: $y'=\frac{m-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7) \Leftrightarrow y'>0$, $\forall x\in(-\infty;-7)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-4>0 \\ -m\notin(-\infty;-7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>4 \\ -m\geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>4 \\ m\leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow 4<m\leq 7.$$

**Câu 68:** **(Mã 102 – 2020 – Lần 1)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ là

**A.** $(5;+\infty)$. **B.** $(5;8]$. **C.** $[5;8)$. **D.** $(5;8)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện $x\neq -m$.

Ta có $y'=\dfrac{m-5}{(x+m)^2}$

Để hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ thì

$$\begin{cases} y'>0 \\ -m\notin(-\infty;-8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-5>0 \\ -m\geq -8 \end{cases} \Rightarrow 5<m\leq 8.$$

**Câu 69:** **(Mã 103 – 2020 – Lần 1)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5)$

**A.** $(2;5]$. **B.** $[2;5)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(2;5)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m-2}{(x+m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5) \Leftrightarrow \begin{cases} y'>0\forall x\in(-\infty;-5) \\ -m\notin(-\infty;-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2>0 \\ -m\geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow 2<m\leq 5$.

**Câu 70:** **(Mã 104- 2020 – Lần 1)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ là

**A.** $(3;6]$. **B.** $(3;6)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $[3;6)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số xác định khi: $x+m\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -m$.

$$y=\frac{x+3}{x+m} \Rightarrow y'=\frac{m-3}{(x+m)^2}$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y' > 0, \forall x \in (-\infty;-6) \\ -m \notin (-\infty;-6) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m-3>0 \\ -m \in [-6;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>3 \\ -m \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>3 \\ m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m \leq 6$.

Vậy: $m \in (3;6]$.

**Câu 71:** **(Mã 101 – 2020 -Lần 2)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (4-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

**A.** $(-\infty;1]$ **B.** $(-\infty;4]$ **C.** $(-\infty;1)$ **D.** $(-\infty;4)$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có.

$y' = 3x^2 - 6x + 4 - m$. $ycbt \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 4 - m \geq 0, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x + 4, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq \min\limits_{(2;+\infty)} g(x)$ với $g(x) = 3x^2 - 6x + 4$

Ta có.

$g'(x) = 6x - 6$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $0$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | | | $4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m \leq 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy: $m \in (-\infty;4]$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

**Câu 72:** **(Mã 102 – 2020 – Lần 2)** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

**A.** $(-\infty;2)$. **B.** $(-\infty;5)$. **C.** $(-\infty;5]$. **D.** $(-\infty;2]$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 5 - m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 5 - m \geq 0, \forall x > 2 \Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x + 5, \forall x > 2$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ trên khoảng $(2;+\infty)$.

Có $f'(x) = 6x - 6$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (loại).

Bảng biến thiên

| $x$ | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $5$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta có $m \le 3x^2 - 6x + 5, \forall x > 2 \Leftrightarrow m \le 5$.

Vậy $m \in (-\infty; 5]$.

**Câu 73:** **(Mã 103 – 2020 – Lần 2)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

**A.** $(-\infty;-1]$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-\infty;2]$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 2 - m$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 - m \ge 0, \forall x \in (2;+\infty)$ $m \le 3x^2 - 6x + 2, \forall x \in (2;+\infty)$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x + 2, \forall x \in (2;+\infty)$.

$f'(x) = 6x - 6$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $0$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta thấy $m \le 2$. Vậy $m \in (-\infty; 2]$.

**Câu 74:** **(Mã 104 – 2020 – Lần 2)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (1-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

**A.** $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-\infty;-2]$. **D.** $(-\infty;1]$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 1 - m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty) \Leftrightarrow y' \ge 0$, $\forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 1 - m \ge 0$, $\forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 1 \ge m$, $\forall x \in (2;+\infty)$.

Xét hàm số $g(x) = 3x^2 - 6x + 1$ với $\forall x \in (2;+\infty)$.

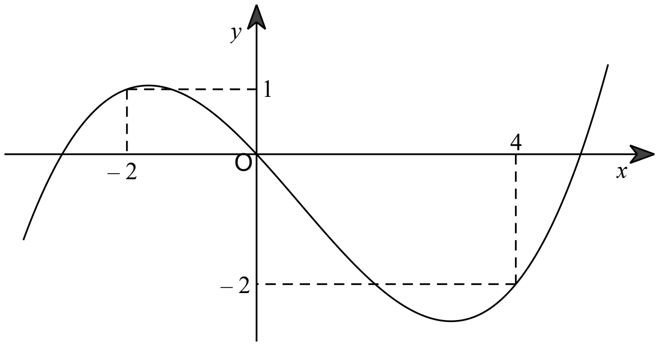
$g'(x)=6x-6$; $g'(x)>0$, $\forall x\in(2;+\infty)$.

Bảng biến thiên $g(x)$:

| $x$ | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy $m\le 1$.

**Câu 75:** **(Đề Tham Khảo 2020 – Lần 1)** Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?




**A.** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;3)$.

**Lời giải**

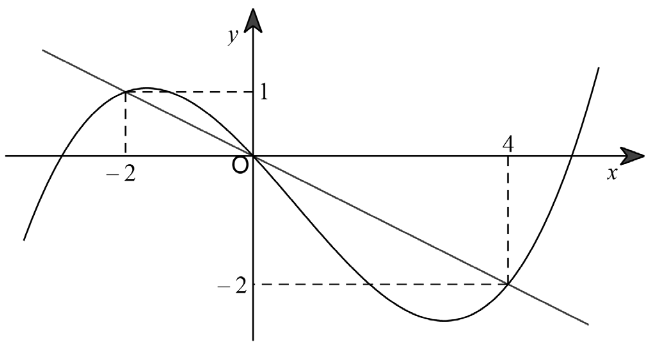
**Chọn A**

Ta có : $g(x)=f(1-2x)+x^2-x\ \Rightarrow g'(x)=-2f'(1-2x)+2x-1$

Đặt $t=1-2x\Rightarrow g'(x)=-2f'(t)-t$

$g'(x)=0\Rightarrow f'(t)=-\dfrac{t}{2}$

Vẽ đường thẳng $y=-\dfrac{x}{2}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên cùng một hệ trục



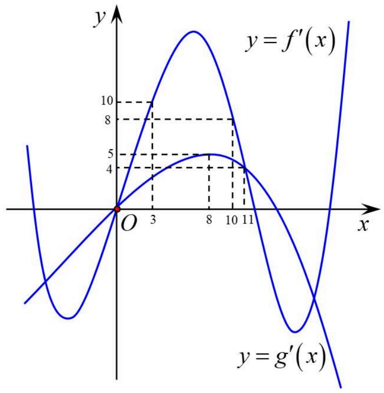

Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Rightarrow g'(x)\le 0\Rightarrow f'(t)\ge -\dfrac{t}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-2\le t\le 0\\ t\ge 4\end{array}\right.$

Như vậy $f'(1-2x)\geq\dfrac{1-2x}{-2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}-2\leq 1-2x\leq 0\\4\leq 1-2x\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{3}{2}\\x\leq-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ và $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)$.

Mà $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)\subset\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ nên hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$

**Câu 76:** **(Mã 102, Năm 2017)** Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị hàm số $y=g'(x)$. Hàm số $h(x)=f(x+7)-g\left(2x+\dfrac{9}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?




**A.** $\left(2;\dfrac{16}{5}\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{3}{4};0\right)$. **C.** $\left(\dfrac{16}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left(3;\dfrac{13}{4}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $h'(x)=f'(x+7)-2g'\left(2x+\dfrac{9}{2}\right)$.

Nhìn vào đồ thị của hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ ta thấy trên khoảng $(3;8)$ thì $g'(x)<5$ và $f'(x)>10$. Do đó $f'(x)>2g'(x)$.

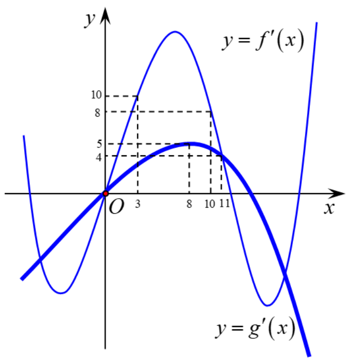
Như vậy: $g'\left(2x+\dfrac{9}{2}\right)<5$ nếu $3<2x+\dfrac{9}{2}<8\Leftrightarrow-\dfrac{3}{4}<x<\dfrac{7}{4}$.

$f'(x+7)>10$ nếu $3<x+7<8\Leftrightarrow-4<x<1$.

Suy ra trên khoảng $\left(-\dfrac{3}{4};1\right)$ thì $g'\left(2x+\dfrac{9}{2}\right)<5$ và $f'(x+7)>10$ hay $h'(x)>0$.

Tức là trên khoảng $\left(-\dfrac{3}{4};0\right)$ hàm số $h(x)$ đồng biến.

**Câu 77:** **(Mã 101, Năm 2018)** Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$. Hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó **đường cong đậm hơn** là đồ thị của hàm số $y=g'(x)$.




Hàm số $h(x)=f(x+4)-g\left(2x-\frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(5;\frac{31}{5}\right)$. **B.** $\left(\frac{9}{4};3\right)$. **C.** $\left(\frac{31}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left(6;\frac{25}{4}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

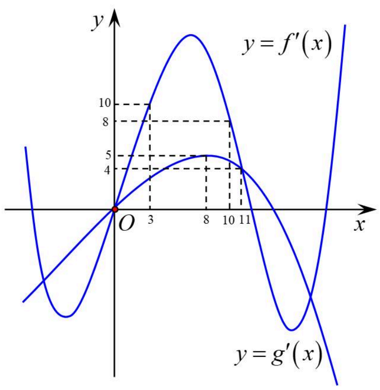
Ta có $h'(x)=f'(x+4)-2g'\left(2x-\frac{3}{2}\right)$.

Hàm số $h(x)=f(x+4)-g\left(2x-\frac{3}{2}\right)$ đồng biến $\Leftrightarrow h'(x)\ge 0 \Leftrightarrow f'(x+4)-2g'\left(2x-\frac{3}{2}\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow f'(x+4)\ge 2g'\left(2x-\frac{3}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\le x+4\le 8 \\ 3\le 2x-\frac{3}{2}\le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 4 \\ 3+\frac{3}{2}\le 2x\le 8+\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 4 \\ \frac{9}{2}\le 2x\le \frac{19}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 4 \\ \frac{9}{4}\le x\le \frac{19}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{9}{4}\le x\le \frac{19}{4}$.

**Câu 78:** **(Mã 102, Năm 2018)** Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị hàm số $y=g'(x)$. Hàm số $h(x)=f(x+7)-g\left(2x+\frac{9}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



**A.** $\left(2;\frac{16}{5}\right)$. **B.** $\left(-\frac{3}{4};0\right)$. **C.** $\left(\frac{16}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left(3;\frac{13}{4}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $h'(x)=f'(x+7)-2g'\left(2x+\frac{9}{2}\right)$.

Nhìn vào đồ thị của hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ ta thấy trên khoảng $(3;8)$ thì $g'(x)<5$ và $f'(x)>10$. Do đó $f'(x)>2g'(x)$.

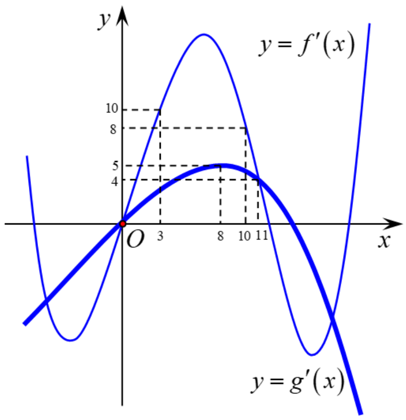
Như vậy: $g'\left(2x+\frac{9}{2}\right)<5$ nếu $3<2x+\frac{9}{2}<8 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}<x<\frac{7}{4}$.

$f'(x+7)>10$ nếu $3<x+7<8 \Leftrightarrow -4<x<1$.

Suy ra trên khoảng $\left(-\frac{3}{4};1\right)$ thì $g'\left(2x+\frac{9}{2}\right)<5$ và $f'(x+7)>10$ hay $h'(x)>0$.

Tức là trên khoảng $\left(-\frac{3}{4};0\right)$ hàm số $h(x)$ đồng biến.

**Câu 79:** **(Mã 103, Năm 2018)** Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$. Hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên




trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y=g'(x)$. Hàm số $h(x)=f(x+3)-g\left(2x-\frac{7}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(\frac{13}{4};4\right)$. **B.** $\left(7;\frac{29}{4}\right)$. **C.** $\left(6;\frac{36}{5}\right)$. **D.** $\left(\frac{36}{5};+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

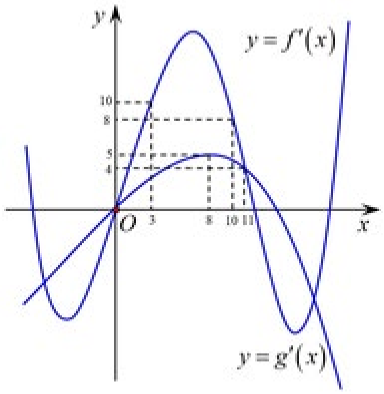
*Cách 1.* Ta thấy $f'(x)>2g'(y)$ với mọi $x\in(3;8)$ và mọi $y\in\mathbb{R}$.

Suy ra $f'(x+3)-2g'\left(2x-\frac{7}{2}\right)>0$ với mọi $x+3\in(3;8)$ hay $x\in(0;5)$.

*Cách 2.* Ta có: $x \in \left(\frac{13}{4};4\right) \Rightarrow \begin{cases} x+3 \in \left(\frac{25}{4};7\right) \Rightarrow f'(x+7) > 10 \\ 2x-\frac{7}{2} \in \left(3;\frac{9}{2}\right) \Rightarrow g'\left(2x-\frac{7}{2}\right) < 5 \end{cases} \Rightarrow h'(x) > 0$

$\Rightarrow h(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{13}{4};4\right)$

**Câu 80:** **(Mã 104, Năm 2018)** Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị hàm số $y=g'(x)$. Hàm số $h(x)=f(x+6)-g\left(2x+\frac{5}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?




**A.** $\left(\frac{21}{5};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};1\right)$. **C.** $\left(3;\frac{21}{5}\right)$. **D.** $\left(4;\frac{17}{4}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $h'(x)=f'(x+6)-2g'\left(2x+\frac{5}{2}\right)$.

Nhìn vào đồ thị của hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ ta thấy trên khoảng $(3;8)$ thì $g'(x)<5$ và $f'(x)>10$. Do đó $f'(x)>2g'(x)$.

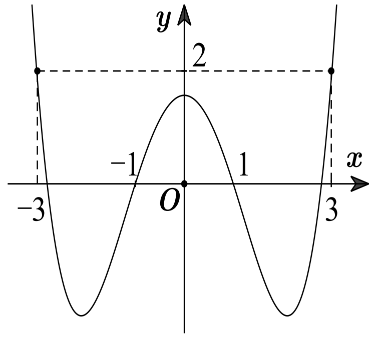
Như vậy: $g'\left(2x+\frac{5}{2}\right)<5$ nếu $3<2x+\frac{5}{2}<8 \Leftrightarrow \frac{1}{4}<x<\frac{11}{4}$.

$f'(x+6)>10$ nếu $3<x+6<8 \Leftrightarrow -3<x<2$.

Suy ra trên khoảng $\left(\frac{1}{4};2\right)$ thì $g'\left(2x+\frac{5}{2}\right)<5$ và $f'(x+7)>10$ hay $h'(x)>0$.

Tức là trên khoảng $\left(\frac{1}{4};1\right)$ hàm số $h(x)$ đồng biến.

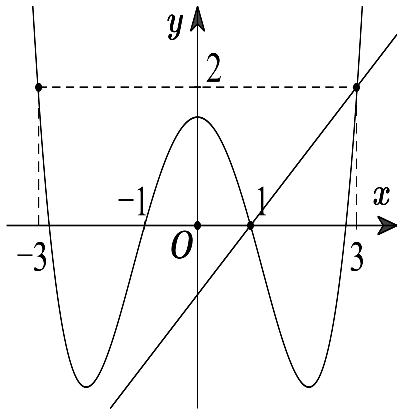
**Câu 81:** Cho hàm số $y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ với $a,b,c,d,e,f$ là các số thực, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(1-2x) - 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?




**A.** $\left(-\frac{3}{2};-1\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;3)$.

**Lời giải**

**Chọn C**




**Cách 1**: Ta có: $g(x) = f(1-2x) - 2x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = -2f'(1-2x) - 4x.$

Có: $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -2f'(1-2x) - 4x > 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) < -2x$ (1).

Đặt $t = 1-2x$, bất phương trình $(1)$ trở thành $f'(t) < t-1$.

Vẽ đường thẳng $y = x-1$. Trên cùng đồ thị, ta thấy đường thẳng $y = x-1$ nằm trên đồ thị hàm số $f'(x)$ trên khoảng $(1;3) \Rightarrow f'(t) < t-1 \Leftrightarrow 1 < t < 3 \Leftrightarrow 1 < 1-2x < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 0$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

**Cách 2**: Ta có: $g(x) = f(1-2x) - 2x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = -2f'(1-2x) - 4x.$

Có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) = -2x \Leftrightarrow f'(1-2x) = (1-2x) - 1$.

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = t-1, (t = 1-2x)$.

Từ đồ thị ta có $f'(t) = t-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3 \end{array}\right.$. Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-2x=1 \\ 1-2x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$.

<u>**Cách 3**</u>: Cách trắc nghiệm.

Ta có: $g(x)=f(1-2x)-2x^2+1 \Rightarrow g'(x)=-2f'(1-2x)-4x.$

Ta lần lượt thử các đáp án.

**Thử đáp án A**: Chọn $x=-1,25\in\left(-\dfrac{3}{2};-1\right)\Rightarrow g'(-1,25)=-2f'(3,5)-5.$

Nhìn đồ thị $f'(x)$ ta thấy $f'(3,5)>0\Rightarrow g'(-1,25)<0\Rightarrow$ loại đáp án **A.**

**Thử đáp án B**: Chọn $x=0,25\in\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow g'(0,25)=-2f'(0,5)-1.$

Nhìn đồ thị $f'(x)$ ta thấy $f'(0,5)>0\Rightarrow g'(0,25)<0\Rightarrow$ loại đáp án **B.**

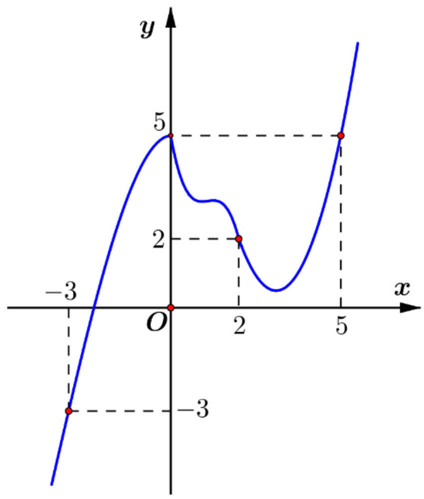
**Thử đáp án C**: Chọn $x=-0,5\in(-1;0)\Rightarrow g'(-0,5)=-2f'(2)+2.$

Nhìn đồ thị $f'(x)$ ta thấy $f'(2)<0\Rightarrow -2f'(2)>0\Rightarrow g'(-0,5)>0\Rightarrow$ Chọn đáp án **C.**

**Thử đáp án D**: Chọn $x=2\in(1;3)\Rightarrow g'(2)=-2f'(-3)-8.$

Nhìn đồ thị $f'(x)$ ta thấy $f'(-3)>0\Rightarrow -2f'(-3)<0\Rightarrow g'(2)<0\Rightarrow$ loại đáp án **D.**

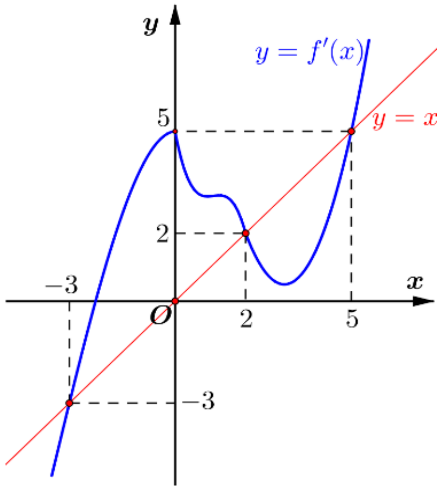
**Câu 82:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ




Hàm số $g(x)=f(-2x+1)+(x+1)(-2x+4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

<u>**A.**</u> $\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\dfrac{1}{2};2\right)$.

**Lời giải**




**Chọn A**

**Cách 1**: Ta có: $g(x) = f(-2x+1) + (x+1)(-2x+4) \Rightarrow g'(x) = -2f'(-2x+1) - 4x + 2$

Có $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -2f'(-2x+1) - 4x + 2 > 0 \Leftrightarrow f'(-2x+1) < -2x+1$ (1).

Đặt $t = -2x+1$, bất phương trình $(1)$ trở thành $f'(t) < t$.

Kẻ đường thẳng $y = x$. Trên cùng đồ thị, ta thấy đường thẳng $y = x$ nằm trên đồ thị hàm số $f'(x)$ trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(2;5)$.

Suy ra $f'(t) < t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -3 \\ 2 < t < 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x+1 < -3 \\ 2 < -2x+1 < 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ -2 < x < -\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$ và $(2;+\infty)$.

**Cách 2**: Ta có: $g(x) = f(-2x+1) + (x+1)(-2x+4) \Rightarrow g'(x) = -2f'(-2x+1) - 4x + 2$

Có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(-2x+1) = -2x+1$ (1).

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = t, (t = -2x+1)$.

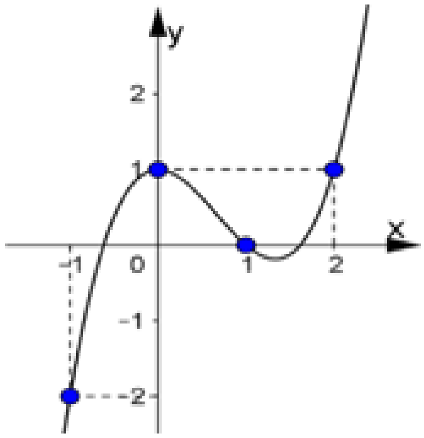
Từ đồ thị ta có $f'(t) = t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = 2 \\ t = 5 \end{array}\right.$. Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2x+1 = -3 \\ -2x+1 = 2 \\ -2x+1 = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$ và $(2;+\infty)$.

**Câu 83:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

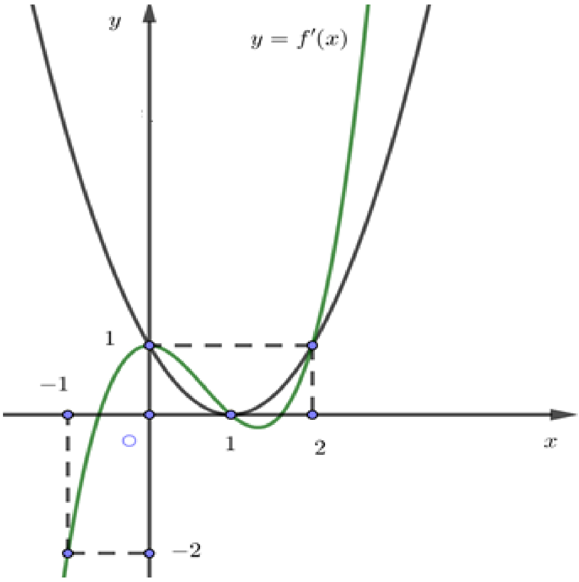



Hàm số $g(x)=f(x-1)-\dfrac{x^3}{3}+x^2-x+2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(1;2)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(-\infty;1)$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Cách 1: Ta có: $g'(x)=f'(x-1)-(x-1)^2$

Có $g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x-1)<(x-1)^2$ (1).

Đặt $t=x-1,$ bất phương trình $(1)$ trở thành $f'(t)<t^2$.

Vẽ Parabol $y=x^2$. Trên cùng đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số $y=x^2$ nằm trên đồ thị hàm số $f'(x)$ trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;2)$.

Suy ra $f'(t)<t^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<0 \\ 1<t<2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1<0 \\ 1<x-1<2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ 2<x<3 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;3)$.

**Cách 2**: Ta có: $g'(x)=f'(x-1)-(x-1)^2$.

Có: $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x-1)=(x-1)^2$.

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=t^2,(t=x-1)$.

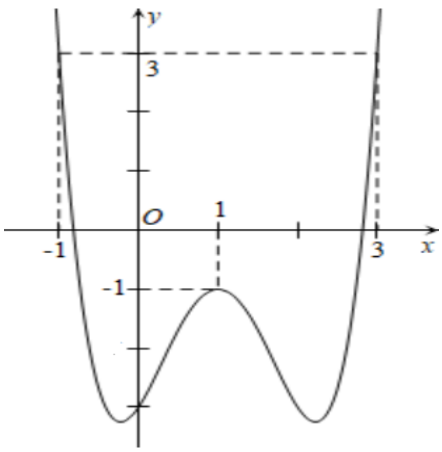
Từ đồ thị ta có: $f'(t)=t^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$. Khi đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-1=1 \\ x-1=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu.

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 2 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;3)$.

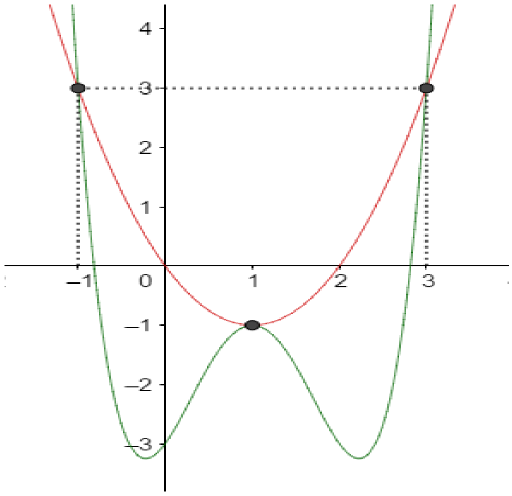
**Câu 84:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.




Hàm số $g(x)=f(3x-1)-27x^3+54x^2-27x+4$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{2}{3};3\right)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(4;+\infty)$.

**Lời giải**




**Chọn D**

**Cách 1**:

Ta có: $g(x)=f(3x-1)-(3x-1)^3+3(3x-1)^2 \Rightarrow g'(x)=3\left[f'(3x-1)-(3x-1)^2+2(3x-1)\right]$

Có $g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(3x-1)>(3x-1)^2-2(3x-1)$ (1).

Đặt $t=3x-1$, bất phương trình $(1)$ trở thành $f'(t)>t^2-2t$.

Vẽ Parabol $y=x^2-2x$. Trên cùng đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên đồ thị hàm số $y=x^2-2x$ trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$.

Suy ra $f'(t)>t^2-2t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-1 \\ t>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-1<-1 \\ 3x-1>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $\left(\dfrac{4}{3};+\infty\right)$.

**Cách 2**:

Ta có: $g(x)=f(3x-1)-(3x-1)^3+3(3x-1)^2 \Rightarrow g'(x)=3\left[f'(3x-1)-(3x-1)^2+2(3x-1)\right]$

Có: $g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(3x-1)=(3x-1)^2-2(3x-1)$.

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=t^2-2t,(t=3x-1)$.

Từ đồ thị ta có: $f'(t)=t^2-2t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=1(\textit{nghiệm kép}) \\ t=3 \end{array}\right.$.

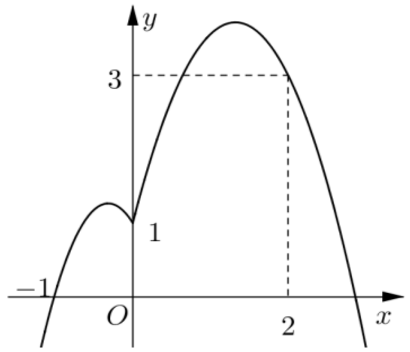
Khi đó $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-1=-1 \\ 3x-1=1 \\ 3x-1=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{2}{3}(\textit{nghiệm kép}) \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{2}{3}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(3;+\infty)$.

**Câu 85:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(-1)=0$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



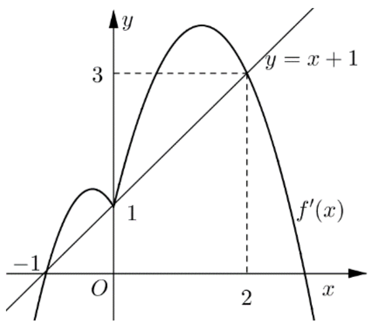

Hàm số $y=\left|2f(x-1)-x^2\right|$ đồng biến trên khoảng

**A.** $(3;+\infty)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(0;3)$

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $g(x)=2f(x-1)-x^2 \Rightarrow g'(x)=2[f'(x-1)-(x-1)-1]$




Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đồ thị hàm số $y=x+1$ ta có:

$g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x-1)>(x-1)+1 \Leftrightarrow -1<x-1<2 \Leftrightarrow 0<x<3$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | $0$ | | $\nearrow$ | | | $\searrow$ | |

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y=\left|2f(x-1)-x^2\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

**Câu 86:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)=x(2x-1)\cdot(x^2+3)+2$. Hàm số $y=f(3-x)+2x+2019$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

**A.** $(3;5)$. **B.** $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{5}{2};3\right)$. **D.** $(-\infty;3)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $y'=-f'(3-x)+2$.

$y'>0 \quad \Leftrightarrow -f'(3-x)+2>0 \Leftrightarrow f'(3-x)<2 \quad \Leftrightarrow (3-x)\left[2(3-x)-1\right]\left[(3-x)^2+3\right]+2<2$

$\Leftrightarrow (3-x)(5-2x)\left[(3-x)^2+3\right]<0$

Vì $\left[(3-x)^2+3\right]>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $y'>0$ khi và chỉ khi $(3-x)(5-2x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{5}{2}<x<3$.

Vậy hàm số $y=f(3-x)+2x+2019$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{5}{2};3\right)$.

**Câu 87:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+2x-3,\ \forall x\in\mathbb{R}$ Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2+3x-m\right)+m^2+1$ đồng biến trên $(0;2)$?

**A.** 16. **B.** 17. **C.** 18. **D.** 19.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $f'(t)=t^2+2t-3\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\leq -3 \\ t\geq 1 \end{array}\right. \ (*)$.

Có $g'(x)=(2x+3)f'\left(x^2+3x-m\right)$

Vì $2x+3>0, \forall x\in(0;2)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $(0;2) \Leftrightarrow g'(x)\geq 0, \forall x\in(0;2)$

$\Leftrightarrow f'\left(x^2+3x-m\right)\geq 0, \forall x\in(0;2)$

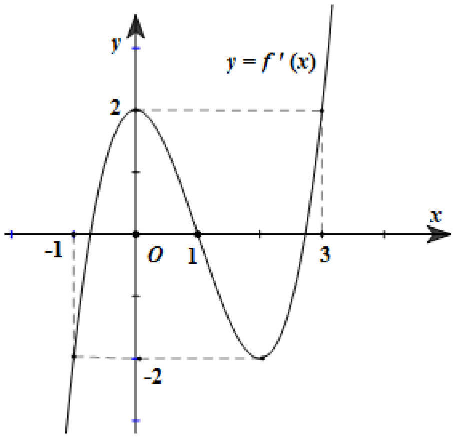
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-m\leq -3, \forall x\in(0;2) \\ x^2+3x-m\geq 1, \forall x\in(0;2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x\leq m-3, \forall x\in(0;2) \\ x^2+3x\geq m+1, \forall x\in(0;2) \end{array}\right. \ (**)$

Có $h(x)=x^2+3x$ luôn đồng biến trên $(0;2)$ nên từ $(**) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m-3\geq 10 \\ m+1\leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq 13 \\ m\leq -1 \end{array}\right.$

Vì $\begin{cases} m\in[-10;20] \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$ Có 18 giá trị của tham số $m$.

