

(Đề thi có 01 trang, gồm 05 câu)

Câu 1.

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3(1+2y)=1 \\ x(y^3-1)=2. \end{cases}$$

b) Giải phương trình
$$\sqrt{x+1}-\sqrt{2-2x}=\frac{6x-2}{\sqrt{9x^2+4}}.$$

Câu 2.

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình sau có nghiệm:

$$\sqrt{x-1}-2\sqrt{x^2-x}+m\sqrt{x}\leq 0.$$

Câu 3.

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC và N là điểm thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AC=4AN$. Đường thẳng DM có phương trình $y-1=0$ và $N\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$. Xác định tọa độ điểm A.

Câu 4.

a) Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AA_1 , BB_1 , CC_1 đồng quy tại H ($A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$). Biết $AA_1=2\sqrt{2}$, $CC_1=3$ và $HB=5HB_1$. Tính tích $\cot A \cdot \cot C$ và diện tích tam giác ABC.

b) Cho a, b, c là các số thực không âm có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+abc\geq 4.$$

Câu 5.

Tập hợp X có 2^n ($n \in \mathbb{N}^*$) phần tử được chia thành các tập con đôi một không giao nhau. Xét quy tắc chuyển phần tử giữa các tập như sau: nếu A, B là các tập con của X và số phần tử của A không nhỏ hơn số phần tử của B thì ta được phép chuyển từ tập A vào tập B số phần tử bằng số phần tử của tập B . Chứng minh rằng sau một số hữu hạn các bước chuyển theo quy tắc trên, ta nhận được tập X .

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

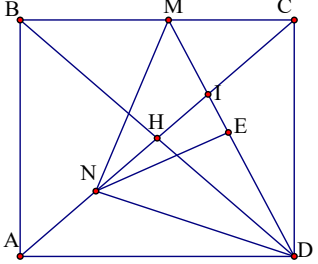
Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

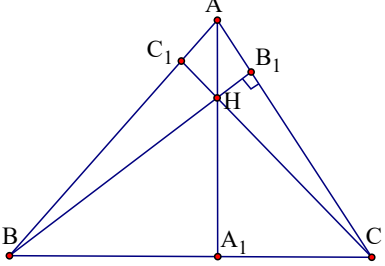
HƯỚNG DẪN CHẤM

(Hướng dẫn chấm gồm 3 trang)

Lưu ý: Mọi cách giải khác gọn và đúng đều cho điểm tương ứng.

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1a 3 điểm	Nhận xét: $x = 0$ không thoả mãn. Với $x \neq 0$, ta có hệ $\begin{cases} 1 + 2y = \frac{1}{x^3} \\ y^3 - 1 = \frac{2}{x} \end{cases}$	
	Đặt $\frac{1}{x} = t$, hệ trở thành $\begin{cases} 1 + 2y = t^3 \\ 1 + 2t = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - t)(y^2 + yt + t^2 + 2) = 0 & (1) \\ 1 + 2t = y^3 & (2) \end{cases}$	
	Do $y^2 + yt + t^2 + 2 > 0$, suy ra từ (1) ta có $y = t$	
	Thay vào (2) ta có $y^3 - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow (y + 1)(y^2 - y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$	
	Với $y = -1$, suy ra $x = -1$	
	Với $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, suy ra $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$;	
	Với $y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, suy ra $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$	
Câu 1b 3 điểm	Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$ $\sqrt{x+1} - \sqrt{2-2x} = \frac{6x-2}{\sqrt{9x^2+4}} \Leftrightarrow \frac{3x-1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2-2x}} = \frac{6x-2}{\sqrt{9x^2+4}}$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1=0 \\ 2(\sqrt{x+1} + \sqrt{2-2x}) = \sqrt{9x^2+4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ 2(\sqrt{x+1} + \sqrt{2-2x}) = \sqrt{9x^2+4} & (2) \end{cases}$	
	$(2) \Leftrightarrow 4(3-x+2\sqrt{2(1-x^2)}) = 9x^2+4$	
	$\Leftrightarrow 9x^2-8=4[2\sqrt{2(1-x^2)}-x] \quad (3)$	
	Nhân hai vế của (3) với $[2\sqrt{2(1-x^2)}+x]$, ta suy ra: $(9x^2-8)[2\sqrt{2(1-x^2)}+x] = 4[4.2(1-x^2)-x^2] \Leftrightarrow (9x^2-8)[2\sqrt{2(1-x^2)}+x+4] = 0$	
	Do $-1 \leq x \leq 1$, suy ra $2\sqrt{2(1-x^2)}+x+4 > 0$, từ đó ta có $9x^2-8=0 \Leftrightarrow x = \frac{\pm 2\sqrt{2}}{3}$	
	Thay vào phương trình (3) ta thấy $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ thoả mãn	
	Kết luận: Tập nghiệm của phương trình $S = \left\{ \frac{1}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3} \right\}$	

