

TÀI LIỆU THAM KHẢO TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

$$\sqrt[17]{30.06.1954}$$

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

LÝ THUYẾT SỬ DỤNG BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG,
NÂNG CAO LŨY THỪA (PHẦN 1)

TRUNG ĐOÀN PHẠM VĂN XẢO – QUÂN ĐOÀN BỘ BINH

CHỦ ĐẠO: NHẬP MÔN SỬ DỤNG PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG,
NÂNG CAO LŨY THỪA

- PHƯƠNG TRÌNH MỘT CĂN THỨC ĐỘC LẬP.
- BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT CĂN THỨC ĐỘC LẬP.
- BÀI TOÁN NHIỀU CÁCH GIẢI.

CREATED BY GIANG SƠN (FACEBOOK); XYZ1431988@GMAIL.COM (GMAIL)

THỦ ĐÔ HÀ NỘI – MÙA THU 2013

“Non sông Việt Nam có trở nên tươi đẹp hay không, dân tộc Việt Nam có bước tới đài vinh quang để sánh vai với các cường quốc năm châu được hay không, chính là nhờ một phần lớn ở công học tập của các em”

(Trích thư Chủ tịch Hồ Chí Minh).



*Tôi yêu chuyện cổ nước tôi,
Vừa nhân hậu lại tuyệt vời sâu xa,
Thương người rồi mới thương ta,
Yêu nhau dù mấy cách xa cũng tìm.
(Chuyện cổ nước mình – Lâm Thị Mỹ Dạ; 1979)*

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

LÝ THUYẾT SỬ DỤNG BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG, NÂNG CAO LŨY THỪA (PHẦN 1)

TRUNG ĐOÀN PHẠM VĂN XẢO – QUÂN ĐOÀN BỘ BINH

Trong chương trình Toán học phổ thông nước ta, cụ thể là chương trình Đại số sơ cấp, phương trình và bất phương trình là một nội dung quan trọng, phổ biến trên nhiều dạng toán xuyên suốt các cấp học, cũng là bộ phận thường thấy trong các kỳ thi kiểm tra chất lượng học kỳ, thi tuyển sinh lớp 10 THPT, thi học sinh giỏi môn Toán các cấp và kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng với hình thức hết sức phong phú, đa dạng. Mặc dù đây là một đề tài quen thuộc, chính thống nhưng không vì thế mà giảm đi phần thú vị, nhiều bài toán cơ bản tăng dần đến mức khó thậm chí rất khó, với các biến đổi đẹp kết hợp nhiều kiến thức, kỹ năng vẫn làm khó nhiều bạn học sinh THCS, THPT. Ngoài phương trình đại số bậc cao, phương trình phân thức hữu tỷ thì phương trình chứa căn (còn gọi là phương trình vô tỷ) đang được đông đảo các bạn học sinh, các thầy cô giáo và các chuyên gia Toán phổ thông quan tâm sâu sắc. Chương trình Toán Đại số lớp 9 THCS bước đầu giới thiệu các phép toán với căn thức, kể từ đó căn thức xuất hiện hầu hết trong các vấn đề đại số, hình học, lượng giác và xuyên suốt chương trình Toán THPT. Sự đa dạng về hình thức của lớp bài toán căn thức đặt ra yêu cầu cấp thiết là làm thế nào để đơn giản hóa, thực tế các phương pháp giải, kỹ năng, mẹo mực đã hình thành, đi vào hệ thống. Về cơ bản để làm việc với lớp phương trình, bất phương trình vô tỷ chúng ta ưu tiên khử hoặc giảm các căn thức phức tạp của bài toán. Phép sử dụng biến đổi tương đương – nâng cao lũy thừa là một phương thức cơ bản nhất, đơn giản nhất nhằm mục đích đó. Trong chuyên đề này tác giả chủ yếu đề cập tới một lớp các phương trình, bất phương trình chứa một căn thức, từ mức độ đơn giản nhất tới phức tạp nhất, dành cho các bạn học sinh bước đầu làm quen với dạng toán thú vị này, tuy nhiên vẫn đòi hỏi tư duy logic, tỉ mỉ và chính xác. Tài liệu nhỏ được viết theo trình tự kiến thức tăng dần, phù hợp với các bạn học sinh THCS (lớp 9) ôn thi vào lớp 10 THPT, các bạn học sinh THPT thi học sinh giỏi Toán các cấp và luyện thi vào hệ đại học, cao đẳng, cao hơn là tài liệu tham khảo dành cho các thầy cô giáo và các bạn yêu Toán khác.

I. KIẾN THỨC – KỸ NĂNG CHUẨN BỊ

1. Kỹ năng nhân, chia đa thức, phân tích đa thức thành nhân tử, biến đổi phân thức đại số và căn thức.
2. Kỹ năng biến đổi tương đương, nâng lũy thừa, phân tích hằng đẳng thức, thêm bớt.
3. Nắm vững lý thuyết bất phương trình, dấu nhị thức bậc nhất, dấu tam thức bậc hai.
4. Thực hành giải phương trình, bất phương trình bậc hai, dạng đại số bậc cao, phân thức hữu tỷ.
5. Sử dụng thành thạo các ký hiệu logic trong phạm vi toán phổ thông.

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH VÀ KINH NGHIỆM THAO TÁC

Bài toán 1. Giải phương trình $\sqrt{x} = 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình tương đương $x = 4$. Kết luận nghiệm $x = 4$.

Bài toán 2. Giải phương trình $\sqrt{x-1} = 4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $x-1=16 \Leftrightarrow x=17$. Kết luận nghiệm $x=17$.

Bài toán 3. Giải phương trình $\sqrt{x^2-2} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 \geq 2 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{2}$.

Phương trình đã cho tương đương $x^2 - 2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$

Đối chiếu điều kiện thấy hai nghiệm này thỏa mãn. Kết luận phương trình đề bài có hai nghiệm.

Bài toán 4. Giải phương trình $\sqrt{4x-8} + 5\sqrt{x-2} - \sqrt{9x-18} = 20 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{x-2} + 5\sqrt{x-2} - 3\sqrt{x-2} = 20 \Leftrightarrow 4\sqrt{x-2} = 20$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 5 \Leftrightarrow x-2 = 25 \Leftrightarrow x = 27$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = 27$.

Bài toán 5. Giải phương trình $5\sqrt{x-1} - \sqrt{36x-36} + \sqrt{9x-9} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$5\sqrt{x-1} - 6\sqrt{x-1} + 3\sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

Kết hợp điều kiện suy ra giá trị cần tìm $x = \frac{5}{4}$.

Bài toán 6. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+x+1} = 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Vì $2x^2+x+1 = 2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^2+x+1 = 4 \Leftrightarrow 2x^2+x-3 = 0 \Leftrightarrow 2x^2-2x+3x-3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{3}{2}$$

Vậy phương trình đề bài có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 7. Giải phương trình $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{9x^2+9} - \sqrt{4x^2+4} = 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1} + 3\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt{x^2+1} &= 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+1} = 3 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} &= \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2+1 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2} \right\} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 8. Giải phương trình $\sqrt{3x^2+x+5} + \sqrt{27x^2+9x+45} = 12 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện: Do $3x^2+x+5 = 3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{59}{12} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2+x+5} + 3\sqrt{3x^2+x+5} &= 12 \Leftrightarrow 4\sqrt{3x^2+x+5} = 12 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+x+5} = 3 \\ \Leftrightarrow 3x^2+x+5 &= 9 \Leftrightarrow 3x^2+x-4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x+4) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}; x = 1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đề bài có hai nghiệm như trên.

Bài toán 9. Giải phương trình $\sqrt{4x^2+4x-4} + \sqrt{x^2+x-1} = 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2+x-1 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x^2+x-1} &= 3 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+x-1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-1} = 1 \\ \Leftrightarrow x^2+x-1 &= 1 \Leftrightarrow x^2+x-2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 1\} \end{aligned}$$

Hai giá trị này đều thỏa mãn điều kiện $x^2+x-1 \geq 0$ nên là hai nghiệm của phương trình ban đầu.

Bài toán 10. Giải phương trình $\sqrt{x^3-4} = 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 \geq 4$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3-4 = 4 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$.

Đối chiếu điều kiện suy ra tập nghiệm $S = \{2\}$.

Bài toán 11. Giải phương trình $\sqrt{x^3+3x+4} = 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3+3x+4 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3+3x+4 &= 8 \Leftrightarrow x^3+3x-4 = 0 \Leftrightarrow x^3+x^2+4x-(x^2+x+4) = 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+4) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2+x+4=0 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Dễ thấy (1) $\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{15}{4}$ (Vô nghiệm). Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 12. Giải phương trình $\sqrt{3x^3 + 2x + 3} = 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $3x^3 + 2x + 3 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3x^3 + 2x + 3 = 8 &\Leftrightarrow 3x^3 + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow 3x^3 + 3x^2 + 5x - (3x^2 + 3x + 5) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 3x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3x^2 + 3x + 5 = 0 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận thấy rằng $(1) \Leftrightarrow 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{17}{4}$ (Vô nghiệm).

Đổi chiếu điều kiện, kết luận phương trình ban đầu có nghiệm $x = 1$.

Bài toán 13. Giải phương trình $\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} = 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 + x^2 + x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + x + 1 = 4 &\Leftrightarrow x^3 + x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 3) - (x^2 + 2x + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)[(x+1)^2 + 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (x+1)^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 14. Giải phương trình $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + x + 3} = 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^3 + 3x^2 + x + 3 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x^3 + 3x^2 + x + 3 = 9 &\Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + 5x + 6) - (2x^2 + 5x + 6) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2x^2 + 5x + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Đổi chiếu điều kiện hoặc thử trực tiếp vào đề bài thấy thỏa mãn. Kết luận nghiệm $x = 1$.

Bài toán 15. Giải phương trình $\sqrt{x^4 - 4x + 4} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 - 4x + 4 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^4 - 4x + 4 = 1 &\Leftrightarrow x^4 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 + 2(x^2 - 2x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 + 2(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Thử trực tiếp vào phương trình, nhận nghiệm $x = 1$.

Bài toán 16. Giải phương trình $\sqrt{x^4 - 3x^2 - 6x + 1} = 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 - 3x^2 - 6x + 1 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương ứng với

$$\begin{aligned}
 x^4 - 3x^2 - 6x + 1 = 9 &\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = x^2 + 6x + 9 \\
 &\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = (x + 3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 4 = 0 \\ x^2 + x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}; x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}
 \end{aligned}$$

Thử trực tiếp vào phương trình ta có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 17. Giải phương trình $\sqrt{x^4 - 8x + 10} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 - 8x + 10 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 x^4 - 8x + 10 = 1 &\Leftrightarrow x^4 - 8x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 + 2x^2 - 8x + 8 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 + 2(x - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset
 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài vô nghiệm.

Bài toán 18. Giải phương trình $\frac{\sqrt{x} - 4}{x + 3\sqrt{x} + 1} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ x + 3\sqrt{x} + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Phương trình đã cho tương đương $\sqrt{x} - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 16$. Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm $x = 16$.

Bài toán 19. Giải phương trình $\frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + x^2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq -1 \\ \sqrt{x+1} + x^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1.$$

Phương trình đã cho tương đương $\sqrt{x+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Kết luận $S = \{0\}$.

Bài toán 20. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x} + 5} < 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Dễ thấy $2\sqrt{x} + 5 > 0, \forall x \geq 0$ nên bất phương trình đã cho tương đương $\sqrt{x} - 3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9$.

Kết hợp điều kiện thu được nghiệm $0 \leq x < 9$.

Bài toán 21. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{x} - 5}{x - 2\sqrt{x} + 7} \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Nhận xét $x - 2\sqrt{x} + 7 = (\sqrt{x} - 1)^2 + 6 > 0, \forall x \geq 0$ nên bất phương trình ban đầu trở thành

$$\sqrt{x} - 5 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 5 \Leftrightarrow x \leq 25.$$

Kết hợp điều kiện thu được nghiệm $0 \leq x \leq 25$.

Bài toán 22. Giải bất phương trình $\frac{2\sqrt{x}-1}{3x-2\sqrt{x}+4} \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Đề ý rằng $3x-2\sqrt{x}+4=2x+(\sqrt{x}-1)^2+3>0, \forall x \geq 0$. Bất phương trình đã cho trở thành

$$2\sqrt{x}-1 \leq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{4}.$$

So sánh điều kiện ta được tập nghiệm $S = \left[0; \frac{1}{4}\right]$.

Bài toán 23. Giải bất phương trình $\frac{2\sqrt{x}-3}{x-4\sqrt{x}+5} > 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Dễ thấy $x-4\sqrt{x}+5=(\sqrt{x}-2)^2+1>0, \forall x \in \mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho trở thành

$$2\sqrt{x}-3 > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x > \frac{9}{4}.$$

Kết luận nghiệm $x > \frac{9}{4}$.

Bài toán 24. Giải bất phương trình $\frac{2\sqrt{x}+x+1}{\sqrt{x}+5} \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Dễ thấy $2\sqrt{x}+x+1>0; \sqrt{x}+5>0, \forall x \geq 0 \Rightarrow \frac{2\sqrt{x}+x+1}{\sqrt{x}+5} > 0, \forall x \geq 0$.

Do đó bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 25. Giải bất phương trình $\frac{x-3\sqrt{x}+7}{x-2\sqrt{x}-3} \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ x-2\sqrt{x}-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \neq 9$

Nhận thấy $x-3\sqrt{x}+7=\left(\sqrt{x}-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{19}{4}>0, \forall x \geq 0$. Bất phương trình đã cho trở thành

$$x-2\sqrt{x}-3 < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $0 \leq x < 9$.

Bài toán 26. Giải bất phương trình $\frac{x-5\sqrt{x}+15}{2x-5\sqrt{x}+2} \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x - 5\sqrt{x} + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} - 1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \notin \left\{\frac{1}{4}; 2\right\} \end{cases} \quad (D)$$

Đề ý rằng $x - 5\sqrt{x} + 15 = \left(\sqrt{x} - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{35}{4} > 0, \forall x \in (D)$ nên bất phương trình ban đầu trở thành

$$2x - 5\sqrt{x} + 2 < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} - 1) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x < 4.$$

Kết hợp điều kiện thu được nghiệm $S = \left(\frac{1}{4}; 4\right)$.

Bài toán 27. Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+3} = \frac{2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $0 \leq x \neq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} + \frac{3(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} &= \frac{2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x}+3+3\sqrt{x}-3 &= 2\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Giá trị này thỏa mãn điều kiện. Kết luận tập nghiệm của phương trình $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

Bài toán 28. Giải bất phương trình $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} > \frac{4x-1}{x-4} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $0 \leq x \neq 4$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{x-4} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{x-4} - \frac{4x-1}{x-4} &> 0 \Leftrightarrow \frac{3x+6\sqrt{x}+x-2\sqrt{x}-4x+1}{x-4} > 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4\sqrt{x}+1}{x-4} &> 0 \Leftrightarrow x-4 > 0 \Leftrightarrow x > 4 \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = (4; +\infty)$.

Nhận xét.

28 bài toán mở đầu là những bài toán cơ bản nhất đối với phương trình, bất phương trình chứa căn nói chung. Nội dung này các bạn học sinh đã được làm quen và thực hành thuần thục khi được học biến đổi căn thức trong chương trình Đại số lớp 9 bậc THCS. Các kỹ năng tìm điều kiện xác định, đánh giá biểu thức chứa căn hay giải bất phương trình tích – thương đều là các dạng toán rất quen thuộc, vì vậy tác giả xin không nhắc lại, chỉ xin lưu ý

- Trong các bài toán bất phương trình, khi chưa xác định chính xác dấu của mẫu thức lưu ý không được bỏ mẫu thức mà cần chuyển về và giữ nguyên mẫu thức, sau đó xử lý tiếp tục.
- Tìm điều kiện chính xác cho bất phương trình, đối với phương trình có thể đặt điều kiện hình thức kết hợp thử lại nghiệm trực tiếp.
- Đánh giá biểu thức chứa căn bám sát điều kiện xác định và theo thiên hướng đưa về hằng đẳng thức.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\sqrt{x} = 5.$

2. $2\sqrt{x} + \sqrt{4x} + \sqrt{5x} = 3.$

3. $\sqrt{x^2 + 3} = 1.$

4. $\frac{1}{2}\sqrt{x-1} + \sqrt{4x-4} + \sqrt{6x-6} = 2.$

5. $\sqrt{x^3 + 5} = 2.$

6. $3\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{4x^2 + 4} - \sqrt{5x^2 + 5} = 1.$

7. $\sqrt{x^2 + x + 7} = 3.$

8. $\sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 3.$

9. $\sqrt{4x^2 + x + 4} + \sqrt{8x^2 + 2x + 8} = 3 + 3\sqrt{2}.$

10. $\sqrt{2x^2 + x - 2} + \sqrt{8x^2 + 4x - 8} = 3.$

11. $\sqrt{x^3 + 3x + 5} = 3.$

12. $\sqrt{3x^3 + x^2 + x + 3} = 2\sqrt{2}.$

13. $\sqrt{5x^3 - x - 3} = 1.$

14. $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + x + 3} = 3.$

15. $\sqrt{7x^3 - x^2 + 3x + 7} = 4.$

16. $\sqrt{x^4 - x + 3} = 1.$

17. $\sqrt{x^4 - 6x^2 + 12x + 1} = 3.$

18. $\sqrt{4x^4 - 5x^2 - 4x + 1} = 2.$

19. $\sqrt{x^4 - 5x^2 - 4x + 17} = 2.$

20. $\frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} - 6} < 0.$

21. $\frac{\sqrt{x} + 3x + 2}{2\sqrt{x} - 5} \geq 0.$

22. $\frac{x - 3\sqrt{x} + 10}{2x + \sqrt{x} - 3} \leq 0.$

23. $\frac{3x + \sqrt{x} - 4}{x - 6\sqrt{x} + 1002} > 0.$

24. $\frac{x^2 - \sqrt{x} + 1}{2x - 7\sqrt{x} + 5} \leq 0.$

25. $\frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} > \frac{4x - \sqrt{x}}{x - 1}.$

26. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{4\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} - 3} = \frac{6\sqrt{x} + x + 1}{x - 9}.$

27. $\frac{1}{5\sqrt{x}} + \frac{7\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x}} \leq \frac{1 - x}{\sqrt{x} - 2}.$

Bài toán 29. Giải phương trình $x\sqrt{x} + 6\sqrt{x} - 7 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Đặt $\sqrt{x} = t \ (t \geq 0)$ thu được

$$t^3 + 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow t^2(t-1) + t(t-1) + 7(t-1) = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t + 7) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình ban đầu $S = \{1\}$.