Vậy có 18 giá trị của tham số $m$ cần tìm.

**Câu 88:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.




Đặt $g(x)=f(x-m)-\frac{1}{2}(x-m-1)^2+2019$ với $m$ là tham số thực. Gọi $S$ là tập các giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoản $(5;6)$.Tổng các phần tử của $S$ bằng:

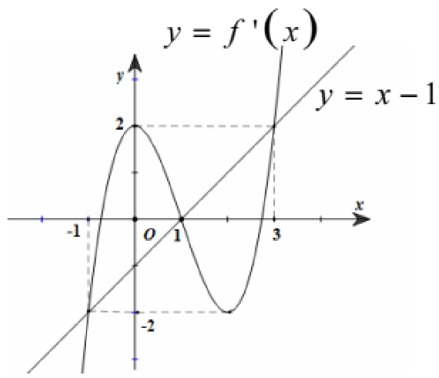
**A.** $4$. **B.** $11$. **C.** $14$. **D.** $20$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $g'(x)=f'(x-m)-(x-m-1)$

Đặt $h(x)=f'(x)-(x-1)$. Từ đồ thị $y=f'(x)$ và đồ thị $y=x-1$ trên hình vẽ ta suy ra $h(x)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\leq x\leq 1\\ x\geq 3\end{array}\right.$




Ta có $g'(x)=h(x-m)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\leq x-m\leq 1\\ x-m\geq 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m-1\leq x\leq m+1\\ x\geq m+3\end{array}\right.$

Do đó hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(m-1;m+1)$ và $(m+3;+\infty)$

Do vậy, hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-1\le 5\\ m+1\ge 6\end{cases}\\ m+3\le 5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5\le m\le 6\\ m\le 2\end{array}\right.$

Do $m$ nguyên dương nên $m\in\{1;2;5;6\}$, tức $S=\{1;2;5;6\}$

Tổng các phần tử của $S$ bằng 14.

**Câu 89:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn: $f'(x)=(1-x^2)(x-5)$ Hàm số $y=3f(x+3)-x^3+12x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

**A.** $(1;5)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

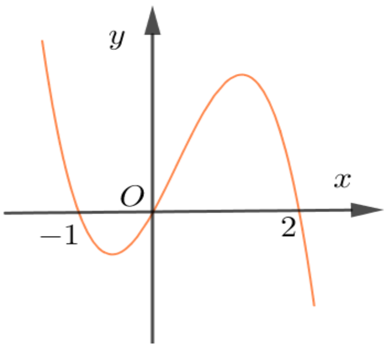
Ta có: $f'(x)=(1-x^2)(x-5)$ suy ra $f'(x+3)=\left[1-(x+3)^2\right](x+3-5)$ $=-(x+4)(x+2)(x-2)$.

Mặt khác: $y'=3.f'(x+3)-3x^2+12=-3\left[(x+4)(x+2)(x-2)+(x^2-4)\right]$ $=-3(x-2)(x+2)(x+5)$.

Xét $y'<0 \Leftrightarrow -3(x-2)(x+2)(x+5)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-5<x<-2\\ x>2\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y=3f(x+3)-x^3+12x$ nghịch biến trên các khoảng $(-5;-2)$ và $(2;+\infty)$.

**Câu 90:** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ như hình bên dưới và $f(-1)=f(2)=0$




Hàm số $g(x)=\left[f(x^3-3)\right]^2$ đồng biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau

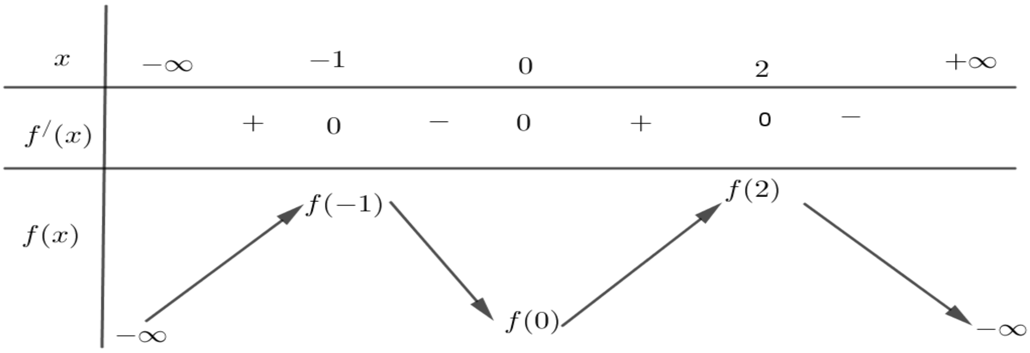
**A.** $(1;2)$ **B.** $(0;1)$ **C.** $(-1;0)$ **D.** $(-2;-1)$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $g'(x) = 4xf\left(x^2-3\right).f'\left(x^2-3\right)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$




Do $f(-1) = f(2) = 0$ nên $f\left(x^2-3\right) \le 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ để hàm số đồng biến thì $x.f'\left(x^2-3\right) \le 0$

TH1: $x \ge 0$ thì $f'\left(x^3-3\right) \le 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le x^2-3 \le 0 \\ x^2-3 \ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{3} \le x \le -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \le x \le \sqrt{3} \\ x \ge \sqrt{5} \\ x \le -\sqrt{5} \end{array}\right.$

Vì $x \ge 0$ nên $\left[\begin{array}{l} \sqrt{2} \le x \le \sqrt{3} \\ x \ge \sqrt{5} \end{array}\right.$

TH2: $x \le 0$ thì $f'\left(x^3-3\right) \ge 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x^2-3 \le 2 \\ x^2-3 \le -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{5} \le x \le -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{5} \\ -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} \end{array}\right.$

Vì $x \le 0$ nên $\left[\begin{array}{l} -\sqrt{5} \le x \le -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \le x \le 0 \end{array}\right.$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{5};-\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{2};0\right)$, $\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{5};+\infty\right)$.

# CHƯƠNG I
# ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

## BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

### III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**DẠNG 1. TÌM KHOẢNG ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ THÔNG QUA BẢNG BIẾN THIÊN, ĐỒ THỊ**

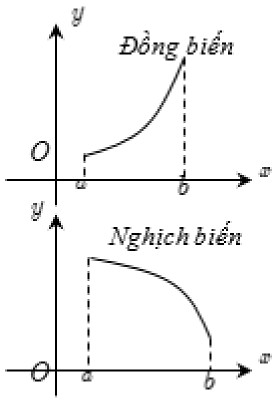
**1.** ***Định lí*** *: Giả sử hàm số* $y = f(x)$ *có đạo hàm trên khoảng* $K$.

*Nếu* $f'(x) > 0,\ \forall x \in K$ *thì hàm số đồng biến trên khoảng* $K$.

*Nếu* $f'(x) < 0,\ \forall x \in K$ *thì hàm số nghịch biến trên khoảng* $K$.

*Nếu* $f'(x) = 0,\ \forall x \in K$ *thì hàm số không đổi trên khoảng* $K$.

**2.** ***Hình dáng đồ thị***




*Nếu hàm số* ***đồng biến*** *trên* $K$ *thì từ trái sang phải* ***đồ thị đi lên****.*

*Nếu hàm số* ***nghịch biến*** *trên* $K$ *thì từ trái sang phải* ***đồ thị đi xuống****.*

**Câu 1:** Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ \|\| $-\infty$ | ↗ | $4$ | ↘ | $-\infty$ |

**A.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

**B.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;3\right)$.

**C.** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

**D.** Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ và $(3;+\infty)$.

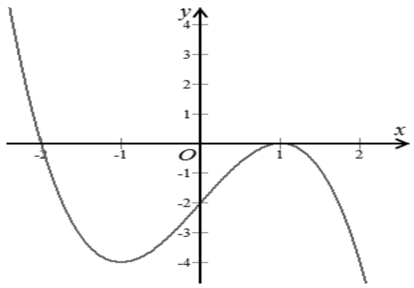
**Câu 2:** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $4$ | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số nghịch biến trong khoảng nào?

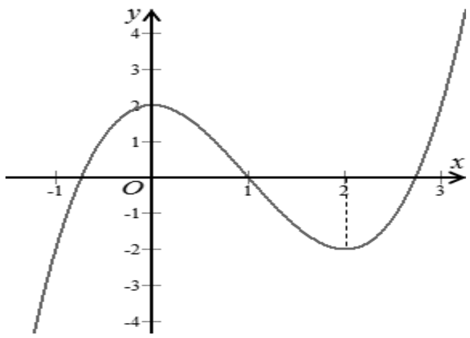
**A.** $(-1;1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2)$.

**Câu 3:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



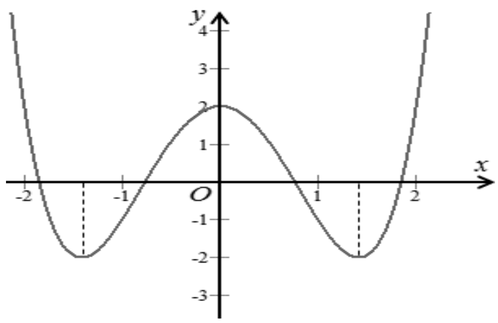
**A.** $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

**Câu 4:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



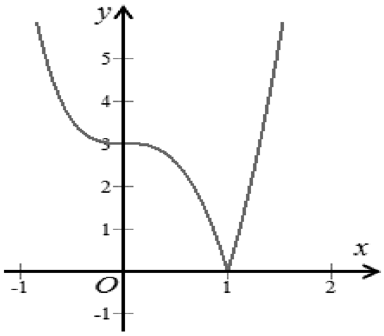
**A.** $(-1;1)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

**Câu 5:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



**A.** $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;1)$.

**Câu 6:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.




Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

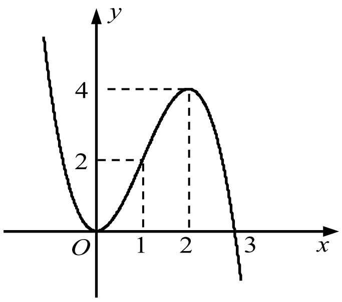
**A.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

**B.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

**C.** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

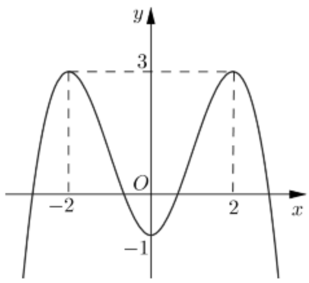
**D.** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

**Câu 7:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?



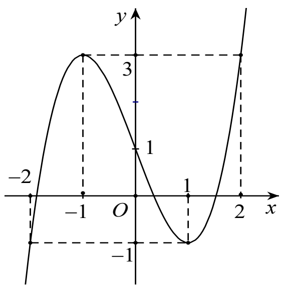

**A.** $(-\infty;0)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

**Câu 8:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?



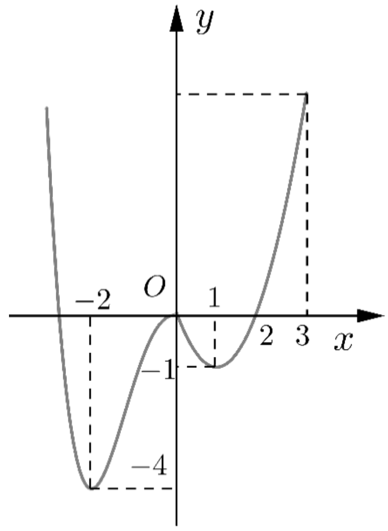

**A.** $(-2;0)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(0;2)$.

**Câu 9:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?



**A.** $(-1;1)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(1;+\infty)$.

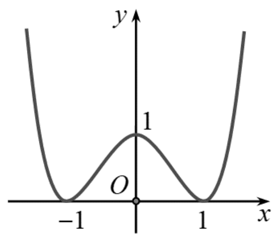
**Câu 10:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.




Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

**A.** $(-1;0)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;3)$.

**Câu 11:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?




**A.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

**B.** Hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

**C.** Hàm số đồng biến trên $(-1;0)\cup(1;+\infty)$.

**D.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

## DẠNG 2. TÌM KHOẢNG ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ CHO TRƯỚC

- **Bước 1**. Tìm tập xác định $D$ của hàm số.
- **Bước 2**. Tính đạo hàm $y'=f'(x)$. Tìm các điểm $x_i$, $(i=1,2,3,...,n)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 3**. Sắp xếp các điểm $x_i$ theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4**. Nêu kết luận về các khoảng đồng biến và nghịch biến dưa vào bảng biến thiên.

**Câu 12:** Cho hàm số $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2+x+2019$

**A.** Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**B.** Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

**C.** Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

**D.** Hàm số đã cho đồng biến trên $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

**Câu 13:** Hàm số $y=\dfrac{5-2x}{x+3}$ nghịch biến trên

**A.** $\mathrm{R}\backslash\{-3\}$. **B.** $R$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

**Câu 14:** Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$ ?

**A.** $y=x^3-3x+2$. **B.** $y=x^4+2x^2+2$.

**C.** $y=-x^3+2x^2-4x+1$. **D.** $y=-x^3-2x^2+5x-2$.

**Câu 15:** Hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ đồng biến trên khoảng

**A.** $(0;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(4;+\infty)$.

**Câu 16:** Hàm số $y=x^4-4x^3$ đồng biến trên khoảng

**A.** $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

**Câu 17:** Cho hàm số $y=x^4-2x^2+2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

**A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

**C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

**Câu 18:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(1-x)^2(x+1)^3(3-x)$. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

**Câu 19:** Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+2019$ nghịch biến trên

**A.** $(-1;3)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

**Câu 20:** Hàm số $y=\sqrt{2018x-x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

**A.** $(1010;2018)$. **B.** $(2018;+\infty)$. **C.** $(0;1009)$. **D.** $(1;2018)$.

**Câu 21:** Hàm số $y=-x^3+3x^2-4$ đồng biến trên tập hợp nào trong các tập hợp được cho dưới đây?

**A.** $(2;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

**Câu 22:** Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y'=x^2$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

**A.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

**B.** Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và đồng biến trên $(0;+\infty)$.

**C.** Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**D.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

**Câu 23:** Hàm số $y=x^3-3x$ nghịch biến trên khoảng nào?

**A.** $(-\infty;-1)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;+\infty)$.

**Câu 24:** Cho hàm $y=\sqrt{x^2-6x+5}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

**A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

**C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

**Câu 25:** Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-1$, kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số là **đúng nhất**:

**A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;+\infty)$;

**B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$;

**C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;+\infty)$;

**D.** Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

**Câu 26:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-2)^3$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(1;\ 3)$. **B.** $(-1;\ 0)$. **C.** $(0;\ 1)$. **D.** $(-2;\ 0)$.

**Câu 27:** Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-12x-1$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

**A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;4)$.

**B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

**C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;4)$.

**D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;+\infty)$.

# CHƯƠNG I ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

## BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

### III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**DẠNG 1. TÌM KHOẢNG ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ THÔNG QUA BẢNG BIẾN THIÊN, ĐỒ THỊ**

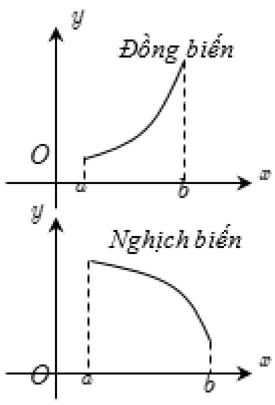
**1.** ***Định lí*** *: Giả sử hàm số* $y = f(x)$ *có đạo hàm trên khoảng* $K$.

*Nếu* $f'(x) > 0,\ \forall x \in K$ *thì hàm số đồng biến trên khoảng* $K$.

*Nếu* $f'(x) < 0,\ \forall x \in K$ *thì hàm số nghịch biến trên khoảng* $K$.

*Nếu* $f'(x) = 0,\ \forall x \in K$ *thì hàm số không đổi trên khoảng* $K$.

**2.** ***Hình dáng đồ thị***




*Nếu hàm số* ***đồng biến*** *trên* $K$ *thì từ trái sang phải* ***đồ thị đi lên****.*

*Nếu hàm số* ***nghịch biến*** *trên* $K$ *thì từ trái sang phải* ***đồ thị đi xuống****.*

**Câu 1:** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty \ \|\| \ -\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**A.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

**B.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

**C.** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

**D.** Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $(3;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

**Câu 2:** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-\infty$ \|\| $+\infty$ | $\searrow$ | $4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hàm số nghịch biến trong khoảng nào?

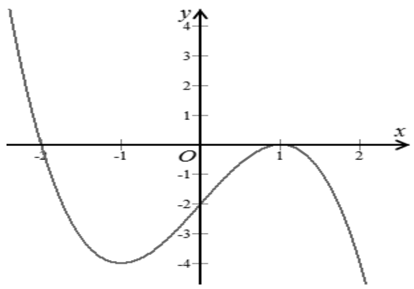
**A.** $(-1;1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

**Câu 3:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



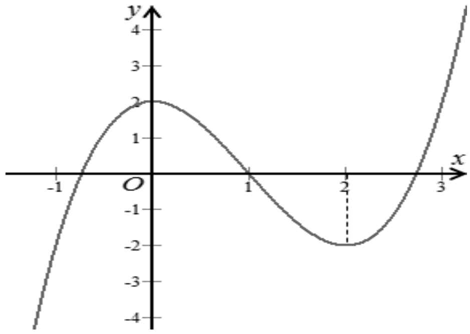

**A.** $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

**Câu 4:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



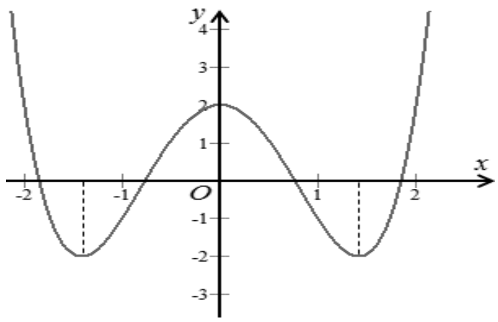

**A.** $(-1;1)$. **B.** $(-1;2)$. **<u>C</u>.** $(1;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ nên nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

**Câu 5:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



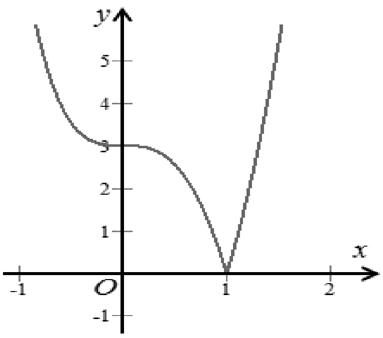

**A.** $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;2)$. **<u>D</u>.** $(0;1)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có trên khoảng $(0;1)$ đồ thị hàm số đi xuống nên nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

**Câu 6:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.




Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

**A.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

**B.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

**C.** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

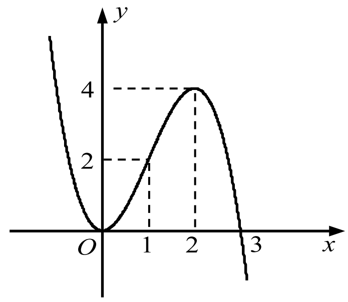
**D.** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có trên khoảng $(-\infty;1)$ đồ thị hàm số đi xuống nên nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

**Câu 7:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?




**A.** $(-\infty;0)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

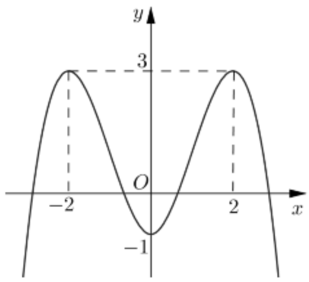
Xét đáp án A, trên khoảng $(-\infty;0)$ đồ thị có hướng đi xuống là hàm số nghịch biến nên loại.

Xét đáp án B, trên khoảng $(1;3)$ đồ thị có đoạn hướng đi lên là hàm số đồng biến và có đoạn hướng đi xuống là hàm số nghịch biến nên loại.

Xét đáp án C, trên khoảng $(0;2)$ đồ thị có hướng đi lên là hàm số đồng biến nên chọn.

Xét đáp án D, trên khoảng $(0;+\infty)$ đồ thị có đoạn hướng đi lên là hàm số đồng biến và có đoạn hướng đi xuống là hàm số nghịch biến nên loại.

**Câu 8:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?




**A.** $(-2;0)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(0;2)$.

**Lời giải**

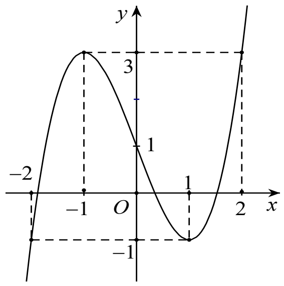
**Chọn A**

Xét đáp án A, trên khoảng $(-2;0)$ đồ thị hướng đi xuống là hàm số nghịch biến nên chọn.

Xét đáp án B, trên khoảng $(-\infty;0)$ đồ thị có đoạn hướng đi lên là hàm số đồng biến và có đoạn hướng xuống là hàm số đồng nghịch biến nên loại.

xét đáp án C, trên khoảng $(-2;2)$ đồ thị có hướng đi xuống là hàm số nghịch biến và có đoạn hướng đi lên là hàm số đồng biến nên loại.
Xét đáp án D, trên khoảng $(0;2)$ đồ thị có hướng đi lên là hàm số đồng biến nên loại.

**Câu 9:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?




**A.** $(-1;1)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(1;+\infty)$.

**Lời giải**

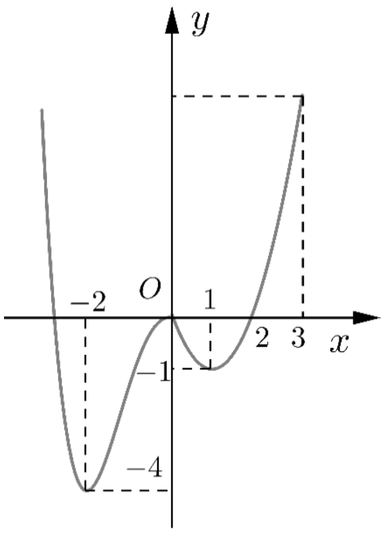
**Chọn A**

Xét đáp án A, trên khoảng $(-1;1)$ đồ thị có hướng đi xuống là hàm số nghịch biến nên chọn.

Xét đáp án B, trên khoảng $(-2;-1)$ đồ thị có hướng đi lên là hàm số đồng biến nên loại.

Xét đáp án C, trên khoảng $(-1;2)$ đồ thị có đoạn hướng đi xuống là hàm số nghịch biến và có đoạn hướng đi lên là hàm số đồng biến nên loại.
Xét đáp án D, trên khoảng $(1;+\infty)$ đồ thị có hướng đi lên là hàm số đồng biến nên loại.

**Câu 10:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.




Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

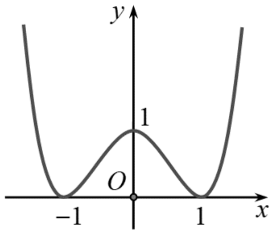
**A.** $(-1;0)$. **B.** $(-2;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;3)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Từ đồ thị hàm số ta có hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;1)$.

**Câu 11:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?




**A.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

**B.** Hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

**C.** Hàm số đồng biến trên $(-1;0)\cup(1;+\infty)$.

**D.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

**DẠNG 2. TÌM KHOẢNG ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ CHO TRƯỚC**

- **Bước 1**. Tìm tập xác định $D$ của hàm số.
- **Bước 2**. Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm $x_i$, $(i = 1,2,3,...,n)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 3**. Sắp xếp các điểm $x_i$ theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4**. Nêu kết luận về các khoảng đồng biến và nghịch biến dựa vào bảng biến thiên.

**Câu 12:** Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + 2019$

**A.** Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**B.** Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

**C.** Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

**D.** Hàm số đã cho đồng biến trên $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $y' = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \ge 0, \forall x$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$

**Câu 13:** Hàm số $y = \frac{5-2x}{x+3}$ nghịch biến trên

**A.** $R\backslash\{-3\}$. **B.** $R$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số $y=\dfrac{5-2x}{x+3}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

$y'=\dfrac{-11}{(x+3)^2}<0$, với $x\in D$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-3;+\infty)$.

**Câu 14:** Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$ ?

**A.** $y=x^3-3x+2$. **B.** $y=x^4+2x^2+2$.

**C.** $y=-x^3+2x^2-4x+1$. **D.** $y=-x^3-2x^2+5x-2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$y=-x^3+2x^2-4x+1\Rightarrow y'=-3x^2+4x-4=-2x^2-(x-2)^2<0,\forall x\in\mathbb{R}$

Do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

**Câu 15:** Hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ đồng biến trên khoảng

**A.** $(0;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(4;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-3x^2+6x$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của $y'$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Nhìn vào bảng xét dấu của $y'$ ta thấy hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Vậy hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

**Câu 16:** Hàm số $y=x^4-4x^3$ đồng biến trên khoảng

**A.** $(-\infty;+\infty)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-12x^2$

Cho $y'=0\Leftrightarrow 4x^3-12x^2=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | $0$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ nên cũng đồng biến trên khoảng $\left(3;+\infty\right)$.

**Câu 17:** Cho hàm số $y=x^4-2x^2+2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

**A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;0\right)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$.

**C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;0\right)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=4x^3-4x$.

Xét $y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=1 \\ x=0 \Rightarrow y=2 \\ x=-1 \Rightarrow y=1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, hàm số đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$.

**Câu 18:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(1-x\right)^2\left(x+1\right)^3\left(3-x\right)$. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(-\infty;1\right)$. **B.** $\left(-\infty;-1\right)$. **C.** $\left(1;3\right)$. **D.** $\left(3;+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left(1-x\right)^2\left(x+1\right)^3\left(3-x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'\left(x\right)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-1;3\right)$.

**Câu 19:** Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2019$ nghịch biến trên

**A.** $\left(-1;3\right)$. **B.** $\left(-\infty;-1\right)$. **C.** $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(3;+\infty\right)$. **D.** $\left(3;+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=x^2-2x-3$.

Cho $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu của $y'$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Nhìn vào bảng xét dấu của $y'$ ta thấy hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2019$ nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$.

Vậy hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2019$ nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$.

**Câu 20:** Hàm số $y=\sqrt{2018x-x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

**A.** $(1010;2018)$. **B.** $(2018;+\infty)$. **C.** $(0;1009)$. **D.** $(1;2018)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

TXĐ: $D=[0;2018]$

$y'=\left(\sqrt{2018x-x^2}\right)'=\dfrac{2018-2x}{2\sqrt{2018x-x^2}}=\dfrac{1009-x}{\sqrt{2018x-x^2}}$; $y'=0 \Leftrightarrow x=1009$

$y'<0 \Leftrightarrow x\in(1009;2018)$, suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1009;2018)$, suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1010;2018)$, **Chọn A**

**Câu 21:** Hàm số $y=-x^3+3x^2-4$ đồng biến trên tập hợp nào trong các tập hợp được cho dưới đây?

**A.** $(2;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $y'=-3x^2+6x$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

**Câu 22:** Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y'=x^2$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

**A.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

**B.** Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và đồng biến trên $(0;+\infty)$.

**C.** Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**D.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

**Lời giải**

$y'=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | | | $+\infty$ |

**Câu 23:** Hàm số $y=x^3-3x$ nghịch biến trên khoảng nào?

**A.** $(-\infty;-1)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;+\infty)$.

**Lời giải**

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-3;\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu $y'$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

**Câu 24:** Cho hàm $y=\sqrt{x^2-6x+5}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng?**

**A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.

**C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

**Lời giải**

Tập xác định: $D=(-\infty;1]\cup[5;+\infty)$.

Ta có $y'=\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}>0$, $\forall x\in(5;+\infty)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

**Câu 25:** Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-1$, kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số là **đúng nhất**:

**A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;+\infty)$;

**B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$;

**C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0);(2;+\infty)$;

**D.** Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

**Lời giải**

Ta có hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

$y=-x^3+3x^2-1 \Rightarrow y'=-3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | -1 | $\nearrow$ | 3 | $\searrow$ | $-\infty$ |

Vậy đáp án A là **đúng** nhất.

**Câu 26:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-2)^3$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(1;\,3)$. **B.** $(-1;\,0)$. **C.** $(0;\,1)$. **D.** $(-2;\,0)$.

**Lời giải**

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Đồng thời $f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in(0;2)$ nên ta chọn đáp án theo đề bài là $(0;\,1)$.

**Câu 27:** Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-12x-1$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

**A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;4)$.

**B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

**C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;4)$.

**D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;+\infty)$.

**Lời giải**

$y'=x^2-x-12$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | -3 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hàm số đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

# CHƯƠNG I ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

## BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

### III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM. (MỨC ĐỘ 7 – 8)

**DẠNG 1. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU TRÊN CÁC KHOẢNG XÁC ĐỊNH CỦA NÓ**

**Xét hàm số bậc ba** $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

– Bước 1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

– Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

+ Để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x) \ge 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)} = 3a > 0 \\ \Delta_{f'(x)} = 4b^2 - 12ac \le 0 \end{cases} \Rightarrow m$ ?

+ Để $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x) \le 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)} = 3a < 0 \\ \Delta_{f'(x)} = 4b^2 - 12ac \le 0 \end{cases} \Rightarrow m$ ?

**Lưu ý**: Dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.

• Để $f(x) \ge 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$. • $f(x) \le 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$.

**Câu 1:** Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m+2)x + 1$. Tìm tất cả giá trị của $m$ để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** $\left[\begin{array}{l} m \ge -1 \\ m \le -2 \end{array}\right.$. **B.** $-2 \le m \le -1$. **C.** $-2 < m < -1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m > -1 \\ m < -2 \end{array}\right.$.

**Câu 2:** Tìm $m$ để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1) + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** Không có giá trị $m$ thỏa mãn. **B.** $m \ne 1$.

**C.** $m = 1$. **D.** Luôn thỏa mãn với mọi $m$.

**Câu 3:** Tìm điều kiện của tham số thực $m$ để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(m+1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** $m \ge 2$. **B.** $m < 2$. **C.** $m < 0$. **D.** $m \ge 0$.

**Câu 4:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực $m$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x - m$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

**A.** $[-2; 2]$. **B.** $(-\infty; 2)$. **C.** $(-\infty; -2]$. **D.** $[2; +\infty)$.

**Câu 5:** Giá trị của $m$ để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2mx^2+(m+3)x-5+m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là.

**A.** $-\frac{3}{4}\le m\le 1$. **B.** $m\le -\frac{3}{4}$. **C.** $-\frac{3}{4}<m<1$. **D.** $m\ge 1$.

**Câu 6:** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=x^3+(m+1)x^2+3x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

**A.** $[-4;2]$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-4)\cup(2;+\infty)$.

***Nếu hệ số $a$ chứa tham số thì phải xét trường hợp $a=0$ và $a\neq 0$***

**Câu 7:** Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số hàm số $y=\frac{1}{3}(m^2-m)x^3+2mx^2+3x-2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

**A.** $4$. **B.** $5$. **C.** $3$. **D.** $0$.

**Câu 8:** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực $m$ để hàm số $y=mx^3+mx^2+m(m-1)x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** $m\le\frac{4}{3}$ và $m\neq 0$. **B.** $m=0$ hoặc $m\ge\frac{4}{3}$.

**C.** $m\ge\frac{4}{3}$. **D.** $m\le\frac{4}{3}$.

**Câu 9:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\frac{m}{3}x^3-2mx^2+(3m+5)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** $4$. **B.** $2$. **C.** $5$. **D.** $6$.

**Câu 10:** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để hàm số $y=(m-1)x^3-3(m-1)x^2+3x+2$ đồng biến biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** $1<m\le 2$. **B.** $1<m<2$. **C.** $1\le m\le 2$. **D.** $1\le m<2$

**Câu 11:** Số giá trị nguyên của $m$ để hàm số $y=(4-m^2)x^3+(m-2)x^2+x+m-1$ $(1)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ bằng.