Câu 2 3 điểm	Điều kiện $x \geq 1$. Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{x}$, ta có $\sqrt{\frac{x-1}{x}} - 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x}} + m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\sqrt{\frac{x-1}{x}} + 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x}}$.							
	Đặt $t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x}}$, Ta có bất phương trình $m \leq -t^2 + 2t$							
	Do $x \geq 1$, suy ra $t \geq 0$. Ta có $\frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} < 1$, suy ra $t < 1$, vậy $t \in [0; 1)$							
	<table><tr><td>t</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>f(t)</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	t	0	1	f(t)	0	1	Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t$ trên $[0; 1)$ Từ bảng biến thiên suy ra $m < 1$ Nếu HS thiếu $t < 1$ mà vẫn kết luận $m < 1$ thì trừ 1,0 điểm của câu này
	t	0	1					
f(t)	0	1						
HS có thể đặt $g(t) = t^2 - 2t + m$, xét $\Delta = 1 - m$ TH1 $\Delta < 0$, suy ra $m > 1$, khi đó $g(t) \leq 0$ vô nghiệm. TH2 $\Delta \geq 0$, suy ra $m \leq 1$, gọi t_1, t_2 là nghiệm, $g(t) \leq 0 \Leftrightarrow t_1 \leq t \leq t_2$. Nhận xét $t_2 \geq 1$, suy ra $g(t) \leq 0$ có nghiệm thuộc $[0; 1)$ khi và chỉ khi $t_1 < 1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{1 - m} < 1 \Rightarrow m \neq 1$. Suy ra $m < 1$								
Câu 3 3 điểm		E là hình chiếu của N trên MD, suy ra đường thẳng $NE: x - \frac{1}{2} = 0$, suy ra $E\left(\frac{1}{2}; 1\right)$						
		Gọi a là độ dài cạnh của hình vuông. Suy ra $MD = \sqrt{MC^2 + CD^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{\sqrt{5}a}{2}$ (1)						
	$AC = \sqrt{2}a$, $AN = \frac{1}{4}AC \Rightarrow NC = \frac{3}{4}AC = \frac{3\sqrt{2}a}{4}$							
	Ta có $MN^2 = MC^2 + NC^2 - 2MC.NC.\cos 45^\circ = \frac{10a^2}{16} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{10}}{4}$ (2).							
	Tương tự ta có $ND = \frac{a\sqrt{10}}{4}$ (3) Từ (1), (2) và (3) suy ra tam giác NMD vuông cân tại N.							
	Gọi tọa độ điểm $D(d; 1)$, ta có $ED = EN = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \left d - \frac{1}{2}\right = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ d = -2 \end{cases}$ Suy ra $D(3; 1)$ hoặc $D(-2; 1)$							
	Trường hợp 1. $D(3; 1)$. Do E là trung điểm MD, suy ra $M(-2; 1)$, Ta có $\overline{MI} = \frac{1}{3}\overline{MD} = \left(\frac{5}{3}; 0\right) \Rightarrow I\left(\frac{-1}{3}; 1\right)$ Chứng minh $\overline{AN} = \frac{3}{5}\overline{NI}$; Ta có $\overline{NI} = \left(\frac{-5}{6}; \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \overline{AN} = \left(\frac{-1}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow A(1; -3)$							
	Trường hợp 2. $D(-2; 1)$, E là trung điểm MD, suy ra $M(3; 1)$ Ta có $\overline{MI} = \frac{1}{3}\overline{MD} = \left(\frac{-5}{3}; 0\right) \Rightarrow I\left(\frac{4}{3}; 1\right)$ Từ $\overline{AN} = \frac{3}{5}\overline{NI}$ mà $\overline{NI} = \left(\frac{5}{6}; \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \overline{AN} = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \Rightarrow A(0; -3)$							