Bài toán 30. Giải phương trình $2x^2 - 2\sqrt{x} + 1 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 - \sqrt{x} + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} + x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \sqrt{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ (Loại)}.$$

Vậy phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 31. Giải phương trình $\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3) = 24 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x} = t \ (t \geq 0)$ thu được $t(t+1)(t+2)(t+3) = 24 \Leftrightarrow (t^2+3t)(t^2+3t+2) = 24$.

Đặt $t^2+3t+1 = y \ (y > 0)$ ta có $(y-1)(y+1) = 24 \Leftrightarrow y^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ y = -5 \end{cases}$

Do $y > 0 \Rightarrow y = 5 \Leftrightarrow t^2+3t-4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -4 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$; Do $\sqrt{x} = t \ (t \geq 0)$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $S = \{1\}$.

Bài toán 32. Giải phương trình $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}+2)^2 = 90x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x} = t \ (t \geq 0)$ thu được $(t+1)(t+4)(t+2)^2 = 90t^2 \Leftrightarrow (t^2+5t+4)(t^2+4t+4) = 90t^2 \quad (1)$.

- Xét $t = 0$ không thỏa mãn phương trình (1).
- Xét $t > 0$, phương trình (1) tương đương với $\left(t+5+\frac{4}{t}\right)\left(t+4+\frac{4}{t}\right) = 90$.

$$\text{Đặt } t+4+\frac{4}{t} = u \ (u > 0) \Rightarrow (u+1)u = 90 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 9 \\ u = -10 \end{cases}$$

$$\text{Do } u > 0 \Rightarrow u = 9 \Leftrightarrow t+\frac{4}{t}-5 = 0 \Leftrightarrow t^2-5t+4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 16 \end{cases}$$

Kết luận: Tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{1; 16\}$.

Bài toán 33. Giải phương trình $\frac{2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{3\sqrt{x}}{x+5\sqrt{x}+1} = \frac{23}{21} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x} = t$ ($t \geq 0$) thu được $\frac{2t}{t^2+t+1} + \frac{3t}{t^2+5t+1} = \frac{23}{21} \Leftrightarrow \frac{2}{t+1+\frac{1}{t}} + \frac{3}{t+5+\frac{1}{t}} = \frac{23}{21}$.

Đặt $t+1+\frac{1}{t} = u$ ($u > 0$) thu được

$$\frac{2}{u} + \frac{3}{u+4} = \frac{23}{21} \Leftrightarrow 23u(u+4) = 21(5u+8) \Leftrightarrow 23u^2 - 13u - 168 = 0 \Leftrightarrow u = 3; u = -\frac{56}{23}.$$

Loại $u = -\frac{56}{23}$; $u = 3 \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = 1$. Kết hợp điều kiện ta được nghiệm $x = 1$.

Bài toán 34. Giải phương trình $(x + \sqrt{x} + 1)^2 - 3(x + \sqrt{x} + 1)\sqrt{x} + 2x = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Đặt $x + \sqrt{x} + 1 = u$; $\sqrt{x} = v$ ($u > 0; v \geq 0$), phương trình đã cho trở thành

$$u^2 - 3uv + 2v^2 = 0 \Leftrightarrow (u-v)(u-2v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = 2v \end{cases}$$

➤ $u = v \Leftrightarrow x + \sqrt{x} + 1 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = -1$ (Loại).

➤ $u = 2v \Leftrightarrow x + \sqrt{x} + 1 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 35. Giải phương trình $x^2 + x\sqrt{x} - 4x + \sqrt{x} + 1 = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Nhận xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình ban đầu. Xét $x > 0$, đặt $\sqrt{x} = t$ ($t > 0$) ta thu được

$$t^4 + t^3 - 4t^2 + t + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 4 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + \frac{1}{t^2} + t + \frac{1}{t} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2 + t + \frac{1}{t} - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 + t + \frac{1}{t} - 6 = 0$$

Đặt $t + \frac{1}{t} = u$ ($u > 0$) ta có $u^2 + u - 6 = 0 \Leftrightarrow (u-2)(u+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = -3 \\ u = 2 \end{cases} \Rightarrow u = 2$

Khi đó $t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy phương trình ban đầu có nghiệm $x = 1$.

Bài toán 36. Giải phương trình $2\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3}\right)^2 - 5 \cdot \frac{x-1}{x-9} + 2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}\right)^2 = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $0 \leq x \neq 9$.

Đặt $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} = a$; $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = b$ thì phương trình đã cho trở thành

$$2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0 \Leftrightarrow (2a - b)(a - 2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \circ \quad b = 2a &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow x+4\sqrt{x}+3 = 2x-8\sqrt{x}+6 \Leftrightarrow x-12\sqrt{x}+3=0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} \in \{6+\sqrt{33}; 6-\sqrt{33}\} \Rightarrow x \in \{69+12\sqrt{33}; 69-12\sqrt{33}\}. \end{aligned}$$

$$\circ \quad a = 2b \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+3} = \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \Leftrightarrow x-4\sqrt{x}+3 = 2x+8\sqrt{x}+6 \Leftrightarrow x+12\sqrt{x}+3=0 \text{ (Vô nghiệm do } 0 \leq x \neq 9 \text{)}.$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm.

Bài toán 37. Giải phương trình $x\sqrt{x} + 2(1+x)^2\sqrt{x} = 3(1+x)^3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x} = u; 1+x = v \ (u \geq 0; v > 0)$ thì phương trình đã cho trở thành

$$u^3 + 2u^2v - 3v^3 = 0 \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + 3uv + 3v^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + 3uv + 3v^2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\bullet \quad u = v \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1+x \Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \text{ (Vô nghiệm)}.$$

$$\bullet \quad \text{Phương trình (1) vô nghiệm vì } u \geq 0; v > 0.$$

Vậy phương trình đề bài vô nghiệm.

Bài toán 38. Giải phương trình $x^2 - 5x + 6\sqrt{x} = 5 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 - 4x + 4 = x - 6\sqrt{x} + 9 \Leftrightarrow (x-2)^2 = (\sqrt{x}-3)^2 \Leftrightarrow (x+\sqrt{x}-5)(x-\sqrt{x}+1) = 0.$$

Xét các trường hợp

$$\diamond \quad x - \sqrt{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \text{ (Vô nghiệm)}.$$

$$\diamond \quad x + \sqrt{x} - 5 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \left\{\frac{-1+\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right\} \Rightarrow x \in \left\{\frac{11-\sqrt{21}}{2}; \frac{11+\sqrt{21}}{2}\right\}.$$

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Các bài toán từ 29 đến 38 không nằm ngoài các bài toán cơ bản đối với ẩn $\sqrt{x} = t \ (t \geq 0)$, chủ đạo đưa về phương trình đại số bậc cao, mặc dù chỉ với ẩn phụ rất đơn giản song các dạng toán cũng rất phong phú, đa dạng. Trong trường hợp phương trình bậc cao ẩn t này, việc loại nghiệm ngoại lai trở nên dễ dàng, tuy nhiên đòi hỏi kỹ năng biến đổi căn chính xác, cẩn thận. Các bạn có thể tham khảo các phương pháp giải phương trình bậc cao tại Lý thuyết giải phương trình đại số bậc cao, phân thức hữu tỷ (3 phần 1, 2, 3).

Trong các bài tập tương tự dưới đây, một số bài toán có hình thức phức tạp cần đặt ẩn phụ, tác giả xin được trình bày kỹ lưỡng hơn trong tiêu mục Lý thuyết sử dụng ẩn phụ căn thức.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $x\sqrt{x} + x + 4\sqrt{x} = 6$.
2. $3x\sqrt{x} - 2x + 4\sqrt{x} = 5$.
3. $2x^2 - \sqrt{x} + 6 = 0$.
4. $(\sqrt{x} - 4)^3 + (\sqrt{x} - 6)^3 > 28$.
5. $(4\sqrt{x} - 1)^4 + (\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 1) > 81$.
6. $(\sqrt{x} + 1)^2(\sqrt{x} + 5)^2 + (\sqrt{x} + 3)^2 \leq 35$.
7. $(x + 4\sqrt{x} + 1)^2 + (\sqrt{x} + 2)^2 = 45$.
8. $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3)(x - 3\sqrt{x} + 1) = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)$.
9. $(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 4) = 120$.
10. $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)(x - 10) = 72$.
11. $(x + 6\sqrt{x} + 5)(x + 10\sqrt{x} + 21) \leq 9$.
12. $(x + 4\sqrt{x} + 3)(x + 6\sqrt{x} + 8) = 24$.
13. $(x + 4\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 6)(\sqrt{x} - 8) + 17 \geq 0$.
14. $(x - 3\sqrt{x})^3 + (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2) = 4$.
15. $7x\sqrt{x}(\sqrt{x} - 4)^3 + 2(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 1) + 1 = 0$.
16. $(\sqrt{x} - 3)^2 x(x - 3\sqrt{x} - 4) \leq 25$.
17. $(2\sqrt{x} - 7)^2 x(\sqrt{x} - 5)(2\sqrt{x} + 3) = 256$.
18. $3(\sqrt{x} - 2)^6 + (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 1) - 3 \leq 0$.
19. $x\sqrt{x} + (\sqrt{x} - 1)^3 + 3\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \geq (2\sqrt{x} - 1)^3$.
20. $x\sqrt{x} + (x - \sqrt{x} + 1)^3 + 4\sqrt{x}(x - \sqrt{x} + 1) \leq (x + 1)^3$.
21. $(\sqrt{x} - 2)^4 + (4 - \sqrt{x})^4 = 2$.
22. $x(\sqrt{x} + 6)^2 + (\sqrt{x} + 3)^2 = 65$.
23. $\frac{1}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{18}{x + 2\sqrt{x} - 2} = \frac{18}{x + 2\sqrt{x} - 1}$.
24. $(x - 3\sqrt{x} + 1)(x - 3\sqrt{x} + 2) = (x - 3\sqrt{x})^2$.
25. $(x + 5\sqrt{x})^2 + (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + 3) = 48$.
26. $(\sqrt{x} + 1)^2(\sqrt{x} - 7)^2 + (\sqrt{x} - 3)^2 \geq 58$.
27. $(3\sqrt{x} - 1)^4 + (3\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) \leq 20$.

28. $(6\sqrt{x}+5)^2(3\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)=35.$
29. $(8\sqrt{x}+3)^2(2\sqrt{x}+1)(4\sqrt{x}+1)\leq 1815.$
30. $(7\sqrt{x}+6)^2(\sqrt{x}+1)(7\sqrt{x}+5)>180.$
31. $2(\sqrt{x}+6)(\sqrt{x}+7)(\sqrt{x}+8)\geq 3(\sqrt{x}+224).$
32. $\frac{2x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}+\frac{\sqrt{x}+1}{2x+\sqrt{x}+1}\leq 2.$
33. $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{1-x}\geq \sqrt{x}+3.$
34. $x+\frac{1}{4x}=3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}-1\right).$
35. $x\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}=78\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$
36. $4x+2\sqrt{x}+\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}-6<0.$
37. $\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)+\frac{3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}=7.$
38. $\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{x+2}+\frac{2x\sqrt{x}+4x+2\sqrt{x}+2}{2x+3\sqrt{x}+2}\leq 1+\sqrt{x}.$
39. $\frac{x\sqrt{x}-x+1}{\sqrt{x}}+\frac{x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}+1}=2-\sqrt{x}.$
40. $\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+5\right)\left(4x+\frac{1}{x}+1\right)=36.$
41. $\frac{4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-6)}\leq 14-(\sqrt{x}-3)^2.$
42. $x\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\leq 6\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$
43. $8x\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}+7\left(2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\leq 0.$
44. $\frac{x\sqrt{x}}{8}+\frac{8}{x\sqrt{x}}-4\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)+6=0.$
45. $(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+2)+\frac{8}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}+2}=2.$
46. $\frac{x\sqrt{x}-2x-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+5}+\frac{4(2\sqrt{x}+5)}{x\sqrt{x}+5\sqrt{x}+5}\leq 4-\sqrt{x}.$
47. $\frac{2\sqrt{x}}{3x-5\sqrt{x}+2}+\frac{13\sqrt{x}}{3x+\sqrt{x}+2}=6.$

$$48. \frac{x^2 + 3x + 1}{x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}} = 3.$$

$$49. \frac{x + 4\sqrt{x} + 7}{(\sqrt{x} + 1)^2 + 6} + \frac{(2\sqrt{x} + 1)^2 + 27}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 7)} + \frac{137}{15} = 0.$$

$$50. \frac{x + 5\sqrt{x} + 2}{x + 2} + \frac{x + 9\sqrt{x} + 2}{x + 3\sqrt{x} + 2} = \frac{14}{3}.$$

$$51. \frac{4\sqrt{x} - 8}{x - 10\sqrt{x} + 18} + \frac{7\sqrt{x} - 14}{x - 4\sqrt{x} + 6} = 1.$$

$$52. \frac{1}{4x - 6\sqrt{x} + 3} + \frac{1}{4(\sqrt{x} - 1)^2} = \frac{8}{3(2\sqrt{x} - 1)}.$$

$$53. \frac{x + 3\sqrt{x} + 3}{x - 4\sqrt{x} + 3} + \frac{x + 6\sqrt{x} + 3}{x + 5\sqrt{x} + 3} = \frac{53}{12}.$$

$$54. \frac{6}{x + \sqrt{x} + 1} + \frac{8}{x - \sqrt{x} + 1} = \frac{10}{\sqrt{x}}.$$

$$55. \frac{2\sqrt{x}}{3x - \sqrt{x} + 2} = 1 + \frac{7\sqrt{x}}{3x + 5\sqrt{x} + 2}.$$

$$56. \frac{\sqrt{x} - 3}{2x - 13\sqrt{x} + 22} - \frac{15\sqrt{x} - 45}{4x - 15\sqrt{x} + 47} = \frac{11}{2}.$$

$$57. (x + 5\sqrt{x} + 1)(x + \sqrt{x} + 1) = 21x.$$

$$58. (x + \sqrt{x} + 4)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x} + 4) = 60\sqrt{x}.$$

$$59. (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 2)\left(\frac{4}{\sqrt{x}} + 1\right)(\sqrt{x} + 6) = 30\sqrt{x}.$$

$$60. (x + 5\sqrt{x} + 4)(x + 15\sqrt{x} + 36) = 144x.$$

$$61. (\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} + 30) = \frac{2604x}{x + 7\sqrt{x} + 6}.$$

$$62. (x - \sqrt{x} + 1)^2 + 2(\sqrt{x} + 1)^2 = 3(x\sqrt{x} + 1).$$

$$63. 2\left(\frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 3}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 3}\right)^2 = 5 \cdot \frac{x - 4}{x - 9}.$$

$$64. \frac{x}{(\sqrt{x} - 1)^2} + \left(\frac{2\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2}\right)^2 = \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}.$$

$$65. 20\left(\frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1}\right)^2 = \frac{5}{2}\left(\frac{x - 4}{x - 1}\right).$$

Bài toán 39. Giải phương trình $\sqrt{2x+1} = x-1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x+1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x+1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x(x-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x=0 \Leftrightarrow x=4 \end{cases} \text{ (Thỏa mãn điều kiện } x \geq -\frac{1}{2} \text{).} \\ x=4 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{4\}$.

Bài toán 40. Giải phương trình $2\sqrt{3x-2} = 5x-3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 4(3x-2) = 25x^2 - 30x + 9 \\ 5x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x^2 - 42x + 17 = 0 \\ x \geq \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(25x-17) = 0 \\ x \geq \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{17}{25}; 1 \right\}.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left\{ \frac{17}{25}; 1 \right\}$.

Bài toán 41. Giải phương trình $\sqrt{3x+1} - 1 = x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{3x+1} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x+1 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = \{0; 1\}$.

Bài toán 42. Giải phương trình $2\sqrt{x^2 + 2x + 6} = x + 5 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x+5 \geq 0 \\ 4(x^2 + 2x + 6) = x^2 + 10x + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ 3x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

Phương trình đã cho có nghiệm $S = \left\{ -\frac{1}{3}; 1 \right\}$.

Bài toán 43. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 3x} - x = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x(x+3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -3 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x^2+3x} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^2+3x = x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Đổi chiều điều kiện, kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 44. Giải phương trình $3x = 7 - 2\sqrt{3x^2+1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$7-3x = 2\sqrt{3x^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-3x \geq 0 \\ 9x^2-42x+49 = 12x^2+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{7}{3} \\ x^2+14x-15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -15 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x \in \{-15; 1\}$.

Bài toán 45. Giải phương trình $2\sqrt{x^2+5x+1} = 2x+3$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x^2+5x+1 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ 4(x^2+5x+1) = 4x^2+12x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x = \frac{5}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{8}.$

Đổi chiều điều kiện kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{5}{8}$.