**A.** $5$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $4$.

**Câu 12:** Số các giá trị nguyên của tham số $m$ trong đoạn $[-100;100]$ để hàm số $y=mx^3+mx^2+(m+1)x-3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là:

**A.** $200$. **B.** $99$. **C.** $100$. **D.** $201$.

**Câu 13:** Tổng bình phương của tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=(3m^2-12)x^3+3(m-2)x^2-x+2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là?

**A.** $9$. **B.** $6$. **C.** $5$. **D.** $14$.

**Câu 14:** Hỏi có bao nhiêu số nguyên $m$ để hàm số $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

**Xét hàm số nhất biến** $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

– Bước 1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \backslash \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\}$.

– Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x) = \dfrac{a.d - b.c}{(cx+d)^2}$.

+ Để $f(x)$ đồng biến trên $D \Leftrightarrow y' = f'(x) > 0,\ \forall x \in D \Leftrightarrow a.d - b.c > 0 \Rightarrow m$ ?

+ Để $f(x)$ nghịch biến trên $D \Leftrightarrow y' = f'(x) < 0,\ \forall x \in D \Leftrightarrow a.d - b.c < 0 \Rightarrow m$ ?

★ **Lưu ý**: Đối với hàm phân thức thì không có dấu "=" xảy ra tại vị trí $y'$.

**Câu 15:** Có tất cả bao nhiêu số nguyên $m$ để hàm số $y = \dfrac{(m+1)x - 2}{x - m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

**A.** 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 16:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y = \dfrac{x + m^2}{x + 4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

**A.** $5$. **B.** $3$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Câu 17:** Tìm tất cả giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = \dfrac{x + 2 - m}{x + 1}$ nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định?

**A.** $m \le 1$. **B.** $m \le -3$. **C.** $m < -3$. **D.** $m < 1$.

**Câu 18:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = \dfrac{mx - 4}{x - m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

**A.** $\left[\begin{array}{l} m \le -2 \\ m \ge 2 \end{array}\right.$. **B.** $-2 < m < 2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$. **D.** $-2 \le m \le 2$.

**Câu 19:** Tìm tất cả các giá trị thực của $m$ để hàm số $y = \dfrac{mx - 2}{2x - m}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định

**A.** $\left[\begin{array}{l} m \le -2 \\ m \ge 2 \end{array}\right.$. **B.** $-2 < m < 2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$. **D.** $-2 \le m \le 2$.

## DẠNG 2. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ NHẤT BIẾN ĐƠN ĐIỆU TRÊN KHOẢNG CHO TRƯỚC

**Câu 20:** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y = \dfrac{mx - 4}{x - m}$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

**A.** $(-2; 1]$. **B.** $(-2; 2)$. **C.** $(-2; -1]$. **D.** $(-2; -1)$.

**Câu 21:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = \dfrac{mx - 1}{m - 4x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \dfrac{1}{4}\right)$.

**A.** $m > 2$. **B.** $1 \le m < 2$. **C.** $-2 < m < 2$. **D.** $-2 \le m \le 2$.

**Câu 22:** Cho hàm số $y=\dfrac{mx-2m+3}{x+m}$ với $m$ là tham số. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của $m$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$. Tìm số phần tử của $S$.

**A.** $5$. **B.** $3$. **C.** $4$. **D.** $1$.

**Câu 23:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+18}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$?

**A.** Vô số. **B.** $0$. **C.** $3$. **D.** $5$.

**Câu 24:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{mx+9}{4x+m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;4\right)$?

**A.** $5$. **B.** $11$. **C.** $6$. **D.** $7$.

**Câu 25:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho hàm số $y=\dfrac{-mx+3m+4}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$

**A.** $-1<m<4$. **B.** $-1<m\le 1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>4 \end{array}\right.$. **D.** $1\le m<4$.

**Câu 26:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left(-2020;2020\right)$ sao cho hàm số $y=\dfrac{3x+18}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-3\right)$?

**A.** $2020$. **B.** $2026$. **C.** $2018$. **D.** $2023$.

**Câu 27:** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+4}{2x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-3;4\right)$.

**A.** Vô số. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Câu 28:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$?

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $5$.

**DẠNG 3. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ BẬC 3 ĐƠN ĐIỆU TRÊN KHOẢNG CHO TRƯỚC**

**Câu 29:** Cho hàm số $y=x^3+3x^2-mx-4$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;0\right)$ là

**A.** $\left(-1;5\right)$. **B.** $\left(-\infty;-3\right]$. **C.** $\left(-\infty;-4\right]$. **D.** $\left(-1;+\infty\right)$.

**Câu 30:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{mx^3}{3}+7mx^2+14x-m+2$ giảm trên nửa khoảng $[1;+\infty)$?

**A.** $\left(-\infty;-\dfrac{14}{15}\right]$. **B.** $\left[-2;-\dfrac{14}{15}\right]$. **C.** $\left[-\dfrac{14}{15};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{14}{15}\right)$.

**Câu 31:** Xác định các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=x^3-3mx^2-m$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;1\right)$?

**A.** $m \geq 0$. **B.** $m < \frac{1}{2}$. **C.** $m \leq 0$. **D.** $m \geq \frac{1}{2}$.

**Câu 32:** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

**A.** $m \leq 0$. **B.** $m \geq -2$. **C.** $m \leq -3$. **D.** $m \leq -1$.

**Câu 33:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

**A.** $-1 < m < \frac{1}{3}$. **B.** $m > \frac{1}{3}$.

**C.** $m < -1$. **D.** $m \geq \frac{1}{3}$ hoặc $m \leq -1$.

**Câu 34:** Tìm các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - m + 2$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$..

**A.** $m = 0$. **B.** $m > 1$. **C.** $m \leq -\frac{1}{2}$. **D.** $m < -\frac{1}{2}$.

**Câu 35:** Tìm tất cả các giá trị $m$ để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2$ tăng trên khoảng $(1; +\infty)$.

**A.** $m < 3$. **B.** $m \geq 3$. **C.** $m \neq 3$. **D.** $m \leq 3$.

**Câu 36:** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$ là:

**A.** $(-\infty;3)$. **B.** $(-\infty;3]$. **C.** $[3;6]$. **D.** $(-\infty;6]$.

**Câu 37:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

**A.** $m \geq 12$. **B.** $m \leq 12$. **C.** $m \geq 0$. **D.** $m \leq 0$.

**Câu 38:** Tìm $m$ để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx + m - 1$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

**A.** $m \leq -1$. **B.** $m \leq 1$. **C.** $m < 1$. **D.** $m > -1$.

**Câu 39:** Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Số phần tử của $S$ bằng

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

**Câu 40:** . Tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$ là:

**A.** $(-\infty;6]$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(-\infty;3]$. **D.** $[3;6]$.

**Câu 41:** Có bao nhiêu số nguyên $m$ để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + \frac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

**A.** 9. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 5.

**Câu 42:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m-9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

**A.** $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right]$. **B.** $\left[-\frac{3}{4};+\infty\right)$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0]$.

**Câu 43:** Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}-(m-1)x^2+3(m-1)x+1$. Số các giá trị nguyên của $m$ để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ là

**A.** 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

**Câu 44:** Số giá trị nguyên thuộc khoảng $(-2020;2020)$ của tham số $m$ để hàm số $y=x^3-3x^2-mx+2019$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ là

**A.** $2018$. **B.** $2019$. **C.** $2020$. **D.** $2017$.

**Câu 45:** Cho hàm số $f(x)=x^3-(m+1)x^2-(2m^2-3m+2)x+2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $4$. **D.** $5$.

**Câu 46:** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc $(-2020;2020)$ sao cho hàm số $y=2x^3+mx^2+2x$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$. Tính số phần tử của tập hợp $S$.

**A.** $2025$. **B.** $2016$. **C.** $2024$. **D.** $2023$.

**Câu 47:** Với mọi giá trị $m\ge a\sqrt{b}$, $(a,b\in\mathbb{Z})$ thì hàm số $y=2x^3-mx^2+2x+5$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$. Khi đó $a-b$ bằng

**A.** $1$. **B.** $-2$. **C.** $3$. **D.** $-5$.

**DẠNG 4. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ KHÁC ĐƠN ĐIỆU TRÊN KHOẢNG CHO TRƯỚC**

**Câu 48:** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $f(x)=\frac{1}{5}m^2x^5-\frac{1}{3}mx^3+10x^2-(m^2-m-20)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc $S$ bằng

**A.** $\frac{5}{2}$. **B.** $-2$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

**Câu 49:** Tập hợp các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=x+1+\frac{m}{x-2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó là

**A.** $[0;1)$. **B.** $(-\infty;0]$. **C.** $[0;+\infty)\setminus\{1\}$. **D.** $(-\infty;0)$.

**Câu 50:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để hàm số $y=\frac{\cos x-3}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

**A.** $\left[\begin{array}{l}0\le m<3\\ m\le -1\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}0<m<3\\ m<-1\end{array}\right.$. **C.** $m\le 3$. **D.** $m<3$.

**Câu 51:** Cho hàm số $y=\frac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên $(-8;5)$?

**A.** $14$. **B.** $13$. **C.** $12$. **D.** $15$.

**Câu 52:** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m$ để hàm số $y=\frac{1}{4}x^4+mx-\frac{3}{2x}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $0$.

**Câu 53:** Tìm $m$ để hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

**A.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 2 \\ m\le -2 \end{array}\right.$ **B.** $m>2$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ 1\le m<2 \end{array}\right.$ **D.** $-1<m<1$

**Câu 54:** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{3}{4}x^4-\dfrac{9}{2}x^2+(2m+15)x-3m+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

**Câu 55:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=3x+\dfrac{m^2+3m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

**A.** $4$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $3$.

**Câu 56:** Tìm m để hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

**A.** $m>2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ 1\le m<2 \end{array}\right.$. **C.** $m<2$. **D.** $m\le 2$.

**Câu 57:** Có bao nhiêu số nguyên âm $m$ để hàm số $y=\dfrac{1}{3}\cos^3 x-4\cot x-(m+1)\cos x$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$?

**A.** $5$. **B.** $2$. **C.** vô số. **D.** $3$.

**Câu 58:** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của $m$ để hàm số $y=x+5+\dfrac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $[5;+\infty)$?

**A.** $10$. **B.** $8$. **C.** $9$. **D.** $11$.

**Câu 59:** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{3}{4}x^4-(m-1)x^2-\dfrac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

**Câu 60:** Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=m^2x^4-2(4m-1)x^2+1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

**A.** $15$. **B.** $6$. **C.** $7$. **D.** $16$.

**Câu 61:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2018;2018]$ để hàm số $y=\sqrt{x^2+1}-mx-1$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

**A.** $2017$. **B.** $2019$. **C.** $2020$. **D.** $2018$.

**Câu 62:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+m}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ và đồng biến trên khoảng $(4;6)$.

**A.** $6$. **B.** $7$. **C.** $5$. **D.** $4$.

**Câu 63:** Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x)=m(2020+x-2\cos x)+\sin x-x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** Vô số. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

**Câu 64:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để hàm số $y=\left|x^3-mx^2+12x+2m\right|$ luôn đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

**A.** $18$. **B.** $19$. **C.** $21$. **D.** $20$.

**Câu 65:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc khoảng $(-8;8)$ sao cho hàm số $y=\left|-2x^3+3mx-2\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

**A.** 10. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 11.

**Câu 66:** Gọi $T$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$. Tổng giá trị các phần tử của $T$ bằng

**A.** $9$. **B.** $45$. **C.** $55$. **D.** $36$.

**Câu 67:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của $m$ để hàm số $y=\dfrac{m-\sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$.

**A.** $m\geq 1$. **B.** $m\leq 2$. **C.** $m\leq \dfrac{5}{4}$. **D.** $m\leq 0$.

**Câu 68:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=3x^2+6x+4, \forall x\in\mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $(-2020;2020)$ của tham số $m$ để hàm số $g(x)=f(x)-(2m+4)x-5$ nghịch biến trên $(0;2)$?

**A.** $2008$. **B.** $2007$. **C.** $2018$. **D.** $2019$.

**Câu 69:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc đoạn $[-10;10]$ sao cho hàm số $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{mx^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+mx+2020$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$?

**A.** 12. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 10.

**Câu 70:** Có bao nhiêu số nguyên $m$ để hàm số $f(x)=m(2020+x-2\cos x)+\sin x-x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ ?

**A.** Vô số. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $0$.

CHƯƠNG I

# ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

## BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

## III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM. (MỨC ĐỘ 7 – 8)

### DẠNG 1. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU TRÊN CÁC KHOẢNG XÁC ĐỊNH CỦA NÓ

**Xét hàm số bậc ba** $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

– Bước 1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

– Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

+ Để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x) \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)} = 3a > 0 \\ \Delta_{f'(x)} = 4b^2 - 12ac \le 0 \end{cases} \Rightarrow m\ ?$

+ Để $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x) \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)} = 3a < 0 \\ \Delta_{f'(x)} = 4b^2 - 12ac \le 0 \end{cases} \Rightarrow m\ ?$

**Lưu ý**: Dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.

• Để $f(x) \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$. • $f(x) \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$.

**Câu 1:** Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m+2)x + 1$. Tìm tất cả giá trị của $m$ để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** $\left[\begin{array}{l} m \ge -1 \\ m \le -2 \end{array}\right.$. **B.** $-2 \le m \le -1$. **C.** $-2 < m < -1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m > -1 \\ m < -2 \end{array}\right.$.

**Lời giải**

**Chọn B**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$, $y' = -x^2 + 2mx + 3m + 2$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \le 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = m^2 + 3m + 2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le m \le -1$.

**Câu 2:** Tìm $m$ để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1) + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** Không có giá trị $m$ thỏa mãn. **B.** $m \ne 1$.

**C.** $m = 1$. **D.** Luôn thỏa mãn với mọi $m$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$y' = 3x^2 - 6mx + 3(2m-1)$

Ta có: $\Delta' = (-3m)^2 - 3.3.(2m-1)$. Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $\Delta' \le 0$

$\Leftrightarrow 9m^2 - 18m + 9 < 0 \Leftrightarrow 9(m^2 - 2m + 1) \le 0 \Leftrightarrow 9(m-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow m = 1$.

**Câu 3:** Tìm điều kiện của tham số thực $m$ để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(m+1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** $m \ge 2$. **B.** $m < 2$. **C.** $m < 0$. **D.** $m \ge 0$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 3(m+1)$

$YCBT \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = -9m \le 0 \Leftrightarrow m \ge 0$.

**Câu 4:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực $m$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x - m$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

**A.** $[-2; 2]$. **B.** $(-\infty; 2)$. **C.** $(-\infty; -2]$. **D.** $[2; +\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $y' = x^2 + 2mx + 4$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0, \forall x \in (-\infty; +\infty)$.

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4 \le 0 \Leftrightarrow -2 \le m \le 2$.

**Câu 5:** Giá trị của $m$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m+3)x - 5 + m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là.

**A.** $-\frac{3}{4} \le m \le 1$. **B.** $m \le -\frac{3}{4}$. **C.** $-\frac{3}{4} < m < 1$. **D.** $m \ge 1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = x^2 - 4mx + (m+3)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4mx + (m+3) = 0$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$, đẳng thức chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm $\Leftrightarrow \Delta' \le 0 \Leftrightarrow (-2m)^2 - 1.(m+3) \le 0 \Leftrightarrow 4m^2 - m - 3 \le 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \le m \le 1$.

Vậy $-\dfrac{3}{4} \le m \le 1$.

**Câu 6:** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y = x^3 + (m+1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

**A.** $[-4;2]$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $(-\infty;-4] \cup [2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-4) \cup (2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 + 2(m+1)x + 3$.

Hàm số $y = x^3 + (m+1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - 9 \le 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 8 \le 0 \Leftrightarrow -4 \le m \le 2.$

Vậy $m \in [-4;2]$.

***Nếu hệ số $a$ chứa tham số thì phải xét trường hợp $a = 0$ và $a \ne 0$***

**Câu 7:** Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số hàm số $y = \dfrac{1}{3}(m^2 - m)x^3 + 2mx^2 + 3x - 2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

**A.** $4$. **B.** $5$. **C.** $3$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$y' = (m^2 - m)x^2 + 4mx + 3$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow y' \ge 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

+ Với $m = 0$ ta có $y' = 3 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

+ Với $m = 1$ ta có $y' = 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{3}{4}$ $\Rightarrow m = 1$ không thảo mãn.

+ Với $\begin{cases} m \ne 1 \\ m \ne 0 \end{cases}$ ta có $y' \ge 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ \Delta' = m^2 + 3m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < 0 \end{array}\right. \\ -3 \le m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le m < 0$.

Tổng hợp các trường hợp ta được $-3 \le m \le 0$.

$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0\}$.

Vậy có $4$ giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn bài ra.

**Câu 8:** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực $m$ để hàm số $y = mx^3 + mx^2 + m(m-1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** $m \le \frac{4}{3}$ và $m \ne 0$. **B.** $m = 0$ hoặc $m \ge \frac{4}{3}$.

**C.** $m \ge \frac{4}{3}$. **D.** $m \le \frac{4}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**TH1:** $m = 0 \Rightarrow y = 2$ là hàm hằng nên loại $m = 0$.

**TH2:** $m \ne 0$. Ta có: $y' = 3mx^2 + 2mx + m(m-1)$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) \ge 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - 3m^2(m-1) \le 0 \\ 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2(4-3m) \le 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge \frac{4}{3} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge \frac{4}{3}$$

**Câu 9:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2mx^2 + (3m+5)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $y' = mx^2 - 4mx + 3m + 5$.

Với $a = 0 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow y' = 5 > 0$. Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $a \ne 0 \Leftrightarrow m \ne 0$. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ (2m)^2 - m(3m+5) \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 5m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 0 \le m \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \le 5.$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1;2;3;4;5\}$.

**Câu 10:** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** $1 < m \le 2$. **B.** $1 < m < 2$. **C.** $1 \le m \le 2$. **D.** $1 \le m < 2$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $y' = 3(m-1)x^2 - 6(m-1)x + 3$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1=0 \\ \begin{cases} m-1>0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ \begin{cases} m>1 \\ 9(m-1)^2-9(m-1)\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ \begin{cases} m>1 \\ 1\le m\le 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 1\le m\le 2.$$

**Câu 11:** Số giá trị nguyên của $m$ để hàm số $y=(4-m^2)x^3+(m-2)x^2+x+m-1$ $(1)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ bằng.

**A.** $5$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $4$.

**Lời giải**

TH1: $4-m^2=0 \Leftrightarrow m=\pm 2$.

$m=2$: $(1)\Leftrightarrow y=x+1 \Rightarrow$ hàm số luôn tăng trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow m=2$ .

$m=-2$: $(1)\Leftrightarrow y=-4x^2+x-3$ là hàm số bậc hai nên tăng trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{8}\right)$, giảm trên khoảng $\left(\frac{1}{8};+\infty\right) \Rightarrow m=-2$ .

TH2: $4-m^2\ne 0$.

$y'=3\left(4-m^2\right)x^2+2(m-2)x+1$. $\Delta'=(m-2)^2-3\left(4-m^2\right)=4m^2-4m-8$.

hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y'\ge 0\,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-m^2>0 \\ 4m^2-4m-8\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\in(-2;2) \\ m\in[-1;2] \end{cases} \Leftrightarrow m\in[-1;2)$. $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=-1$; $m=0$; $m=1$.

Vậy có $4$ giá trị nguyên của $m$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 12:** Số các giá trị nguyên của tham số $m$ trong đoạn $[-100;100]$ để hàm số $y=mx^3+mx^2+(m+1)x-3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là:

**A.** $200$. **B.** $99$. **C.** $100$. **D.** $201$.

**Lời giải**

Trường hợp 1: $m=0$. Ta có:

$y=x-3$ có $y'=1>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên hàm số luôn đồng biến trên trên $\mathbb{R}$.

Do đó loại $m=0$.

Trường hợp 2: $m\ne 0$. Ta có: $y'=3mx^2+2mx+m+1$, $\Delta'=-2m^2-3m=m(-2m-3)$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\le 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m(-2m-3)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ -2m-3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -\frac{3}{2}$.

Vì $m$ là số nguyên thuộc đoạn $[-100;100]$ nên $m\in\{-2;-3;...;-99;-100\}$.

Vậy có $99$ giá trị $m$.

**Câu 13:** Tổng bình phương của tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=(3m^2-12)x^3+3(m-2)x^2-x+2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là?

**A.** $9$. **B.** $6$. **C.** $5$. **D.** $14$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=9(m^2-4)x^2+6(m-2)x-1$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y'\le 0 \forall x\in\mathbb{R}$

TH1: $m^2-4=0 \Leftrightarrow m=\pm 2$.

+ Với $m=2$ ta có $y'=-1\le 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $m=2$ thỏa mãn.

+ Với $m=-2$ ta có $y'=-24x-1\le 0 \Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{24}$ nên loại $m=-2$.

TH2: $m^2-4\ne 0 \Leftrightarrow m\ne \pm 2$. Ta có

$y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9(m^2-4)<0 \\ \Delta' =9(m-2)^2+9(m^2-4)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ 0\le m\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0\le m<2 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{0;1\}$

Vậy $m\in\{0;1;2\} \Rightarrow 0^2+1^2+2^2=5$.

**Câu 14:** Hỏi có bao nhiêu số nguyên $m$ để hàm số $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $y'=3(m^2-1)x^2+2(m-1)x-1$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3(m^2-1)x^2+2(m-1)x-1\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

* Trường hợp 1: $m^2-1=0 \Leftrightarrow m=\pm 1$.

+ Với $m=1$, ta được $-1\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$, suy ra $m=1$.

+ Với $m=-1$, ta được $-4x-1\le 0 \Leftrightarrow x\ge \frac{1}{4}$, suy ra $m=-1$ .

* Trường hợp 2: $m^2-1\ne 0 \Leftrightarrow m\ne \pm 1$.

Ta có $\Delta'=(m-1)^2+3(m^2-1)=m^2-2m+1+3m^2-3=4m^2-2m-2$.

Để $y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1<0 \\ 4m^2-2m-2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<1 \\ -\frac{1}{2}\le m\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m<1$.

Tổng hợp lại, ta có tất cả giá trị $m$ cần tìm là $-\frac{1}{2}\le m\le 1$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$, suy ra $m\in\{0;1\}$, nên có 2 giá trị nguyên của tham số $m$ .

**Xét hàm số nhất biến** $y=f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\cdot$

– Bước 1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

– Bước 2. Tính đạo hàm $y'=f'(x)=\frac{a.d-b.c}{(cx+d)^2}\cdot$

+ Để $f(x)$ đồng biến trên $D \Leftrightarrow y'=f'(x)>0,\ \forall x\in D \Leftrightarrow a.d-b.c>0 \Rightarrow m$ ?

+ Để $f(x)$ nghịch biến trên $D \Leftrightarrow y'=f'(x)<0,\ \forall x\in D \Leftrightarrow a.d-b.c<0 \Rightarrow m$ ?

★ **Lưu ý**: Đối với hàm phân thức thì không có dấu "=" xảy ra tại vị trí $y'$.

**Câu 15:** Có tất cả bao nhiêu số nguyên $m$ để hàm số $y=\frac{(m+1)x-2}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

**A.** 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

$y'=\frac{-m^2-m+2}{(x-m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của ta cần tìm $m$ để $y'\ge 0$ trên $(-\infty;m)$ và $(m;+\infty)$ và dấu "=" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm trên các khoảng đó

ĐK: $-m^2-m+2>0 \Leftrightarrow -2<m<1$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=-1,\ 0$.

**Câu 16:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\frac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

**A.** $5$. **B.** $3$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Lời giải**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$, $y'=\frac{4-m^2}{(x+4)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó thì $4-m^2>0 \Leftrightarrow -2<m<2$.
Do đó có $3$ giá trị nguyên của tham số $m$ thỏa mãn.

**Câu 17:** Tìm tất cả giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+2-m}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định?

**A.** $m\le 1$. **B.** $m\le -3$. **C.** $m<-3$. **D.** $m<1$.

**Lời giải**

Với $m=1$ thì hàm số là hàm hằng $(\forall x\ne -1)$ nên không nghịch biến.

Ta có $y'=\dfrac{m-1}{(x+1)^2}, \forall x\ne -1$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng của tập xác định khi và chỉ khi $y'<0,\ x\ne -1 \Leftrightarrow m<1$.

**Câu 18:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{mx-4}{x-m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

**A.** $\left[\begin{array}{l} m\le -2 \\ m\ge 2 \end{array}\right.$. **B.** $-2<m<2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. **D.** $-2\le m\le 2$.

**Lời giải**

Tập xác định $D=(-\infty;m)\cup(m;+\infty)$.

Ta có $y=\dfrac{mx-4}{x-m}\Rightarrow y'=\dfrac{-m^2+4}{(x-m)^2}$. Vì hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó nên $-m^2+4<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$.

**Câu 19:** Tìm tất cả các giá trị thực của $m$ để hàm số $y=\dfrac{mx-2}{2x-m}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định

**A.** $\left[\begin{array}{l} m\le -2 \\ m\ge 2 \end{array}\right.$. **B.** $-2<m<2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. **D.** $-2\le m\le 2$.

**Lời giải**

Ta có: $y'=\dfrac{-m^2+4}{(2x-m)^2}, \forall x\ne \dfrac{m}{2}$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $-m^2+4>0 \Leftrightarrow -2<m<2$.

## DẠNG 2. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ NHẤT BIẾN ĐƠN ĐIỆU TRÊN KHOẢNG CHO TRƯỚC

**Câu 20:** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{mx-4}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$ là

**A.** $(-2;1]$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-2;-1]$. **D.** $(-2;-1)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đạo hàm $y'=\dfrac{-m^2+4}{(x-m)^2}>0,\forall x\neq m$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$ khi $y'>0,\forall x\in(-1;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+4>0\\x-m\neq 0,\forall x\in(-1;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+4>0\\x\neq m,\forall x\in(-1;+\infty)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\m\leq -1\end{cases}\Leftrightarrow -2<m\leq -1$.

**Câu 21:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{mx-1}{m-4x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$.

**A.** $m>2$. **B.** $1\leq m<2$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $-2\leq m\leq 2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{m}{4}\right\}$.

Ta có $y'=\dfrac{m^2-4}{(m-4x)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$ khi và chỉ khi $\begin{cases}m^2-4<0\\\dfrac{m}{4}\notin\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\\dfrac{m}{4}\geq\dfrac{1}{4}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\m\geq 1\end{cases}\Rightarrow 1\leq m<2$.

Vậy $1\leq m<2$.

**Câu 22:** Cho hàm số $y=\dfrac{mx-2m+3}{x+m}$ với $m$ là tham số. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của $m$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Tìm số phần tử của $S$.

**A.** $5$. **B.** $3$. **C.** $4$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện xác định: $x\neq -m$.

Ta có: $y'=\dfrac{m^2+2m-3}{(x+m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$ thì:

$$\begin{cases} y'<0;\forall x\in(2;+\infty) \\ x\neq -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3<0 \\ -m\leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<m<1 \\ m\geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2\leq m<1.$$

Vậy giá trị nguyên của $m$ là $S=\{-2;-1;0\}$.

**Câu 23:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+18}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

**A.** Vô số. **B.** $0$. **C.** $3$. **D.** $5$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện $x\neq -4m$.

Ta có $y=\dfrac{x+18}{x+4m}\Rightarrow y'=\dfrac{4m-18}{(x+4m)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'<0 \\ -4m\notin(2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m-18<0 \\ -4m\leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{9}{2} \\ m\geq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\leq m<\frac{9}{2}.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2;3;4\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+18}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

**Câu 24:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{mx+9}{4x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;4)$?

**A.** $5$. **B.** $11$. **C.** $6$. **D.** $7$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $x\neq -\dfrac{m}{4}$.

Ta có: $y'=\dfrac{m^2-36}{(4x+m)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;4)\Leftrightarrow y'<0,\ \forall x\in(0;4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-36<0 \\ -\dfrac{m}{4}\notin(0;4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6<m<6 \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m}{4}\le 0 \\ -\dfrac{m}{4}\ge 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6<m<6 \\ \left[\begin{array}{l} m\ge 0 \\ m\le -16 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0\le m<6.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0,1,2,3,4,5\}$.

Vậy có $6$ giá trị $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 25:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho hàm số $y=\dfrac{-mx+3m+4}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$

**A.** $-1<m<4$. **B.** $-1<m\le 1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>4 \end{array}\right.$. **D.** $1\le m<4$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$y'=\frac{m^2-3m-4}{(x-m)^2}$$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $y'<0,\forall x\in(1;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m-4<0 \\ m\notin(1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\in(-1;4) \\ m\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<m\le 1.$$

**Câu 26:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-2020;2020)$ sao cho hàm số $y=\dfrac{3x+18}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$?

**A.** $2020$. **B.** $2026$. **C.** $2018$. **D.** $2023$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $x\ne m$ nên $m\notin(-\infty;-3)$

$$y=\frac{3x+18}{x-m}\Rightarrow y'=\frac{-3m-18}{(x-m)^2}$$

Để hàm số $y=\dfrac{3x+18}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ thì $-3m-18<0\Leftrightarrow m>-6$

Vì $m\in(-2020;2020)$ và $m\notin(-\infty;-3)$ nên $m\in[-2;2020]$

Vậy có 2023 giá trị $m$ nguyên thoả mãn.

**Câu 27:** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x+4}{2x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;4)$.

**A.** Vô số. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{m}{2}\right\}$.

Có $y'=-\dfrac{m+8}{(2x-m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên $(-3;4)\Leftrightarrow y'<0\ \forall x\in(-3;4)\Leftrightarrow -\dfrac{m+8}{(2x-m)^2}<0\ \forall x\in(-3;4)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-(m+8)<0\\ \dfrac{m}{2}\notin(-3;4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-8\\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{2}\le -3\\ \dfrac{m}{2}\ge 4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-8<m\le -6\\ m\ge 8\end{array}\right..$$

Do $m$ nguyên âm nên $m\in\{-7;-6\}$, gồm $2$ giá trị thỏa mãn.

**Câu 28:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $5$.

**Lời giải**

**Chọn B**

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

Ta có $y'=\dfrac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}y'<0,\forall x>0\\ -m\notin(0;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4<0\\ -m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\ m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m<2.$$

Vậy số giá trị nguyên của tham số $m$ là $2$.

## DẠNG 3. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ BẬC 3 ĐƠN ĐIỆU TRÊN KHOẢNG CHO TRƯỚC

**Câu 29:** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ là

**A.** $(-1;5)$. **B.** $(-\infty;-3]$. **C.** $(-\infty;-4]$. **D.** $(-1;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $y' = 3x^2 + 6x - m$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ thì $y' \geq 0,\ \forall x \in (-\infty;0)$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x - m \geq 0, \forall x \in (-\infty;0)$

$\Leftrightarrow m \leq 3x^2 + 6x, \forall x \in (-\infty;0)$.

Đặt $g(x) = 3x^2 + 6x$, hàm số $g(x)$ có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $0$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\Leftrightarrow m \leq 3x^2 + 6x, \forall x \in (-\infty;0) \Leftrightarrow m \leq -3$.

**Câu 30:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{mx^3}{3} + 7mx^2 + 14x - m + 2$ giảm trên nửa khoảng $[1;+\infty)$ ?

**A.** $\left(-\infty;-\dfrac{14}{15}\right]$. **B.** $\left[-2;-\dfrac{14}{15}\right]$. **C.** $\left[-\dfrac{14}{15};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{14}{15}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tập xác định $D = \mathbb{R}$, yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$mx^2 + 14mx + 14 \leq 0, \forall x \geq 1$, tương đương với $g(x) = \dfrac{-14}{x^2 + 14x} \geq m$

Dễ dàng có được $g(x)$ là hàm tăng $\forall x \in [1;+\infty)$, suy ra $\min\limits_{x \geq 1} g(x) = g(1) = -\dfrac{14}{15}$

Kết luận: $\Leftrightarrow \min\limits_{x \geq 1} g(x) \geq m \Leftrightarrow -\dfrac{14}{15} \geq m$

**Câu 31:** Xác định các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$?

**A.** $m \geq 0$. **B.** $m < \frac{1}{2}$. **C.** $m \leq 0$. **D.** $m \geq \frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2m \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(0;1) \Leftrightarrow 2m \geq 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$

**Câu 32:** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

**A.** $m \leq 0$. **B.** $m \geq -2$. **C.** $m \leq -3$. **D.** $m \leq -1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 6x - m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$, $\forall x < 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x - m \geq 0$, $\forall x < 0$.

