



LỚP TOÁN THẦY CƯ- TP HUẾ

CS 1: Trung tâm MASTER EDUCATION- 25 THẠCH HẪN

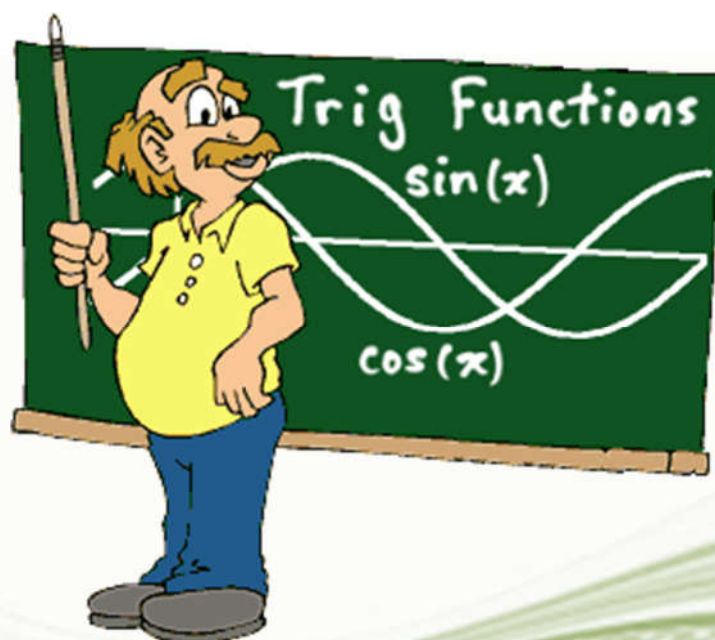
CS 2: Trung Tâm 133 Xuân 68

CS 3: Trung tâm 168 Mai Thúc Loan

CS4: Trung Tâm THPT Nguyễn Trường Tộ

BÀI GIẢNG CHƯƠNG 1 TOÁN 11-CTST

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC



TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH LỚP TOÁN THẦY CƯ-TP HUẾ

(Chiêu sinh thường xuyên, bổ trợ kiến thức kịp thời)

MỤC LỤC

BÀI 1: GÓC LƯỢNG GIÁC.....	4
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM.....	4
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP	6
Dạng 1 : Đơn vị đo độ và radian	6
1. Phương pháp	6
2. Các ví dụ minh họa.....	6
Dạng 2: Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác	6
1. Phương pháp	6
2. Các ví dụ minh họa.....	7
Dạng 3. Độ dài của một cung tròn	8
1. Phương pháp giải	8
2. Các ví dụ minh họa.....	8
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA BÀI TẬP	9
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	15
BÀI 2: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC	25
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM.....	25
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP	28
Dạng 1 : Tính giá trị của góc còn lại hoặc của một biểu thức lượng giác khi biết một giá trị lượng giác.....	28
1. Phương pháp giải.	28
2. Các ví dụ minh họa.....	28
Dạng 2: Xác định giá trị của biểu thức chứa góc đặc biệt, góc liên quan đặc biệt và dấu của giá trị lượng giác của góc lượng giác.	31
1. Phương pháp giải.	31
2. Các ví dụ minh họa.....	31
Dạng 3: Chứng minh đẳng thức lượng giác, chứng minh biểu thức không phụ thuộc góc x , đơn giản biểu thức.....	33
1. Phương pháp giải.	33
2. Các ví dụ minh họa.....	33
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA	36

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	41
BÀI 3: CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC	66
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM.....	66
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP	66
Dạng 1: Sử dụng công thức cộng	66
1. Phương pháp giải.	66
2. Các ví dụ minh họa.....	67
Dạng 2: Sử dụng công thức nhân đôi và công thức hạ bậc.....	71
1. Phương pháp	71
2. Các ví dụ minh họa.....	72
Dạng 3: Công thức biến đổi tổng thành tích và tích thành tổng	76
1. Phương pháp giải.	76
2. Các ví dụ minh họa.....	76
Dạng 4: bất đẳng thức lượng giác và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức lượng giác.	81
1. Phương pháp giải.	81
2. Các ví dụ điển hình.....	81
Dạng 5: chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức trong tam giác.....	84
1. Phương pháp giải	84
2. Các ví dụ minh họa.....	84
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA	91
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	98
BÀI 4: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ.....	127
A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM.....	127
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP LỜI GIẢI BÀI TẬP	130
Dạng 1: Tìm tập xác định của hàm số.....	130
1. Phương pháp	130
2. Các ví dụ mẫu	131
Dạng 2: Xét tính chẵn lẻ của hàm số.....	133
1. Phương pháp:	133
2. Các ví dụ mẫu	133
Dạng 3. Tìm giá trị lớn nhất và và giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác.....	136

1. Phương pháp:	136
2. Ví dụ mẫu.....	136
Dạng 4. Chứng minh hàm số tuần hoàn và xác định chu kỳ của nó	139
1. Phương pháp	139
2. Ví dụ mẫu.....	140
Dạng 5. Đồ thị của hàm số lượng giác.....	141
1. Phương pháp	141
2. Các ví dụ mẫu	142
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA	145
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	148
BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 1.....	178
CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM	178
BÀI TẬP TỰ LUẬN	181
BÀI TẬP TỔNG ÔN CHƯƠNG 1.....	185
PHẦN 1: TRẮC NGHIỆM.....	185
PHẦN 2: TỰ LUẬN	193

CHƯƠNG 1: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 1: GÓC LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM.

1. Góc lượng giác

Khái niệm góc lượng giác

Khi xét chuyển động quay của một tia Om quanh gốc O của nó tính từ vị trí ban đầu Oa theo một chiều cố định, người ta quy ước chiều quay ngược chiều kim đồng hồ là chiều dương và chiều quay cùng chiều kim đồng hồ là chiều âm.

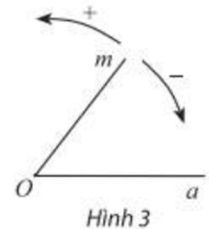
Một vòng quay theo chiều dương tương ứng với góc quay 360° , một vòng quay theo chiều âm tương ứng với góc quay -360° .

Khi tia Om quay:

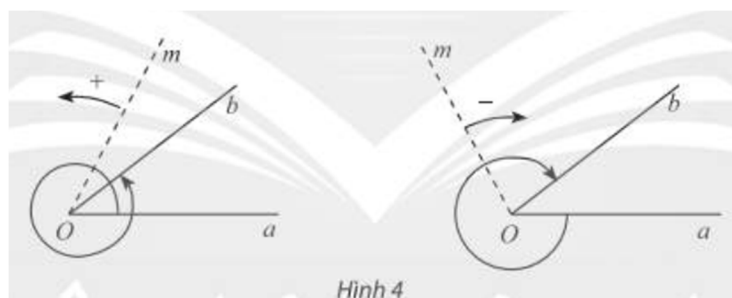
- nửa vòng theo chiều dương thì ta nói Om quay góc $\frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$;
- $\frac{1}{6}$ vòng theo chiều dương thì ta nói Om quay góc $\frac{1}{6} \cdot 360^\circ = 60^\circ$;
- $\frac{5}{4}$ vòng theo chiều âm thì ta nói Om quay góc $\frac{5}{4} \cdot (-360^\circ) = -450^\circ$.

Cho hai tia Oa, Ob .

- Nếu một tia Om quay quanh gốc O của nó theo một chiều cố định bắt đầu từ vị trí tia Oa và dừng ở vị trí tia Ob thì ta nói tia Om quét một **góc lượng giác** có tia đầu Oa , tia cuối Ob , kí hiệu (Oa, Ob) .
- Khi tia Om quay một góc α , ta nói số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) bằng α , kí hiệu $sđ(Oa, Ob) = \alpha$.



Hình 3



Hình 4

Chú ý: Với hai tia Oa và Ob cho trước, có vô số góc lượng giác tia đầu Oa và tia cuối Ob . Ta dùng chung kí hiệu (Oa, Ob) cho tất cả các góc lượng giác này.

Nhận xét: Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu Oa và tia cuối Ob sai khác nhau một bội nguyên của 360° nên có công thức tổng quát là:

$sđ(Oa, Ob) = \alpha^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$, thường viết là $(Oa, Ob) = \alpha^\circ + k360^\circ$ với α° là số đo của một góc lượng giác bất kì có tia đầu Oa và tia cuối Ob .

Hệ thức Chasles (Sa-lơ)

Ta thừa nhận hệ thức sau về số đo của góc lượng giác, gọi là **hệ thức Chasles**:

Với ba tia Oa, Ob và Oc bất kì, ta có

$$(Oa, Ob) + (Ob, Oc) = (Oa, Oc) + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$$

2. Đơn vị radian

-Trên đường tròn bán kính R tùy ý, góc ở tâm chắn một cung có độ dài đúng bằng R được gọi là một góc có số đo 1 radian (đọc là 1 ra-di-an, viết tắt là 1 rad).

Ta có công thức chuyển đổi số đo góc từ đơn vị radian sang độ và ngược lại như sau:

$$\alpha^\circ = \frac{\pi \alpha}{180} \text{ rad}$$

$$\alpha \text{ rad} = \left(\frac{180\alpha}{\pi} \right)^\circ$$

Chú ý:

a) Khi ghi số đo của một góc theo đơn vị radian, người ta thường bỏ đi chữ rad sau số đo. Ví dụ, $\frac{\pi}{2}$ rad được viết là $\frac{\pi}{2}$, 2 rad được viết là 2.

b) Với đơn vị radian, công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Oa, Ob) là

$$(Oa, Ob) = \alpha + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

trong đó α là số đo theo radian của một góc lượng giác bất kì có tia đầu Oa và tia cuối Ob .

Lưu ý không được viết $\alpha + k360^\circ$ hay $\alpha^\circ + k2\pi$ (vì không cùng đơn vị đo).

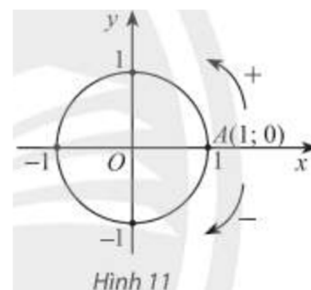
3. Đường tròn lượng giác

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn tâm O bán kính bằng 1.

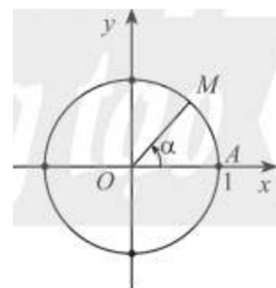
Trên đường tròn này, chọn điểm $A(1;0)$ làm gốc, chiều dương là chiều ngược chiều kim đồng hồ và chiều âm là chiều cùng chiều kim đồng hồ.

Đường tròn cùng với gốc và chiều như trên được gọi là **đường tròn lượng giác**.

Cho số đo góc α bất kì. Trên đường tròn lượng giác, ta xác định được duy nhất một điểm M sao cho số đo góc lượng giác (OA, OM) bằng α (Hình 12). Khi đó điểm M được gọi là điểm biểu diễn của góc có số đo α trên đường tròn lượng giác.



Hình 11



Hình 12

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1 : Đơn vị đo độ và radian

1. Phương pháp

Dùng mối quan hệ giữa độ và radian: $180^\circ = \pi \text{ rad}$

Đổi cung a có số đo từ radian sang độ $a \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$

Đổi cung x° có số đo từ độ ra radian $x^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: a) Đổi số đo của các góc sau ra radian: $72^\circ, 600^\circ, -37^\circ 45' 30''$.

b) Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{5\pi}{18}, \frac{3\pi}{5}, -4$.

Lời giải

a) Vì $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ nên $72^\circ = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}$, $600^\circ = 600 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{10\pi}{3}$,

$-37^\circ 45' 30'' = -37^\circ - \left(\frac{45}{60}\right)^\circ - \left(\frac{30}{60 \cdot 60}\right)^\circ = \left(\frac{4531}{120}\right)^\circ = \frac{4531}{120} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,6587$

b) Vì $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ nên $\frac{5\pi}{18} = \left(\frac{5\pi}{18} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 50^\circ$, $\frac{3\pi}{5} = \left(\frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 108^\circ$,

$-4 = -\left(4 \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = -\left(\frac{720}{\pi}\right)^\circ \approx -2260^\circ 48'$.

Dạng 2: Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác

1. Phương pháp

Để biểu diễn cung lượng giác có số đo trên đường tròn lượng giác ta thực hiện như sau:

- Chọn điểm $A(1;0)$ làm điểm đầu của cung.
- Xác định điểm cuối M của cung sao cho $\widehat{AM} = \alpha$

Lưu ý:

- + Số đo của các cung lượng giác có cùng điểm đầu và điểm cuối sai khác nhau một bội của 2π là:

$$\text{sđ } \widehat{AM} = \alpha + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Ngoài ra, ta cũng có thể viết số đo bằng độ:

$$\text{sđ } \widehat{AM} = x^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

+ Nếu ta có $\widehat{AM} = \alpha + k \frac{2\pi}{n}; k, n \in \mathbb{Z}$ thì sẽ có n điểm ngọn.

2. Các ví dụ minh họa.

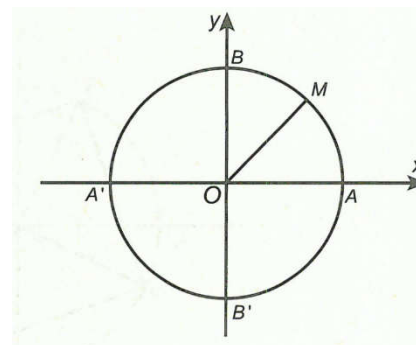
Ví dụ 1: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là $\frac{25\pi}{4}$

Lời giải

Ta có

$$\text{sđ } \widehat{AM} = \frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{24\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 6\pi = \frac{\pi}{4} + 2.3.\pi$$

Vậy điểm cuối M của cung $\widehat{AM}$ sẽ trùng với điểm ngọn của cung $\frac{\pi}{4}$. Suy ra M là điểm chính giữa của cung nhỏ $\widehat{AB}$.



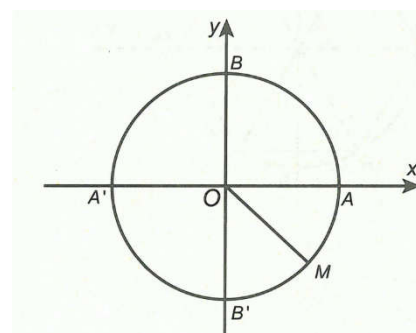
Ví dụ 2: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là -1485°

Lời giải

Ta có $\text{sđ } \widehat{AM} = -1485^\circ = -45^\circ + (-4).360^\circ$

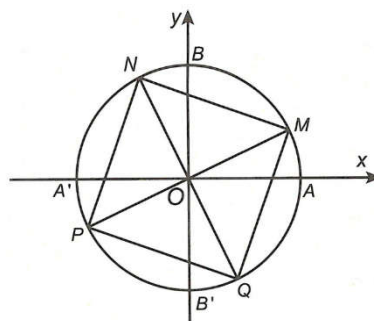
Vậy điểm cuối M của cung $\widehat{AM}$ sẽ trùng với điểm ngọn của cung -45° .

Suy ra M là điểm chính giữa của cung nhỏ $\widehat{AB'}$.



Ví dụ 3: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là $\frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$

Lời giải



Ta có $\text{sđ } \widehat{AM} = \frac{\pi}{6} + k \frac{2\pi}{4}$ nên có 4 điểm ngọn trên đường tròn lượng giác.

$k = 0 \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AM} = \frac{\pi}{6}$ có điểm ngọn là M

$$k = 1 \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AN} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \text{ có điểm ngọn là } N$$

$$k = 2 \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AP} = \frac{\pi}{6} + \pi \text{ có điểm ngọn là } P$$

$$k = 3 \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AQ} = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} \text{ có điểm ngọn là } Q$$

$$k = 4 \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AR} = \frac{\pi}{6} + 2\pi \text{ có điểm ngọn là } R. \text{ Lúc này điểm ngọn } R \text{ trùng với } M$$

Vậy bốn điểm M, N, P, Q tạo thành một hình vuông nội tiếp đường tròn lượng giác

Ví dụ 4: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là

$$k\frac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$$

Lời giải

Ta có $\text{sđ } \widehat{AM} = k\frac{2\pi}{6}$ nên có 6 điểm ngọn trên đường tròn lượng giác.

$$k = 0 \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AM} = 0 \text{ có điểm ngọn là } M$$

$$k = 1 \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AN} = \frac{\pi}{3} \text{ có điểm ngọn là } N$$

$$k = 2 \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AP} = \frac{2\pi}{3} \text{ có điểm ngọn là } P$$

$$k = 3 \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AQ} = \pi \text{ có điểm ngọn là } Q$$

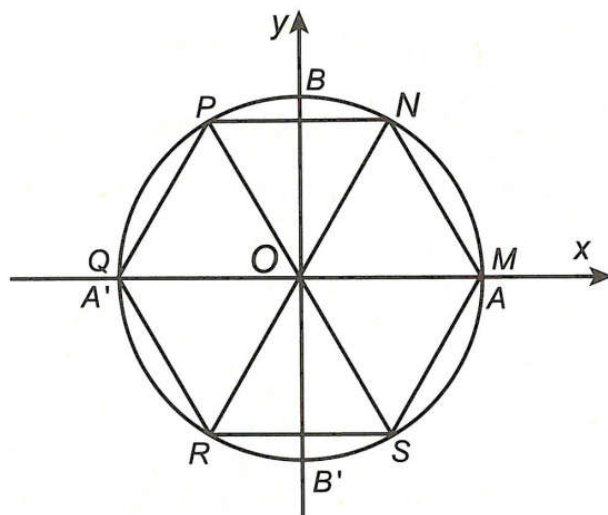
$$k = 4 \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AR} = \frac{4\pi}{3} \text{ có điểm ngọn là } R$$

$$k = 5 \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AS} = \frac{5\pi}{3} \text{ có điểm ngọn là } S$$

$$k = 6 \Rightarrow \text{sđ } \widehat{AT} = 2\pi \text{ có điểm ngọn là } T$$

Lúc này điểm ngọn T trùng với M

Vậy sáu điểm $M; N; P; Q; R; S$ tạo thành một lục giác đều nội tiếp đường tròn lượng giác.



Dạng 3. Độ dài của một cung tròn

1. Phương pháp giải

Cung có số đo α rad của đường tròn bán kính R có độ dài là $I = R.\alpha$

2. Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Một đường tròn có bán kính 30 cm. Tìm độ dài của các cung trên đường tròn có số đo

sau đây: $\frac{\pi}{15}$ rad; 70°

Lời giải

Gọi α, l, R lần lượt là số đo cung, độ dài cung và bán kính của đường tròn. Khi đó $R = 30$ cm

Độ dài cung có số đo $\frac{\pi}{15}$ rad là:

$$l = R \cdot \alpha = 30 \cdot \frac{\pi}{15} = 2\pi \text{ (cm)}$$

Độ dài cung có số đo 70°

$$\text{Chuyển từ độ sang radian: } 70^\circ = 70^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{7\pi}{18}$$

$$\text{Độ dài cung: } l = R \cdot \alpha = 30 \cdot \frac{7\pi}{18} = \frac{35\pi}{3} \text{ (cm)}$$

Ví dụ 2: Một cung lượng giác trên đường tròn định hướng có độ dài bằng một nửa bán kính. Số đo theo radian của cung đó là

A. $\frac{1}{2}$ rad

B. 1 rad

C. $\frac{3}{2}$ rad

D. 2 rad

Lời giải

Gọi α, l, R lần lượt là số đo cung, độ dài cung và bán kính của đường tròn

Vì độ dài bằng nửa bán kính nên $l = \frac{1}{2}R$

$$\text{Ta có } l = R \cdot \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{\frac{1}{2}R}{R} = \frac{1}{2} \text{ (rad)}$$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA BÀI TẬP

Bài 1. Đổi số đo góc của các góc sau đây sang radian:

a) 38° ;

b) -115° ;

c) $\left(\frac{3}{\pi}\right)^\circ$.

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } 38^\circ = \frac{38\pi}{180} \text{ rad} = \frac{19\pi}{90} \text{ rad};$$

$$\text{b) } -115^\circ = -\frac{115\pi}{180} \text{ rad} = -\frac{23\pi}{36} \text{ rad};$$

$$\text{c) } \left(\frac{3}{\pi}\right)^\circ = \frac{3\pi}{180\pi} \text{ rad} = \frac{1}{60} \text{ rad}$$

Bài 2. Đổi số đo góc của các góc sau đây sang độ:

a) $\frac{\pi}{12}$;

b) -5 ;

c) $\frac{13\pi}{9}$

Lời giải

a) $\frac{\pi}{12} = \left(\frac{\pi}{12} \cdot \frac{180}{\pi} \right)^\circ = 15^\circ$

b) $-5 = \left(-5 \cdot \frac{180}{\pi} \right)^\circ \approx -286,62^\circ$

c) $\frac{13\pi}{9} = \left(\frac{13\pi}{9} \cdot \frac{180}{\pi} \right)^\circ = 260^\circ$

Bài 3. Biểu diễn các góc sau đây trên đường tròn lượng giác:

a) $\frac{-17\pi}{3}$;

b) $\frac{13\pi}{4}$;

c) -765° .

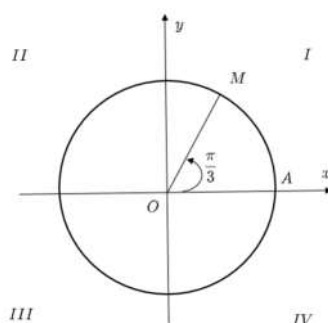
Lời giải

a) Ta có: $-\frac{17\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + (-3) \cdot 2\pi$

Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $-\frac{17\pi}{3}$ là điểm M trên phần đường tròn lượng giác

thuộc góc phần tư thứ nhất sao cho

$\widehat{AOM} = 60^\circ$.

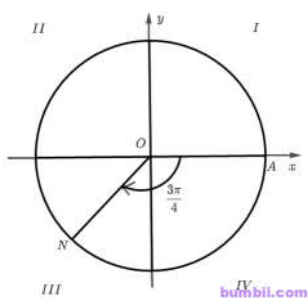


b) Ta có: $\frac{13\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi$

Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo $\frac{13\pi}{4}$ là điểm N trên phần đường tròn lượng giác

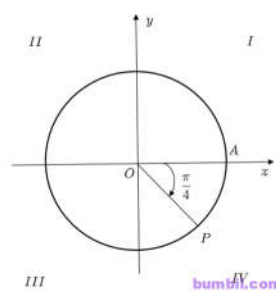
thuộc góc phần tư thứ ba sao cho

$\widehat{AON} = \frac{3\pi}{4}$.



c) $-765^\circ = -45^\circ - 2 \cdot 360^\circ$

Vậy điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo -765° là điểm P trên phần đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ tư sao cho



$$\widehat{AOP} = 45^\circ.$$

Bài 4. Góc lượng giác $\frac{31\pi}{7}$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc lượng giác nào sau đây?

$$\frac{3\pi}{7}; \frac{10\pi}{7}; \frac{-25\pi}{7}.$$

Lời giải

Hai góc lượng giác (α và β) có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác khi và chỉ khi:

$$\alpha = \beta + k.2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có:

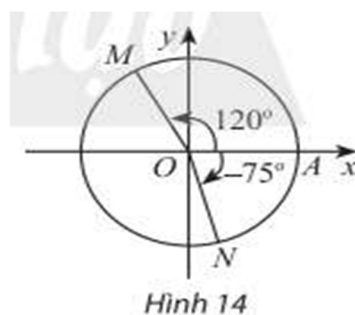
$$\frac{31\pi}{7} = \frac{3\pi}{7} + 2.2\pi \text{ thỏa mãn } k = 2 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{31\pi}{7} = \frac{10\pi}{7} + \frac{3}{2}.2\pi \text{ không thỏa mãn } k = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$\frac{31\pi}{7} = -\frac{25\pi}{7} + 4.2\pi \text{ thỏa mãn } k = 4 \in \mathbb{Z}$$

Suy ra, góc lượng giác $\frac{31\pi}{7}$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với các góc lượng giác: $-\frac{25\pi}{7}$ (Điểm biểu diễn thuộc góc phần tư thứ nhất).

Bài 5. Viết công thức số đo tổng quát của các góc lượng giác (OA, OM) và (OA, ON) trong Hình 14.



Hình 14

Lời giải

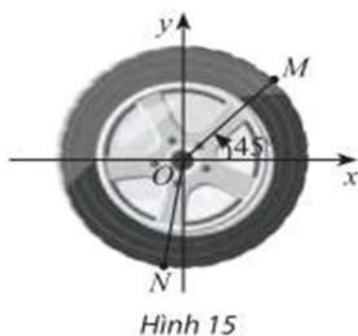
Công thức số đo tổng quát của các góc lượng giác (OA, OM) là:

$$(OA, OM) = 120^\circ + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Công thức số đo tổng quát của các góc lượng giác (OA, ON) là:

$$(OA, ON) = -75^\circ + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 6. Trong Hình 15, mâm bánh xe ô tô được chia thành 5 phần bằng nhau. Viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, ON) .



Lời giải

Do mâm bánh xe ô tô được chia thành 5 phần bằng nhau nên số đo góc của mỗi phần sẽ là:
 $360^\circ : 5 = 72^\circ$

Theo Hình 15, $\widehat{MON}$ tương ứng với 2 trong 5 phần đã chia hay $\widehat{MON} = 2.72^\circ = 144^\circ$

Mà $\widehat{xOM} = 45^\circ$

Suy ra $\widehat{xON} = 144 - 45^\circ = 99^\circ$

Vậy công thức số đo tổng quát của góc lượng giác $(Ox, ON) = -99^\circ + k.360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$

Bài 7. Trên đường tròn lượng giác, hãy biểu diễn các góc lượng giác có số đo có dạng là:

a) $\frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z});$

b) $k\frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Lời giải

a) Với $k = 0$ thì có góc lượng giác có số đo góc là $\frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm M; Với $k = 1$ thì

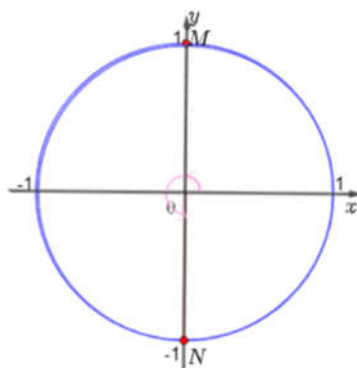
có góc lượng giác có số đo góc là $\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm N;

Với $k = 2$ thì có góc lượng giác có số đo góc là $\frac{\pi}{2} + 2\pi$ nên cũng được biểu diễn bởi điểm M;

Với $k = 3$ thì có góc lượng giác có số đo góc là $\frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{3\pi}{2} + 2\pi$ nên cũng được biểu diễn bởi điểm

N.

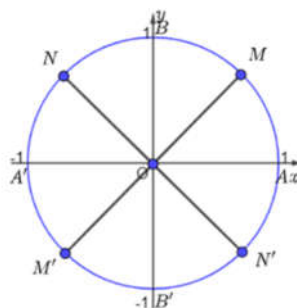
Vậy với k chẵn thì các góc lượng giác có số đo dạng $\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ được biểu diễn bởi điểm M , với k lẻ thì các góc lượng giác có số đo dạng $\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ được biểu diễn bởi điểm N khi đó ta có hình vẽ sau:



- b) Với $k = 0$ thì có góc lượng giác có số đo góc là 0 , được biểu diễn bởi điểm A ;
 Với $k = 1$ thì có góc lượng giác có số đo góc là $\frac{\pi}{2}$, được biểu diễn bởi điểm M ;
 Với $k = 2$ thì có góc lượng giác có số đo góc là $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ được biểu diễn bởi điểm B ;
 Với $k = 3$ thì có góc lượng giác có số đo góc là $\frac{3\pi}{4}$ được biểu diễn bởi điểm N ;
 Với $k = 4$ thì có góc lượng giác có số đo góc là $\frac{4\pi}{4} = \pi$ được biểu diễn bởi điểm A' ;
 Với $k = 5$ thì có góc lượng giác có số đo góc là $\frac{5\pi}{4}$ được biểu diễn bởi điểm M' ;
 Với $k = 6$ thì có góc lượng giác có số đo góc là $\frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$ được biểu diễn bởi điểm B' ;
 Với $k = 7$ thì có góc lượng giác có số đo góc là $\frac{7\pi}{4}$ được biểu diễn bởi điểm N' ;
 Với $k = 8$ thì có góc lượng giác có số đo góc là $\frac{8\pi}{4} = 2\pi + 0$ nên được biểu diễn bởi điểm A ;
 Vậy các góc lượng giác có số đo dạng $\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ được biểu diễn bởi các điểm $A, M, B, N,$

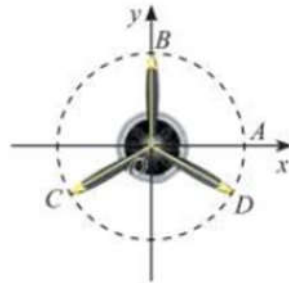
A', M', B', N' . Khi đó ta có hình vẽ

sau:



Bài 8. Vị trí các điểm B, C, D trên cánh quạt động cơ máy bay trong Hình 16 có thể được biểu diễn cho các góc lượng giác nào sau đây?

$$\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}); \frac{-\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}); \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$



Hình 16

Lời giải

+) Xét các góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Với k chẵn ta có các góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ được biểu diễn bởi điểm B ;

Với k lẻ ta có các góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ được biểu diễn bởi điểm $B'(0; -1)$.

Vì vậy các điểm B, C, D không thể biểu diễn cho các góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

+) Xét các góc lượng giác có số đo $\frac{-\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

Với $k = 0$ ta có góc lượng giác có số đo $\frac{-\pi}{6}$ được biểu diễn bởi điểm D .

Với $k = 1$ ta có góc lượng giác có số đo $\frac{-\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ được biểu diễn bởi điểm B .

Với $k = 2$ ta có góc lượng giác có số đo $\frac{-\pi}{6} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$ được biểu diễn bởi điểm C .

Với $k = 3$ ta có góc lượng giác có số đo $\frac{-\pi}{6} + 3 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{-\pi}{6} + 2\pi$ được biểu diễn bởi điểm D .

Vì vậy các góc lượng giác có số đo $\frac{-\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ được biểu diễn bởi các điểm B, C, D .

+) Xét các góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

Với $k = 0$ ta có góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2}$ được biểu diễn bởi điểm B .

Với $k = 1$ ta có góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ được biểu diễn bởi điểm M .

Với $k = 2$ ta có góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$ được biểu diễn bởi điểm C .

Với $k = 3$ ta có góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2} + 3\frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$. được biểu diễn bởi điểm B' .

Với $k = 4$ ta có góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2} + 4\frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi$ được biểu diễn bởi điểm D

Với $k = 5$ ta có góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2} + 5\frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi$ được biểu diễn bởi điểm N .

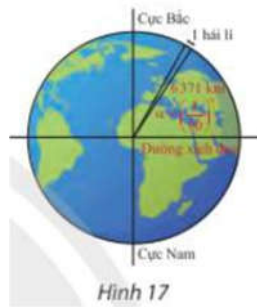
Với $k = 6$ ta có góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{2} + 6\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ được biểu diễn bởi điểm B .

Ví vậy các điểm B, C, D không thể biểu diễn cho các góc lượng giác có số đo là $\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

9. Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc

$\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ của đường kinh tuyến (Hình 17). Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng

khoảng bao nhiêu kilômét, biết bán kính trung bình của Trái Đất là 6371 km. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Lời giải

Ta có: $\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ = \frac{\pi \cdot \frac{1}{60}}{180} = \frac{\pi}{10800} \text{ rad}.$

Độ dài cung chắn góc α là: $a \cdot R = \frac{\pi}{10800} \cdot 6371 \approx 1,85 \text{ km}.$

Vậy 1 hải lí bằng 1,85km.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "**đường tròn định hướng**"?

- A.** Mỗi đường tròn là một đường tròn định hướng.
- B.** Mỗi đường tròn đã chọn một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.
- C.** Mỗi đường tròn đã chọn một chiều chuyển động và một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.
- D.** Mỗi đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương và chiều ngược lại được gọi là chiều âm là một đường tròn định hướng.

Lời giải

Chọn D

Câu 2: Quy ước chọn chiều dương của một đường tròn định hướng là:

- A. Luôn cùng chiều quay kim đồng hồ.
- B. Luôn ngược chiều quay kim đồng hồ.
- C. Có thể cùng chiều quay kim đồng hồ mà cũng có thể là ngược chiều quay kim đồng hồ.
- D. Không cùng chiều quay kim đồng hồ và cũng không ngược chiều quay kim đồng hồ.

Lời giải

Chọn B

Câu 3: Trên đường tròn định hướng, mỗi cung lượng giác $\overset{b}{AB}$ xác định:

- A. Một góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
- B. Hai góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
- C. Bốn góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
- D. Vô số góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .

Lời giải

Chọn D

Câu 4: Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "góc lượng giác"?

- A. Trên đường tròn tâm O bán kính $R=1$, góc hình học AOB là góc lượng giác.
- B. Trên đường tròn tâm O bán kính $R=1$, góc hình học AOB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B là góc lượng giác.
- C. Trên đường tròn định hướng, góc hình học AOB là góc lượng giác.
- D. Trên đường tròn định hướng, góc hình học AOB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B là góc lượng giác.

Lời giải

Chọn D

Câu 5: Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "đường tròn lượng giác"?

- A. Mỗi đường tròn là một đường tròn lượng giác.
- B. Mỗi đường tròn có bán kính $R=1$ là một đường tròn lượng giác.
- C. Mỗi đường tròn có bán kính $R=1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.
- D. Mỗi đường tròn định hướng có bán kính $R=1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.

Lời giải

Chọn D

Câu 6: Trên đường tròn cung có số đo 1 rad là?

- A. Cung có độ dài bằng 1.
- B. Cung tương ứng với góc ở tâm 60° .
- C. Cung có độ dài bằng đường kính.
- D. Cung có độ dài bằng nửa đường kính.

Lời giải

Chọn D

Cung có độ dài bằng bán kính (nửa đường kính) thì có số đo bằng 1 rad.

Câu 7: Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\pi \text{ rad} = 1^\circ$. B. $\pi \text{ rad} = 60^\circ$. C. $\pi \text{ rad} = 180^\circ$. D. $\pi \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

Lời giải

Chọn C

$\pi \text{ rad}$ tương ứng với 180° .

Câu 8: Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $1 \text{ rad} = 1^\circ$. B. $1 \text{ rad} = 60^\circ$. C. $1 \text{ rad} = 180^\circ$. D. $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\pi \text{ rad}$ tương ứng với 180° .

Suy ra 1 rad tương ứng với x° . Vậy $x = \frac{180.1}{\pi}$.

Câu 9: Nếu một cung tròn có số đo là a° thì số đo radian của nó là:

- A. $180\pi a$. B. $\frac{180\pi}{a}$. C. $\frac{a\pi}{180}$. D. $\frac{\pi}{180a}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a.\pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Câu 10: Nếu một cung tròn có số đo là $3a^\circ$ thì số đo radian của nó là:

- A. $\frac{a\pi}{60}$. B. $\frac{a\pi}{180}$. C. $\frac{180}{a\pi}$. D. $\frac{60}{a\pi}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a.\pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Trong trường hợp này là $3a \longrightarrow \alpha = \frac{3a.\pi}{180} = \frac{a\pi}{60}$.

Câu 11: Đổi số đo của góc 70° sang đơn vị radian.

- A. $\frac{70}{\pi}$. B. $\frac{7}{18}$. C. $\frac{7\pi}{18}$. D. $\frac{7}{18\pi}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a.\pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Ta có $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180} = \frac{70\pi}{180} = \frac{7\pi}{18}$.

Câu 12: Đổi số đo của góc 108° sang đơn vị radian.

- A. $\frac{3\pi}{5}$. B. $\frac{\pi}{10}$. C. $\frac{3\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 13: Đổi số đo của góc $45^\circ 32'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần nghìn.

- A. 0,7947. B. 0,7948. C. 0,795. D. 0,794.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Trước tiên ta đổi $45^\circ 32' = \left(45 + \frac{32}{60}\right)^\circ$.

Áp dụng công thức, ta được $\alpha = \frac{\left(45 + \frac{32}{60}\right) \cdot \pi}{180} = 0,7947065861$.

Câu 14: Đổi số đo của góc $40^\circ 25'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần trăm.

- A. 0,705. B. 0,70. C. 0,7054. D. 0,71.

Lời giải

Chọn D

Cách 1. Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Trước tiên ta đổi $40^\circ 25' = \left(40 + \frac{25}{60}\right)^\circ$.

Áp dụng công thức, ta được $\alpha = \frac{\left(40 + \frac{25}{60}\right) \cdot \pi}{180} = \frac{97\pi}{432} = 0,705403906$.

Câu 15: Đổi số đo của góc $-125^\circ 45'$ sang đơn vị radian.

- A. $-\frac{503\pi}{720}$. B. $\frac{503\pi}{720}$. C. $\frac{251\pi}{360}$. D. $-\frac{251\pi}{360}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 16: Đổi số đo của góc $\frac{\pi}{12}$ rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. 15° . B. 10° . C. 6° . D. 5° .

Lời giải

Chọn A

công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180} \longrightarrow a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi}\right)^\circ$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

$$\text{Ta có } a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^0 = \left(\frac{\frac{\pi}{12} \cdot 180}{\pi} \right)^0 = 15^0.$$

Câu 17: Đổi số đo của góc $-\frac{3\pi}{16}$ rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. $33^045'$. B. $-29^030'$. C. $-33^045'$. D. $-32^055'$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^0 = \left(\frac{-\frac{3\pi}{16} \cdot 180}{\pi} \right)^0 = \left(-\frac{135}{4} \right)^0 = -33^045'.$$

Câu 18: Đổi số đo của góc -5 rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. $-286^044'28''$. B. $-286^028'44''$. C. -286^0 . D. $286^028'44''$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } a = \left(\frac{\alpha \cdot 180}{\pi} \right)^0 = \left(\frac{-5 \cdot 180}{\pi} \right)^0 = -286^028'44''.$$

Câu 19: Đổi số đo của góc $\frac{3}{4}$ rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. $42^097'18''$. B. $42^058'$. C. $42^097'$. D. $42^058'18''$.

Lời giải

Chọn D

Câu 20: Đổi số đo của góc -2 rad sang đơn vị độ, phút, giây.

- A. $-114^059'15''$. B. $-114^035'$. C. $-114^035'29''$. D. $-114^059'$.

Lời giải

Chọn C

Câu 21: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Số đo của cung tròn tỉ lệ với độ dài cung đó.
B. Độ dài của cung tròn tỉ lệ với bán kính của nó.
C. Số đo của cung tròn tỉ lệ với bán kính của nó.
D. Độ dài của cung tròn tỉ lệ nghịch với số đo của cung đó.

Lời giải

Chọn A

Từ công thức $\ell = R\alpha \longrightarrow \ell$ và α tỷ lệ nhau.

Câu 22: Tính độ dài ℓ của cung trên đường tròn có bán kính bằng 20cm và số đo $\frac{\pi}{16}$.

- A. $\ell = 3,93\text{cm}$. B. $\ell = 2,94\text{cm}$. C. $\ell = 3,39\text{cm}$. D. $\ell = 1,49\text{cm}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\ell = R\alpha = 20 \cdot \frac{\pi}{16} \approx 3,93\text{cm}$.

Câu 23: Tính độ dài của cung trên đường tròn có số đo $1,5$ và bán kính bằng 20 cm .

- A. 30cm . B. 40cm . C. 20cm . D. 60cm .

Lời giải

Chọn A

Ta có $\ell = \alpha R = 1,5 \cdot 20 = 30\text{ cm}$.

Câu 24: Một đường tròn có đường kính bằng 20 cm . Tính độ dài của cung trên đường tròn có số đo 35° (lấy 2 chữ số thập phân).

- A. $6,01\text{cm}$. B. $6,11\text{cm}$. C. $6,21\text{cm}$. D. $6,31\text{cm}$.

Lời giải

Chọn B

Cung có số đo 35° thì có số đo radian là $\alpha = \frac{a\pi}{180} = \frac{35\pi}{180} = \frac{7\pi}{36}$.

Bán kính đường tròn $R = \frac{20}{2} = 10\text{ cm}$.

Suy ra $\ell = \alpha R = \frac{7\pi}{36} \cdot 10 \approx 6,11\text{ cm}$.

Câu 25: Tính số đo cung có độ dài của cung bằng $\frac{40}{3}\text{ cm}$ trên đường tròn có bán kính 20 cm .

- A. $1,5\text{ rad}$. B. $0,67\text{ rad}$. C. 80° . D. 88° .

Lời giải

Chọn B

Ta có $\ell = \alpha R \Leftrightarrow \alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{\frac{40}{3}}{20} = \frac{2}{3} \approx 0,67\text{ rad}$.

Câu 26: Một cung tròn có độ dài bằng 2 lần bán kính. Số đo radian của cung tròn đó là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn B

$\ell = \alpha R \Leftrightarrow \alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{2R}{R} = 2\text{ rad}$.