Bài toán 46. Giải phương trình $\sqrt{3x^2-x+2} = 5x-3$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $3x^2-x+2 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 5x-3 \geq 0 \\ 3x^2-x+2 = 25x^2-30x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \geq 3 \\ 22x^2-29x+7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{5} \\ x \in \left\{1; \frac{7}{29}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Đổi chiều điều kiện đi đến tập nghiệm $S = \{1\}$.

Bài toán 47. Giải phương trình $\sqrt{x^3+2x^2+1} = x+1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x^3+2x^2+1 \geq 0$ (*).

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^3+2x^2+1 = x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x(x^2+x-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x(x-1)(x+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \in \{-2; 0; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0; 1\}.$$

Đổi chiều điều kiện (*), kết luận phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{0; 1\}$.

Bài toán 48. Giải phương trình $\sqrt{2x^3 + 4x + 9} = x + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^3 + 4x + 9 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 2x^3 + 4x + 9 = x^2 + 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x(2x^2 - x - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \in \left\{0; \frac{1+\sqrt{17}}{4}; \frac{1-\sqrt{17}}{4}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{1+\sqrt{17}}{4}; \frac{1-\sqrt{17}}{4}\right\}$$

Đối chiếu với điều kiện ta có nghiệm $S = \left\{0; \frac{1+\sqrt{17}}{4}; \frac{1-\sqrt{17}}{4}\right\}$.

Bài toán 49. Giải phương trình $2\sqrt{x^3 + 13x + 1} - 2 = 3x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 + 13x + 1 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{x^3 + 13x + 1} = 3x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 \geq 0 \\ 4x^3 + 52x + 4 = 9x^2 + 12x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{2}{3} \\ x(4x^2 - 9x + 40) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài toán 50. Giải phương trình $\sqrt{x^3 + 39x + 9} - 3 = 4x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 + 39x + 9 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3 + 39x + 9} = 4x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3 \geq 0 \\ x^3 + 39x + 9 = 16x^2 + 24x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{4} \\ x(x^2 - 16x + 15) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0; 1; 15\}.$$

So sánh với điều kiện ta có ba nghiệm $x \in \{0; 1; 15\}$.

Bài toán 51. Giải phương trình $\sqrt{x^3 + x^2 + 6x + 1} = x + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 + x^2 + 6x + 1 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x^3 + x^2 + 6x + 1 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^3 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ (x-1)(x^2 + x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Thử lại giá trị này thấy thỏa mãn phương trình ban đầu. Kết luận tập nghiệm $S = \{1\}$.

Bài toán 52. Giải phương trình $\sqrt{x^3 - x^2 - 2x + 1} + 1 = x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 - x^2 - 2x + 1 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3 - x^2 - 2x + 1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^3 - x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2(x - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x = 2$.

Bài toán 53. Giải phương trình $\sqrt{x^3 + x^2 + 6x + 8} - x = 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 + x^2 + 6x + 8 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3 + x^2 + 6x + 8} = x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x^3 + x^2 + 6x + 8 = x^2 + 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Rõ ràng $x = 1$ thỏa mãn điều kiện nên là nghiệm duy nhất của phương trình ban đầu.

Bài toán 54. Giải phương trình $\sqrt{4x^3 + 7x^2 + 7x + 2} - 1 = 2x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $4x^3 + 7x^2 + 7x + 2 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^3 + 7x^2 + 7x + 2} = 2x + 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ 4x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 4x^2 + 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 4x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ (x+1)^3 = -3x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x+1 = -\sqrt[3]{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{3}} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{3}} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left\{ -\frac{1}{1+\sqrt[3]{3}} \right\}$.

Bài toán 55. Giải phương trình $3 + \sqrt{x^3 + 4x^2 - 12x + 3} = 2x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 + 4x^2 - 12x + 3 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3 + 4x^2 - 12x + 3} = 2x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ x^3 + 4x^2 - 12x + 3 = 4x^2 - 12x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x^3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{6}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta có tập nghiệm $S = \left\{ \sqrt[3]{6} \right\}$.

Bài toán 56. Giải phương trình $\sqrt{-3x^3 - 2x^2 + 7x + 3} = x + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-3x^3 - 2x^2 + 7x + 3 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x \geq -2 \\ -3x^3 - 2x^2 + 7x + 3 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ -3x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ (x-1)^3 = 4x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x-1 = x\sqrt[3]{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x = \frac{1}{1-\sqrt[3]{4}} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{1-\sqrt[3]{4}} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left\{ \frac{1}{1-\sqrt[3]{4}} \right\}$.

Bài toán 57. Giải phương trình $\sqrt{x^3 + x^2 + 4x - 4} = x + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 + x^2 + 4x - 4 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x \geq -2 \\ x^3 + x^2 + 4x - 4 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

Thử lại, kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài toán 58. Giải phương trình $\sqrt{x^4 + x^2 - 3x + 2} = x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 + x^2 - 3x + 2 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x \geq 1 \\ x^4 + x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^4 - x + 1 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^4 - x^2 + \frac{1}{2} + x^2 - x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Để thấy phương trình (1) vô nghiệm nên phương trình đề bài vô nghiệm.

Bài toán 59. Giải phương trình $\sqrt{x^4 - x^2 - 10x - 4} = 2x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 - x^2 - 10x - 4 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x \geq 1 \\ x^4 - x^2 - 10x - 4 = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 1 \\ x^4 - 5x^2 - 6x - 5 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 1 \\ x^4 - 4x^2 + 4 = x^2 + 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 1 \\ (x^2 - 2)^2 = (x + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 + x + 1 = 0 \\ 2x \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - x - 5 = 0 \\ 2x \geq 1 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

- Hệ $\begin{cases} x^2 + x + 1 = 0 \\ 2x \geq 1 \end{cases}$ vô nghiệm.
- Với $\begin{cases} x^2 - x - 5 = 0 \\ 2x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}$.

Bài toán 60. Giải phương trình $\sqrt{4x^4 - 4x^2 - 2x - 4} = x + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $4x^4 - 4x^2 - 2x - 4 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 4x^4 - 4x^2 - 2x - 4 = x^2 + 4x + 4 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 - 5x^2 - 6x - 8 = 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 - 4x^2 + 1 = x^2 + 6x + 9 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2 - 1)^2 = (x + 3)^2 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x^2 + x + 2)(2x^2 - x - 4) = 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 4 = 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{1 + \sqrt{33}}{4}; \frac{1 - \sqrt{33}}{4} \right\}$$

Kết luận phương trình đã cho ta thu được hai nghiệm kể trên.

Bài toán 61. Giải phương trình $\sqrt{x^4 + 4x^2 - 4x + 20} = x - 5 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 + 4x^2 - 4x + 20 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 + 2(x - 1)^2 + 18 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^4 + 4x^2 - 4x + 20 = x^2 - 10x + 25 \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 3x^2 + 6x - 5 = 0 \\ x \geq 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 4x^2 + 4 = x^2 - 6x + 9 \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 2)^2 = (x - 3)^2 \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + x - 1)(x^2 - x + 5) = 0 \\ x \geq 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 = 0 \\ x^2 - x + 5 = 0 \\ x \geq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 = 0 \\ x \geq 5 \end{cases} \quad (*)$$

Hệ (*) vô nghiệm do $x^2 + x - 1 > 0, \forall x \geq 5$. Kết luận phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 62. Giải phương trình $\sqrt{2x^4 - 2x^2 - 8x + 20} = 3x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^4 - 2x^2 - 8x + 20 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x^4 - 2x^2 - 8x + 20 = 9x^2 - 6x + 1 \\ 3x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^4 - 11x^2 - 2x + 9 = 0 \\ 3x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^4 - 6x^2 + 9) + x^2 - 2x + 1 = 0 \\ 3x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2 - 3)^2 + (x - 1)^2 = 0 \\ 3x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ x = 1 \\ 3x \geq 1 \end{cases} \quad [*]$$

Dễ thấy hệ (*) vô nghiệm. Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 63. Giải phương trình $\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4x - 3} = x - 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 - 3x^2 + 4x - 3 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^4 - 3x^2 + 4x - 3 = x^2 - 4x + 4 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 4x^2 + 8x - 7 = 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 2x^2 + 1 = 2x^2 - 8x + 8 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 1)^2 = 2(x - 2)^2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = \sqrt{2}(x - 2) \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - 1 = 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \quad (*)$$

Dễ thấy phương trình (*) vô nghiệm, vậy hệ phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 64. Giải phương trình $\sqrt{3x^4 + 12x^2 + 12} = 4x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x^4 + 12x^2 + 12 = 16x^2 - 8x + 1 \\ 4x \geq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4 - 4x^2 + 8x + 11 = 0 \\ 4x \geq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x^4 - 2x^2 + 1) + 2(x^2 + 4x + 4) = 0 \\ 4x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x^2 - 1)^2 + 2(x + 2)^2 = 0 \\ 4x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ 4x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \end{aligned}$$

Kết luận hệ ban đầu vô nghiệm.

Nhận xét.

Các bài toán từ 39 đến 64 là các phương trình chứa một căn thức bậc hai độc lập, gồm hai vế trong đó một vế là nhị thức bậc nhất, đa thức chứa trong dấu căn thức bậc hai tăng dần từ nhị thức bậc nhất lên đa thức bậc bốn, đồng nghĩa với mức độ khó tăng dần, đòi hỏi kiến thức giải phương trình đại số bậc cao ở một mức độ nhất định. Nhưng trước tiên chúng ta cần tìm điều kiện xác định cho bài toán, rõ ràng theo nguyên tắc thì điều kiện cần tìm cần thận và chính xác (không quá rườm rà), sở dĩ trọng tâm của bài toán là giải phương trình, tìm nghiệm, không dừng lại ở thao tác tìm điều kiện. Do đó khi trong trường hợp biểu thức dưới căn đơn giản các bạn có thể tìm chính xác tập xác định, ngược lại thì chúng ta không nên đi sâu vào vấn đề này, hạn chế phức tạp hóa bài toán đã cho thành hai bài toán nhỏ, đôi khi làm mất thời gian và công sức, khó đạt được mục tiêu cụ thể. Tuy nhiên các điều kiện thiết yếu vẫn đi kèm để đảm bảo logic, thường gọi là điều kiện hình thức, bước cuối cùng nên thử lại nghiệm trực tiếp để tránh "êm dài lăm mọng".

Phương trình đại số bậc cao là vấn đề đã và đang được các bạn học sinh cấp THCS, THPT và các thầy cô giáo quan tâm, tiếp cận, khai thác; mặc dù đã có nhiều phương pháp chính thống nhưng xem chừng vẫn tồn tại không ít khó khăn khi xử lý chúng. Trong phạm vi tài liệu này, tác giả chỉ "điểm xuyết" các biểu thức trong căn đơn giản, hoặc phương trình hệ quả xuất hiện sau khai triển đưa được về dạng cơ bản, hằng đẳng thức, đánh giá...xin không chú trọng tới các kỹ thuật sử dụng lượng giác, phương pháp đồ thị, Ferarry, đánh giá bất đẳng thức hay Cacdarno. Rất mong quý bạn đọc thấu hiểu khiêm khuyết này!

Quay trở lại với lớp phương trình đang đề cập, các bạn đọc dễ dàng nhận thấy một vế phương trình chứa căn nên luôn luôn không âm, hiển nhiên phương trình vô nghiệm nếu vế còn lại mang giá trị âm. Dựa trên cơ sở đó, vế còn lại không âm sẽ là điều kiện thứ hai để phương trình có nghiệm, trong thao tác trình bày thì các phương trình tương tự sẽ tương đương với một hệ điều kiện, bao gồm điều kiện biểu thức bên ngoài căn không âm và phương trình hệ quả sau khi nâng lũy thừa, biến đổi tương đương đồng bộ hai vế ban đầu.

Sau khi quy về dạng tổng quát: Phương trình $\sqrt{f(x)} = g(x) \quad (*)$.

$$\text{Điều kiện } f(x) \geq 0. \text{ Khi đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases} \Leftrightarrow \dots$$

Sau khi giải hệ điều kiện này chú ý kết hợp với điều kiện xác định hoặc thử trực tiếp vào bài toán ban đầu để thu được kết quả chính xác nhất.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực.

1. $\sqrt{4x+1} = 2+x$.
2. $2\sqrt{3x+2} = 2-x$.
3. $\sqrt{x+1} = x-4$.
4. $2\sqrt{4x^2-x+1}-2=5x$.
5. $\sqrt{x^2+7x+1}+1=4x$.
6. $3-\sqrt{5x^2+6x+9}=x$.
7. $\sqrt{7x^2+1}=x+1$.
8. $\sqrt{4x^2-5x+1}=4x+1$.
9. $\sqrt{x^2+5x+4}=x+2$.
10. $1+\sqrt{2x^2+3x+1}=4x$.
11. $2\sqrt{x^2+3x+4}+4=3x$.
12. $\sqrt{x^3+4x^2+7x+5}=x+2$.
13. $2+\sqrt{x^3+2x^2-4x+4}=x$.
14. $\sqrt{x^3-x^2-6x+9}+x=3$.
15. $1+\sqrt{x^3+4x^2+x+1}=2x$.
16. $\sqrt{x^3+7x^2+4x+3}=x-1$.
17. $\sqrt{2x^3+x^2+10x+17}=x+5$.
18. $\sqrt{x^3+6x^2+14x+4}=3x+2$.
19. $2\sqrt{x^3+x^2+1}=1-3x$.
20. $\sqrt{x^3+4x^2-6x+5}=2x$.
21. $\sqrt{x^3+4x^2+3x-7}=x$.
22. $\sqrt{x^2+3}=x^2+1$.
23. $\sqrt{x^4+x^2+2}=x^2+1$.
24. $\sqrt{x^4+5x^2+3}=2x^2+1$.
25. $\sqrt{2x^4+x^2+6}=4x^2-1$.
26. $\sqrt{5x^4+x^2+3}=5x^2-2$.
27. $\sqrt{4x^4-4x^2-2x+4}=x-2$.
28. $\sqrt{x^4-6x^2-2x+6}=x+1$.
29. $\sqrt{4x^4-8x^2-16x+5}=3x-1$.
30. $\sqrt{x^4-6x^2+16x+26}=5+x$.
31. $\sqrt{4x^4-5x^2+2x+2}=x-3$.
32. $\sqrt{x^4-14x+30}=x-5$.
33. $\sqrt{2x^4+x^2-16x+25}=x-2$.
34. $\sqrt{3x^4+2x^2-20x+20}=2x-1$.

Bài toán 65. Giải phương trình $\sqrt[3]{7x+1} = x+1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$7x+1 = x^3 + 3x^2 + 3x+1 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-4; 0; 1\}.$$

Vậy phương trình có nghiệm $S = \{-4; 0; 1\}$.

Bài toán 66. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 4x - 1} = x+1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 4x^2 + 4x - 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -2; x = 1$.

Bài toán 67. Giải phương trình $\sqrt[3]{-4x^2 + x + 3} = x-1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$-4x^2 + x + 3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + 2x + 4 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Phương trình (*) vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 68. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 4x + 1} - 1 = x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 4x + 1} = x+1 \Leftrightarrow x^3 + 5x^2 + 4x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x \in \{0; 1\}$.

Bài toán 69. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^3 + 7x^2 + 8x + 11} = x+2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 7x^2 + 8x + 11 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Kết luận tập hợp nghiệm $S = \{1; 3\}$.

Bài toán 70. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + 7x - 6} = x-2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 - 4x^2 + 7x - 6 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Kết luận nghiệm $S = \left\{ \frac{1}{2}; 2 \right\}$.

Bài toán 71. Giải phương trình $\sqrt[3]{7x^3 + 18x^2 - 5x + 7} - 2x = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{7x^3 + 18x^2 - 5x + 7} = 2x + 1 &\Leftrightarrow 7x^3 + 18x^2 - 5x + 7 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 2; 3\} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x = 1; x = 2; x = 3$.

Bài toán 72. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 3} = x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 3 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow x^4 - x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^4 - x^2 + \frac{1}{4} + x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{2} \quad (1) \end{aligned}$$

Phương trình (1) vô nghiệm nên phương trình ban đầu vô nghiệm.

Nhận xét.

Các thí dụ từ bài toán 57 đến bài toán 64 là dạng toán cơ bản của phương trình chứa một căn thức bậc ba, tương tự các phần trước, biểu thức phía trong căn không quá phức tạp và về còn lại của là một nhị thức bậc nhất, hầu hết các bài toán sau khi biến đổi tương đương, nâng lũy thừa thu được phương trình đa thức bậc không quá 4. Đặc điểm của phương trình chứa căn bậc lẻ nói chung là chỉ cần đặt điều kiện cho mẫu thức (với biểu thức dưới dấu căn có dạng phân thức đại số). Quy trình giải cũng đòi hỏi tính toán tính xác, cẩn thận và kỹ năng giải phương trình bậc hai, phương trình đại số bậc cao hay phân thức hữu tỷ.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\sqrt[3]{5x+3} = x+1$.
2. $3\sqrt[3]{3x+5} = 5x+1$.
3. $2\sqrt[3]{x^2+6x+1} = x+3$.
4. $3\sqrt[3]{5x^2+x+2} = x+5$.
5. $\sqrt[3]{4x^2+3x+1} = 4-x$.
6. $\sqrt[3]{x^3+7x^2+x+1} = 2x+1$.
7. $\sqrt[3]{4x^3+6x^2+3x+8} = 3x+2$.
8. $2\sqrt[3]{x^3+x^2+x+5} - x = 3$.
9. $\sqrt[3]{9x^3+3x^2+3x+4} - 1 = x$.
10. $\sqrt[3]{27x^3+2x^2+4} = 3x-4$.
11. $\sqrt[3]{x^4+x^3+4x^2+3x-1} = x+1$.
12. $\sqrt[3]{x^4+x^3+5x^2+3x-2} = x+1$.
13. $\sqrt[3]{x^4+x^3+7x^2+3x-4} = x+1$.