**Cách 1:**

$3x^2 + 6x - m \geq 0$, $\forall x < 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x \geq m$, $\forall x < 0$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 + 6x$ trên khoảng $(-\infty;0)$, ta có:

$f'(x) = 6x + 6$. Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Ta có $f(-1) = -3$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $0$ |

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $m \leq -3$.

**Cách 2:**

Ta có $\Delta' = 9 + 3m$.

Nếu $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -3$ thì $y' \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y' \geq 0 \ \forall x < 0$.

Nếu $\Delta' > 0$ thì $y'$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$. Khi đó để $y' \geq 0 \ \forall x < 0$ thì ta phải có $0 \leq x_1 < x_2$. Điều này không thể xảy ra vì $S = x_1 + x_2 = -2 < 0$.

Vậy $m \le -3$.

**Cách 3:**

Phương án B: Với $m=-3$ ta có $y = x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$. Khi đó $y' = 3(x+1)^2 \ge 0\ \forall x$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$. Vậy B là đáp án đúng.

**Câu 33:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=x^3-3mx^2-9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

**A.** $-1<m<\frac{1}{3}$.  **B.** $m>\frac{1}{3}$.

**C.** $m<-1$.  **D.** $m\ge\frac{1}{3}$ hoặc $m\le -1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y' = 3x^2-6mx-9m^2$; $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6mx-9m^2=0 \Leftrightarrow x^2-2mx-3m^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-m \\ x=3m \end{array}\right.$.

•Nếu $-m=3m \Leftrightarrow m=0$ thì $y'\ge 0;\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số không có khoảng nghịch biến.

•Nếu $-m<3m \Leftrightarrow m>0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-m;3m)$.

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -m\le 0 \\ 3m\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow m\ge\frac{1}{3}$.

Kết hợp với điều kiện ta được $m\ge\frac{1}{3}$.

•Nếu $-m>3m \Leftrightarrow m<0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(3m;-m)$.

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3m\le 0 \\ -m\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow m\le -1$.

Kết hợp với điều kiện ta được $m\le -1$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ khi $m\le -1$ hoặc $m\ge\frac{1}{3}$.

**Câu 34:** Tìm các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x-m+2$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$..

**A.** $m=0$.  **B.** $m>1$.  **C.** $m\le -\frac{1}{2}$.  **D.** $m<-\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2m - 1 \end{array}\right.$.

Nếu $1 \le 2m - 1$ thì ta có biến đổi $y' \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 2m - 1$.

.

Xét $2m - 1 < 1$ ta có biến đổi $y' \le 0 \Leftrightarrow x \in [2m - 1; 1]$.

| $x$ | $-\infty$ | | $2m-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vậy, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$ thì $(-2; 0) \subset [2m - 1; 1]$.

$\Leftrightarrow 2m - 1 \le -2 \Leftrightarrow m \le -\dfrac{1}{2}$..

**Câu 35:** Tìm tất cả các giá trị $m$ để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2$ tăng trên khoảng $(1; +\infty)$.

**A.** $m < 3$. **B.** $m \ge 3$. **C.** $m \ne 3$. **D.** $m \le 3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 6x + m$

YCBT $\Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in (1; +\infty)$.

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m \ge 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow m \ge -3x^2 + 6x, \forall x \in (1; +\infty)$

Xét hàm số: $f(x) = -3x^2 + 6x, \forall x \in (1; +\infty) \Rightarrow f'(x) = -6x + 6 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $f(1) = 3$. Do đó : $m \ge f(x), x \in (1; +\infty) \Rightarrow m \ge 3$.

**Câu 36:** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m - 6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ là:

**A.** $(-\infty; 3)$. **B.** $(-\infty; 3]$. **C.** $[3; 6]$. **D.** $(-\infty; 6]$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$y' = 3x^2 - 2mx - (m - 6)$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ thì: $y' \ge 0$, $\forall x \in (0; 4)$.

tức là $3x^2-2mx-(m-6)\ge 0\ \forall x\in(0;4)\Leftrightarrow \dfrac{3x^2+6}{2x+1}\ge m\,\forall x\in(0;4)$

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{3x^2+6}{2x+1}$ trên $(0;4)$.

$g'(x)=\dfrac{6x^2+6x-12}{(2x+1)^2}$, $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in(0;4) \\ x=-2\notin(0;4)\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $6$ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $\frac{54}{13}$ |

Vậy để $g(x)=\dfrac{3x^2+6}{2x+1}\ge m\ \forall x\in(0;4)$ thì $m\le 3$.

**Câu 37:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho hàm số $y=x^3-6x^2+mx+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

**A.** $m\ge 12$. **B.** $m\le 12$. **C.** $m\ge 0$. **D.** $m\le 0$.

**Lời giải**

**Chọn A**

***Cách 1:*** Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=3x^2-12x+m$

□Trường hợp 1:

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \begin{cases}3>0\ (hn)\\ 36-3m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\ge 12$

□Trường hợp 2: Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2$ thỏa $x_1<x_2\le 0$

□Trường hợp 2.1: $y'=0$ có nghiệm $x=0$ suy ra $m=0$. Nghiệm còn lại của $y'=0$ là $x=4$)

□Trường hợp 2.2: $y'=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2$ thỏa

$x_1<x_2<0\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ S<0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}36-3m>0\\ 4<0(vl)\\ \dfrac{m}{3}>0\end{cases}\Rightarrow$ không có $m$. Vậy $m\ge 12$

***Cách 2:***Hàm số đồng biến trên $\left(0;+\infty\right) \Leftrightarrow m \geq 12x-3x^2 = g(x), \forall x \in (0;+\infty)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $\left(0;+\infty\right)$.

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g$ | $0$ | $\nearrow$ | $12$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**Câu 38:** Tìm $m$ để hàm số $y=-x^3+3x^2+3mx+m-1$ nghịch biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

**A.** $m \leq -1$. **B.** $m \leq 1$. **C.** $m < 1$. **D.** $m > -1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $y' = -3x^2+6x+3m = 3\left(-x^2+2x+m\right)$.

Vì hàm số liên tục trên nửa khoảng $\left[0;+\infty\right)$ nên hàm số nghịch biến trên $\left(0;+\infty\right)$ cũng tương đương hàm số nghịch trên $\left[0;+\infty\right)$ khi chỉ khi $y' \leq 0,\ \forall x \in \left[0,+\infty\right)$.

$\Leftrightarrow -x^2+2x+m \leq 0\ \forall x \in \left[0;+\infty\right) \Leftrightarrow m \leq x^2-2x = f\left(x\right)\ \forall x \in \left[0;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow m \leq \min\limits_{\left[0;+\infty\right)} f\left(x\right) = f\left(1\right) = -1$.

**Câu 39:** Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số $y = x^3-3\left(2m+1\right)x^2+\left(12m+5\right)x+2$ đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$. Số phần tử của $S$ bằng

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $0$.

**Lời giải**

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2-6\left(2m+1\right)x+12m+5$.

Hàm số đồng biến trong khoảng $\left(2;+\infty\right)$ khi $y' \geq 0$, $\forall x \in \left(2;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow 3x^2-6\left(2m+1\right)x+12m+5 \geq 0$, $\forall x \in \left(2;+\infty\right)$.

$3x^2-6\left(2m+1\right)x+12m+5 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{3x^2-6x+5}{12\left(x-1\right)}$

Xét hàm số $g\left(x\right) = \dfrac{3x^2-6x+5}{12\left(x-1\right)}$ với $x \in \left(2;+\infty\right)$.

$g'\left(x\right) = \dfrac{3x^2-6x+1}{12\left(x-1\right)^2} > 0$ với $\forall x \in \left(2;+\infty\right) \Rightarrow$ hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$.

Do đó $m \le g(x), \forall x \in (2;+\infty) \Rightarrow m \le g(2) \Leftrightarrow m \le \dfrac{5}{12}$.

Vậy không có giá trị nguyên dương nào của $m$ thỏa mãn bài toán.

**Câu 40:** . Tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$ là:

**A.** $(-\infty;6]$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(-\infty;3]$. **D.** $[3;6]$.

**Lời giải**

$y' = 3x^2 - 2mx - (m-6)$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;4)$ thì: $y' \ge 0, \forall x \in (0;4)$.

tức là $3x^2 - 2mx - (m-6) \ge 0 \; \forall x \in (0;4) \Leftrightarrow \dfrac{3x^2+6}{2x+1} \ge m \; \forall x \in (0;4)$

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{3x^2+6}{2x+1}$ trên $(0;4)$.

$g'(x) = \dfrac{6x^2+6x-12}{(2x+1)^2}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in (0;4) \\ x = -2 \notin (0;4) \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $6$ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $\dfrac{54}{13}$ |

Vậy để $g(x) = \dfrac{3x^2+6}{2x+1} \ge m \; \forall x \in (0;4)$ thì $m \le 3$.

**Câu 41:** Có bao nhiêu số nguyên $m$ để hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + \dfrac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

**A.** 9. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 5.

**Lời giải.**

**Chọn B**

Ta có $f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$

Hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + \dfrac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $f'(x) \ge 0, \forall x \in (0;+\infty)$.

Xét hàm số $y = f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$ trong 3 trường hợp:

***Trường hợp 1***: $m = 0$

$y = f'(x) = x^2 + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Lúc này hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên cũng đồng biến trên $(0;+\infty)$ $(1)$.

***Trường hợp 2***: $m < 0$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $m$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = f'(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-m^2+m+6$ | $\nearrow$ | $m+6$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m+6 \geq 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \leq m < 0 \ (2).$$

***Trường hợp 3***: $m > 0$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $m$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = f'(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $m+6$ | $\searrow$ | $-m^2+m+6$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+m+6 \geq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 3 \ (3).$$

Từ $(1),(2)$ và $(3)$ suy ra có 10 giá trị nguyên của $m$ để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + \frac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**Câu 42:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m-9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

**A.** $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right]$. **B.** $\left[-\frac{3}{4};+\infty\right)$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0]$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9$.

Ycbt $\Leftrightarrow -3x^2 - 12x + 4m - 9 \leq 0, \ \forall x \in (-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow m \leq \frac{3}{4}(x^2 + 4x + 3), \ \forall x \in (-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow m \le \frac{3}{4}\left[(x+2)^2-1\right],\ \forall x \in (-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow m \le \min\limits_{x\in(-\infty;-1)} \left\{\frac{3}{4}\left[(x+2)^2-1\right]\right\} = -\frac{3}{4}$.

**Câu 43:** Cho hàm số $y=\frac{x^3}{3}-(m-1)x^2+3(m-1)x+1$. Số các giá trị nguyên của $m$ để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ là

**A.** 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $y'=x^2-2(m-1)x+3(m-1)$.

Ycbt $\Leftrightarrow x^2-2(m-1)x+3(m-1)\ge 0,\ \forall x\in(1;+\infty)$

$\Delta' = \left[-(m-1)\right]^2-3(m-1)=m^2-5m+4$.

Trường hợp 1: $\Delta'\le 0 \Leftrightarrow m^2-5m+4\le 0 \Leftrightarrow m\in[1;4]$. Ta được 4 giá trị nguyên của $m$.

Trường hợp 2:

$\Delta'>0 \Leftrightarrow m^2-5m+4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>4 \end{array}\right.$. Khi đó phương trình $x^2-2(m-1)x+3(m-1)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2\le 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1-1)+(x_2-1)<0 \\ (x_1-1)(x_2-1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1+x_2)-2<0 \\ x_1x_2-(x_1+x_2)+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(m-1)-2<0 \\ 3(m-1)-2(m-1)+1\ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 0\le m<2$.

Kết hợp với điều kiện ta được $0\le m<1$. Khi đó có 1 giá trị nguyên của $m$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của $m$.

**Câu 44:** Số giá trị nguyên thuộc khoảng $(-2020;2020)$ của tham số $m$ để hàm số $y=x^3-3x^2-mx+2019$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ là

**A.** 2018. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2017.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $y'=3x^2-6x-m$.

Hàm số đồng biến trên khi $y'\ge 0, \forall x\in(0;+\infty) \Leftrightarrow 3x^2-6x-m\ge 0, \forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2-6x\ge m, \forall x\in(0;+\infty)$ (1)

Xét hàm số $f(x)=3x^2-6x$ trên $(0;+\infty)$

Ta có $f'(x)=6x-6$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$. Do đó $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=f(1)=-3$

$(1)\Leftrightarrow m\le -3$.Kết hợp với giả thiết ta được $m\in(-2020;-3]$. Nên có 2017 số nguyên thỏa mãn

Vậy **Chọn D**

**Câu 45:** Cho hàm số $f(x)=x^3-(m+1)x^2-(2m^2-3m+2)x+2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $4$. **D.** $5$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$f(x)=x^3-(m+1)x^2-(2m^2-3m+2)x+2\Rightarrow f'(x)=3x^2-2(m+1)x-(2m^2-3m+2)$

Nhận xét $2m^2-3m+2>0\ \forall m\in\mathbb{R}$ nên $f'(x)=3x^2-2(m+1)x-(2m^2-3m+2)=0$

luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi $m$

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi $f'(x)\ge 0$ với mọi $x\in(2;+\infty)$

Điều này xảy ra khi $\begin{cases}3.f'(2)\ge 0\\ x_1<x_2<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3.\left[3.4-4(m+1)-(2m^2-3m+2)\right]\ge 0\\ \dfrac{S}{2}<2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2m^2-m+6\ge 0\\ \dfrac{(m+1)}{3}<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le m\le\dfrac{3}{2}\\ m<5\end{cases}\Leftrightarrow -2\le m\le\dfrac{3}{2}$

Do $m$ nguyên nên $m\in\{-2;-1;0;1\}$.

**Câu 46:** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc $(-2020;2020)$ sao cho hàm số $y=2x^3+mx^2+2x$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$. Tính số phần tử của tập hợp $S$.

**A.** $2025$. **B.** $2016$. **C.** $2024$. **D.** $2023$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $y=2x^3+mx^2+2x\Rightarrow y'=6x^2+2mx+2$.

Hàm số đã cho đồng biên trên khoảng $(-2;0)\Leftrightarrow y'=6x^2+2mx+2\ge 0,\forall x\in(-2;0)$

$\Leftrightarrow m\le -3x-\dfrac{1}{x},\forall x\in(-2;0)$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=-3x-\frac{1}{x},\forall x\in\left(-2;0\right)$

$\Rightarrow g'\left(x\right)=-3+\frac{1}{x^2}\Rightarrow g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow -3+\frac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-2$ | | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $\frac{13}{2}$ | $\searrow$ | $-2\sqrt{3}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên suy ra $m\le -2\sqrt{3}$. Mà $m\in\mathbb{Z},m\in\left(-2020;2020\right)$ nên $m\in\left\{-2019;-2018;...;-4\right\}$.

Vậy có 2016 giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc $\left(-2020;2020\right)$ sao cho hàm số $y=2x^3+mx^2+2x$ đồng biến trên khoảng $\left(-2;0\right)$.

**Câu 47:** Với mọi giá trị $m\ge a\sqrt{b}$, $\left(a,b\in\mathbb{Z}\right)$ thì hàm số $y=2x^3-mx^2+2x+5$ đồng biến trên khoảng $\left(-2;0\right)$. Khi đó $a-b$ bằng

**A.** $1$. **B.** $-2$. **C.** $3$. **D.** $-5$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $y'=6x^2-2mx+2$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-2;0\right)$ khi $y'\ge 0,\forall x\in\left(-2;0\right)$

$\Leftrightarrow 3x^2-mx+1\ge 0,\forall x\in\left(-2;0\right)$

$3x^2+1\ge mx\Leftrightarrow 3x+\frac{1}{x}\le m$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=3x+\frac{1}{x}$; $f'\left(x\right)=3-\frac{1}{x^2}=\frac{3x^2-1}{x^2}$; $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\frac{3x^2-1}{x^2}=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bảng biến thiên của hàm số $f\left(x\right)$.

| $x$ | $-2$ | | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $-2\sqrt{3}$ | $\searrow$ | |

Từ bảng biến thiên để $f\left(x\right)\le m$, $\forall x\in\left(-2;0\right)$

thì $\max\limits_{(-2;0)} f(x) \le m \Rightarrow m \ge -2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow a-b=-5$.

## DẠNG 4. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ KHÁC ĐƠN ĐIỆU TRÊN KHOẢNG CHO TRƯỚC

**Câu 48:** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $f(x)=\frac{1}{5}m^2x^5-\frac{1}{3}mx^3+10x^2-\left(m^2-m-20\right)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc $S$ bằng

**A.** $\frac{5}{2}$. **B.** $-2$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

**Lời giải**

Ta có $f'(x)=m^2x^4-mx^2+20x-\left(m^2-m-20\right)=m^2\left(x^4-1\right)-m\left(x^2-1\right)+20(x+1)$

$=m^2(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)-m(x-1)(x+1)+20(x+1)$

$=(x+1)\left[m^2(x-1)\left(x^2+1\right)-m(x-1)+20\right]$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ m^2(x-1)\left(x^2+1\right)-m(x-1)+20=0\,(*) \end{array}\right.$$

Ta có $f'(x)=0$ có một nghiệm đơn là $x=-1$, do đó nếu $(*)$ không nhận $x=-1$ là nghiệm thì $f'(x)$ đổi dấu qua $x=-1$. Do đó để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x)\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$ hay $(*)$ nhận $x=-1$ làm nghiệm .

Suy ra $m^2(-1-1)(1+1)-m(-1-1)+20=0 \Leftrightarrow -4m^2+2m+20=0$.

Tổng các giá trị của $m$ là $\frac{1}{2}$.

**Câu 49:** Tập hợp các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=x+1+\frac{m}{x-2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó là

**A.** $[0;1)$. **B.** $(-\infty;0]$. **C.** $[0;+\infty)\setminus\{1\}$. **D.** $(-\infty;0)$.

**Lời giải**

• Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

$y'\ge 0, \forall x\in D \Leftrightarrow 1-\frac{m}{(x-2)^2}\ge 0, \forall x\in D$

$\Leftrightarrow m\le (x-2)^2, \forall x\in D$

Xét hàm số $f(x)=(x-2)^2$ ta có:

$f'(x)=2x-4 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

Bảng biến thiên:

$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & 2 & & +\infty \\ \hline f'(x) & & - & 0 & + & \\ \hline f(x) & +\infty & \searrow & 0 & \nearrow & +\infty \end{array}$$

Vậy, để hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó thì $m \le 0$.

**Câu 50:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để hàm số $y = \dfrac{\cos x - 3}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$

**A.** $\left[\begin{array}{l} 0 \le m < 3 \\ m \le -1 \end{array}\right.$.  **B.** $\left[\begin{array}{l} 0 < m < 3 \\ m < -1 \end{array}\right.$.  **C.** $m \le 3$.  **D.** $m < 3$.

**Lời giải**

Điều kiện: $\cos x \ne m$. Ta có: $y' = \dfrac{(-m+3)}{(\cos x - m)^2}.(-\sin x) = \dfrac{(m-3)}{(\cos x - m)^2}.\sin x$

Vì $x \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right) \Rightarrow \sin x > 0$, $(\cos x - m)^2 > 0,\ \forall x \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$: $\cos x \ne m$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right) \Leftrightarrow y' < 0\ \forall x \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 < 0 \\ \cos x \ne m\ \ \forall x \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 < 0 \\ m \notin (-1;0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ \left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le m < 3 \\ m \le -1 \end{array}\right..$$

Chú ý : Tập giá trị của hàm số $y = \cos x,\ \forall x \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ là $(-1;0)$.

**Câu 51:** Cho hàm số $y = \dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên $(-8;5)$?

**A.** $14$.  **B.** $13$.  **C.** $12$.  **D.** $15$.

**Lời giải**

Đặt $t = -\sqrt{6-x}$ vì $x \in (-8;5) \Rightarrow t \in \left(-\sqrt{14};-1\right)$ và $t = -\sqrt{6-x}$ đồng biến trên $(-8;5)$.

Hàm số trở thành $y = \dfrac{-(4-m)t+3}{-t+m}$ tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{m\} \Rightarrow y' = \dfrac{m^2-4m+3}{(-t+m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\sqrt{14};-1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 3 > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \le -\sqrt{14} \\ m \ge -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -\sqrt{14} \\ -1 \le m < 1. \\ m > 3 \end{array}\right.$

$\Rightarrow m = \{-9,-8,-7,-6,-5,-4,-1,0,4,5,6,7,8,9\}$ có 14 giá trị.

**Câu 52:** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m$ để hàm số $y=\frac{1}{4}x^4+mx-\frac{3}{2x}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $0$.

**Lời giải**

Tập xác định : $D=\mathbb{R}$. $y'=x^3+m+\frac{3}{2x^2}$.

Ta có: hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0$ với $\forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow x^3+m+\frac{3}{2x^2}\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)$ $\Leftrightarrow x^3+\frac{3}{2x^2}\ge -m,\forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow -m\le \underset{(0;+\infty)}{\text{Min}}\, f(x)$,với $f(x)=x^3+\frac{3}{2x^2}(1)$.

**Cách 1:**

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $f(x)=x^3+\frac{3}{2x^2}=\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2x^2}\ge 5\sqrt[5]{\frac{1}{2^5}}=\frac{5}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=1$. Do đó $\underset{(0;+\infty)}{\text{Min}}\, f(x)=\frac{5}{2}(2)$.

Từ $(1)$ và $(2)$ ta có $-m\le\frac{5}{2}\Leftrightarrow m\ge-\frac{5}{2}$. Do $m$ nguyên âm nên $m=-1$ hoặc $m=-2$.

Vậy có hai giá trị nguyên âm của tham số $m$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

**Cách 2:**

Xét hàm số $f(x)=x^3+\frac{3}{2x^2},\forall x\in(0;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=3x^2-\frac{3}{x^3}, f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $\frac{5}{2}$ | $\nearrow$ | |

Từ bảng biến thiên ta có $-m\le\frac{5}{2}\Leftrightarrow m\ge-\frac{5}{2}$. Do $m$ nguyên âm nên $m=-1$ hoặc $m=-2$.

Vậy có hai giá trị nguyên âm của tham số $m$ thỏa mãn điều kiện bài ra.

**Câu 53:** Tìm $m$ để hàm số $y=\frac{\cos x-2}{\cos x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

**A.** $\left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ m \le -2 \end{array}\right.$ **B.** $m > 2$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ 1 \le m < 2 \end{array}\right.$ **D.** $-1 < m < 1$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $y' = \dfrac{2-m}{(\cos x - m)^2}.(-\sin x), \sin x > 0\, \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Do đó: Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2-m>0 \\ \cos x - m \ne 0\, \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<2 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ 1 \le m < 2 \end{array}\right..$$

**Câu 54:** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số $m$ để hàm số $y = \dfrac{3}{4}x^4 - \dfrac{9}{2}x^2 + (2m+15)x - 3m + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

**Lời giải**

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 3x^3 - 9x + 2m + 15 \ge 0\ \forall x \in (0;+\infty)$ và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm thuộc $(0;+\infty) \Leftrightarrow 3x^3 - 9x + 15 \ge -2m\ \forall x \in (0;+\infty)$.

Xét hàm số: $g(x) = 3x^3 - 9x + 15$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có: $g'(x) = 9x^2 - 9$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1\ (l) \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $g(x)$ | 15 | $\searrow$ | 9 | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ BBT ta có: $-2m \le 9 \Leftrightarrow m \ge -\dfrac{9}{2}$

Vậy $m \in \{-4;-3;-2;-1\}$.

**Câu 55:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y = 3x + \dfrac{m^2+3m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

**A.** $4$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $3$.

**Lời giải**

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$$y=3x+\frac{m^2+3m}{x+1}\Rightarrow y'=\frac{3(x+1)^2-(m^2+3m)}{(x+1)^2}.$$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $y'\ge 0,\ \forall x\ne -1\Leftrightarrow m^2+3m\le 0\Leftrightarrow$ $-3\le m\le 0$.

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-3;-2;-1;0\}$.

Vậy có $4$ giá trị nguyên của $m$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 56:** Tìm m để hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

**A.** $m>2$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m\le 0\\1\le m<2\end{array}\right.$. **C.** $m<2$. **D.** $m\le 2$.

**Lời giải**

Đặt $t=\cos x$.

Ta có: $t'=-\sin x<0,\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$\Rightarrow$ hàm số $t=\cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Do đó hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow$ hàm số $y=\dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Hàm số $y=\dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)\Leftrightarrow y'=\dfrac{2-m}{(t-m)^2}>0,\forall t\in(0;1)$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2-m>0\\ \left[\begin{array}{l}1\le m\\m\le 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\ \left[\begin{array}{l}1\le m\\m\le 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1\le m<2\\m\le 0\end{array}\right..$$

Vậy với $\left[\begin{array}{l}m\le 0\\1\le m<2\end{array}\right.$ thì hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**Câu 57:** Có bao nhiêu số nguyên âm $m$ để hàm số $y=\dfrac{1}{3}\cos^3 x-4\cot x-(m+1)\cos x$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$?

**A.** 5. **B.** 2. **C.** vô số. **D.** 3.

**Lời giải**

- Ta có: $y'=-\cos^2 x.\sin x+\dfrac{4}{\sin^2 x}+(m+1).\sin x=\sin^3 x+\dfrac{4}{\sin^2 x}+m.\sin x$.

- Hàm số đồng biến trên $(0;\pi)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$, $\forall x \in (0;\pi)$

$\Leftrightarrow \sin^3 x + \dfrac{4}{\sin^2 x} + m.\sin x \geq 0$, $\forall x \in (0;\pi)$

$\Leftrightarrow \sin^2 x + \dfrac{4}{\sin^3 x} \geq -m$, $\forall x \in (0;\pi)$ $(1)$.

- Xét hàm số: $g(x) = \sin^2 x + \dfrac{4}{\sin^3 x}$, trên $(0;\pi)$.

Có $g'(x) = 2\sin x.\cos x - \dfrac{12\cos x}{\sin^4 x} = 2\cos x.\left(\sin x - \dfrac{6}{\sin^4 x}\right) = 2\cos x.\dfrac{\sin^5 x - 6}{\sin^4 x}$

$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \in (0;\pi)$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $5$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

- Do đó: $(1) \Leftrightarrow -m \leq \min\limits_{x\in(0;\pi)} g(x) \Leftrightarrow -m \leq 5 \Leftrightarrow m \geq -5$.

Lại do $m$ nguyên âm nên $m \in \{-5;-4;-3;-2;-1\}$. Vậy có 5 số nguyên âm.

**Câu 58:** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của $m$ để hàm số $y = x + 5 + \dfrac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $[5;+\infty)$?

**A.** $10$. **B.** $8$. **C.** $9$. **D.** $11$.

**Lời giải**

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Đạo hàm: $y' = 1 + \dfrac{m-1}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x + m + 3}{(x-2)^2}$.

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$ trên $[5;+\infty)$.

Đạo hàm: $f'(x) = 2x - 4$. Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1$. Ta có: $f(5) = 8$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $8$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Do $(x-2)^2 > 0$ với mọi $x \in [5;+\infty)$ nên $y' \geq 0$, $\forall x \in [5;+\infty)$ khi và chỉ khi $f(x) \geq -m$, $\forall x \in [5;+\infty)$. Dựa vào bảng biến thiên ta có: $-m \leq 8 \Leftrightarrow m \geq -8$.

Mà $m$ nguyên âm nên ta có: $m\in\{-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên âm của $m$ để hàm số $y=x+5+\dfrac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $[5;+\infty)$.

**Câu 59:** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{3}{4}x^4-(m-1)x^2-\dfrac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

**Lời giải**

Ta có $y'=3x^3-2(m-1)x+\dfrac{1}{x^5}$.

Hàm số đồng biến trong khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0$ với $\forall x\in(0;+\infty)$.

$y'\ge 0\Leftrightarrow 2(m-1)\le 3x^2+\dfrac{1}{x^6}$.

Xét $g(x)=3x^2+\dfrac{1}{x^6}$ với $\forall x\in(0;+\infty)$. Ta có $g'(x)=6x-\dfrac{6}{x^7}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$2(m-1)\le g(x)\Leftrightarrow 2(m-1)\le 4\Leftrightarrow m\le 3$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1,2,3\}$.

Vậy có 3 giá trị $m$ nguyên dương thỏa mãn bài toán.

**Câu 60:** Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-10;10)$ để hàm số $y=m^2x^4-2(4m-1)x^2+1$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

**A.** $15$. **B.** $6$. **C.** $7$. **D.** $16$.

**Lời giải**

+ Với $m=0$, hàm số trở thành $y=2x^2+1$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên hàm số cũng đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$, do đó $m=0$ thỏa mãn.

+ Với $m\ne 0$, hàm số đã cho làm hàm số trùng phương với hệ số $a=m^2>0$.

$y'=4m^2x^3-4(4m-1)x=4x\left(m^2x^2-4m+1\right)$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=\dfrac{4m-1}{m^2}\end{array}\right.$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì phương trình $x^2=\dfrac{4m-1}{m^2}$ vô nghiệm hoặc có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ sao cho $-1\le x_1<x_2\le 1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4m-1\le 0 \\ \begin{cases} 4m-1>0 \\ \sqrt{\dfrac{4m-1}{m^2}}\le 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le \dfrac{1}{4} \\ \begin{cases} m>\dfrac{1}{4} \\ -m^2+4m-1\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\le\dfrac{1}{4} \\ \left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{4}<m<2-\sqrt{3} \\ m>2+\sqrt{3}\end{array}\right.\end{array}\right. .$$

Vậy điều kiện để hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ là $m\in\left(-\infty;2-\sqrt{3}\right)\cup\left(2+\sqrt{3};+\infty\right)$.

Vì $m$ nguyên, $m\in(-10;10)$ nên $m\in\{-9;-8;...;0;4;5;...;9\}$, có 16 giá trị.

**Câu 61:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2018;2018]$ để hàm số $y=\sqrt{x^2+1}-mx-1$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

**A.** $2017$. **B.** $2019$. **C.** $2020$. **<u>D</u>.** $2018$.

**Lời giải**

$TXĐ: D=\mathbb{R}$.

$y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-m$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y'\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\le\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $(1)$.

Xét $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ trên $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

$f'(x)=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ |

Ta có: $m\le\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\le -1$.

Mặt khác $m\in[-2018;2018]\Rightarrow m\in[-2018;-1]$.

Vậy có $2018$ số nguyên $m$ thoả điều kiện.

**Câu 62:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{x^2+2x+m}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ và đồng biến trên khoảng $(4;6)$.

**A.** $6$. **B.** $7$. **C.** $5$. **<u>D</u>.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x-2-m}{(x-1)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ và đồng biến trên khoảng $(4;6)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y' \le 0, \forall x \in (1;3) \\ y' \ge 0, \forall x \in (4;6) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 - m \le 0, \forall x \in (1;3) \\ x^2 - 2x - 2 - m \ge 0, \forall x \in (4;6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge x^2 - 2x - 2, \forall x \in (1;3) \\ m \le x^2 - 2x - 2, \forall x \in (4;6) \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 2, g'(x) = 2x - 2$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

| **x** | $-\infty$ | | **1** | **3** | **4** | **6** | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **g'(x)** | | - | **0** | | + | | |
| **g(x)** | $+\infty$ ↘ | | **-3** | **3** | **6** | **18** | ↗ $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta có $(*) \Leftrightarrow 3 \le m \le 6$, và vì $m$ là số nguyên nên chọn $m \in \{3;4;5;6\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn bài toán.