Câu 27: Trên đường tròn bán kính R , cung tròn có độ dài bằng $\frac{1}{6}$ độ dài nửa đường tròn thì có số đo (tính bằng radian) là:

- A. $\pi/2$. B. $\pi/3$. C. $\pi/4$. D. $\pi/6$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\ell = \alpha R \Leftrightarrow \alpha = \frac{\ell}{R} = \frac{\frac{1}{6}\pi R}{R} = \frac{\pi}{6}$.

Câu 28: Một cung có độ dài 10cm , có số đo bằng radian là $2,5$ thì đường tròn của cung đó có bán kính là:

- A. $2,5\text{cm}$. B. $3,5\text{cm}$. C. 4cm . D. $4,5\text{cm}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } l = R\alpha \Leftrightarrow R = \frac{l}{\alpha} = \frac{10}{2,5} = 4.$$

Câu 29: Bánh xe đạp của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 5 giây. Hỏi trong 2 giây, bánh xe quay được 1 góc bao nhiêu?

- A. $\frac{8}{5}\pi$. B. $\frac{5}{8}\pi$. C. $\frac{3}{5}\pi$. D. $\frac{5}{3}\pi$.

Lời giải

Chọn A

Trong 2 giây bánh xe đạp quay được $\frac{2.2}{5} = \frac{4}{5}$ vòng tức là quay được cung có độ dài là

$$l = \frac{4}{5} \cdot 2\pi R = \frac{8}{5}\pi R.$$

$$\text{Ta có } l = R\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{\frac{8}{5}\pi R}{R} = \frac{8}{5}\pi.$$

Câu 30: Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là:

- A. 30° . B. 40° . C. 50° . D. 60° .

Lời giải

Chọn C

72 răng có chiều dài là $2\pi R$ nên 10 răng có chiều dài $l = \frac{10.2\pi R}{72} = \frac{5\pi}{18}R$.

Theo công thức $l = R\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{\frac{5\pi}{18}R}{R} = \frac{5}{18}\pi$ mà $a = \frac{180\alpha}{\pi} = \frac{180 \cdot \frac{5}{18}\pi}{\pi} = 50^\circ$.

Cách khác: 72 răng tương ứng với 360° nên 10 răng tương ứng với $\frac{10.360}{72} = 50^\circ$.

Câu 31: Cho góc lượng giác $(Ox, Oy) = 22^\circ 30' + k360^\circ$. Với giá trị k bằng bao nhiêu thì góc $(Ox, Oy) = 1822^\circ 30'$?

- A. $k \in \emptyset$. B. $k = 3$. C. $k = -5$. D. $k = 5$.

Lời giải

Chọn D

Theo đề $(Ox, Oy) = 1822^\circ 30' \longrightarrow 22^\circ 30' + k.360^\circ = 1822^\circ 30' \longrightarrow k = 5$.

Câu 32: Cho góc lượng giác $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Tìm k để $10\pi < \alpha < 11\pi$.

- A. $k = 4$. B. $k = 5$. C. $k = 6$. D. $k = 7$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 10\pi < \alpha < 11\pi \longrightarrow \frac{19\pi}{2} < k2\pi < \frac{21\pi}{2} \longrightarrow k = 5.$$

Câu 33: Một chiếc đồng hồ, có kim chỉ giờ OG chỉ số 9 và kim phút OP chỉ số 12. Số đo của góc lượng giác (OG, OP) là

- A. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $-270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. C. $270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
D. $\frac{9\pi}{10} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn A

Góc lượng giác (OG, OP) chiếm $\frac{1}{4}$ đường tròn. Số đo là $\frac{1}{4} \cdot 2\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 34: Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 45° . Gọi N là điểm đối xứng với M qua trục Ox , số đo cung lượng giác AN bằng

- A. -45° . B. 315° . C. 45° hoặc 315° . D. $-45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn D

Vì số đo cung AM bằng 45° nên $\widehat{AOM} = 45^\circ$, N là điểm đối xứng với M qua trục Ox nên $\widehat{AON} = 45^\circ$. Do đó số đo cung AN bằng 45° nên số đo cung lượng giác AN có số đo là $-45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

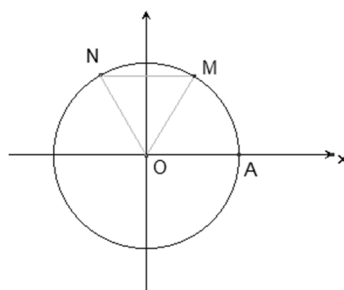
Câu 35: Trên đường tròn với điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 60° . Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua trục Oy , số đo cung AN là:

- A. 120° . B. -240° . C. -120° hoặc 240° . D.

$$120^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

Lời giải

Chọn A



Ta có $\widehat{AOM} = 60^\circ$, $\widehat{MON} = 60^\circ$

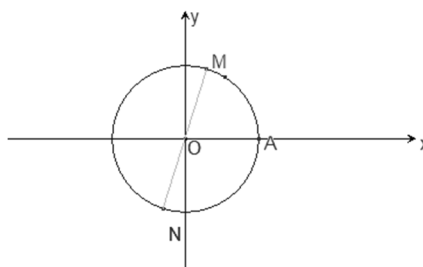
Nên $\widehat{AON} = 120^\circ$. Khi đó số đo cung AN bằng 120° .

Câu 36: Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 75° . Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua gốc tọa độ O , số đo cung lượng giác AN bằng:

- A. 255° . B. -105° . C. -105° hoặc 255° . D. $-105^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $\widehat{AOM} = 75^\circ$, $\widehat{MON} = 180^\circ$

Nên cung lượng giác AN có số đo bằng $-105^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 37: Cho bốn cung (trên một đường tròn định hướng): $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{25\pi}{3}$, $\delta = \frac{19\pi}{6}$. Các

cung nào có điểm cuối trùng nhau?

- A. α và β ; γ và δ . B. β và γ ; α và δ . C. α, β, γ . D. β, γ, δ .

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Ta có $\delta - \alpha = 4\pi \Rightarrow$ hai cung α và δ có điểm cuối trùng nhau.

Và $\gamma - \beta = 8\pi \Rightarrow$ hai cung β và γ có điểm cuối trùng nhau.

Cách 2. Gọi A, B, C, D là điểm cuối của các cung $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

Biểu diễn các cung trên đường tròn lượng giác ta có $B \equiv C, A \equiv D$.

Câu 38: Các cặp góc lượng giác sau ở trên cùng một đường tròn đơn vị, cùng tia đầu và tia cuối. Hãy nêu kết quả **SAI** trong các kết quả sau đây:

- A. $\frac{\pi}{3}$ và $-\frac{35\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{10}$ và $\frac{152\pi}{5}$. C. $-\frac{\pi}{3}$ và $\frac{155\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{7}$ và $\frac{281\pi}{7}$.

Lời giải

Chọn B

Cặp góc lượng giác a và b ở trên cùng một đường tròn đơn vị, cùng tia đầu và tia cuối.

Khi đó $a = b + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ hay $k = \frac{a-b}{2\pi}$.

Dễ thấy, ở **đáp án B** vì $k = \frac{\frac{\pi}{10} - \frac{152\pi}{5}}{2\pi} = -\frac{303}{20} \notin \mathbb{Z}$.

Câu 39: Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành tam giác đều?

- A. $\frac{k2\pi}{3}$. B. $k\pi$. C. $\frac{k\pi}{2}$. D. $\frac{k\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Tam giác đều có góc ở đỉnh là 60° nên góc ở tâm là 120° tương ứng $\frac{k2\pi}{3}$.

Câu 40: Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành hình vuông?

A. $\frac{k\pi}{2}$.

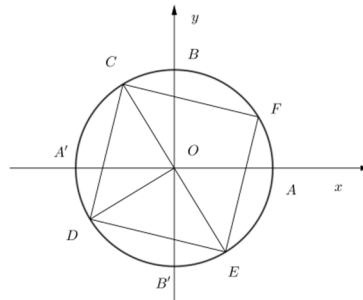
B. $k\pi$.

C. $\frac{k2\pi}{3}$.

D. $\frac{k\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Hình vuông $CDEF$ có góc $\widehat{DCE}$ là 45° nên góc ở tâm là 90° tương ứng $\frac{k\pi}{2}$.

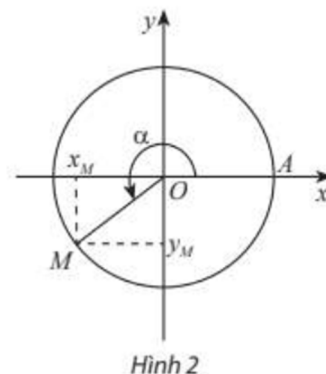
BÀI 2: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

Trên đường tròn lượng giác, gọi M là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo α . Khi đó:

- Tung độ y_M của M gọi là **sin** của α , kí hiệu $\sin\alpha$.
- Hoành độ x_M của M gọi là **côsin** của α , kí hiệu $\cos\alpha$.
- Nếu $x_M \neq 0$ thì tỉ số $\frac{y_M}{x_M} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ gọi là **tang** của α , kí hiệu $\tan\alpha$.
- Nếu $y_M \neq 0$ thì tỉ số $\frac{x_M}{y_M} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ gọi là **côtang** của α , kí hiệu $\cot\alpha$.



Các giá trị $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ và $\cot\alpha$ được gọi là *các giá trị lượng giác của góc lượng giác α* .

Chú ý:

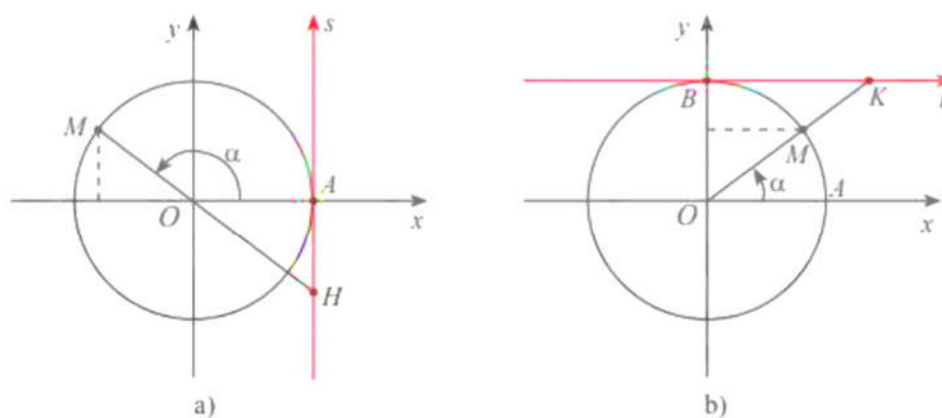
a) Ta gọi trục hoành là **trục côsin**, còn trục tung là **trục sin**.

Trục As có gốc ở điểm $A(1;0)$ và song song với trục sin (Hình 3a) gọi là **trục tang**.

Nếu đường thẳng OM cắt trục tang thì tung độ của giao điểm đó chính là $\tan\alpha$.

Trục Bt có gốc ở điểm $B(0;1)$ và song song với trục côsin (Hình 3b) gọi là **trục côtang**.

Nếu đường thẳng OM cắt trục côtang thì hoành độ của giao điểm đó chính là $\cot\alpha$.



Hình 3

b) $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$;

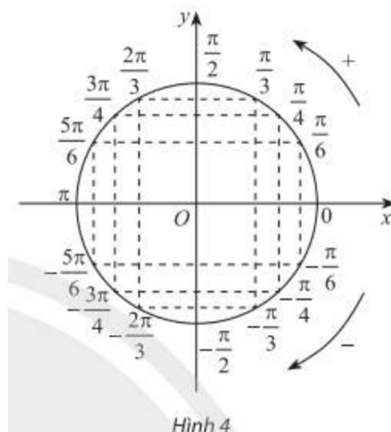
$\tan\alpha$ chỉ xác định với các góc $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$;

$\cot\alpha$ chỉ xác định với các góc $\alpha \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c) Với mọi góc lượng giác α và số nguyên k , ta có

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + k2\pi) &= \sin\alpha; & \tan(\alpha + k\pi) &= \tan\alpha; \\ \cos(\alpha + k2\pi) &= \cos\alpha; & \cot(\alpha + k\pi) &= \cot\alpha \end{aligned}$$

d) Ta đã biết bảng giá trị lượng giác của một số góc α đặc biệt với $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ (hay $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) như sau:



α Giá trị lượng giác	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Sử dụng bảng trên và Hình 4, ta có thể xác định được giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt khác.

2. Tính giá trị lượng giác của một góc bằng máy tính cầm tay

Ta có thể tính giá trị lượng giác của một góc lượng giác bất kì bằng máy tính cầm tay. Lưu ý trước khi tính, cần chọn đơn vị đo góc như sau:

- Lần lượt ấn các phím **SHIFT**, **MENU** và **2** để màn hình hiện lên bảng lựa chọn đơn vị đo góc.
- Tiếp tục ấn phím **1** để chọn đơn vị độ (**Degree**) hoặc phím **2** để chọn đơn vị radian.



- Ấn các phím **MENU 1** để vào chế độ tính toán.

3. Hệ thức cơ bản giữa các giá trị lượng giác của một góc lượng giác

Ta có các hệ thức sau liên hệ giữa các giá trị lượng giác của cùng một góc lượng giác α :

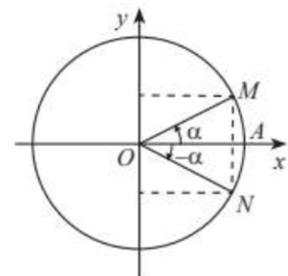
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ với $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ với $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \cdot 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

4. Giá trị lượng giác của các góc lượng giác có liên quan đặc biệt

Hai góc đối nhau (α và $-\alpha$):

Các điểm biểu diễn của hai góc α và $-\alpha$ đối xứng qua trục Ox (Hình 7), nên ta có:

$$\begin{aligned}\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha & \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha & \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$

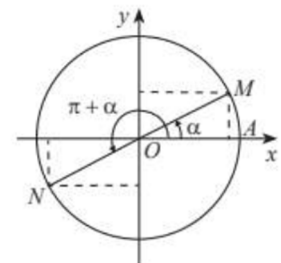


Hình 7

Hai góc hơn kém nhau π (α và $\alpha + \pi$)

Các điểm biểu diễn của hai góc α và $\alpha + \pi$ đối xứng nhau qua gốc toạ độ O (Hình 8), nên ta có:

$$\begin{aligned}\sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha & \tan(\pi + \alpha) &= \tan \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha & \cot(\pi + \alpha) &= \cot \alpha.\end{aligned}$$

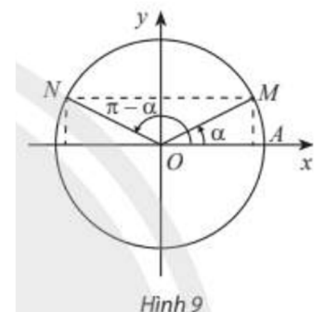


Hình 8

Hai góc bù nhau (α và $\pi - \alpha$)

Các điểm biểu diễn của hai góc α và $\pi - \alpha$ đối xứng nhau qua trục Oy (Hình 9), nên ta có:

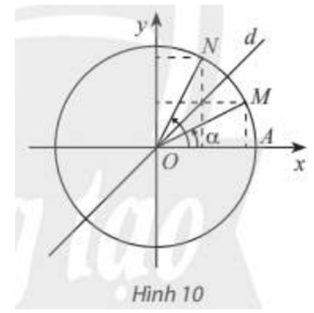
$$\begin{aligned}\sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha & \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha & \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha\end{aligned}$$



Hình 9

Hai góc phụ nhau (α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$)

Các điểm biểu diễn của hai góc α và $\frac{\pi}{2}-\alpha$ đối xứng nhau qua đường phân giác d của góc xOy (Hình 10), nên ta có:



$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin \alpha \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan \alpha.$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1 : Tính giá trị của góc còn lại hoặc của một biểu thức lượng giác khi biết một giá trị lượng giác.

1. Phương pháp giải.

- Từ hệ thức lượng giác cơ bản là mối liên hệ giữa hai giá trị lượng giác, khi biết một giá trị lượng giác ta sẽ suy ra được giá trị còn lại. Cần lưu ý tới dấu của giá trị lượng giác để chọn cho phù hợp.
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ trong đại số.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết:

a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ v\`a $90^0 < \alpha < 180^0$.

b) $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ v\`a $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

c) $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$ và $0 < \alpha < \pi$

d) $\cot \alpha = -\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Lời giải

a) Vì $90^0 < \alpha < 180^0$ nên $\cos \alpha < 0$ mà khác $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ suy ra

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Do đó } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{-2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

b) Vì $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$

Mà $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha < 0$ suy ra $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ và } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{c) Vì } \tan \alpha = -2\sqrt{2} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Ta có } \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{1}{(-2\sqrt{2})^2 + 1} = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \pi \Rightarrow \sin \alpha > 0 \text{ và } \tan \alpha = -2\sqrt{2} < 0 \text{ nên } \cos \alpha < 0$$

$$\text{Vì vậy } \cos \alpha = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Ta có } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{d) Vì } \cot \alpha = -\sqrt{2} \text{ nên } \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Ta có } \cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{\cot^2 \alpha + 1} = \frac{1}{(-\sqrt{2})^2 + 1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha < 0 \text{ và } \cot \alpha = -\sqrt{2} < 0 \text{ nên } \sin \alpha > 0$$

$$\text{Do đó } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ta có } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = -\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Ví dụ 2: a) Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$

b) Cho $3\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $A = 2\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = 25 \Rightarrow \cot^2 \alpha = 24 \text{ hay } \cot \alpha = \pm 2\sqrt{6}$$

Vì $\tan \alpha, \cot \alpha$ cùng dấu và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ nên $\tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$

$$\text{Do đó } \cot \alpha = -2\sqrt{6}. \text{ Ta lại có } \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \cot \alpha \sin \alpha = -2\sqrt{6} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

b) Ta có $3\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\sin^4 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)^2 = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 6\sin^4 \alpha - 2(1 - 2\sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) = 1 \Leftrightarrow 4\sin^4 \alpha + 4\sin^2 \alpha - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin^2 \alpha - 1)(2\sin^2 \alpha + 3) = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 \alpha - 1 = 0 \text{ (Do } 2\sin^2 \alpha + 3 > 0 \text{)}$$

Suy ra $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$.

Ta lại có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Suy ra $A = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Ví dụ 3: a) Cho $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

b) Cho $\tan \alpha = 3$. Tính $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

c) Cho $\cot \alpha = \sqrt{5}$. Tính $C = \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$

Lời giải

a) Ta có $A = \frac{\tan \alpha + 3 \frac{1}{\tan \alpha}}{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + 3}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 1 + 2 \cos^2 \alpha$

Suy ra $A = 1 + 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{17}{9}$

b) $B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3 \cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1) - (\tan^2 \alpha + 1)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1)}$

Suy ra $B = \frac{3(9+1) - (9+1)}{27+3+2 \cdot 3(9+1)} = \frac{2}{9}$

c) Ta có $C = \sin^2 \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right)$
 $= \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} (1 - \cot \alpha + \cot^2 \alpha) = \frac{1}{1 + (\sqrt{5})^2} (1 - \sqrt{5} + 5) = \frac{6 - \sqrt{5}}{6}$

Ví dụ 4: Biết $\sin x + \cos x = m$

a) Tìm $\sin x \cos x$ và $|\sin^4 x - \cos^4 x|$

b) Chứng minh rằng $|m| \leq \sqrt{2}$

Lời giải

a) Ta có $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x$ (*)

Mặt khác $\sin x + \cos x = m$ nên $m^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$ hay $\sin x \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}$

Đặt $A = |\sin^4 x - \cos^4 x|$. Ta có

$$A = |(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)| = |(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)|$$

$$\Rightarrow A^2 = (\sin x + \cos x)^2 (\sin x - \cos x)^2 = (1 + 2 \sin x \cos x)(1 - 2 \sin x \cos x)$$

$$\Rightarrow A^2 = \left(1 + \frac{m^2 - 1}{2}\right) \left(1 - \frac{m^2 - 1}{2}\right) = \frac{3 + 2m^2 - m^4}{4}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{\sqrt{3 + 2m^2 - m^4}}{2}$$

b) Ta có $2 \sin x \cos x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ kết hợp với (*) suy ra

$$(\sin x + \cos x)^2 \leq 2 \Rightarrow |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } |m| \leq \sqrt{2}$$

Dạng 2: Xác định giá trị của biểu thức chứa góc đặc biệt, góc liên quan đặc biệt và dấu của giá trị lượng giác của góc lượng giác.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản và giá trị lượng giác của góc liên quan đặc biệt
- Để xác định dấu của các giá trị lượng giác của một cung (góc) ta xác định điểm ngọn của cung (tia cuối của góc) thuộc góc phần tư nào và áp dụng bảng xét dấu các giá trị lượng giác.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \sin \frac{7\pi}{6} + \cos 9\pi + \tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + \cot \frac{7\pi}{2}$

b) $B = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$

c) $C = \sin^2 25^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 65^\circ$

d) $D = \tan^2 \frac{\pi}{8} \cdot \tan \frac{3\pi}{8} \cdot \tan \frac{5\pi}{8}$

Lời giải

a) Та có $A = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \cos(\pi + 4.2\pi) - \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} + 3\pi\right)$

$$\Rightarrow A = -\sin \frac{\pi}{6} + \cos \pi - \tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2} - 1 - 1 + 0 = -\frac{5}{2}$$

$$\text{b) Ta có } B = \frac{1}{\tan(8^0 + 360^0)} + \frac{2 \sin(30^0 + 7.360^0) \cos(8^0 + 180^0)}{2 \cos(-90^0 + 8^0 + 2.360^0) + \cos(90^0 + 8^0)}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\tan 8^\circ} + \frac{2 \sin 30^\circ (-\cos 8^\circ)}{2 \cos(8^\circ - 90^\circ) - \sin 8^\circ} = \frac{1}{\tan 8^\circ} + \frac{2 \cdot \frac{1}{2} (-\cos 8^\circ)}{2 \cos(90^\circ - 8^\circ) - \sin 8^\circ} = \\ &= \frac{1}{\tan 8^\circ} - \frac{\cos 8^\circ}{2 \sin 8^\circ - \sin 8^\circ} = \frac{1}{\tan 8^\circ} - \frac{\cos 8^\circ}{\sin 8^\circ} = 0 \end{aligned}$$

c) Vì $25^\circ + 65^\circ = 90^\circ \Rightarrow \sin 65^\circ = \cos 25^\circ$ do đó

$$C = (\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ)^0 + \sin^2 45^\circ + \sin^2 60^\circ = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Suy ra $C = \frac{7}{4}$.

d) $D = -\left(\tan \frac{\pi}{8} \cdot \tan \frac{3\pi}{8}\right) \cdot \left[\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) \tan \frac{5\pi}{8}\right]$

$$\text{Mà } \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan \frac{3\pi}{8} = \cot \frac{\pi}{8}, \tan \frac{5\pi}{8} = \cot \left(-\frac{\pi}{8} \right)$$

$$\text{Nên } D = -\left(\tan \frac{\pi}{8} \cdot \cot \frac{\pi}{8}\right) \cdot \left[\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) \cot\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right] = -1.$$

Ví dụ 2: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xác định dấu của các biểu thức sau:

$$\text{a) } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \qquad \text{b) } \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$$

c) $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha)$ d) $\sin\frac{14\pi}{9} \cdot \cot(\pi + \alpha)$

Lời giải

a) Ta có $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \pi < \frac{\pi}{2} + \alpha < \frac{3\pi}{2}$ suy ra $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) < 0$

b) Ta có $-\frac{\pi}{2} > -\alpha > -\pi \Rightarrow 0 > \frac{3\pi}{2} - \alpha > -\frac{\pi}{2}$ suy ra $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0$

c) Ta có $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow 0 < -\frac{\pi}{2} + \alpha < \frac{\pi}{2}$ suy ra $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) > 0$

Và $0 < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2}$ suy ra $\tan(\pi + \alpha) > 0$

Vậy $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi + \alpha) > 0$.

d) Ta có $\frac{3\pi}{2} < \frac{14\pi}{9} < 2\pi \Rightarrow \sin \frac{14\pi}{9} < 0$.

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \pi + \alpha < 2\pi$ suy ra $\cot(\pi + \alpha) < 0$.

Vậy $\sin \frac{14\pi}{9} \cdot \cot(\pi + \alpha) > 0$.

Dạng 3: Chứng minh đẳng thức lượng giác, chứng minh biểu thức không phụ thuộc góc x , đơn giản biểu thức.

1. Phương pháp giải.

Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản, các hằng đẳng thức đáng nhớ và sử dụng tính chất của giá trị lượng giác để biến đổi

+ Khi chứng minh một đẳng thức ta có thể biến đổi vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lượng khác.

+ Chứng minh biểu thức không phụ thuộc góc x hay đơn giản biểu thức ta cố gắng làm xuất hiện nhân tử chung ở tử và mẫu để rút gọn hoặc làm xuất hiện các hạng tử trái dấu để rút gọn cho nhau.

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh các đẳng thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $\cos^4 x + 2 \sin^2 x = 1 + \sin^4 x$

b) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1$

c) $\frac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x \cdot \cot^2 y} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y}$

d) $\sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x} = 3 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

Lời giải

a) Đẳng thức tương đương với $\cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x + (\sin^2 x)^2$

$\Leftrightarrow \cos^4 x = (1 - \sin^2 x)^2$ (*)

Mà $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \cos^4 x = (\cos^2 x)^2$ (đúng) ĐPCM.

b) Ta có $VT = \frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^3 x}$

Mà $\cot^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$ và $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ nên

$$VT = \cot^2 x + 1 + \cot x (\cot^2 x + 1) = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1 = VP \quad \text{ĐPCM.}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có } VT &= \frac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x \cdot \cot^2 y} = \frac{1}{\cot^2 y} - \frac{1}{\cot^2 x} = \tan^2 y - \tan^2 x \\ &= \left(\frac{1}{\cos^2 y} - 1 \right) - \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \frac{1}{\cos^2 y} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y} = VP \quad \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } VT &= \sqrt{\sin^4 x + 4(1 - \sin^2 x)} + \sqrt{\cos^4 x + 4(1 - \cos^2 x)} \\ &= \sqrt{(\sin^2 x)^2 - 4\sin^2 x + 4} + \sqrt{(\cos^2 x)^2 - 4\cos^2 x + 4} = \sqrt{(\sin^2 x - 2)^2} + \sqrt{(\cos^2 x - 2)^2} \\ &= (2 - \sin^2 x) + (2 - \cos^2 x) = 4 - (\sin^2 x + \cos^2 x) = 3 \end{aligned}$$

Mặt khác vì $\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ nên

$$VP = 3 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \Rightarrow VT = VP \quad \text{ĐPCM.}$$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{A+2B+C}{2}\right)} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{A+2B+C}{2}\right)} = \tan A \cdot \cot(B+C)$$

Lời giải

Vì $A+B+C = \pi$ nên

$$VT = \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}\right)} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{B}{2}\right)} = \frac{\sin^3 \frac{B}{2}}{-\sin \frac{B}{2}} - \frac{\cos^3 \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} = -\left(\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2}\right) = -1$$

$$VP = \tan A \cdot \cot(\pi - A) = \tan A \cdot (-\cot A) = -1$$

Suy ra $VT = VP$. ĐPCM

Ví dụ 3: Đơn giản các biểu thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

$$\text{a) } A = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot(3\pi - x)$$

$$\text{b) } B = \frac{\sin(90^\circ + x) - \cos(450^\circ - x) + \cot(1080^\circ - x) + \tan(630^\circ - x)}{\cos(450^\circ - x) + \sin(x - 630^\circ) - \tan(810^\circ + x) - \tan(810^\circ - x)}$$

$$\text{c) } C = \sqrt{2} - \frac{1}{\sin(x + 2013\pi)} \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} \quad \text{với } \pi < x < 2\pi$$

Lời giải

a) Ta có $\cos(5\pi - x) = \cos(\pi - x + 2.2\pi) = \cos(\pi - x) = -\cos x$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$\cot(3\pi - x) = \cot(-x) = -\cot x$$

Suy ra $A = -\cos x - (-\cos x) + \cot x + (-\cot x) = 0$

b) Ta có $\sin(900^\circ + x) = \sin(180^\circ + 2.360^\circ + x) = \sin(180^\circ + x) = -\sin x$

$$\cos(450^\circ - x) = \cos(90^\circ + 360^\circ - x) = \cos(90^\circ - x) = \sin x$$

$$\cot(1080^\circ - x) = \cot(3.360^\circ - x) = \cot(-x) = -\cot x$$

$$\tan(630^\circ - x) = \tan(3.180^\circ + 90^\circ - x) = \tan(90^\circ - x) = \cot x$$

$$\sin(x - 630^\circ) = \sin(x - 2.360^\circ + 90^\circ) = \sin(x + 90^\circ) = \cos x$$

$$\tan(810^\circ + x) = \tan(4.180^\circ + 90^\circ + x) = \tan(90^\circ + x) = -\cot x$$

$$\tan(810^\circ - x) = \tan(4.180^\circ + 90^\circ - x) = \tan(90^\circ - x) = \cot x$$

$$\text{Vậy } B = \frac{-\sin x - \sin x - \cot x + \cot x}{\sin x + \cos x - (-\cot x) - \cot x} = \frac{-2\sin x}{\sin x + \cos x}$$

c) Ta có $\sin(x + 2013\pi) = \sin(x + \pi + 1006.2\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x$ nên

$$\begin{aligned} C &= \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos x + 1 + \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}} \\ &= \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - \cos^2 x}} = \sqrt{2} + \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{\sin^2 x}} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{\sin x |\sin x|} \right) \end{aligned}$$

Vì $\pi < x < 2\pi \Rightarrow \sin x < 0$ nên

$$C = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\sqrt{2} \cot^2 x$$

Ví dụ 4: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

a) $A = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x + 2}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1}$

b) $B = \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} - \frac{2 + 2\cot^2 x}{(\tan x - 1)(\tan^2 x + 1)}$

c) $C = \sqrt{\sin^4 x + 6\cos^2 x + 3\cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6\sin^2 x + 3\sin^4 x}$

Lời giải

a) Ta có Ta có $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

$$\begin{aligned}\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha &= (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) \\ &= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha\end{aligned}$$

$$\text{Do đó } A = \frac{1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2}{1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 1} = \frac{3(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}{2(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)} = \frac{3}{2}$$

Vậy A không phụ thuộc vào x .

$$\begin{aligned}\text{b) Ta có } B &= \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 - \frac{1}{\tan x}} - \frac{2 + \frac{2 \cos^2 x}{\sin^2 x}}{(\tan x - 1) \frac{1}{\sin^2 x}} \\ &= \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1} - \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\tan x - 1} = \frac{\tan x + 1 - 2}{\tan x - 1} = 1\end{aligned}$$

Vậy B không phụ thuộc vào x .

$$\begin{aligned}\text{c) } C &= \sqrt{(1 - \cos^2 x)^2 + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{(1 - \sin^2 x)^2 + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x} \\ &= \sqrt{4 \cos^4 x + 4 \cos^2 x + 1} + \sqrt{4 \sin^4 x + 4 \sin^2 x + 1} \\ &= \sqrt{(2 \cos^2 x + 1)^2} + \sqrt{(2 \sin^2 x + 1)^2} \\ &= 2 \cos^2 x + 1 + 2 \sin^2 x + 1 \\ &= 3\end{aligned}$$

Vậy C không phụ thuộc vào x .

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Các đẳng thức sau có thể đồng thời xảy ra không?

$$\begin{aligned}\text{a) } \sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ và } \cos \alpha = -\frac{4}{5}; & \quad \text{b) } \sin \alpha = \frac{1}{3} \text{ và } \cot \alpha = \frac{1}{2}; & \quad \text{c) } \tan \alpha = 3 \text{ và } \\ \cot \alpha = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Lời giải

$$\text{a) Với } -1 \leq \sin \alpha = \frac{3}{5} \leq 1 \text{ và } -1 \leq \cos \alpha = -\frac{4}{5} \leq 1, \text{ ta có: } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1.$$

Vậy $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ có thể đồng thời xảy ra.

$$\text{b) Với } -1 \leq \sin \alpha = \frac{1}{3} \leq 1 \text{ và } \cos \alpha = \frac{1}{2}, \text{ ta có:}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 9.$$

Do đó $1 + \cot^2 \alpha \neq \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Vì vậy $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ không đồng thời xảy ra.

c) Với $\tan \alpha = 3$ và $\cot \alpha = \frac{1}{3}$, ta có: $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$.

Vì vậy $\tan \alpha = 3$ và $\cot \alpha = \frac{1}{3}$ đồng thời xảy ra.

Bài 2. Cho $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. Tính $\sin\left(-\frac{15\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(13\pi + \alpha)$.

Lời giải

$$\begin{aligned} & \sin\left(-\frac{15\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(13\pi + \alpha) \\ &= \sin\left(-\frac{16\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(12\pi + \pi + \alpha) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi + \alpha) \\ &= \cos \alpha + \cos \alpha = 2\cos \alpha \\ &= 2 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{10}{13} \end{aligned}$$

Bài 3. Tính các giá trị lượng giác của góc α , nếu:

a) $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

b) $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ và $0 < \alpha < 90^\circ$;

c) $\tan \alpha = \sqrt{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

d) $\cot \alpha = \frac{1}{2}$ và $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13} \left(\text{vì } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \right) \\ \Rightarrow \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{12}{5} \end{aligned}$$

Vậy $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$, $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$, $\cot \alpha = -\frac{12}{5}$.

b) Ta có:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5} \left(\text{vì } 0^\circ < \alpha < 90^\circ \right)$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{21}}{2} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}$$

Vậy $\sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}, \tan \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}, \cot \alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}.$

Ta có: $\tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Ta lại có:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + (\sqrt{3})^2 = 4$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2} \left(\text{vì } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \right) \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \alpha = -\frac{1}{2}, \cot \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

d) Ta có: $\cot \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan \alpha = -2$

Ta lại có:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + (-2)^2 = 5$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\text{vì } 270^\circ < \alpha < 360^\circ \right)$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Vậy $\sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \tan \alpha = -2$

Bài 4. Biểu diễn các giá trị lượng giác sau qua các giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến

$\frac{\pi}{4}$ hoặc từ 0 đến 45° và tính:

a) $\cos \frac{21\pi}{6};$

b) $\sin \frac{129\pi}{4};$

c) $\tan 1020^\circ.$

Lời giải

a) Ta có: $\cos \frac{21\pi}{6} = \cos \left(\frac{24\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{2} = \sin 0$.

b) $\sin \frac{129\pi}{4} = \sin \left(32\pi + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{4}$.

c) $\tan 1020^\circ = \tan (3 \cdot 180^\circ - 60^\circ) = \tan (180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\cot 30^\circ$.

Bài 5. Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 1 - 2\cos^2 \alpha$;

b) $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$.

Lời giải

a) Ta có: $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha = 1 - 2\cos^2 \alpha$.

b) Ta có:

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}.$$

Bài 6. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{1}{\tan \alpha + 1} + \frac{1}{\cot \alpha + 1}$;

b) $\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \sin (\pi + \alpha)$;

c) $\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) + \cos (-\alpha + 6\pi) - \tan (\alpha + \pi) \cot (3\pi - \alpha)$.

Lời giải

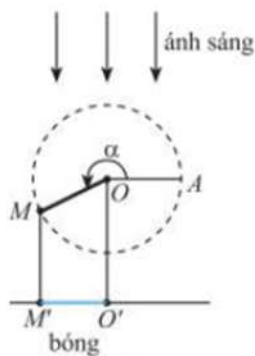
$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{\tan \alpha + 1} + \frac{1}{\cot \alpha + 1} &= \frac{\cot \alpha + 1}{(\tan \alpha + 1)(\cot \alpha + 1)} + \frac{\tan \alpha + 1}{(\tan \alpha + 1)(\cot \alpha + 1)} \\ &= \frac{\cot \alpha + 1 + \tan \alpha + 1}{\tan \alpha \cot \alpha + \tan \alpha + \cot \alpha + 1} = \frac{\cot \alpha + \tan \alpha + 2}{1 + \tan \alpha + \cot \alpha + 1} = 1. \end{aligned}$$

b) $\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \sin (\pi + \alpha) = \cos \alpha - \sin \alpha$.

$$\begin{aligned} \text{c) } \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) + \cos (-\alpha + 6\pi) - \tan (\alpha + \pi) \cot (3\pi - \alpha) \\ = -\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \cos (3 \cdot 2\pi - \alpha) - \tan (\alpha + \pi) \cot (2\pi + \pi - \alpha) \\ = -\sin \alpha + \cos \alpha. \end{aligned}$$

Bài 7. Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trục O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như Hình 12. Vị trí ban đầu của thanh là OA .

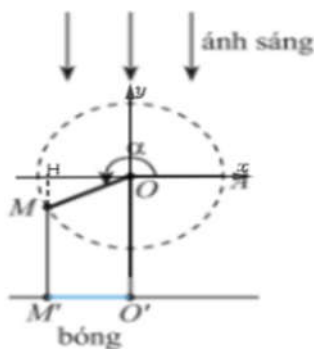
Hỏi độ dài bóng $O'M$ của OM khi thanh quay được $3\frac{1}{10}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 15 cm? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Hình 12

Lời giải

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Hình 12

Kẻ MH vuông góc với Ox.

Điểm M là điểm biểu diễn góc lượng giác α .

Ta có: $\alpha = 3\frac{1}{10} \cdot 360^\circ = 1116^\circ$.

Khi đó $M(\cos 1116^\circ; \sin 1116^\circ)$

Suy ra $OH = |\cos 1116^\circ| \cdot 15 \approx 12,1$.

Vậy độ dài bóng O'M' của OM khi thanh quay được $3\frac{1}{10}$ vòng là 12,1 cm.

Bài 8. Khi xe đạp di chuyển, van V của bánh xe quay quanh trục O theo chiều kim đồng hồ với tốc độ góc không đổi là 11 rad/s (Hình 13). Ban đầu van nằm ở vị trí A. Hỏi sau một phút di chuyển, khoảng cách từ van đến mặt đất là bao nhiêu, biết bán kính $OA = 58$ cm? Giả sử độ dày của lốp xe không đáng kể. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Hình 13

Lời giải

Sau một phút di chuyển, van V đã quay được một góc lượng giác có số đo góc là:

$\alpha = 11.60 = 660$ (rad). Khi đó tọa độ điểm V biểu diễn cho góc lượng giác trên có tọa độ là:

$$V(58 \cdot \cos \alpha; 58 \cdot \sin \alpha) \approx (56; 15,2)$$

Khi đó khoảng cách từ van đến mặt đất khoảng $58 - 15,2 = 42,8$ cm.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 41: Cho α thuộc góc phần tư thứ nhất của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha < 0$. C. $\tan \alpha < 0$. D. $\cot \alpha < 0$.

Lời giải

Chọn A

$$\alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ nhất} \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \\ \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0 \end{cases}$$

Câu 42: Cho α thuộc góc phần tư thứ hai của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

- A. $\sin \alpha > 0$; $\cos \alpha > 0$. B. $\sin \alpha < 0$; $\cos \alpha < 0$.
C. $\sin \alpha > 0$; $\cos \alpha < 0$. D. $\sin \alpha < 0$; $\cos \alpha > 0$.

Lời giải

Chọn C

$$\alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ hai} \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$$

Câu 43: Cho α thuộc góc phần tư thứ ba của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là sai ?

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha < 0$. C. $\tan \alpha > 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải

Chọn A

$$\alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ ba} \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \\ \tan \alpha > 0 \\ \cot \alpha > 0 \end{cases}$$

Câu 44: Cho α thuộc góc phần tư thứ tư của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

- A. $\sin \alpha > 0$. B. $\cos \alpha > 0$. C. $\tan \alpha > 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải

Chọn B

$$\alpha \text{ thuộc góc phần tư thứ hai} \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha > 0 \\ \tan \alpha < 0 \\ \cot \alpha < 0 \end{cases}$$

Câu 45: Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ cùng dấu?

- A. Thứ II. B. Thứ IV.
C. Thứ II hoặc IV. D. Thứ I hoặc III.

Lời giải

Chọn D

Câu 46: Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sin \alpha$, $\tan \alpha$ trái dấu?

- A. Thứ I. B. Thứ II hoặc IV.
C. Thứ II hoặc III. D. Thứ I hoặc IV.

Lời giải

Chọn C

Câu 47: Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

- A. Thứ II. B. Thứ I hoặc II.
C. Thứ II hoặc III. D. Thứ I hoặc IV.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = \sqrt{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos \alpha = |\cos \alpha| \Leftrightarrow \cos \alpha.$$

Đẳng thức $|\cos \alpha| \Leftrightarrow \cos \alpha \longrightarrow \cos \alpha \geq 0 \longrightarrow$ điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ I hoặc IV.

Câu 48: Điểm cuối của góc lượng giác α ở góc phần tư thứ mấy nếu $\sqrt{\sin^2 \alpha} = \sin \alpha$.