Bài toán 73. Giải bất phương trình $2\sqrt{x-2} < x-1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 4x-8 < x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-6x+9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-3)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \neq 3.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $2 \leq x \neq 3$.

Bài toán 74. Giải bất phương trình $\sqrt{3x-2} \leq 2x-1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 3x-2 \leq 4x^2-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2-7x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left[\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\right] \cup [1; +\infty)$.

Bài toán 75. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-3x+2} < 4-x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2-3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 1 \end{cases} \quad (*)$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x^2-3x+2 < x^2-8x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ 5x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{8}{5}$.

Kết hợp điều kiện (*) thu được nghiệm $x \leq 1$.

Bài toán 76. Giải bất phương trình $2x - \sqrt{x^2+4x+7} \geq 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2x-1 \geq \sqrt{x^2+4x+7} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 4x^2-4x+1 \geq x^2+4x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x^2-8x-6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \begin{cases} x \geq \frac{4+\sqrt{34}}{3} \\ x \leq \frac{4-\sqrt{34}}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{4+\sqrt{34}}{3}.$$

Kết luận tập nghiệm: $S = \left[\frac{4+\sqrt{34}}{3}; +\infty\right)$.

Bài toán 77. Giải bất phương trình $x - \sqrt{-x^2+4x-3} > 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-x^2+4x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2-4x+3 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x-2 > \sqrt{-x^2+4x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x^2-4x+4 > -x^2+4x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2-8x+7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2}; 3\right]$.

Bài toán 78. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+x^2+4x} < x+2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x(x^2+x+4) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^3+x^2+4x < x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^3 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq \sqrt[3]{4}.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $0 \leq x \leq \sqrt[3]{4}$.

Bài toán 79. Giải bất phương trình $\sqrt{5x^3+x^2-6x} \leq x-3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } 5x^3+x^2-6x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(5x+6) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -\frac{6}{5} \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Bất phương trình đã cho tương đương với } \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ 5x^3+x^2-6x \leq x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 5x^3 \leq 9 \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm).}$$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 80. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+4x^2+4x+5} < 2x+1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3+4x^2+4x+5 \geq 0$.

$$\text{Bất phương trình đã cho tương đương với } \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x^3+4x^2+4x+5 \leq 4x^2+4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \leq -\sqrt[3]{4} \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm).}$$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 81. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+2x-3} \leq 5-x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3+2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+3) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x^3+2x-3 \leq x^2-10x+25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x^3-x^2+12x-28 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ (x-2)(x^2+x+14) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 2.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được tập nghiệm $S = [1; 2]$.

Bài toán 82. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+x^2-2x+2} < x-1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3+x^2-2x+2 \geq 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^3 + x^2 - 2x + 2 < x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^3 < -1 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Kết luận bất phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 83. Giải bất phương trình $\sqrt{2x^3 + x^2 + 4x - 7} < x + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^3 + x^2 + 4x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 3x + 7) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 2x^3 + x^2 + 4x - 7 < x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2x^3 < 11 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x < \sqrt[3]{\frac{11}{2}}$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được tập nghiệm $S = \left[1; \sqrt[3]{\frac{11}{2}}\right)$.

Bài toán 84. Giải bất phương trình $\sqrt{6x^3 + x^2 - 2x - 40} \leq x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $6x^3 + x^2 - 2x - 40 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(6x^2 + 13x + 20) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $6x^3 + x^2 - 2x - 40 \leq x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x \leq \sqrt[3]{\frac{41}{6}}$.

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm $x \geq 2$.

Bài toán 85. Giải bất phương trình $\sqrt{2x^4 - 4x^2 + 3} \leq 2x^2 - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^4 - 4x^2 + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x^2 \geq 1 \\ 2x^4 - 4x^2 + 3 \leq 4x^4 - 4x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 \geq 1 \\ 2x^4 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

Vậy bất phương trình đề bài có nghiệm $x \geq 1 \vee x \leq -1$.

Nhận xét.

Bất phương trình là một nội dung cơ bản nhưng rất dễ ngộ nhận và mắc sai lầm trong lập luận, tính toán.. Các bài toán từ 61 đến 77 là dạng căn bản của bất phương trình chứa một căn bậc hai. Điều kiện của biểu thức dưới dấu căn yêu cầu độ chính xác cao, vì nghiệm thông thường là một khoảng (đoạn) nên cần có sự hợp nhất tất cả tập xác định và kết quả biến đổi hệ quả (ngoại trừ nghiệm là một số điểm – trường hợp đặc biệt). Trong một số trường hợp điều kiện trong căn có thể lập luận tùy theo đặc điểm của bài toán.

Dạng tổng quát cơ bản $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \quad \vee \quad \sqrt{f(x)} < g(x) \quad (1)$.

Điều kiện $f(x) \geq 0 \quad (2)$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq [g(x)]^2 \end{cases} \Leftrightarrow \dots$

Lưu ý kết hợp với điều kiện (2) để thu được tập hợp nghiệm cần tìm.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\sqrt{4x-3} < 2x-1$.
2. $\sqrt{7x-6} \leq 3x-2$.
3. $\sqrt{4-x} \leq x-2$.
4. $2\sqrt{6-2x} \leq x+3$.
5. $2\sqrt{x+3} < x+1$.
6. $\sqrt{x^2+4x+6} < 2x+3$
7. $\sqrt{x^2+6x+2} \leq x+2$.
8. $2\sqrt{x^2+3x-3} \leq x+1$.
9. $\sqrt{3x^2+7x+1}-1 < 3x$.
10. $2\sqrt{3x^2+x+5} \leq 3x+3$.
11. $\sqrt{7x^2+x-4} \leq 3x-1$.
12. $\sqrt{6+2x+x^2} \leq 5x-2$.
13. $\sqrt{x^2-5x+4} \leq 3x+2$.
14. $\sqrt{x^3+3x^2+x-5} < x-2$.
15. $2\sqrt{x^3+x^2+x-3} < 2x+1$.
16. $\sqrt{3x^3+x^2+4x-8}-2 \leq x$.
17. $\sqrt{x^3+4x^2+4x-9} \leq 2x+1$.
18. $\sqrt{7x^3+x^2-6x-2} \leq x-3$.
19. $\sqrt{6x^2+x+7} < x+5$.
20. $\sqrt{x^3+4x^2+3x-1} \leq x-1$.
21. $\sqrt{x^3+3x^2+3x-8} \leq x-2$.
22. $\sqrt{4x^3+x^2+x-27} \leq x-3$.
23. $\sqrt{3x^4+5x^2+1} < 2x^2+5$.
24. $\sqrt{x^4+3x-4} \leq x^2-2$.
25. $\sqrt{x^4-x+4} < x+2$.
26. $\sqrt{2x^4-x+16} < x+4$.
27. $\sqrt{x^4+x-2} \leq x^2+1$.
28. $\sqrt{x^4-2x+25} < 2x+5$.
29. $\sqrt{x^4+2x^3+x-4} \leq x^2+3$.
30. $\sqrt{4x^4+3x^3+x^2-8} < 2x^2+1$.
31. $\sqrt{x^4+4x^2+9} \leq x^2+4$.
32. $\sqrt{6x^4+3x^2+5} < 5x^2+2$.
33. $\sqrt{9x^3+4x^2-12x-1} \leq 2x-3$.
34. $\sqrt{x^4-3x+18} < x^2+6$.

Bài toán 86. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \geq x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải.

Điều kiện $x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 2 \end{cases} \quad (*)$.

- Xét $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$. Kết hợp điều kiện (*) suy ra bất phương trình (1) nghiệm đúng với $x < 1$.
- Xét $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Khi đó bài toán trở thành $\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 5x + 6 \geq x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{5}{3}$.

Kết hợp điều kiện (*) thu được $1 \leq x \leq \frac{5}{3}$.

Kết luận: Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = \left(-\infty; \frac{5}{3}\right]$.

Bài toán 87. Giải bất phương trình $3x \leq \sqrt{9x^2 - 10x + 1} + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $9x^2 - 10x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \frac{1}{9} \end{cases} \quad (*)$

Bất phương trình đã cho tương đương với $3x - 2 \leq \sqrt{9x^2 - 10x + 1} \quad (1)$.

- Xét $3x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$. Kết hợp điều kiện (*), suy ra (1) nghiệm đúng với $x \leq \frac{1}{9}$.
- Xét $3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$. Bất phương trình (1) tương đương với

$$\begin{cases} 3x \geq 2 \\ 9x^2 - 12x + 4 \leq 9x^2 - 10x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 2 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}.$$

Kết hợp điều kiện (*) thu được $x \geq \frac{3}{2}$. Kết luận tập nghiệm của bất phương trình: $S = \left(-\infty; \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Bài toán 88. Giải bất phương trình $2\sqrt{2x^2 - 3x + 1} + 2 \geq x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^2 - 3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (*)$

Biến đổi về dạng $2\sqrt{2x^2 - 3x + 1} \geq x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 < 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ 4(2x^2 - 3x + 1) \geq x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 2 \\ x \geq \frac{7}{8} \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$

Kết hợp điều kiện (*) thu được tập nghiệm $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$.

Bài toán 89. Giải bất phương trình $\sqrt{3x^2 + x + 1} \geq 2x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x-1 < 0 \\ 2x-1 \geq 0 \\ 3x^2+x+1 \geq 4x^2-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ x^2-5x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ 0 \leq x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 1 \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 5.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \leq 5$.

Bài toán 90. Giải bất phương trình $3\sqrt{3x^2-4x+1}+3 > x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } 3x^2-4x+1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$3\sqrt{3x^2-4x+1} > x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \geq 3 \\ 9(3x^2-4x+1) > x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \geq 3 \\ 26x^2-30x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty)$.

Bài toán 91. Giải bất phương trình $1 < \sqrt{x^2-4x} - x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } x^2-4x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x+1 < \sqrt{x^2-4x} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x \geq -1 \\ x^2+2x+1 < x^2-4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ -1 \leq x < -\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{6}.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x < -\frac{1}{6}$.

Bài toán 92. Giải bất phương trình $3 < x + \sqrt{x^2-10x+9} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 9 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$3-x < \sqrt{x^2-10x+9} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x < 0 \\ x \geq 3 \\ x^2-6x+9 < x^2-10x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \geq 3 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x \geq 9$.

Bài toán 93. Giải bất phương trình $3 < \sqrt{9-2x^2} + x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } |x| \leq \frac{9}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với $3-x < \sqrt{9-2x^2} \Leftrightarrow x^2-6x+9 < 9-2x^2 \Leftrightarrow 3x^2-6x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$.

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm $S = \left(0; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$.

Bài toán 94. Giải bất phương trình $4-x < \sqrt{4x-x^2-3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $4x-x^2-3 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$.

Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2-8x+16 < 4x-x^2-3 \Leftrightarrow 2x^2-12x+19 < 0 \Leftrightarrow 2(x-3)^2+1 < 0 \text{ (Vô nghiệm)}.$$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 95. Giải bất phương trình $\sqrt{-x^2-8x+9} > 3-2x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-9 \leq x \leq 1$.

Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với $-x^2-8x+9 > 4x^2-12x+9 \Leftrightarrow 5x^2-4x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{4}{5}$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = \left(0; \frac{4}{5}\right)$.

Bài toán 96. Giải bất phương trình $x + \sqrt{-2x^2-7x+9} > 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{9}{2} \leq x \leq 1$.

Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{-2x^2-7x+9} > 3-x \Leftrightarrow -2x^2-7x+9 > x^2-6x+9 \Leftrightarrow 3x^2+x < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 0.$$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm $S = \left[-\frac{1}{3}; 0\right]$.

Bài toán 97. Giải bất phương trình $\sqrt{4x^2+x+4} \geq 2-x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $4x^2+x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2-x < 0 \\ 2-x \geq 0 \\ 4x^2+x+4 \geq x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq 2 \\ 3x^2+5x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq -\frac{5}{3} \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Kết luận tập nghiệm $S = \left(-\infty; -\frac{5}{3}\right] \cup [0; +\infty)$.

Nhận xét.

- Các bài toán từ 86 đến 97 cùng một dạng cơ bản $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$. Sau khi đặt điều kiện tối thiểu $f(x) \geq 0$ các bạn có thể trình bày theo hai phương án có cùng bản chất như sau

Phương án 1.

- Xét trường hợp $g(x) < 0$, bất phương trình nghiệm đúng. Kết hợp với điều kiện suy ra nghiệm.
- Xét trường hợp $g(x) \geq 0$. Bình phương hai vế và kết hợp điều kiện suy ra nghiệm.
- Tổng hợp 2 trường hợp suy ra tập nghiệm của phương trình ban đầu.

Ưu điểm là rõ ràng và sáng sủa, mặc dù trong một số trường hợp cách trình bày này cũng khá dài.

Phương án 2.

- Đây có thể gọi là phương án trình bày "gộp", sử dụng các ký hiệu tuyến, về bản chất không có gì thay đổi, cũng là chia hai trường hợp, tuy có hơi cồng kềnh nhưng đảm bảo logic và dễ sửa chữa.
- Các bài toán từ 93 đến 96 chú ý sử dụng điều kiện xác định cũng cho lời giải khá ngắn gọn, súc tích.

Bài toán 98. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3 + 4x^2 + 4x - 9} \geq 2x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 + 4x^2 + 4x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 5x + 9) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $x^3 + 4x^2 + 4x - 9 \geq 4x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow x^3 \geq 10 \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{10}$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x \geq \sqrt[3]{10}$.

Bài toán 99. Giải bất phương trình $3 \geq 2x - 2\sqrt{6x^3 + x^2 - 3x - 4} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $6x^3 + x^2 - 3x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(6x^2 + 7x + 4) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{6x^3 + x^2 - 3x - 4} \geq 2x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 2x - 3 \geq 0 \\ 4(6x^3 + x^2 - 3x - 4) \geq 4x^2 - 12x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x \geq \frac{3}{2} \\ x \geq \sqrt[3]{\frac{25}{24}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x \geq 1$.

Bài toán 100. Giải bất phương trình $3 + \sqrt{9x^3 + x^2 - 6x - 4} \geq x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $9x^3 + x^2 - 6x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(9x^2 + 10x + 4) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{9x^3 + x^2 - 6x - 4} \geq x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 < 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ 9x^3 + x^2 - 6x - 4 \geq x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \geq 3 \\ 9x^3 \geq 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x \geq 1$.

Bài toán 101. Giải bất phương trình $5 + \sqrt{15x^3 + x^2 - 10x - 6} \geq x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $15x^3 + x^2 - 10x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(15x^2 + 16x + 6) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{15x^3 + x^2 - 10x - 6} \geq x - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 < 0 \\ x - 5 \geq 0 \\ 15x^3 + x^2 - 10x - 6 \geq x^2 - 10x + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x \geq 5 \\ 15x^3 \geq 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x \geq 1$.

Bài toán 102. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3 + 9x^2 + 6x - 16} - x + 2 \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $11x^3 + x^2 - 4x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(11x^2 + 12x + 8) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3 + 9x^2 + 6x - 16} \geq x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 < 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ 11x^3 + x^2 - 4x - 8 \geq x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 2 \\ 11x^3 \geq 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq 1$.

Bài toán 103. Giải bất phương trình $\sqrt{2x^3 + 9x^2 - 6x - 5} > 3x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^3 + 9x^2 - 6x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 11x + 5) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2x^3 + 9x^2 - 6x - 5 > 9x^2 - 6x + 1 \Leftrightarrow x^3 > 3 \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{3}.$$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm $S = (\sqrt[3]{3}; +\infty)$.

Bài toán 104. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3 + 4x^2 - 12x} \geq 2x - 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 + 4x^2 - 12x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+6) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ -6 \leq x \leq 0 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 2x - 3 \geq 0 \\ x^3 + 4x^2 - 12x \geq 4x^2 - 12x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x \geq \frac{3}{2} \\ x^3 \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x \geq \sqrt[3]{9} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = [-6; 0] \cup [\sqrt[3]{9}; +\infty)$.

Bài toán 105. Giải bất phương trình $\sqrt{x^4 + x^2 - x + 7} > x - 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 + x^2 - x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow x^4 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 2 \\ x^4 + x^2 - x + 7 \geq x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 2 \\ x^4 + 3x + 3 \geq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 2 \\ x^4 - 2x^2 + 1 + 2x^2 + 3x + \frac{9}{8} + \frac{7}{8} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 2 \\ (x^2 - 1)^2 + 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 \geq -\frac{7}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi giá trị x .

Bài toán 106. Giải bất phương trình $\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 10} \geq x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 + x^2 - 6x + 10 \geq 0 \Leftrightarrow x^4 + (x - 3)^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 1 \\ x^4 + x^2 - 6x + 10 \geq x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 1 \\ x^4 - 4x + 9 \geq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 1 \\ x^4 - 4x^2 + 4 + 4x^2 - 4x + 1 + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 1 \\ (x^2 - 2)^2 + (2x - 1)^2 + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Kết luận bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi giá trị x .

Bài toán 107. Giải bất phương trình $\sqrt{x^4 + 2x^2 - 4x + 5} \geq x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 + 2x^2 - 4x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x^4 + 2(x - 1)^2 + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x < -1 \\ x \geq -1 \\ x^4 + 2x^2 - 4x + 5 \geq x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x \geq -1 \\ x^4 + x^2 - 6x + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x \geq -1 \\ x^4 - 2x^2 + 1 + 3x^2 - 6x + 3 \geq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x \geq -1 \\ (x^2 - 1)^2 + 3(x - 1)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình ban đầu có tập nghiệm $S = \mathbb{R}$.

Bài tập tương tự.