**Câu 63:** Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x) = m(2020 + x - 2\cos x) + \sin x - x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ ?

**A.** Vô số. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:

Hàm số $f(x) = m(2020 + x - 2\cos x) + \sin x - x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$f'(x) \le 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m(2\sin x + 1) + \cos x - 1 \le 0\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2m\sin x + \cos x \le 1 - m\ \ (1);\forall x \in \mathbb{R}$$

Ta lại có:

$$2m\sin x + \cos x \le \sqrt{(4m^2+1)(\sin^2 x + \cos^2 x)} = \sqrt{4m^2+1}$$

$\Rightarrow 2m\sin x + \cos x \le \sqrt{4m^2+1}$. Dấu bằng xảy ra khi $2m\cos x = \sin x$

Do đó

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{4m^2+1} \le 1 - m \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m \ge 0 \\ 4m^2 + 1 \le 1 - 2m + m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 1 \\ 3m^2 + 2m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-2}{3} \le m \le 0$$

**Câu 64:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để hàm số $y=\left|x^3-mx^2+12x+2m\right|$ luôn đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

**A.** $18$. **B.** $19$. **C.** $21$. **D.** $20$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Xét $f(x)=x^3-mx^2+12x+2m$. Ta có $f'(x)=3x^2-2mx+12$ và $f(1)=13+m$.

Để hàm số $y=\left|x^3-mx^2+12x+2m\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì có hai trường hợp sau

**Trường hợp 1:** Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$ và $f(1)\le 0$.

Điều này không xảy ra vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-mx^2+12x+2m\right)=+\infty$.

**Trường hợp 2:** Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ và $f(1)\ge 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x^2-2mx+12\ge 0,\forall x>1\\ 13+m\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le \dfrac{3}{2}x+\dfrac{6}{x},\forall x>1\\ m\ge -13 \qquad (*)\end{cases}.$$

Xét $g(x)=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{6}{x}$ trên khoảng $(1;+\infty)$: $g'(x)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{6}{x^2}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}-\dfrac{6}{x^2}=0\Rightarrow x=2$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $\dfrac{15}{2}$ | $\searrow$ | $6$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên suy ra $m\le \dfrac{3}{2}x+\dfrac{6}{x},\forall x>1 \Leftrightarrow m\le 6$.

Kết hợp $(*)$ suy ra $-13\le m\le 6$. Vì $m$ nguyên nên $m\in\{-13;-12;-11;...;5;6\}$. Vậy có $20$ giá trị nguyên của $m$.

**Câu 65:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc khoảng $(-8;8)$ sao cho hàm số $y=\left|-2x^3+3mx-2\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

**A.** 10. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 11.

**Lời giải**

**Chọn B**

$f(x)=-2x^3+3mx-2$

$f'(x)=-6x^2+3m$

Nếu $m\le 0$: $f'(x)\le 0,\forall x\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=\left|f(x)\right|$ đồng biến trên $(1;+\infty)\Leftrightarrow f(1)\le 0\Leftrightarrow m\le \dfrac{4}{3}\Rightarrow m\le 0$.

Nếu $m>0$: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{m}{2}}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{\frac{m}{2}}$ | | $\sqrt{\frac{m}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-2m\sqrt{\frac{m}{2}}-2$ | $\nearrow$ | $2m\sqrt{\frac{m}{2}}-2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên $(1;+\infty) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m}{2}}>1 \\ f\left(\sqrt{\dfrac{m}{2}}\right)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m}{2}}=1 \\ f\left(\sqrt{\dfrac{m}{2}}\right)\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m}{2}}<1 \\ f(1)\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m}{2}}>1 \\ m=\sqrt[3]{2} \quad (L) \end{cases} \\ \begin{cases} m=2 \quad (L) \\ 2m\sqrt{\dfrac{m}{2}}-2\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m<2 \\ m\le \dfrac{4}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow 0<m\le \dfrac{4}{3}.$

$m\in\mathbb{Z},\ m\in(-8;8)\Rightarrow m\in\{-7;-6;...;-1;0;1\}$.

**Câu 66:** Gọi $T$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$. Tổng giá trị các phần tử của $T$ bằng

**A.** $9$. **B.** $45$. **C.** $55$. **D.** $36$.

**Lời giải**

**Chọn B**

+ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

+ Ta có $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$

Theo đề $m>0$ nên $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt $x=-\sqrt{m}, x=0, x=\sqrt{m}$.

| x | $-\infty$ | | $-\sqrt{m}$ | | $0$ | | $\sqrt{m}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y' | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$ thì $y'\ge 0, \forall x\in(3;+\infty) \Leftrightarrow \sqrt{m}\le 3 \Leftrightarrow m\le 9$

Vì $m$ nguyên dương nên $m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$

Vậy Tổng giá trị các phần tử của $T$ bằng $\frac{9}{2}(1+9)=45$.

**Câu 67:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của $m$ để hàm số $y=\frac{m-\sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$.

**A.** $m\ge 1$. **B.** $m\le 2$. **C.** $m\le \frac{5}{4}$. **D.** $m\le 0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $y'=\frac{-\cos^2 x+2m\sin x-2\sin^2 x}{\cos^3 x}=\frac{-1+2m\sin x-\sin^2 x}{\cos^3 x}$

Để hàm số nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$ thì

$y'\le 0,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow -\sin^2 x+2m\sin x-1\le 0,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$, vì $\cos^3 x>0,\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$ $(1)$

Đặt $\sin x=t, t\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow -t^2+2mt-1\le 0,\forall t\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow m\le\frac{t^2+1}{2t},\forall t\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$ $(2)$

Ta xét hàm $f(t)=\frac{t^2+1}{2t},\forall t\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$

Ta có $f'(t)=\frac{2(t^2-1)}{4t^2}<0,\forall t\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Bảng biến thiên

| $t$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | |
| $f(t)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{5}{4}$ |

Từ bảng biến thiên suy ra $(2)\Leftrightarrow m\le\frac{5}{4}$.

**Câu 68:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + 6x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $(-2020;2020)$ của tham số $m$ để hàm số $g(x) = f(x) - (2m+4)x - 5$ nghịch biến trên $(0;2)$?

**A.** 2008 . **B.** 2007 . **C.** 2018 . **D.** 2019 .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $g'(x) = f'(x) - (2m+4)$.

Hàm số $g(x) = f(x) - (2m+4)x - 5$ nghịch biến trên $(0;2)$ khi $g'(x) \le 0, \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow f'(x) - (2m+4) \le 0, \forall x \in (0;2) \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 4 \le 2m + 4, \forall x \in (0;2)$.

Xét hàm số $h(x) = 3x^2 + 6x + 4 \Rightarrow h'(x) = 6x + 6$. Ta có BBT:

| $x$ | $0$ | | $2$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | |
| $h(x)$ | $4$ | $\nearrow$ | $28$ |

Vậy $2m + 4 \ge 28 \Leftrightarrow m \ge 12$. Vì $m$ nguyên thuộc $(-2020;2020)$ nên có 2008 giá trị thỏa mãn.

**Câu 69:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc đoạn $[-10;10]$ sao cho hàm số $y = \frac{x^4}{4} - \frac{mx^3}{3} - \frac{x^2}{2} + mx + 2020$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$?

**A.** 12. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 10.

**Lời giải.**

**Chọn B**

Ta có $y' = x^3 - mx^2 - x + m$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $y' \le 0, \forall x \in (0;1)$ hay $x^3 - x \le m(x^2 - 1), \forall x \in (0;1)$.

Vì $\forall x \in (0;1) : x^2 - 1 < 0$ nên $x^3 - x \le m(x^2 - 1), \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow m \le x, \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow m \le 0$.

Mặt khác $m \in [-10;10] \cap \mathbb{Z}$ nên có $0 - (-10) = 11$ giá trị của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 70:** Có bao nhiêu số nguyên $m$ để hàm số $f(x) = m(2020 + x - 2\cos x) + \sin x - x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ ?

**A.** Vô số. **B.** 2 . **C.** 1 . **D.** 0 .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $f(x) = \sin x - 2m\cos x + (m-1)x + 2020m$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Cần tìm $m$ nguyên để $f^{/}\left(x\right)=\cos x+2m\sin x+m-1\le 0,\forall x$

$\Leftrightarrow \max\limits_{x\in\mathbb{R}}\left[\cos x+2m\sin x+m-1\right]\le 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+4m^2}+m-1\le 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+4m^2}\le 1-m$

$\Leftrightarrow \begin{cases}1-m\ge 0\\ 1+4m^2\le 1-2m+m^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\le 1\\ -\dfrac{2}{3}\le m\le 0\end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3}\le m\le 0$. Kết hợp $m$ nguyên có $m=0$.

# CHƯƠNG I ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

## BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

### III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM. (MỨC ĐỘ 9 - 10)

**DẠNG 1. TÌM KHOẢNG ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ $g(x)=f[u(x)]$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ HÀM SỐ $f'(x)$**

**Cách 1:**

**Bước 1:** Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x)=u'(x).f'[u(x)]$.

**Bước 2:** Sử dụng đồ thị của $f'(x)$, lập bảng xét dấu của $g'(x)$.

**Bước 3:** Dựa vào bảng dấu kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

**Cách 2:**

**Bước 1:** Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x)=u'(x).f'[u(x)]$.

**Bước 2:** Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x)\geq 0$;

**Bước 3:** Giải bất phương trình $(*)$ từ đó kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

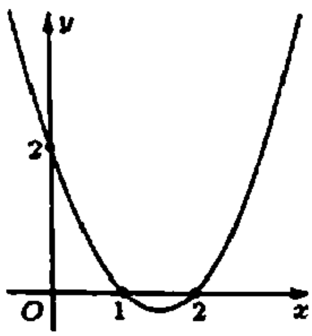
**Câu 1:** Cho hàm số $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

Hàm số $y=f(x^2+2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

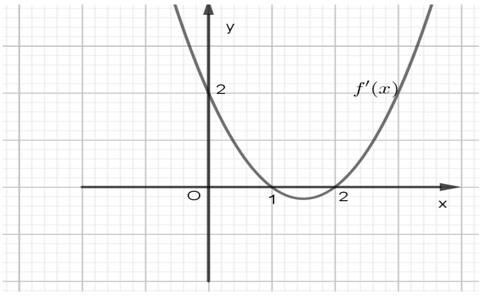
**A.** $(-2;1)$. **B.** $(-4;-3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

**Câu 2:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Hàm số $g(x)=f(x-x^2)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?




**A.** $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

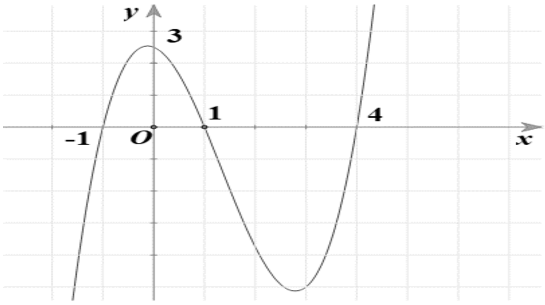
**Câu 3:** Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ




Hàm số $y=f\left(2-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

**A.** $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

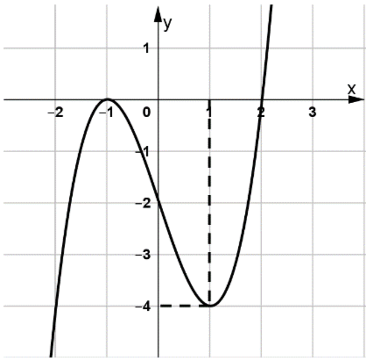
**Câu 4:** Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.




Hàm số $y=f\left(|3-x|\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(4;6)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(2;3)$.

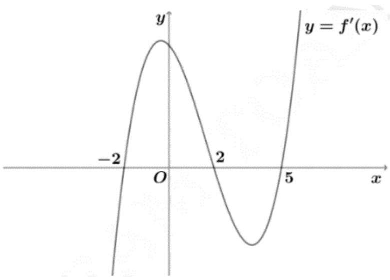
**Câu 5:** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x^2-2)$. Mệnhvđề nào sai?




**A.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ **B.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$

**C.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$ **D.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$

**Câu 6:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên.




Hỏi hàm số $g(x)=f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

**A.** $(-1;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-1)$ **C.** $(1;3)$ **D.** $(0;2)$

**Câu 7:** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $y=f\left(x^2-2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-2;-1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

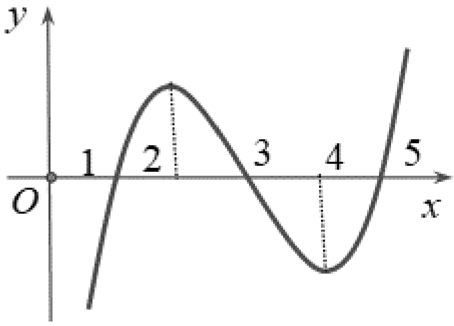
**Câu 8:** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $y=f(2-3x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

**A.** $(2;3)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;3)$.

**Câu 9:** Cho hàm số $y=f(x)$ biết hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(x+1)$. Kết luận nào sau đây đúng?



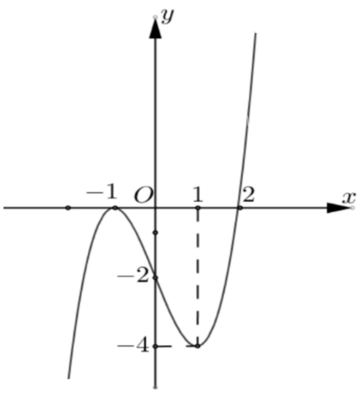

**A.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$.

**B.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

**C.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

**D.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(4;6)$.

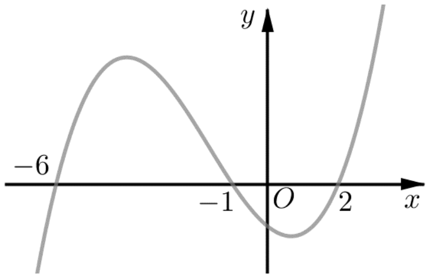
**Câu 10:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?




**A.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$. **B.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

**C.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$. **D.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

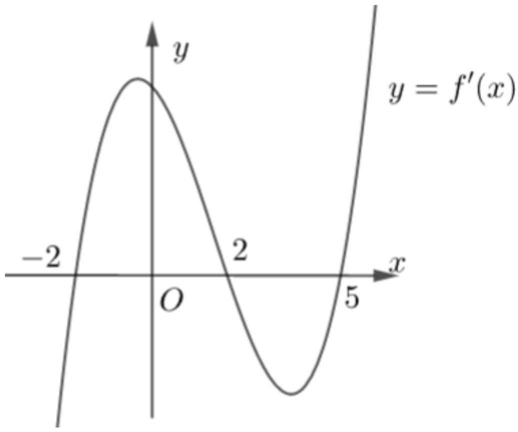
**Câu 11:** Cho hàm số $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.




Hàm số $y=f\left(3-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng

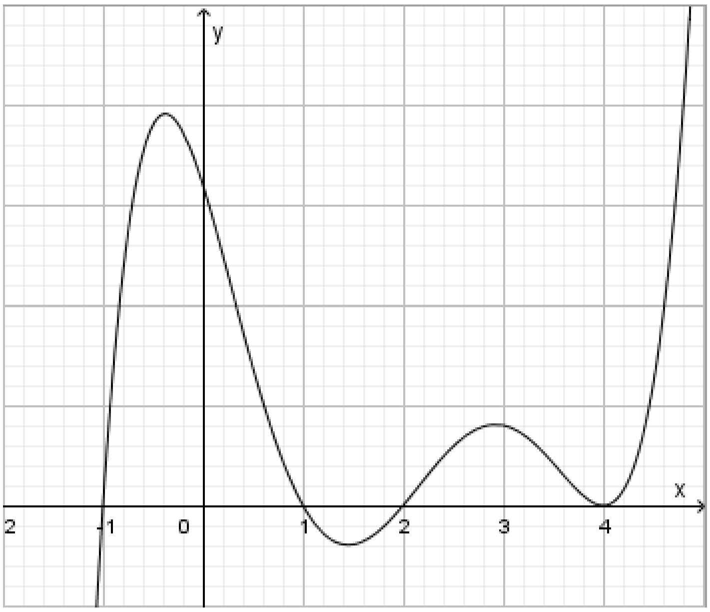
**A.** $(0;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(-2;-1)$.

**Câu 12:** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=f\left(x^2+2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



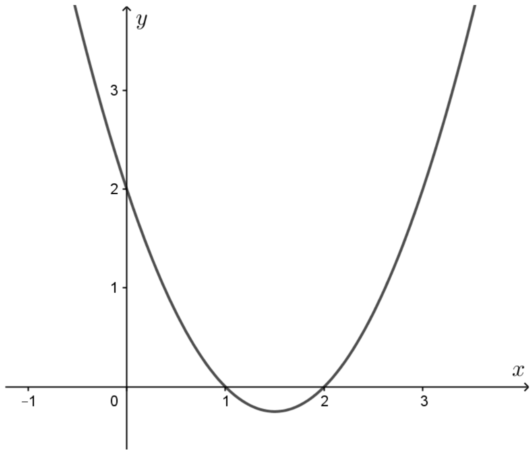

**A.** $(2;3)$. **B.** $(-3;-2)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;0)$.

**Câu 13:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm đạo hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(2019-2020x)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?




**A.** $(-1;0)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

**Câu 14:** Cho hàm số $y = f(x)$. Biết đồ thị hàm số $y' = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên




Hàm số $g(x) = f(2x - 3x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(-2;\frac{1}{2}\right)$.

**DẠNG 2. TÌM KHOẢNG ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ $g(x) = f[u(x)] + v(x)$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $f'(x)$**

**Cách 1:**

**Bước 1:** Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x) = u'(x).f'[u(x)] + v'(x)$.

**Bước 2:** Sử dụng đồ thị của $f'(x)$, lập bảng xét dấu của $g'(x)$.

**Bước 3:** Dựa vào bảng dấu kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

**Cách 2:**

**Bước 1:** Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x) = u'(x).f'[u(x)] + v'(x)$.

**Bước 2:** Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x) \geq 0$;

**Bước 3:** Giải bất phương trình $(*)$ từ đó kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

**Cách 3:**

**Bước 1:** Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x) = u'(x).f'[u(x)] + v'(x)$.

**Bước 3:** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $K$ $\Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in K$;

**Bước 3:** Lần lượt chọn thay giá trị từ các phương án vào $g'(x)$ để loại các phương án **sai**.

**Câu 16:** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Hàm số $y = f(x-1) + x^3 - 12x + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(1;+\infty)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(3;4)$.

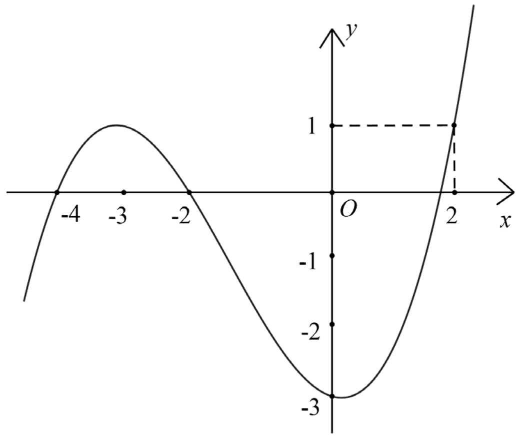
**Câu 17:** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'\left(x\right)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Hàm số $y=2f\left(1-x\right)+\sqrt{x^2+1}-x$ nghịch biến trên những khoảng nào dưới đây

**A.** $\left(-\infty;-2\right)$. **B.** $\left(-\infty;1\right)$. **C.** $\left(-2;0\right)$. **D.** $\left(-3;-2\right)$.

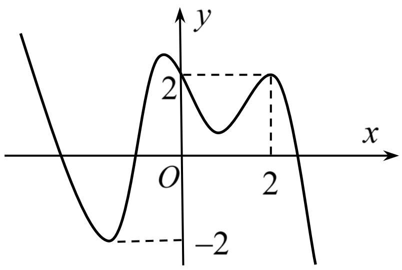
**Câu 18:** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.




Hàm số $y=3f(x)+x^3-6x^2+9x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

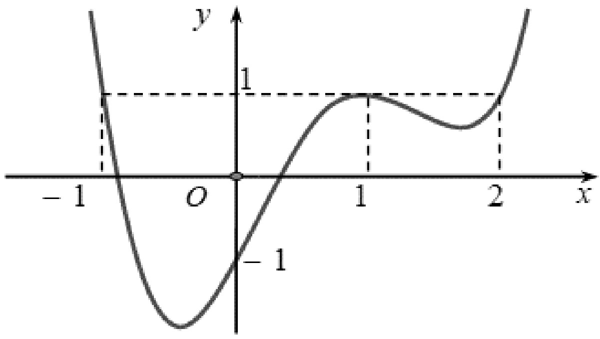
**A.** $\left(0;2\right)$. **B.** $\left(-1;1\right)$. **C.** $\left(1;+\infty\right)$. **D.** $\left(-2;0\right)$.

**Câu 19:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)-2x$ có bao nhiêu điểm cực trị?




**A.** $4$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Câu 20:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x-1\right)+\dfrac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?




**A.** $\left(2\ ;3\right)$. **B.** $\left(0\ ;1\right)$. **C.** $\left(\text{-}1\ ;0\right)$. **D.** $\left(1\ ;2\right)$.

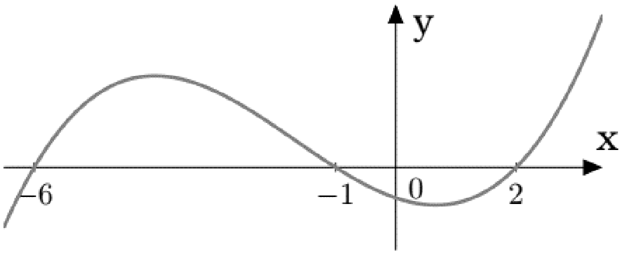
**Câu 21:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $y=-2f(x)+2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

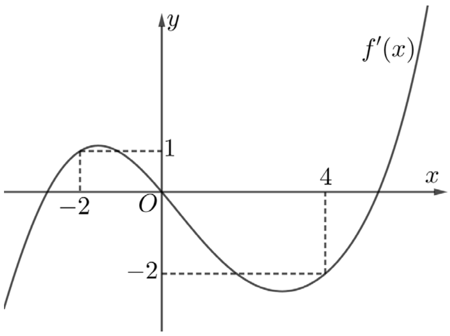
**A.** $(-4;2)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;4)$.

**Câu 22:** Cho hàm số $y=f(x)$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=f(3-x^2)+2018$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?




**A.** $(-1;\ 0)$ **B.** $(2;\ 3)$ **C.** $(-2;\ -1)$ **D.** $(0;\ 1)$

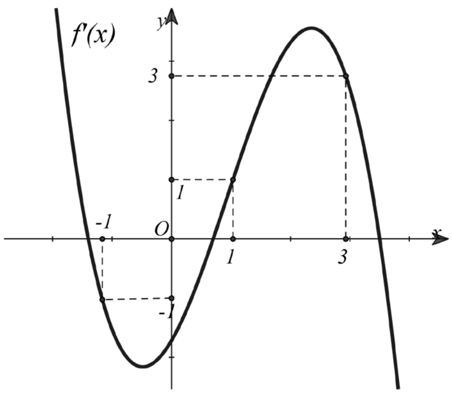
**Câu 23:** Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình sau.




Hàm số $g(x)=\left|4f(x)+x^2\right|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(4;+\infty)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-2;0)$.

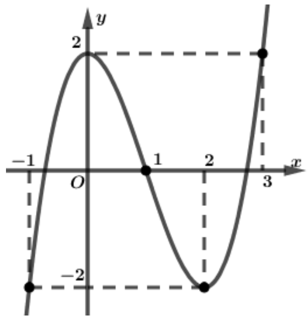
**Câu 24:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho như hình vẽ




Hàm số $g(x)=2f(|x-1|)-x^2+2x+2020$ đồng biến trên khoảng nào?

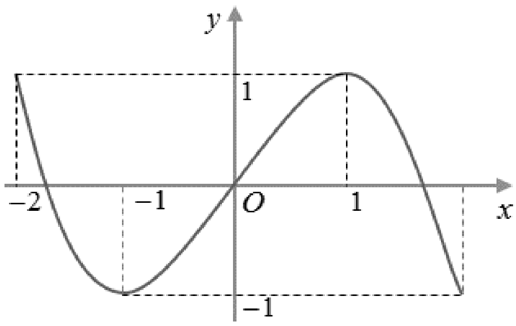
**A.** $(0;1)$. **B.** $(-3;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-2;0)$.

**Câu 25:** Cho hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(3x+1)+9x^3+\dfrac{9}{2}x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?




**A.** $(-1;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(1;+\infty)$.

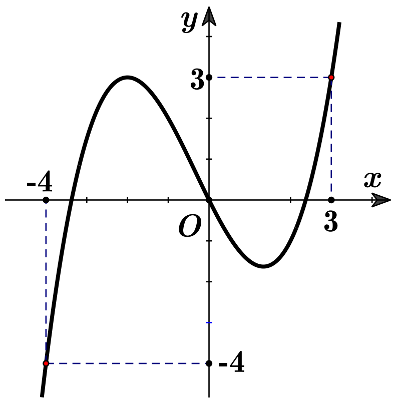
**Câu 26:** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.




Hàm số $y=f(\cos x)+x^2-x$ đồng biến trên khoảng

**A.** $(-2;1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-1;0)$.

**Câu 27:** Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.




Hàm số $g(x)=f(3x^2-1)-\dfrac{9}{2}x^4+3x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

**A.** $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3};\dfrac{-\sqrt{3}}{3}\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

**C.** $(1;2)$. **D.** $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

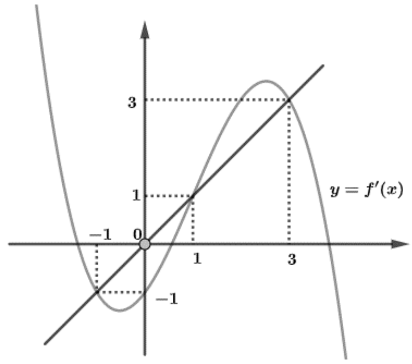
**Câu 28:** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $-1$ | | $2$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Hàm số $y=f(2x+1)+\dfrac{2}{3}x^3-8x+5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-\infty;-2)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;7)$. **D.** $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$.

**Câu 29:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho như hình vẽ.

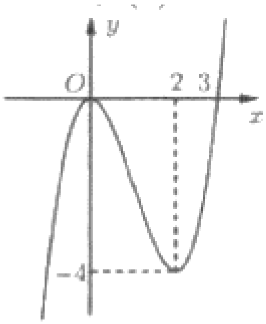



Hàm số $g(x)=2f(|x-1|)-x^2+2x+2020$ đồng biến trên khoảng nào?

**A.** $(0;1)$. **B.** $(-3;1)$.

**C.** $(1;3)$. **D.** $(-2;0)$.

**Câu 30:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ




Hàm số $g(x)=f(1+e^x)+2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(0;+\infty)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(-1;1)$.

**Câu 31:** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $y=-2f(x)+2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

**A.** $(2;4)$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-1;2)$.

**Câu 32:** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x)=(1-x)(x+2)g(x)+2019$ với $g(x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=f(1-x)+2019x+2020$ nghịch biến trên khoảng nào?

**A.** $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

**Câu 33:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | -1 | | 1 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | |

Biết $f(x)>2,\forall x\in\mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x)=f(3-2f(x))-x^3+3x^2-2020$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

**B.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

**C.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$.

**D.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

**Câu 34:** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Hàm số $y=\left(f\left(x\right)\right)^3-3.\left(f\left(x\right)\right)^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(1;2\right)$. **B.** $\left(3;4\right)$. **C.** $\left(-\infty;\ 1\right)$. **D.** $\left(2;\ 3\right)$.

**Câu 35:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị nằm trên trục hoành và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của biểu thức $f'\left(x\right)$ như bảng dưới đây.

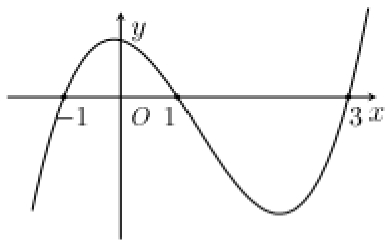
| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x^2-2x\right)}{f\left(x^2-2x\right)+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(-\infty;1\right)$. **B.** $\left(-2;\dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(1;3\right)$. **D.** $\left(2;+\infty\right)$.

## DẠNG 3. BÀI TOÁN HÀM ẨN, HÀM HỢP LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

**Câu 36:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên $m\in\left[-5;5\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(x+m\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;2\right)$. Hỏi $S$ có bao nhiêu phần tử?




**A.** $4$. **B.** $3$. **C.** $6$. **D.** $5$.

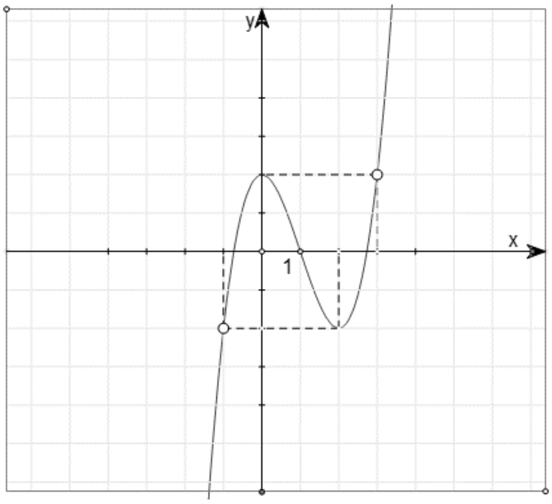
**Câu 37:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-10$ | | $-2$ | | $3$ | | $8$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Có bao nhiêu số nguyên $m$ để hàm số $y=f\left(x^3+4x+m\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$?

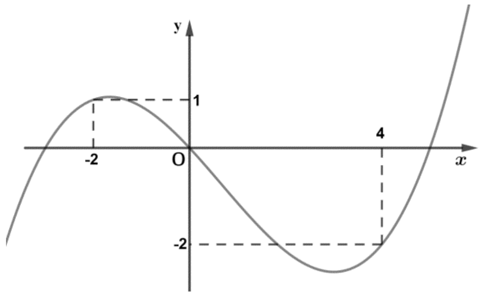
**A.** $3$. **B.** $0$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Câu 38:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Đặt $g\left(x\right)=f\left(x-m\right)-\dfrac{1}{2}\left(x-m-1\right)^2+2019$, với $m$ là tham số thực. Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tổng tất cả các phần tử trong $S$ bằng




**A.** $4$. **B.** $11$. **C.** $14$. **D.** $20$.

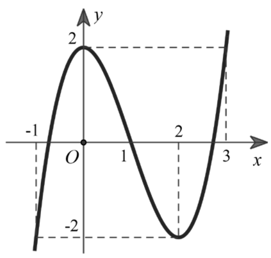
**Câu 39:** Cho hàm số $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,\ a \neq 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ




Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-6;6)$ của tham số $m$ để hàm số $g(x) = f(3 - 2x + m) + x^2 - (m+3)x + 2m^2$ nghịch biến trên $(0;1)$. Khi đó, tổng giá trị các phần tử của S là

**A.** 12. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 15.

**Câu 40:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$, với $m$ là tham số thực. Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tổng tất cả các phần tử trong $S$ bằng:

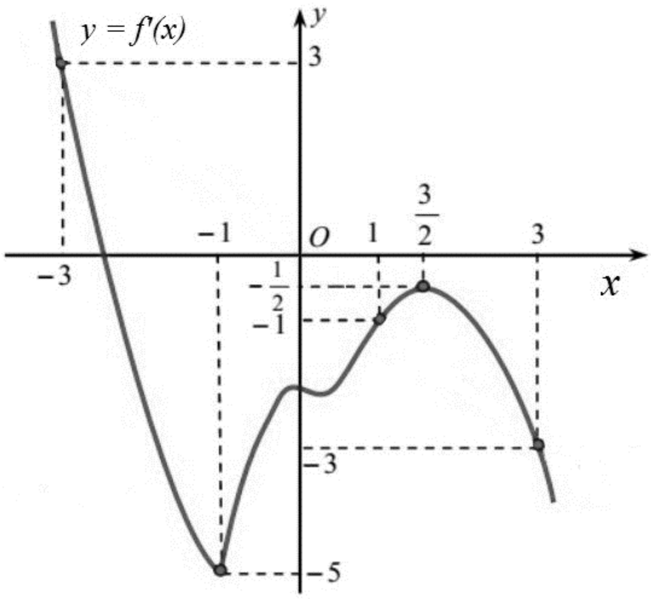



**A.** $4$. **B.** $11$. **C.** $14$. **D.** $20$.

**Câu 41:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2 - 6x + m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m$ thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để hàm số $g(x) = f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

**A.** $2016$. **B.** $2014$. **C.** $2012$. **D.** $2010$.

**Câu 42:** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $R$. Hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.