- A. Thứ III. B. Thứ I hoặc III.
C. Thứ I hoặc II. D. Thứ III hoặc IV.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \sqrt{\sin^2 \alpha} = \sin \alpha \Leftrightarrow |\sin \alpha| = \sin \alpha.$$

Chọn B

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha; \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha; \cos(-\alpha) = \cos \alpha; \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha.$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \\ \tan \alpha < 0 \end{cases}$$

Câu 53: Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0.$

B. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0.$

C. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \leq 0.$

D. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \geq 0.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \rightarrow 0 < \frac{3\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0 \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0 \end{cases} \rightarrow \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0.$$

Câu 54: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xác định dấu của biểu thức $M = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \tan(\pi - \alpha)$.

A. $M \geq 0.$

B. $M > 0.$

C. $M \leq 0.$

D. $M < 0.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow 0 < -\frac{\pi}{2} + \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) > 0 \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \rightarrow 0 < \pi - \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \tan(\pi - \alpha) > 0 \end{cases} \rightarrow M > 0.$$

Câu 55: Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xác định dấu của biểu thức $M = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cot(\pi + \alpha)$.

A. $M \geq 0.$

B. $M > 0.$

C. $M \leq 0.$

D. $M < 0.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \rightarrow -\frac{3\pi}{2} < -\alpha < -\pi \rightarrow -\pi < \frac{\pi}{2} - \alpha < -\frac{\pi}{2} \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) < 0 \\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\pi < \pi + \alpha < \frac{5\pi}{2} \rightarrow \cot(\pi + \alpha) > 0 \end{cases}$$

—→ $M < 0$.

Câu 56: Tính giá trị của $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right]$.

A. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{1}{2}$.

D. $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos\left[\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = \cos\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) = \cos\frac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 57: Tính giá trị của $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right]$.

A. $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = \frac{1}{2}$.

C. $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = -\frac{1}{2}$.

D. $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi + k2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Câu 58: Tính giá trị biểu thức $P = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ$.

A. $P = 0$.

B. $P = 2$.

C. $P = 4$.

D. $P = 8$.

Lời giải

Chọn C

Do $10^\circ + 80^\circ = 20^\circ + 70^\circ = 30^\circ + 60^\circ = 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$ nên các cung lượng giác tương ứng đôi một phụ nhau. Áp dụng công thức $\sin(90^\circ - x) = \cos x$, ta được

$$P = (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ) + (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ) + (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

Câu 59: Tính giá trị biểu thức $P = \tan 10^\circ \cdot \tan 20^\circ \cdot \tan 30^\circ \dots \tan 80^\circ$.

A. $P = 0$.

B. $P = 1$.

C. $P = 4$.

D. $P = 8$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\tan x \cdot \tan(90^\circ - x) = \tan x \cdot \cot x = 1$.

Do đó $P = 1$.

Câu 60: Tính giá trị biểu thức $P = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ$.

- A. $P = 0$. B. $P = 1$. C. $P = 2$. D. $P = 3$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\tan x \cdot \tan(90^\circ - x) = \tan x \cdot \cot x = 1$.

Do đó $P = 1$.

Câu 61: Với góc α bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$. B. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
C. $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = 1$. D. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1$.

Lời giải

Chọn B

Câu 62: Với góc α bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin 2\alpha^2 + \cos^2 2\alpha = 1$. B.
 $\sin(\alpha^2) + \cos(\alpha^2) = 1$.
C. $\sin^2 \alpha + \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1$. D. $\sin^2 \alpha - \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \longrightarrow \cos^2(180^\circ - \alpha) = \cos^2 \alpha$.

Do đó $\sin^2 \alpha + \cos^2(180^\circ - \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Câu 63: Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$; $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$. B. $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ($\cos \alpha \neq 0$).
C. $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ($\sin \alpha \neq 0$). D. $\sin^2(2018\alpha) + \cos^2(2018\alpha) = 2018$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\sin^2(2018\alpha) + \cos^2(2018\alpha) = 1$.

Câu 64: Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$. B. $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.
C. $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$. D. $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$.

Lời giải

Chọn C

Câu 65: Để $\tan x$ có nghĩa khi

- A. $x = \pm \frac{\pi}{2}$. B. $x = 0$. C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x \neq k\pi$.

Lời giải

Chọn C

Câu 66: Điều kiện trong đẳng thức $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ là

- A. $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. B. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn D

$$\cot\left(x - \frac{\pi}{2018}\right) \text{ có nghĩa khi } x - \frac{\pi}{2018} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2018} + k\pi.$$

Câu 67: Điều kiện để biểu thức $P = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \cot\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ xác định là

- A. $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $\alpha \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $\alpha \neq -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1.$$

$$\text{Đẳng thức xác định khi } \begin{cases} \cos \alpha \neq 0 \\ \sin \alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \alpha \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \neq k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 68: Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\sin 60^\circ < \sin 150^\circ$. B. $\cos 30^\circ < \cos 60^\circ$.
C. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$. D. $\cot 60^\circ > \cot 240^\circ$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Biểu thức xác định khi } \begin{cases} \alpha + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \alpha - \frac{\pi}{6} \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 69: Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\tan 45^\circ > \tan 46^\circ$. B. $\cos 142^\circ > \cos 143^\circ$.
C. $\sin 90^\circ 13' < \sin 90^\circ 14'$. D. $\cot 128^\circ > \cot 126^\circ$.

Lời giải

Chọn C

Dùng MTCT kiểm tra từng đáp án.

Câu 70: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha.$

B. $\sin(\pi + \alpha) = \sin \alpha.$

C. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha.$

D. $\tan(\pi + 2\alpha) = \cot(2\alpha).$

Lời giải

Chọn B

Trong khoảng giá trị từ 90° đến 180° , khi giá trị góc tăng thì giá trị cos của góc tương ứng giảm.

Câu 71: Với mọi số thực α , ta có $\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right)$ bằng

A. $-\sin \alpha.$

B. $\cos \alpha.$

C. $\sin \alpha.$

D. $-\cos \alpha.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha.$

Câu 72: Cho $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Khi đó $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$ bằng

A. $-\frac{2}{3}.$

B. $-\frac{1}{3}.$

C. $\frac{1}{3}.$

D. $\frac{2}{3}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - 2\pi\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha = \frac{1}{3}.$

Câu 73: Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\tan(2017\pi + \alpha)$ bằng

A. $-\tan \alpha.$

B. $\cot \alpha.$

C. $\tan \alpha.$

D. $-\cot \alpha.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\tan(2017\pi + \alpha) = \tan \alpha.$

Câu 74: Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi)$, ta được

A. $A = \cos \alpha + \sin \alpha.$

B. $A = 2 \sin \alpha.$

C. $A = \sin \alpha \cos \alpha.$

D. $A = 0.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha - \sin \alpha = 0.$$

Câu 75: Rút gọn biểu thức $S = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(\pi - x)$ ta được

- A. $S = 0$. B. $S = \sin^2 x - \cos^2 x$. C. $S = 2 \sin x \cos x$. D. $S = 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned}\text{Ta có } S &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(\pi - x) \\ &= \sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot (-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.\end{aligned}$$

Câu 76: Cho $P = \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha)$ và $Q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $P + Q = 0$. B. $P + Q = -1$. C. $P + Q = 1$. D. $P + Q = 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha) = -\sin \alpha \cdot (-\cos \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

$$\text{Và } Q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha) = -\sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

$$\text{Khi đó } P + Q = \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0.$$

Câu 77: Biểu thức lượng giác $\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(10\pi + x)\right]^2 + \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(8\pi - x)\right]^2$ có giá trị bằng?

- A. 1. B. 2. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x; \quad \sin(10\pi + x) = \sin x.$$

$$\text{Và } \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x; \quad \cos(8\pi - x) = \cos x.$$

$$\text{Khi đó } \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(10\pi + x)\right]^2 + \left[\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(8\pi - x)\right]^2$$

$$\begin{aligned}
 &= (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 \\
 &= \cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x = 2.
 \end{aligned}$$

- Câu 78:** Giá trị biểu thức $P = \left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan \left(\frac{7\pi}{2} - x \right) \right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot (7\pi - x) \right]^2$ bằng
- A. $\frac{1}{\sin^2 x}$. B. $\frac{1}{\cos^2 x}$. C. $\frac{2}{\sin^2 x}$. D. $\frac{2}{\cos^2 x}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\tan \frac{17\pi}{4} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + 4\pi \right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ và $\tan \left(\frac{7\pi}{2} - x \right) = \cot x$.

Và $\cot \frac{13\pi}{4} = \cot \left(\frac{\pi}{4} + 3\pi \right) = \cot \frac{\pi}{4} = 1$; $\cot (7\pi - x) = -\cot x$.

Suy ra $P = (1 + \cot x)^2 + (1 - \cot x)^2 = 2 + 2 \cot^2 x = \frac{2}{\sin^2 x}$.

- Câu 79:** Biết rằng $\sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \sin \frac{13\pi}{2} = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$ thì giá trị đúng của $\cos x$ là
- A. 1. B. -1. C. $\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = -\cos x$ và $\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos x$.

Kết hợp với giá trị $\sin \frac{13\pi}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 6\pi \right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Suy ra $\sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \sin \frac{13\pi}{2} = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow -\cos x + 1 = \cos x \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$.

- Câu 80:** Nếu $\cot 1,25 \cdot \tan (4\pi + 1,25) - \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos (6\pi - x) = 0$ thì $\tan x$ bằng
- A. 1. B. -1. C. 0. D. Một giá trị khác.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\tan (4\pi + 1,25) = \tan 1,25$ suy ra $\cot 1,25 \cdot \tan 1,25 = 1$

Và $\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos x$; $\cos (6\pi - x) = \cos (x - 6\pi) = \cos x$.

Khi đó $\cot 1,25 \cdot \tan (4\pi + 1,25) - \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos (6\pi - x) = 1 - \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$.

Mặt khác $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \longrightarrow \tan x = 0$.

Câu 81: Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng:

A. $\sin(A+C) = -\sin B$.

B. $\cos(A+C) = -\cos B$.

C. $\tan(A+C) = \tan B$.

D. $\cot(A+C) = \cot B$.

Lời giải

Chọn B

Vì A, B, C là ba góc của một tam giác suy ra $A+C = \pi - B$.

Khi đó $\sin(A+C) = \sin(\pi - B) = \sin B$; $\cos(A+C) = \cos(\pi - B) = -\cos B$.

$\tan(A+C) = \tan(\pi - B) = -\tan B$; $\cot(A+C) = \cot(\pi - B) = -\cot B$.

Câu 82: Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , khi đó

A. $\sin C = -\sin(A+B)$.

B. $\cos C = \cos(A+B)$.

C. $\tan C = \tan(A+B)$.

D. $\cot C = \cot(A+B)$.

Lời giải

Chọn D

Vì A, B, C là các góc của tam giác ABC nên $C = 180^\circ - (A+B)$.

Do đó C và $A+B$ là 2 góc bù nhau $\Rightarrow \sin C = \sin(A+B)$; $\cos C = -\cos(A+B)$.

Và $\tan C = -\tan(A+B)$; $\cot C = \cot(A+B)$.

Câu 83: Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2}$.

B. $\cos \frac{A+C}{2} = \sin \frac{B}{2}$.

C. $\sin(A+B) = \sin C$.

D. $\cos(A+B) = \cos C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $A+B+C = \pi \Leftrightarrow A+B = \pi - C$

Do đó $\cos(A+B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$.

Câu 84: A, B, C là ba góc của một tam giác. Hãy tìm hệ thức sai:

A. $\sin A = -\sin(2A+B+C)$.

B. $\sin A = -\cos \frac{3A+B+C}{2}$.

C. $\cos C = \sin \frac{A+B+3C}{2}$.

D. $\sin C = \sin(A+B+2C)$.

Lời giải

Chọn D

A, B, C là ba góc của một tam giác $\Rightarrow A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow A + B = 180^\circ - C$.

Ta có $\sin(A + B + 2C) = \sin(180^\circ - C + 2C) = \sin(180^\circ + C) = -\sin C$.

Câu 85: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = \frac{1}{13}$. B. $\cos \alpha = \frac{5}{13}$. C. $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. D. $\cos \alpha = -\frac{1}{13}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{5}{13} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{5}{13}.$$

Câu 86: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}}$. B. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\tan \alpha = -\frac{4}{\sqrt{5}}$. D. $\tan \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{2}{3} \\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = -\frac{2}{3} \longrightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Câu 87: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$.

- A. $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$. B. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. C. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$. D. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \frac{\pi}{2} + 504.2\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 504.2\pi \end{cases}$$

$$\longrightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}. \text{ Mà } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} = \frac{\sin \alpha}{-\frac{3}{5}} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

Câu 88: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan \alpha$.

- A. $\tan \alpha = -\frac{12}{5}$. B. $\tan \alpha = \frac{5}{12}$. C. $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$. D. $\tan \alpha = \frac{12}{5}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{5}{13} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi. \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{5}{13} \longrightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{5}{12}.$$

Câu 89: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$ và $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Tính $P = \cos \alpha + \sin \alpha$.

A. $P = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$. B. $P = 1 - \sqrt{5}$. C. $P = \frac{3\sqrt{5}}{2}$. D. $P = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{5} \longrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 180^\circ < \alpha < 270^\circ \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\longrightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}. \text{ Do đó, } \sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}} = -\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 90: Cho góc α thỏa $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cot \alpha = -\frac{4}{5}$. B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. C. $\tan \alpha = \frac{5}{4}$. D. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}.$$

Câu 91: Cho góc α thỏa $\cot \alpha = \frac{3}{4}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$. B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. C. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. D. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \\ 0^\circ < \alpha < 90^\circ \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

Câu 92: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$.

A. $P = -3$. B. $P = \frac{3}{7}$. C. $P = \frac{12}{25}$. D. $P = -\frac{12}{25}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5} \longrightarrow \tan \alpha = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{Thay } \tan \alpha = -\frac{3}{4} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = -\frac{12}{25}.$$

Câu 93: Cho góc α thỏa $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $P = \frac{2 \tan \alpha + 3 \cot \alpha + 1}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

A. $P = \frac{19 + 2\sqrt{2}}{9}$. B. $P = \frac{19 - 2\sqrt{2}}{9}$. C. $P = \frac{26 - 2\sqrt{2}}{9}$. D. $P = \frac{26 + 2\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 90^\circ < \alpha < 180^\circ \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \longrightarrow \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cot \alpha = -2\sqrt{2} \end{cases}.$$

$$\text{Thay } \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cot \alpha = -2\sqrt{2} \end{cases} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = \frac{26 - 2\sqrt{2}}{9}.$$

Câu 94: Cho góc α thỏa mãn $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$.

A. $P = 2\sqrt{2}$. B. $P = -2\sqrt{2}$. C. $P = \frac{\sqrt{2}}{4}$. D. $P = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(3\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Theo giả thiết: } \sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\sin \alpha = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \longrightarrow P = -2\sqrt{2}.$$

Câu 95: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính $P = \sqrt{5 + 3 \tan \alpha} + \sqrt{6 - 4 \cot \alpha}$.

A. $P = 4$. B. $P = -4$. C. $P = 6$. D. $P = -6$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = -\frac{4}{5} \longrightarrow \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{4}{3} \\ \cot \alpha = -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Thay } \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{4}{3} \\ \cot \alpha = -\frac{3}{4} \end{cases} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = 4.$$

Câu 96: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $P = \sqrt{\tan^2 \alpha - 2 \tan \alpha + 1}$.

A. $P = -\frac{1}{3}$.

B. $P = \frac{1}{3}$.

C. $P = \frac{7}{3}$.

D. $P = -\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \sqrt{(\tan \alpha - 1)^2} = |\tan \alpha - 1|. \text{ Vì } \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \longrightarrow \tan \alpha > 1 \longrightarrow P = \tan \alpha - 1.$$

$$\text{Theo giả thiết: } \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5} \\ \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5} \longrightarrow \tan \alpha = \frac{4}{3} \longrightarrow P = \frac{1}{3}.$$

Câu 97: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ và $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Tính $P = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \sin \alpha$.

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $P = \frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{4}$.

C. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $P = \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{9\pi}{4} \\ \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \longrightarrow \alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \longrightarrow \alpha = \pi.$$

$$\text{Thay } \alpha = \pi \text{ vào } P, \text{ ta được } P = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 98: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ và $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \cos \alpha.$$

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $P = 1$.

C. $P = -1$.

D. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} \frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Leftrightarrow \frac{5\pi}{6} < \alpha + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{3} \\ \cot\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \end{cases} \longrightarrow \alpha + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} \longrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{Thay } \alpha = \frac{3\pi}{2} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 99: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \frac{\sin^2 \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos^2 \alpha}$.

A. $P = \frac{30}{11}$.

B. $P = \frac{31}{11}$.

C. $P = \frac{32}{11}$.

D. $P = \frac{34}{11}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{9}{25} \rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\longrightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Thay } \sin \alpha = \frac{4}{5} \text{ và } \cos \alpha = -\frac{3}{5} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = \frac{31}{11}.$$

Câu 100: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Tính $P = \frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha + 7 \sin \alpha}$.

A. $P = -\frac{4}{9}$.

B. $P = \frac{4}{9}$.

C. $P = -\frac{4}{19}$.

D. $P = \frac{4}{19}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Chia cả tử và mẫu của } P \text{ cho } \cos \alpha \text{ ta được } P = \frac{3 \tan \alpha - 2}{5 + 7 \tan \alpha} = \frac{3 \cdot 2 - 2}{5 + 7 \cdot 2} = \frac{4}{19}.$$

Câu 101: Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = \frac{1}{3}$. Tính $P = \frac{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha}{2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha}$.

A. $P = -\frac{15}{13}$.

B. $P = \frac{15}{13}$.

C. $P = -13$.

D. $P = 13$.

Lời giải

Chọn D

Chia cả tử và mẫu của P cho $\sin \alpha$ ta được $P = \frac{3+4\cot \alpha}{2-5\cot \alpha} = \frac{3+4\cdot\frac{1}{3}}{2-5\cdot\frac{1}{3}} = 13$.

Câu 102: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Tính $P = \frac{2\sin^2 \alpha + 3\sin \alpha \cdot \cos \alpha + 4\cos^2 \alpha}{5\sin^2 \alpha + 6\cos^2 \alpha}$.

- A. $P = \frac{9}{13}$. B. $P = \frac{9}{65}$. C. $P = -\frac{9}{65}$. D. $P = \frac{24}{29}$.

Lời giải

Chọn A

Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos^2 \alpha$ ta được

$$P = \frac{2\tan^2 \alpha + 3\tan \alpha + 4}{5\tan^2 \alpha + 6} = \frac{2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 4}{5 \cdot 2^2 + 6} = \frac{9}{13}.$$

Câu 103: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $P = \frac{2\sin^2 \alpha + 3\sin \alpha \cdot \cos \alpha - 4\cos^2 \alpha}{5\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$.

- A. $P = -\frac{8}{13}$. B. $P = \frac{2}{19}$. C. $P = -\frac{2}{19}$. D. $P = -\frac{8}{19}$.

Lời giải

Chọn D

Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos^2 \alpha$ ta được

$$P = \frac{2\tan^2 \alpha + 3\tan \alpha - 4}{5 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{2} - 4}{5 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{8}{19}.$$

Câu 104: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 5$. Tính $P = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.

- A. $P = \frac{9}{13}$. B. $P = \frac{10}{13}$. C. $P = \frac{11}{13}$. D. $P = \frac{12}{13}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$. (*)

Chia hai vế của (*) cho $\cos^2 \alpha$ ta được $\frac{P}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1$

$$\Leftrightarrow P(1 + \tan^2 \alpha) = \tan^2 \alpha - 1 \Leftrightarrow P = \frac{\tan^2 \alpha - 1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{5^2 - 1}{1 + 5^2} = \frac{12}{13}.$$

Câu 105: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{5}{4}$. Tính $P = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

- A. $P = \frac{9}{16}$. B. $P = \frac{9}{32}$. C. $P = \frac{9}{8}$. D. $P = \frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết, ta có $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{25}{16} \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{25}{16}$

$$\longrightarrow P = \sin \alpha \cos \alpha = \frac{9}{32}.$$

Câu 106: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25}$ và $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$. Tính $P = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$.

A. $P = \frac{91}{125}$.

B. $P = \frac{49}{25}$.

C. $P = \frac{7}{5}$.

D. $P = \frac{1}{9}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$, ta có

$$P = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^3 - 3 \sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha).$$

Ta có $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25}$.

Vì $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$ nên ta chọn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$.

Thay $\begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5} \\ \sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25} \end{cases}$ vào P , ta được $P = \left(\frac{7}{5}\right)^3 - 3 \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{7}{5} = \frac{91}{125}$.

Câu 107: Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ và $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Tính $P = \sin \alpha - \cos \alpha$.

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $P = \frac{1}{2}$.

C. $P = -\frac{1}{2}$.

D. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2$.

Suy ra $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 - (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$.

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ suy ra $\sin \alpha < \cos \alpha$ nên $\sin \alpha - \cos \alpha < 0$. Vậy $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 108: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Tính $P = |\sin \alpha - \cos \alpha|$.

A. $P = 2 - m$.

B. $P = 2 - m^2$.

C. $P = m^2 - 2$.

D. $P = \sqrt{2 - m^2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2$.

Suy ra $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2 - (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2 - m^2 \longrightarrow P = |\sin \alpha - \cos \alpha| = \sqrt{2 - m^2}$.

Câu 109: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$. Tính $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

- A. $P = 1$. B. $P = 2$. C. $P = 3$. D. $P = 4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 \tan \alpha \cot \alpha = 2^2 - 2.1 = 2$.

Câu 110: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha = 5$. Tính $P = \tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha$.

- A. $P = 100$. B. $P = 110$. C. $P = 112$. D. $P = 115$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P = \tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha = (\tan \alpha + \cot \alpha)^3 - 3 \tan \alpha \cot \alpha (\tan \alpha + \cot \alpha) = 5^3 - 3.5 = 110$.

Câu 111: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

- A. $P = 12$. B. $P = 14$. C. $P = 16$. D. $P = 18$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{4}$.

Khi đó $P = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$
 $= \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha \cos \alpha)^2} = 14$.

Câu 112: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\tan \alpha - \cot \alpha = 1$. Tính $P = \tan \alpha + \cot \alpha$.

- A. $P = 1$. B. $P = -1$. C. $P = -\sqrt{5}$. D. $P = \sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$\tan \alpha - \cot \alpha = 1 \Leftrightarrow \tan \alpha - \frac{1}{\tan \alpha} = 1 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha - \tan \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ suy ra $\tan \alpha < 0$ nên $\tan \alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \longrightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{2}{1 - \sqrt{5}}$.

Thay $\tan \alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ và $\cot \alpha = \frac{2}{1-\sqrt{5}}$ vào P , ta được $P = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1-\sqrt{5}} = -\sqrt{5}$.

Câu 113: Cho góc α thỏa mãn $3\cos \alpha + 2\sin \alpha = 2$ và $\sin \alpha < 0$. Tính $\sin \alpha$.

- A. $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$. B. $\sin \alpha = -\frac{7}{13}$. C. $\sin \alpha = -\frac{9}{13}$. D. $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3\cos \alpha + 2\sin \alpha = 2 \Leftrightarrow (3\cos \alpha + 2\sin \alpha)^2 = 4$

$\Leftrightarrow 9\cos^2 \alpha + 12\cos \alpha \cdot \sin \alpha + 4\sin^2 \alpha = 4 \Leftrightarrow 5\cos^2 \alpha + 12\cos \alpha \cdot \sin \alpha = 0$

$\Leftrightarrow \cos \alpha (5\cos \alpha + 12\sin \alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ 5\cos \alpha + 12\sin \alpha = 0 \end{cases}$

• $\cos \alpha = 0 \Rightarrow \sin \alpha = 1$: loại (vì $\sin \alpha < 0$).

• $5\cos \alpha + 12\sin \alpha = 0$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} 5\cos \alpha + 12\sin \alpha = 0 \\ 3\cos \alpha + 2\sin \alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -\frac{5}{13} \\ \cos \alpha = \frac{12}{13} \end{cases}$.

Câu 114: Cho góc α thỏa mãn $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ và $\sin \alpha - 2\cos \alpha = 1$. Tính $P = 2\tan \alpha - \cot \alpha$.

- A. $P = \frac{1}{2}$. B. $P = \frac{1}{4}$. C. $P = \frac{1}{6}$. D. $P = \frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Với $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ suy ra $\begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} \sin \alpha - 2\cos \alpha = 1 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow (1 + 2\cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\Leftrightarrow 5\cos^2 \alpha + 4\cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \text{ (loại)} \\ \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ (do $\sin \alpha < 0$) $\longrightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$

và $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{4}{3}$.

Thay $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ và $\cot \alpha = \frac{4}{3}$ vào P , ta được $P = \frac{1}{6}$.

Câu 115: Rút gọn biểu thức $M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$.

- A. $M = 1$. B. $M = 2$. C. $M = 4$. D. $M = 4\sin x \cdot \cos x$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x \\ (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x = 1 - 2 \sin x \cdot \cos x \end{cases}$$

Suy ra $M = 2$.

Câu 116: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 4x$.

B. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x$.

C. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x$.

D. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x)^2 + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x + (\cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2} (2 \sin x \cdot \cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x. \end{aligned}$$

Câu 117: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x$.

B. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$.

C. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x$.

D. $\sin^4 x - \cos^4 x = 2 \cos^2 x - 1$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin^4 x - \cos^4 x &= (\sin^2 x)^2 - (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= \sin^2 x - \cos^2 x = (1 - \cos^2 x) - \cos^2 x = 1 - 2 \cos^2 x. \end{aligned}$$

Câu 118: Rút gọn biểu thức $M = \sin^6 x + \cos^6 x$.

A. $M = 1 + 3 \sin^2 x \cos^2 x$.

B. $M = 1 - 3 \sin^2 x$.

C. $M = 1 - \frac{3}{2} \sin^2 2x$.

D. $M = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M = \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x. \end{aligned}$$

Câu 119: Rút gọn biểu thức $M = \tan^2 x - \sin^2 x$.

A. $M = \tan^2 x$.

B. $M = \sin^2 x$.

C. $M = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$.

D. $M = 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } M = \tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \sin^2 x \cdot \tan^2 x.$$

Câu 120: Rút gọn biểu thức $M = \cot^2 x - \cos^2 x$.

A. $M = \cot^2 x$.

B. $M = \cos^2 x$.

C. $M = 1$.

D. $M = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } M = \cot^2 x - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x = \cos^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) = \cos^2 x \cdot \cot^2 x.$$

Câu 121: Rút gọn biểu thức $M = (1 \sin^2 x) \cot^2 x + (1 \cot^2 x)$.

A. $M = \sin^2 x$.

B. $M = \cos^2 x$.

C. $M = \sin^2 x$.

D. $M = \cos^2 x$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta biến đổi: } M = (\cot^2 x - \cos^2 x) + (1 - \cot^2 x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x.$$

Câu 122: Rút gọn biểu thức $M = \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha$.

A. $M = 1 + \sin^2 \alpha$.

B. $M = \sin \alpha$.

C. $M = 2 \sin \alpha$.

D. $M = 3$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= \tan^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1) + 4 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \\ &= \tan^2 \alpha (-\cos^2 \alpha) + 4 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \\ &= -\sin^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha = 3(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 3. \end{aligned}$$

Câu 123: Rút gọn biểu thức $M = (\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2)$.

A. $M = -4$.

B. $M = -2$.

C. $M = 2$.

D. $M = 4$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= (1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x - 1) \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2 \right) \\ &= (-2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x) \left(\frac{\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) = (-2) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = -2. \end{aligned}$$

Câu 124: Đơn giản biểu thức $P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$.

A. $P = |\sin \alpha|$.

B. $P = \sin \alpha$.

C. $P = \cos \alpha$.

D. $P = |\cos \alpha|$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = \sqrt{\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = \sqrt{\sin^2 \alpha} = |\sin \alpha|.$$

Câu 125: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$.

A. $P = 1 + 2 \tan^2 \alpha$.

B. $P = 1 - 2 \tan^2 \alpha$.

C. $P = -1 + 2 \tan^2 \alpha$.

D. $P = -1 - 2 \tan^2 \alpha$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha = 1 + 2 \tan^2 \alpha.$$

Câu 126: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha}$.

A. $P = -\frac{2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$.

B. $P = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$.

C. $P = \frac{2}{1 + \cos \alpha}$.

D. $P = 0$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \\ &= \frac{1 - \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{1 + \cos \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = 0. \end{aligned}$$

Câu 127: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \cos^2 \alpha$.

A. $P = \tan^2 \alpha$.

B. $P = 1$.

C. $P = -\cos^2 \alpha$.

D. $P = \cot^2 \alpha$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$P = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha.$$

Câu 128: Đơn giản biểu thức $P = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$.

A. $P = \cos x + \sin x$.

B. $P = \cos x - \sin x$.

C. $P = \cos 2x - \sin 2x$.

D. $P = \cos 2x + \sin 2x$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \frac{2\cos^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} = \cos x - \sin x.$$

Câu 129: Đơn giản biểu thức $P = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\cot \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}.$

A. $P = 2 \tan^2 \alpha.$

B. $P = \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}.$

C. $P = 2 \cot^2 \alpha.$

D. $P = \frac{2}{\cos^2 \alpha}.$

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\cot \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 1}{\cos \alpha \cdot \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right)} \\ &= \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 1}{\cos \alpha \cdot \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2 \tan^2 \alpha. \end{aligned}$$

Câu 130: Đơn giản biểu thức $P = \left(\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + 1} \right)^2 + 1.$

A. $P = 2.$

B. $P = 1 + \tan \alpha.$

C. $P = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$

D. $P = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + 1} = \frac{\sin \alpha \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha} \right)}{\cos \alpha + 1} = \frac{\sin \alpha \left(\frac{\cos \alpha + 1}{\cos \alpha} \right)}{\cos \alpha + 1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha.$$

$$\text{Suy ra } P = \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Câu 131: Đơn giản biểu thức $P = \tan \alpha \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right).$

A. $P = 2.$

B. $P = 2 \cos \alpha.$

C. $P = 2 \tan \alpha.$

D. $P = 2 \sin \alpha.$

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \tan \alpha \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) \\ &= \frac{1}{\cos \alpha} + \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{(1 - \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Câu 132: Đơn giản biểu thức $P = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x}.$

A. $P = 1.$

B. $P = -1.$

C. $P = \frac{1}{2}.$

D. $P = -\frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} = 1 - \frac{\cos^2 x}{\cot^2 x} = 1 - \cos^2 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 - \sin^2 x.$$

$$\text{Và } \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x} = \sin x \cdot \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sin^2 x. \text{ Suy ra. } P = 1 - \sin^2 x + \sin^2 x = 1.$$

BÀI 3: CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Công thức cộng

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta; \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}; \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

2. Công thức góc nhân đôi

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

3. Công thức biến đổi tích thành tổng

Từ công thức cộng, ta suy ra được *công thức biến đổi tích thành tổng* sau đây:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

4. Công thức biến đổi tổng thành tích

Các công thức dưới đây được gọi là *công thức biến đổi tổng thành tích*.

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}; \quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}; \quad \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Sử dụng công thức cộng

1. Phương pháp giải.

- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

$$\bullet \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Biết $\sin x = \frac{1}{2}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$. Hãy tính giá trị lượng giác $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Vì $0 < x < \frac{\pi}{2}$ nên điểm ngọn cung thuộc góc phần tư thứ I $\Rightarrow \cos x > 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Ta có } \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Ví dụ 2: Biết $\cos x = -\frac{12}{13}, \pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Tính giá trị lượng giác $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

Lời giải

Vì $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ nên điểm ngọn cung thuộc góc phần tư thứ III $\Rightarrow \sin x < 0$

$$\Rightarrow \sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \left(\frac{-12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13}.$$

$$\text{Ta có } \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-12}{13} - \frac{1}{2} \cdot \frac{-5}{13} = \frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}.$$

Ví dụ 3: Rút gọn biểu thức $A = \sin(x + 14^\circ) \sin(x + 74^\circ) + \sin(x - 76^\circ) \sin(x - 16^\circ)$

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \sin(14^\circ + x) \cos(16^\circ - x) + \sin(76^\circ - x) \sin(16^\circ - x)$$

$$= \sin(14^\circ + x) \cos(16^\circ - x) + \cos(14^\circ + x) \sin(16^\circ - x)$$

$$= \sin(14^\circ + 16^\circ + x - x) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 4: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b \cdot \cos c} + \frac{\sin(c-a)}{\cos c \cdot \cos a}$

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin b \cdot \cos c - \sin c \cdot \cos b}{\cos b \cdot \cos c} + \frac{\sin c \cdot \cos a - \sin a \cdot \cos c}{\cos c \cdot \cos a} \\ &= \frac{\sin a \cdot \cancel{\cos b}}{\cos a \cdot \cancel{\cos b}} - \frac{\sin b \cdot \cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a} \cdot \cos b} + \frac{\sin b \cdot \cancel{\cos c}}{\cos b \cdot \cancel{\cos c}} - \frac{\sin c \cdot \cancel{\cos b}}{\cancel{\cos b} \cdot \cos c} + \frac{\sin c \cdot \cancel{\cos a}}{\cos c \cdot \cancel{\cos a}} - \frac{\sin a \cdot \cancel{\cos c}}{\cancel{\cos c} \cdot \cos a} \end{aligned}$$

$$= \cancel{\tan a} - \cancel{\tan b} + \cancel{\tan b} - \cancel{\tan c} + \cancel{\tan c} - \cancel{\tan a} = 0.$$

Ví dụ 5: Không dùng MTCT, tính các giá trị lượng giác sau: $\cos 795^\circ$, $\tan \frac{7\pi}{12}$.

Lời giải

* Tính $\cos 795^\circ$

Vì $795^\circ = 75^\circ + 2.360^\circ = 30^\circ + 45^\circ + 2.360^\circ$ nên

$$\cos 795^\circ = \cos 75^\circ = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

* Tính $\tan \frac{7\pi}{12}$

$$\tan \frac{7\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$$

Ví dụ 6: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

a) $A = \sin 22^\circ 30' \cos 202^\circ 30'$

b) $B = 4 \sin^4 \frac{\pi}{16} + 2 \cos \frac{\pi}{8}$

Lời giải

a) $A = \sin 22^\circ 30' \cos 202^\circ 30'$

Cách 1: Ta có $\cos 202^\circ 30' = \cos (180^\circ + 22^\circ 30') = -\cos 22^\circ 30'$

Do đó $A = -\sin 22^\circ 30' \cos 22^\circ 30' = -\frac{1}{2} \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

Cách 2: $A = \frac{1}{2} [\sin (22^\circ 30' + 202^\circ 30') + \sin (22^\circ 30' - 202^\circ 30')] = \frac{1}{2} [\sin 225^\circ + \sin (-180^\circ)]$

$$= \frac{1}{2} [\sin (180^\circ + 45^\circ) - \sin 180^\circ] = -\frac{1}{2} \sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

b) $B = \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{16} \right)^2 + 2 \cos \frac{\pi}{8} = \left[1 - \cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{16} \right) \right]^2 + 2 \cos \frac{\pi}{8}$

$$= 1 - 2 \cos \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} + 2 \cos \frac{\pi}{8} = 1 + \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = 1 + \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{6 + \sqrt{2}}{4}$$

Ví dụ 7: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

a) $A = \frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin 250^\circ}$

b) $B = (1 + \tan 20^\circ)(1 + \tan 25^\circ)$

c) $C = \tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$

d) $D = \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9}$

Lời giải

a) Ta có $\cos 290^\circ = \cos(180^\circ + 90^\circ + 20^\circ) = -\cos(90^\circ + 20^\circ) = \sin 20^\circ$

$\sin 250^\circ = \sin(180^\circ + 90^\circ - 20^\circ) = -\sin(90^\circ - 20^\circ) = -\cos 20^\circ$

$$C = \frac{1}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\sqrt{3} \cos 20^\circ} = \frac{\sqrt{3} \sin 20^\circ - \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ} = 4 \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ}$$

$$= 4 \frac{\sin 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 60^\circ \sin 20^\circ}{\sqrt{3} \sin 40^\circ} = \frac{4 \sin 40^\circ}{\sqrt{3} \sin 40^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

b) **Cách 1:** Ta có $B = \left(1 + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}\right) \left(1 + \frac{\sin 25^\circ}{\cos 25^\circ}\right) = \frac{\sin 20^\circ + \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} \cdot \frac{\sin 25^\circ + \cos 25^\circ}{\cos 25^\circ}$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 20^\circ \cos 45^\circ + \cos 20^\circ \sin 45^\circ}{\cos 20^\circ} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sin 25^\circ \cos 45^\circ + \cos 25^\circ \sin 45^\circ}{\cos 25^\circ}$$

$$= 2 \frac{\sin 65^\circ \sin 70^\circ}{\cos 20^\circ \cos 25^\circ} = 2$$

Cách 2: Ta có $\tan 45^\circ = \tan(20^\circ + 25^\circ) = \frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ}$

Suy ra $1 = \frac{\tan 20^\circ + \tan 25^\circ}{1 - \tan 20^\circ \tan 25^\circ} \Leftrightarrow \tan 20^\circ + \tan 25^\circ + \tan 20^\circ \tan 25^\circ = 1$

$\Leftrightarrow (1 + \tan 20^\circ)(1 + \tan 25^\circ) = 2.$

Vậy $B = 2$

c) $C = \tan 9^\circ + \tan 81^\circ - (\tan 27^\circ + \tan 63^\circ)$

$$= \frac{\sin 9^\circ \cos 81^\circ + \sin 81^\circ \cos 9^\circ}{\cos 9^\circ \cos 81^\circ} - \frac{\sin 27^\circ \cos 63^\circ + \sin 63^\circ \cos 27^\circ}{\cos 27^\circ \cos 63^\circ}$$

$$= \frac{1}{\cos 9^\circ \sin 9^\circ} - \frac{1}{\cos 27^\circ \sin 27^\circ} = \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ}$$

$$= \frac{4 \cos 36^\circ \cdot \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ} = 4$$

d) $D = \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{2\pi}{9} + \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{2\pi}{9}\right)^2 - \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9}$

$$= \left(2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{18}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{9}\right) = \cos^2 \frac{\pi}{18} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{\pi}{9}\right)$$

$$= \frac{1 + \cos \frac{\pi}{9}}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{\pi}{9}\right) = \frac{3}{4}$$

Lưu ý: Biến đổi sau thường xuyên được sử dụng

- $\sin x \pm \sqrt{3} \cos x = 2 \left[\frac{1}{2} \sin x \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right] = 2 \sin(x \pm \frac{\pi}{3})$
- $\sqrt{3} \sin x \pm \cos x = 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \pm \frac{1}{2} \cos x \right] = 2 \sin(x \pm \frac{\pi}{6})$
- $\sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right] = \sqrt{2} \sin(x \pm \frac{\pi}{4})$.

Ví dụ 8: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

a) $A = \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$

b) $B = \sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$

c) $C = \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5}$

d) $D = \cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \cos^2 \frac{3\pi}{7}$

Lời giải

a) $A = \frac{1}{2} \left(2 \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{16}$

b) Ta có $B = \frac{1}{2} \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ do đó

$$\begin{aligned} 16 \sin 20^\circ \cdot B &= 8 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \\ &= 4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ \\ &= 2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ = \sin 160^\circ \end{aligned}$$

Suy ra $B = \frac{\sin 160^\circ}{16 \sin 20^\circ} = \frac{1}{16}$.

c) Ta có $C = 2 \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$. Vì $\sin \frac{\pi}{5} \neq 0$ nên

$$2 \sin \frac{\pi}{5} \cdot C = 4 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = 2 \sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{4\pi}{5}$$

Suy ra $C = \frac{1}{2}$

c) $D = \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{7}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{4\pi}{7}}{2} + \frac{1 + \cos \frac{6\pi}{7}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right)$

Xét $T = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$, vì $\sin \frac{\pi}{7} \neq 0$ nên

$$\begin{aligned} 2\sin\frac{\pi}{7}T &= 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} \\ &= \left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right) + \left(\sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7}\right) + \left(\sin\pi - \sin\frac{5\pi}{7}\right) \text{ Suy ra } T = -\frac{1}{2}. \\ &= -\sin\frac{\pi}{7} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } D = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}.$$

Ví dụ 9: Cho α, β thỏa mãn $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Tính $\cos(\alpha - \beta)$ và $\sin(\alpha + \beta)$.