Giải các bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\sqrt{4x^2 + x + 2} > 2x + 1.$
2. $\sqrt{x^2 + 4x + 5} - 2 - x > 0.$
3. $\sqrt{3x^2 + 4x + 1} - x \geq 1.$
4. $2\sqrt{2x^2 + 3x + 1} > 3x + 2.$
5. $1 + \sqrt{4x^2 + 3x + 9} \geq 2x.$
6. $\sqrt{7x^2 + 2x + 4} \geq 2 - x.$
7. $x + \sqrt{-3x^2 - x + 4} > 2.$
8. $\sqrt{-7x^2 - 2x + 9} + x - 3 \geq 0.$
9. $\sqrt{-13x^2 - 3x + 16} \geq 4 + x.$
10. $\sqrt{-5x^2 - 4x + 9} - 2x > 3.$
11. $\sqrt{x^2 + 7x + 1} - 2 > 2.$
12. $\sqrt{4x^2 - 9x + 5} \geq 2x + 5.$
13. $1 + \sqrt{x^3 + 4x^2 - 4x} > 2x.$
14. $\sqrt{4x^3 + x^2 - 2x + 1} \geq x.$
15. $\sqrt{8x^3 + x^2 + 2x - 11} - 1 \geq x.$
16. $\sqrt{5x^3 + x^2 + 4x - 10} - x - 2 > 0.$
17. $\sqrt{x^3 + 25x^2 + 10x} > 5x + 1.$
18. $\sqrt{4x^3 + x^2 + 4x - 9} \geq x + 2.$
19. $\sqrt{5x^3 + x^2 + 6x - 12} \geq x + 3.$
20. $\sqrt{4x^3 - 7x^2 + 2x + 1} \geq 2x + 1.$
21. $\sqrt{x^4 + 2x + 4} \geq x + 1.$
22. $\sqrt{x^4 + x^2 - 1} > 2x - 1.$
23. $\sqrt{x^4 - 7x^2 + 31} > x - 6.$
24. $\sqrt{x^4 - 3x^2 + 6} > 2x + 3.$
25. $\sqrt{x^4 + 10} > \sqrt{2}(x + 3).$
26. $\sqrt{x^4 - x^2 + 28} \geq x - 6.$
27. $\sqrt{x^4 - 9x^2 + 12} > 2 - x.$
28. $\sqrt{4x^4 - 9x^2 - 3} > 2x + 2.$
29. $\sqrt{9x^4 + 3x^2 - 11} > 4x - 1.$
30. $\sqrt{4x^4 + x^2 + 3} \geq \sqrt{6}(1 + x).$
31. $\sqrt{x^4 + 3x^2 + 5} \geq x^2 + 1.$
32. $\sqrt{x^4 + 7x^2 - 9} > \sqrt{2}(x + 3).$
33. $\sqrt{x^4 + x^2 + 14} > 2x - 3.$

Bài toán 108. Giải phương trình $\frac{\sqrt{2x-1}+2}{4x-1}=1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x-1}+2=4x-1 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=4x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3 \geq 0 \\ 2x-1=16x^2-24x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ 8x^2-13x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

So sánh với điều kiện, kết luận phương trình đã cho có nghiệm $S = \{1\}$.

Bài toán 109. Giải phương trình $\frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1}=0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x+7 \geq 0; x \neq 1; x \neq 3$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{2x+7}=3 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$ (Loại).

Phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 110. Giải phương trình $\frac{2\sqrt{3x+1}+1}{2x+3}=1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với $2\sqrt{3x+1}=2x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x+1=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x=0 \\ x=1 \end{cases}$

Đối chiếu với điều kiện ta có nghiệm $S = \{0; 1\}$.

Bài toán 111. Giải phương trình $\frac{\sqrt{x^2+x+2}+x+1}{3x+1}=1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -\frac{1}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+x+2}=2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+x+2=4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2-x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in \left\{1; -\frac{2}{3}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x=1$.

Bài toán 112. Giải phương trình $\frac{\sqrt{3x^2+x+2x+1}}{x+4}=1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x(3x+1) \geq 0 \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -4 \neq x \leq -\frac{1}{3} \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{3x^2 + x} = 3 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ 3x^2 + x = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 2x^2 + 7x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{9}{2}; 1 \right\}.$$

Kết hợp với điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left\{ -\frac{9}{2}; 1 \right\}$.

Bài toán 113. Giải phương trình $\frac{\sqrt{x+3} + 2x + 3}{6x + 1} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-3 \leq x \neq -\frac{1}{6}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} + 2x + 3 &= 6x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 4x - 2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2 \geq 0 \\ x + 3 = 16x^2 - 16x + 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 16x^2 - 17x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

So sánh với điều kiện ta có tập nghiệm $S = \{1\}$.

Bài toán 114. Giải phương trình $\frac{2x+1}{\sqrt{5x-1}+x} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{5}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x + 1 = \sqrt{5x - 1} + x \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{5x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x + 1 = 5x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1; 2\}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có hai nghiệm $x = 1; x = 2$.

Bài toán 115. Giải phương trình $\frac{4x-1}{2\sqrt{3x-2}-x} = 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ 2\sqrt{3x-2} \neq x \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x - 1 &= 6\sqrt{3x - 2} - 3x \Leftrightarrow 7x - 1 = 6\sqrt{3x - 2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 7x \geq 1 \\ 49x^2 - 14x + 1 = 36(3x - 2) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{7} \\ 49x^2 - 122x + 73 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{73}{49} \end{cases} \end{aligned}$$

So sánh điều kiện, kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 116. Giải phương trình $\frac{2x+1}{\sqrt{3x^2+2x-1}} = \frac{3}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } 3x^2 + 2x - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x < -1 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$3\sqrt{3x^2 + 2x - 1} = 4x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2 \geq 0 \\ 9(3x^2 + 2x - 1) = 16x^2 + 16x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 11x^2 + 2x - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Quan sát điều kiện và so sánh ta thu được tập hợp nghiệm $S = \{1\}$.

Bài toán 117. Giải phương trình $\frac{3x+5}{\sqrt{4x^2-x+6+1}} = 2 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$3x+3 = 2\sqrt{4x^2-x+6} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 9x^2+18x+9 = 4(4x^2-x+6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ 7x^2-22x+15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{15}{7} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1; x = \frac{15}{7}$.

Bài toán 118. Giải phương trình $\frac{8x}{2\sqrt{x^2+2x+6}+x+1} = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $2\sqrt{x^2+2x+6}+x+1 \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$7x-1 = 2\sqrt{x^2+2x+6} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x-1 \geq 0 \\ 49x^2-14x+1 = 4(x^2+2x+6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{7} \\ 45x^2-22x-23 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 119. Giải phương trình $\frac{\sqrt{2-x}+2x+1}{2\sqrt{2-x}+x} = \frac{4}{3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \leq 2 \\ 2\sqrt{2-x}+x \neq 0 \end{cases}$$

Phương trình đã cho biến đổi về

$$3\sqrt{2-x}+6x+3 = 8\sqrt{2-x}+4x \Leftrightarrow 5\sqrt{2-x} = 2x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ 50-25x = 4x^2+12x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ 4x^2+37x-41 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Đối chiếu điều kiện suy ra tập nghiệm $S = \{1\}$.

Bài toán 120. Giải phương trình $\frac{3\sqrt{x-1}+2x-3}{\sqrt{x-1}+x-1} = 2 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x > 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $3\sqrt{x-1} + 2x - 3 = 2\sqrt{x-1} + 2x - 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

Giá trị này thỏa mãn $x > 1$. Kết luận tập nghiệm $S = \{2\}$.

Bài toán 121. Giải phương trình $\frac{2\sqrt{3x^2+1}+x+1}{3\sqrt{3x^2+1}+x} = \frac{6}{7} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $3\sqrt{3x^2+1}+x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$14\sqrt{3x^2+1}+7x+7=6x+18\sqrt{3x^2+1} \Leftrightarrow x+7=4\sqrt{3x^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ x^2+14x+49=48x^2+16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ 47x^2-14x-33=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ x \in \left\{1; -\frac{33}{47}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{1; -\frac{33}{47}\right\}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $S = \left\{-\frac{33}{47}; 1\right\}$.

Bài toán 122. Giải phương trình $\frac{2\sqrt{x^2-3x+2}+2x}{\sqrt{x^2-3x+2}+x+1} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2-3x+2 \geq 0 \\ \sqrt{x^2-3x+2}+x+1 \neq 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{x^2-3x+2}+2x=\sqrt{x^2-3x+2}+x+1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+2}=1-x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x^2-3x+2=x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 123. Giải phương trình $\frac{\sqrt{x^3+1}+x+2}{x+1} = 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x > -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^3+1}+x+2=3x+3 &\Leftrightarrow \sqrt{x^3+1}=2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x^3+1=4x^2+4x+1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x^3-4x^2-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x(x^2-4x-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2+2\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = \{0; 2+2\sqrt{2}\}$.

Bài toán 124. Giải phương trình $\frac{\sqrt{x^3+x-1}+2x}{x+2} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3 + x - 1 \geq 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^3 + x - 1} + 2x = x + 2 &\Leftrightarrow \sqrt{x^3 + x - 1} = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x^3 + x - 1 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^3 - x^2 + 5x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ (x-1)(x^2+5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x = 1$.

Bài toán 125. Giải phương trình $\frac{4x-1}{\sqrt{x^3+2x-3}+2x+1} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3 + 2x - 3 \geq 0 \\ \sqrt{x^3 + 2x - 3} + 2x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2+x+3) \geq 0 \\ \sqrt{x^3 + 2x - 3} + 2x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^3 + 2x - 3} + 2x + 1 = 4x - 1 &\Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 2x - 3} = 2x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^3 + 2x - 3 = 4x^2 - 8x + 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^3 - 4x^2 + 10x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-1)(x^2-3x+7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x = 1$.

Bài toán 126. Giải phương trình $\frac{\sqrt{x^3+x^2+x-3}+2x+1}{2\sqrt{x^3+x^2+x-3}+x+1} = \frac{3}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3 + x^2 + x - 3 \geq 0 \\ 2\sqrt{x^3 + x^2 + x - 3} + x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^3 + x^2 + x - 3} + 4x + 2 = 6\sqrt{x^3 + x^2 + x - 3} + 3x + 3 &\Leftrightarrow 4\sqrt{x^3 + x^2 + x - 3} = x - 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 16x^3 + 16x^2 + 16x - 48 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 16x^3 + 15x^2 + 18x - 49 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện ta có nghiệm $x = 1$.

Bài toán 127. Giải phương trình $\frac{\sqrt{x^3+x+2}+2x-1}{\sqrt{x^3+x+2}+x} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} \sqrt{x^3 + x + 2} + x \neq 0 \\ x^3 + x + 2 \geq 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x^3 + x + 2} + 2x - 1 = \sqrt{x^3 + x + 2} + x \Leftrightarrow x = 1$.

Đổi chiều với điều kiện ta có nghiệm $x = 1$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực

1.
$$\frac{\sqrt{2x+1}+3x+1}{2x-2}=1.$$

2.
$$\frac{x-2}{\sqrt{2-x}+x+2}=\frac{1}{2}.$$

3.
$$\frac{\sqrt{4-x}+2x+3}{x+2\sqrt{4-x}+1}=1.$$

4.
$$\frac{\sqrt{x^2+3x+1}+3x+2}{2x-1}=2.$$

5.
$$\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2-4x+3}-x}=1.$$

6.
$$\frac{\sqrt{3x^2-x+1}+2x}{\sqrt{3x^2-x+1}-x+1}=2.$$

7.
$$\frac{2\sqrt{x^3+3x-4}+2x-1}{\sqrt{x^3+3x-4}+x+1}=\frac{1}{2}.$$

8.
$$\frac{2x+1}{\sqrt{x^3+4x^2-5}+x}=3.$$

9.
$$\frac{\sqrt{2x^3+x-3}+2x+1}{x+2}=1.$$

10.
$$\frac{\sqrt{x^2+1}+2x-3}{2-x+2\sqrt{x^2+1}}=\frac{2}{3}.$$

11.
$$\frac{\sqrt{x^2+x+3}+x+5}{2\sqrt{x^2+x+3}+x-2}=\frac{1}{2}.$$

12.
$$\frac{\sqrt{3x^2+1}+x-5}{3\sqrt{3x^2+1}-x+4}=\frac{1}{2}.$$

13.
$$\frac{2\sqrt{x^2+x+2}+x+6}{\sqrt{x^2+x+2}-2x+3}=1.$$

14.
$$\frac{\sqrt{x^3+4x+3}+x+3}{2\sqrt{x^3+4x+3}-x+3}=1.$$

15.
$$\frac{2\sqrt{x^4+x^2+2x-4}+2}{\sqrt{x^4+x^2+2x-4}+x+3}=1.$$

16.
$$\frac{3\sqrt{x^4-x+1}+x+5}{\sqrt{x^4-x+1}+2x+3}=1.$$

17.
$$\frac{2\sqrt{x^4+6x+9}+2x+5}{\sqrt{x^4+6x+9}+3x+8}=1.$$

18.
$$\frac{3\sqrt{x^3+4x^2+4x+5}+3x+1}{2\sqrt{x^3+4x^2+4x+5}+5x+2}=1.$$

Bài toán 128. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-2} \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $\frac{1}{2} \leq x \neq 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{2x-2}{(\sqrt{2x-1}+1)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$.

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $1 \leq x < 2$.

Lời giải 2.

Điều kiện $\frac{1}{2} \leq x \neq 2$.

Xét hai trường hợp

- Với $x > 2$, bất phương trình trở thành $\sqrt{2x-1}-1 \leq 0 \Leftrightarrow 2x-1 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$ (Loại).
- Với $\frac{1}{2} \leq x < 2$, bất phương trình trở thành $\sqrt{2x-1} \geq 1 \Leftrightarrow 2x-1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$, suy ra $1 \leq x < 2$.

Tổng hợp hai trường hợp ta có nghiệm $1 \leq x < 2$.

Bài toán 129. Giải bất phương trình $\frac{x-3}{\sqrt{x-2}+x-1} \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$.

Nhận xét $\sqrt{x-2}+x-1 > 0, \forall x \geq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Vậy tập nghiệm là $S = [3; +\infty)$.

Bài toán 130. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2} < 0 \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$.

Xét hai trường hợp

- Với $x > 2$, bất phương trình tương đương $\sqrt{3x-2}-2 < 0 \Leftrightarrow 3x-2 < 4 \Leftrightarrow x < 2$ (Loại).
- Với $\frac{2}{3} \leq x < 2$, bất phương trình tương đương $\sqrt{3x-2}-2 > 0 \Leftrightarrow 3x-2 > 4 \Leftrightarrow x > 2$ (Loại).

Kết luận bất phương trình ban đầu vô nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{3x-6}{(\sqrt{3x-2}+2)(x-2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{3x-2}+2} < 0$ (Vô nghiệm).

Vậy bất phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 131. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{3x-2}-x+1}{x-1} < 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{2}{3} \leq x \neq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{\sqrt{3x-2}-x+1}{x-1}-1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3x-2}-2x+2}{x-1} < 0$.

Xét hai trường hợp

- Với $x > 1$ ta có $\sqrt{3x-2} < 2x-2 \Leftrightarrow 3x-2 < 4x^2-8x+4 \Leftrightarrow 4x^2-11x+6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow x > 2$.
- Với $\frac{2}{3} \leq x < 1$ ta có $\sqrt{3x-2} > 2x-2$ (Nghiem đúng).

Kết hợp lại ta thu được nghiệm $S = \left[\frac{2}{3}; 1\right) \cup (2; +\infty)$.

Bài toán 132. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{x}-2x+1}{x+2} > 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x}-2x+1 > x+2 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 3x+1 \Leftrightarrow 3x-\sqrt{x}+1 < 0 \Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x}-\frac{1}{6}\right)^2 < -\frac{11}{12}.$$

Kết luận bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 133. Giải bất phương trình $\frac{2x}{\sqrt{3x+1}-1} > 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $-\frac{1}{3} \leq x \neq 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x(\sqrt{3x+1}+1)}{3x} > 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{3x+1} > 1 \Leftrightarrow 3x+1 > \frac{1}{4} \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $-\frac{1}{4} < x \neq 0$.

Lời giải 2.

Điều kiện $-\frac{1}{3} \leq x \neq 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{2x+1-\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}-1} > 0$.

Xét hai trường hợp xảy ra

- Nếu $\sqrt{3x+1}-1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$ thu được
 $2x+1 > \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow 4x^2+4x+1 > 3x+1 \Leftrightarrow 4x^2+x > 0$ (Nghiem đúng).
- Nếu $-\frac{1}{3} \leq x < 0$ thu được

$$2x+1 < \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow 4x^2+4x+1 < 3x+1 \Leftrightarrow 4x^2+x < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < x < 0.$$

Kết hợp hai trường hợp ta có nghiệm $-\frac{1}{4} < x \neq 0$.

Bài toán 134. Giải bất phương trình $\frac{4+x}{5-\sqrt{x-1}} > 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $1 \leq x \neq 26$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{4+x}{5-\sqrt{x-1}} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1+\sqrt{x-1}}{5-\sqrt{x-1}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 5-\sqrt{x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \neq x < 26.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $1 < x < 26$.

Bài toán 135. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{x^2-3x+2}+2}{3x-2} \leq 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 2 \\ \frac{2}{3} \neq x \leq 1 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{\sqrt{x^2-3x+2}+2}{3x-2} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2-3x+2}-6x+6}{3x-2} \leq 0 \quad (1).$

➤ Xét $3x-2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$; $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+2} \leq 6x-6 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-3x+2 \leq 36x^2-72x+36 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$

Kết hợp điều kiện thu được $\begin{cases} x = 1 \\ x \geq 2 \end{cases}$

➤ Xét $3x-2 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$; $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+2} \geq 6x-6$ (Nghiệm đúng với $x < \frac{2}{3}$).

Vậy bất phương trình đã cho có tập hợp nghiệm $S = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup \{1\} \cup [2; +\infty)$.