Xét hàm số $g(x)=f(x-2m)+\frac{1}{2}(2m-x)^2+2020$, với $m$ là tham số thực. Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3;4)$. Hỏi số phần tử của $S$ bằng bao nhiêu?

**A.** $4$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** Vô số.

**Câu 43:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

**A.** $18$. **B.** $17$. **C.** $16$. **D.** $20$.

**Câu 44:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)^2(x^2+2mx+1)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm $m$ để hàm số $g(x)=f(2x+1)$ đồng biến trên khoảng $(3;5)$?

**A.** 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

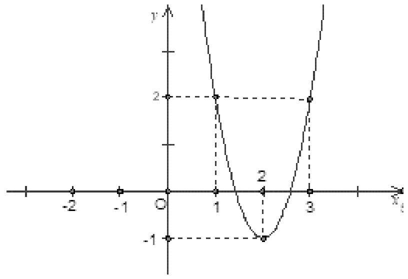
**Câu 45:** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Có bao nhiêu số nguyên $m<2019$ để hàm số $g(x)=f(x^2-2x+m)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

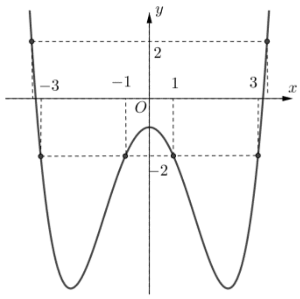
**A.** 2016. **B.** 2015. **C.** 2017. **D.** 2018.

**Câu 46:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?



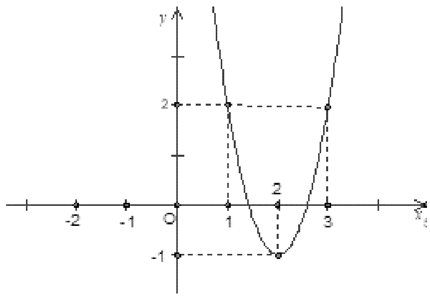

**A.** $(-\infty;3),(5;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1),(1;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(3;5)$.

**Câu 47:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x+2)-2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?




**A.** $(-3;-1),(1;3)$. **B.** $(-1;1),(3;5)$. **C.** $(-\infty;-2),(0;2)$. **D.** $(-5;-3),(-1;1)$.

**Câu 48:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?




**A.** $(-\infty;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

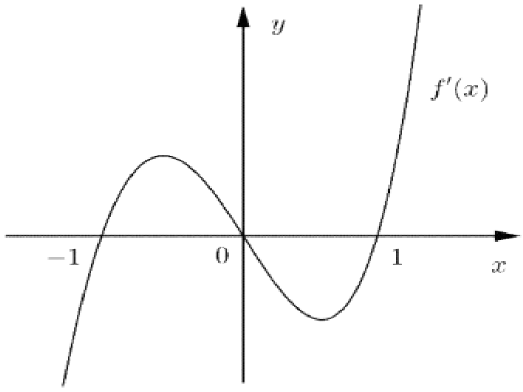
**Câu 49:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 3 liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x).f'''(x)=x(x-1)^2(x+4)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $g(x)=\left[f'(x)\right]^2-2f(x).f''(x)$. Hàm số $h(x)=g\left(x^2-2x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-\infty;1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

**Câu 50:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=g(x)=f'(2x+3)+2$ có đồ thị là một parabol với tọa độ đỉnh $I(2;-1)$ và đi qua điểm $A(1;2)$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(5;9)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;9)$. **D.** $(1;3)$.

**Câu 51:** Cho hàm số $y=f(x)$, hàm số $f'(x)=x^3+ax^2+bx+c\ (a,b,c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ



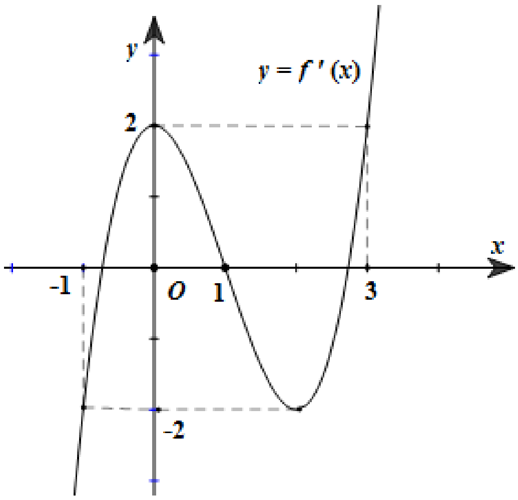

Hàm số $g(x)=f\left(f'(x)\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

**Câu 52:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+2x-3, \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $g(x)=f\left(x^2+3x-m\right)+m^2+1$ đồng biến trên $(0;2)$?

**A.** 16. **B.** 17. **C.** 18. **D.** 19.

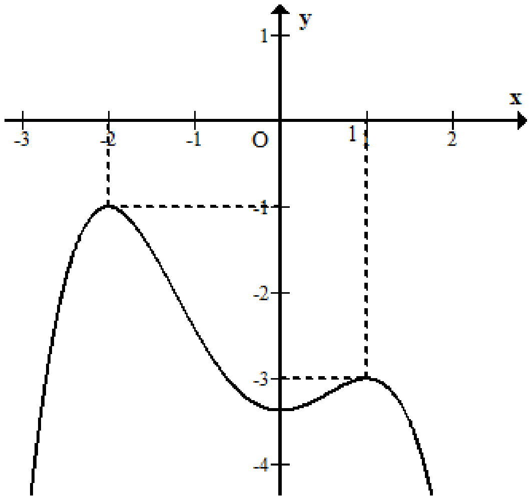
**Câu 53:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.




Đặt $g(x)=f(x-m)-\frac{1}{2}(x-m-1)^2+2019$ với $m$ là tham số thực. Gọi $S$ là tập các giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoản $(5;6)$.Tổng các phần tử của $S$ bằng:

**A.** 4. **B.** 11. **C.** 14. **D.** 20.

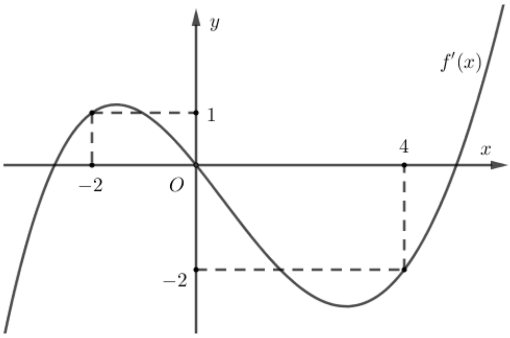
**Câu 54:** Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.




Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$, $m\in Z,-2020<m<2020$ để hàm số $g(x)=f(x^2)+mx^2\left(x^2+\frac{8}{3}x-6\right)$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$

**A.** 2021. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2022.

**Câu 55:** Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau.




Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ đề hàm số $g(x)=4f(x-m)+x^2-2mx+2020$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $0$. **D.** $1$.

**Câu 56:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)(x-1)(x-4)$; $\forall x\in\mathbb{R}$ .Có bao nhiêu số nguyên $m<2020$ để hàm số $g(x)=f\left(\frac{2-x}{1+x}-m\right)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

**A.** $2018$. **B.** $2019$. **C.** $2020$. **D.** $2021$

CHƯƠNG

# I ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

## BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

### III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM. (MỨC ĐỘ 9 - 10)

**DẠNG 1. TÌM KHOẢNG ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ $g(x)=f[u(x)]$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ HÀM SỐ $f'(x)$**

**Cách 1:**

**Bước 1:** Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x)=u'(x).f'[u(x)]$.

**Bước 2:** Sử dụng đồ thị của $f'(x)$, lập bảng xét dấu của $g'(x)$.

**Bước 3:** Dựa vào bảng dấu kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

**Cách 2:**

**Bước 1:** Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x)=u'(x).f'[u(x)]$.

**Bước 2:** Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x)\ge 0$;

**Bước 3:** Giải bất phương trình $(*)$ từ đó kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

**Câu 1:** Cho hàm số $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-2;1)$. **B.** $(-4;-3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

**Lời giải**

Ta có: Đặt: $y=g(x)=f\left(x^2+2x\right)$; $g'(x)=\left[f(x^2+2x)\right]'=(2x+2).f'(x^2+2x)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left(2x+2\right).f'(x^2+2x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+2=0 \\ f'(x^2+2x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x^2+2x=-2(VN) \\ x^2+2x=1 \\ x^2+2x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-1-\sqrt{2} \\ x=-1+\sqrt{2} \\ x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

+ Ta có bảng biến thiên

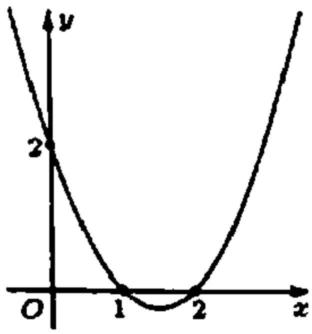
| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1-\sqrt{2}$ | | $-1$ | | $-1+\sqrt{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | ↗ | | ↘ | | ↘ | | ↗ | | ↗ | | ↘ | |

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-2;-1\right)$.

***Chú ý:*** Cách xét dấu $g'(x)$:

Chọn giá trị $x=0\in\left(-1;-1+\sqrt{2}\right)\Rightarrow x^2+2x=0\Rightarrow g'(0)=f'(0)>0$. Suy ra $g'(x)>0\,\forall x\in\left(-1;-1+\sqrt{2}\right)$, sử dụng quy tắc xét dấu đa thức " lẻ đổi, chẵn không" suy ra dấu của $g'(x)$ trên các khoảng còn lại

**Câu 2:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x-x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?




**A.** $\left(-\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

**Lời giải**

**Phương pháp**

Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên $(a;b)\Leftrightarrow g'(x)\le 0\ \forall x\in(a;b)$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

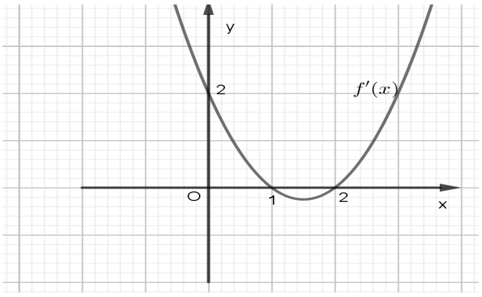
**Cách giải**

Ta có: $g'(x)=(1-2x)f'(x-x^2)$.

Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên $(a;b)\Leftrightarrow g'(x)\le 0\ \forall x\in(a;b)$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

Ta có $g'(-1)=3f'(-2)>0\Rightarrow$ Loại đáp án A, B và D

**Câu 3:** Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ




Hàm số $y=f(2-x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

**A.** $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

**Lời giải**

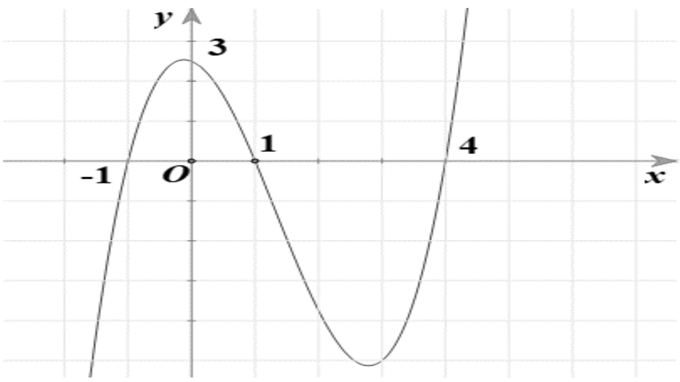
**Chọn B**

Hàm số $y=f(2-x^2)$ có $y'=-2x.f'(2-x^2)$

$$y'=-2x.f'(2-x^2)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\1<2-x^2<2\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ \left[\begin{array}{l}2-x^2<1\\2-x^2>2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\-1<x<1\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ \left[\begin{array}{l}x<-1\\x>1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1\\x<-1\end{array}\right.$$

Do đó hàm số đồng biến trên $(0;1)$.

**Câu 4:** Cho hàm số $f(x)$, đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.




Hàm số $y=f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(4;6)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(2;3)$.

**Lời giải**

**Ta có:**

$$y=f(|3-x|)\Rightarrow f'(|3-x|)=-\frac{(3-x)}{|3-x|}f'(|3-x|)\,(x\neq 3)$$

$$f'(|3-x|)=0\Leftrightarrow -\frac{(3-x)}{|3-x|}f'(|3-x|)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(|3-x|)=0\\ 3-x=0\end{array}\right.$$

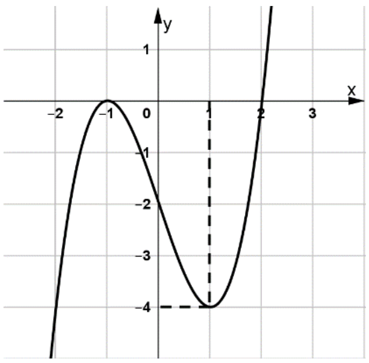
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |3-x|=-1(L)\\ |3-x|=1(N)\\ |3-x|=4(N)\\ x=3(L)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=7\\ x=2\\ x=4\end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu của $f'(|3-x|)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $3$ | | $4$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'\|3-x\|$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Từ bảng xét dấu ta thây hàm số $y=f(|3-x|)$ đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

**Câu 5:** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x^2-2)$. Mệnhvđề nào sai?




**A.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ **B.** Hàm số $g(x)$đồng biến trên $(2;+\infty)$

**C.** Hàm số $g(x)$nghịch biến trên $(-1;0)$ **D.** Hàm số $g(x)$nghịch biến trên $(0;2)$

**Lờigiải**

**ChọnA**

Ta có $g'(x)=2x.f'(x^2-2)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ f(x^2-2)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x^2-2=-1\\ x^2-2=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=\pm 1\\ x=\pm 2\end{array}\right.$

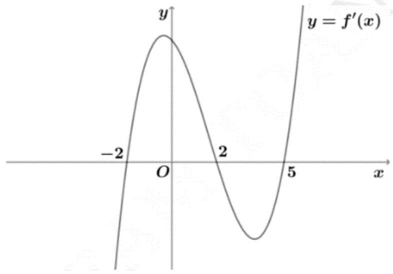
Từ đồ thị $f'(x)$ ta có $f'(x^2-2)>0\Leftrightarrow x^2-2>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2\\ x<-2\end{array}\right.$

BBT

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | | | ↗ | | | | ↘ | | | ↗ | |

Từ BBT ta thấy đáp án **C** sai

**Câu 6:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.




Hỏi hàm số $g(x) = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

**A.** $(-1;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-1)$ **C.** $(1;3)$ **D.** $(0;2)$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \\ x=5 \end{array}\right.$

Khi đó $g'(x) = -2f'(3-2x)$

Với $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-2x=-2 \\ 3-2x=2 \\ 3-2x=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{2} \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=-1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{5}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $g(-1)$ | $\nearrow$ | $g\left(\frac{1}{2}\right)$ | $\searrow$ | $g\left(\frac{5}{2}\right)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Câu 7:** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-2;-1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-1;0)$.

**Lời giải**

Xét hàm số $g(x) = f(x^2-2)$. Ta có: $g'(x) = 2x.f'(x^2-2)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-2=-1 \\ x^2-2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=1 \\ x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\right. .$$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x$ | | $-$ | \| | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| $f'(x^2-2)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | \|\| | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dựa vào bảng xét dấu $g'(x)$ ta thấy hàm số $y = f(x^2-2)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

**Câu 8:** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau.

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $y = f(2-3x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

**A.** $(2;3)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;3)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $g(x) = f(2-3x) \Rightarrow g'(x) = -3.f'(2-3x)$

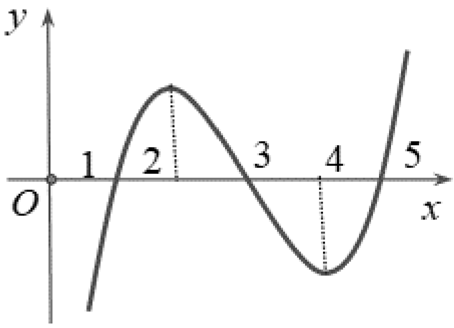
Ta có $g'(x)\ge 0 \Leftrightarrow f'(2-3x)\le 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-3x\le -3 \\ 0\le 2-3x\le 1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{1}{3}\le x\le \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ và $\left(\dfrac{5}{3};+\infty\right)$, do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

**Câu 9:** Cho hàm số $y=f(x)$ biết hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(x+1)$. Kết luận nào sau đây đúng?




**A.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$.

**B.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

**C.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

**D.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(4;6)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$g(x)=f(x+1)$.

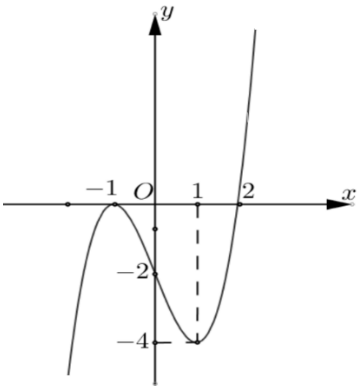
Ta có: $g'(x)=f'(x+1)$

Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x)>0 \Leftrightarrow f'(x+1)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1>5 \\ 1<x+1<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ 0<x<2 \end{array}\right.$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(x+1)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3<x+1<5 \\ x+1<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<x<4 \\ x<0 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$; $(4;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(2;4)$; $(-\infty;0)$.

**Câu 10:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?




**A.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$.

**B.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

**C.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$.

**D.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $g'(x)=\left(x^2-2\right)'.f'\left(x^2-2\right)=2x.f'\left(x^2-2\right)$.

Hàm số nghịch biến khi $g'(x)\le 0 \Leftrightarrow x.f'\left(x^2-2\right)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 0\\ f'\left(x^2-2\right)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0\\ f'\left(x^2-2\right)\le 0\end{cases}\end{array}\right.$

Từ đồ thị hình của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ, ta thấy

$$f'(x)\le 0 \Leftrightarrow x\le 2 \text{ và } f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 2.$$

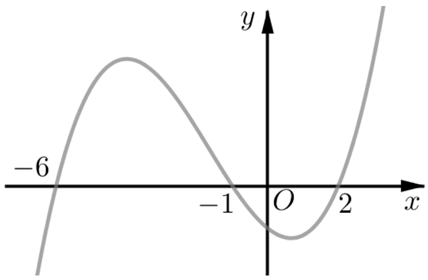
+ Với $\begin{cases}x\le 0\\ f'\left(x^2-2\right)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ x^2-2\ge 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ x^2\ge 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x\le -2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x\le -2$.

+ Với $\begin{cases}x\ge 0\\ f'\left(x^2-2\right)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ x^2-2\le 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ x^2\le 4\end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le 2$.

Như vậy hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-2)$, $(0;2)$; suy ra hàm số đồng biến trên $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

Do $(-1;0)\subset(-2;0)$ nên hàm số đồng biến trên $(-1;0)$. Vậy C sai.

**Câu 11:** Cho hàm số $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.




Hàm số $y=f\left(3-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng

**A.** $(0;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(-2;-1)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Cách 1:**

Đặt $y=g(x)=f\left(3-x^2\right)$.

Ta có: $g'(x)=-2x.f'\left(3-x^2\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow -2x.f'\left(3-x^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'\left(3-x^2\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 3-x^2=-6 \\ 3-x^2=-1 \\ 3-x^2=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 3 \\ x=\pm 2 \\ x=\pm 1 \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu của $g'(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Suy ra hàm số $y=f\left(3-x^2\right)$ đồng biến trên mỗi khoảng: $(-3;-2)$, $(-1;0)$, $(1;2)$, $(3;+\infty)$.

Vậy hàm số $y=f\left(3-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

**Cách 2:**

Dựa vào đồ thị của $y=f'(x)$ ta chọn $y=f'(x)=(x+6)(x+1)(x-2)$.

Đặt $y=g(x)=f\left(3-x^2\right)$.

Ta có: $g'(x)=-2x.f'\left(3-x^2\right)=-2x\left(9-x^2\right)\left(4-x^2\right)\left(1-x^2\right)$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 3 \\ x=\pm 2 \\ x=\pm 1 \end{array}\right..$$

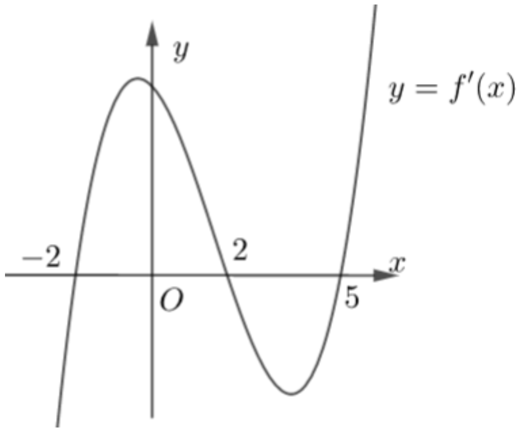
Bảng xét dấu của $g'(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Suy ra hàm số $y = f(3-x^2)$ đồng biến trên mỗi khoảng: $(-3;-2)$, $(-1;0)$, $(1;2)$, $(3;+\infty)$.

Vậy hàm số $y = f(3-x^2)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

**Câu 12:** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x^2+2)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?




**A.** $(2;3)$. **B.** $(-3;-2)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;0)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $g(x) = f(x^2+2)$, hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 2xf'(x^2+2)$, kết hợp với đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta được:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2+2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2+2 = -2 \\ x^2+2 = 2 \\ x^2+2 = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{array}\right. .$$

Từ đồ thị đã cho ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x < 2 \\ x > 5 \end{array}\right.$

Suy ra $f'(x^2+2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x^2+2 < 2 \\ x^2+2 > 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 < x^2 < 0 \\ x^2 > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3} \end{array}\right.$.

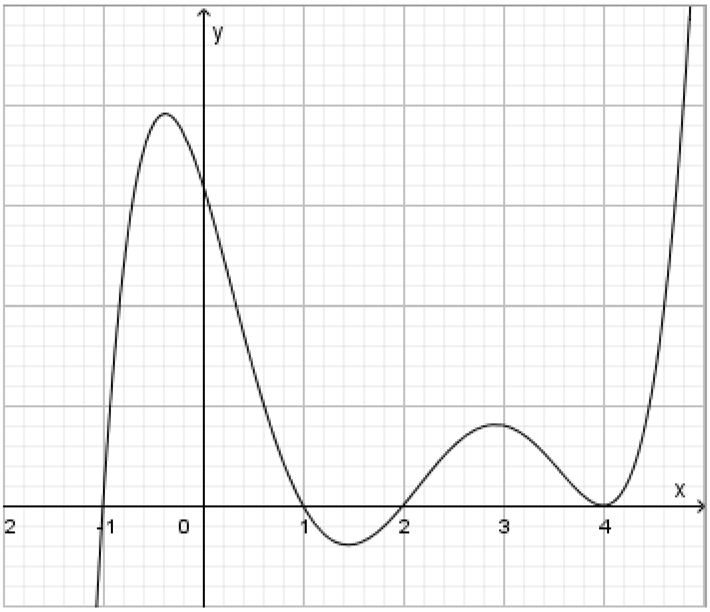
Và lập luận tương tự $f'(x^2+2) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x^2+2 < 5 \\ x^2+2 < -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 < x^2 < 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | $0$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

Dựa vào bảng biến thiên hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ và $\left(0;\sqrt{3}\right)$ chọn đáp án.

**Câu 13:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm đạo hàm $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(2019-2020x\right)$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?




**A.** $\left(-1;0\right)$. **B.** $\left(-\infty;-1\right)$. **C.** $\left(0;1\right)$. **D.** $\left(1;+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $g'\left(x\right)=\left(2019-2020x\right)'f'\left(2019-2020x\right)=-2020f'\left(2019-2020x\right)$,

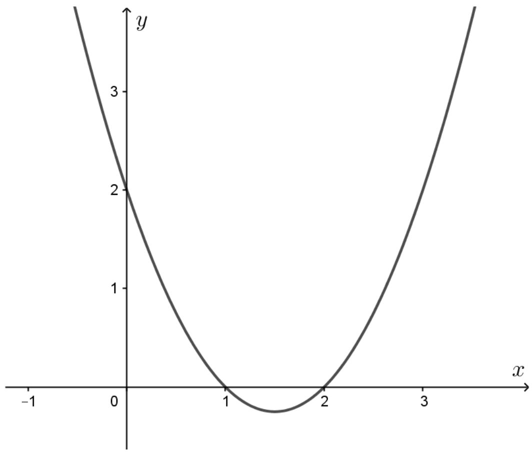
$$f'\left(2019-2020x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2019-2020x=-1\\2019-2020x=1\\2019-2020x=2\\2019-2020x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{1009}{1010}\\x=\dfrac{2017}{2020}\\x=\dfrac{403}{404}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{403}{404}$ | | $\frac{2017}{2020}$ | | $\frac{1009}{1010}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | ↘ | | | ↘ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $g(x)$ đồng biến trên từng khoảng $\left(\frac{2017}{2020};\frac{1009}{1010}\right)$, $(1;+\infty)$.

**Câu 14:** Cho hàm số $y=f(x)$. Biết đồ thị hàm số $y'=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên




Hàm số $g(x)=f\left(2x-3x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(-2;\frac{1}{2}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Cách 1.** Ta có $g'(x)=(2-6x).f'\left(2x-3x^2\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow(2-6x).f'\left(2x-3x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-6x=0\\2x-3x^2=1\\2x-3x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$$

Bảng xét dấu của $g'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2-6x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(2x-3x^2)$ | | $+$ | \| | $+$ | |
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

Từ bảng trên ta có hàm số $g(x)=f(2x-3x^2)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$

**Cách 2:** $g'(x)=(2-6x).f'(2x-3x^2)$

Để hàm số $g(x)=f(2x-3x^2)$ đồng biến thì

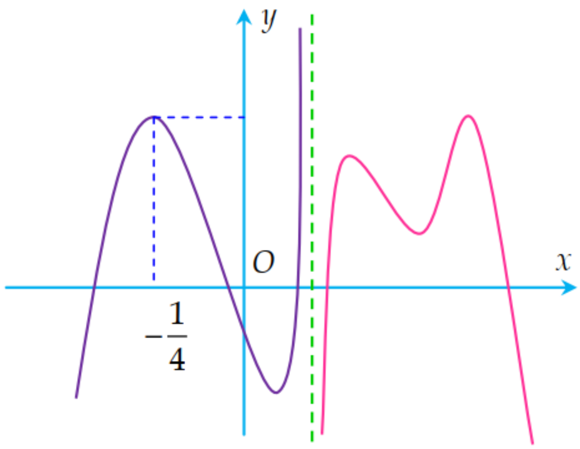
$$g'(x)\ge 0 \Leftrightarrow (2-6x).f'(2x-3x^2)\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases}2-6x\ge 0\\ f'(2x-3x^2)\ge 0\end{cases} \cup \begin{cases}2-6x\le 0\\ f'(2x-3x^2)\le 0\end{cases}$$

Trường hợp 1. $\begin{cases}2-6x\ge 0\\ f'(2x-3x^2)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le \frac{1}{3}\\ \left[\begin{array}{l}2x-3x^2\le 1\\ 2x-3x^2\ge 2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x\le \frac{1}{3}$

Trường hợp 2. $\begin{cases}2-6x\le 0\\ f'(2x-3x^2)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \frac{1}{3}\\ 1\le 2x-3x^2\le 2\end{cases}$ hệ vô nghiệm

Vậy hàm số $g(x)=f(2x-3x^2)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$

**Câu 15:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2+x)$?




**A.** 10. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $y'=(2x+1)f'(x^2+x)$; $x^2+x=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m\ge -\frac{1}{4}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm $f'(x)$ cắt trục hoành tại 5 điểm trong đó 1 điểm có hoành độ nhỏ hơn $-\frac{1}{4}$ và có một tiệm cận.

Khi đó ứng với mỗi giao điểm có hoành độ lớn hơn $-\frac{1}{4}$ và 1 điểm không xác định thì $y'=0$ có hai nghiệm. Từ đây dễ dàng suy ra hàm $y=f(x^2+x)$ có 11 cực trị.

**DẠNG 2. TÌM KHOẢNG ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ $g(x)=f\left[u(x)\right]+v(x)$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ, BẢNG BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ $f'(x)$**

**Cách 1:**

**Bước 1:** Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x)=u'(x).f'\left[u(x)\right]+v'(x)$.

**Bước 2:** Sử dụng đồ thị của $f'(x)$, lập bảng xét dấu của $g'(x)$.

**Bước 3:** Dựa vào bảng dấu kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

**Cách 2:**

**Bước 1:** Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x)=u'(x).f'\left[u(x)\right]+v'(x)$.

**Bước 2:** Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x)\geq 0$;

**Bước 3:** Giải bất phương trình $(*)$ từ đó kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

**Cách 3:**

**Bước 1:** Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$, $g'(x)=u'(x).f'\left[u(x)\right]+v'(x)$.

**Bước 3:** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $K$ $\Leftrightarrow g'(x)\geq 0, \forall x\in K$;

**Bước 3:** Lần lượt chọn thay giá trị từ các phương án vào $g'(x)$ để loại các phương án **sai**.

**Câu 16:** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Hàm số $y=f(x-1)+x^3-12x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

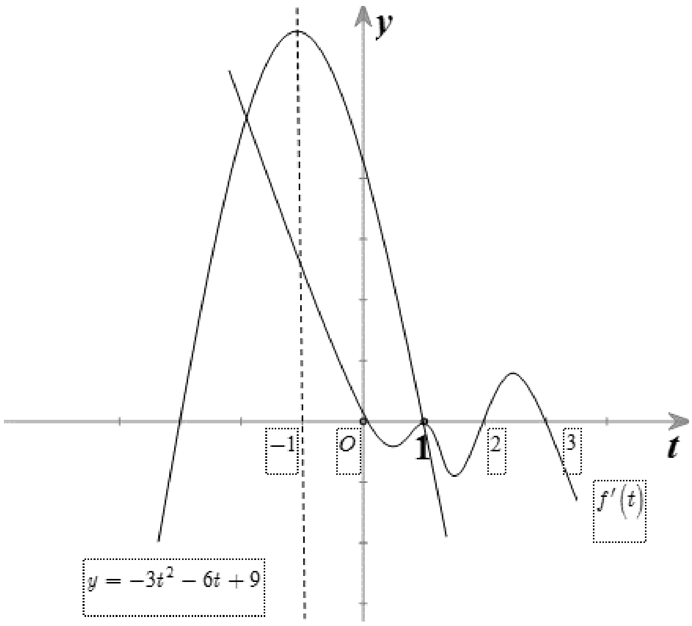
**A.** $(1;+\infty)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(3;4)$.

**Lời giải**

Ta có $y'=f'(x-1)+3x^2-12=f'(t)+3t^2+6t-9=f'(t)-\left(-3t^2-6t+9\right)$, với $t=x-1$

Nghiệm của phương trình $y'=0$ là hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y=f'(t); y=-3t^2-6t+9$.