Lời giải

$$\bullet \text{ Ta có } \sin\alpha + \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = \frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta = \frac{3}{2} \quad (2)$$

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta + 2\cos\alpha\cos\beta &= 2 \\ \Leftrightarrow 2 + 2(\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta) &= 2 \Leftrightarrow 2\cos(\alpha - \beta) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \cos(\alpha - \beta) = 0$$

$$\bullet \text{ Từ giả thiết ta có } (\sin\alpha + \sin\beta)(\cos\alpha + \cos\beta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Mặt khác } \sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = 0 \quad (\text{Do } \cos(\alpha - \beta) = 0)$$

$$\text{Suy ra } \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dạng 2: Sử dụng công thức nhân đôi và công thức hạ bậc

1. Phương pháp

$$\bullet \sin 2a = 2\sin a \cos a$$

$$\bullet \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\bullet \tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Không dùng máy tính. Hãy tính $\tan \frac{\pi}{8}$

Lời giải

$$\text{Ta có } 1 = \tan \frac{\pi}{4} = \tan \left(2 \cdot \frac{\pi}{8} \right) = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}} \text{ suy ra } 1 - \tan^2 \frac{\pi}{8} = 2 \tan \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \tan^2 \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{8} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{\pi}{8} = -1 - \sqrt{2} \text{ hoặc } \tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$$

$$\text{Do } \tan \frac{\pi}{8} > 0 \text{ nên } \tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$$

Nhận xét: Bài này có thể yêu cầu tính $\cot \frac{5\pi}{8}$. Lúc đó: $\cot \frac{5\pi}{8} = \cot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = -\tan \frac{\pi}{8}$

Ví dụ 2: Chứng minh các biểu thức sau :

$$\text{a) } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4}$$

$$\text{b) } \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \\ &= 1 - \frac{1 - \cos 4\alpha}{4} = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4} \end{aligned}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha &= (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 \\ &+ 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{3}{8} (1 - \cos 4\alpha) \\ &= \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4\alpha \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Cho $\cos 4\alpha + 2 = 6 \sin^2 \alpha$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan 2\alpha$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos 4\alpha + 2 = 6 \sin^2 \alpha \Leftrightarrow 2 \cos^2 2\alpha - 1 + 2 = 3(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 2\alpha + 3 \cos 2\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có } 1 + \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} \Rightarrow \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} - 1 = 3$$

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \pi < \alpha < 2\pi$ nên $\sin 2\alpha < 0$. Mặt khác $\cos 2\alpha > 0$ do đó $\tan 2\alpha < 0$

Vậy $\tan 2\alpha = -\sqrt{3}$

Ví dụ 4: Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = \cot \frac{\alpha}{2}$ với $0 < \alpha < \pi$. Tính $\tan\left(\frac{\alpha + 2013\pi}{2}\right)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1}$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1}$$

$$\text{Do đó } \sin \alpha + \cos \alpha = \cot \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1} + \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{\tan^2 \frac{\alpha}{2} + 1} = \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{\alpha}{2} \left(1 + 2 \tan \frac{\alpha}{2} - \tan^2 \frac{\alpha}{2} \right) = 1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \tan^3 \frac{\alpha}{2} - \tan^2 \frac{\alpha}{2} - \tan \frac{\alpha}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\tan \frac{\alpha}{2} - 1 \right)^2 \left(\tan \frac{\alpha}{2} + 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \pm 1$$

Vì $0 < \alpha < \pi \Rightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ do đó $\tan \frac{\alpha}{2} > 0$ nên $\tan \frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \cot \frac{\alpha}{2} = 1$

$$\text{Ta có } \tan\left(\frac{\alpha + 2013\pi}{2}\right) = \tan\left(\frac{\alpha}{2} + 2006\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \frac{\alpha}{2} = -1$$

$$\text{Vậy } \tan\left(\frac{\alpha + 2013\pi}{2}\right) = -1$$

Lưu ý: Ta có thể biểu diễn $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ qua $t = \tan \frac{\alpha}{2}$ như sau:

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan \alpha = \frac{2t}{1-t^2}, \cot \alpha = \frac{1-t^2}{2t} \text{ với } \alpha \text{ làm các biểu thức có nghĩa.}$$

Ví dụ 5: Tính $A = \cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12}$

Hướng dẫn giải

Ta có

$$A = \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) = \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ví dụ 6 *: Không dùng máy tính. Hãy tính $\sin 18^\circ$

Lời giải

Vì $54^\circ + 36^\circ = 90^\circ$ nên $\sin 54^\circ = \cos 36^\circ$

Mà $\cos 36^\circ = \cos(2 \cdot 18^\circ) = 1 - 2\sin^2 18^\circ$

$\sin 54^\circ = \sin(18^\circ + 36^\circ) = \sin 18^\circ \cos 36^\circ + \sin 36^\circ \cos 18^\circ$

$= \sin 18^\circ \cdot (1 - 2\sin^2 18^\circ) + 2\sin 18^\circ \cos^2 18^\circ = \sin 18^\circ \cdot (1 - 2\sin^2 18^\circ) + 2\sin 18^\circ (1 - \sin^2 18^\circ)$

$= 3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ$

Do đó, đồng nhất thức ta được

$3\sin 18^\circ - 4\sin^3 18^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ \Leftrightarrow (\sin 18^\circ - 1)(4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin 18^\circ = 1$ hoặc $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ hoặc $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Vì $0 < \sin 18^\circ < 1$ nên $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ví dụ 7: Cho $\cos 2x = -\frac{4}{5}$, với $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin x, \cos x, \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Vì $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin x > 0, \cos x > 0$.

Áp dụng công thức hạ bậc, ta có :

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Theo công thức cộng, ta có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30} + 3\sqrt{10}}{20}$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x = -\frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

Ví dụ 8: Cho $\frac{1}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\cot^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 7$. Tính $\cos 4\alpha$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \frac{1}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\cot^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 7 \\ \Leftrightarrow & \frac{\sin^2 \alpha + 1}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha} = 7 \\ \Leftrightarrow & \frac{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + 1) + \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha + 1)}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 7 \\ \Leftrightarrow & \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 1 = 7 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ \Leftrightarrow & (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 1 = 7 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ \Leftrightarrow & 2 = 9 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ \Leftrightarrow & 8 = 9 (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 \\ \Leftrightarrow & 8 = 9 \sin^2 2\alpha \\ \Leftrightarrow & 16 = 9 (1 - \cos 4\alpha) \\ \Leftrightarrow & \cos 4\alpha = -\frac{7}{9} \\ \text{Vậy } & \cos 4\alpha = -\frac{7}{9} \end{aligned}$$

Ví dụ 9: Cho $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$, $\tan \alpha = -2 \tan \beta$.

Tính $A = \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{8}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\beta - \frac{5\pi}{12}\right) \sin\left(\beta - \frac{\pi}{12}\right)$.

Lời giải

Ta có $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}$ (1)

$\tan \alpha = -2 \tan \beta \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \beta = -2 \sin \beta \cos \alpha$ (2)

Từ (1) và (2) ta được

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \cos \alpha \sin \beta = -\frac{1}{3} \\ \sin \alpha \cos \beta = -\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \\ \sin^2 \alpha \cos^2 \beta = \frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \\ \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) = \frac{4}{9} \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \\ \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 - \sin^2 \beta - \frac{1}{3}) \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \\ \sin^2 \beta - \frac{2}{3} \sin^2 \beta + \frac{1}{9} = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow & \sin^4 \beta - \frac{2}{3} \sin^2 \beta + \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow \left(\sin^2 \beta - \frac{1}{3}\right)^2 = 0 \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Do đó $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Ta có $\sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2 \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - 2 \cdot \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{2+3\sqrt{2}}{12}$$

$\sin\left(\beta - \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\beta - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(2\beta - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{2}\left[-\cos 2\beta + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left(-1 + 2\sin^2 \beta + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-2+3\sqrt{2}}{12}$$

Do đó $A = -\frac{2+3\sqrt{2}}{12} + \frac{-2+3\sqrt{2}}{12} = -\frac{1}{3}$

Dạng 3: Công thức biến đổi tổng thành tích và tích thành tổng

1. Phương pháp giải.

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)].$$

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $C = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}}$

b) $D = \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}$

Hướng dẫn giải

$$a) C = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}} = \frac{2 \cos \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15} \right) \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{15} \right)}{-2 \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15} \right) \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{15} \right)} = -\frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

$$b) D = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} \right) - \sin \frac{5\pi}{9} = 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{9} = \sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} = 0$$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng

$$a) \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$b) \cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} = 2 \text{ với } \sin \alpha + \sin \beta = 3 \sin(\alpha + \beta), \alpha + \beta \neq k2\pi$$

$$c) \frac{\sin \alpha + \sin \beta \cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha - \sin \beta \sin(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta)$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2} [\cos 2\alpha - \cos 2\beta] \\ = -\frac{1}{2} [(1 - 2\sin^2 \alpha) - (1 - 2\sin^2 \beta)] = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$b) \text{ Từ giả thiết ta có } 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 6 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\text{Do } \alpha + \beta \neq k2\pi \Rightarrow \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \neq 0 \text{ suy ra } \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 3 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = 3 \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} = 2 \Rightarrow \text{ĐPCM}$$

$$c) \text{ Ta có } VT = \frac{\sin \alpha + \frac{1}{2} [\sin(\alpha + 2\beta) + \sin(-\alpha)]}{\cos \alpha - \left(-\frac{1}{2} \right) [\cos(\alpha + 2\beta) - \cos(-\alpha)]} = \frac{\sin \alpha + \sin(\alpha + 2\beta)}{\cos \alpha + \cos(\alpha + 2\beta)} \\ = \frac{2 \sin(\alpha + \beta) \cos(-\beta)}{2 \cos(\alpha + \beta) \cos(-\beta)} = \tan(\alpha + \beta) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi góc lượng giác α làm cho biểu thức xác định thì

$$\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \cot^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có } \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} \\ &= \frac{\left[\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right]^2}{\left[\sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right]^2} = \frac{2 \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)}{2 \sin^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)} = \cot^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Ví dụ 4: Cho $0 < \alpha < \pi, \alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha} = 2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha}}{\sqrt{1 + \cos \alpha} - \sqrt{1 - \cos \alpha}} = \tan \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

Lời giải

$$\text{a) Do } 0 < \alpha < \pi \text{ nên } \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) > 0, \sin \alpha > 0$$

Đẳng thức tương đương với

$$\left(\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha} \right)^2 = 4 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{1 + \cos \alpha} \sqrt{1 - \cos \alpha} = 2 \left[1 - \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \right] \Leftrightarrow 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ (luôn}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sin \alpha$$

đúng) $\Rightarrow$ ĐPCM.

$$\begin{aligned} \text{b) } VT &= \frac{\left(\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha} \right)^2}{\left(\sqrt{1 + \cos \alpha} - \sqrt{1 - \cos \alpha} \right) \left(\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha} \right)} \\ &= \frac{2 + 2\sqrt{1 + \cos \alpha} \cdot \sqrt{1 - \cos \alpha}}{2 \cos \alpha} = \frac{1 + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1 + |\sin \alpha|}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

Vì $0 < \alpha < \pi$ nên $\sin \alpha > 0$ do đó

$$\begin{aligned} VT &= \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2}{\left(\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right)} \\ &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2} \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} = \tan \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

Ví dụ 5: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

$$a) A = \cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right)$$

$$b) B = \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{4} \right)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) \text{ Ta có: } A &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + \alpha \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[3 + \cos 2\alpha + \cos \left(\frac{4\pi}{3} + 2\alpha \right) + \cos \left(\frac{4\pi}{3} - 2\alpha \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[3 + \cos 2\alpha + 2 \cos \frac{4\pi}{3} \cos 2\alpha \right] = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$b) \text{ Vì } \alpha + \frac{\pi}{6} = \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) = -\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \text{ và } \cos \left(\alpha + \frac{3\pi}{4} \right) = -\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} B &= \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \cdot \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \left[\left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) - \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right] = \cos \left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

Ví dụ 6: Đơn giản biểu thức sau:

$$a) A = \frac{\cos a + 2 \cos 2a + \cos 3a}{\sin a + \sin 2a + \sin 3a}$$

$$b) B = \frac{\cos \left(a + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(a - \frac{\pi}{3} \right)}{\cot a - \cot \frac{a}{2}}$$

$$c) C = \cos a + \cos(a+b) + \cos(a+2b) + \dots + \cos(a+nb) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Lời giải

$$a) A = \frac{(\cos a + \cos 3a) + 2 \cos 2a}{(\sin a + \sin 3a) + 2 \sin 2a} = \frac{2 \cos 2a \cos a + 2 \cos 2a}{2 \sin 2a \cos a + 2 \sin 2a} = \frac{2 \cos 2a (\cos a + 1)}{2 \sin 2a (\cos a + 1)} = \cot 2a$$

$$b) \text{ Ta có } \cos \left(a + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(a - \frac{\pi}{3} \right) = 2 \cos a \cos \frac{\pi}{3} = \cos a \text{ và}$$

$$\cot a - \cot \frac{a}{2} = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} = \frac{\sin \frac{a}{2} \cos a - \cos \frac{a}{2} \sin a}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = \frac{\sin \left(\frac{a}{2} - a \right)}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = \frac{-\sin \frac{a}{2}}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = -\frac{1}{\sin a}$$

$$\text{Suy ra } B = \frac{\cos a}{-\frac{1}{\sin a}} = -\sin a \cos a = -\frac{\sin 2a}{2}.$$

$$\text{c) Ta có } C \cdot 2 \sin \frac{b}{2} = 2 \sin \frac{b}{2} \cos a + 2 \sin \frac{b}{2} \cos(a+b) + 2 \sin \frac{b}{2} \cos(a+2b) + \dots + 2 \sin \frac{b}{2} \cos(a+nb)$$

$$= \sin\left(\frac{b}{2} + a\right) + \sin\left(\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{3b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{5b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{3b}{2} - a\right)$$

$$+ \dots + \sin\left(\frac{(2n+1)b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{(2n-1)b}{2} - a\right)$$

$$\sin\left(\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{(2n+1)b}{2} + a\right) = 2 \sin(n+1)b \cos\left(\frac{nb}{2} - a\right)$$

$$\text{Suy ra } C = \frac{\sin(n+1)b \cos\left(\frac{nb}{2} - a\right)}{\sin \frac{b}{2}}$$

Ví dụ 7: Cho $\sin(a+b) = 2 \cos(a-b)$. Chứng minh rằng biểu thức $M = \frac{1}{2 - \sin 2a} + \frac{1}{2 - \sin 2b}$

không phụ thuộc vào a, b .

Lời giải

$$\text{Ta có } M = \frac{4 - (\sin 2a + \sin 2b)}{(2 - \sin 2a)(2 - \sin 2b)} = \frac{4 - (\sin 2a + \sin 2b)}{4 - 2(\sin 2a + \sin 2b) + \sin 2a \sin 2b}$$

$$\text{Ta có } \sin 2a + \sin 2b = 2 \sin(a+b) \cos(a-b)$$

$$\text{Mà } \sin(a+b) = 2 \cos(a-b) \Rightarrow \sin^2(a+b) = 4 \cos^2(a-b) \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} \cos 2(a+b) - \cos 2(a-b) &= 1 - 2 \sin^2(a+b) - [2 \cos^2(a-b) - 1] \\ &= 2 - 2[\sin^2(a+b) + \cos^2(a-b)] = 2 - 10 \cos^2(a-b) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } M = \frac{4 - 4 \cos^2(a-b)}{4 - 8 \cos^2(a-b) - \frac{1}{2} \cdot [2 - 10 \cos^2(a-b)]} = \frac{4 - 4 \cos^2(a-b)}{3 - 3 \cos^2(a-b)} = \frac{4}{3}$$

Ví dụ 8: Chứng minh rằng

$$\text{a) } \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha = 4 \sin \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$$

$$\text{b) } \sin^3 \frac{\alpha}{3} + 3 \sin^3 \frac{\alpha}{3^2} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{\alpha}{3^n} = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \alpha \right).$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha \\
 &= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha \\
 &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Mặt khác } 4 \sin \alpha \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha \right) &= -4 \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} - \cos(-2\alpha) \right) \\
 &= -2 \sin \alpha \cdot \left(-\frac{1}{2} - \cos 2\alpha \right) = 2 \sin \alpha \left(\frac{1}{2} + 1 - 2 \sin^2 \alpha \right) \\
 &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \quad (2)
 \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra ĐPCM

$$\text{b) Theo câu a) ta có } \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \Rightarrow \sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$$

$$\text{Do đó } \sin^3 \frac{\alpha}{3} = \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3} - \sin \alpha}{4}, \sin^3 \frac{\alpha}{3^2} = \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3^2} - \sin \frac{\alpha}{3}}{4}, \dots, \sin^3 \frac{\alpha}{3^n} = \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \frac{\alpha}{3^{n-1}}}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Suy ra } VT &= \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3} - \sin \alpha}{4} + 3 \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3^2} - \sin \frac{\alpha}{3}}{4} + \dots + 3^{n-1} \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \frac{\alpha}{3^{n-1}}}{4} \\
 &= -\frac{\sin \alpha}{4} + 3^{n-1} \frac{3 \sin \frac{\alpha}{3^n}}{4} = \frac{1}{4} \left(3^n \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \alpha \right) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM}.
 \end{aligned}$$

Lưu ý: Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$, $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$, hai công thức này được gọi là công thức nhân ba

Dạng 4: bất đẳng thức lượng giác và tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức lượng giác.

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng phương pháp chứng minh đại số quen biết.
- Sử dụng các tính chất về dấu của giá trị lượng giác một góc.
- Sử dụng kết quả $|\sin \alpha| \leq 1, |\cos \alpha| \leq 1$ với mọi số thực α

2. Các ví dụ điển hình.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì

a) $2 \cot^2 \alpha \geq 1 + \cos 2\alpha$

b) $\cot \alpha \geq 1 + \cot 2\alpha$

Lời giải

a) Bất đẳng thức tương đương với

$$2\left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1\right) \geq 2 \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \geq 1 - \sin^2 \alpha \Leftrightarrow (\sin^2 \alpha - 1)^2 \geq 0 \text{ (đúng) ĐPCM.}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \sin^2 \alpha \geq 2 \Leftrightarrow \sin^4 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + 1 \geq 0$$

b) Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \geq \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \geq \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} \quad (*)$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha > 0 \end{cases} \text{ nên}$$

$$(*) \Leftrightarrow 2 \cos^2 \alpha \geq \sin 2\alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \sin 2\alpha \text{ (đúng) ĐPCM.}$$

Ví dụ 2: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng $\left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha}\right)\left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha}\right) \geq 2$

Lời giải

$$\text{Ta có } \left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha}\right)\left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha}\right) = \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha} + 1$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \sin \alpha \cos \alpha > 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có

$$\sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha} \geq 2 \sqrt{\sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{1}{4 \sin \alpha \cos \alpha}} = 1$$

$$\text{Suy ra } \left(\sin \alpha + \frac{1}{2 \cos \alpha}\right)\left(\cos \alpha + \frac{1}{2 \sin \alpha}\right) \geq 2 \text{ ĐPCM.}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với $0 \leq \alpha \leq \pi$ thì

$$(2 \cos 2\alpha - 1)^2 - 4 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > (\sqrt{2 \sin \alpha} - 2)(3 - 2 \cos 2\alpha).$$

Lời giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$\Leftrightarrow (2 \cos 2\alpha - 1)^2 - 2 \left[1 - \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right] + 2(3 - 2 \cos 2\alpha) > \sqrt{2 \sin \alpha} [3 - 2(1 - 2 \sin^2 \alpha)]$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^2 2\alpha - 8 \cos 2\alpha + 5 + 2 \sin \alpha > \sqrt{2 \sin \alpha} (4 \sin^2 \alpha + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4(1 - \cos 2\alpha)^2 + 1 + 2 \sin \alpha > \sqrt{2 \sin \alpha} (4 \sin^2 \alpha + 1)$$

$$\Leftrightarrow 16 \sin^4 \alpha + 2 \sin \alpha + 1 > \sqrt{2 \sin \alpha} (4 \sin^2 \alpha + 1)$$

$$\text{Đặt } \sqrt{2 \sin \alpha} = t, \text{ vì } 0 \leq \alpha \leq \pi \Rightarrow 0 \leq t \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Bất đẳng thức trở thành } t^8 + t^2 + 1 > t(t^4 + 1) \Leftrightarrow t^8 - t^5 + t^2 - t + 1 > 0 \quad (*)$$

+ Nếu $0 \leq t < 1$: $(*) \Leftrightarrow t^8 + t^2(1-t^3) + 1 - t > 0$ đúng vì $1-t > 0, 1-t^3 > 0, t^2 \geq 0$ và $t^8 \geq 0$.

+ Nếu $1 \leq t \leq \sqrt{2}$: $(*) \Leftrightarrow t^5(t^3-1) + t(t-1) + 1 > 0$ đúng vì $t^5(t^3-1) \geq 0, t(t-1) \geq 0$

Vậy bất đẳng thức $(*)$ đúng suy ra ĐPCM.

Ví dụ 4: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức sau:

a) $A = \sin x + \cos x$

b) $B = \sin^4 x + \cos^4 x$

Lời giải

a) Ta có $A^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + \sin 2x$

Vì $\sin 2x \leq 1$ nên $A^2 = 1 + \sin 2x \leq 1 + 1 = 2$ suy ra $-\sqrt{2} \leq A \leq \sqrt{2}$.

Khi $x = \frac{\pi}{4}$ thì $A = \sqrt{2}$, $x = -\frac{3\pi}{4}$ thì $A = -\sqrt{2}$

Do đó $\max A = \sqrt{2}$ và $\min A = -\sqrt{2}$.

b) Ta có $B = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4} + \frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}$

$$= \frac{2+2\cos^2 2x}{4} = \frac{2+1+\cos 4x}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$$

Vì $-1 \leq \cos 4x \leq 1$ nên $\frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x \leq 1$ suy ra $\frac{1}{2} \leq B \leq 1$.

Vậy $\max B = 1$ khi $\cos 4x = 1$ và $\min B = \frac{1}{2}$ khi $\cos 4x = -1$.

Ví dụ 5: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức $A = 2 - 2\sin x - \cos 2x$

Lời giải

Ta có $A = 2 - 2\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 2\sin^2 x - 2\sin x + 1$

Đặt $t = \sin x, |t| \leq 1$ khi đó biểu thức trở thành $A = 2t^2 - 2t + 1$

Xét hàm số $y = 2t^2 - 2t + 1$ với $|t| \leq 1$.

Bảng biến thiên:

t	-1	$\frac{1}{2}$
	1	
y	5	1
		$\frac{1}{2}$

Từ bảng biến thiên suy ra $\max A = 5$ khi $t = -1$ hay $\sin x = -1$.

$\min A = \frac{1}{2}$ khi $t = \frac{1}{2}$ hay $\sin x = \frac{1}{2}$.

Dạng 5: chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức trong tam giác.

1. Phương pháp giải

Trong tam giác ta cần lưu ý:

$$A + B + C = \pi \Rightarrow \begin{cases} A = \pi - (B + C) \\ B = \pi - (A + C) \\ C = \pi - (A + B) \end{cases}$$

$$A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

2. Các ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$a) \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$b) \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$$

$$c) \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$$

Lời giải

$$a) VT = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{Mặt khác trong tam giác } ABC \text{ ta có } A+B+C=\pi \Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$$

$$\text{Suy ra } \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}, \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } VT &= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} = 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) \\ &= 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

$$b) VT = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + 1 - \cos^2 C = 2 - \frac{\cos 2A + \cos 2B}{2} - \cos^2 C$$

$$= 2 - \cos(A+B) \cos(A-B) - \cos^2 C$$

$$\text{Vì } A+B+C=\pi \Rightarrow \cos(A+B) = -\cos C \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} VT &= 2 + \cos C \cos(A-B) + \cos C \cos(A+B) = 2 + \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\ &= 2 + \cos C \cdot 2 \cos A \cos B = 2(1 + \cos A \cos B \cos C) = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

c)

$$VT = 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C$$

$$\text{Vì } A+B+C=\pi \Rightarrow \cos C = -\cos(A+B), \sin(A+B) = \sin C$$

nên

$$\begin{aligned} VT &= 2 \sin C \cos(A-B) - 2 \sin C \cos(A+B) = 2 \sin C [\cos(A-B) - \cos(A+B)] \\ &= 2 \sin C [-2 \sin A \sin(-B)] = 4 \sin A \sin B \sin C = VP \Rightarrow \text{ĐPCM.} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Chứng minh trong mọi tam giác ABC không vuông ta đều có:

- a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$
 b) $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$

Lời giải

a) Đẳng thức tương đương với $\tan A + \tan B = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C - \tan C$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B = \tan C (\tan A \tan B - 1) (*)$$

Do tam giác ABC không vuông nên $A+B \neq \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \tan A \tan B - 1 = \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} - 1 = \frac{\sin A \sin B - \cos A \cos B}{\cos A \cos B} = -\frac{\cos(A+B)}{\cos A \cos B} \neq 0$$

$$\text{Suy ra } (*) \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{\tan A \tan B - 1} = \tan C \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C \Leftrightarrow \tan(A+B) = -\tan C$$

Đẳng thức cuối đúng vì $A+B+C=\pi \Rightarrow \text{ĐPCM.}$

b) Vì $A+B+C=\pi \Rightarrow \cot(A+B) = -\cot C$

Theo công thức cộng ta có:

$$\cot(A+B) = \frac{1}{\tan(A+B)} = \frac{1 - \tan A \tan B}{\tan A + \tan B} = \frac{1 - \frac{1}{\cot A \cot B}}{\frac{1}{\cot A} + \frac{1}{\cot B}} = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$$

$$\text{Suy ra } \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} = -\cot C \Rightarrow \cot A \cot B - 1 = -\cot C (\cot A + \cot B)$$

Hay $\cot A \cdot \cot B + \cot B \cdot \cot C + \cot C \cdot \cot A = 1$ ĐPCM.

Ví dụ 3: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

- a) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$
 b) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$
 c) $\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3}$ với ABC là tam giác nhọn.

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \cos A + \cos B + \cos C = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \cos C$$

$$\text{Vì } \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \text{ nên } \cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$$

Mặt khác $\cos C = 1 - 2\sin^2 \frac{C}{2}$ do đó

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B + \cos C &= 2\sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2 \frac{C}{2} = -2\left(\sin^2 \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= -2\left(\sin^2 \frac{C}{2} - 2\sin \frac{C}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \frac{1}{4} \cos^2 \frac{A-B}{2}\right) + 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2} \\ &= -2\left(\sin \frac{C}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2}\right)^2 + 1 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2}\end{aligned}$$

Vì $\left|\cos \frac{A-B}{2}\right| \leq 1 \Rightarrow \cos^2 \frac{A-B}{2} \leq 1$ nên

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

b) Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau:

Nếu $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$ thì $\frac{\sin x + \sin y}{2} \leq \sin \frac{x+y}{2}$.

Thật vậy, do $0 \leq \frac{x+y}{2} \leq \pi \Rightarrow \sin \frac{x+y}{2} > 0$ và $\cos \frac{x-y}{2} \leq 1$ nên

$$\frac{\sin x + \sin y}{2} = \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \leq \sin \frac{x+y}{2}$$

Áp dụng bổ đề ta có: $\frac{\sin A + \sin B}{2} \leq \sin \frac{A+B}{2}, \frac{\sin C + \sin \frac{\pi}{3}}{2} \leq \sin \frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}$

$$\text{Suy ra } \frac{\sin A + \sin B}{2} + \frac{\sin C + \sin \frac{\pi}{3}}{2} \leq \sin \frac{A+B}{2} + \sin \frac{C + \frac{\pi}{3}}{2} \leq 2 \sin \frac{1}{2} \left(\frac{A+B}{2} + \frac{C + \frac{\pi}{3}}{2} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{3}$$

Do đó $\sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin \frac{\pi}{3}$ hay $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ĐPCM.

c) Vì ABC là tam giác nhọn nên $\tan A > 0, \tan B > 0, \tan C > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C}$

Theo ví dụ 2 ta có $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ nên

$$\tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt[3]{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C} \left(\sqrt[3]{(\tan A \tan B \tan C)^2} - 3 \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(\tan A \tan B \tan C)^2} \geq 3 \Leftrightarrow \tan A \tan B \tan C \geq 3\sqrt{3} \text{ ĐPCM.}$$

Ví dụ 4: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$\text{a) } \sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}$$

$$b) \cos A \cos B \cos C \leq \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$c) \tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \text{ Với tam giác } ABC \text{ không vuông.}$$

Lời giải

$$a) \text{ Vì } \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} > 0 \text{ và } \cos \frac{A-B}{2} \leq 1 \text{ nên } \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \leq 2 \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{Hoàn toàn tương tự ta có } \sin B + \sin C \leq 2 \cos \frac{A}{2}, \sin C + \sin A \leq 2 \cos \frac{B}{2}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên và rút gọn ta được

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}. \text{ ĐPCM.}$$

$$b) + \text{TH1: Nếu tam giác } ABC \text{ tù: không mất tính tổng quát giả sử } A > \frac{\pi}{2} \Rightarrow B < \frac{\pi}{2}, C < \frac{\pi}{2} \text{ suy ra}$$

$$\cos A < 0, \cos B > 0, \cos C > 0$$

$$\cos A \cos B \cos C < 0. \text{ Mà } \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} > 0 \text{ do đó bất đẳng thức luôn đúng.}$$

$$+ \text{TH2: Nếu tam giác } ABC \text{ nhọn: } \cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)].$$

$$\text{Vì } \cos(A+B) = -\cos C \text{ và } \cos(A-B) \leq 1 \text{ nên } \cos A \cos B \leq \frac{1}{2}(1 - \cos C) = \sin^2 \frac{C}{2}.$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có } \cos B \cos C \leq \sin^2 \frac{A}{2}, \cos C \cos A \leq \sin^2 \frac{B}{2}.$$

Do các vế đều không âm nên nhân vế với vế các bất đẳng thức trên ta được

$$(\cos A \cos B)(\cos B \cos C)(\cos C \cos A) \leq \sin^2 \frac{C}{2} \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos A \cos B \cos C \leq \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \text{ ĐPCM.}$$

$$c) \text{ Ta có } \tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \frac{2 \sin(A+B)}{\cos(A+B) + \cos(A-B)}$$

$$\text{Mà } \sin(A+B) = \sin C, \cos(A+B) = -\cos C \text{ nên}$$

$$\tan A + \tan B = \frac{2 \sin C}{-\cos C + \cos(A-B)} \geq \frac{2 \sin C}{1 - \cos C} = \frac{4 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \sin^2 \frac{C}{2}} = 2 \cot \frac{C}{2}$$

$$\text{Tương tự ta có } \tan B + \tan C \geq 2 \cot \frac{A}{2}, \tan C + \tan A \geq 2 \cot \frac{B}{2}$$

Cộng vế với vế và rút gọn ta được

$$\tan A + \tan B + \tan C \geq \cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \quad \text{ĐPCM.}$$

Nhận xét:

+ Để chứng minh $x + y + z \geq a + b + c$ ta có thể đi chứng minh $x + y \geq 2a$ (hoặc $2b, 2c$) rồi xây dựng bất đẳng thức tương tự. Cộng vế với vế suy ra đpcm.

+ Để chứng minh $xyz \geq abc$ với x, y, z, a, b, c không âm ta đi chứng minh $xy \geq a^2$ (hoặc b^2, c^2) rồi xây dựng bất đẳng thức tương tự. nhân vế với vế suy ra đpcm.

Ví dụ 5: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

$$a) \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$b) \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức $x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)}$ với mọi x, y không âm ta có

$$\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} \leq \sqrt{2(\sin A + \sin B)} = \sqrt{2 \cdot 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} \leq 2\sqrt{\sin \frac{A+B}{2}}$$

$$\text{Tương tự ta có } \sqrt{\sin C} + \sqrt{\sin \frac{\pi}{3}} \leq 2\sqrt{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\text{Cộng vế với vế ta được } \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} + \sqrt{\sin \frac{\pi}{3}} \leq 2\left(\sqrt{\sin \frac{A+B}{2}} + \sqrt{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}\right)$$

$$\text{Mà } \sqrt{\sin \frac{A+B}{2}} + \sqrt{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)} \leq 2\sqrt{\sin \left[\frac{A+B}{2} + \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)\right]} = 2\sqrt{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} + \sqrt{\sin \frac{\pi}{3}} \leq 4\sqrt{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{Hay } \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leq 3\sqrt{\sin \frac{\pi}{3}} = 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \text{ĐPCM.}$$

$$b) \text{ Ta có } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) = 1 + \frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin A \sin B}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ với mọi x, y dương ta có

$$\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} \geq \frac{4}{\sin A + \sin B} = \frac{4}{2\sqrt{\sin A \sin B}} = \frac{2}{\sqrt{\sin A \sin B}}$$

$$\text{Do đó } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \geq 1 + \frac{2}{\sqrt{\sin A \sin B}} + \frac{1}{\sin A \sin B} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\sin A \sin B}}\right)^2$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\sin A \sin B &= -\frac{1}{2}[\cos(A+B) - \cos(A-B)] = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)] \\ &\geq \frac{\cos(A+B) + 1}{2} = \sin^2 \frac{A+B}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Nên } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A+B}{2}}\right)^2 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có } \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}\right)^2 \quad (2)$$

Nhân vế với vế của (1) và (2) ta được

$$\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A+B}{2}}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}\right)^2$$

$$\text{Ta lại có } \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A+B}{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\left[\frac{A+B}{2} + \frac{1}{2}\left(C + \frac{\pi}{3}\right)\right]}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right)^2$$

$$\text{Suy ra } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right)^4$$

$$\text{Hay } \left(1 + \frac{1}{\sin A}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin B}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}}\right)^3 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \quad \text{ĐPCM.}$$

Nhận xét: Cho tam giác ABC và hàm số f

- Để chứng minh $f(A) + f(B) + f(C) \geq 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Ta đi chứng minh $f(A) + f(B) \geq 2f\left(\frac{A+B}{2}\right)$

khi đó $f(C) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq 2f\left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}\right)$ từ đó suy ra

$$f(A) + f(B) + f(C) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq 2 \left[f\left(\frac{A+B}{2}\right) + f\left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}\right) \right] \geq 4f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Do đó $f(A) + f(B) + f(C) \geq 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

- Để chứng minh $f(A)f(B)f(C) \geq f^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Ta đi chứng minh $f(A)f(B) \geq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)$

khi đó $f(C)f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq f^2\left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}\right)$ từ đó suy ra

$$f(A)f(B)f(C)f\left(\frac{\pi}{3}\right) \geq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)f^2\left(\frac{C + \frac{\pi}{3}}{2}\right) \geq f^4\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Do đó $f(A)f(B)f(C) \geq f^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Ví dụ 6: Cho tam giác $\triangle ABC$ thỏa mãn $\cos \frac{A}{2} \cos(B-C) + \cos A \cos \frac{B-C}{2} = 0$.

Chứng minh rằng $\cos 2B + \cos 2C \leq 1$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$$\cos \frac{A}{2} \left(2 \cos^2 \frac{B-C}{2} - 1 \right) + \cos \frac{B-C}{2} \left(2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{A}{2} \right) - \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \right) \left(2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 1 \right) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Vì } 0 < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{A}{2} > 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{B-C}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{B-C}{2} > 0 \quad \text{và} \quad \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \Rightarrow \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{B+C}{2}$$

$$\text{nên } (1) \Leftrightarrow 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 1 \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 1$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức } x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \text{ suy ra } \sin^2 B + \sin^2 C \geq \frac{(\sin B + \sin C)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Do đó $\cos 2y + \cos 2z = 2 - 2(\sin^2 y + \sin^2 z) \leq 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ ĐPCM.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta luôn có

$$\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Lời giải

Do A, B, C bình đẳng nên không mất tính tổng quát giả sử $A \geq B \geq C \Rightarrow \frac{\pi}{2} > \frac{A}{2} \geq \frac{B}{2} \geq \frac{C}{2} > 0$

Suy ra $\sin \frac{A}{2} \geq \sin \frac{B}{2} \geq \sin \frac{C}{2} > 0, \cos \frac{A}{2} \geq \cos \frac{B}{2} \geq \cos \frac{C}{2} > 0$

$$\Rightarrow \left(\sin \frac{A}{2} - \sin \frac{B}{2} \right) \left(\cos \frac{B}{2} - \cos \frac{C}{2} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\text{Do đó } \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \leq \sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\text{Mà } \sin \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2} \right) + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} = \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có:

$$\cos^2 \frac{B}{2} + \frac{3}{4} \geq 2\sqrt{\frac{3}{4} \cos^2 \frac{B}{2}} = \sqrt{3} \cos \frac{B}{2}, \quad 3\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} \geq 2\sqrt{3\sin^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{B}{2}} = 2\sqrt{3} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\text{Suy ra } 2\left(\cos^2 \frac{B}{2} + \frac{3}{4}\right) + \left(3\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2}\right) \geq 2\sqrt{3} \cos \frac{B}{2} + 2\sqrt{3} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\text{Hay } 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \right) \leq \frac{3}{2} + 3 \left(\sin^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} \right) = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \text{ ĐPCM.}$$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Không dùng máy tính cầm tay, tính các giá trị lượng giác của các góc:

a) $\frac{5\pi}{12}$;

b) -555° .

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned}\cos \frac{5\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{5\pi}{12} = \frac{\sin \frac{5\pi}{12}}{\cos \frac{5\pi}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{3}$$

$$\cot \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$$

$$\text{b) } -555^\circ = \frac{\pi \cdot (-555^\circ)}{180^\circ} = -\frac{37\pi}{12} = -\left(3\pi + \frac{\pi}{12} \right) \text{ rad.}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}\cos(-555^\circ) &= \cos \left(3\pi + \frac{\pi}{12} \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= -\left(\cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \right) = -\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(-555^\circ) &= \sin \left(3\pi + \frac{\pi}{12} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\tan(-555^\circ) = \frac{\sin(-555^\circ)}{\cos(-555^\circ)} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = -2+\sqrt{3}$$

$$\cot(-555^\circ) = \frac{1}{-2+\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3}$$

Bài 2. Tính $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right), \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ biết $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos\alpha = -\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13} \quad (\text{vì } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}).$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) &= \left(-\frac{5}{13}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{12}{13}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{-12+5\sqrt{3}}{26} \\ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) &= \cos \frac{\pi}{4} \cos\alpha + \sin \frac{\pi}{4} \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{-17\sqrt{2}}{26}\end{aligned}$$

Bài 3. Tính các giá trị lượng giác của góc 2α , biết:

a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

b) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$ và $\pi < \alpha < 2\pi$.

Lời giải

a) Ta có: $\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ (vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

Khi đó:

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 - 1 = \frac{1}{3}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

b) Ta có: $\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ (vì $\pi < \alpha < 2\pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$).

Khi đó:

$$\sin\alpha = 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{7}}{8};$$

$$\cos\alpha = 2 \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{8};$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \left(-\frac{3\sqrt{7}}{8}\right) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{3\sqrt{7}}{32}.$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^2 - 1 = -\frac{31}{32};$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\frac{3\sqrt{7}}{32}}{-\frac{31}{32}} = -\frac{12\sqrt{7}}{31};$$

$$\cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha} = -\frac{31}{12\sqrt{7}}.$$

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\alpha$; b) $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 - \sin 2\alpha$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a)} & \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\alpha \\ &= \sqrt{2} \cdot \left(\sin\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right) - \cos\alpha \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\right) - \cos\alpha$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\right) - \cos\alpha$$

$$= \sin\alpha + \cos\alpha - \cos\alpha$$

$$= \sin\alpha$$

$$\begin{aligned} \text{b)} & (\cos\alpha + \sin\alpha)^2 - \sin 2\alpha \\ &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha \\ &= 1 \end{aligned}$$

Bài 5. Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết:

a) $\cos 2\alpha = \frac{2}{5}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$;

b) $\sin 2\alpha = -\frac{4}{9}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

a) Ta có: $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{7}{10} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{70}}{10}$ (vì $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$)

Mặt khác: $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{2}{5}$

$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{3}{10} \Leftrightarrow \sin\alpha = -\frac{\sqrt{30}}{10} \left(\text{vì } -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \right)$$

$$\text{Khi đó: } \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{30}}{10}}{\frac{\sqrt{70}}{10}} = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.$$

$$b) \sin 2\alpha = -\frac{4}{9} \text{ và } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Ta có } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \pi < 2\alpha < \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{9}\right)^2} = -\frac{\sqrt{65}}{9}$$

$$\text{Ta có: } \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = -\frac{\sqrt{65}}{9}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9 - \sqrt{65}}{18} \Leftrightarrow \cos \alpha = \sqrt{\frac{9 - \sqrt{65}}{18}} \left(\text{vì } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$\text{Mặt khác } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = -\frac{\sqrt{65}}{9}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{\sqrt{65} + 1}{18} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{65} + 1}{18} \left(\text{vì } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4} \right).$$

Khi đó:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{65} + 1}{18}}{\frac{\sqrt{9 - \sqrt{65}}}{18}} = \frac{\sqrt{65} + 1}{1 - \sqrt{65}}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1 - \sqrt{65}}{\sqrt{65} + 1}$$

Bài 6. Chứng minh rằng trong tam giác ABC , ta có $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$.

Lời giải

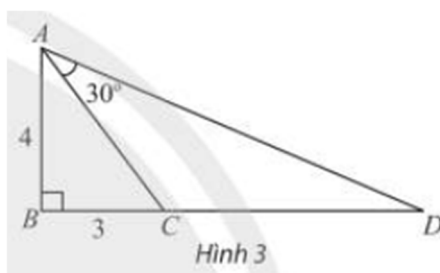
Xét tam giác ABC , có:

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A = 180^\circ - (B + C)$$

$$\sin A = \sin(180^\circ - (B + C)) = \sin(B + C) = \sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B.$$

Bài 7. Trong Hình 3, tam giác ABC vuông tại B và có hai cạnh góc vuông là $AB = 4, BC = 3$.

Vẽ điểm D nằm trên tia đối của tia CB thỏa mãn $\widehat{CAD} = 30^\circ$. Tính $\tan \widehat{BAD}$, từ đó tính độ dài cạnh CD .