Bài toán 136. Giải bất phương trình $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-3x+3}-1} \geq 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 1; x \neq 2$.

Bất phương trình đã cho có dạng $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-3x+3}-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1-\sqrt{x^2-3x+3}}{\sqrt{x^2-3x+3}-1} \geq 0 \quad (1).$

✓ Xét $\sqrt{x^2-3x+3} > 1 \Leftrightarrow x^2-3x+2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow x-1 \geq \sqrt{x^2-3x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-2x+1 \geq x^2-3x+3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$

✓ Xét $\sqrt{x^2-3x+3} < 1 \Leftrightarrow x^2-3x+2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x-1 \leq \sqrt{x^2-3x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x^2-2x+1 \leq x^2-3x+3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $1 < x \neq 2$.

Bài toán 137. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{3x-2}+x^2+x+1}{x} < x+2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$. Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{3x-2}+x^2+x+1 > x^2+2x \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} > x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 3x-2 > x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 1 \\ \frac{5-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 1 \leq x < \frac{5+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{5+\sqrt{13}}{2}.$$

Bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left[\frac{2}{3}; \frac{5+\sqrt{13}}{2} \right)$.

Bài toán 138. Giải bất phương trình $\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+3}-3} \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2+x-6 \neq 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+3}-3} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3-\sqrt{x^2+x+3}}{\sqrt{x^2+x+3}-3} \leq 0 \quad (*)$.

Xét hai trường hợp xảy ra

- Nếu $\sqrt{x^2+x+3}-3 > 0 \Leftrightarrow x^2+x-6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -3 \end{cases}$

$$(*) \Leftrightarrow 2x+3 \leq \sqrt{x^2+x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 < 0 \\ 2x+3 \geq 0 \\ 4x^2+12x+9 \leq x^2+x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{3}{2} \\ x \geq -\frac{3}{2} \\ 3x^2+11x+6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \leq x \leq -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\frac{2}{3}.$$

Suy ra $x < -3$.

- Nếu $\sqrt{x^2+x+3}-3 < 0 \Leftrightarrow x^2+x-6 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 2$

$$(*) \Leftrightarrow 2x+3 \geq \sqrt{x^2+x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ 4x^2+12x+9 \geq x^2+x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ 3x^2+11x+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x \geq -\frac{2}{3} \vee x \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}.$$

Suy ra $-\frac{2}{3} \leq x < 2$.

Tổng hợp hai trường hợp ta có nghiệm $S = (-\infty; -3) \cup \left[-\frac{2}{3}; 2 \right)$.

Bài toán 139. Giải bất phương trình $\frac{x-4}{1-\sqrt{2x^2-x+3}} \leq 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét: $2x^2 - x + 3 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{23}{8} > 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{2x^2 - x + 3} < 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x - 4 &\geq 3 - 3\sqrt{2x^2 - x + 3} \Leftrightarrow 3\sqrt{2x^2 - x + 3} \geq 7 - x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - x < 0 \\ 7 - x \geq 0 \\ 18x^2 - 9x + 27 \geq x^2 - 14x + 49 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 7 \\ x \leq 7 \\ 17x^2 + 5x - 22 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 7 \\ -\frac{22}{17} \leq x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $S = \left[-\frac{22}{17}; 1\right] \cup (7; +\infty)$.

Bài toán 140. Giải bất phương trình $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+9}-2} \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét $\sqrt{x^2+2x+9}-2 = \sqrt{(x+1)^2+8}-2 > \sqrt{8}-2 > 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x+1 &\leq \sqrt{x^2+2x+9}-2 \Leftrightarrow x+3 \leq \sqrt{x^2+2x+9} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x^2+6x+9 \leq x^2+2x+9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq -3 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ -3 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 0 \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \leq 0$.

Bài toán 141. Giải bất phương trình $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+4}-1} \geq \frac{1}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét $\sqrt{x^2+x+4}-1 = \frac{x^2+x+3}{\sqrt{x^2+x+4}+1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2x-2 \geq \sqrt{x^2+x+4}-1 \Leftrightarrow 2x-1 \geq \sqrt{x^2+x+4} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 1 \\ 4x^2-4x+1 \geq x^2+x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x^2-5x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{5+\sqrt{61}}{6}.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq \frac{5+\sqrt{61}}{6}$.

Bài toán 142. Giải phương trình $\frac{x+2}{3-\sqrt{-x^2+4x-3}} \geq 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $1 \leq x \leq 3$.

Nhận xét $3-\sqrt{-x^2+4x-3} = \frac{x^2-4x+12}{3+\sqrt{-x^2+4x-3}} = \frac{(x-2)^2+8}{3+\sqrt{-x^2+4x-3}} > 0, \forall x \in [1; 3]$.

Bất phương trình đã cho trở thành $x+2 \geq 3-\sqrt{-x^2+4x-3} \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+4x-3} \geq 1-x$ (Nghiệm đúng $\forall x \in [1; 3]$).

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $1 \leq x \leq 3$.

Nhận xét.

Trong quá trình giải bất phương trình chứa ẩn dưới mẫu thức, các bạn cần đặc biệt lưu ý dấu của mẫu thức, thông thường phải chia hai trường hợp (mẫu thức âm hoặc dương), tuy nhiên trong một số trường hợp có thể sử dụng các phép lập luận để xét dấu của mẫu thức, làm giảm thiểu các trường hợp phức tạp xảy ra. Có thể thực hiện thao tác lập luận này bằng cách đánh giá thông thường theo các tính chất thuần túy của so sánh – bất đẳng thức, sử dụng bất đẳng thức cổ điển, hằng đẳng thức – tam thức bậc hai, đẳng thức liên hợp, hàm số và nhiều công cụ khác.

Điển hình là hai bài toán 139 và 140 sử dụng phân tích hằng đẳng thức – tam thức bậc hai – phân tích bình phương, các bài toán 141 và 142 đều sử dụng đẳng thức liên hợp, với bài toán căn thức chỉ chứa đa thức bậc hai các bạn có thể sử dụng một trong hai phương án này để lập luận. Trong trường hợp đa thức bậc ba và cao hơn, cần lựa chọn cách phản ứng phù hợp và chính xác hơn.

Bài toán 143. Giải bất phương trình $\frac{1+3x-\sqrt{1-3x^2}}{x} < 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}; x \neq 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{1+3x-\sqrt{1-3x^2}}{x} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1+x-\sqrt{1-3x^2}}{x} < 0 \quad (*)$.

Xét hai trường hợp

- Với $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ thì $(*) \Leftrightarrow 1+x < \sqrt{1-3x^2} \Leftrightarrow x^2+2x+1 < 1-3x^2 \Leftrightarrow 2x^2+x < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 0$ (Loại).
- Với $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x < 0$ thì $(*) \Leftrightarrow 1+x > \sqrt{1-3x^2} \Leftrightarrow x^2+2x+1 > 1-3x^2 \Leftrightarrow 2x^2+x > 0 \Leftrightarrow x > 0 \vee x < -\frac{1}{2}$.

Suy ra $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x < -\frac{1}{2}$. Kết hợp hai trường hợp ta có nghiệm $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x < -\frac{1}{2}$.

Bài toán 144. Giải phương trình $\frac{\sqrt{x^2+1}+2x^2+x-1}{x^2+2} \leq 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+1}+2x^2+x-1 \leq 2x^2+4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \leq 5-x \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x^2+1 \leq x^2-10x+25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x \leq \frac{12}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{12}{5}.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \leq \frac{12}{5}$.

Bài toán 145. Giải phương trình $\frac{x^2+\sqrt{3x^2-x-2}-x}{x+1} < x-2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 1 \\ -1 \neq x \leq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^2+\sqrt{3x^2-x-2}-x}{x+1} - (x-2) < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+\sqrt{3x^2-x-2}-x-(x^2-x-2)}{x+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3x^2-x-2}+2}{x+1} < 0 \Leftrightarrow x < -1.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x < -1$.

Bài toán 146. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{x^3+1}+x}{2x-1} > 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-1 \leq x \neq \frac{1}{2}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{\sqrt{x^3+1}+x}{2x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^3+1}-x+1}{2x-1} > 0 \quad (*)$.

Xét hai trường hợp

$$\text{➤ Với } x > \frac{1}{2} \text{ thì } (*) \Leftrightarrow \sqrt{x^3+1} > x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 1 \\ x^3+1 > x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 1 \\ x(x^2-x+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Suy ra (*) nghiệm đúng với $x > \frac{1}{2}$.

$$\text{➤ Với } -1 \leq x < \frac{1}{2} \text{ thì } (*) \Leftrightarrow \sqrt{x^3+1} < x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^3+1 > x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x(x^2-x+2) < 0 \end{cases} \text{ (hệ vô nghiệm)}.$$

Tổng hợp hai trường hợp ta thu được nghiệm $x > \frac{1}{2}$.

Bài toán 147. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{x^3+x^2+2x-4}+2x-2}{3x-1} < 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^3+x^2+2x-4}+2x-2 < 3x-1 &\Leftrightarrow \sqrt{x^3+x^2+2x-4} < x+1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^3+x^2+2x-4 < x^2+2x+1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^3 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \sqrt[3]{5} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được tập nghiệm $S = [1; \sqrt[3]{5}]$.

Bài toán 148. Giải bất phương trình $\frac{2x}{\sqrt{x^3+x^2-2}+x+1} \geq 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \sqrt{x^3+x^2-2}+x \neq 0 \\ x^3+x^2-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3+x^2-2}+x \neq 0 \\ (x-1)(x^2+2x+2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} 2x \geq \sqrt{x^3+x^2-2}+x+1 &\Leftrightarrow x-1 \geq \sqrt{x^3+x^2-2} \Leftrightarrow x^2-2x+1 \geq x^3+x^2-2 \\ \Leftrightarrow x^3+2x-3 \leq 0 &\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+3) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x = 1$.

Bài toán 149. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{2x+1}+x+1}{\sqrt{2x+1}-1} \leq 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{1}{2} \leq x \neq 0$. Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2x+1}+x+1}{\sqrt{2x+1}-1}-2 \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{x+3-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}-1} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+3)^2-(2x+1)}{x+3+\sqrt{2x+1}} \cdot \frac{2x}{\sqrt{2x+1}+1} \leq 0 \Leftrightarrow (x^2+4x+8)x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $-\frac{1}{2} \leq x < 0$.

Bài toán 150. Giải bất phương trình $\frac{3\sqrt{x-1}-2x}{2\sqrt{x-1}-x+1} \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ 2\sqrt{x-1}-x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \neq 5$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{x-1}-2x}{2\sqrt{x-1}-x+1}-1 \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-1}-3x-1}{2\sqrt{x-1}-x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{9x^2+5x+2}{\sqrt{x-1}+3x+1} \cdot \frac{2\sqrt{x-1}+x-1}{x^2-6x+5} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{9x^2+5x+2}{x^2-6x+5} \leq 0 \Leftrightarrow x^2-6x+5 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 5 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được tập nghiệm $1 < x < 5$.

Nhận xét.

Đối với lớp bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, về nguyên tắc chúng ta cần chia trường hợp và giải tuần tự. Tuy nhiên sử dụng linh hoạt điều kiện và đẳng thức liên hợp dẫn trực tiếp tới phương trình hệ quả, và kết quả là giải một bất phương trình tích đơn giản như một số bài toán trên.

Bài toán 151. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{x^2-2x}+x+2}{2\sqrt{x^2-2x}+1} \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2 \vee x \leq 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-2x}+x+2 \leq 2\sqrt{x^2-2x}+1 &\Leftrightarrow x+1 \leq \sqrt{x^2-2x} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x \geq -1 \\ x^2+2x+1 \leq x^2-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x \geq -1 \\ 4x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ -1 \leq x \leq -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được tập nghiệm $S = \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$.

Bài toán 152. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{x^2-1}+2x+3}{\sqrt{x^2-1}-1} \geq 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $1 \leq x^2 \neq 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\sqrt{x^2-1}+2x+3}{\sqrt{x^2-1}-1}-2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+5-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}-1} \geq 0 \quad (1).$$

Xét hai trường hợp

- Với $\sqrt{x^2-1} > 1 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{2}$ thì

$$(1) \Leftrightarrow 2x+5 \geq \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ 4x^2+20x+25 \geq x^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ 3x^2+20x+26 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{\sqrt{22}-10}{3}.$$

$$\text{Suy ra thu được } S_1 = \left[\frac{\sqrt{22}-10}{3}; -\sqrt{2} \right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty \right).$$

- Với $\sqrt{x^2-1} < 1 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ thì

$$(1) \Leftrightarrow 2x+5 \leq \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow 4x^2+20x+25 \leq x^2-1 \\ \Leftrightarrow 3x^2+20x+26 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{22}+10}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{22}-10}{3}$$

Dễ thấy trường hợp này loại.

Kết hợp hai trường hợp và điều kiện ta có nghiệm $S = \left[\frac{\sqrt{22}-10}{3}; -\sqrt{2} \right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty \right).$

Bài toán 153. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{x^3+4}+3x+4}{2\sqrt{x^3+4}+x+2} > 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2\sqrt{x^3+4}+x+2 \neq 0 \\ x \geq -\sqrt[3]{4} \end{cases}$$

Nhận xét $2\sqrt{x^3+4}+x+2 > 0, \forall x \geq -\sqrt[3]{4}$. Bất phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{x^3+4}+3x+4 > 2\sqrt{x^3+4}+x+2 \Leftrightarrow 2x+2 > \sqrt{x^3+4} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 4x^2+8x+4 > x^3+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^3-4x^2-8x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 2+\sqrt{3}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = (0; 2+\sqrt{3}).$

Bài toán 154. Giải bất phương trình $\frac{2\sqrt{5x^3+x^2-4x-2}}{\sqrt{5x^3+x^2-4x-2}+2-x} \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 5x^3+x^2-4x-2 \geq 0 \\ \sqrt{5x^3+x^2-4x-2} \neq x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(5x^2+6x+2) \geq 0 \\ \begin{cases} x-2 < 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 2; 5x^3 \neq 6 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{\sqrt{5x^3+x^2-4x-2}+x-2}{\sqrt{5x^3+x^2-4x-2}+2-x} \leq 0.$

$$\text{Xét } \sqrt{5x^3 + x^2 - 4x - 2} + 2 - x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 2 \\ 5x^3 + x^2 - 4x - 2 > x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 2 \\ 5x^3 > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $\sqrt{5x^3 + x^2 - 4x - 2} + 2 - x > 0, \forall x \geq 1$. Do đó ta có

$$\sqrt{5x^3 + x^2 - 4x - 2} \leq 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 5x^3 + x^2 - 4x - 2 \leq x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 5x^3 \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \sqrt[3]{\frac{6}{5}}.$$

Kết hợp điều kiện ban đầu thu được nghiệm $S = \left[1; \sqrt[3]{\frac{6}{5}}\right]$.

Bài toán 155. Giải bất phương trình $\frac{2\sqrt{x^3 + x^2 + 4x - 6} + x - 3}{\sqrt{x^3 + x^2 + 4x - 6} + 2x - 1} \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^3 + x^2 + 4x - 6 \geq 0 \\ \sqrt{x^3 + 3x^2 + x - 5} \neq 1 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2 + 2x + 6) \geq 0 \\ \sqrt{x^3 + 3x^2 + x - 5} \neq 1 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Nhận xét $\sqrt{x^3 + x^2 + 4x - 6} + 2x - 1 > 0, \forall x \geq 1$. Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^3 + x^2 + 4x - 6} + x - 3 &\leq \sqrt{x^3 + x^2 + 4x - 6} + 2x - 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + x^2 + 4x - 6} &\leq x + 2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + 4x - 6 \leq x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow x^3 \leq 10 \Leftrightarrow x \leq \sqrt[3]{10} \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình ban đầu có nghiệm $1 \leq x \leq \sqrt[3]{10}$.

Bài toán 156. Giải bất phương trình $\frac{2\sqrt{x^4 + x^2 - 2x + 2} + 2}{\sqrt{x^4 + x^2 - 2x + 2} + x + 1} < 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x^4 + (x-1)^2 + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét $\sqrt{x^4 + x^2 - 2x + 2} + x + 1 > x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^4 + x^2 - 2x + 2} + 2 &< \sqrt{x^4 + x^2 - 2x + 2} + x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^4 + x^2 - 2x + 2} < x - 1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^4 + x^2 - 2x + 2 < x^2 - 2x + 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^4 < -1 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình ban đầu vô nghiệm.

Nhận xét.

Vẫn là các thí dụ điển hình cho lớp bất phương trình một căn thức dạng phân thức hữu tỷ, lớp bài toán này nối tiếp các bài toán phía trước, với sự xuất hiện của cùng một căn thức trên tử thức và mẫu thức, thoạt nhìn có vẻ phức tạp, tuy nhiên sau khi quy đồng mẫu thức hai vế sẽ đưa về bất phương trình thương cơ bản. Điều quan trọng hơn cả là biểu thức chứa căn tăng dần độ phức tạp khi tồn tại dưới mẫu thức, do vậy chúng ta cần thận trọng hơn trong tính toán, lập luận dấu mẫu thức, hoặc là bắt buộc phải chia trường hợp, hoặc là đánh giá biểu thức dưới mẫu tùy theo hình thức bài toán cũng như trình độ của người trình bày.

Bài tập tương tự.