Câu 4a 3 điểm		Ta có $\frac{HB}{HB_1} = 5 \Leftrightarrow \frac{BB_1}{HB_1} = 6$ Mặt khác $\tan C = \frac{BB_1}{B_1C}$; $\tan A = \tan \widehat{B_1HC} = \frac{B_1C}{HB_1}$ $\Rightarrow \tan A \cdot \tan C = \frac{BB_1}{B_1C} \cdot \frac{B_1C}{HB_1} = \frac{BB_1}{HB_1} = 6$ Suy ra $\cot A \cdot \cot C = \frac{1}{6}$ (1)	
	$\frac{AA_1}{CC_1} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \frac{\sin^2 C}{\sin^2 A} = \frac{8}{9}$ $\frac{9}{\sin^2 A} = \frac{8}{\sin^2 C} \Leftrightarrow 9(1 + \cot^2 A) = 8(1 + \cot^2 C) \Leftrightarrow 9\cot^2 A + 1 = 8\cot^2 C \quad (2)$		
	Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} \cot A \cdot \cot C = \frac{1}{6} \\ 9\cot^2 A + 1 = 8\cot^2 C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot A = \frac{1}{3} \\ \cot C = \frac{1}{2} \end{cases}$		
	Do $\cot C = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 C} = 1 + \cot^2 C = \frac{5}{4} \Rightarrow \sin C = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow AC = \frac{AA_1}{\sin C} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{10}$ Ta có $AB_1 = BB_1 \cdot \cot A = \frac{1}{3}BB_1$; $CB_1 = BB_1 \cdot \cot C = \frac{1}{2}BB_1$ $AC = AB_1 + B_1C = \frac{5}{6}BB_1 \Rightarrow BB_1 = \frac{6}{5}AC = \frac{6\sqrt{10}}{5}$		
	Suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BB_1 = \frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot \frac{6\sqrt{10}}{5} = 6$		
Câu 4b 3 điểm	Trong ba số $a-1, b-1, c-1$ luôn có 2 số có tích không âm, giả sử $(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab - a - b + 1 \geq 0 \Rightarrow ab \geq a + b - 1 = 2 - c$. Suy ra $abc \geq c(2-c)$ $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{(3-c)^2}{2}$ $a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq \frac{(3-c)^2}{2} + c^2 + c(2-c)$ Ta chứng minh $\frac{(3-c)^2}{2} + c^2 + c(2-c) \geq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(c-1)^2 \geq 0$ Dấu = xảy ra khi $a = b = c = 1$		
Câu 5 2 điểm	Do tập X có số phần tử chẵn nên số tập con có phần tử lẻ là chẵn. Giả sử có $2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) tập con có số phần tử lẻ, chia $2k$ tập trên thành k cặp, rồi thực hiện quy tắc chuyển như trên ta sẽ đưa về các tập con có số phần tử chẵn. Khi đó ta đưa về trường hợp các tập con đều có số phần tử chẵn. Nếu $n = 1$, bài toán được chứng minh. Xét $n \geq 2$. Do $2^n : 4$, suy ra số tập con có số phần tử chẵn nhưng không chia hết cho 4 phải chẵn. Giả sử có $2m$ ($m \in \mathbb{N}^*$) tập con có số phần tử chẵn nhưng không chia hết cho 4. Chia chúng thành m cặp rồi thực hiện phép chuyển phần tử theo quy tắc trên ta sẽ thu được các tập con có số phần tử chia hết cho 4. Thực hiện tương tự như trên, sau hữu hạn bước ta sẽ được tập con có số phần tử chia hết cho 2^n, khi đó ta nhận được tập X <i>Học sinh có thể chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n</i>		