Lời giải

Xét tam giác ABC vuông tại B có: $\tan \widehat{BAC} = \frac{3}{4}$

Ta lại có: $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD}$

$$\Rightarrow \tan \widehat{BAD} = \tan(\widehat{BAC} + \widehat{CAD}) = \tan(\widehat{BAC} + 30^\circ) = \frac{\tan \widehat{BAC} + \tan 30^\circ}{1 - \tan \widehat{BAC} \cdot \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{48 + 25\sqrt{3}}{39} \approx 2,34.$$

Xét tam giác ABD vuông tại B có:

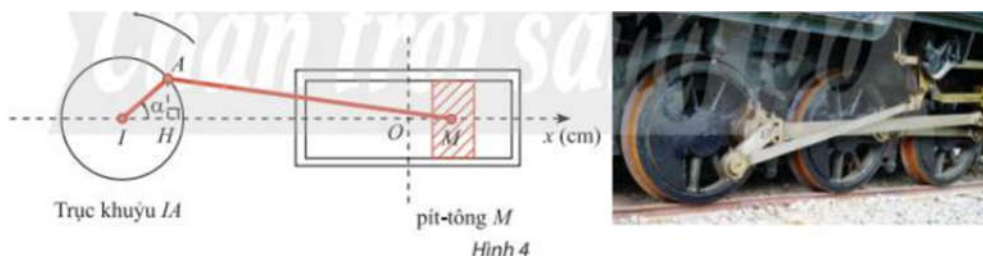
$$\tan \widehat{BAD} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow BD = \tan \widehat{BAD} \cdot AB = 2,34 \cdot 4 \approx 9,36.$$

$$\Rightarrow CD = BD - BC \approx 9,36 - 3 = 6,36.$$

Bài 8. Trong Hình 4, pit-tông M của động cơ chuyển động tịnh tiến qua lại dọc theo xi-lanh làm quay trục khuỷu IA . Ban đầu I, A, M thẳng hàng. Cho α là góc quay của trục khuỷu, O là vị trí của pit-tông khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ và là hình chiếu của A lên Ix . Trục khuỷu IA rất ngắn so với độ dài thanh truyền AM nên có thể xem như độ dài MH không đổi và gần bằng MA .

- a) Biết $LA = 8 \text{ cm}$, viết công thức tính tọa độ x_M của điểm M trên trục Ox theo α .
- b) Ban đầu $\alpha = 0$. Sau 1 phút chuyển động, $x_M = -3 \text{ cm}$. Xác định x_M sau 2 phút chuyển động.

Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Lời giải

Tại $\alpha = \frac{\pi}{2}$ thì H trùng I, M trùng O nên $MH = OI$ do đó $OM = IH$.

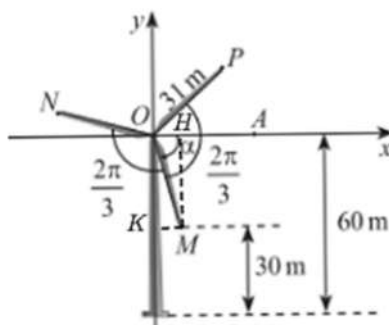
Xét tam giác AHI vuông tại H có: $IH = \cos \alpha \cdot IA = 8 \cos \alpha$.

Bài 9. Trong Hình 5, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tua-bin gió. Biết các cánh quạt dài 31 m , độ cao của điểm M so với mặt đất là 30 m , góc giữa các cánh quạt là $\frac{2\pi}{3}$ và số góc (OA, OM) là α .

- a) Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$.

b) Tính sin của các góc lượng giác (OA, ON) và (OA, OP) , từ đó tính chiều cao của các đền N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét). Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải



a) Từ điểm M kẻ MH vuông góc với Ox , MK vuông góc với Oy .

Ta có: $MH = 60 - 30 = 30$ m.

Khi đó hoành độ điểm M là 30.

Mặt khác hoành độ điểm M là: $x_M = 31 \cos \alpha$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{30}{31}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{30}{31}\right)^2} = -\frac{\sqrt{61}}{31}$$

b) Vì các cánh quạt tạo thành 3 góc bằng nhau nên $\widehat{MOP} = \widehat{NOP} = \widehat{MON} = 120^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{AOP} = \widehat{MOP} - \widehat{MOA}$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{AOP} = \sin(\widehat{MOP} - \widehat{MOA}) = \sin \widehat{MOP} \cdot \cos \widehat{MOA} - \cos \widehat{MOP} \cdot \sin \widehat{MOA}$$

$$= \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \alpha - \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \sin \alpha$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{30}{31} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{61}}{31} \approx 0,96.$$

Vì vậy chiều cao của điểm P so với mặt đất khoảng: $31 \cdot \sin \alpha + 60 = 89,76$ m.

Ta có: $\cos \widehat{AOP} \approx \sqrt{1 - 0,96^2} = 0,28$.

Ta có: $\widehat{AON} = \widehat{AOP} + \widehat{PON}$

$$\Rightarrow \sin \widehat{AON} = \sin(\widehat{AOP} + \widehat{PON}) = \sin \widehat{AOP} \cdot \cos \widehat{PON} + \cos \widehat{AOP} \cdot \sin \widehat{PON}$$

$$= 0,96 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - 0,28 \cdot \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$= 0,96 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0,28 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,23.$$

$$\Rightarrow \sin(\widehat{OA, ON}) = \sin \widehat{AON} \approx -0,23.$$

Vì vậy chiều cao của điểm N so với mặt đất khoảng: $31 \cdot \sin \alpha + 60 = 89,76$ m.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Rút gọn biểu thức $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$.

- A. $M = 1$. B. $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = 0$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ = (\cos^2 15^\circ)^2 - (\sin^2 15^\circ)^2 \\ &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) \\ &= \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos(2 \cdot 15^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Câu 2: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ + \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$.

- A. $M = \sqrt{3}$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = 0$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức nhân đôi $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= (\cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) \\ &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) \\ &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) = \cos 30^\circ + \cos 30^\circ = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Câu 3: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos^6 15^\circ - \sin^6 15^\circ$.

- A. $M = 1$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = \frac{15\sqrt{3}}{32}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\begin{aligned} \cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) \\ &= \cos 2\alpha \left[(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \right] \\ &= \cos 2\alpha \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha \right). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } M = \cos 30^\circ \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 30^\circ \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{15\sqrt{3}}{32}.$$

Câu 4: Giá trị của biểu thức $\cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi}{5}$ là

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi}{5} = \cos \left(\frac{\pi}{30} - \frac{\pi}{5} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 5: Giá trị của biểu thức $P = \frac{\sin \frac{5\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18}}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12}}$ là

A. 1.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\begin{cases} \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b = \sin(a - b) \\ \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \cos(a + b) \end{cases}$.

Khi đó $\sin \frac{5\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18} = \sin \left(\frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{9} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Và $\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Vậy $P = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1$.

Câu 6: Giá trị đúng của biểu thức $\frac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ}$ bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

B. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $-\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có :

$$\begin{aligned} \frac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ} &= \frac{\tan(180^\circ + 45^\circ) - \tan 9^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot(180^\circ + 81^\circ) + \tan(180^\circ + 21^\circ)} \\ &= \frac{1 - \tan 9^\circ \cdot \tan 21^\circ}{\tan 9^\circ + \tan 21^\circ} = \frac{1}{\tan(9^\circ + 21^\circ)} = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Câu 7: Giá trị của biểu thức $M = \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{8}$.

D. $\frac{1}{16}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sin \frac{7\pi}{24} = \cos \frac{5\pi}{24}$ và $\sin \frac{11\pi}{24} = \cos \frac{\pi}{24}$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } M &= \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \cos \frac{5\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24} = \frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \right) \cdot \left(2 \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \cos \frac{5\pi}{24} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\cos \frac{6\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{8} \cdot \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Câu 8: Giá trị của biểu thức $A = \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$ là

- A. $\frac{1}{32}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{16}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{32}$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức $\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$, ta có

$$\begin{aligned} A &= \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{16} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{32}. \end{aligned}$$

Câu 9: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

- A. $M = \frac{1}{16} \cos 10^\circ$. B. $M = \frac{1}{2} \cos 10^\circ$. C. $M = \frac{1}{4} \cos 10^\circ$. D. $M = \frac{1}{8} \cos 10^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\sin 10^\circ \neq 0$ nên suy ra

$$\begin{aligned} M &= \frac{16 \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{8 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ} \\ \Rightarrow M &= \frac{4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{16 \sin 10^\circ} \\ \Rightarrow M &= \frac{\sin 20^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ}{16 \sin 10^\circ} = \frac{1}{8} \cos 10^\circ. \end{aligned}$$

Câu 10: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$.

- A. $M = 0$. B. $M = -\frac{1}{2}$. C. $M = 1$. D. $M = 2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Áp dụng công thức } \sin a - \sin b = 2 \cdot \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2 \sin \frac{\pi}{7} \cdot M &= 2 \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cdot \cos \frac{6\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} \\ &= \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7} + \sin \pi = -\sin \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$

Vậy giá trị biểu thức $M = -\frac{1}{2}$.

Câu 11: Công thức nào sau đây sai?

- A. $\cos(a-b) = \sin a \sin b + \cos a \cos b$. B. $\cos(a+b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b$.
C. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$. D. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Câu 12: Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin(2018a) = 2018 \sin a \cdot \cos a$.
B. $\sin(2018a) = 2018 \sin(1009a) \cdot \cos(1009a)$.
C. $\sin(2018a) = 2 \sin a \cos a$.
D. $\sin(2018a) = 2 \sin(1009a) \cdot \cos(1009a)$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ ta được
 $\sin(2018a) = 2 \sin(1009a) \cdot \cos(1009a)$.

Câu 13: Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

- A. $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a$. B. $\cos 6a = 1 - 2 \sin^2 3a$.
C. $\cos 6a = 1 - 6 \sin^2 a$. D. $\cos 6a = 2 \cos^2 3a - 1$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$, ta được
 $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a = 2 \cos^2 3a - 1 = 1 - 2 \sin^2 3a$.

Câu 14: Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

- A. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. B. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.
C. $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$. D. $\cos 3x = \cos^3 x - \sin^3 x$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Câu 15: Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$.

B. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

C. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$.

D. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 16: Có bao nhiêu đẳng thức dưới đây là đồng nhất thức?

1) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. 2) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

3) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. 4) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

Câu 17: Công thức nào sau đây đúng?

A. $\cos 3a = 3\cos a - 4\cos^3 a$.

B. $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$.

C. $\cos 3a = 3\cos^3 a - 4\cos a$.

D. $\cos 3a = 4\cos a - 3\cos^3 a$.

Lời giải

Chọn B

Câu 18: Công thức nào sau đây đúng?

A. $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$.

B. $\sin 3a = 4\sin^3 a - 3\sin a$.

C. $\sin 3a = 3\sin^3 a - 4\sin a$.

D. $\sin 3a = 4\sin a - 3\sin^3 a$.

Lời giải

Chọn A

Câu 19: Nếu $\cos(a+b) = 0$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\sin(a+2b)| = |\sin a|$.

B. $|\sin(a+2b)| = |\sin b|$.

C. $|\sin(a+2b)| = |\cos a|$.

D. $|\sin(a+2b)| = |\cos b|$.

Lời giải

Chọn D

Ta có : $\cos(a+b) = 0 \Leftrightarrow a+b = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow a = -b + \frac{\pi}{2} + k\pi$.

$$\Rightarrow |\sin(a+2b)| = \left| \sin\left(-b+2b+\frac{\pi}{2}+k\pi\right) \right| = |\cos(b+k\pi)| = |\cos b|.$$

Câu 20: Nếu $\sin(a+b)=0$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $|\cos(a+2b)| = |\sin a|$. B.
 $|\cos(a+2b)| = |\sin b|$.
 C. $|\cos(a+2b)| = |\cos a|$. D.
 $|\cos(a+2b)| = |\cos b|$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sin(a+b)=0 \Leftrightarrow a+b=k\pi \rightarrow a=-b+k\pi$.

$$\Rightarrow |\cos(a+2b)| = |\cos(-b+2b+k\pi)| = |\cos(b+k\pi)| = |\cos b|.$$

Câu 21: Rút gọn $M = \sin(x-y)\cos y + \cos(x-y)\sin y$.

- A. $M = \cos x$. B. $M = \sin x$.
 C. $M = \sin x \cos 2y$. D. $M = \cos x \cos 2y$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$, ta được

$$M = \sin(x-y)\cos y + \cos(x-y)\sin y = \sin[(x-y)+y] = \sin x.$$

Câu 22: Rút gọn $M = \cos(a+b)\cos(a-b) - \sin(a+b)\sin(a-b)$.

- A. $M = 1 - 2\cos^2 a$. B. $M = 1 - 2\sin^2 a$. C. $M = \cos 4a$. D. $M = \sin 4a$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x+y)$, ta được

$$M = \cos(a+b)\cos(a-b) - \sin(a+b)\sin(a-b) = \cos(a+b+a-b) = \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a.$$

Câu 23: Rút gọn $M = \cos(a+b)\cos(a-b) + \sin(a+b)\sin(a-b)$.

- A. $M = 1 - 2\sin^2 b$. B. $M = 1 + 2\sin^2 b$. C. $M = \cos 4b$. D. $M = \sin 4b$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x-y)$, ta được

$$\begin{aligned} M &= \cos(a+b)\cos(a-b) + \sin(a+b)\sin(a-b) \\ &= \cos(a+b-(a-b)) = \cos 2b = 1 - 2\sin^2 b. \end{aligned}$$

Câu 24: Giá trị nào sau đây của x thỏa mãn $\sin 2x \cdot \sin 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x$?

- A. 18° . B. 30° . C. 36° . D. 45° .

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \cos(a+b)$, ta được

$$\sin 2x \cdot \sin 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x \Leftrightarrow \cos 2x \cdot \cos 3x - \sin 2x \cdot \sin 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 5x = 0 \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}.$$

Câu 25: Đẳng thức nào sau đây đúng:

- A. $\cot a + \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \cdot \sin b}$. B. $\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$.
C. $\sin(a+b) = \frac{1}{2} \sin 2(a+b)$. D. $\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$.

Lời giải

Chọn B

Xét các đáp án:

- Đáp án A.

$$\text{Ta có } \cot a + \cot b = \frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\cos b}{\sin b} = \frac{\cos a \cdot \sin b + \sin a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b} = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \cdot \sin b}.$$

- Đáp án B.

$$\text{Ta có } \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \Leftrightarrow \cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a).$$

Câu 26: Chọn công thức đúng trong các công thức sau:

- A. $\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$. B. $\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$.
C. $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan a}$. D. $\cos 2a = \sin^2 a - \cos^2 a$.

Lời giải

Chọn B

Câu 27: Rút gọn $M = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $M = \sqrt{2} \sin x$. B. $M = -\sqrt{2} \sin x$. C. $M = \sqrt{2} \cos x$. D. $M = -\sqrt{2} \cos x$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$, ta được

$$M = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -2 \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

$$= -2 \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2} \sin x.$$

Câu 28: Tam giác ABC có $\cos A = \frac{4}{5}$ và $\cos B = \frac{5}{13}$. Khi đó $\cos C$ bằng

- A. $\frac{56}{65}$. B. $-\frac{56}{65}$. C. $\frac{16}{65}$. D. $\frac{33}{65}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có :

$$\begin{cases} \cos A = \frac{4}{5} \\ \cos B = \frac{5}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin A = \frac{3}{5} \\ \sin B = \frac{12}{13} \end{cases}. \text{ Mà } A + B + C = 180^\circ, \text{ do đó}$$

$$\cos C = \cos[180^\circ - (A + B)] = -\cos(A + B)$$

$$= -(\cos A \cos B - \sin A \sin B) = -\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} - \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13}\right) = \frac{16}{65}.$$

Câu 29: Cho A, B, C là ba góc nhọn thỏa mãn $\tan A = \frac{1}{2}, \tan B = \frac{1}{5}, \tan C = \frac{1}{8}$. Tổng $A + B + C$ bằng

- A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{5}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{7}{9}$$

$$\Rightarrow \tan(A + B + C) = \frac{\tan(A + B) + \tan C}{1 - \tan(A + B) \tan C} = \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{8}} = 1$$

$$\Rightarrow A + B + C = \frac{\pi}{4}.$$

Câu 30: Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC . Khi đó $P = \sin A + \sin B + \sin C$ tương đương với:

- A. $P = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$. B. $P = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$.

C. $P = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$

D. $P = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Do } \begin{cases} \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \\ \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} \\ \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2} \end{cases}.$$

Áp dụng, ta được

$$\begin{aligned} P &= (\sin A + \sin B) + \sin C = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}. \end{aligned}$$

Câu 31: Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC .

Khi đó $P = \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2}$ tương đương với:

A. $P = 1.$

B. $P = -1.$

C. $P = \left(\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} \right)^2.$

D. Đáp án khác.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Do } A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{C+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \tan \left(\frac{C+B}{2} \right) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) \Rightarrow \frac{\tan \frac{C}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{C}{2} \tan \frac{B}{2}} = \cot \frac{A}{2} = \frac{1}{\tan \frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan \frac{A}{2} \left(\tan \frac{C}{2} + \tan \frac{B}{2} \right) + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1.$$

Câu 32: Trong $\triangle ABC$, nếu $\frac{\sin B}{\sin C} = 2 \cos A$ thì $\triangle ABC$ là tam giác có tính chất nào sau đây?

A. Cân tại B .

B. Cân tại A .

C. Cân tại C .

D. Vuông tại B .

Lời giải

Chọn A

Ta có $\frac{\sin B}{\sin C} = 2 \cos A \Rightarrow \sin B = 2 \sin C \cdot \cos A = \sin(C + A) + \sin(C - A)$

Mặt khác $A + B + C = \pi \Rightarrow B = \pi - (A + C) \Rightarrow \sin B = \sin(A + C)$.

Do đó, ta được $\sin(C - A) = 0 \Rightarrow A = C$.

Câu 33: Trong ΔABC , nếu $\frac{\tan A}{\tan C} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C}$ thì ΔABC là tam giác gì?

A. Tam giác vuông.

B. Tam giác cân.

C. Tam giác đều.

D. Tam giác vuông hoặc cân.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\frac{\tan A}{\tan C} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \Leftrightarrow \frac{\sin A \cos C}{\cos A \sin C} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 C} \Leftrightarrow \sin 2C = \sin 2A$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2C = 2A \\ 2C = \pi - 2A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = A \\ A + C = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Câu 34: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \sin 2(\alpha + \pi)$.

A. $P = -\frac{24}{25}$.

B. $P = \frac{24}{25}$.

C. $P = -\frac{12}{25}$.

D. $P = \frac{12}{25}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P = \sin 2(\alpha + \pi) = \sin(2\alpha + 2\pi) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{3}{5}$.

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên ta chọn $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

Thay $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ vào P , ta được $P = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}$.

Câu 35: Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.

A. $P = -\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

B. $P = \frac{3}{2}$.

C. $P = -\frac{3}{2}$.

D. $P = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 2 \cos \alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow P = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Câu 36: Biết $\sin(\pi - \alpha) = -\frac{3}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.

- A. $P = -\frac{3}{5}$. B. $P = \frac{3}{5}$. C. $P = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}$. D. $P = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $-\frac{3}{5} = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5}$.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Suy ra $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

Câu 37: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

- A. $P = \frac{11}{100}$. B. $P = -\frac{11}{100}$. C. $P = \frac{7}{25}$. D. $P = \frac{10}{11}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$, ta được

$$P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos 2\alpha \right).$$

Ta có $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$.

Thay vào P , ta được $P = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{25} \right) = \frac{11}{100}$.

Câu 38: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \cos 4\alpha$.

- A. $P = \frac{527}{625}$. B. $P = -\frac{527}{625}$. C. $P = \frac{524}{625}$. D. $P = -\frac{524}{625}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}$.

Suy ra $P = \cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{49}{625} - 1 = -\frac{527}{625}$.

Câu 39: Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$. Tính $P = \sin \alpha - \cos \alpha$.

A. $P = \frac{3}{\sqrt{5}}$. B. $P = -\frac{3}{\sqrt{5}}$. C. $P = \frac{\sqrt{5}}{3}$. D. $P = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ suy ra $\begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$ nên $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$.

Ta có $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}$. Suy ra $\sin \alpha - \cos \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Do $\sin \alpha - \cos \alpha > 0$ nên $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}$. Vậy $P = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Câu 40: Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

A. $P = 1$. B. $P = \frac{17}{81}$. C. $P = \frac{7}{9}$. D. $P = \frac{9}{7}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$.

Ta có $P = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha = \frac{7}{9}$.

Câu 41: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $P = \tan 2\alpha$.

A. $P = -\frac{120}{119}$. B. $P = -\frac{119}{120}$. C. $P = \frac{120}{119}$. D. $P = \frac{119}{120}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P = \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2\cos^2 \alpha - 1}$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{12}{13}$.

Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$.

Thay $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ vào P , ta được $P = \frac{120}{119}$.

Câu 42: Cho góc α thỏa mãn $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$. Tính $P = (1 + 3\sin^2 \alpha)(1 - 4\cos^2 \alpha)$.

- A. $P = 12$. B. $P = \frac{21}{2}$. C. $P = 6$. D. $P = 21$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = \left(1 + 3 \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right) \left(1 - 4 \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \cos 2\alpha\right) (-1 - 2 \cos 2\alpha)$.

Thay $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$ vào P , ta được $P = \left(\frac{5}{2} + 1\right) \left(-1 + \frac{4}{3}\right) = \frac{7}{6}$.

Câu 43: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $P = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

- A. $P = \frac{3 + \sqrt{21}}{8}$. B. $P = \frac{3 - \sqrt{21}}{8}$.
C. $P = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{8}$. D. $P = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Thay $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$ và $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ vào P , ta được $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{3 - \sqrt{21}}{8}$.

Câu 44: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $P = -\frac{1}{7}$. B. $P = \frac{1}{7}$. C. $P = -7$. D. $P = 7$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha - 1}{1 + \tan \alpha}$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{3}{5}$.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$. Suy ra $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$.

Thay $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ vào P , ta được $P = -\frac{1}{7}$.

Câu 45: Cho góc α thỏa mãn $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $P = \frac{\sqrt{2}}{10}$. B. $P = -\frac{\sqrt{2}}{10}$. C. $P = -\frac{1}{5}$. D. $P = \frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)$.

Từ hệ thức $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$, suy ra $\sin 2\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2 2\alpha} = \pm\frac{3}{5}$.

Do $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$ nên ta chọn $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$.

Thay $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$ và $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$ vào P , ta được $P = -\frac{\sqrt{2}}{10}$.

Câu 46: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2}$.

- A. $P = -\frac{39}{50}$. B. $P = \frac{49}{50}$. C. $P = -\frac{49}{50}$. D. $P = \frac{39}{50}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2} = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha - \sin \alpha) = \frac{1}{2} \sin \alpha (2 \cos \alpha - 1)$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm\frac{3}{5}$.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$.

Thay $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ vào P , ta được $P = \frac{39}{50}$.

Câu 47: Cho góc α thỏa mãn $\cot\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = 2$. Tính $P = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $P = \frac{1}{2}$. B. $P = -\frac{1}{2}$. C. $P = 3$. D. $P = 4$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } P = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha}.$$

$$\text{Từ giả thiết } \cot\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \Leftrightarrow \cot\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \Leftrightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2 \Leftrightarrow \tan \alpha = 2.$$

Thay $\tan \alpha = 2$ vào P , ta được $P = -3$.

Câu 48: Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = 15$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

A. $P = \frac{11}{113}$. B. $P = \frac{13}{113}$. C. $P = \frac{15}{113}$. D. $P = \frac{17}{113}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \cot \alpha = 15 \Leftrightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 15 \Leftrightarrow \cos \alpha = 15 \sin \alpha.$$

$$\text{Suy ra } P = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 30 \sin^2 \alpha = \frac{30}{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \frac{30}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{30}{1 + 15^2} = \frac{15}{113}.$$

Câu 49: Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = -3\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $P = \tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2}$.

A. $P = 2\sqrt{19}$. B. $P = -2\sqrt{19}$. C. $P = \sqrt{19}$. D. $P = -\sqrt{19}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = \tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Từ hệ thức } 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \longrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{19}}.$$

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \longrightarrow \sin \alpha > 0 \text{ nên ta chọn } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{19}} \longrightarrow P = 2\sqrt{19}.$$

Câu 50: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$. Tính $P = \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}$.

A. $P = \sqrt{5}$. B. $P = -\sqrt{5}$. C. $P = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $P = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } P^2 = 1 + \sin \alpha. \text{ Với } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right].$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} 0 \leq \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 \leq \cos \frac{\alpha}{2} < -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \text{ suy ra } P = \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} < 0.$$

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{16}{25}$.

Vì $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ nên ta chọn $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$.

Thay $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ vào P^2 , ta được $P^2 = \frac{1}{5}$. Suy ra $P = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 51: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -2$. Tính $P = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + 1}$.

A. $P = \frac{10}{9}$.

B. $P = \frac{9}{10}$.

C. $P = -\frac{10}{9}$.

D. $P = -\frac{9}{10}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } P = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + 1} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha}.$$

Nhắc lại công thức: Nếu đặt $t = \tan \alpha$ thì $\sin 2\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ và $\cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

$$\text{Do đó } \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{4}{5}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{3}{5}.$$

Thay $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$ vào P , ta được $P = -\frac{10}{9}$.

Câu 52: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ và $\sin \alpha = \frac{1}{5}$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

A. $P = \frac{4\sqrt{6}}{25}$.

B. $P = -\frac{4\sqrt{6}}{25}$.

C. $P = \frac{2\sqrt{6}}{25}$.

D. $P = -\frac{2\sqrt{6}}{25}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } A = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$\text{Từ hệ thức } \cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 25 \Leftrightarrow \cot^2 \alpha = 24 \Rightarrow \cot \alpha = \pm 2\sqrt{6}.$$

Vì $\tan \alpha, \cot \alpha$ cùng dấu và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ nên $\tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$.

$$\text{Do đó ta chọn } \cot \alpha = -2\sqrt{6}. \text{ Suy ra } \cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

$$\text{Thay } \sin \alpha = \frac{1}{5} \text{ và } \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5} \text{ vào } P, \text{ ta được } P = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) = -\frac{4\sqrt{6}}{25}.$$

Câu 53: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha + 2 \cos \alpha = -1$. Tính $P = \sin 2\alpha$.

- A. $P = \frac{24}{25}$. B. $P = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. C. $P = -\frac{24}{25}$. D. $P = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Với } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ suy ra } \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin \alpha + 2 \cos \alpha = -1 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow (-1 - 2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Leftrightarrow 5 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \text{ (loại)} \\ \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}.$$

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ (do $\sin \alpha > 0$).

$$\text{Vậy } P = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

Câu 54: Biết $\sin a = \frac{5}{13}$; $\cos b = \frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < a < \pi$; $0 < b < \frac{\pi}{2}$. Hãy tính $\sin(a+b)$.

- A. $\frac{56}{65}$. B. $\frac{63}{65}$. C. $-\frac{33}{65}$. D. 0.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} \text{ mà } a \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \cos a = -\frac{12}{13}.$$

$$\text{Tương tự, ta có } \sin^2 b = 1 - \cos^2 b = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \text{ mà } b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin b = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Khi đó } \sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a = \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} - \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{33}{65}.$$

Câu 55: Nếu biết rằng $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$, $\cos \beta = \frac{3}{5}$ $\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ thì giá trị đúng của biểu thức $\cos(\alpha - \beta)$ là

- A. $\frac{16}{65}$. B. $-\frac{16}{65}$. C. $\frac{18}{65}$. D. $-\frac{18}{65}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ suy ra $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}$.

Tương tự, có $\cos \beta = \frac{3}{5}$ với $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ suy ra $\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$.

Vậy $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = -\frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{16}{65}$.

Câu 56: Cho hai góc nhọn $a; b$ và biết rằng $\cos a = \frac{1}{3}$; $\cos b = \frac{1}{4}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b).$$

A. $-\frac{113}{144}$.

B. $-\frac{115}{144}$.

C. $-\frac{117}{144}$.

D. $-\frac{119}{144}$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \cos(a+b) \cdot \cos(a-b) = (\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b)(\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b) \\ &= (\cos a \cdot \cos b)^2 - (\sin a \cdot \sin b)^2 = \cos^2 a \cdot \cos^2 b - (1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b) \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{16} - \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) = -\frac{119}{144}. \end{aligned}$$

Câu 57: Nếu a, b là hai góc nhọn và $\sin a = \frac{1}{3}$; $\sin b = \frac{1}{2}$ thì $\cos 2(a+b)$ có giá trị bằng

A. $\frac{7-2\sqrt{6}}{18}$.

B. $\frac{7+2\sqrt{6}}{18}$.

C. $\frac{7+4\sqrt{6}}{18}$.

D. $\frac{7-4\sqrt{6}}{18}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Vì } a, b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ nên suy ra } \begin{cases} \cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \cos b = \sqrt{1 - \sin^2 b} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-1+2\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{Vậy } \cos 2(a+b) = 2\cos^2(a+b) - 1 = 2 \cdot \left(\frac{-1+2\sqrt{6}}{6}\right)^2 - 1 = \frac{7-4\sqrt{6}}{18}.$$

Câu 58: Cho $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ và thỏa mãn $\tan \alpha = \frac{1}{7}$, $\tan \beta = \frac{3}{4}$. Góc $\alpha + \beta$ có giá trị bằng

A. $\frac{\pi}{3}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. $\frac{\pi}{6}$.

D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = 1 \text{ suy ra } a + b = \frac{\pi}{4}.$$

Câu 59: Cho x, y là các góc nhọn và dương thỏa mãn $\cot x = \frac{3}{4}$, $\cot y = \frac{1}{7}$. Tổng $x + y$ bằng

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. π .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \cot(x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7} - 1}{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}} = -1.$$

Mặt khác $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ suy ra $0 < x + y < \pi$. Do đó $x + y = \frac{3\pi}{4}$.

Câu 60: Nếu α, β, γ là ba góc nhọn thỏa mãn $\tan(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos \gamma$ thì

- A. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$. B. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$.
C. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. D. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \tan(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos \gamma \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \gamma.$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos \gamma - \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \gamma = 0 \Rightarrow \cos(\alpha + \beta + \gamma) = 0.$$

Vậy tổng ba góc $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ (vì α, β, γ là ba góc nhọn).

Câu 61: Biết rằng $\tan a = \frac{1}{2}$ ($0 < a < 90^\circ$) và $\tan b = -\frac{1}{3}$ ($90^\circ < b < 180^\circ$) thì biểu thức $\cos(2a - b)$

có giá trị bằng

- A. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{5} \text{ suy ra } \sin 2a = \sqrt{1 - \cos^2 2a} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Lại có } 1 + \tan^2 b = \frac{1}{\cos^2 b} \Rightarrow \cos b = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 b}} = -\frac{3}{\sqrt{10}} \text{ vì } 90^\circ < b < 180^\circ$$

$$\text{Mặt khác } \sin b = \tan b \cdot \cos b = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\text{Khi đó } \cos(2a - b) = \cos 2a \cdot \cos b + \sin 2a \cdot \sin b = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Câu 62: Nếu $\sin a - \cos a = \frac{1}{5}$ ($135^\circ < a < 180^\circ$) thì giá trị của biểu thức $\tan 2a$ bằng

- A. $-\frac{20}{7}$. B. $\frac{20}{7}$. C. $\frac{24}{7}$. D. $-\frac{24}{7}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \sin a - \cos a = \frac{1}{5} \Rightarrow (\sin a - \cos a)^2 = \frac{1}{25} \Leftrightarrow 1 - \sin 2a = \frac{1}{25} \Leftrightarrow \sin 2a = \frac{24}{25}.$$

$$\text{Khi đó } \cos 2a = \sqrt{1 - \sin^2 2a} = \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{7}{25} \text{ vì } 270^\circ < 2a < 360^\circ.$$

$$\text{Vậy giá trị của biểu thức } \tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{24}{7}.$$

Câu 63: Nếu $\tan(a + b) = 7$, $\tan(a - b) = 4$ thì giá trị đúng của $\tan 2a$ là

- A. $-\frac{11}{27}$. B. $\frac{11}{27}$. C. $-\frac{13}{27}$. D. $\frac{13}{27}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \tan 2a = \tan[(a + b) + (a - b)] = \frac{\tan(a + b) + \tan(a - b)}{1 + \tan(a + b) \cdot \tan(a - b)} = \frac{7 + 4}{1 - 7 \cdot 4} = -\frac{11}{27}.$$

Câu 64: Nếu $\sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta$ với $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$, ($k, l \in \mathbb{Z}$) thì

- A. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \cot \alpha$. B. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \cot \beta$.
C. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \beta$. D. $\tan(\alpha + \beta) = 2 \tan \alpha$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin \beta = \sin[(\alpha + \beta) - \alpha].$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin \alpha.$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \alpha \cdot \cos(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \alpha \Rightarrow \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = 2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \tan \alpha.$$

Câu 65: Nếu $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ và $\cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cot \beta$ thì $\cot \alpha \cdot \cot \gamma$ bằng

- A. $\sqrt{3}$. B. $-\sqrt{3}$. C. 3. D. -3.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết, ta có $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - (\alpha + \gamma)$.

Suy ra $\cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cot \beta = 2 \cdot \cot \left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \gamma) \right] = 2 \cdot \tan(\alpha + \gamma) = 2 \cdot \frac{\tan \alpha + \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \gamma}$

Mặt khác $\frac{\tan \alpha + \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \gamma} = \frac{\frac{1}{\cot \alpha} + \frac{1}{\cot \gamma}}{1 - \frac{1}{\cot \alpha} \cdot \frac{1}{\cot \gamma}} = \frac{\cot \alpha + \cot \gamma}{\cot \alpha \cdot \cot \gamma - 1}$ nên suy ra

$$\cot \alpha + \cot \gamma = 2 \cdot \frac{\cot \alpha + \cot \gamma}{\cot \alpha \cdot \cot \gamma - 1} \Leftrightarrow \cot \alpha \cdot \cot \gamma - 1 = 2 \Leftrightarrow \cot \alpha \cdot \cot \gamma = 3.$$

Câu 66: Nếu $\tan \alpha$ và $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ ($q \neq 1$) thì $\tan(\alpha + \beta)$ bằng

- A. $\frac{p}{q-1}$. B. $-\frac{p}{q-1}$. C. $\frac{2p}{1-q}$. D. $-\frac{2p}{1-q}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\tan \alpha$, $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$ nên theo định lý Viet, ta

có $\begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = -p \\ \tan \alpha \cdot \tan \beta = q \end{cases}$. Khi đó $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{p}{q-1}$.

Câu 67: Nếu $\tan \alpha$; $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$ ($p, q \neq 0$). Và $\cot \alpha$; $\cot \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - rx + s = 0$ thì tích $P = rs$ bằng

- A. pq . B. $\frac{p}{q^2}$. C. $\frac{1}{pq}$. D. $\frac{q}{p^2}$.

Lời giải

Chọn B

Theo định lý Viet, ta có $\begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = p \\ \tan \alpha \cdot \tan \beta = q \end{cases}$ và $\begin{cases} \cot \alpha + \cot \beta = r \\ \cot \alpha \cdot \cot \beta = s \end{cases}$.

Khi đó $P = r \cdot s = (\cot \alpha + \cot \beta) \cdot \cot \alpha \cdot \cot \beta = \left(\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} \right) \cdot \frac{1}{\tan \alpha} \cdot \frac{1}{\tan \beta}$

$$= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{(\tan \alpha \cdot \tan \beta)^2} = \frac{p}{q^2}. \text{ Vậy } P = r \cdot s = \frac{p}{q^2}.$$

Câu 68: Nếu $\tan \alpha$ và $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$ ($q \neq 0$) thì giá trị biểu thức $P = \cos^2(\alpha + \beta) + p \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha + \beta) + q \sin^2(\alpha + \beta)$ bằng:

- A. p . B. q . C. 1. D. $\frac{p}{q}$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\tan \alpha$, $\tan \beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px + q = 0$ nên theo định lí Viet, ta có

$$\begin{cases} \tan \alpha + \tan \beta = p \\ \tan \alpha \cdot \tan \beta = q \end{cases} \longrightarrow \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{p}{1 - q}.$$

Khi đó $P = \cos^2(\alpha + \beta) \cdot [1 + p \cdot \tan(\alpha + \beta) + q \cdot \tan^2(\alpha + \beta)]$.

$$\begin{aligned} &= \frac{1 + p \cdot \tan(\alpha + \beta) + q \cdot \tan^2(\alpha + \beta)}{1 + \tan^2(\alpha + \beta)} = \frac{1 + p \cdot \frac{p}{1 - q} + q \cdot \left(\frac{p}{1 - q}\right)^2}{1 + \left(\frac{p}{1 - q}\right)^2} \\ &= \frac{(1 - q)^2 + p^2(1 - q) + q \cdot p^2}{(1 - q)^2 + p^2} = \frac{(1 - q)^2 + p^2 - p^2 \cdot q + q \cdot p^2}{(1 - q)^2 + p^2} = 1. \end{aligned}$$

Câu 69: Rút gọn biểu thức $M = \tan x - \tan y$.

- A. $M = \tan(x - y)$. B. $M = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cdot \cos y}$.
C. $M = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y}$. D. $M = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } M = \tan x - \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y}.$$

Câu 70: Rút gọn biểu thức $M = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

- A. $M = \sin 2\alpha$. B. $M = \cos 2\alpha$. C. $M = -\cos 2\alpha$. D. $M = -\sin 2\alpha$.

Lời giải

Chọn D

Vì hai góc $\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ và $\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ phụ nhau nên $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

$$\text{Suy ra } M = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha.$$

Câu 71: Chọn đẳng thức đúng.

A. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \sin a}{2}.$

B. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \sin a}{2}.$

C. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \cos a}{2}.$

D. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos a}{2}.$

Lời giải

Chọn A

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)}{2} = \frac{1 + \sin(-a)}{2} = \frac{1 - \sin a}{2}.$$

Câu 72: Gọi $M = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \cdot \sin y}$ thì

A. $M = \tan x - \tan y.$ **B.** $M = \cot x - \cot y$

C. $M = \cot y - \cot x.$ **D.** $M = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin y}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có :

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sin y \cdot \cos x - \cos y \cdot \sin x}{\sin x \cdot \sin y} = \frac{\sin y \cdot \cos x}{\sin x \cdot \sin y} - \frac{\cos y \cdot \sin x}{\sin x \cdot \sin y} \\ &= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos y}{\sin y} = \cot x - \cot y \end{aligned}$$

Câu 73: Gọi $M = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ thì

A. $M = 2 \cos 2x (\cos x + 1).$

B. $M = 4 \cos 2x \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos x\right).$

C. $M = \cos 2x (2 \cos x - 1).$

D. $M = \cos 2x (2 \cos x + 1).$

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M &= \cos x + \cos 2x + \cos 3x = (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x \\ &= 2 \cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x = \cos 2x (2 \cos x + 1). \end{aligned}$$

Câu 74: Rút gọn biểu thức $M = \frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cos^2 x - 1}.$

A. $\tan 2x$

B. $\sin x.$

C. $2 \tan x.$

D. $2 \sin x.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cos^2 x - 1} = \frac{2 \cos 2x \sin x}{\cos 2x} = 2 \sin x.$$

Câu 75: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1}.$

A. $\cos x.$

B. $2 \cos x - 1.$

C. $2 \cos x.$

D. $\cos x - 1.$

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \frac{(1 + \cos 2x) + (\cos x + \cos 3x)}{(2 \cos^2 x - 1) + \cos x} = \frac{2 \cos^2 x + 2 \cos 2x \cos x}{\cos x + \cos 2x} \\ &= \frac{2 \cos x (\cos x + \cos 2x)}{\cos x + \cos 2x} = 2 \cos x. \end{aligned}$$

Câu 76: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\tan \alpha - \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} + \cos 2\alpha.$

A. 0.

B. $2 \cos^2 x.$

C. 2.

D. $\cos 2x.$

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha.$$

$$\text{Do đó } A = -\cos 2\alpha + \cos 2\alpha = 0.$$

Câu 77: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}.$

A. $\sin 2\alpha.$

B. $\cos 2\alpha.$

C. $\tan 2\alpha.$

D. $\cot 2\alpha.$

Lời giải

Chọn C

Ta có :

$$\begin{aligned} A &= \frac{(1 - \cos 4\alpha) + \sin 4\alpha}{(1 + \cos 4\alpha) + \sin 4\alpha} = \frac{2 \sin^2 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2 \cos^2 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha} \\ &= \frac{2 \sin 2\alpha (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)}{2 \cos 2\alpha (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)} = \tan 2\alpha \end{aligned}$$

Câu 78: Biểu thức $A = \frac{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng:

A. $-\tan^4 \alpha.$

B. $\tan^4 \alpha.$

C. $-\cot^4 \alpha.$

D. $\cot^4 \alpha.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$; $\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2(1 - 2\sin^2 \alpha)^2 - 1$. Do đó:

$$A = \frac{3 - 4(1 - 2\sin^2 \alpha) + 2(1 - 2\sin^2 \alpha)^2 - 1}{3 + 4(2\cos^2 \alpha - 1) + 2(2\cos^2 \alpha - 1)^2 - 1} = \frac{8\sin^2 \alpha - 8\sin^2 \alpha + 8\sin^4 \alpha}{8\cos^2 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 8\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha.$$

Câu 79: Khi $\alpha = \frac{\pi}{6}$ thì biểu thức $A = \frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha}$ có giá trị bằng:

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{1}{12}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$A = \frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha} = \frac{4\sin^4 \alpha}{4(1 - \sin^2 \alpha) - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha(1 - \sin^2 \alpha)} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha.$$

Do đó giá trị của biểu thức A tại $\alpha = \frac{\pi}{6}$ là $\tan^4\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{1}{9}$.