Vẽ đồ thị của các hàm số $y=f'(t); y=-3t^2-6t+9$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ sau:




Dựa vào đồ thị trên, ta có BXD của hàm số $y' = f'(t) - (-3t^2 - 6t + 9)$ như sau: $(t_0 < -1)$

| $t$ | $-\infty$ | | $t_0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $t \in (t_0;1)$. Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $x \in (1;2) \subset (t_0+1;1)$.

**Câu 17:** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $y = 2f(1-x) + \sqrt{x^2+1} - x$ nghịch biến trên những khoảng nào dưới đây

**A.** $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(-3;-2)$.

**Lời giải.**

$y' = -2f'(1-x) + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$.

Có $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0,\ \forall x \in (-2;0)$.

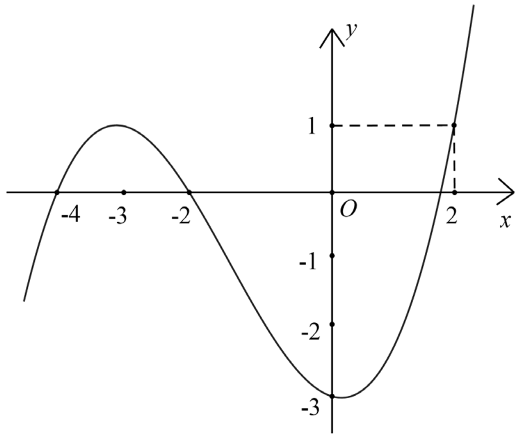
Bảng xét dấu:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(1-x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$\Rightarrow -2f'(1-x) < 0,\ \forall x \in (-2;0)$

$$\Rightarrow -2f'(1-x)+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1<0,\ \forall x\in(-2;0).$$

**Câu 18:** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.




Hàm số $y=3f(x)+x^3-6x^2+9x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

**A.** $(0;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-2;0)$.

**Lời giải**

Hàm số $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,(a\neq 0)$; $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$.

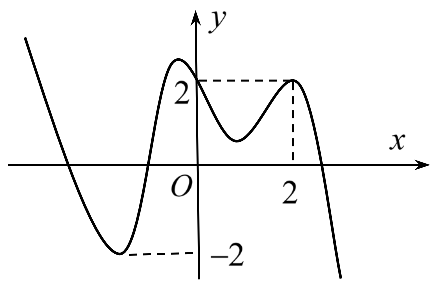
Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ đi qua các điểm $(-4;0),(-2;0),(0;-3),(2;1)$ nên ta có:

$$\begin{cases}-256a+48b-8c+d=0\\-32a+12b-4c+d=0\\d=-3\\32a+12b+4c+d=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{5}{96}\\b=\dfrac{7}{24}\\c=-\dfrac{7}{24}\\d=-3\end{cases}$$

Do đó hàm số $y=3f(x)+x^3-6x^2+9x; y'=3\left(f'(x)+x^2-4x+3\right)=3\left(\frac{5}{24}x^3+\frac{15}{8}x^2-\frac{55}{12}x\right)$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-11\\x=0\\x=2\end{array}\right.$. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-11;0)$ và $(2;+\infty)$.

**Câu 19:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số $y=f(x)-2x$ có bao nhiêu điểm cực trị?




**A.** $4$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $1$.

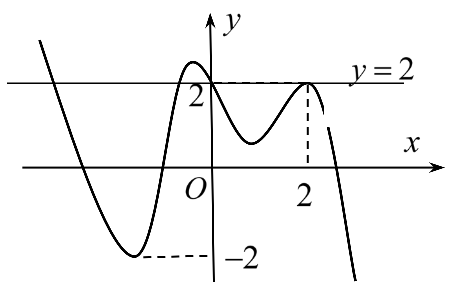
**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $g(x)=f(x)-2x$.

$\Rightarrow g'(x)=f'(x)-2$.

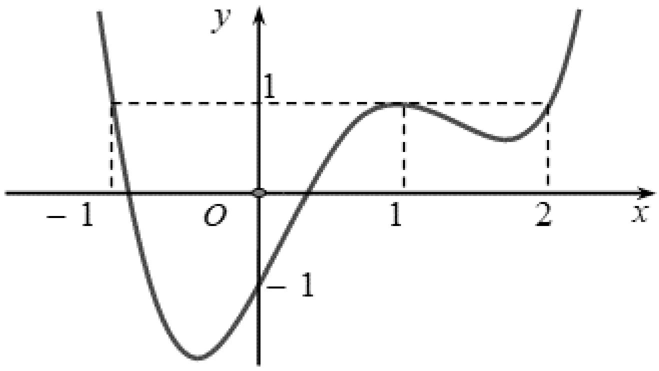
Vẽ đường thẳng $y=2$.




$\Rightarrow$ phương trình $g'(x)=0$ có 3 nghiệm bội lẻ.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=f(x)-2x$ có 3 điểm cực trị.

**Câu 20:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x-1)+\dfrac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?




**A.** $(2\,;3)$. **B.** $(0\,;1)$. **C.** $(-1\,;0)$. **D.** $(1\,;2)$.

**Lời giải**

Ta có $g'(x)=f'(x-1)-1$.

$g'(x)\geq 0 \Leftrightarrow f'(x-1)-1\geq 0 \Leftrightarrow f'(x-1)\geq 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1\leq -1 \\ x-1\geq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq 0 \\ x\geq 3 \end{array}\right.$.

Từ đó suy ra hàm số $g(x)=f(x-1)+\dfrac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng $(-1\ ;0)$.

**Câu 21:** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $y=-2f(x)+2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

**A.** $(-4;2)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;4)$.

**Lời giải**

Xét $y=g(x)=-2f(x)+2019$.

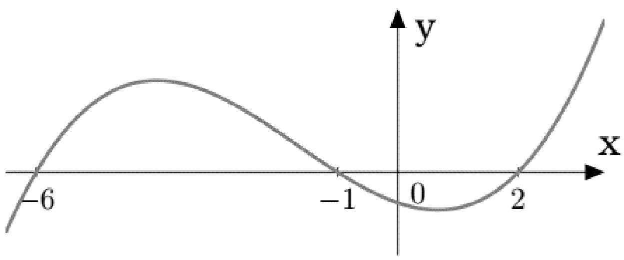
Ta có $g'(x)=\left(-2f(x)+2019\right)'=-2f'(x)$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-1 \\ x=2 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$, ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;2)$.

**Câu 22:** Cho hàm số $y=f(x)$. Biết đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=f\left(3-x^2\right)+2018$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?




**A.** $(-1;\ 0)$ **B.** $(2;\ 3)$ **C.** $(-2;\ -1)$ **D.** $(0;\ 1)$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\left[f\left(3-x^2\right)+2018\right]'=-2x.f'\left(3-x^2\right)$.

$$-2x.f'\left(3-x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\3-x^2=-6\\3-x^2=-1\\3-x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm3\\x=\pm2\\x=\pm1\end{array}\right..$$

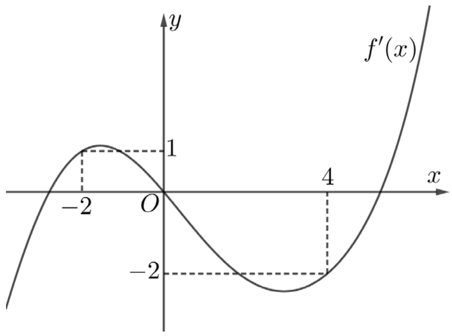
Bảng xét dấu của đạo hàm hàm số đã cho

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'\left(3-x^2\right)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $-2xf'\left(3-x^2\right)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số đồng biến trên $(-1;\,0)$.


| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'\left(3-x^2\right)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $-2xf'\left(3-x^2\right)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |


**Câu 23:** Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình sau.




Hàm số $g(x)=\left|4f(x)+x^2\right|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(4;+\infty)$. **B.** $(0;4)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $(-2;0)$.

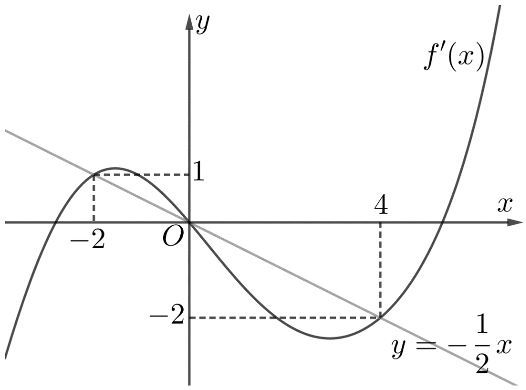
**Lời giải**

**Chọn B**

Xét hàm số $h(x)=4f(x)+x^2$ trên $\mathbb{R}$.

Vì $f(x)$ là hàm số đa thức nên $h(x)$ cũng là hàm số đa thức và $h(0)=4f(0)=0$.

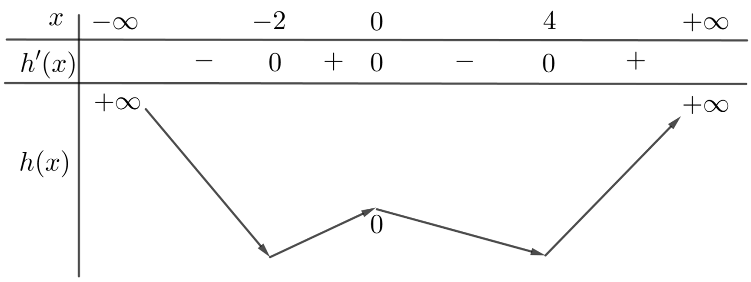
Ta có $h'(x)=4f'(x)+2x$. Do đó $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{2}x$.



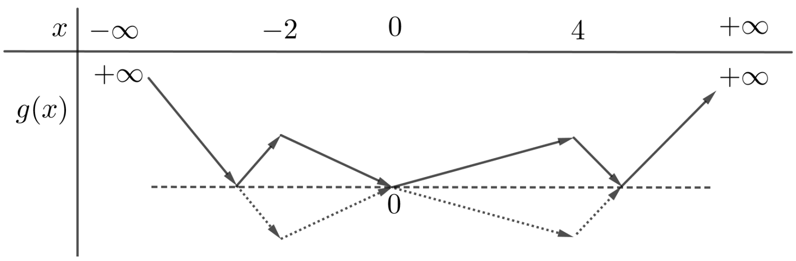

Dựa vào sự tương giao của đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=-\dfrac{1}{2}x$, ta có

$h'(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{-2;0;4\}$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:

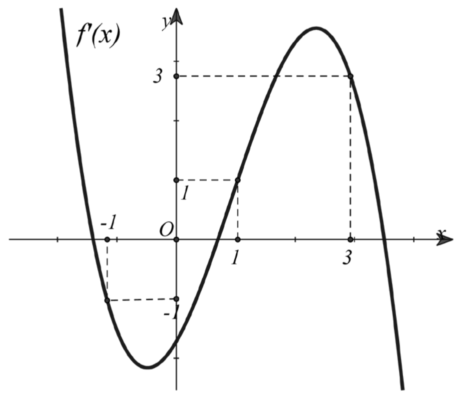



Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=|h(x)|$ như sau:




Dựa vào bảng biến thiên trên, ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$.

**Câu 24:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho như hình vẽ



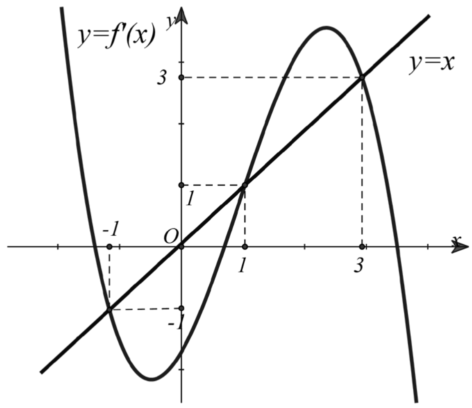

Hàm số $g(x)=2f\left(|x-1|\right)-x^2+2x+2020$ đồng biến trên khoảng nào?

**A.** $(0;1)$. **B.** $(-3;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-2;0)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có đường thẳng $y=x$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại các điểm $x=-1;\ x=1;\ x=3$ như hình vẽ sau:




Dựa vào đồ thị của hai hàm số trên ta có $f'(x)>x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ 1<x<3 \end{array}\right.$ và $f'(x)<x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<1 \\ x>3 \end{array}\right.$.

+ Trường hợp 1: $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$, khi đó ta có $g(x)=2f\left(1-x\right)-x^2+2x+2020$.

Ta có $g'(x)=-2f'\left(1-x\right)+2(1-x)$.

$$g'(x)>0 \Leftrightarrow -2f'\left(1-x\right)+2(1-x)>0 \Leftrightarrow f'\left(1-x\right)<1-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<1-x<1 \\ 1-x>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<2 \\ x<-2 \end{array}\right..$$

Kết hợp điều kiện ta có $g'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<1 \\ x<-2 \end{array}\right.$.

+ Trường hợp 2: $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$, khi đó ta có $g(x)=2f\left(x-1\right)-x^2+2x+2020$.

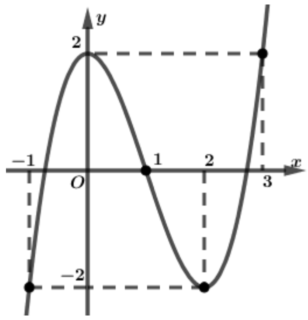
$g'(x)=2f'\left(x-1\right)-2(x-1)$

$g'(x)>0 \Leftrightarrow 2f'(x-1)-2(x-1)>0 \Leftrightarrow f'(x-1)>x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1<-1 \\ 1<x-1<3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ 2<x<4 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện ta có $g'(x)>0 \Leftrightarrow 2<x<4$.

Vậy hàm số $g(x)=2f(|x-1|)-x^2+2x+2020$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

**Câu 25:** Cho hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(3x+1)+9x^3+\frac{9}{2}x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



**A.** $(-1;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(1;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

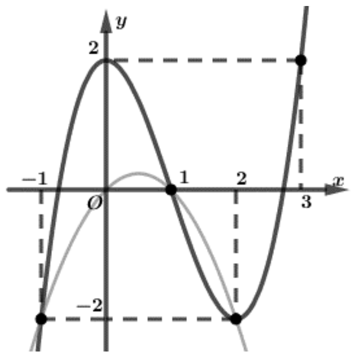
Xét hàm số $g(x)=f(3x+1)+9x^3+\frac{9}{2}x^2 \Rightarrow g'(x)=3f'(3x+1)+27x^2+9x$

Hàm số đồng biến tương đương $g'(x)>0 \Leftrightarrow 3f'(3x+1)+27x^2+9x>0$

$\Leftrightarrow f'(3x+1)+3x(3x+1)>0\ (*)$.

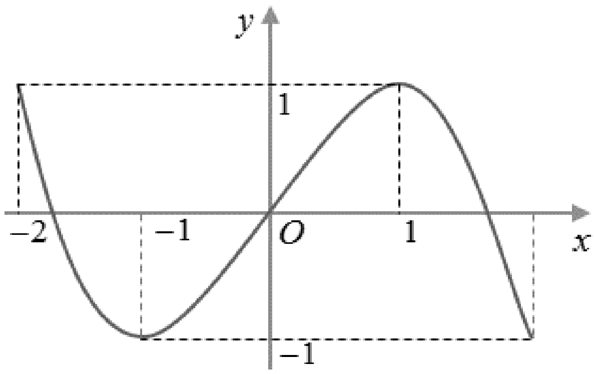
Đặt $t=3x+1$ $(*) \Leftrightarrow f'(t)+(t-1)t>0 \Leftrightarrow f'(t)>-t^2+t$

Vẽ parabol $y=-x^2+x$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên cùng một hệ trục



Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(t)>-t^2+t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<t<1 \\ t>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<3x+1<1 \\ 3x+1>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{-2}{3}<x<0 \\ x>\frac{1}{3} \end{array}\right.$.

**Câu 26:** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ.




Hàm số $y = f(\cos x) + x^2 - x$ đồng biến trên khoảng

**A.** $(-2;1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-1;0)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt hàm $g(x) = f(\cos x) + x^2 - x$.

Ta có: $g'(x) = -\sin x.f'(\cos x) + 2x - 1$.

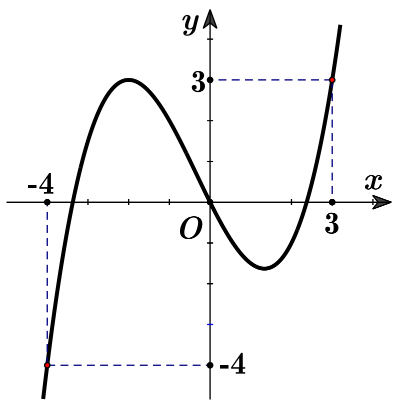
Vì $\cos x \in [-1;1]$ nên từ đồ thị $f'(x)$ ta suy ra $f'(\cos x) \in [-1;1]$.

Do đó $\left|-\sin x.f'(\cos x)\right| \le 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta suy ra $g'(x) = \sin x.f'(\cos x) + 2x - 1 \ge -1 + 2x - 1 = 2x - 2$

$\Rightarrow g'(x) > 0, \forall x > 1$. Vậy hàm số đồng biến trên $(1;2)$.

**Câu 27:** Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.




Hàm số $g(x) = f(3x^2 - 1) - \dfrac{9}{2}x^4 + 3x^2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

**A.** $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3};\dfrac{-\sqrt{3}}{3}\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $g'(x)=6xf'(3x^2-1)-18x^3+6x=6x\left[f'(3x^2-1)-3x^2+1\right]$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'(3x^2-1)=3x^2-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\3x^2-1=-4\,(VN)\\3x^2-1=0\\3x^2-1=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\x=\pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | $0$ | | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Vậy hàm số đồng biến trong khoảng $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3};\dfrac{-\sqrt{3}}{3}\right)$.

**Câu 28:** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $-1$ | | $2$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Hàm số $y=f(2x+1)+\dfrac{2}{3}x^3-8x+5$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-\infty;-2)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;7)$. **D.** $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $y'=2f'(2x+1)+2x^2-8$.

Xét $y'\le 0\Leftrightarrow 2f'(2x+1)+2x^2-8\le 0\Leftrightarrow f'(2x+1)\le 4-x^2$

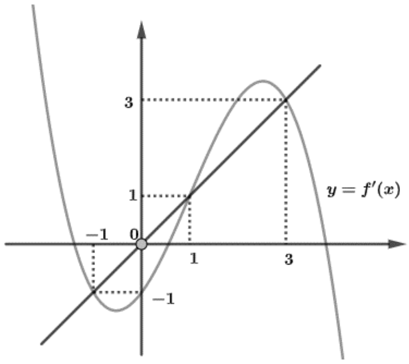
Đặt $t=2x+1$, ta có $f'(t)\le\dfrac{-t^2+2t+15}{4}$

Vì $\dfrac{-t^2+2t+15}{4}\ge 0,\forall t\in[-3;5]$. Mà $f'(t)\le 0,\ \forall t\in[-3;2]$.

Nên $f'(t)\le\dfrac{-t^2+2t+15}{4}\Rightarrow t\in[-3;2]$.

Suy ra $-3\le 2x+1\le 2\Leftrightarrow -2\le x\le\dfrac{1}{2}$. Vậy chọn phương án **D.**

**Câu 29:** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ cho như hình vẽ.




Hàm số $g(x)=2f\left(|x-1|\right)-x^2+2x+2020$ đồng biến trên khoảng nào?

**A.** $(0;1)$. **B.** $(-3;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-2;0)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

+Với $x>1$, ta có $g(x)=2f(x-1)-(x-1)^2+2021 \Rightarrow g'(x)=2f'(x-1)-2(x-1)$.

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow 2f'(x-1)-2(x-1)>0 \Leftrightarrow f'(x-1)>x-1$ $(*)$.

Đặt $t=x-1$, khi đó $(*) \Leftrightarrow f'(t)>t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1<t<3\\ t<-1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2<x<4\\ x<0 \quad (loai)\end{array}\right.$.

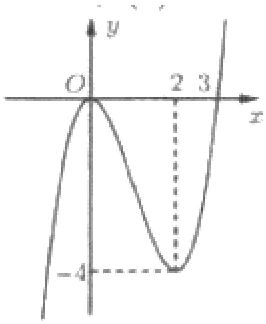
+Với $x<1$, ta có $g(x)=2f(1-x)-(1-x)^2+2021 \Rightarrow g'(x)=-2f'(1-x)+2(1-x)$

Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow -2f'(1-x)+2(1-x)>0 \Leftrightarrow f'(1-x)<1-x$ $(**)$.

Đặt $t=1-x$, khi đó $(**) \Leftrightarrow f'(t)<t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<t<1\\ t>3\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<2\\ x<-2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<1\\ x<-2\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2),(0;1),(2;4)$.

**Câu 30:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ




Hàm số $g(x)=f\left(1+e^x\right)+2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(0;+\infty)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(-1;1)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$g'(x) = e^x f'(1+e^x)$

Do $e^x > 0, \forall x$ nên $g'(x) \le 0 \Leftrightarrow f'(1+e^x) \le 0 \Leftrightarrow 1+e^x \le 3 \Leftrightarrow x \le \ln 2$, dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm.

Nên $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; \ln 2)$.

So với các đáp án thì chỉ có C thỏa mãn.

**Câu 31:** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Hàm số $y = -2f(x) + 2019$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

**A.** $(2;4)$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-1;2)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $y' = -2f'(x)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$ ta có

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Từ bảng xét dấu ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$, $(-1;2)$ và $(4;+\infty)$

**Câu 32:** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (1-x)(x+2)g(x) + 2019$ với $g(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(1-x) + 2019x + 2020$ nghịch biến trên khoảng nào?

**A.** $(1;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $h(x) = f(1-x) + 2019x + 2020$.

Vì hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $h(x)$ cũng xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $h'(x) = -f'(1-x) + 2019$.

Do $h'(x) = 0$ tại hữu hạn điểm nên để tìm khoảng nghịch biến của hàm số $h(x)$, ta tìm các giá trị của $x$ sao cho $h'(x) < 0 \Leftrightarrow -f'(1-x) + 2019 < 0 \Leftrightarrow f'(1-x) - 2019 > 0$

$\Leftrightarrow x(3-x)g(1-x)>0 \Leftrightarrow x(3-x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>3 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $y=f(1-x)+2019x+2020$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(3;+\infty)$.

**Câu 33:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | |

Biết $f(x)>2, \forall x\in\mathbb{R}$. Xét hàm số $g(x)=f(3-2f(x))-x^3+3x^2-2020$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

**B.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

**C.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$.

**D.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $g'(x)=-2f'(x)f'(3-2f(x))-3x^2+6x$.

Vì $f(x)>2, \forall x\in\mathbb{R}$ nên $3-2f(x)<-1 \ \forall x\in\mathbb{R}$

Từ bảng xét dấu $f'(x)$ suy ra $f'(3-2f(x))<0, \forall x\in\mathbb{R}$

Từ đó ta có bảng xét dấu sau:

| x | $-\infty$ | | -1 | | 0 | | 1 | | 2 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-f'(x)f'(3-2f(x))$ | | - | 0 | + | \| | + | 0 | - | \| | - | 0 | + | |
| $-3x^2+6x$ | | - | \| | - | 0 | + | \| | + | 0 | - | \| | - | |

Từ bảng xét dấu trên, loại trừ đáp án suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.

**Câu 34:** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | 3 | ↘ | 1 | ↗ | 2 | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

Hàm số $y=(f(x))^3-3.(f(x))^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(1;2)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(2;3)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $y' = 3.\left(f(x)\right)^2.f'(x) - 6.f(x).f'(x)$

$= 3f(x).f'(x).\left[f(x) - 2\right]$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{x_1, 4 \mid x_1 < 1\} \\ f(x) = 2 \Leftrightarrow x \in \{x_2, x_3, 3, x_4 \mid x_1 < x_2 < 1 < x_3 < 2; 4 < x_4\} \\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 2, 3, 4\} \end{array}\right.$$

Lập bảng xét dấu ta có

| x | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | 1 | | $x_3$ | | 2 | | 3 | | 4 | | $x_4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | - | 0 | + | \|\| | + | \|\| | + | \|\| | + | \|\| | + | \|\| | + | 0 | + | \|\| | + | |
| f(x) - 2 | | - | \|\| | - | 0 | + | \|\| | + | 0 | - | \|\| | - | 0 | - | \|\| | - | 0 | + | |
| f '(x) | | + | \|\| | + | \|\| | + | 0 | - | \|\| | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | \|\| | + | |
| y' | | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - | 0 | + | |

Do đó ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(2\,;\;3)$.

**Câu 35:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị nằm trên trục hoành và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của biểu thức $f'(x)$ như bảng dưới đây.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Hàm số $y = g(x) = \dfrac{f(x^2 - 2x)}{f(x^2 - 2x) + 1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-\infty; 1)$. **B.** $\left(-2; \dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $(1; 3)$. **D.** $(2; +\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$g'(x) = \frac{(x^2 - 2x)'.f'(x^2 - 2x)}{\left(f(x^2 - 2x) + 1\right)^2} = \frac{(2x - 2).f'(x^2 - 2x)}{\left(f(x^2 - 2x) + 1\right)^2}.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - 2 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

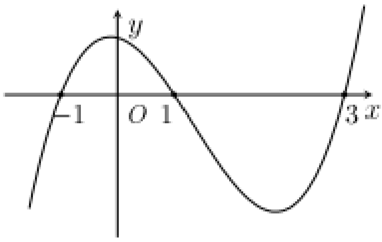
Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dựa vào bảng xét dấu ta có hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

## DẠNG 3. BÀI TOÁN HÀM ẨN, HÀM HỢP LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

**Câu 36:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên $m \in [-5;5]$ để hàm số $g(x) = f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$. Hỏi $S$ có bao nhiêu phần tử?




**A.** $4$. **B.** $3$. **C.** $6$. **D.** $5$.

**Lời giải**

Ta có $g'(x) = f'(x+m)$. Vì $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g'(x) = f'(x+m)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Căn cứ vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x+m) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+m < -1 \\ 1 < x+m < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1-m \\ 1-m < x < 3-m \end{array}\right..$$

Hàm số $g(x) = f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \le -1-m \\ \begin{cases} 3-m \ge 2 \\ 1-m \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -3 \\ 0 \le m \le 1 \end{array}\right..$$

Mà $m$ là số nguyên thuộc đoạn $[-5;5]$ nên ta có $S = \{-5;-4;-3;0;1\}$.

Vậy $S$ có 5 phần tử.

**Câu 37:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảnng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-10$ | | $-2$ | | $3$ | | $8$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Có bao nhiêu số nguyên $m$ để hàm số $y = f(x^3+4x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?

**A.** $3$. **B.** $0$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Lời giải**

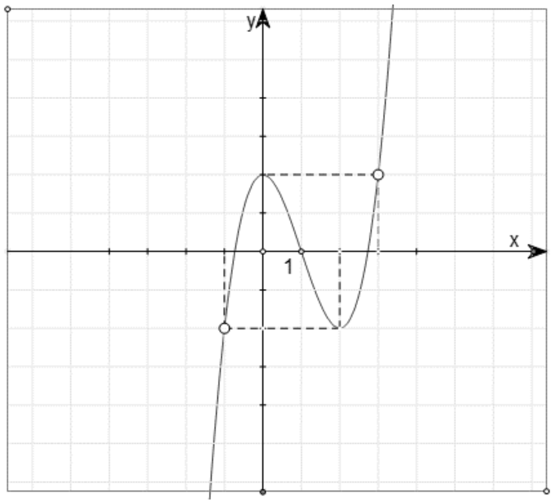
**Chọn C**

Đặt $t = x^3 + 4x + m \Rightarrow t' = 3x^2 + 4$ nên $t$ đồng biến trên $(-1;1)$ và $t \in (m-5; m+5)$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm $m$ để hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(m-5; m+5)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta được $\begin{cases} m-5 \geq -2 \\ m+5 \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$

**Câu 38:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$, với $m$ là tham số thực. Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tổng tất cả các phần tử trong $S$ bằng




**A.** $4$. **B.** $11$. **C.** $14$. **D.** $20$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét hàm số $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$

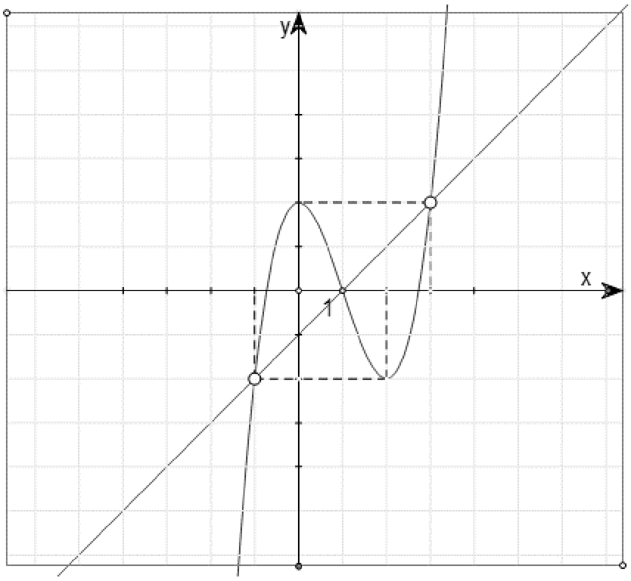
$g'(x) = f'(x-m) - (x-m-1)$

Xét phương trình $g'(x) = 0 (1)$

Đặt $x - m = t$, phương trình $(1)$ trở thành $f'(t) - (t-1) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = t - 1 (2)$

Nghiệm của phương trình $(2)$ là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = t - 1$

Ta có đồ thị các hàm số $y = f'(t)$ và $y = t - 1$ như sau:




Căn cứ đồ thị các hàm số ta có phương trình $(2)$ có nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=1 \\ t=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-1 \\ x=m+1 \\ x=m+3 \end{array}\right.$

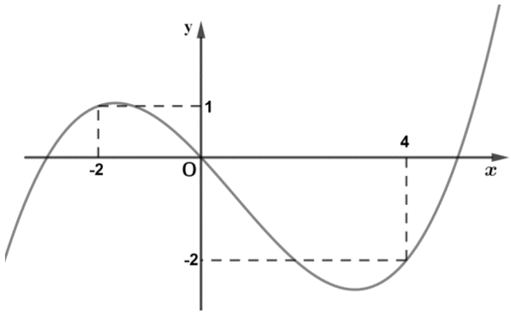
Ta có bảng biến thiên của $y=g(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $m-1$ | | $m+1$ | | $m+3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$ cần $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-1\le 5 \\ m+1\ge 6 \end{cases} \\ m+3\le 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5\le m\le 6 \\ m\le 2 \end{array}\right.$

Vì $m\in\mathbb{N}^* \Rightarrow m$ nhận các giá trị $1;2;5;6 \Rightarrow S=14$.

**Câu 39:** Cho hàm số $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,\ a\ne 0$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ




Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-6;6)$ của tham số $m$ để hàm số $g(x)=f(3-2x+m)+x^2-(m+3)x+2m^2$ nghịch biến trên $(0;1)$. Khi đó, tổng giá trị các phần tử của S là

**A.** 12. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 15.

**Lời giải**

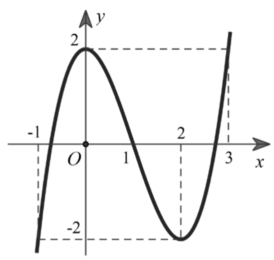
**Chọn B**

Xét $g'(x) = -2f'(3-2x+m) + 2x - (m+3)$. Xét phương trình $g'(x) = 0$, đặt $t = 3-2x+m$ thì phương trình trở thành $-2.\left[f'(t) - \frac{-t}{2}\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=4 \\ t=0 \end{array}\right.$.