Giải các bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1.
$$\frac{\sqrt{3x-1}-2x+1}{x+1} < 0.$$

2.
$$\frac{\sqrt{2x-1}-x+2}{x-2} > 1.$$

3.
$$\frac{\sqrt{x^3+x^2+2x-4}-x-1}{x^2-5x+6} \leq 0.$$

4.
$$\frac{2x}{1-\sqrt{2x-1}+x} \leq 1.$$

5.
$$\frac{x+3}{2+x-\sqrt{x^2+5x+7}} \leq 1.$$

6.
$$\frac{\sqrt{4x+3}+2-x}{\sqrt{4x+3}+x-1} \leq 2.$$

7.
$$\frac{\sqrt{x^2-4x+2x-1}}{2x-1} > 0.$$

8.
$$\frac{x+\sqrt{3x^2-x-2}}{x-2} \leq 2.$$

9.
$$\frac{3\sqrt{3x^2+x+1}-x+5}{\sqrt{3x^2+x+1}+x-2} < 1.$$

10.
$$\frac{x+1}{\sqrt{3x^2+x+5}-3} \leq 2.$$

11.
$$\frac{x+2}{\sqrt{x^2+3x-2}} \leq 3.$$

12.
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+10}-3} \geq 2.$$

13.
$$\frac{2x+1+2\sqrt{-x^2+2x-7}}{2-\sqrt{-x^2+2x-7}} \leq 1.$$

14.
$$\frac{2\sqrt{x^2+2x+4}-x+5}{1-\sqrt{x^2+2x+4}} < 1.$$

15.
$$\frac{5x}{\sqrt{x^3+x^2+6x-8}+4x-3} \leq 1.$$

16.
$$\frac{2x-3}{\sqrt{3x^3+4x^2+4x+1}-2x-1} \leq 0.$$

17.
$$\frac{2\sqrt{2x^3+x^2+4x-7}+x+1}{\sqrt{2x^3+x^2+4x-7}+2x+3} \geq 1.$$

18.
$$\frac{2\sqrt{x^4+x^2-2x+5}+2x+3}{\sqrt{x^4+x^2-2x+5}+3x+2} \leq 1.$$

19.
$$\frac{\sqrt{x^4+x^2+8x-10}}{x+4} > 1.$$

Bài toán 157. Giải phương trình $(2x^2 - 5x + 2)\sqrt{x^2 - 2x} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2 \vee x \leq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $(x-2)(2x-1)\sqrt{x(x-2)} = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{1}{2}; 2\right\}$.

So sánh điều kiện ta có nghiệm $S = \{0; 2\}$.

Bài toán 158. Giải phương trình $(2x-3)\sqrt{x^2 - 5x + 4} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 4 \vee x \leq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $(2x-3)\sqrt{(x-1)(x-4)} = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{3}{2}; 4\right\}$.

Đối chiếu điều kiện thu được hai nghiệm $x = 1; x = 4$.

Bài toán 159. Giải phương trình $(x^2 - 5x + 6)\sqrt{-x^2 + 8x - 7} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $1 \leq x \leq 7$.

Phương trình đã cho có dạng $(x-2)(x-3)\sqrt{(1-x)(7-x)} = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 2; 3; 7\}$.

Kết hợp điều kiện ta có bốn nghiệm $S = \{1; 2; 3; 7\}$.

Bài toán 160. Giải phương trình $(x^3 - 2)\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương $(x^3 - 2)\sqrt{(3x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 2)|3x-1| = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{3}; \sqrt[3]{2}\right\}$.

Kết luận tập nghiệm $S = \left\{\frac{1}{3}; \sqrt[3]{2}\right\}$.

Bài toán 161. Giải phương trình $(3x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\sqrt{\frac{3x+1}{x}} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0 \vee x \leq -\frac{1}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với
$$\begin{cases} 3x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \\ \sqrt{\frac{3x+1}{x}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^3 = -2x^3 \\ 3x+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -x\sqrt[3]{2} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{1+\sqrt[3]{2}} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được tập nghiệm $S = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}\right\}$.

Bài toán 162. Giải phương trình $(x^2 - 4x + 7)\sqrt{-x^2 + 5x - 4} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $1 \leq x \leq 4$.

Phương trình đã cho tương đương với $\left[(x-2)^2 + 3\right]\sqrt{(1-x)(4-x)} = 0 \Leftrightarrow (1-x)(4-x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 4\}$.

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1; x = 4$.

Bài toán 163. Giải phương trình $(x^3 + 5x - 6)\sqrt{\frac{x-2}{x}} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2 \vee x < 0$.

Phương trình đã cho tương đương với
$$\begin{cases} x^3 + 5x - 6 = 0 \\ \sqrt{\frac{x-2}{x}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2 + x + 6) = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

So sánh điều kiện ta có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài toán 164. Giải phương trình $(x^4 - x + 2)\sqrt{\frac{x-1}{x+3}} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1 \vee x < -3$.

Xét hai trường hợp

- $x^4 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 + \frac{1}{4} + x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{2}$ (Vô nghiệm).
- $\sqrt{\frac{x-1}{x+3}} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Kết luận tập nghiệm $S = \{1\}$.

Bài toán 165. Giải phương trình $\left(x - \frac{2x+1}{x+2}\right)\sqrt{-3x^2 + 7x - 4} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $1 \leq x \leq \frac{4}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right)\sqrt{(x-1)(4-3x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ (x-1)(4-3x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-1; 1; \frac{4}{3}\right\}$.

Đối chiếu điều kiện thu được tập nghiệm $S = \left\{1; \frac{4}{3}\right\}$.

Bài toán 166. Giải phương trình $(x^3 - 3x + 2)\sqrt{\frac{x-1}{x^2 + 4x + 7}} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $(x-1)^2(x+2)\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -2$.

Quan sát điều kiện ta lấy nghiệm $x = 1$.

Bài toán 167. Giải phương trình $\left(2x - \frac{x+1}{x}\right)\sqrt{2x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)(x^2-x+1) \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Phương trình đã cho tương đương với } (2x^2 - x - 1)\sqrt{(x-1)^3 + x^3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x+1) = 0 \\ 1-x = x \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right\}.$$

$$\text{Đối chiếu điều kiện, suy ra tập nghiệm } S = \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}.$$

$$\text{Bài toán 168. Giải phương trình } \left(2x + \frac{9}{x-2}\right)\sqrt{-x^3 + 4x - 3} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} -x^3 + 4x - 3 \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2+x-3) \geq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương

$$\frac{2x^2 - 4x + 9}{x-2}\sqrt{(1-x)(x^2+x-3)} = 0 \Leftrightarrow [2(x-1)^2 + 7](1-x)(x^2+x-3) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{\sqrt{13}-1}{2}; -\frac{\sqrt{13}+1}{2}\right\}.$$

$$\text{Kết hợp điều kiện ta có nghiệm } S = \left\{1; \frac{\sqrt{13}-1}{2}; -\frac{\sqrt{13}+1}{2}\right\}.$$

$$\text{Bài toán 169. Giải phương trình } \left(x^2 + 1 + \frac{2x^2 - 2x}{5x+1}\right)\sqrt{-2x^3 - 3x + 5} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x^3 + 3x - 5 \leq 0 \\ 5x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \neq x \leq 1.$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành } \frac{5x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{5x+1}\sqrt{(x-1)(2x^2+2x+5)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \\ x-1 = 0 \\ 2x^2 + 2x + 5 = 0 \end{cases}$$

Xét ba trường hợp

$$\triangleright 5x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 = -4x^3 \Leftrightarrow x+1 = -\sqrt[3]{4}x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{4}}.$$

$$\triangleright x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\triangleright 2x^2 + 2x + 5 = 0, \Delta < 0 \text{ (Vô nghiệm)}.$$

$$\text{Đối chiếu điều kiện ta có hai nghiệm } x = 1; x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{4}}.$$

Nhận xét.

Các bài toán từ 157 đến 169 đều là dạng phương trình tích cơ bản, điểm đặc biệt là trong đó một nhân tử chứa căn thức phức tạp, các bạn cần hết sức chú ý điều kiện căn thức để loại các nghiệm ngoại lai. Việc giải các phương trình đại số bậc cao, phân thức hữu tỷ phía ngoài căn đôi khi cũng cần vận dụng khá nhiều kỹ năng.

$$\text{Bài toán 170. Giải phương trình } (x^3 + x^2 + x - 2)\sqrt{\frac{x-1}{x^2+1}} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } x \geq 1.$$

Xét hai trường hợp

- $x^3 + x^2 + x > 3, \forall x \geq 1 \Rightarrow x^3 + x^2 + x \neq 2.$
- $\sqrt{\frac{x-1}{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1.$

Bài toán 171. Giải phương trình $(2x^3 - 3x^2 + x - 2)\sqrt{\frac{x^2 + 3x + 5}{x - 2}} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải 1.

Điều kiện $x > 2.$

Phương trình đã cho tương đương với $2x^3 - 3x^2 + x - 2 = 0 \quad (*)$.

Dễ thấy $2x^3 - 3x^2 + x - 2 = (x - 2)(2x^2 + x) + 3x - 2 > 3 \cdot 2 - 2 = 4 > 0, \forall x > 2$, suy ra $(*)$ vô nghiệm.

Vậy phương trình ban đầu vô nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x > 2.$

Phương trình đã cho tương đương với $2x^3 - 3x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(2x - 3) + x - 2 = 0 \quad (1).$

Vì $x > 2 \Rightarrow 2x - 3 > 0 \Rightarrow x^2(2x - 3) + x - 2 > 0$, phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải 3.

Điều kiện $x > 2.$

Phương trình đã cho tương đương với $2x^3 - 3x^2 + x - 2 = 0 \quad (*)$.

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 2 = 0; x > 2$ ta có $f'(x) = 6x^2 - 6x + 1 > 0, \forall x > 2.$

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến với $x > 2$, do đó $f(x) > f(2) = 4$. Nghĩa là $(*)$ vô nghiệm.

Nhận xét.

Trong bài toán 171, thao tác chứng minh phương trình $(*)$ vô nghiệm khi $x > 2$ có thể gây khó khăn với đối với một số bạn học sinh, đặc biệt là các bạn học sinh THCS, khi kiến thức Toán sơ cấp chưa được trang bị đầy đủ. Hai lời giải 1 và 2 sử dụng nhóm nhân tử hợp lý và đánh giá thuần túy, lời giải 3 sử dụng công cụ đạo hàm – hàm số để tìm chặn dưới của hàm số $f(x)$, thuộc phạm vi chương trình giải tích 11 và 12 THPT, mong các bạn đọc nhỏ tuổi hết sức lưu ý.

Bài toán 172. Giải phương trình $(x^3 - 3x + 1)\sqrt{\frac{x-4}{x+2}} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 4 \vee x < -2$. Xét hai trường hợp

- $\sqrt{\frac{x-4}{x+2}} = 0 \Leftrightarrow x = 4.$
- $x^3 - 3x + 1 = 0 \quad (*)$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$, hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-2) = -1; f(0) = 1; f(1) = -1; f(2) = 3 \Rightarrow f(-2) \cdot f(0) < 0; f(0) \cdot f(1) < 0; f(1) \cdot f(2) < 0.$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có đúng một nghiệm trên từng khoảng $(-2; 0), (0; 1), (1; 2).$

Phương trình đa thức bậc ba nên có tối đa ba nghiệm, $(*)$ có ba nghiệm phân biệt đều thuộc $(-2; 2).$

Nghĩa là $(*)$ vô nghiệm với $x \geq 4 \vee x < -2.$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm $x = 4$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 4 \vee x < -2$.

Xét hai trường hợp

$$\bullet \sqrt{\frac{x-4}{x+2}} = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

$$\bullet x^3 - 3x + 1 = 0 \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 1$ với $x \geq 4 \vee x < -2$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 > 0$; $x \geq 4 \vee x < -2$, hàm số $f(x)$ liên tục, đồng biến với $x \geq 4 \vee x < -2$.

Suy ra $f(x) \notin (f(-2); f(4)] = (-1; 53]$, nghĩa là phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm với $x \geq 4 \vee x < -2$.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm $x = 4$.

Bài toán 173. Giải phương trình $(x^3 + 5x^2 + 2x - 3)\sqrt{\frac{x+5}{x-1}} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x > 1 \vee x \leq -5$.

Xét hai trường hợp

$$\checkmark \sqrt{\frac{x+5}{x-1}} = 0 \Leftrightarrow x = -5.$$

$$\checkmark x^3 + 5x^2 + 2x - 3 = 0 \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 3$; $x > 1 \vee x \leq -5$. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Lại có

$$f(-5) = -13; f(-2) = 5; f(-1) = -1; f(1) = 5 \Rightarrow f(-5) \cdot f(-2) < 0; f(-2) \cdot f(-1) < 0; f(-1) \cdot f(1) < 0.$$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất nghiệm trên từng khoảng $(-5; -2), (-2; -1), (-1; 1)$.

Phương trình đa thức có tối đa ba nghiệm, do đó (*) có ba nghiệm phân biệt đều thuộc $(-5; 1)$, như vậy (*) vô nghiệm trong trường hợp $x > 1 \vee x \leq -5$.

Kết luận tập nghiệm của phương trình đã cho $S = \{-5\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x > 1 \vee x \leq -5$.

Xét hai trường hợp

$$\blacksquare \sqrt{\frac{x+5}{x-1}} = 0 \Leftrightarrow x = -5.$$

$$\blacksquare x^3 + 5x^2 + 2x - 3 = 0 \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 3$; $x > 1 \vee x \leq -5$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 10x + 2 > 0$; $x > 1 \vee x \leq -5$, hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến với $x > 1 \vee x \leq -5$.

Suy ra $f(x) \notin [f(-5); f(1)] = [-13; 5]$, rõ ràng phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm $x = -5$.

Nhận xét.

Quý độc giả có thể thấy hai bài toán 172 và 173 vẫn thuộc dạng toán cơ bản phương trình tích hai nhân tử trong đó có một nhân tử đa thức bậc cao, tuy nhiên hướng xử lý phương trình bên ngoài căn đã tinh tế hơn một chút, nó dựa vào điều kiện xác định của biểu thức trong căn. Đối với các phương trình (*) phía trên, đều là phương trình bậc ba khó quy về hằng đẳng thức và máy tính cho nghiệm vô tỷ, sử dụng đánh giá thuần túy theo cách nhóm nhân tử tỏ ra khó khăn vì x thuộc hai khoảng (đoạn) rời nhau, nếu có thì rất phức tạp vì đánh giá hai chiều.

Phương án thứ nhất được lựa chọn là sử dụng máy tính tìm các nghiệm lẻ, khoanh vùng T các nghiệm và dùng kiến thức hàm số liên tục (chương trình giải tích lớp 11 THPT) để chứng minh phương trình chỉ có các nghiệm trong khoảng T đó, điều này thực hiện toàn vẹn khi T nằm ngoài miền xác định đồng nghĩa với việc phương trình đa thức đó vô nghiệm (lời giải 1 của hai bài toán). Ngược lại, chúng ta bắt buộc phải tìm nghiệm theo ẩn phụ lượng giác hoặc công thức Cardano (một số trường hợp hy hữu, đề cập trong các tài liệu khác).

Phương án thứ hai được lựa chọn là sử dụng công cụ đạo hàm để khảo sát sự biến thiên của hàm số đa thức trên một miền, dùng các giá trị tập xác định tìm chặn trên và chặn dưới, suy ra tập giá trị của hàm số tương ứng, và phương trình vô nghiệm khi số 0 không nằm trong tập giá trị thu được. Cách giải này nằm trong phạm vi kiến thức ứng dụng hàm số, chương trình giải tích lớp 12 THPT.

Hai nội dung này tác giả xin trình bày kỹ lưỡng tại tiêu mục Sử dụng đánh giá – bất đẳng thức – hàm số.

Bài toán 174. Giải phương trình $(x^4 - 8x + 63)\sqrt{\frac{3x-2}{4x}} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3} \vee x < 0$. Xét hai trường hợp

$$\diamond \sqrt{\frac{3x-2}{x}} = 0 \Leftrightarrow 3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}.$$

$$\diamond x^4 - 8x + 63 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 16x^2 + 64 = 16x^2 + 8x + 1 \Leftrightarrow (x^2 + 8)^2 = (4x+1)^2 \\ \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 9)(x^2 - 4x + 7) = 0 \Leftrightarrow [(x+2)^2 + 5][(x-2)^2 + 5] = 0 \quad (\text{Vô nghiệm}).$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{2}{3}$.

Bài toán 175. Giải phương trình $(x^3 + 2x^2 + x - 5)\sqrt{1-x^2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$.

Xét hai trường hợp

$$\triangleright 1-x^2=0 \Leftrightarrow x=1; x=-1.$$

$$\triangleright x^3 + 2x^2 + x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x+2) + 2x - 3 = 0 \quad (*).$$

Ta có $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow (x^2 - 1)(x+2) \leq 0; 2x - 3 < 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x+2) + 2x - 3 < 0$, vậy (*) vô nghiệm.

Kết luận phương trình có hai nghiệm $x = -1; x = 1$.

Bài toán 176. Giải phương trình $(x^2 - 3x)\sqrt{\frac{x-1}{x^2-5x+6}} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 3 \vee 1 \leq x < 2$.

Phương trình đã cho tương đương với $x(x-3)\sqrt{\frac{x-1}{x^2-5x+6}} = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 3; 1\}$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được $S = \{1; 3\}$.

Bài toán 177. Giải phương trình $\frac{4\sqrt{x^2-5x+4}}{x^2+3} = \frac{\sqrt{x^2-5x+4}}{x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 4 \vee 0 \neq x \leq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2 - 5x + 4} \left(\frac{4}{x^2 + 3} - \frac{1}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 3) \sqrt{x^2 - 5x + 4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) \sqrt{(x-1)(x-4)} = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 3; 4\}$$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm $S = \{1; 4\}$.

Bài toán 178. Giải phương trình $\frac{\sqrt{-x^2 + 7x - 6}}{x^2 + 5} = \frac{\sqrt{-x^2 + 7x - 6}}{3(x+1)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $1 \leq x \leq 6$.

Phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} -x^2 + 7x - 6 = 0 \\ x^2 + 5 = 3x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-6) = 0 \\ (x+1)(x-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-1; 1; 4; 6\}$.