Câu 80: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha}$.

- A. $\tan \alpha$. B. $2 \tan \alpha$. C. $\tan 2\alpha + \tan \alpha$. D. $\tan 2\alpha$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } A = \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (2\cos \alpha + 1)}{2\cos^2 \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (2\cos \alpha + 1)}{\cos \alpha (2\cos \alpha + 1)} = \tan \alpha.$$

Câu 81: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 - \sin a - \cos 2a}{\sin 2a - \cos a}$.

- A. 1. B. $\tan \alpha$. C. $\frac{5}{2}$. D. $2 \tan \alpha$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } A = \frac{1 - \sin a + 2\sin^2 a - 1}{2\sin a \cdot \cos a - \cos a} = \frac{\sin a (2\sin a - 1)}{\cos a (2\sin a - 1)} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a.$$

Câu 82: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin x + \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}}$ được:

A. $\tan \frac{x}{2}$.

B. $\cot x$.

C. $\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$.

D. $\sin x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sin x = \sin \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$,

$$1 + \cos x = 1 + \cos \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

Do đó $A = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2} \left(2 \cos \frac{x}{2} + 1 \right)}{\cos \frac{x}{2} \left(2 \cos \frac{x}{2} + 1 \right)} = \tan \frac{x}{2}$.

Câu 83: Rút gọn biểu thức $A = \sin \alpha \cdot \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha \cdot \cos \alpha$.

A. $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$.

B. $-\frac{1}{2} \sin 4\alpha$.

C. $\frac{3}{4} \sin 4\alpha$.

D. $\frac{1}{4} \sin 4\alpha$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sin \alpha \cdot \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \cos \alpha (\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha)$

$$= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha.$$

Câu 84: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = 3 \sin x - 2$.

A. $M = 1, m = -5$.

B. $M = 3, m = 1$.

C. $M = 2, m = -2$.

D. $M = 0, m = -2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \sin x \leq 3 \Rightarrow -5 \leq 3 \sin x - 2 \leq 1$

$$\Rightarrow -5 \leq P \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -5 \end{cases}$$

Câu 85: Cho biểu thức $P = -2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $P \geq -4, \forall x \in \mathbb{R}$.

B. $P \geq 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

C. $P \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

D. $P \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } -1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Rightarrow 2 \geq -2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq -2$$

$$\Rightarrow 4 \geq -2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \geq 0 \Rightarrow 4 \geq P \geq 0.$$

Câu 86: Biểu thức $P = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$, ta có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{\pi}{6} = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{Ta có } -1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq P \leq 1 \xrightarrow{P \in \mathbb{Z}} P \in \{-1; 0; 1\}.$$

Câu 87: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = \sin^2 x + 2 \cos^2 x$.

- A. $M = 3, m = 0$. B. $M = 2, m = 0$. C. $M = 2, m = 1$. D. $M = 3, m = 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } P = \sin^2 x + 2 \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 1 + \cos^2 x$$

$$\text{Do } -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 + \cos^2 x \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} M = 2 \\ m = 1 \end{cases}.$$

Câu 88: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 8 \sin^2 x + 3 \cos 2x$. Tính $T = 2M - m^2$.

- A. $T = 1$. B. $T = 2$. C. $T = 112$. D. $T = 130$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = 8 \sin^2 x + 3 \cos 2x = 8 \sin^2 x + 3(1 - 2 \sin^2 x) = 2 \sin^2 x + 3.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 3 \leq 2 \sin^2 x + 3 \leq 5$$

$$\Rightarrow 3 \leq P \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} M = 5 \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow T = 2M - m^2 = 1.$$

Câu 89: Cho biểu thức $P = \cos^4 x + \sin^4 x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $P \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $P \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
C. $P \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$. D. $P \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = \cos^4 x + \sin^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \cos 4x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq P \leq 1.$$

Câu 90: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = \sin^4 x - \cos^4 x$.

A. $M = 2, m = -2$.

B. $M = \sqrt{2}, m = -\sqrt{2}$.

C. $M = 1, m = -1$.

D. $M = 1, m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } P = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\cos 2x.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \cos 2x \leq 1 \Rightarrow -1 \geq -\cos 2x \geq -1 \Rightarrow -1 \leq P \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Câu 91: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của biểu thức $P = 1 - 2|\cos 3x|$.

A. $M = 3, m = -1$.

B. $M = 1, m = -1$.

C. $M = 2, m = -2$.

D. $M = 0, m = -2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } -1 \leq \cos 3x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\cos 3x| \leq 1 \Rightarrow 0 \geq -2|\cos 3x| \geq -2$$

$$\Rightarrow 1 \geq 1 - 2|\cos 3x| \geq -1 \Rightarrow 1 \geq P \geq -1 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Câu 92: Tìm giá trị lớn nhất M của biểu thức $P = 4\sin^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $M = \sqrt{2}$.

B. $M = \sqrt{2} - 1$.

C. $M = \sqrt{2} + 1$.

D. $M = \sqrt{2} + 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } P = 4\sin^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) + \sin 2x + \cos 2x$$

$$= \sin 2x - \cos 2x + 2 = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{2} + 2 \leq \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \leq \sqrt{2} + 2.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $2 + \sqrt{2}$.

BÀI 4: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Hàm số lượng giác

Hàm số sin là quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\sin x$, kí hiệu $y = \sin x$.

Hàm số cosin là quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\cos x$, kí hiệu $y = \cos x$.

Hàm số tang là hàm số được xác định bởi công thức

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ khi } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \text{ kí hiệu } y = \tan x.$$

Hàm số cotang là hàm số được xác định bởi công thức

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ khi } x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z}) \text{ kí hiệu } y = \cot x.$$

Như vậy:

- Tập xác định của hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là $\mathbb{R}$.
- Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn

Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Ta có định nghĩa sau:

Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D được gọi là **hàm số chẵn** nếu với mọi $x \in D$ ta có $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.

Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D được gọi là **hàm số lẻ** nếu với mọi $x \in D$ ta có $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

Chú ý: Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

Hàm số tuần hoàn

Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D được gọi là **hàm số tuần hoàn** nếu tồn tại một số T khác 0 sao cho với mọi $x \in D$ ta có $x \pm T \in D$ và $f(x+T) = f(x)$.

Số T dương nhỏ nhất thoả mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là **chu kì** của hàm số tuần hoàn $y = f(x)$.

Chú ý: Đồ thị của hàm số tuần hoàn chu kì T được lặp lại trên từng đoạn giá trị của x có độ dài T .

Chú ý: Người ta chứng minh được rằng:

- a) Các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ là các hàm số tuần hoàn với chu kì 2π ;
- b) Các hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ là các hàm số tuần hoàn với chu kì π .

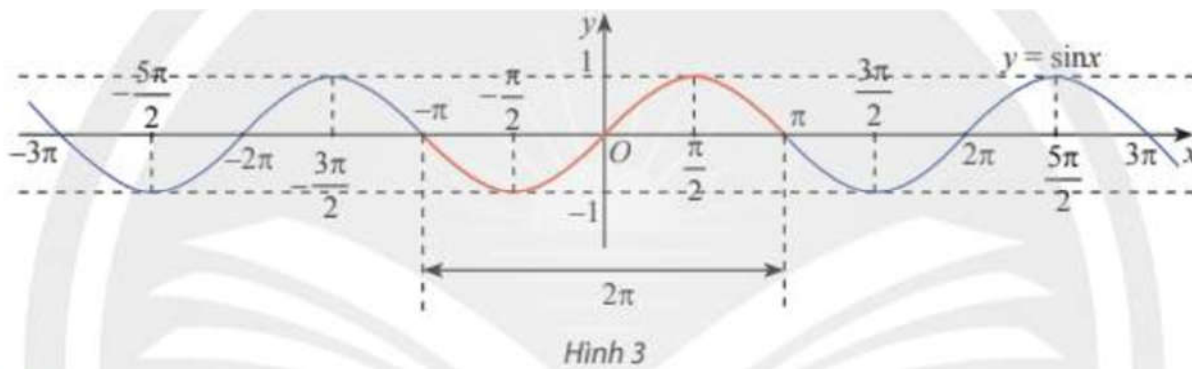
3. Đồ thị của các hàm số lượng giác

Hàm số $y = \sin x$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , biểu diễn nhiều điểm $M(x; \sin x)$ với $x \in [-\pi; \pi]$ và nối lại, ta được đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ như phần đồ thị màu đỏ trong Hình 3.

Vì hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì 2π nên để vẽ đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$, ta vẽ đồ thị của hàm số trên đoạn $[-\pi; \pi]$, sau đó lặp lại đồ thị trên đoạn này trên từng đoạn giá trị của x có độ dài 2π .

Ta có đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$ như sau:



Hình 3

Chú ý: Vì $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên để vẽ đồ thị của nó trên đoạn $[-\pi; \pi]$, ta có thể vẽ trên đoạn $[0; \pi]$, sau đó lấy đối xứng qua gốc tọa độ.

Từ đồ thị trên, ta thấy hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$, tập giá trị là $[-1; 1]$ và có các tính chất sau:

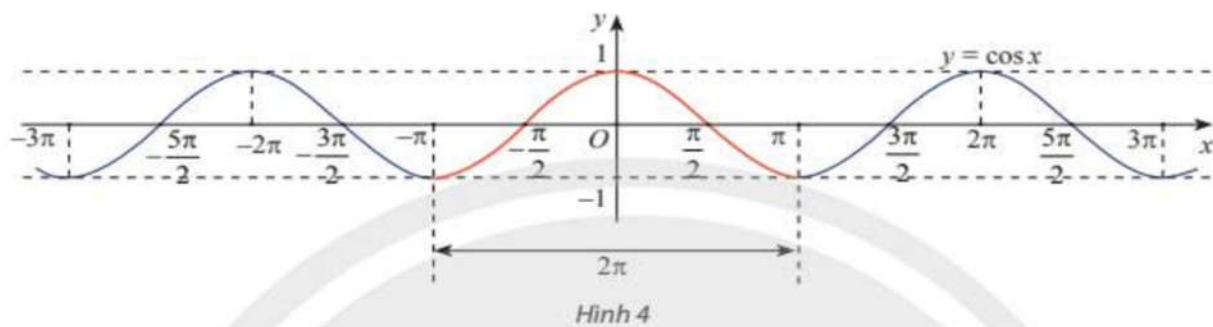
- Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π .
- Hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O .
- Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right) (k \in \mathbb{Z})$ và nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right) (k \in \mathbb{Z})$.

Hàm số $y = \cos x$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , lấy nhiều điểm $M(x; \cos x)$ với $x \in [-\pi; \pi]$ và nối lại, ta được đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$ như phần đồ thị màu đỏ trong Hình 4.

Vì hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π nên để vẽ đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trên $\mathbb{R}$, ta vẽ đồ thị của hàm số trên đoạn $[-\pi; \pi]$, sau đó lặp lại đồ thị trên đoạn này trên từng đoạn giá trị của x có độ dài 2π .

Ta có đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trên $\mathbb{R}$ như sau:



Chú ý: Vì $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên để vẽ đồ thị của nó trên đoạn $[-\pi; \pi]$, ta có thể vẽ trên đoạn $[0; \pi]$, sau đó lấy đối xứng qua trục tung.

Từ đồ thị trên, ta thấy hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$, tập giá trị là $[-1; 1]$ và có các tính chất sau:

- Hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π .
- Hàm số chẵn, có đồ thị đối xứng qua trục Oy .
- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$) và nghịch biến trên các khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$).

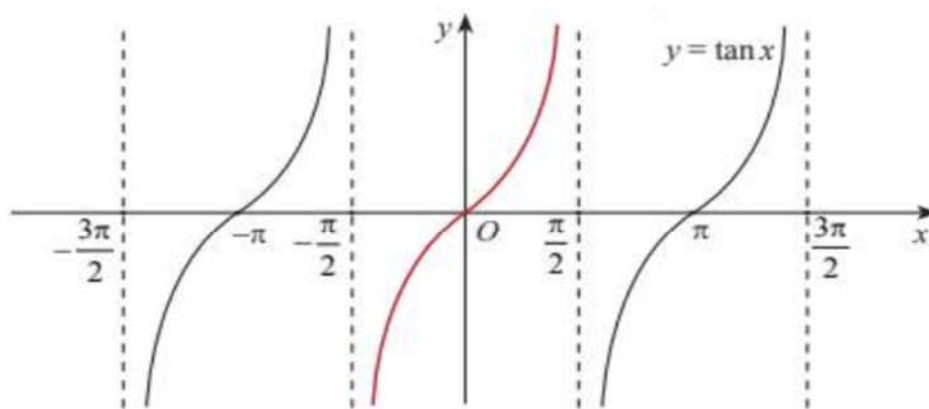
Hàm số $y = \tan x$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , lấy nhiều điểm $M(x; \tan x)$ với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và nối lại, ta được

đồ thị của hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ như phần đồ thị màu đỏ trong Hình 7.

Vì hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π , nên để vẽ đồ thị của hàm số $y = \tan x$ trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, ta vẽ đồ thị của hàm số trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, sau đó lặp lại đồ thị trên đoạn này trên từng đoạn giá trị của x có độ dài π .

Ta có đồ thị của hàm số $y = \tan x$ trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ như sau:



Chú ý: Vì $y = \tan x$ là hàm số lẻ nên để vẽ đồ thị của nó trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có thể vẽ trên nửa khoảng $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, sau đó lấy đối xứng qua gốc tọa độ.

Từ đồ thị trên, ta thấy hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, tập giá trị là $\mathbb{R}$ và có các tính chất sau:

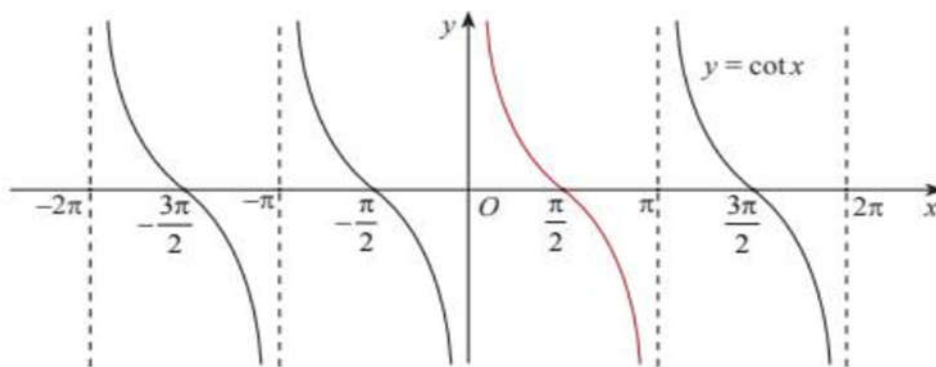
- Hàm số tuần hoàn với chu kỳ π .
- Hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O .
- Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right) (k \in \mathbb{Z})$.

Hàm số $y = \cot x$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , lấy nhiều điểm $M(x; \cot x)$ với $x \in (0; \pi)$ và nối lại, ta được đồ thị của hàm số $y = \cot x$ trên khoảng $(0; \pi)$ như phần đồ thị màu đỏ trong Hình 8.

Vì hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π nên để vẽ đồ thị của hàm số $y = \cot x$ trên $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ta vẽ đồ thị của hàm số trên khoảng $(0; \pi)$, sau đó tịnh tiến đồ thị trên khoảng này theo phương song song với trục hoành từng đoạn có độ dài π .

Ta có đồ thị của hàm số $y = \cot x$ trên $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ như sau:



Hình 8

Từ đồ thị trên, ta thấy hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, tập giá trị là $\mathbb{R}$ và có các tính chất sau:

- Hàm số tuần hoàn với chu kỳ π .
- Hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O .
- Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(k\pi; \pi + k\pi) (k \in \mathbb{Z})$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP LỜI GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm tập xác định của hàm số

1. Phương pháp

Để tìm tập xác định của hàm số ta cần lưu ý các điểm sau

- $y = \sqrt{u(x)}$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \geq 0$.
- $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ có nghĩa khi và chỉ $u(x), v(x)$ xác định và $v(x) \neq 0$.
- $y = \frac{u(x)}{\sqrt{v(x)}}$ có nghĩa khi và chỉ $u(x), v(x)$ xác định và $v(x) > 0$.
- Hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và tập giá trị của nó là:
 $-1 \leq \sin x \leq 1; \quad -1 \leq \cos x \leq 1$.

Như vậy, $y = \sin[u(x)], y = \cos[u(x)]$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định.

- $y = \tan u(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $y = \cot u(x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sin\left(\frac{5x}{x^2 - 1}\right);$ b) $y = \cos\sqrt{4 - x^2};$ c) $y = \sqrt{\sin x};$ d) $y = \sqrt{2 - \sin x}.$

Lời giải

a) Hàm số $y = \sin\left(\frac{5x}{x^2 - 1}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

b) Hàm số $y = \cos\sqrt{x^2 - 4}$ xác định $\Leftrightarrow 4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Vậy $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$.

c) Hàm số $y = \sqrt{\sin x}$ xác định $\Leftrightarrow \sin x \geq 0 \Leftrightarrow k2\pi \leq x \leq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy $D = \{x \in \mathbb{R} \mid k2\pi \leq x \leq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

d) Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 2 - \sin x > 0$.

Do đó, hàm số luôn luôn xác định hay $D = \mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right);$ b) $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right);$ c) $y = \frac{\sin x}{\cos(x - \pi)};$ d) $y = \frac{1}{\tan x - 1}.$

Lời giải

a) Hàm số $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Vậy } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

b) Hàm số $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Vậy } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

c) Hàm số $y = \frac{\sin x}{\cos(x - \pi)}$ xác định $\Leftrightarrow \cos(x - \pi) \neq 0 \Leftrightarrow x - \pi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Vậy } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

d) Hàm số $y = \frac{1}{\tan x - 1}$ xác định $\tan x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Vậy } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ví dụ 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \cos 2x + \frac{1}{\cos x}$;

b) $y = \frac{3\cos 2x}{\sin 3x \cos 3x}$.

Lời giải

a) Hàm số $y = \cos 2x + \frac{1}{\cos x}$ xác định $\Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Vậy } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

b) Hàm số $y = \frac{3\cos 2x}{\sin 3x \cos 3x}$ xác định $\Leftrightarrow$

$$\sin 3x \cos 3x \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 6x \neq 0 \Leftrightarrow 6x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ví dụ 4. Tìm m để hàm số sau đây xác định trên $\mathbb{R}$: $y = \sqrt{2m - 3\cos x}$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $2m - 3\cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{2m}{3}$

Bất đẳng thức trên đúng với mọi x khi $1 \leq \frac{2m}{3} \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$.

Dạng 2: Xét tính chẵn lẻ của hàm số

1. Phương pháp:

Giả sử ta cần xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y = f(x)$

- Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số; kiểm chứng D là tập đối xứng qua số 0 tức là $\forall x, x \in D \Rightarrow -x \in D$ (1)
- Bước 2: Tính $f(-x)$ và so sánh $f(-x)$ với $f(x)$
 - Nếu $f(-x) = f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số chẵn trên D (2)
 - Nếu $f(-x) = -f(x)$ thì $f(x)$ là hàm số lẻ trên D (3)

Chú ý:

- Nếu điều kiện (1) không nghiệm đúng thì $f(x)$ là hàm không chẵn và không lẻ trên D ;
- Nếu điều kiện (2) và (3) không nghiệm đúng, thì $f(x)$ là hàm không chẵn và cũng không lẻ trên D .

Lúc đó, để kết luận $f(x)$ là hàm không chẵn và không lẻ ta chỉ cần chỉ ra điểm $x_0 \in D$ sao

$$\text{cho } \begin{cases} f(-x_0) \neq f(x_0) \\ f(-x_0) \neq -f(x_0) \end{cases}$$

2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \sin 2x$; b) $y = \tan|x|$; c) $y = \sin^4 x$.

Lời giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \tan|-x| = \tan|x| = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \sin^4(-x) = \sin^4 x = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Ví dụ 2. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \tan x + \cot x$; b) $y = \sin x \cdot \cos x$.

Lời giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -(\tan x + \cot x) = -f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) = -\sin x \cos x = -f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Ví dụ 3. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = 2\sin x + 3$; b) $y = \sin x + \cos x$.

Lời giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3 = 1; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3 = 5$$

Nhận thấy $\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

b) TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 0; \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$\text{Nhận thấy } \begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

Ví dụ 4. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

$$\text{a) } y = \frac{\sin x - \tan x}{\sin x + \cot x}; \quad \text{b) } y = \frac{\cos^3 x + 1}{\sin^3 x}.$$

Lời giải

a) Hàm số xác định khi

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin x + \cot x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin^2 x + \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ Suy ra } \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$$

$$\text{Ta có: } f(-x) = \frac{\sin(-x) - \tan(-x)}{\sin(-x) + \cot(-x)} = \frac{-\sin x + \tan x}{-\sin x - \cot x} = \frac{\sin x - \tan x}{\sin x + \cot x} = f(x)$$

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

$$\text{b) TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \text{ Suy ra } \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$$

$$\text{Ta có: } f(-x) = \frac{\cos^3(-x) + 1}{\sin^3(-x)} = \frac{\cos^3 x + 1}{-\sin^3 x} = -\frac{\cos^3 x + 1}{\sin^3 x} = -f(x)$$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Ví dụ 5. Xác định tham số m để hàm số sau: $y = f(x) = 3m \sin 4x + \cos 2x$ là hàm số chẵn.

Lời giải

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}. \text{ Suy ra } \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$$

Ta có:

$$f(-x) = 3m \sin(-4x) + \cos(-2x) = -3m \sin 4x + \cos 2x$$

Để hàm số đã cho là hàm số chẵn thì:

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x), \forall x \in D \Leftrightarrow 3m \sin 4x + \cos 2x = -3m \sin 4x + \cos 2x, \forall x \in D \\ &\Leftrightarrow 6m \sin 4x = 0 \Leftrightarrow m = 0 \end{aligned}$$

Dạng 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác
1. Phương pháp:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad M &= \max_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases} \\ \blacksquare \quad m &= \min_D f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases} \end{aligned}$$

Lưu ý:

- $-1 \leq \sin x \leq 1; -1 \leq \cos x \leq 1.$
 - $0 \leq \sin^2 x \leq 1; 0 \leq \cos^2 x \leq 1.$
 - $0 \leq \sqrt{\sin x} \leq 1; 0 \leq \sqrt{\cos x} \leq 1.$
 - Dùng điều kiện có nghiệm của phương trình cơ bản
 - Phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$
 - Phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a^2 + b^2 \geq c^2$
 - Nếu hàm số có dạng: $y = \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2}$
- Ta tìm miền xác định của hàm số rồi quy đồng mẫu số, đưa về phương trình $a \sin x + b \cos x = c$.

2. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$; b) $y = 2\sqrt{\cos x + 1} - 3.$

Lời giải

a) Ta có:

$$-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \leq 3$$

Hay $-1 \leq y \leq 3$. Suy ra:

$$\text{Max } y = 3 \text{ khi } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Min } y = -1 \text{ khi } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos x \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos x + 1} \leq \sqrt{2} \\ \Rightarrow 0 \leq 2\sqrt{\cos x + 1} \leq 2\sqrt{2} &\Rightarrow -3 \leq 2\sqrt{\cos x + 1} - 3 \leq 2\sqrt{2} - 3 \end{aligned}$$

Hay $-3 \leq y \leq 2\sqrt{2} - 3$ Suy ra

$$\text{Max}y = 2\sqrt{2} - 3 \text{ khi } \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Min}y = -3 \text{ khi } \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = \sin x + \cos x$; b) $y = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$.

Lời giải

a) Ta có: $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$.

Suy ra:

$$\text{Max}y = \sqrt{2} \text{ khi } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Min}y = -\sqrt{2} \text{ khi } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Ta có: $y = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x\right) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

Suy ra: $-2 \leq y \leq 2$. Do đó:

$$\text{Max}y = 2 \text{ khi } \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Min}y = -2 \text{ khi } \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$; b) $y = \sin^4 x - 2 \cos^2 x + 1$.

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} y &= \cos^2 x + 2 \sin x + 2 = (1 - \sin^2 x) + 2 \sin x + 2 \\ &= -\sin^2 x + 2 \sin x + 3 = -(\sin x - 1)^2 + 4 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \Rightarrow 4 \geq (\sin x - 1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq -(\sin x - 1)^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -(\sin x - 1)^2 + 4 \leq 4$$

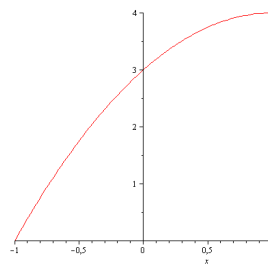
$$\text{Hay } 0 \leq y \leq 4$$

Do đó:

$$\text{Maxy} = 4 \text{ khi } \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Miny} = 0 \text{ khi } \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Lưu ý:



Nếu đặt $t = \sin x, t \in [-1; 1]$. Ta có (P): $y = f(t) = -t^2 + 2t + 3$ xác định với mọi $t \in [-1; 1]$, (P) có hoành độ đỉnh $t = 1$ và trên đoạn $[-1; 1]$ hàm số đồng biến nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = -1$ hay $\sin x = -1$ và đạt giá trị lớn nhất khi $t = 1$ hay $\sin x = 1$.

b) Ta có

$$\begin{aligned} y &= \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1 = (1 - \cos^2 x)^2 - 2\cos^2 x + 1 \\ &= \cos^4 x - 4\cos^2 x + 2 = (\cos^2 x - 2)^2 - 2 \end{aligned}$$

$$\text{Vì } 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \cos^2 x - 2 \leq -1 \Leftrightarrow 4 \geq (\cos^2 x - 2)^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq (\cos^2 x - 2)^2 - 2 \geq -1 \Leftrightarrow 2 \geq y \geq -1$$

Do đó:

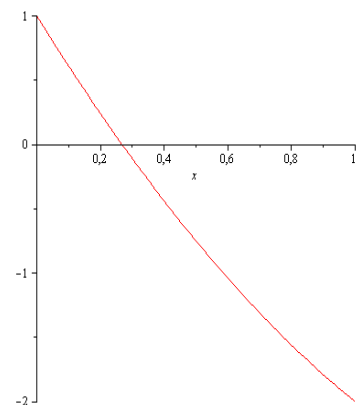
$$\text{Maxy} = 2 \text{ khi}$$

$$\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Miny} = -1 \text{ khi}$$

$$\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Lưu ý:



Nếu đặt $t = \cos^2 x, t \in [0;1]$. Ta có (P): $y = f(t) = t^2 - 4t + 2$ xác định với mọi $t \in [0;1]$, (P) có hoành độ đỉnh $t = 2 \in [0;1]$ và trên đoạn $[0;1]$ hàm số nghịch biến nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = 1$ và đạt giá trị lớn nhất khi $t = 0$.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{2\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 2}$

Lời giải

Ta có: $\sin x + \cos x - 2 = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$

Vì $-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \leq \sqrt{2} - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin x + \cos x - 2 = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó: $D = \mathbb{R}$

Biến đổi $y = \frac{2\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 2}$

$\Leftrightarrow y \sin x + y \cos x - 2y = 2\sin x - \cos x + 1$

$\Leftrightarrow (y-2)\sin x + (y+1)\cos x = 2y+1 \quad (*)$

Điều kiện để phương trình (*) có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ là $a^2 + b^2 \geq c^2$

$\Leftrightarrow (y-2)^2 + (y+1)^2 \geq (2y+1)^2 \Leftrightarrow 2y^2 + 6y - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \leq y \leq \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$

Kết luận: $\max_{\mathbb{R}} y = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}; \min_{\mathbb{R}} y = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$

Dạng 4. Chứng minh hàm số tuần hoàn và xác định chu kỳ của nó

1. Phương pháp

Muốn chứng minh hàm số tuần hoàn $f(x)$ tuần hoàn ta thực hiện theo các bước sau:

- Xét hàm số $y = f(x)$, tập xác định là D
- Với mọi $x \in D$, ta có $x - T_0 \in D$ và $x + T_0 \in D$ (1). Chỉ ra $f(x + T_0) = f(x)$ (2)

Vậy hàm số $y = f(x)$ tuần hoàn

Chứng minh hàm tuần hoàn với chu kỳ T_0

Tiếp tục, ta đi chứng minh T_0 là chu kỳ của hàm số tức chứng minh T_0 là số dương nhỏ nhất thỏa (1) và (2). Giả sử có T sao cho $0 < T < T_0$ thỏa mãn tính chất (2) $\Leftrightarrow \dots \Rightarrow$ mâu thuẫn với giả

thiết $0 < T < T_0$. Mâu thuẫn này chứng tỏ T_0 là số dương nhỏ nhất thỏa (2). Vậy hàm số tuần hoàn với chu kỳ cơ sở T_0

Một số nhận xét:

- Hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ tuần hoàn chu kỳ 2π . Từ đó $y = \sin(ax + b), y = \cos(ax + b)$ có chu kỳ

$$T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$$

- Hàm số $y = \tan x, y = \cot x$ tuần hoàn chu kỳ π . Từ đó $y = \tan(ax + b), y = \cot(ax + b)$ có chu kỳ

$$T_0 = \frac{\pi}{|a|}$$

Chú ý:

$y = f_1(x)$ có chu kỳ T_1 ; $y = f_2(x)$ có chu kỳ T_2

Thì hàm số $y = f_1(x) \pm f_2(x)$ có chu kỳ T_0 là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2 .

Các dấu hiệu nhận biết hàm số không tuần hoàn

Hàm số $y = f(x)$ không tuần hoàn khi một trong các điều kiện sau vi phạm

- Tập xác định của hàm số là tập hữu hạn
- Tồn tại số a sao cho hàm số không xác định với $x > a$ hoặc $x < a$
- Phương trình $f(x) = k$ có vô số nghiệm hữu hạn
- Phương trình $f(x) = k$ có vô số nghiệm sắp thứ tự $\dots < x_m < x_{m+1} < \dots$ mà $|x_m - x_{m+1}| \rightarrow 0$ hay ∞

2. Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Chứng minh rằng các hàm số sau là những hàm số tuần hoàn với chu kỳ cơ sở T_0

a) $f(x) = \sin x, T_0 = 2\pi;$ b) $f(x) = \tan 2x, T_0 = \frac{\pi}{2}$

Hướng dẫn Lời giải

a) Ta có : $f(x + 2\pi) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Giả sử có số thực dương $T < 2\pi$ thỏa $f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow \sin(x + T) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ (*)

Cho $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow VT(*) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = \cos T < 1;$ $VP(*) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

$\Rightarrow (*)$ không xảy ra với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = 2\pi$

b) Ta có : $f(x + \frac{\pi}{2}) = f(x), \forall x \in D$.

Giả sử có số thực dương $T < \frac{\pi}{2}$ thỏa $f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow \tan(2x + 2T) = \tan 2x, \forall x \in D$ (**)

Cho $x = 0 \Rightarrow VT(**) = \tan 2T \neq 0; \quad VP(**) = 0$

$B \Rightarrow (**)$ không xảy ra với mọi $x \in D$. Vậy hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \frac{\pi}{2}$

Ví dụ 2. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ cơ sở (nếu có) của các hàm số sau

a) $f(x) = \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}$; b) $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$; c) $f(x) = \sin(x^2)$; d) $y = \tan \sqrt{x}$.

Lời giải

c) Hàm số $f(x) = \sin(x^2)$ không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới 0

$$\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi} + \sqrt{k\pi}} \rightarrow 0 \text{ khi } k \rightarrow \infty$$

d) Hàm số $f(x) = \tan \sqrt{x}$ không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới $+\infty$

$$(k+1)^2 \pi^2 - k^2 \pi \rightarrow \infty \text{ khi } k \rightarrow \infty$$

Dạng 5. Đồ thị của hàm số lượng giác

1. Phương pháp

1/ Vẽ đồ thị hàm số lượng giác:

- Tìm tập xác định D.
- Tìm chu kỳ T_0 của hàm số.
- Xác định tính chẵn – lẻ (nếu cần).
- Lập bảng biến thiên trên một đoạn có độ dài bằng chu kỳ T_0 có thể chọn:

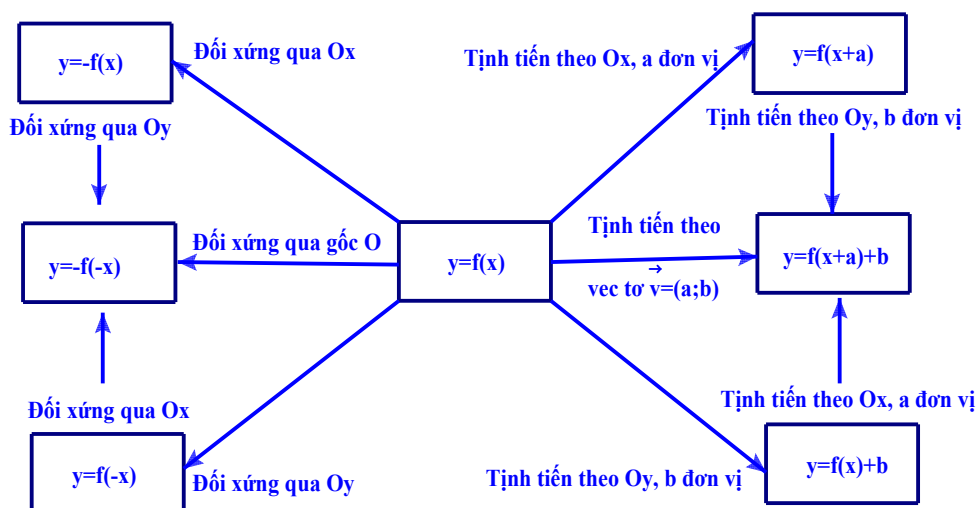
$$x \in [0, T_0] \text{ hoặc } x \in \left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right].$$

- Vẽ đồ thị trên đoạn có độ dài bằng chu kỳ.
- Rồi suy ra phần đồ thị còn lại bằng phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{v} = k.T_0.\vec{i}$ về bên trái và phải song song với trục hoành Ox (với $\vec{i}$ là véc tơ đơn vị trên trục Ox).

2/ Một số phép biến đổi đồ thị:

- a) Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $y = f(x) + a$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ lên trên trục hoành a đơn vị nếu $a > 0$ và tịnh tiến xuống phía dưới trục hoành a đơn vị nếu $a < 0$.
- b) Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $y = f(x+a)$ bằng cách tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ sang phải trục hoành a đơn vị nếu $a > 0$ và tịnh tiến sang trái trục hoành a đơn vị nếu $a < 0$.
- c) Từ đồ thị $y = f(x)$, suy ra đồ thị $y = -f(x)$ bằng cách lấy đối xứng đồ thị $y = f(x)$ qua trục hoành.
- d) Đồ thị $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$ nên suy ra đồ thị $y = f(x)$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị $y = f(x)$ phía trên trục hoành và lấy đối xứng $y = f(x)$ phía dưới trục hoành qua trục hoành

Mối liên hệ đồ thị giữa các hàm số



2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Vẽ đồ thị các hàm số sau: $y = \sin 4x$

Lời giải

a) Hàm số $y = \sin 4x$.

Miền xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên miền $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

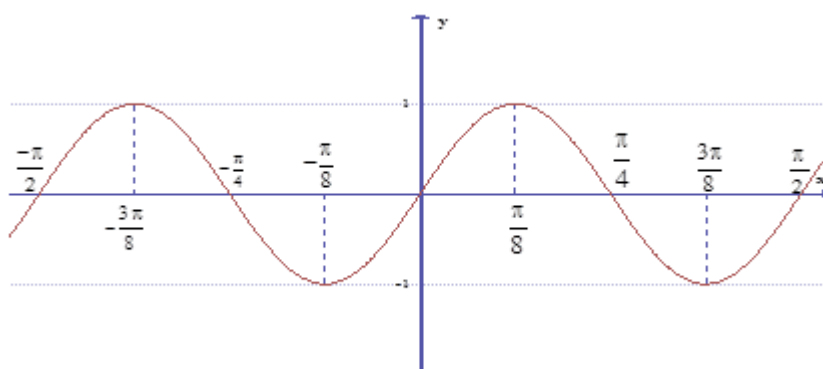
(Do chu kì tuần hoàn $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$)

Bảng giá trị của hàm số $y = \sin 4x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là:

x	0	$\frac{\pi}{16}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{5\pi}{24}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$
	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$						
y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0						

Ta có đồ thị của hàm số $y = \sin 4x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ và sau đó tịnh tiến cho các

đoạn: ..., $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$,



Ví dụ 2: Vẽ đồ thị hàm số $y = \cos \frac{x}{3}$.

Lời giải

Hàm số $y = \cos \frac{x}{3}$.

Miền xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số trên miền $[0; 6\pi]$

(Do chu kỳ tuần hoàn $T = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi$)

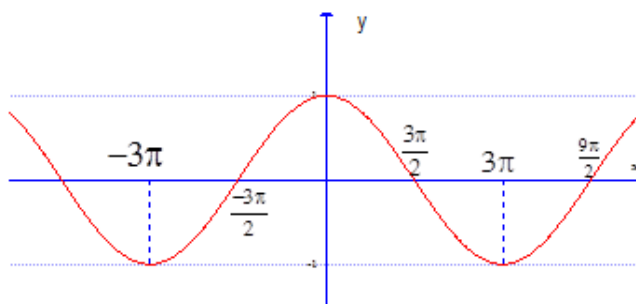
Bảng giá trị của hàm số $y = \cos \frac{x}{3}$ trên đoạn $[0; 6\pi]$ là:

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{21\pi}{6}$	3π	$\frac{15\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{2}$
	$\frac{33\pi}{6}$	6π					

y	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1				

Ta có đồ thị của hàm số $y = \cos \frac{x}{3}$ trên đoạn $[0; 6\pi]$ và sau đó tịnh tiến cho các

đoạn: ..., $[-6\pi, 0]$, $[6\pi, 12\pi]$,

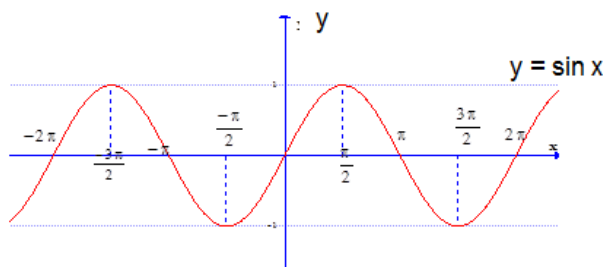


Ví dụ 3. Cho đồ thị của hàm số $y = \sin x$, (C). Hãy vẽ các đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ b) $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 2$.

Lời giải

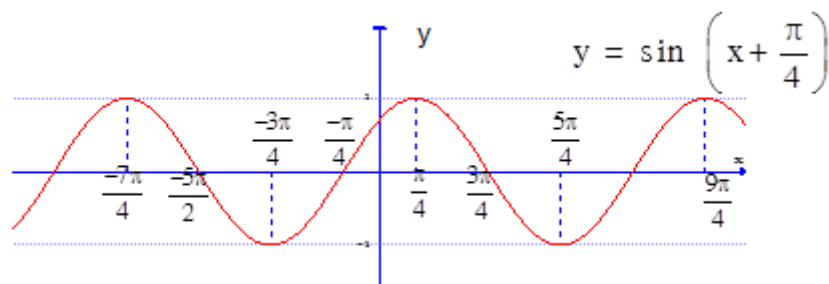
Từ đồ thị của hàm số $y = \sin x$, (C) như sau:



a) Từ đồ thị (C), ta có đồ thị $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ bằng cách tịnh tiến (C) sang trái

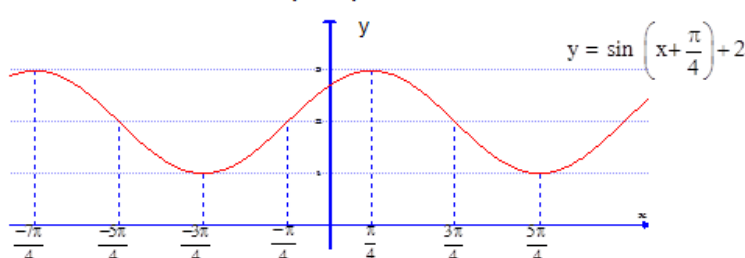
một đoạn là $\frac{\pi}{4}$ đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$, (C') như (hình 8)

sau:



b) Từ đồ thị (C') của hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, ta có đồ thị hàm số

$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$ bằng cách tịnh tiến (C') lên trên một đoạn là 2 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$, (C'') như sau:



C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Các hàm số dưới đây có là hàm số chẵn hay hàm số lẻ không?

a) $y = 5\sin^2 x + 1$;

b) $y = \cos x + \sin x$;

c) $y = \tan 2x$.