Từ đó, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5+m}{2}, x_2 = \frac{m+3}{2}, x_3 = \frac{-1+m}{2}$. Lập bảng xét dấu, đồng thời lưu ý nếu $x > x_1$ thì $t < t_1$ nên $f(x) > 0$. Và các dấu đan xen nhau do các nghiệm đều làm đổi dấu đạo hàm nên suy ra $g'(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in [x_2; x_1] \cup (-\infty; x_3]$.

Vì hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ nên $g'(x) \le 0, \forall x \in (0;1)$ từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l} \frac{3+m}{2} \le 0 < 1 \le \frac{5+m}{2} \\ 1 \le \frac{-1+m}{2} \end{array}\right.$ và giải ra các giá trị nguyên thuộc $(-6;6)$ của $m$ là -3; 3; 4; 5. Từ đó chọn câu B

**Câu 40:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$, với $m$ là tham số thực. Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tổng tất cả các phần tử trong $S$ bằng:




**A.** $4$. **B.** $11$. **C.** $14$. **D.** $20$.

**Lời giải**

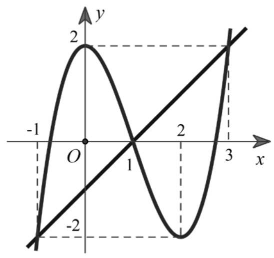
**Chọn C**

Ta có $g'(x) = f'(x-m) - (x-m-1)$

Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x-m) = x-m-1$

Đặt $x - m = t \Rightarrow f'(t) = t-1$

Khi đó nghiệm của phương trình là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và và đường thẳng $y=t-1$




Dựa vào đồ thị hàm số ta có được $f'(t)=t-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=1 \\ t=3 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của $g'(t)$

| $t$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số $g(t)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$

Hay $\left[\begin{array}{l} -1<t<1 \\ t>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x-m<1 \\ x-m>3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1<x<m+1 \\ x>m+3 \end{array}\right.$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$ thì $\left[\begin{array}{l} m-1\le 5<6\le m+1 \\ m+3\le 5<6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5\le m\le 6 \\ m\le 2 \end{array}\right.$

Vì $m$ là các số nguyên dương nên $S=\{1;2;5;6\}$

Vậy tổng tất cả các phần tử của $S$ là: $1+2+5+6=14$.

**Câu 41:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-2)(x^2-6x+m)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m$ thuộc đoạn $[-2020;2020]$ để hàm số $g(x)=f(1-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$?

**A.** $2016$. **B.** $2014$. **C.** $2012$. **D.** $2010$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $g'(x)=f'(1-x)=-(1-x)^2(-x-1)\left[(1-x)^2-6(1-x)+m\right]$

$=(x-1)^2(x+1)(x^2+4x+m-5)$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow g'(x) \le 0, \forall x < -1\ (*)$, .

Với $x < -1$ thì $(x-1)^2 > 0$ và $x+1 < 0$ nên $(*) \Leftrightarrow x^2 + 4x + m - 5 \ge 0, \forall x < -1$

$\Leftrightarrow m \ge -x^2 - 4x + 5, \forall x < -1$.

Xét hàm số $y = -x^2 - 4x + 5$ trên khoảng $(-\infty; -1)$, ta có bảng biến thiên:

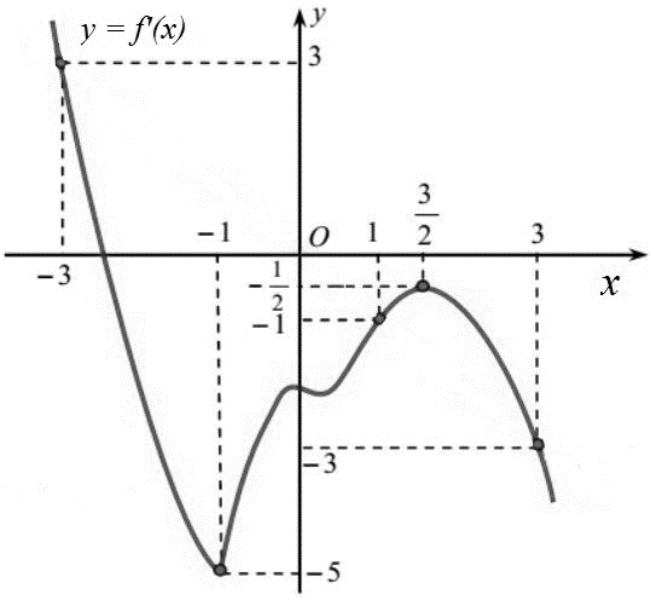
| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | $9$ | | |
| | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |
| | $-\infty$ | | | | $8$ |

Từ bảng biến thiên suy ra $m \ge 9$.

Kết hợp với $m$ thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ và $m$ nguyên nên $m \in \{9; 10; 11; ...; 2020\}$.

Vậy có $2012$ số nguyên $m$ thỏa mãn đề bài.

**Câu 42:** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $R$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.




Xét hàm số $g(x) = f(x-2m) + \frac{1}{2}(2m-x)^2 + 2020$, với $m$ là tham số thực. Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3;4)$. Hỏi số phần tử của $S$ bằng bao nhiêu?

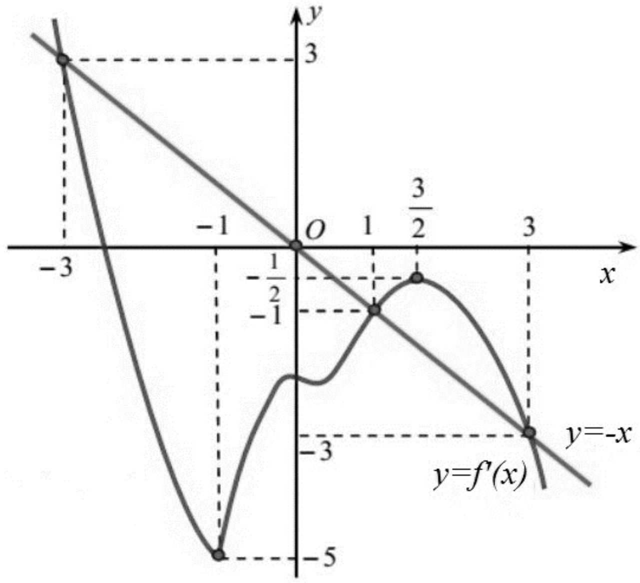
**A.** $4$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** Vô số.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $g'(x) = f'(x-2m) - (2m-x)$.

Đặt $h(x)=f'(x)-(-x)$. Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đồ thị hàm số $y=-x$ trên hình vẽ suy ra: $h(x)\le 0 \Leftrightarrow f'(x)\le -x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3\le x\le 1 \\ x\ge 3 \end{array}\right.$.




Ta có $g'(x)=h(x-2m)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3\le x-2m\le 1 \\ x-2m\ge 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m-3\le x\le 2m+1 \\ x\ge 2m+3 \end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(2m-3;2m+1)$ và $(2m+3;+\infty)$.

Do đó hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3;4) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2m-3\le 3 \\ 2m+1\ge 4 \end{cases} \\ 2m+3\le 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3}{2}\le m\le 3 \\ m\le 0 \end{array}\right.$.

Mặt khác, do $m$ nguyên dương nên $m\in\{2;3\} \Rightarrow S=\{2;3\}$. Vậy số phần tử của $S$ bằng 2.

Từ đó chọn **đáp án B.**

**Câu 43:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=(x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $y=f(x^2+3x-m)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

**A.** 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 20.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $y'=f'(x^2+3x-m)=(2x+3)f'(x^2+3x-m)$.

Theo đề bài ta có: $f'(x)=(x-1)(x+3)$

suy ra $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ x>1 \end{array}\right.$ và $f'(x)<0 \Leftrightarrow -3<x<1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi $y'\ge 0, \forall x\in(0;2)$

$\Leftrightarrow (2x+3)f'(x^2+3x-m)\geq 0, \forall x\in(0;2)$.

Do $x\in(0;2)$ nên $2x+3>0, \forall x\in(0;2)$. Do đó, ta có:

$$y'\geq 0, \forall x\in(0;2)\Leftrightarrow f'(x^2+3x-m)\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-m\leq -3 \\ x^2+3x-m\geq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq x^2+3x+3 \\ m\leq x^2+3x-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq \max\limits_{[0;2]}(x^2+3x+3) \\ m\leq \min\limits_{[0;2]}(x^2+3x-1)\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\geq 13 \\ m\leq -1\end{array}\right..$$

Do $m\in[-10;20]$, $m\in\mathbb{Z}$ nên có $18$ giá trị nguyên của $m$ thỏa yêu cầu đề bài.

**Câu 44:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)^2(x^2+2mx+1)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm $m$ để hàm số $g(x)=f(2x+1)$ đồng biến trên khoảng $(3;5)$?

**A.** 3 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 6

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $g'(x)=2f'(2x+1)=2(2x+1)(2x+2)^2[(2x+1)^2+2m(2x+1)+1]$

Đặt $t=2x+1$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;5)$ khi và chỉ khi $g'(x)\geq 0,\ \forall x\in(3;5)$

$$\Leftrightarrow t(t^2+2mt+1)\geq 0,\ \forall t\in(7;11)\Leftrightarrow t^2+2mt+1\geq 0,\ \forall t\in(7;11)\Leftrightarrow 2m\geq\frac{-t^2-1}{t},\ \forall t\in(7;11)$$

Xét hàm số $h(t)=\dfrac{-t^2-1}{t}$ trên $[7;11]$, có $h'(t)=\dfrac{-t^2+1}{t^2}$

BBT:

| $t$ | $-\infty$ | $7$ | $11$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $h'(t)$ | | | $-$ | |
| | | $-\dfrac{50}{7}$ | $\searrow$ $-\dfrac{122}{11}$ | |

Dựa vào BBT ta có $2m\geq\dfrac{-t^2-1}{t},\ \forall t\in(7;11)\Leftrightarrow 2m\geq\max\limits_{[7;11]}h(t)\Leftrightarrow m\geq -\dfrac{50}{14}$

Vì $m\in\mathbb{Z}^-\Rightarrow m\in\{-3;-2;-1\}$.

**Câu 45:** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Có bao nhiêu số nguyên $m<2019$ để hàm số $g(x)=f(x^2-2x+m)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

**A.** 2016. **B.** 2015. **C.** 2017. **D.** 2018.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $g'(x)=(x^2-2x+m)'f'(x^2-2x+m)=2(x-1)f'(x^2-2x+m)$.

Hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x)\geq 0,\forall x\in(1;+\infty)$ và

$g'(x)=0$ tại hữu hạn điểm $\Leftrightarrow 2(x-1)f'(x^2-2x+m)\geq 0,\forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow f'(x^2-2x+m)\geq 0,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x+m\geq 2,\forall x\in(1;+\infty)\\x^2-2x+m\leq 0,\forall x\in(1;+\infty)\end{array}\right.$

Xét hàm số $y=x^2-2x+m$, ta có bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $m-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

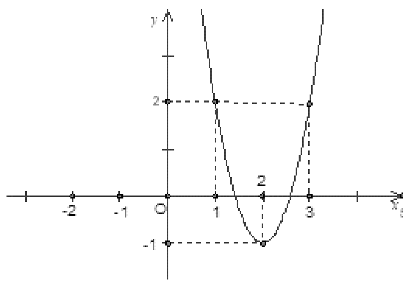
Dựa vào bảng biến thiên ta có

TH1: $x^2-2x+m\geq 2,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow m-1\geq 2\Leftrightarrow m\geq 3$.

TH2: $x^2-2x+m\leq 0,\forall x\in(1;+\infty)$: Không có giá trị $m$ thỏa mãn.

Vậy có 2016 số nguyên $m<2019$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 46:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

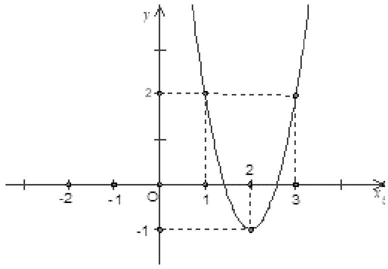


**A.** $(-\infty;3),(5;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1),(1;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(3;5)$.

**Lời giải.**

**Chọn B**

Hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị $(C)$ như sau:



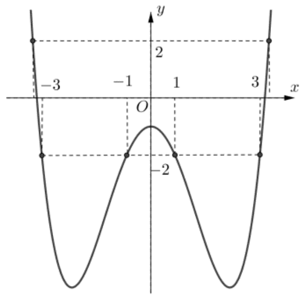

Dựa vào đồ thị $(C)$ ta có:

$f'(x-2)+2>2,\forall x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)\Leftrightarrow f'(x-2)>0,\forall x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

Đặt $x^*=x-2$ suy ra: $f'(x^*)>0,\forall x^*\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Vậy: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1),(1;+\infty)$.

**Câu 47:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x+2)-2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

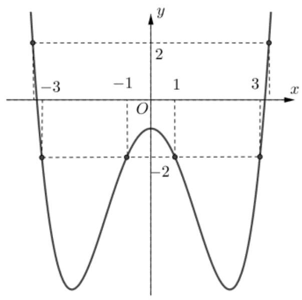



**A.** $(-3;-1),(1;3)$. **B.** $(-1;1),(3;5)$. **C.** $(-\infty;-2),(0;2)$. **D.** $(-5;-3),(-1;1)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số $y=f'(x+2)-2$ có đồ thị $(C)$ như sau:



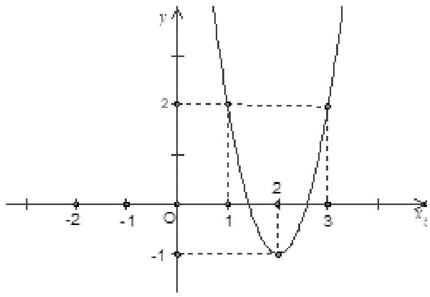
Dựa vào đồ thị $(C)$ ta có:

$f'(x+2)-2<-2, \forall x \in (-3;-1)\cup(1;3) \Leftrightarrow f'(x+2)<0, \forall x \in (-3;-1)\cup(1;3)$.

Đặt $x^*=x+2$ suy ra: $f'(x^*)<0, \forall x^* \in (-1;1)\cup(3;5)$.

Vậy: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$, $(3;5)$.

**Câu 48:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

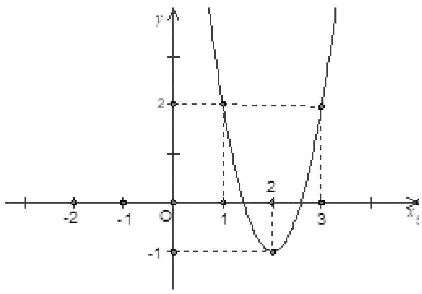


**A.** $(-\infty;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

**Lời giải.**

**Chọn B**

Hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị $(C)$ như sau:



Dựa vào đồ thị $(C)$ ta có: $f'(x-2)+2<2, \forall x \in (1;3) \Leftrightarrow f'(x-2)<0, \forall x \in (1;3)$.

Đặt $x^*=x-2$ thì $f'(x^*)<0, \forall x^* \in (-1;1)$.

Vậy: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

**Cách khác:**

Tịnh tiến sang trái hai đơn vị và xuống dưới 2 đơn vị thì từ đồ thị $(C)$ sẽ thành đồ thị của hàm $y=f'(x)$. Khi đó: $f'(x)<0, \forall x \in (-1;1)$.

Vậy: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

**Câu 49:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm cấp 3 liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x).f'''(x)=x(x-1)^2(x+4)^3$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $g(x)=\left[f'(x)\right]^2-2f(x).f''(x)$. Hàm số $h(x)=g\left(x^2-2x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(-\infty;1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;2)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $g'(x)=2f''(x)f'(x)-2f'(x).f''(x)-2f(x).f'''(x)=-2f(x).f'''(x)$;

Khi đó $\left(h(x)\right)'=(2x-2)g'\left(x^2-2x\right)=-2(2x-2)\left(x^2-2x\right)\left(x^2-2x-1\right)^2\left(x^2-2x+4\right)^3$

$$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\\x=1\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu của $h'(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $1-\sqrt{2}$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $1+\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | + | 0 | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | 0 | − | |

Suy ra hàm số $h(x)=g\left(x^2-2x\right)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

**Câu 50:** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=g(x)=f'(2x+3)+2$ có đồ thị là một parabol với tọa độ đỉnh $I(2;-1)$ và đi qua điểm $A(1;2)$. Hỏi hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(5;9)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;9)$. **D.** $(1;3)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét hàm số $g(x)=f'(2x+3)+2$ có đồ thị là một Parabol nên có phương trình dạng:

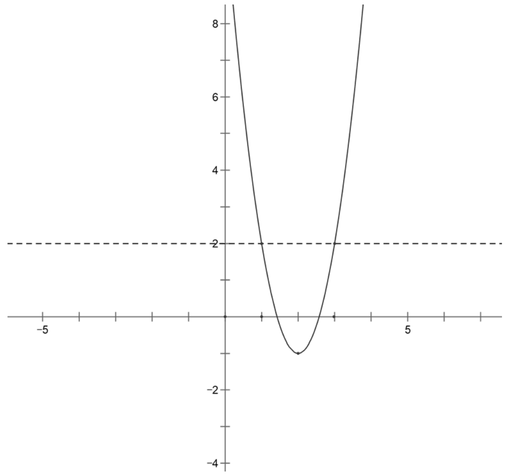
$y=g(x)=ax^2+bx+c\ \ (P)$

Vì $(P)$ có đỉnh $I(2;-1)$ nên $\begin{cases}\dfrac{-b}{2a}=2\\g(2)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-b=4a\\4a+2b+c=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a+b=0\\4a+2b+c=-1\end{cases}$.

$(P)$ đi qua điểm $A(1;2)$ nên $g(1)=2\Leftrightarrow a+b+c=2$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases}4a+b=0\\4a+2b+c=-1\\a+b+c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=-12\\c=11\end{cases}$ nên $g(x)=3x^2-12x+11$.

Đồ thị của hàm $y = g(x)$ là

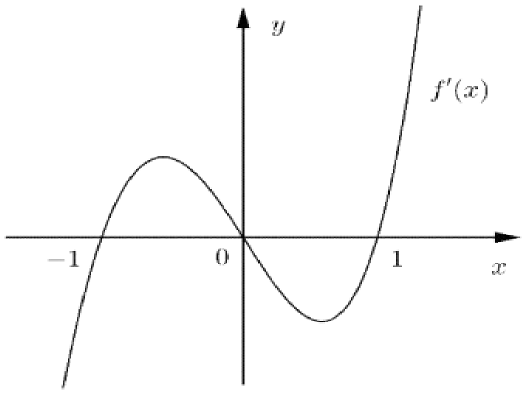



Theo đồ thị ta thấy $f'(2x+3) \le 0 \Leftrightarrow f'(2x+3)+2 \le 2 \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$.

Đặt $t = 2x+3 \Leftrightarrow x = \dfrac{t-3}{2}$ khi đó $f'(t) \le 0 \Leftrightarrow 1 \le \dfrac{t-3}{2} \le 3 \Leftrightarrow 5 \le t \le 9$.

Vậy $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(5;9)$.

**Câu 51:** Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c\,(a,b,c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ




Hàm số $g(x) = f(f'(x))$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Vì các điểm $(-1;0),(0;0),(1;0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} -1+a-b+c=0 \\ c=0 \\ 1+a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \Rightarrow f'(x)=x^3-x \Rightarrow f''(x)=3x^2-1 \\ c=0 \end{cases}$$

Ta có: $g(x) = f(f'(x)) \Rightarrow g'(x) = f'(f'(x)).f''(x)$

Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow g'(x)=f'(f'(x)).f''(x)=0 \Leftrightarrow f'(x^3-x)(3x^2-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^3-x=0 \\ x^3-x=1 \\ x^3-x=-1 \\ 3x^2-1=0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=0 \\ x=x_1 (x_1 \approx 1,325\quad) \\ x=x_2 (x_2 \approx -1,325) \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-1,325$ | | $-1$ | | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | $0$ | | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | $1$ | | $1,325$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dựa vào bảng biến thiên ta có $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$

**Câu 52:** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+2x-3, \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số *m* thuộc đoạn $[-10;20]$ để hàm số $g(x)=f(x^2+3x-m)+m^2+1$ đồng biến trên $(0;2)$?

**A.** 16. **B.** 17. **C.** 18. **D.** 19.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $f'(t)=t^2+2t-3\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le -3 \\ t\ge 1 \end{array}\right. \quad (*)$.

Có $g'(x)=(2x+3)f'(x^2+3x-m)$

Vì $2x+3>0, \forall x\in(0;2)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $(0;2) \Leftrightarrow g'(x)\ge 0, \forall x\in(0;2)$

$\Leftrightarrow f'(x^2+3x-m)\ge 0, \forall x\in(0;2)$

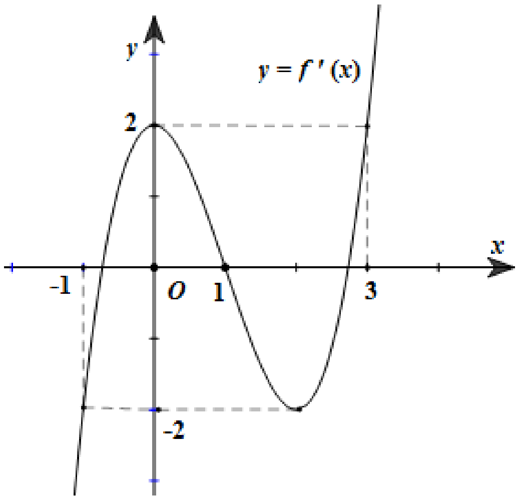
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-m\le -3, \forall x\in(0;2) \\ x^2+3x-m\ge 1, \forall x\in(0;2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x\le m-3, \forall x\in(0;2) \\ x^2+3x\ge m+1, \forall x\in(0;2) \end{array}\right.$

Có $h(x)=x^2+3x$ luôn đồng biến trên $(0;2)$ nên từ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m-3\ge 10 \\ m+1\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 13 \\ m\le -1 \end{array}\right.$

Vì $\begin{cases} m\in[-10;20] \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$ Có 18 giá trị của tham số *m*.

Vậy có 18 giá trị của tham số *m* cần tìm.

**Câu 53:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.




Đặt $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$ với $m$ là tham số thực. Gọi $S$ là tập các giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoản $(5;6)$.Tổng các phần tử của $S$ bằng:

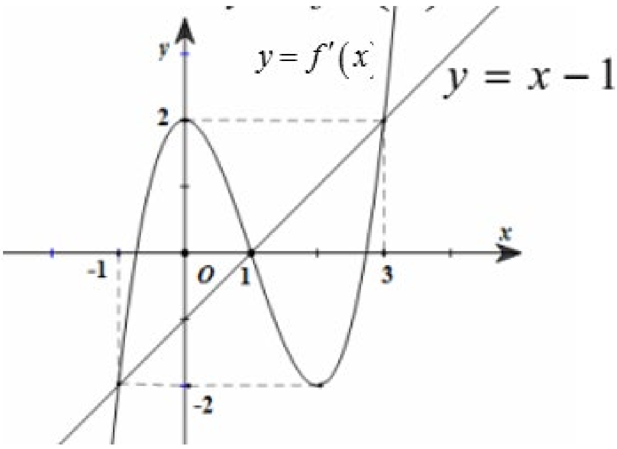
**A.** $4$. **B.** $11$. **C.** $14$. **D.** $20$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $g'(x) = f'(x-m) - (x-m-1)$

Đặt $h(x) = f'(x) - (x-1)$. Từ đồ thị $y = f'(x)$ và đồ thị $y = x-1$ trên hình vẽ ta suy ra $h(x) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{array}\right.$




Ta có $g'(x) = h(x-m) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq x-m \leq 1 \\ x-m \geq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1 \leq x \leq m+1 \\ x \geq m+3 \end{array}\right.$

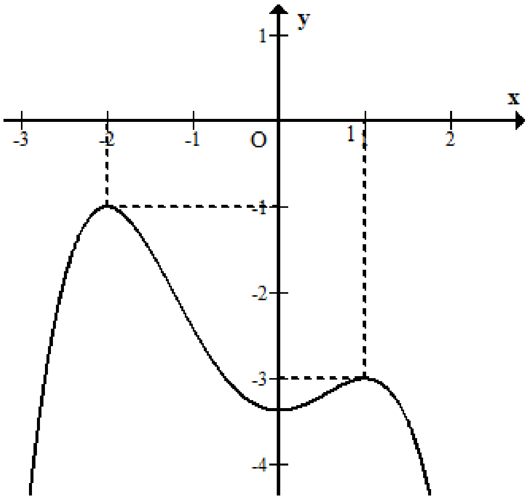
Do đó hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(m-1; m+1)$ và $(m+3; +\infty)$

Do vậy, hàm số $y=g\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(5;6\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m-1\le 5\\ m+1\ge 6\end{cases}\\ m+3\le 5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5\le m\le 6\\ m\le 2\end{array}\right.$

Do $m$ nguyên dương nên $m\in\left\{1;2;5;6\right\}$, tức $S=\left\{1;2;5;6\right\}$

Tổng các phần tử của $S$ bằng 14.

**Câu 54:** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ.




Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$, $m\in Z,-2020<m<2020$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2\right)+mx^2\left(x^2+\frac{8}{3}x-6\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-3;0\right)$

**A.** 2021. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2022.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $g'\left(x\right)=2xf'\left(x^2\right)+4mx\left(x^2+2x-3\right)$.

Hàm số $g\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-3;0\right)$ suy ra $g'\left(x\right)\ge 0,\ \forall x\in\left(-3;0\right)$.

$2xf'\left(x^2\right)+4mx\left(x^2+2x-3\right)\ge 0,\forall x\in\left(-3;0\right)\Leftrightarrow f'\left(x^2\right)-2m\left(-x^2-2x+3\right)\le 0,\forall x\in\left(-3;0\right)$

$\Leftrightarrow f'\left(x^2\right)\le 2m\left(-x^2-2x+3\right),\forall x\in\left(-3;0\right)\Leftrightarrow m\ge\frac{f'\left(x^2\right)}{2\left(-x^2-2x+3\right)},\forall x\in\left(-3;0\right)$

$\Leftrightarrow m\ge\max\limits_{(-3;0)}\frac{f'\left(x^2\right)}{2\left(-x^2-2x+3\right)}$.

Ta có $-3<x<0\Rightarrow 0<x^2<9\Rightarrow f'\left(x^2\right)\le -3$ dấu "=" khi $x^2=1\Leftrightarrow x=-1$.

$-x^2-2x+3=-\left(x+1\right)^2+4\Rightarrow 0<-x^2-2x+3\le 4,\forall x\in\left(-3;0\right)$

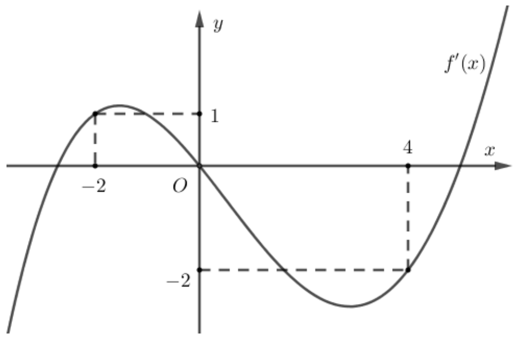
$\Leftrightarrow\frac{1}{-x^2-2x+3}\ge\frac{1}{4}$, dấu "=" khi $x=-1$.

Suy ra $\dfrac{f'\left(x^2\right)}{2\left(-x^2-2x+3\right)} \le \dfrac{-3}{2.4} = \dfrac{-3}{8}$, $\forall x \in \left(-3;0\right)$, dấu “$=$” khi $x=-1$.

$\Rightarrow \max\limits_{(-3;0)} \dfrac{f'\left(x^2\right)}{2\left(x^2+2x+3\right)} = -\dfrac{3}{8}$.

Vậy $m \ge -\dfrac{3}{8}$, mà $m \in \mathbb{Z}$, $-2020 < m < 2020$ nên có 2020 giá trị của tham số $m$ thỏa mãn bài toán.

**Câu 55:** Cho hàm số $f\left(x\right)$. Hàm số $y = f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình sau.




Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $g(x) = 4f(x-m) + x^2 - 2mx + 2020$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $0$. **D.** $1$.

**Lời giải**

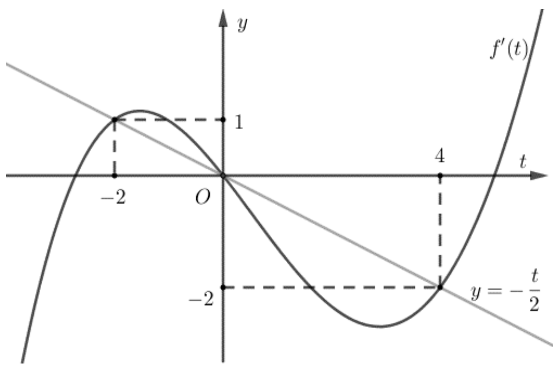
**Chọn A**

Ta có $g'(x) = 4f'(x-m) + 2x - 2m$

$g'(x) \ge 0 \Leftrightarrow f'(x-m) \ge -\dfrac{x-m}{2}$ $(*)$

Đặt $t = x - m$ thì $(*) \Leftrightarrow f'(t) \ge -\dfrac{t}{2}$

Vẽ đường thẳng $y = -\dfrac{x}{2}$ trên cùng hệ trục $Oxy$ với đồ thị $y = f'\left(x\right)$ như hình vẽ sau




Từ đồ thị ta có $f'(t) \ge -\dfrac{t}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \le t \le 0 \\ t \ge 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2 \le x \le m \\ x \ge m+4 \end{array}\right.$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2) \Leftrightarrow g'(x) \geq 0 \ \ \forall x \in (1;2)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2 \leq 1 < 2 \leq m \\ m+4 \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \leq m \leq 3 \\ m \leq -3 \end{array}\right.$$

Vì $m$ nguyên dương nên $m \in \{2;3\}$.

Vậy có hai giá trị nguyên dương của $m$ đề hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

**Câu 56:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-4)$; $\forall x \in \mathbb{R}$ .Có bao nhiêu số nguyên $m < 2020$ để hàm số $g(x) = f\left(\dfrac{2-x}{1+x} - m\right)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

**A.** $2018$. **B.** $2019$. **C.** $2020$. **D.** $2021$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $g'(x) = -\dfrac{3}{(x+1)^2} f'\left(\dfrac{2-x}{1+x} - m\right)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$

$$\Leftrightarrow g'(x) \geq 0; \forall x \in (2;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{(x+1)^2} f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right) \geq 0; \forall x \in (2;+\infty)$$

$$\Leftrightarrow f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right) \leq 0; \forall x \in (2;+\infty)$$

Ta có: $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-4) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -1 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{array}\right.$

Do đó: $f'\left(\dfrac{2-x}{1+x} - m\right) \leq 0; \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \dfrac{2-x}{1+x} - m \leq -1; \forall x \in (2;+\infty) & (1) \\ 1 \leq \dfrac{2-x}{1+x} - m \leq 4; \forall x \in (2;+\infty) & (2) \end{array}\right.$

Hàm số $h(x) = \dfrac{2-x}{1+x} - m$ ; $x \in (2;+\infty)$ có bảng biến thiên:

| $x$ | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | |
| $h(x)$ | $-m$ | | $-\infty$ |

Căn cứ bảng biến thiên suy ra: Điều kiện $(2)$ không có nghiệm $m$ thỏa mãn.

Điều kiện $(1)$ $\Leftrightarrow -m \le -1$ $\Leftrightarrow m \ge 1$,kết hợp điều kiện $m < 2020$ suy ra có $2019$ giá trị $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Nhận xét**: Có thể mở rộng bài toán đã nêu như sau:

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-4); \forall x \in \mathbb{R}$ .Có bao nhiêu số nguyên $m < 2020$ để hàm số $g(x) = f\left(\frac{2-x}{1+x} + h(m)\right)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.