Lời giải

a) Xét: $y = 5\sin^2(-\alpha) + 1 = 5(-\sin\alpha)^2 + 1 = 5\sin^2\alpha + 1$

Vậy hàm số trên là hàm số chẵn.

b) Hàm số $y = \cos x + \sin x$ không phải hàm số chẵn hay hàm số lẻ.

c) Xét $y = \tan 2(-x) = -\tan 2x$

Vậy hàm số trên là hàm số lẻ.

Bài 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{\cos x}$;

b) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

c)

$y = \frac{1}{2 - \sin^2 x}$.

Lời giải

a) Hàm số y xác định khi $\cos x \neq 0$.

Suy ra $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$.

b) Hàm số y xác định khi $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$.

Suy ra $x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$.

c) Hàm số y xác định khi $2 - \sin^2 x \neq 0$

Mà với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có: $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ nên $1 \leq 2 - \sin^2 x \leq 2$

Vậy hàm số y xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài 3. Tìm tập giá trị của hàm số $y = 2\cos x + 1$.

Lời giải

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \cos x \leq 1$

Suy ra: $-1 \leq 2\cos x + 1 \leq 3$

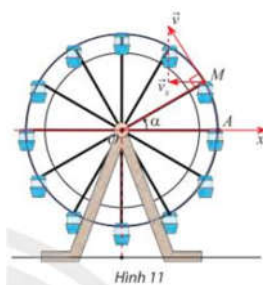
Vậy tập giá trị của hàm số y là $[-3; 3]$.

Bài 4. Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \sin x$, xác định các giá trị $x \in [-\pi; \pi]$ thỏa mãn $\sin x = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hình sin, ta thấy $\sin x = \frac{1}{2}$ khi $x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{5\pi}{6}$.

Bài 5. Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (\vec{Ox}, \vec{OM})$ theo hàm số $v_x = 0,3\sin\alpha$ (m/s) (Hình 11).



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x .

b) Dựa vào đồ thị của hàm số $\sin$, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.

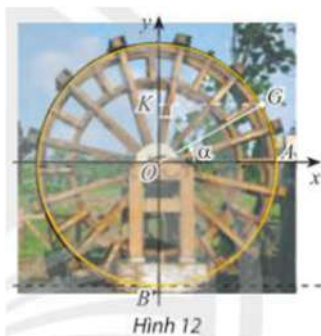
Lời giải

a) Do $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ nên $-0,3 \leq v_x \leq 0,3$

Vậy giá trị lớn nhất của v_x là $0,3$ (m/s) và giá trị nhỏ nhất của v_x là $-0,3$ (m/s).

b) Dựa vào đồ thị hàm số $\sin$, ta thấy trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), v_x tăng khi $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$

Bài 6. Khoảng cách từ tâm một guồng nước đến mặt nước và bán kính của guồng đều bằng 3 m. Xét gàu G của guồng. Ban đầu gàu G nằm ở vị trí A (Hình 12).



- a) Viết hàm số h biểu diễn chiều cao (tính bằng mét) của gàu G so với mặt nước theo góc $\alpha = (\overline{OA}, \overline{OG})$.
- b) Guồng nước quay hết mỗi vòng trong 30 giây. Dựa vào đồ thị của hàm số $\sin$, hãy cho biết ở các thời điểm t nào trong 1 phút đầu, khoảng cách của gàu đến mặt nước bằng 1,5 m.

Lời giải

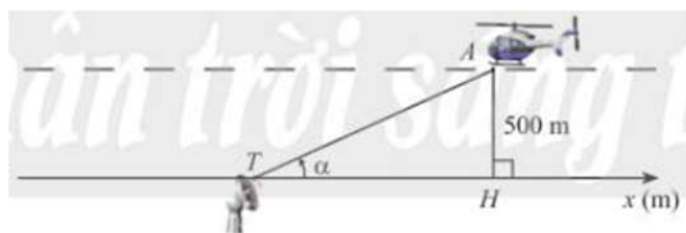
a) $h = 3 + 3 \cdot \sin \alpha$

b) Trong 1 phút đầu, guồng nước quay được 2 vòng. Ta có $0 \leq \alpha \leq 4\pi$

Khi $h = 1,5$. Suy ra $\sin \alpha = \frac{-1}{2}$.

Khi đó, $\alpha = \frac{7\pi}{6}; \alpha = \frac{11\pi}{6}; \alpha = \frac{19\pi}{6}$ hoặc $\alpha = \frac{23\pi}{6}$.

Bài 7. Trong Hình 13, một chiếc máy bay A bay ở độ cao 500 m theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H , α là góc lượng giác (Tx, TA) ($0 < \alpha < \pi$).



Hình 13

- a) Biểu diễn tọa độ x_H của điểm H trên trục Tx theo α .
- b) Dựa vào đồ thị hàm số cotang, hãy cho biết với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) $x_H = 500 \cdot \cot \alpha$

b) Với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì $-\frac{\sqrt{3}}{3} < \cot \alpha < \sqrt{3}$

Vậy $x_H \in \{-288,7; 866\}$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{2021}{\sin x}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1 + \sin x}{\cos x - 1}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 3: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{\cos x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{(1+2k)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{(1+2k)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{2} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 4: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{2021}{\sin x - \cos x}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin x - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \tan x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 5: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x.$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \emptyset.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R}.$

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 6: Tìm tập xác định D của hàm số $y = 3\tan^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 7: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{3\tan x - 5}{1 - \sin^2 x}.$

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

D. $D = \mathbb{R}.$

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định khi và chỉ khi $1 - \sin^2 x \neq 0$ và $\tan x$ xác định

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x \neq 1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Câu 8: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\sin x + 2}$.

- A. $D = \mathbb{R}$. B. $D = [-2; +\infty)$. C. $D = [0; 2\pi]$. D. $D = \emptyset$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } -1 \leq \sin x \leq 1 \longrightarrow 1 \leq \sin x + 2 \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó luôn tồn tại căn bậc hai của $\sin x + 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Câu 9: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\sin x - 2}$.

- A. $D = \mathbb{R}$. B. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. C. $D = [-1; 1]$. D. $D = \emptyset$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } -1 \leq \sin x \leq 1 \longrightarrow -3 \leq \sin x - 2 \leq -1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó không tồn tại căn bậc hai của $\sin x - 2$.

Vậy tập xác định $D = \emptyset$.

Câu 10: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin x}}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $D = \emptyset$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $1 - \sin x > 0 \Leftrightarrow \sin x < 1$. (*)

$$\text{Mà } -1 \leq \sin x \leq 1 \text{ nên } (*) \Leftrightarrow \sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Câu 11: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x}$.

A. $D = \emptyset$.

B. $D = \mathbb{R}$.

C. $D = \left[\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi \right], k \in \mathbb{Z}$.

D. $D = \left[\frac{5\pi}{6} + k2\pi; \frac{13\pi}{6} + k2\pi \right], k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \sin 2x \geq 0 \\ 1 - \sin 2x \geq 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Câu 12: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \tan\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\frac{\pi}{2} \cdot \cos x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \cos x \neq 1 + 2k$. (*)

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên (*) $\Leftrightarrow \cos x \neq \pm 1 \Leftrightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 13: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = \sin x$.

B. $y = \cos x$.

C. $y = \tan x$.

D. $y = \cot x$.

Lời giải

Chọn B

Nhắc lại kiến thức cơ bản:

- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
- Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.
- Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

Vậy B là đáp án đúng.

Câu 14: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = -\sin x$.

B. $y = \cos x - \sin x$.

C. $y = \cos x + \sin^2 x$.

D. $y = \cos x \sin x$.

Lời giải

Chọn C

Tất cả các hàm số đều có TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Bây giờ ta kiểm tra $f(-x) = f(x)$ hoặc $f(-x) = -f(x)$.

● Với $y = f(x) = -\sin x$. Ta có $f(-x) = -\sin(-x) = \sin x = -(-\sin x)$

$\longrightarrow f(-x) = -f(x)$. Suy ra hàm số $y = -\sin x$ là hàm số lẻ.

● Với $y = f(x) = \cos x - \sin x$. Ta có $f(-x) = \cos(-x) - \sin(-x) = \cos x + \sin x$

$\longrightarrow f(-x) \neq \{-f(x), f(x)\}$. Suy ra hàm số $y = \cos x - \sin x$ không chẵn không lẻ.

● Với $y = f(x) = \cos x + \sin^2 x$. Ta có $f(-x) = \cos(-x) + \sin^2(-x)$

$$= \cos(-x) + [\sin(-x)]^2 = \cos x + [-\sin x]^2 = \cos x + \sin^2 x$$

$\longrightarrow f(-x) = f(x)$. Suy ra hàm số $y = \cos x + \sin^2 x$ là hàm số chẵn.

● Với $y = f(x) = \cos x \sin x$. Ta có $f(-x) = \cos(-x) \cdot \sin(-x) = -\cos x \sin x$

$\longrightarrow f(-x) = -f(x)$. Suy ra hàm số $y = \cos x \sin x$ là hàm số lẻ.

Câu 15: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = \sin 2x$.

B. $y = x \cos x$.

C. $y = \cos x \cdot \cot x$.

D. $y = \frac{\tan x}{\sin x}$.

Lời giải

Chọn D

● Xét hàm số $y = f(x) = \sin 2x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x) \longrightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

● Xét hàm số $y = f(x) = x \cos x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = (-x) \cdot \cos(-x) = -x \cos x = -f(x) \longrightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

● Xét hàm số $y = f(x) = \cos x \cot x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid (k \in \mathbb{Z})\}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = \cos(-x) \cdot \cot(-x) = -\cos x \cot x = -f(x) \longrightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

● Xét hàm số $y = f(x) = \frac{\tan x}{\sin x}$.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} \mid (k \in \mathbb{Z})\right\}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = \frac{\tan(-x)}{\sin(-x)} = \frac{-\tan x}{-\sin x} = \frac{\tan x}{\sin x} = f(x) \longrightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 16: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = |\sin x|$. B. $y = x^2 \sin x$. C. $y = \frac{x}{\cos x}$. D. $y = x + \sin x$.

Lời giải

Chọn A

Ta kiểm tra được A là hàm số chẵn, các đáp án B, C, D là hàm số lẻ.

Câu 17: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua trục tung?

- A. $y = \sin x \cos 2x$. B. $y = \sin^3 x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. C. $y = \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1}$.
D. $y = \cos x \sin^3 x$.

Lời giải

Chọn B

Ta dễ dàng kiểm tra được A, C, D là các hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O.

Xét đáp án B, ta có $y = f(x) = \sin^3 x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin^3 x \cdot \sin x = \sin^4 x$. Kiểm tra được đây là hàm số chẵn nên có đồ thị đối xứng qua trục tung.

Câu 18: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A. $y = \cos x + \sin^2 x$. B. $y = \sin x + \cos x$. C. $y = -\cos x$. D. $y = \sin x \cdot \cos 3x$.

Lời giải

Chọn D

Ta kiểm tra được đáp án A và C là các hàm số chẵn. Đáp án B là hàm số không chẵn, không lẻ. Đáp án D là hàm số lẻ.

Câu 19: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

- A. $y = \cot 4x$. B. $y = \frac{\sin x + 1}{\cos x}$. C. $y = \tan^2 x$. D. $y = |\cot x|$.

Lời giải

Chọn A

Ta kiểm tra được đáp án A là hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

Đáp án B là hàm số không chẵn, không lẻ. Đáp án C và D là các hàm số chẵn.

Câu 20: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A. $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. B. $y = \sin^2 x$. C. $y = \frac{\cot x}{\cos x}$. D. $y = \frac{\tan x}{\sin x}$.

Lời giải

Chọn C

Viết lại đáp án A là $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

Ta kiểm tra được đáp án A, B và D là các hàm số chẵn. Đáp án C là hàm số lẻ.

Câu 21: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A. $y = 1 - \sin^2 x$. B. $y = |\cot x| \cdot \sin^2 x$. C. $y = x^2 \tan 2x - \cot x$. D. $y = 1 + |\cot x + \tan x|$.

Lời giải

Chọn C

Ta kiểm tra được đáp án A, B và D là các hàm số chẵn. Đáp án C là hàm số lẻ.

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = \sin 2x$ và $g(x) = \tan^2 x$. Chọn mệnh đề đúng

- A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.
 B. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.
 C. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số chẵn.
 D. $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm số lẻ.

Lời giải

Chọn B

- Xét hàm số $f(x) = \sin 2x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x) \longrightarrow f(x)$ là hàm số lẻ.

- Xét hàm số $g(x) = \tan^2 x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $g(-x) = [\tan(-x)]^2 = (-\tan x)^2 = \tan^2 x = g(x) \longrightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 23: Cho hai hàm số $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x}$ và $g(x) = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $f(x)$ lẻ và $g(x)$ chẵn. B. $f(x)$ và $g(x)$ chẵn.
 C. $f(x)$ chẵn, $g(x)$ lẻ. D. $f(x)$ và $g(x)$ lẻ.

Lời giải

Chọn B

● Xét hàm số $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x}$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $f(-x) = \frac{\cos(-2x)}{1 + \sin^2(-3x)} = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x} = f(x) \longrightarrow f(x)$ là hàm số chẵn.

● Xét hàm số $g(x) = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$. Do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $g(-x) = \frac{|\sin(-2x)| - \cos(-3x)}{2 + \tan^2(-x)} = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x} = g(x) \longrightarrow g(x)$ là hàm số chẵn.

Vậy $f(x)$ và $g(x)$ chẵn.

Câu 24: Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

A. $y = \frac{1}{\sin^3 x}$. B. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. C. $y = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. D. $y = \sqrt{\sin 2x}$.

Lời giải

Chọn A

Viết lại đáp án B là $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$.

Viết lại đáp án C là $y = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x$.

Kiểm tra được đáp án A là hàm số lẻ nên có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ.

Ta kiểm tra được đáp án B và C là các hàm số không chẵn, không lẻ.

Xét đáp án D.

● Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin 2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x \in [k2\pi; \pi + k2\pi] \Leftrightarrow x \in \left[k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$

$\longrightarrow D = \left[k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right] \ (k \in \mathbb{Z})$.

● Chọn $x = \frac{\pi}{4} \in D$ nhưng $-x = -\frac{\pi}{4} \notin D$. Vậy $y = \sqrt{\sin 2x}$ không chẵn, không lẻ.

Câu 25: Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Đồ thị hàm số $y = |\sin x|$ đối xứng qua gốc tọa độ O .

B. Đồ thị hàm số $y = \cos x$ đối xứng qua trục Oy .

C. Đồ thị hàm số $y = |\tan x|$ đối xứng qua trục Oy .

D. Đồ thị hàm số $y = \tan x$ đối xứng qua gốc tọa độ O .

Lời giải

Chọn A

Ta kiểm tra được hàm số $y = |\sin x|$ là hàm số chẵn nên có đồ thị đối xứng qua trục Oy .
Do đó đáp án A sai.

Câu 26: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 3\sin x - 2$.

- A. $M = 1, m = -5$. B. $M = 3, m = 1$. C. $M = 2, m = -2$. D. $M = 0, m = -2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \longrightarrow -3 \leq 3\sin x \leq 3 \longrightarrow -5 \leq 3\sin x - 2 \leq 1$

$$\longrightarrow -5 \leq y \leq 1 \longrightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -5 \end{cases}$$

Câu 27: Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 3\cos 2x + 5$.

- A. $T = [-1; 1]$. B. $T = [-1; 11]$. C. $T = [2; 8]$. D. $T = [5; 8]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \longrightarrow -3 \leq 3\cos 2x \leq 3 \longrightarrow 2 \leq 3\cos 2x + 5 \leq 8$

$$\longrightarrow 2 \leq y \leq 8 \longrightarrow T = [2; 8].$$

Câu 28: Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 5 - 3\sin x$.

- A. $T = [-1; 1]$. B. $T = [-3; 3]$. C. $T = [2; 8]$. D. $T = [5; 8]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \longrightarrow 1 \geq -\sin x \geq -1 \longrightarrow 3 \geq -3\sin x \geq -3$

$$\longrightarrow 8 \geq 5 - 3\sin x \geq 2 \longrightarrow 2 \leq y \leq 8 \longrightarrow T = [2; 8].$$

Câu 29: Hàm số $y = 5 + 4\sin 2x \cos 2x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = 5 + 4\sin 2x \cos 2x = 5 + 2\sin 4x$.

Mà $-1 \leq \sin 4x \leq 1 \longrightarrow -2 \leq 2\sin 4x \leq 2 \longrightarrow 3 \leq 5 + 2\sin 4x \leq 7$

$$\longrightarrow 3 \leq y \leq 7 \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} y \in \{3; 4; 5; 6; 7\} \text{ nên } y \text{ có } 5 \text{ giá trị nguyên.}$$

Câu 30: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = -\sqrt{2}\sin(2016x + 2017)$.

A. $m = -2016\sqrt{2}$.

B. $m = -\sqrt{2}$.

C. $m = -1$.

D. $m = -2017\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $-1 \leq \sin(2016x + 2017) \leq 1 \longrightarrow \sqrt{2} \geq -\sqrt{2} \sin(2016x + 2017) \geq -\sqrt{2}$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-\sqrt{2}$.

Câu 31: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \frac{1}{\cos x + 1}$.

A. $m = \frac{1}{2}$.

B. $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

C. $m = 1$.

D. $m = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1 \leq \cos x \leq 1$.

Ta có $\frac{1}{\cos x + 1}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\cos x$ lớn nhất $\Leftrightarrow \cos x = 1$.

Khi $\cos x = 1 \longrightarrow y = \frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2}$.

Câu 32: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \cos x$.

Tính $P = M - m$.

A. $P = 4$.

B. $P = 2\sqrt{2}$.

C. $P = \sqrt{2}$.

D. $P = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Mà $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \longrightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$

$\longrightarrow \begin{cases} M = \sqrt{2} \\ m = -\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow P = M - m = 2\sqrt{2}$.

Câu 33: Tập giá trị T của hàm số $y = \sin 2017x - \cos 2017x$.

A. $T = [-2; 2]$.

B. $T = [-4034; 4034]$.

C. $T = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

D. $T = [0; \sqrt{2}]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = \sin 2017x - \cos 2017x = \sqrt{2} \sin\left(2017x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Mà $-1 \leq \sin\left(2017x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \longrightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(2017x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$

$$\longrightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2} \longrightarrow T = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}].$$

Câu 34: Hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$, ta có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{\pi}{6} = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{Ta có } -1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \longrightarrow -1 \leq y \leq 1 \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} y \in \{-1; 0; 1\}.$$

Câu 35: Hàm số $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = x_0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $x_0 = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x_0 = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y = \sin^4 x - \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = -\cos 2x.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \cos 2x \leq 1 \longrightarrow -1 \geq -\cos 2x \geq 1 \longrightarrow -1 \geq y \geq 1.$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1 .

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 36: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 1 - 2|\cos 3x|$.

- A. $M = 3, m = -1$. B. $M = 1, m = -1$. C. $M = 2, m = -2$. D. $M = 0, m = -2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } -1 \leq \cos 3x \leq 1 \longrightarrow 0 \leq |\cos 3x| \leq 1 \longrightarrow 0 \geq -2|\cos 3x| \geq -2$$

$$\longrightarrow 1 \geq 1 - 2|\cos 3x| \geq -1 \longrightarrow 1 \geq y \geq -1 \longrightarrow \begin{cases} M = 1 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Câu 37: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 4\sin^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $M = \sqrt{2}$. B. $M = \sqrt{2} - 1$. C. $M = \sqrt{2} + 1$. D. $M = \sqrt{2} + 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y &= 4\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 4\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right) + \sin 2x + \cos 2x \\ &= \sin 2x - \cos 2x + 2 = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } -1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \longrightarrow -\sqrt{2} + 2 \leq \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \leq \sqrt{2} + 2.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $2 + \sqrt{2}$.

Câu 38: Tìm tập giá trị T của hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.

- A.** $T = [0; 2]$. **B.** $T = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$. **C.** $T = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$. **D.** $T = \left[0; \frac{1}{4}\right]$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y &= \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } -1 \leq \cos 4x \leq 1 \longrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x \leq 1 \longrightarrow \frac{1}{4} \leq y \leq 1.$$

Câu 39: Tìm giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của hàm số $y = \sin^2 x + 2\cos^2 x$.

- A.** $M = 3, m = 0$. **B.** $M = 2, m = 0$. **C.** $M = 2, m = 1$. **D.** $M = 3, m = 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = \sin^2 x + 2\cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 1 + \cos^2 x$$

$$\text{Do } -1 \leq \cos x \leq 1 \longrightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \longrightarrow 1 \leq 1 + \cos^2 x \leq 2 \longrightarrow \begin{cases} M = 2 \\ m = 1 \end{cases}.$$

Câu 40: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{2}{1 + \tan^2 x}$.

- A.** $M = \frac{1}{2}$. **B.** $M = \frac{2}{3}$. **C.** $M = 1$. **D.** $M = 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y = \frac{2}{1 + \tan^2 x} = \frac{2}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 2\cos^2 x.$$

$$\text{Do } 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \longrightarrow 0 \leq y \leq 2 \longrightarrow M = 2.$$

Câu 41: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 8\sin^2 x + 3\cos 2x$.

$$\text{Tính } P = 2M - m^2.$$

A. $P = 1$.

B. $P = 2$.

C. $P = 112$.

D. $P = 130$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = 8\sin^2 x + 3\cos 2x = 8\sin^2 x + 3(1 - 2\sin^2 x) = 2\sin^2 x + 3$.

Mà $-1 \leq \sin x \leq 1 \longrightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \longrightarrow 3 \leq 2\sin^2 x + 3 \leq 5$

$\longrightarrow 3 \leq y \leq 5 \longrightarrow \begin{cases} M = 5 \\ m = 3 \end{cases} \longrightarrow P = 2M - m^2 = 1$.

Câu 42: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x$.

A. $m = 2 - \sqrt{3}$.

B. $m = -1$.

C. $m = 1$.

D. $m = -\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 1 - \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x$

$= \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x + 1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + 1$

$= 2\left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \cos 2x\right) + 1 = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

Mà $-1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \longrightarrow -1 \leq 1 + 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 3 \longrightarrow -1 \leq y \leq 3$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1 .

Câu 43: Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 12\sin x - 5\cos x$.

A. $T = [-1; 1]$.

B. $T = [-7; 7]$.

C. $T = [-13; 13]$.

D. $T = [-17; 17]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = 12\sin x - 5\cos x = 13\left(\frac{12}{13}\sin x - \frac{5}{13}\cos x\right)$.

Đặt $\frac{12}{13} = \cos \alpha \longrightarrow \frac{5}{13} = \sin \alpha$. Khi đó $y = 13(\sin x \cos \alpha - \sin \alpha \cos x) = 13\sin(x - \alpha)$

$\longrightarrow -13 \leq y \leq 13 \longrightarrow T = [-13; 13]$.

Câu 44: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 4\sin 2x - 3\cos 2x$.

A. $M = 3$.

B. $M = 1$.

C. $M = 5$.

D. $M = 4$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = 4 \sin 2x - 3 \cos 2x = 5 \left(\frac{4}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \right).$$

$$\text{Đặt } \frac{4}{5} = \cos \alpha \longrightarrow \frac{3}{5} = \sin \alpha. \text{ Khi đó } y = 5(\cos \alpha \sin 2x - \sin \alpha \cos 2x) = 5 \sin(2x - \alpha)$$

$$\longrightarrow -5 \leq y \leq 5 \longrightarrow M = 5.$$

Câu 45: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4 \sin x + 5$.

$$\text{Tính } P = M - 2m^2.$$

A. $P = 1$.

B. $P = 7$.

C. $P = 8$.

D. $P = 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y = \sin^2 x - 4 \sin x + 5 = (\sin x - 2)^2 + 1.$$

$$\text{Do } -1 \leq \sin x \leq 1 \longrightarrow -3 \leq \sin x - 2 \leq -1 \longrightarrow 1 \leq (\sin x - 2)^2 \leq 9$$

$$\longrightarrow 2 \leq (\sin x - 2)^2 + 1 \leq 10 \longrightarrow \begin{cases} M = 10 \\ m = 2 \end{cases} P = M - 2m^2 = 2.$$

Câu 46: Hàm số $y = \cos^2 x - \cos x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = \cos^2 x - \cos x = \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \cos x \leq 1 \longrightarrow -\frac{3}{2} \leq \cos x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \longrightarrow 0 \leq \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{9}{4}$$

$$\longrightarrow -\frac{1}{4} \leq \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \leq 2 \longrightarrow -\frac{1}{4} \leq y \leq 2 \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} y \in \{0; 1; 2\} \text{ nên có 3 giá trị thỏa mãn.}$$

Câu 47: Hàm số $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $x_0 = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x_0 = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x_0 = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x_0 = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2 = 1 - \sin^2 x + 2 \sin x + 2$$

$$= -\sin^2 x + 2 \sin x + 3 = -(\sin x - 1)^2 + 4.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \sin x \leq 1 \longrightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \longrightarrow 0 \leq (\sin x - 1)^2 \leq 4$$

$$\longrightarrow 0 \geq -(\sin x - 1)^2 \geq -4 \longrightarrow 4 \geq -(\sin x - 1)^2 + 4 \geq 0.$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0.

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 48: Tìm giá trị lớn nhất M và nhất m của hàm số $y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1$

A. $M = 2, m = -2$. **B.** $M = 1, m = 0$. **C.** $M = 4, m = -1$. **D.** $M = 2, m = -1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1 = \sin^4 x - 2(1 - \sin^2 x) + 1 = (\sin^2 x + 1)^2 - 2.$$

$$\text{Do } 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \longrightarrow 1 \leq \sin^2 x + 1 \leq 2 \longrightarrow 1 \leq (\sin^2 x + 1)^2 \leq 4$$

$$\longrightarrow -1 \leq (\sin^2 x + 1)^2 - 2 \leq 2 \longrightarrow \begin{cases} M = 2 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Câu 49: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 4\sin^4 x - \cos 4x$.

A. $m = -3$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = -5$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y = 4\sin^4 x - \cos 4x = 4 \cdot \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 - (2\cos^2 2x - 1)$$

$$= -\cos^2 2x - 2\cos 2x + 2 = -(\cos 2x + 1)^2 + 3 \leq 3.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \cos 2x \leq 1 \longrightarrow 0 \leq \cos 2x + 1 \leq 2 \longrightarrow 0 \leq (\cos 2x + 1)^2 \leq 4$$

$$\longrightarrow -1 \leq -(\cos 2x + 1)^2 + 3 \leq 3 \longrightarrow m = -1.$$

Câu 50: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sqrt{7 - 3\cos^2 x}$.

A. $M = \sqrt{10}, m = 2$. **B.** $M = \sqrt{7}, m = 2$. **C.** $M = \sqrt{10}, m = \sqrt{7}$. **D.** $M = 0, m = 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } -1 \leq \cos x \leq 1 \longrightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

$$\longrightarrow 4 \leq 7 - 3\cos^2 x \leq 7 \longrightarrow 2 \leq \sqrt{7 - 3\cos^2 x} \leq \sqrt{7}.$$

Câu 51: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t của năm 2017 được cho bởi một hàm số $y = 4\sin\left[\frac{\pi}{178}(t - 60)\right] + 10$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

A. 28 tháng 5. **B.** 29 tháng 5. **C.** 30 tháng 5. **D.** 31 tháng 5.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Vì } \sin\left[\frac{\pi}{178}(t-60)\right] \leq 1 \longrightarrow y = 4 \sin\left[\frac{\pi}{178}(t-60)\right] + 10 \leq 14.$$

$$\text{Ngày có ánh sáng mặt trời nhiều nhất } \Leftrightarrow y = 14 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{178}(t-60)\right] = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{178}(t-60) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 149 + 356k.$$

$$\text{Do } 0 < t \leq 365 \longrightarrow 0 < 149 + 356k \leq 365 \Leftrightarrow -\frac{149}{356} < k \leq \frac{54}{89} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0.$$

Với $k = 0 \longrightarrow t = 149$ rơi vào ngày 29 tháng 5 (vì ta đã biết tháng 1 và 3 có 31 ngày, tháng 4 có 30 ngày, riêng đối với năm 2017 thì không phải năm nhuận nên tháng 2 có 28 ngày hoặc dựa vào dữ kiện $0 < t \leq 365$ thì ta biết năm này tháng 2 chỉ có 28 ngày).

Câu 52: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$. Mực nước của kênh cao nhất khi:

- A. $t = 13$ (giờ). B. $t = 14$ (giờ). C. $t = 15$ (giờ). D. $t = 16$ (giờ).

Lời giải

Chọn B

Mực nước của kênh cao nhất khi h lớn nhất

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4} = k2\pi \text{ với } 0 < t \leq 24 \text{ và } k \in \mathbb{Z}.$$

Lần lượt thay các đáp án, ta được đáp án B thỏa mãn

$$\text{Vì với } t = 14 \longrightarrow \Leftrightarrow \frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4} = 2\pi \text{ (đúng với } k = 1 \in \mathbb{Z}).$$

Câu 53: Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
 B. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
 C. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
 D. Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Lời giải

Chọn C

Vì hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Câu 54: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn?

- A. $y = \sin x$ B. $y = x + \sin x$ C. $y = x \cos x$ D. $y = \frac{\sin x}{x}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = x + \sin x$ không tuần hoàn. Thật vậy:

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Giả sử $f(x+T) = f(x), \forall x \in D$
 $\Leftrightarrow (x+T) + \sin(x+T) = x + \sin x, \forall x \in D$
 $\Leftrightarrow T + \sin(x+T) = \sin x, \forall x \in D. (*)$

Cho $x = 0$ và $x = \pi$, ta được $\begin{cases} T + \sin x = \sin 0 = 0 \\ T + \sin(\pi + T) = \sin \pi = 0 \end{cases}$

$\longrightarrow 2T + \sin T + \sin(\pi + T) = 0 \Leftrightarrow T = 0$. Điều này trái với định nghĩa là $T > 0$.

Vậy hàm số $y = x + \sin x$ không phải là hàm số tuần hoàn.

Tương tự chứng minh cho các hàm số $y = x \cos x$ và $y = \frac{\sin x}{x}$ không tuần hoàn.

Câu 55: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào không tuần hoàn?

- A. $y = \cos x$. B. $y = \cos 2x$. C. $y = x^2 \cos x$. D. $y = \frac{1}{\sin 2x}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 56: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $T = \frac{2\pi}{5}$. B. $T = \frac{5\pi}{2}$. C. $T = \frac{\pi}{2}$. D. $T = \frac{\pi}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \sin(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y = \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{5}$.

Câu 57: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = \cos\left(\frac{x}{2} + 2016\right)$.

- A. $T = 4\pi$. B. $T = 2\pi$. C. $T = -2\pi$. D. $T = \pi$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y = \cos\left(\frac{x}{2} + 2016\right)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 4\pi$.

Câu 58: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = -\frac{1}{2}\sin(100\pi x + 50\pi)$.

A. $T = \frac{1}{50}$.

B. $T = \frac{1}{100}$.

C. $T = \frac{\pi}{50}$.

D. $T = 200\pi^2$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = -\frac{1}{2}\sin(100\pi x + 50\pi)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}$.

Câu 59: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = \cos 2x + \sin \frac{x}{2}$.

A. $T = 4\pi$.

B. $T = \pi$.

C. $T = 2\pi$.

D. $T = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \cos 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Hàm số $y = \sin \frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kỳ $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Suy ra hàm số $y = \cos 2x + \sin \frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 4\pi$.

Nhận xét. T là của T_1 và T_2 .

Câu 60: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = \cos 3x + \cos 5x$.

A. $T = \pi$.

B. $T = 3\pi$.

C. $T = 2\pi$.

D. $T = 5\pi$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \cos 3x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_1 = \frac{2\pi}{3}$.

Hàm số $y = \cos 5x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_2 = \frac{2\pi}{5}$.

Suy ra hàm số $y = \cos 3x + \cos 5x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.

Câu 61: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = 3\cos(2x + 1) - 2\sin\left(\frac{x}{2} - 3\right)$.

A. $T = 2\pi$.

B. $T = 4\pi$

C. $T = 6\pi$

D. $T = \pi$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = 3\cos(2x+1)$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Hàm số $y = -2\sin\left(\frac{x}{2}-3\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Suy ra hàm số $y = 3\cos(2x+1) - 2\sin\left(\frac{x}{2}-3\right)$ tuần hoàn với chu kì $T = 4\pi$.

Câu 62: Tìm chu kì T của hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $T = 2\pi$.

B. $T = \pi$.

C. $T = 3\pi$.

D. $T = 4\pi$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Hàm số $y = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \frac{2\pi}{3}$.

Suy ra hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$.

Câu 63: Tìm chu kì T của hàm số $y = \tan 3\pi x$.

A. $T = \frac{\pi}{3}$.

B. $T = \frac{4}{3}$.

C. $T = \frac{2\pi}{3}$.

D. $T = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = \tan(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y = \tan 3\pi x$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{1}{3}$.

Câu 64: Tìm chu kì T của hàm số $y = \tan 3x + \cot x$.

A. $T = 4\pi$.

B. $T = \pi$.

C. $T = 3\pi$.

D. $T = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = \cot(ax+b)$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y = \tan 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{\pi}{3}$.

Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \pi$.

Suy ra hàm số $y = \tan 3x + \cot x$ tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.

Nhận xét. T là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2 .

Câu 65: Tìm chu kì T của hàm số $y = \cot \frac{x}{3} + \sin 2x$.

A. $T = 4\pi$.

B. $T = \pi$.

C. $T = 3\pi$.

D. $T = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \cot \frac{x}{3}$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = 3\pi$.

Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \pi$.

Suy ra hàm số $y = \cot \frac{x}{3} + \sin 2x$ tuần hoàn với chu kì $T = 3\pi$.

Câu 66: Tìm chu kì T của hàm số $y = \sin \frac{x}{2} - \tan \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$.

A. $T = 4\pi$.

B. $T = \pi$.

C. $T = 3\pi$.

D. $T = 2\pi$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \sin \frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = 4\pi$.

Hàm số $y = -\tan \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \frac{\pi}{2}$.

Suy ra hàm số $y = \sin \frac{x}{2} - \tan \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$ tuần hoàn với chu kì $T = 4\pi$.

Câu 67: Tìm chu kì T của hàm số $y = 2 \cos^2 x + 2017$.

A. $T = 3\pi$.

B. $T = 2\pi$.

C. $T = \pi$.

D. $T = 4\pi$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = 2 \cos^2 x + 2017 = \cos 2x + 2018$.

Suy ra hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.

Câu 68: Tìm chu kì T của hàm số $y = 2 \sin^2 x + 3 \cos^2 3x$.

A. $T = \pi$.

B. $T = 2\pi$.

C. $T = 3\pi$.

D. $T = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = 2 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + 3 \cdot \frac{1 + \cos 6x}{2} = \frac{1}{2}(3 \cos 6x - 2 \cos 2x + 5)$.

Hàm số $y = 3 \cos 6x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Hàm số $y = -2 \cos 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \pi$.

Suy ra hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.Câu 69: Tìm chu kì T của hàm số $y = \tan 3x - \cos^2 2x$.

A. $T = \pi$.

B. $T = \frac{\pi}{3}$.

C. $T = \frac{\pi}{2}$.

D. $T = 2\pi$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = \tan 3x - \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{1}{2}(2 \tan 3x - \cos 4x - 1)$.

Hàm số $y = 2 \tan 3x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{\pi}{3}$.

Hàm số $y = -\cos 4x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Suy ra hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.Câu 70: Hàm số nào sau đây có chu kì khác π ?

A. $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$.

B. $y = \cos 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

C. $y = \tan(-2x + 1)$.

D. $y = \cos x \sin x$.

Lời giải

Chọn C

Vì $y = \tan(-2x + 1)$ có chu kì $T = \frac{\pi}{|-2|} = \frac{\pi}{2}$.

Nhận xét. Hàm số $y = \cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$ có chu kỳ là π .

Câu 71: Hàm số nào sau đây có chu kì khác 2π ?

A. $y = \cos^3 x$.

B. $y = \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

C. $y = \sin^2(x + 2)$.

D. $y = \cos^2\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$ có chu kì là 2π .

Hàm số $y = \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x$ có chu kì là 2π .

Hàm số $y = \sin^2(x+2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x+4)$ có chu kì là π .

Hàm số $y = \cos^2\left(\frac{x}{2}+1\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(x+2)$ có chu kì là 2π .

Câu 72: Hai hàm số nào sau đây có chu kì khác nhau?

A. $y = \cos x$ và $y = \cot \frac{x}{2}$.

B. $y = \sin x$ và $y = \tan 2x$.

C. $y = \sin \frac{x}{2}$ và $y = \cos \frac{x}{2}$.

D. $y = \tan 2x$ và $y = \cot 2x$.

Lời giải

Chọn B

Hai hàm số $y = \cos x$ và $y = \cot \frac{x}{2}$ có cùng chu kì là 2π .

Hai hàm số $y = \sin x$ có chu kì là 2π , hàm số $y = \tan 2x$ có chu kì là $\frac{\pi}{2}$.

Hai hàm số $y = \sin \frac{x}{2}$ và $y = \cos \frac{x}{2}$ có cùng chu kì là 4π .

Hai hàm số $y = \tan 2x$ và $y = \cot 2x$ có cùng chu kì là $\frac{\pi}{2}$.

Câu 73: Đồ thị hàm số $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ được suy từ đồ thị (C) của hàm số $y = \cos x$ bằng cách:

A. Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

B. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

C. Tịnh tiến (C) lên trên một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

D. Tịnh tiến (C) xuống dưới một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Nhắc lại lý thuyết

Cho (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $p > 0$, ta có:

+ Tịnh tiến (C) lên trên p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x) + p$.

+ Tịnh tiến (C) xuống dưới p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x) - p$.

+ Tịnh tiến (C) sang trái p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x + p)$.

+ Tịnh tiến (C) sang phải p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x - p)$.

Vậy đồ thị hàm số $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ được suy từ đồ thị hàm số $y = \cos x$ bằng cách tịnh tiến sang phải $\frac{\pi}{2}$ đơn vị.

Câu 74: Đồ thị hàm số $y = \sin x$ được suy từ đồ thị (C) của hàm số $y = \cos x$ bằng cách:

- A. Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
- B. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
- C. Tịnh tiến (C) lên trên một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
- D. Tịnh tiến (C) xuống dưới một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Câu 75: Đồ thị hàm số $y = \sin x$ được suy từ đồ thị (C) của hàm số $y = \cos x + 1$ bằng cách:

- A. Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và lên trên 1 đơn vị.
- B. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và lên trên 1 đơn vị.
- C. Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và xuống dưới 1 đơn vị.
- D. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và xuống dưới 1 đơn vị.

Lời giải

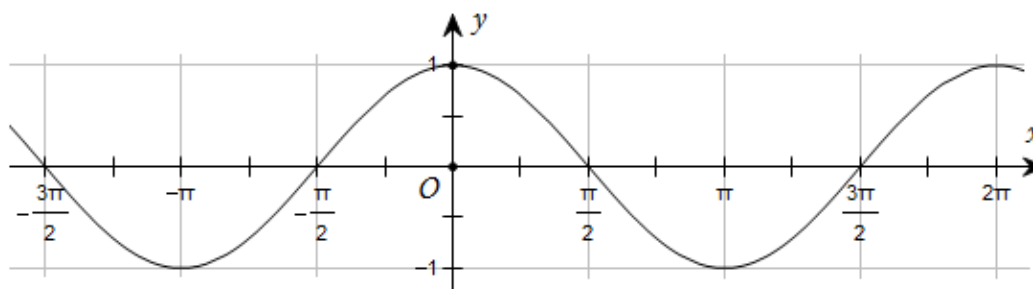
Chọn D

$$\text{Ta có } y = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

● Tịnh tiến đồ thị $y = \cos x + 1$ sang phải $\frac{\pi}{2}$ đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$.

● Tiếp theo tịnh tiến đồ thị $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ xuống dưới 1 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 76: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = 1 + \sin 2x$. B. $y = \cos x$. C. $y = -\sin x$. D. $y = -\cos x$.

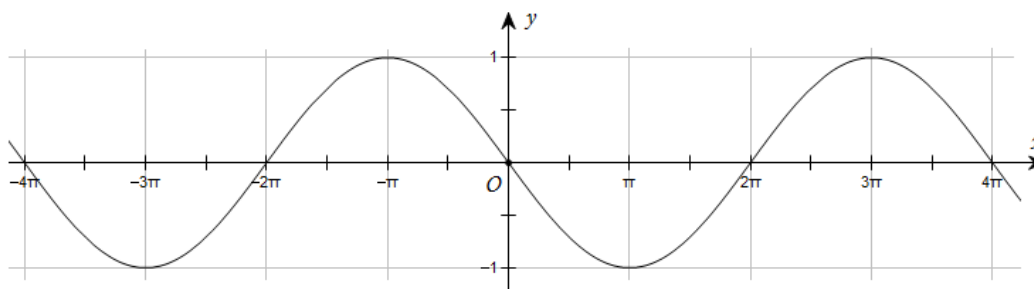
Lời giải

Chọn B

Ta thấy tại $x = 0$ thì $y = 1$. Do đó loại đáp án C và D

Tại $x = \frac{\pi}{2}$ thì $y = 0$. Do đó chỉ có đáp án B thỏa mãn.

Câu 77: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \sin \frac{x}{2}$. B. $y = \cos \frac{x}{2}$. C. $y = -\cos \frac{x}{4}$. D. $y = \sin \left(-\frac{x}{2} \right)$.

Lời giải

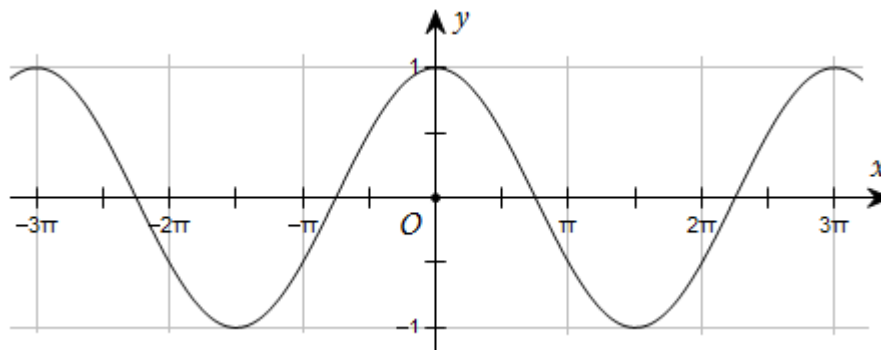
Chọn D

Ta thấy:

Tại $x = 0$ thì $y = 0$. Do đó loại B và C

Tại $x = \pi$ thì $y = -1$. Thay vào hai đáp án còn lại chỉ có D thỏa.

Câu 78: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \cos \frac{2x}{3}$. B. $y = \sin \frac{2x}{3}$. C. $y = \cos \frac{3x}{2}$. D. $y = \sin \frac{3x}{2}$.

Lời giải

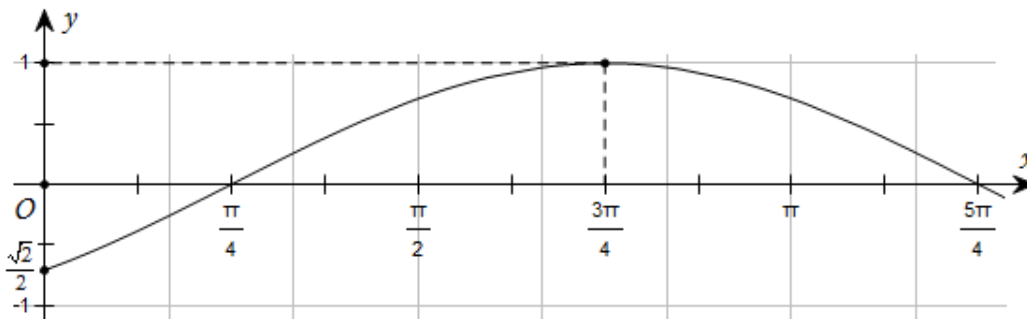
Chọn A

Ta thấy:

Tại $x=0$ thì $y=1$. Do đó ta loại đáp án B và D

Tại $x=3\pi$ thì $y=1$. Thay vào hai đáp án A và C thì chỉ có A thỏa mãn.

Câu 79: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$. B. $y = \cos \left(x + \frac{3\pi}{4} \right)$. C. $y = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$. D. $y = \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$.

Lời giải

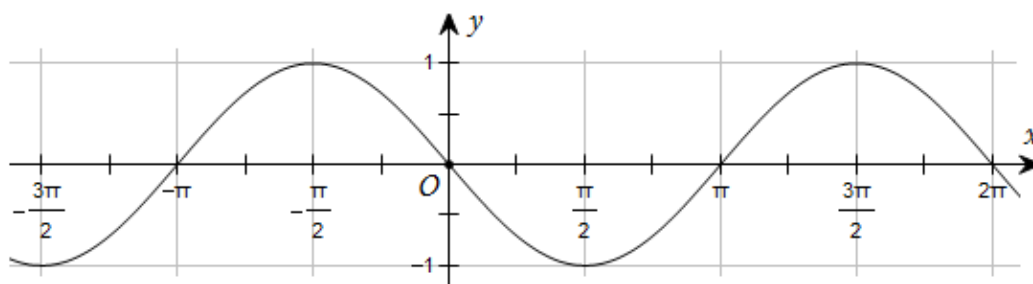
Chọn A

Ta thấy hàm số có GTLN bằng 1 và GTNN bằng -1. Do đó loại đáp án C

Tại $x=0$ thì $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Do đó loại đáp án D

Tại $x = \frac{3\pi}{4}$ thì $y=1$. Thay vào hai đáp án còn lại chỉ có A thỏa mãn.

Câu 80: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \sin x$. B. $y = |\sin x|$. C. $y = \sin|x|$. D. $y = -\sin x$.

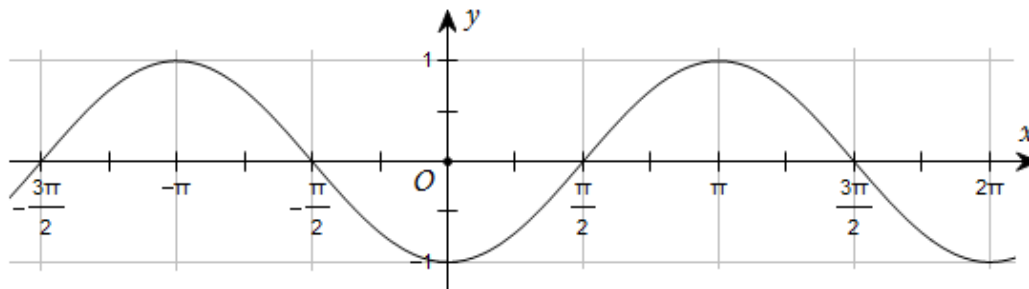
Lời giải

Chọn D

Ta thấy tại $x = 0$ thì $y = 0$. Cả 4 đáp án đều thỏa.

Tại $x = \frac{\pi}{2}$ thì $y = -1$. Do đó chỉ có đáp án D thỏa mãn.

Câu 81: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

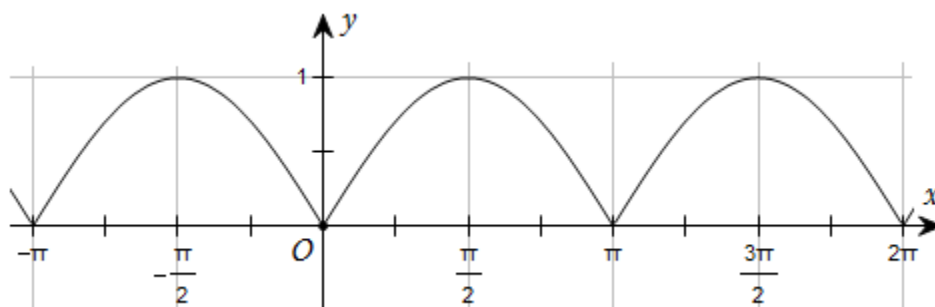
- A. $y = \cos x$. B. $y = -\cos x$ C. $y = \cos|x|$. D. $y = |\cos x|$.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy tại $x = 0$ thì $y = -1$. Do đó chỉ có đáp án B thỏa mãn.

Câu 82: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = |\sin x|$. B. $y = \sin|x|$. C. $y = \cos|x|$. D. $y = |\cos x|$.

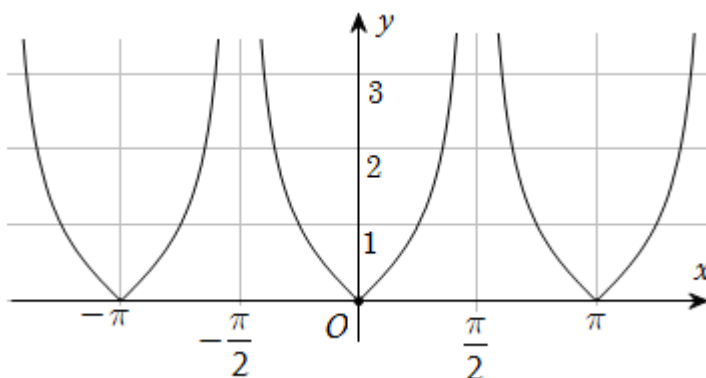
Lời giải

Chọn A

Ta thấy hàm số có GTNN bằng 0. Do đó chỉ có A hoặc D thỏa mãn.

Ta thấy tại $x=0$ thì $y=0$. Thay vào hai đáp án A và D chỉ có duy nhất A thỏa mãn.

Câu 83: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \tan x$. B. $y = \cot x$. C. $y = |\tan x|$. D. $y = |\cot x|$.

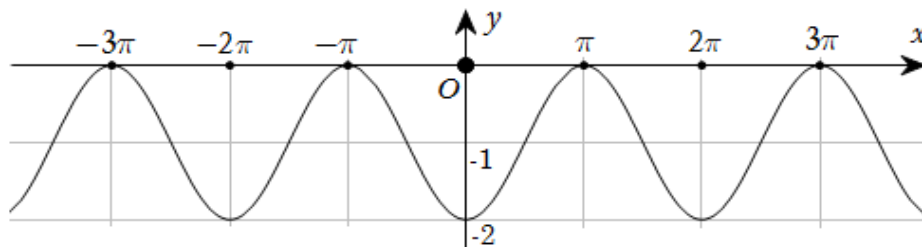
Lời giải

Chọn C

Ta thấy hàm số có GTNN bằng 0. Do đó ta loại đáp án A và B

Hàm số xác định tại $x=\pi$ và tại $x=\pi$ thì $y=0$. Do đó chỉ có C thỏa mãn.

Câu 84: .Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$. B. $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. C. $y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$. D. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$.

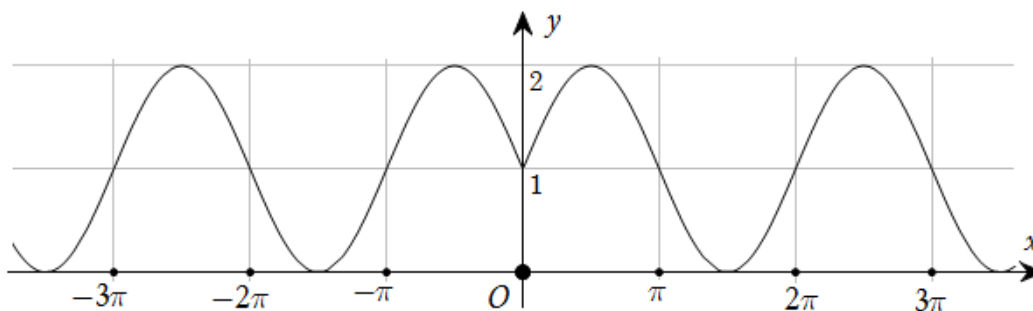
Lời giải

Chọn A

Ta thấy hàm số có GTLN bằng 0, GTNN bằng -2. Do đó ta loại đáp án B vì $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \in [-2; 2]$.

Tại $x = 0$ thì $y = -2$. Thử vào các đáp án còn lại chỉ có A thỏa mãn.

Câu 85: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = 1 + \sin|x|$. B. $y = |\sin x|$. C. $y = 1 + |\cos x|$. D. $y = 1 + |\sin x|$.

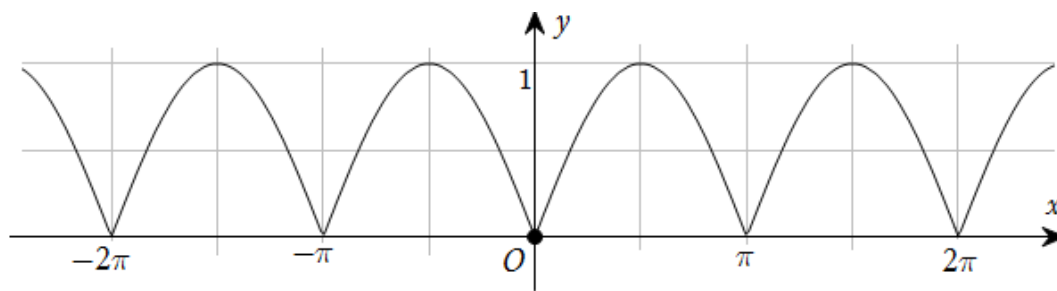
Lời giải

Chọn A

Ta có $y = 1 + |\cos x| \geq 1$ và $y = 1 + |\sin x| \geq 1$ nên loại C và D

Ta thấy tại $x = 0$ thì $y = 1$. Thay vào hai đáp án A và B thì chỉ có A thỏa mãn.

Câu 86: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = 1 + \sin|x|$. B. $y = |\sin x|$. C. $y = 1 + |\cos x|$. D. $y = 1 + |\sin x|$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = 1 + |\cos x| \geq 1$ và $y = 1 + |\sin x| \geq 1$ nên loại C và D

Ta thấy tại $x = \pi$ thì $y = 0$. Thay vào hai đáp án A và B thì chỉ có B thỏa.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 1

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Góc lượng giác nào tương ứng với chuyển động quay $3\frac{1}{5}$ vòng ngược chiều kim đồng hồ?

- A. $\frac{16\pi}{5}$. B. $\left(\frac{16}{5}\right)^\circ$. C. 1152° . D. 1152π .

Lời giải

Chọn C

Mỗi vòng kim đồng hồ quay là: 2π nên góc lượng giác quét được khi quay $3\frac{1}{5}$ vòng là:

$$3\frac{1}{5} \cdot 2\pi = 3.2\pi + \frac{2\pi}{5} \text{ rad.}$$

Khi đó điểm biểu diễn cho các góc lượng giác này có công thức số đo tổng quát là $\frac{2\pi}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Xét $\frac{16\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} + k2\pi \Leftrightarrow k = \frac{7}{5} \notin \mathbb{Z}$. Do đó góc này không tương ứng với góc đã cho.

Xét $\left(\frac{16}{5}\right)^\circ = \frac{\pi \cdot \frac{16}{5}}{180} = \frac{4\pi}{225} = \frac{2\pi}{5} + k2\pi \Leftrightarrow k = -\frac{43}{225} \notin \mathbb{Z}$. Do đó góc này không tương ứng với góc đã cho.

Xét $1152^\circ = \frac{\pi \cdot 1152}{180} = \frac{32\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} + k2\pi \Leftrightarrow k = 3 \in \mathbb{Z}$. Do đó góc này tương ứng với góc đã cho.

Xét $1152\pi = \frac{2\pi}{5} + k2\pi \Leftrightarrow k = \frac{2879}{5} \notin \mathbb{Z}$. Do đó góc này không tương ứng với góc đã cho.

Câu 2: Trong trường hợp nào dưới đây $\cos\alpha = \cos\beta$ và $\sin\alpha = -\sin\beta$?

- A. $\beta = -\alpha$. B. $\beta = \pi - \alpha$. C. $\beta = \pi + \alpha$. D. $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$.

Lời giải

Chọn A

+) Xét $\beta = -\alpha$, khi đó:

$$\cos\beta = \cos(-\alpha) = \cos\alpha; \quad \sin\beta = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \text{ hay } \sin\alpha = -\sin\beta.$$

Do đó A thỏa mãn.

+) Xét $\beta = \pi - \alpha$, khi đó:

$$\cos\beta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha; \quad \sin\beta = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha.$$

Do đó B không thỏa mãn.

+) Xét $\beta = \pi + \alpha$, khi đó:

$$\cos\beta = \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha; \sin\beta = \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha.$$

Do đó C không thỏa mãn.

+) Xét $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$, khi đó:

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha; \sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$$

Do đó D không thỏa mãn.

Câu 3: Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn.

B. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

C. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số chẵn.

D. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số chẵn.

Lời giải

Chọn B

Ta có tập xác định của hàm số $y = \cos x$ là $\mathbb{R}$.

Nếu với $x \in \mathbb{R}$ thì $-x \in \mathbb{R}$ và $y(-x) = \cos(-x) = \cos x = y(x)$.

Vậy hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

Câu 4: Nghiệm âm lớn nhất của phương trình lượng giác $\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ là

A. $-\frac{\pi}{9}$.

B. $-\frac{5\pi}{3}$.

C. $-\frac{7\pi}{9}$.

D. $-\frac{13\pi}{9}$.

Lời giải

Chọn A

$$\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

+) Với $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ đạt giá trị âm lớn nhất khi $k = -1$ và bằng: $\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$.

+) Với $x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ đạt giá trị âm lớn nhất khi $k = 0$ và bằng: $-\frac{\pi}{9} + 0 \cdot \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{9}$.

Vậy nghiệm âm lớn nhất của phương trình đã cho là $-\frac{\pi}{9}$.

Câu 5: Số nghiệm của phương trình $\tan x = 3$ trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{3}\right)$ là

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $\tan x = 3$

$$\Leftrightarrow x \approx 1,25 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Xét: } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < 1,25 + k\pi < \frac{7\pi}{3} \Leftrightarrow -0,9 < k < 1,94.$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1\}$.

Vậy có 2 nghiệm của phương trình đã cho nằm trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{3}\right)$.

Câu 6: Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t) = 29 + 3\sin \frac{\pi}{12}(t-9)$$

với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là bao nhiêu độ C và vào lúc mấy giờ?

(Theo <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168192385900139>)

- A. 32°C , lúc 15 giờ. B. 29°C , lúc 9 giờ.
C. 26°C , lúc 3 giờ. D. 26°C , lúc 0 giờ.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Vì } -1 \leq \sin \frac{\pi}{12}(t-9) \leq 1 \text{ nên } 29 + 3 \cdot (-1) \leq 29 + 3\sin \frac{\pi}{12}(t-9) \leq 29 + 3 \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow 26 \leq 29 + 3\sin \frac{\pi}{12}(t-9) \leq 32$$

$$\Leftrightarrow 26 \leq h(t) \leq 32$$

Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là 26°C khi:

$$29 + 3\sin \frac{\pi}{12}(t-9) = 26 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{12}(t-9) = -1$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{12}(t-9) = \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12}(t-9) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = 3 + 24k, k \in \mathbb{Z}$$

Vì vậy vào thời điểm 3 giờ trong ngày thì nhiệt độ thấp nhất của thành phố là 26°C .

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 7: Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 45 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều thuận. Sau 3 giây, quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

Lời giải

$$\text{Tốc độ góc của quạt trần là: } \frac{45 \cdot 2\pi}{60} = \frac{3\pi}{2} (\text{rad/s}).$$

$$\text{Sau 3 giây, quạt quay được một góc có số đo là: } \frac{3\pi}{2} \cdot 3 = \frac{9\pi}{2} \text{ rad.}$$

Câu 8: Cho $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Tính:

a) $\sin \alpha$; b) $\sin 2\alpha$; c) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$.

Lời giải

$$\text{a) } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\text{vì } -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \right).$$

$$\text{b) } \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

$$\text{c) } \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{6} + 1}{6}.$$

Câu 9: Chứng minh đẳng thức lượng giác:

a) $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$; b) $\cos^4 \alpha - \cos^4\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2\alpha$.

Lời giải

$$\text{a) } \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta - \alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta + \alpha - \beta)] \\ &= \frac{1}{2} (\cos 2\beta - \cos 2\alpha) = \frac{1}{2} (1 - 2\sin^2 \beta - 1 + 2\sin^2 \alpha) \\ &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } \cos^4 \alpha - \cos^4\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Câu 10: Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin 2x = 0$ là bao nhiêu?

Lời giải

Xét phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \pi - x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Với họ nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ có nghiệm dương bé nhất là $x = \frac{\pi}{6}$ khi $k = 0$.

Với họ nghiệm $x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}$ có nghiệm dương bé nhất là $x = \frac{5\pi}{18}$ khi $k = 0$.

Vậy nghiệm dương bé nhất của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{6}$.

Câu 11: Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x + \cos 3x = 0$;

b) $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$;

c) $\sin x + \sin 2x = 0$.

Lời giải

a) $\sin 2x + \cos 3x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - 3x + k2\pi \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{2} + 3x + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \left(\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}; -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$.

b) $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left(\frac{\pi}{8} + k\pi; \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$.

c) $\sin x + \sin 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\sin 2x \Leftrightarrow \sin x = \sin(-2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2x + k2\pi \\ x = \pi + 2x + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\pi + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left(k\frac{2\pi}{3}; -\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$.

Câu 12: Độ sâu h (m) của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thủy triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0,8\cos 0,5t + 4$.

(Theo <https://noc.ac.uk/files/documents/business/an-introduction-to-tidalmodelling.pdf>)

- a) Độ sâu của nước vào thời điểm $t = 2$ là bao nhiêu mét?
 b) Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu 3,6 m để có thể đi chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số cosin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thủy triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thủy. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

a) Tại thời điểm $t = 2$ độ sâu của nước là: $h(2) = 0,8\cos 0,5 \cdot 2 + 4 \approx 4,43$ m.

Vậy độ sâu của nước ở thời điểm $t = 2$ là khoảng 4,43 m.

b) Các thời điểm để mực nước sâu là 3,6 m tương ứng với phương trình $0,8\cos 0,5t + 4 = 3,6$

+) Với $t = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, trong 12 tiếng ta có các thời điểm

$$0 \leq \frac{4\pi}{3} + k2\pi \leq 12 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq k \leq 1,24$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1\}$.

+) Với $t = -\frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, trong 12 tiếng ta có các thời điểm

$$0 \leq -\frac{4\pi}{3} + k2\pi \leq 12 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq k \leq 1,24.$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 1$.

Vậy tại các thời điểm $t = \frac{4\pi}{3}, t = \frac{10\pi}{3}, t = \frac{2\pi}{3}$ giờ thì tàu có thể hạ thủy.

Câu 13: Cho vận tốc v (cm/s) của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức

$$v = -3\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right)$$

(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)

Xác định các thời điểm t mà tại đó:

- a) Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất; b) Vận tốc con lắc bằng 1,5 cm/s.

Lời giải

$$a) \sqrt{1} - 1 \leq \sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \text{ nên } -3 \leq -3\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) \leq 3$$

Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất khi $\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow 1,5t + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = -\frac{5\pi}{9} + k\frac{4\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Vi vậy vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất tại các thời điểm $t_1 = \frac{7\pi}{9}; t_2 = \frac{19\pi}{9}; t_3 = \frac{31\pi}{9}; \dots$

b) Để vận tốc con lắc bằng $1,5 \text{ cm/s}$ thì $v = -3\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) = 1,5$

$$\Leftrightarrow \sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Dựa vào đồ thị hàm số sin ta có:

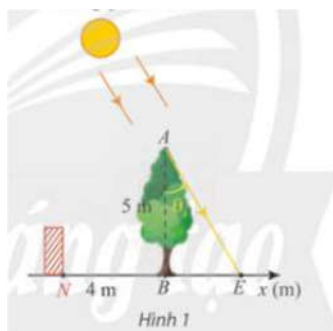
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1,5t + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 1,5t + \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{\pi}{3} + k\frac{4\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ t = -\frac{7\pi}{9} + k\frac{4\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in \left\{\pi; \frac{7\pi}{3}; \dots\right\} \\ t \in \left\{\frac{5\pi}{9}; \frac{17\pi}{9}; \dots\right\} \end{cases}$$

Vậy sau các thời điểm $t_1 = \frac{5\pi}{9}, t_2 = \pi, t_3 = \frac{17\pi}{9}, t_4 = \frac{7\pi}{3}, \dots$ thì vận tốc của con lắc đạt $1,5 \text{ cm/s}$.

Câu 14: Trong Hình 1, cây xanh AB nằm trên đường xích đạo được trồng vuông góc với mặt đất và có chiều cao 5 m . Bóng của cây là BE . Vào ngày xuân phân và hạ phân, điểm E di chuyển trên đường thẳng Bx . Góc thiên đỉnh $\theta_x = (AB, AE)$ phụ thuộc vào vị trí của Mặt Trời và thay đổi theo thời gian trong ngày theo công thức

$$\theta_s(t) = \frac{\pi}{12}(t-12)\text{rad}$$

với t là thời gian trong ngày (theo đơn vị giờ, $6 < t < 18$).



(Theo <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/solar-hour-angle>)

a) Viết hàm số biểu diễn tọa độ của điểm E trên trục Bx theo t .

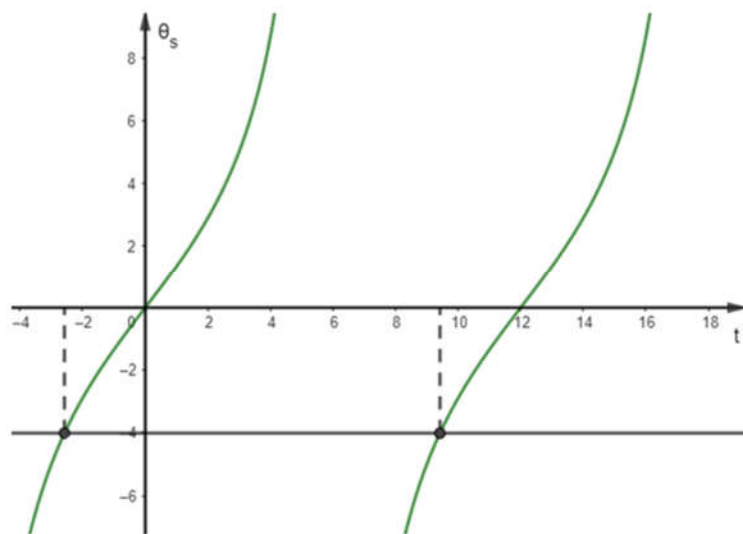
b) Dựa vào đồ thị hàm số tang, hãy xác định các thời điểm mà tại đó bóng cây phủ qua vị trí tường rào N biết N nằm trên trục Bx với toạ độ là $x_N = -4$ (m). Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) Xét tam giác ABE vuông tại B, có:

$$\tan \theta_s(t) = \frac{BE}{AB} \Leftrightarrow BE = 5 \tan \left(\frac{\pi}{12}(t-12) \right).$$

b) Đồ thị của hàm số $\theta_s = 5 \tan \left(\frac{\pi}{12}(t-12) \right)$



Dựa vào đồ thị hàm số để $\theta_s = 5 \tan \left(\frac{\pi}{12}(t-12) \right) < -4$ và $6 < t < 18$ suy ra các thời điểm để bóng cây phủ qua hàng rào N là $6 < t < 9,4$.

BÀI TẬP TỔNG ÔN CHƯƠNG 1

PHẦN 1: TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cung có số đo 250° thì có số đo theo đơn vị là radian là

A. $\frac{25\pi}{12}$.

B. $\frac{25\pi}{18}$.

C. $\frac{25\pi}{9}$.

D. $\frac{35\pi}{18}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $250^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 250 = \frac{25\pi}{18}$.

- Câu 2:** Nếu một cung tròn có số đo bằng radian là $\frac{5\pi}{4}$ thì số đo bằng độ của cung tròn đó là
- A. 172° . B. 15° . C. 225° . D. 5° .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } a^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{4} = 225^\circ.$$

- Câu 3:** Một cung tròn có độ dài bằng bán kính. Khi đó số đo bằng radian của cung tròn đó là
- A. 1. B. π . C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn A

Theo định nghĩa 1 radian là số đo của cung có độ dài bằng bán kính.

- Câu 4:** Trên đường tròn bán kính bằng 4, cung có số đo $\frac{\pi}{8}$ thì có độ dài là
- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{\pi}{16}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Cung có số đo α rad của đường tròn bán kính R có độ dài $l = R\alpha$.

$$\text{Vậy } \alpha = \frac{\pi}{8}; R = 4 \text{ thì } l = R\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

- Câu 5:** Trên đường tròn bán kính $R = 6$, cung 60° có độ dài bằng bao nhiêu?
- A. $l = \frac{\pi}{2}$. B. $l = 4\pi$. C. $l = 2\pi$. D. $l = \pi$.

Lời giải

Chọn C

$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

Ta có: cung có số đo α rad của đường tròn có bán kính R có độ dài $l = R\alpha$.

$$\text{Do đó cung } 60^\circ \text{ có độ dài bằng } l = 6 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi.$$

- Câu 6:** Trên đường tròn lượng giác, điểm M thỏa mãn $(Ox, OM) = 500^\circ$ thì nằm ở góc phần tư thứ
- A. I. B. II. C. III. D. IV.

Lời giải

Chọn B

Điểm M thỏa mãn $(Ox, OM) = 500^\circ$ thì nằm ở góc phần tư thứ II vì $500^\circ - 360^\circ = 140^\circ \in (90^\circ; 180^\circ)$.

Câu 7: Bánh xe của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 5 giây. Hỏi trong 1 giây, bánh xe quay được một góc bao nhiêu độ?

- A. 144° . B. 288° . C. 36° . D. 72° .

Lời giải

Chọn A

Ta có: trong 5 giây quay được $2 \times 360^\circ = 720^\circ$.

Vậy trong 1 giây quay được: $\frac{720^\circ}{5} = 144^\circ$.

Câu 8: Cho góc α thỏa mãn $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\tan \alpha < 0$. B. $\cot \alpha > 0$. C. $\sin \alpha > 0$. D. $\cos \alpha > 0$.

Lời giải

Chọn A

Với $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$ ta có $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$, $\tan \alpha > 0$, $\cot \alpha > 0$.

Câu 9: Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$.

- A. $\cot \alpha = \frac{1}{2}$. B. $\cot \alpha = \sqrt{2}$. C. $\cot \alpha = 2$. D. $\cot \alpha = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Leftrightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = 2$.

Câu 10: Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau đây?

- A. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ$. B. $\cos 45^\circ \leq \sin 45^\circ$. C. $\sin 60^\circ < \sin 80^\circ$. D. $\cos 35^\circ > \cos 10^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Khi $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ hàm $\cos \alpha$ là hàm giảm nên $\cos 35^\circ < \cos 10^\circ$ suy ra D sai.

Câu 11: Cho $\sin a = \frac{1}{3}$ với $\frac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính $\cos a$.

- A. $\cos a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. $\cos a = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. C. $\cos a = \frac{8}{9}$. D. $\cos a = -\frac{8}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = 1 - \sin^2 a = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos a = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\cos a = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 12: Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ và $(90^\circ < \alpha < 180^\circ)$. Tính $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = -\frac{5}{4}$. B. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$. C. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. D. $\cos \alpha = \frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn B

$$+ \text{ Ta có: } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}.$$

+ Mặt khác $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha < 0$.

$$+ \text{ Vậy } \cos \alpha = -\frac{4}{5}.$$

Câu 13: Với mọi góc a và số nguyên k , chọn đẳng thức **sai**?

- A. $\sin(a + k2\pi) = \sin a$. B. $\cos(a + k\pi) = \cos a$.
C. $\tan(a + k\pi) = \tan a$. D. $\cot(a - k\pi) = \cot a$.

Lời giải

Chọn B

Câu 14: Chọn khẳng định đúng?

- A. $\tan(\pi - \alpha) = \tan \alpha$. B. $\sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha$.
C. $\cot(\pi - \alpha) = \cot \alpha$. D. $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$.

Lời giải

Chọn D

$\tan(\pi - \alpha) = \tan \alpha$ sai vì $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$; $\sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha$ sai vì $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$;

$\cot(\pi - \alpha) = \cot \alpha$ sai vì $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$.

Câu 15: Biểu thức $A = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ$ có giá trị bằng

- A. $A = 9$. B. $A = 3$. C. $A = 12$. D. $A = 6$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha \Rightarrow \cos^2(90^\circ + \alpha) = \sin^2 \alpha$.

Suy ra $A = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ = (\cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ) + \dots + (\cos^2 90^\circ + \sin^2 90^\circ)$

$$\Leftrightarrow A = 1 + \dots + 1 = 9.$$

Câu 16: Trong tam giác ABC , đẳng thức nào dưới đây luôn đúng?

- A. $\sin(A + B) = \cos C$. B. $\cos A = \sin B$.
C. $\tan A = \cot\left(B + \frac{\pi}{2}\right)$. D. $\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos \frac{A+B}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) = \sin \frac{C}{2}$.

Câu 17: Cho A, B, C là 3 góc của một tam giác. Đặt $M = \cos(2A+B+C)$ thì:

- A. $M = -\cos A$. B. $M = \cos A$. C. $M = \sin A$. D. $M = -\sin A$.

Lời giải

Chọn A

Ta có A, B, C là 3 góc của một tam giác $\Rightarrow A+B+C=180^\circ \Rightarrow 2A+B+C=180^\circ+A$.

Từ đó ta có $M = \cos(2A+B+C) \Leftrightarrow M = \cos(A+180^\circ) \Leftrightarrow M = -\cos A$.

Vậy $M = -\cos A$.

Câu 18: Biểu thức $\sin\left(a+\frac{\pi}{6}\right)$ được viết lại

- A. $\sin\left(a+\frac{\pi}{6}\right) = \sin a + \frac{1}{2}$. B. $\sin\left(a+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\sin a - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos a$.
C. $\sin\left(a+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a - \frac{1}{2}\cos a$. D. $\sin\left(a+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a + \frac{1}{2}\cos a$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sin\left(a+\frac{\pi}{6}\right) = \sin a \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos a \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\cos a + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin a$.

Câu 19: Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. $\cos 2a = 2\cos a - 1$. B. $2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$.
C. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$. D. $\sin 2a = 2\sin a \cos a$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ nên A sai.

Và: $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \Leftrightarrow 2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$ nên B đúng.

Các đáp án C và D hiển nhiên đúng.

Câu 20: Cho $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Khi đó, $\cos 2\alpha$ bằng

- A. $-\frac{1}{8}$. B. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. C. $-\frac{\sqrt{7}}{4}$. D. $\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn A

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{1}{8}.$$

Câu 21: Biểu thức $\frac{\sin 10^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ + \cos 20^\circ}$ bằng

- A. $\tan 10^\circ + \tan 20^\circ$. B. $\tan 30^\circ$. C. $\cot 10^\circ + \cot 20^\circ$. D. $\tan 15^\circ$.

Lời giải

Chọn D

$$\frac{\sin 10^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ + \cos 20^\circ} = \frac{2 \sin 15^\circ \cos 5^\circ}{2 \cos 15^\circ \cos 5^\circ} = \tan 15^\circ.$$

Câu 22: Tập xác định của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là:

- A. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}$. B. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$.
C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}$. D. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho xác định khi $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 23: Hàm số $y = \sin 2x$ có chu kỳ là

- A. $T = 2\pi$. B. $T = \frac{\pi}{2}$. C. $T = \pi$. D. $T = 4\pi$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$ nên hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

Câu 24: Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ. B. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.
C. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ. D. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

Lời giải

Chọn A

Ta có các kết quả sau:

- + Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
- + Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.
- + Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.
- + Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

Câu 25: Phương trình lượng giác $2 \cot x - \sqrt{3} = 0$ có nghiệm là:

A.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \end{cases}.$$

B. $x = \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi.$

C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi.$

D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $2 \cot x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cot x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 26: Phương trình nào dưới đây vô nghiệm:

A. $\sin x + 3 = 0.$

B. $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$

C. $\tan x + 3 = 0.$

D. $3 \sin x - 2 = 0.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên đáp án A là đáp án cần tìm vì $\sin x = -3$.

Câu 27: Cho hai phương trình $\cos 3x - 1 = 0$; $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. Tập các nghiệm của phương trình đồng thời là nghiệm của phương trình là

A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

D. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = 1 \Leftrightarrow x = k \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Biểu diễn các nghiệm trên đường tròn lượng giác ta có tập các nghiệm của phương trình đồng thời là nghiệm của phương trình là $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 28: Tìm số đo ba góc của một tam giác cân biết rằng có số đo của một góc là nghiệm của phương trình $\cos 2x = -\frac{1}{2}.$

A. $\left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right\}.$

B. $\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}; \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right\}.$

C. $\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}; \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right\}.$

D. $\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Do số đo một góc là nghiệm nên $x = \frac{\pi}{3}$ hoặc $x = \frac{2\pi}{3}$ thỏa mãn.

Vậy tam giác có số đo ba góc là: $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$ hoặc $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$.

Câu 29: Phương trình $2\cos x - \sqrt{2} = 0$ có tất cả các nghiệm là

- | | |
|--|--|
| <p>A. $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$</p> | <p>B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$</p> |
| <p>C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$</p> | <p>D. $\begin{cases} x = \frac{7\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$</p> |

Lời giải

Chọn B

$$2\cos x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 30: Phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ có các nghiệm là

- | | |
|--|--|
| <p>A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$</p> | <p>B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$</p> |
| <p>C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$</p> | <p>D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$</p> |

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } 2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 31: Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

PHẦN 2: TỰ LUẬN

Câu 32: Rút gọn biểu thức $S = \sin\left(x + \frac{2017\pi}{2}\right) + 2\sin^2(x - \pi) + \cos(x + 2019\pi) + \cos 2x$

Lời giải

$$\begin{aligned} S &= \sin\left(x + \frac{2017\pi}{2}\right) + 2\sin^2(x - \pi) + \cos(x + 2019\pi) + \cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin^2 x - \cos x + \cos 2x \\ &= \cos x + 1 - \cos 2x - \cos x + \cos 2x = 1. \end{aligned}$$

Câu 33: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\sin^4 x + \cos^7 x$

Lời giải

Vì $-1 \leq \cos x \leq 1$, ta có: $\sin^4 x + \cos^7 x \leq \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \leq 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $\sin^4 x + \cos^7 x$ là 1.

Câu 34: Nếu α là góc nhọn và $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{x-1}{2x}}$ thì $\tan \alpha$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $0 < \alpha < 90^\circ \Leftrightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} < 45^\circ \Rightarrow 0 < \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 0 < \sqrt{\frac{x-1}{2x}} < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x > 0$

$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$, vì $0 < \frac{\alpha}{2} < 45^\circ$

$\Leftrightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{x+1}{2x}} \Rightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1 - \frac{x-1}{x+1}} = \sqrt{x^2 - 1}.$

Câu 35: Chứng minh biểu thức $\sin^2 x \cdot \tan x + 4\sin^2 x - \tan^2 x + 3\cos^2 x$ không phụ thuộc vào x

Lời giải

$\sin^2 x \cdot \tan^2 x + 4\sin^2 x - \tan^2 x + 3\cos^2 x = (\sin^2 x - 1)\tan^2 x + 4\sin^2 x + 3\cos^2 x.$

$$= -\cos^2 x \cdot \tan^2 x + 4\sin^2 x + 3\cos^2 x = -\sin^2 x + 4\sin^2 x + 3(1 - \sin^2 x) = 3.$$

Câu 36: Cho các góc α, β thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \pi, \sin \alpha = \frac{1}{3}, \cos \beta = -\frac{2}{3}$. Tính $\sin(\alpha + \beta)$.

Lời giải

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \pi \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha < 0 \\ \sin \beta > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Suy ra } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{2 + 2\sqrt{10}}{9}.$$

$$\text{Vậy } \sin(\alpha + \beta) = -\frac{2 + 2\sqrt{10}}{9}.$$

Câu 37: Với giá trị nào của n thì đẳng thức sau luôn đúng $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x}}} = \cos \frac{x}{n},$

$$0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Hướng dẫn giải

Vì $0 < x < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \frac{x}{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos \frac{x}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos \frac{x}{4}} = \cos \frac{x}{8}$$

Vậy $n = 8$.

Câu 38: Cho ΔABC có các cạnh $BC = a, AC = b, AB = c$ thỏa mãn hệ thức $\frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} = \frac{2a + c}{2a - c}$.

Hãy nhận dạng ΔABC .

Lời giải

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Ta có:

$$\frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} = \frac{2a + c}{2a - c} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} = \frac{2 \cdot 2R \sin A + 2R \sin C}{2 \cdot 2R \sin A - 2R \sin C} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} = \frac{2 \sin A + \sin C}{2 \sin A - \sin C}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin A + 2 \sin A \cos B - \sin C - \sin C \cos B = 2 \sin A - 2 \sin A \cos B + \sin C - \sin C \cos B$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin A \cos B = 2 \sin C$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 2 \cdot \frac{c}{2R}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + c^2 - b^2 = c^2$$

$$\Leftrightarrow a = b.$$

Vậy ΔABC cân tại C .

Câu 39: Số nghiệm của phương trình $\sin(2x - 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ với $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ$ là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có :

$$\sin(2x - 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin(2x - 40^\circ) = \sin 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 40^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ 2x - 40^\circ = 180^\circ - 60^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 100^\circ + k360^\circ \\ 2x = 160^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50^\circ + k180^\circ \\ x = 80^\circ + k180^\circ \end{cases}$$

□ Xét nghiệm $x = 50^\circ + k180^\circ$.

$$\text{Ta có : } -180^\circ \leq x \leq 180^\circ \Leftrightarrow -180^\circ \leq 50^\circ + k180^\circ \leq 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{23}{18} \leq k \leq \frac{13}{18}.$$

$$\text{Vì } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } \begin{cases} k = -1 \Rightarrow x = -130^\circ \\ k = 0 \Rightarrow x = 50^\circ \end{cases}.$$

□ Xét nghiệm $x = 80^\circ + k180^\circ$.

$$\text{Ta có : } -180^\circ \leq x \leq 180^\circ \Leftrightarrow -180^\circ \leq 80^\circ + k180^\circ \leq 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{13}{9} \leq k \leq \frac{5}{9}.$$

$$\text{Vì } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } \begin{cases} k = -1 \Rightarrow x = -100^\circ \\ k = 0 \Rightarrow x = 80^\circ \end{cases}.$$

Vậy có tất cả 4 nghiệm thỏa mãn bài toán.