So sánh điều kiện ta thu được tập nghiệm $S = \{1; 4; 6\}$.

Bài toán 179. Giải phương trình $\frac{\sqrt{2x-1} + 4x^2}{x^2 - x} = \frac{4x+1}{x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $\frac{1}{2} \leq x \neq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x-1} + 4x^2 = x(4x+1) \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Kết hợp điều kiện thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 180. Giải phương trình $\frac{\sqrt{2-x} + 3x^2 + 1}{4x^2 - x} = \frac{3x+2}{4x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 2; x \neq 0; x \neq \frac{1}{4}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2-x} + 3x^2 + 1 = 3x^2 + 2x \Leftrightarrow \sqrt{2-x} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2-x = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 181. Giải phương trình $\frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} - 2} = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x^2 + 3x + 1 \geq 0; \sqrt{x^2 + 3x + 1} \neq 2; x \neq 1$.

Xét hai trường hợp

- $x^2 - x + 1 = 0; \Delta < 0$ (Vô nghiệm).

$$\bullet \quad \sqrt{x^2 + 3x + 1} - 2 = x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3x + 1} = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 3x + 1 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x = 0$.

Bài toán 182. Giải phương trình $\frac{x^3 + 2x - 3}{\sqrt{3x^2 + 4} + x + 1} = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x + 3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $(\sqrt{3x^2 + 4} + x + 1)(2x + 3) \neq 0$.

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & x^3 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1. \\ \blacksquare \quad & \sqrt{3x^2 + 4} + x + 1 = 2x + 3 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 + 4} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 3x^2 + 4 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x(x - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0; 2\}. \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x = 0; x = 2$.

Bài toán 183. Giải phương trình $\frac{x^2 + 4x - 5}{2\sqrt{4x - x^2}} = \frac{x^2 + 4x - 5}{\sqrt{4x - x^2} + 2x - 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{4x - x^2} + 2x - 1 \neq 0 \end{cases}$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \quad & x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = -5; x = 1. \\ \blacktriangleright \quad & 2\sqrt{4x - x^2} = \sqrt{4x - x^2} + 2x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{4x - x^2} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ 4x - x^2 = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 5x^2 - 8x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4 + \sqrt{11}}{5}. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x = \frac{4 + \sqrt{11}}{5}$.

Bài toán 184. Giải phương trình $\frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x^2 - 5x}} = \frac{2x^2 + x + 5}{\sqrt{x^2 - 5x}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x < 5 \vee x < 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2 + 4x + 3 = 2x^2 + x + 5 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 2\}$.

Kết hợp điều kiện thì phương trình vô nghiệm.

Bài toán 185. Giải phương trình $\frac{3x^3 + 4x^2 + 5x}{\sqrt{1 - 2x} - 1} = \frac{x^2 + 2x - 1}{\sqrt{1 - 2x} - 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $0 \neq x \leq \frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$3x^3 + 4x^2 + 5x = x^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 = -2x^3 \Leftrightarrow x+1 = -x\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}.$$

Đổi chiều điều kiện ta có nghiệm $S = \left\{ -\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}} \right\}$.

Bài toán 186. Giải phương trình $\frac{x^3 + 4x^2 + 3x}{\sqrt{3x^2 + 5x - 1} - 2} = \frac{x^2 + 7}{\sqrt{3x^2 + 5x - 1} - 2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \sqrt{3x^2 + 5x - 1} - 2 \neq 0 \\ 3x^2 + 5x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 4x^2 + 3x = x^2 + 7 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x - 7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 4x + 7) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Đổi chiều điều kiện ta được nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 187. Giải phương trình $(x-3)\sqrt{x^2 + 4x + 5} = x^2 - 4x + 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x-3)\sqrt{x^2 + 4x + 5} = (x-1)(x-3) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \sqrt{x^2 + 4x + 5} = x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 + 4x + 5 = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \begin{cases} x \geq 3 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

Bài toán 188. Giải phương trình $(x-2)\sqrt{-x^2 + 5x - 4} = x^2 - 5x + 6 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $1 \leq x \leq 4$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (x-2)\sqrt{-x^2 + 5x - 4} &= (x-2)(x-3) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \sqrt{-x^2 + 5x - 4} = x-3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \begin{cases} x \geq 3 \\ -x^2 + 5x - 4 = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \begin{cases} x \geq 3 \\ 2x^2 - 11x + 13 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x = \frac{11 + \sqrt{17}}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left\{ 2; \frac{11 + \sqrt{17}}{4} \right\}$.

Bài toán 189. Giải phương trình $(2x-1)\sqrt{x^3 + 2x + 1} + 1 = x(2x+1) \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x^3 + 2x + 1 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(2x-1)\sqrt{x^3+2x+1}=(x+1)(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ \sqrt{x^3+2x+1}=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x \geq -1 \\ x(x-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}.$$

Đối chiếu với điều kiện ta có nghiệm $S = \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$.

Bài toán 190. Giải phương trình $(x-2)\sqrt{4x^3+7x^2+7x+2}=2x^2-3x-2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $4x^3+7x^2+7x+2 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (x-2)\sqrt{4x^3+7x^2+7x+2} &= (x-2)(2x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \sqrt{4x^3+7x^2+7x+2}=2x+1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x \geq -\frac{1}{2} \\ 4x^3+7x^2+7x+2=4x^2+4x+1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x \geq -\frac{1}{2} \\ x^3+3x^2+3x+1=-3x^3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x \geq -\frac{1}{2} \\ (x+1)^3=-3x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-\frac{1}{1+\sqrt[3]{3}} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được tập nghiệm $S = \left\{-\frac{1}{1+\sqrt[3]{3}}; 2\right\}$.

Bài toán 191. Giải phương trình $(x+1)\sqrt{x^3+4x^2+4x}=x^2+3x+2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3+4x^2+4x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x \geq 0 \end{cases}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (x+1)\sqrt{x^3+4x^2+4x} &= (x+1)(x+2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{x^3+4x^2+4x}=x+2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x \geq -2 \\ x^3+4x^2+4x=x^2+4x+4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x \geq -2 \\ x^3+3x^2-4=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x \geq -2 \\ (x-1)(x+2)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-2; -1; 1\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-2; 1\}$.

Bài toán 192. Giải phương trình $2(x+3)\sqrt{x}=x^2+4x+3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2(x+3)\sqrt{x} &= x^2+4x+3 \Leftrightarrow 2(x+3)\sqrt{x}=(x+1)(x+3) \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x} &= x+1 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện suy ra nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 193. Giải phương trình $(x-2)\sqrt{2x^3+x^2+4x-7}=x^2-4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^3+x^2+4x-7 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2+3x+7) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (x-2)\sqrt{2x^3+x^2+4x-7} &= (x-2)(x+2) \Leftrightarrow (x-2)\left(\sqrt{2x^3+x^2+4x-7}-x-2\right)=0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \sqrt{2x^3+x^2+4x-7}=x+2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \begin{cases} x \geq -2 \\ 2x^3+x^2+4x-7=x^2+4x+4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \begin{cases} x \geq -2 \\ 2x^3=11 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\sqrt[3]{\frac{11}{2}} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện suy ra phương trình đề bài có hai nghiệm $x=2; x=\sqrt[3]{\frac{11}{2}}$.

Bài toán 194. Giải phương trình $(x+4)\sqrt{3x^3+x^2+2x-6}=x^2+5x+4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $3x^3+x^2+2x-6 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2+4x+6) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \geq 1 \\ (x+4)\sqrt{3x^3+x^2+2x-6} &= (x+1)(x+4) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{3x^3+x^2+2x-6} &= x+1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x^3+x^2+2x-6 &= x^2+2x+1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x^3 &= 7 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{7}{3}} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $x = \sqrt[3]{\frac{7}{3}}$.

Bài toán 195. Giải phương trình $(2x+1)\sqrt{x^3+x^2+2x-16}=2x^2+3x+1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3+x^2+2x-16 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+3x+8) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \begin{cases} x \geq 2 \\ (2x+1)\sqrt{x^3+x^2+2x-16} &= (2x+1)(x+1) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{x^3+x^2+2x-16} &= x+1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^3+x^2+2x-16 &= x^2+2x+1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^3 &= 17 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{17} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $x = \sqrt[3]{17}$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $2(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x^2 - 5x + 6} = 0.$

2. $\left(2 - \frac{1}{x}\right)\sqrt{x^2 - 7x + 6} = 0.$

3. $(2x^2 - 3x + 1)\sqrt{1 - \frac{x+3}{x-4}} = 0.$

4. $(-x^2 + 3x - 2)\sqrt{\frac{x-5}{x}} = 0.$

5. $(7x^3 - 3)\sqrt{2 - \frac{x}{1-3x}} = 0.$

6. $(x^3 - 6x + 5)\sqrt{\frac{4x+1}{x-3}} - 3 = 0.$

7. $(5x^3 - 6x^2 + 12x - 8)\sqrt{9x - 5x^2} = 0.$

8. $(3x^4 - x^2 - 4x - 4)\sqrt{3 - x^2} = 0.$

9. $(x^4 + 12x - 5)\sqrt{1 + \frac{x-6}{x+1}} = 0.$

10. $(4x^3 + 3x - 6)\sqrt{\frac{x-6}{x+1}} = 0.$

11. $(3x^3 + 2x^2 + x - 2)\sqrt{\frac{x-4}{x+3}} = 0.$

12. $(x^3 - x^2 - 3x + 1)\sqrt{\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 10}} = 0.$

13. $(3x^3 + 5x^2 - 7x + 1)\sqrt{\frac{x-1}{x+3}} = 0.$

14. $\left(3x + 1 - \frac{1}{x}\right)\sqrt{-x^3 + 8x - 7} = 0.$

15. $\left(2x^2 + 3x + 3 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{6 - 5x - x^3} = 0.$

16. $\left(\frac{1}{x} + x + 3x^2 - 4\right)\sqrt{x^3 + 6x - 7} = 0.$

17. $(x^3 + 5x^2 - 9x + 1)\sqrt{\frac{x+7}{x-4}} = 0.$

18. $(2x^3 + 4x^2 - 7x + 2)\sqrt{\frac{x-2}{x^2 + 9x + 20}} = 0.$

19. $\left(\frac{x^2 + 5x^2 + x - 7}{x^3 - 3x + 2}\right)\sqrt{-x^2 + 2x - 1} = 0.$

20. $(x^4 + 6x - 9)\sqrt{\frac{x-2}{x^2 - x + 2}} = 0.$

$$21. (x-2)\sqrt{5x^3+7x^2+10x+9} = x^2-3x+2.$$

$$22. \frac{\sqrt{4x-1}}{x^2+8x+9} = \frac{\sqrt{4x-1}}{4x^2+9}.$$

$$23. \frac{2\sqrt{5-x}}{4x^2+5x+6} = \frac{\sqrt{5-x}}{x^2+6x}.$$

$$24. \frac{1-\sqrt{9-x}}{x^3+4x^2+3} = \frac{1-\sqrt{9-x}}{x^2-3x+7}.$$

$$25. \frac{\sqrt{-x^2+7x-8}}{7x^3+5x^2+4x} = \frac{\sqrt{-x^2+7x-8}}{8x^2+x+1}.$$

$$26. \frac{\sqrt{-x^3+3x-2}}{6x-7} = \frac{\sqrt{-x^3+3x-2}}{2(x^3+3x+11)}.$$

$$27. \frac{\sqrt{-3x+1}+2x+1}{x^2-3x} = \frac{2}{x-3}.$$

$$28. \frac{\sqrt{5-2x}+2x^2-2}{2x^2-5x} = \frac{x+1}{x}.$$

$$29. \frac{x^3-11x+10}{\sqrt{4x-1}-2x+5} = \frac{x^3-11x+10}{x-4}.$$

$$30. \frac{5x^2-x+1}{\sqrt{4x^2-9x+5}-2} = \frac{5x^2-x+1}{3x-1}.$$

$$31. \frac{3x^2-8x+5}{\sqrt{x^2+6x+2x-3}} = \frac{3x^2-8x+5}{x+3\sqrt{x^2+6x+2}}.$$

$$32. \frac{\sqrt{x^2-7x+9}-2}{x^2-8x} = \frac{2-\sqrt{x^2-7x+9}+x}{x^2-8x}.$$

$$33. \frac{x^3-9x+8}{1+\sqrt{4-x}-2x} = \frac{x^3-9x+8}{2\sqrt{4-x}-1}.$$

$$34. \frac{4x^3+2x}{\sqrt{8x+1}+x} = \frac{2x+11}{\sqrt{8x+1}+x}.$$

$$35. (x+2)\sqrt{x^2+7x+9}-x^2 = 3x+2.$$

$$36. (2x-1)\sqrt{x^2-8x+7}+2x = 4x^2.$$

$$37. x\sqrt{x^3+x^2+4x-4} = x^2+2x.$$

$$38. (3x+1)\sqrt{x-1} = 3x^2+4x.$$

$$39. (x-4)\sqrt{x^3+x^2-2x-13}+5x = x^2+4.$$

$$40. x+(4x-1)\sqrt{4x^3+2x^2+3x-8} = 4x^2.$$

$$41. \sqrt{x}(x+4) = x^2+11x+28.$$

$$42. (x^3+x^2+x-5)\sqrt{-x^2+x} = 0.$$

$$43. \frac{3x+2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3x+1} = \frac{3x+2-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-x+4}.$$

Bài toán 196. Giải bất phương trình $x\sqrt{2-x} \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với
$$\begin{cases} \sqrt{2-x} = 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Kết luận nghiệm của bất phương trình là $x = 2 \vee x \leq 0$.

Bài toán 197. Giải bất phương trình $(2x-1)\sqrt{5x-1} \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{5}$. Bất phương trình đã cho tương đương với
$$\begin{cases} \sqrt{5x-1} = 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S = \left\{\frac{1}{5}\right\} \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Bài toán 198. Giải bất phương trình $(2x^2 - 3x + 1)\sqrt{7x-1} \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{7}$. Bất phương trình đã cho tương đương với
$$\begin{cases} \sqrt{7x-1} = 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{7} \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = \left\{\frac{1}{7}\right\} \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Bài toán 199. Giải bất phương trình $(9x^2 - 19x + 2)\sqrt{6x-1} \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{6}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \sqrt{6x-1} = 0 \\ 9x^2 - 19x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 1 \\ (x-2)(9x-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \vee x \leq \frac{1}{9} \vee x \geq 2.$$

Đổi chiều điều kiện ta có tập nghiệm $S = \left\{\frac{1}{6}\right\} \cup [2; +\infty)$.

Bài toán 200. Giải bất phương trình $(x^2 - 6x + 5)\sqrt{x^2 - 5x + 6} \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \vee x \leq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0 \\ x^2 - 6x + 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-3) = 0 \\ (x-1)(x-5) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 5 \\ x \in \{2; 3\} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta được tập nghiệm $S = (-\infty; 1] \cup \{2\} \cup \{3\} \cup [5; +\infty)$.

Bài toán 201. Giải bất phương trình $(x^2 - 6x + 8)\sqrt{x^3 + 4x - 5} \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $(x-1)(x^2 + x + 5) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x^3 + 4x - 5 = 0 \\ x^2 - 6x + 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2 + x + 5) = 0 \\ (x-2)(x-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 2 \end{cases}$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S = [1; 2] \cup [4; +\infty)$.

Bài toán 202. Giải bất phương trình $\left(1 - \frac{1}{x-1}\right)\sqrt{x^2 - 6x} \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 1 \\ 0 \leq x \leq 6 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{x-2}{x-1}\sqrt{x^2 - 6x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 6x} = 0 \\ \frac{x-2}{x-1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; x = 6 \\ 1 < x \leq 2 \end{cases}$

Kết luận tập nghiệm $S = \{0\} \cup (1; 2] \cup \{6\}$.

Bài toán 203. Giải bất phương trình $\left(1 + x - \frac{2}{x}\right)\sqrt{-x^2 + x} \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $0 < x \leq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^2 + x - 2}{x}\sqrt{x(1-x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x(1-x)} = 0 \\ \frac{(x-1)(x+2)}{x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; x = 1 \\ x \leq -2 \\ 0 < x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được tập nghiệm $0 < x \leq 1$.

Bài toán 204. Giải bất phương trình $\frac{x^3 + 5x - 6}{x-2}\sqrt{7x - x^2} \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $0 \leq x \leq 7$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{(x-1)(x^2 + x + 6)}{x-2}\sqrt{7x - x^2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x(7-x)} = 0 \\ \frac{x-1}{x-2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; x = 7 \\ 1 \leq x < 2 \end{cases}$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S = \{0\} \cup [1; 2) \cup \{7\}$.

Bài toán 205. Giải bất phương trình $\frac{x^4 - 4x + 6}{x^3 - 4}\sqrt{9x - x^2} \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $0 \leq x \leq 9; x \neq \sqrt[3]{4}$.

Nhận xét $x^4 - 4x + 6 = x^4 - 4x^2 + 4 + 4x^2 - 4x + 1 + 1 = (x^2 - 2)^2 + (2x - 1)^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{\sqrt{9x-x^2}}{x^3-4} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x(9-x)} = 0 \\ x^3-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0; x=9 \\ x > \sqrt[3]{4} \end{cases}$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm $S = \{0\} \cup (\sqrt[3]{4}; 9]$.

Bài toán 206. Giải bất phương trình $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)\sqrt{-2x^3 - 5x + 7} \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^3 + 5x - 7 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 2x + 7) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^3-2}{x}\sqrt{-2x^3-5x+7} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-2x^3-5x+7} = 0 \\ \frac{x^3-2}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x^2+2x+7) = 0 \\ x \geq \sqrt[3]{2} \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \geq \sqrt[3]{2} \\ x < 0 \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện ta có tập nghiệm $S = (-\infty; 1) \cup \{1\}$.

Bài toán 207. Giải bất phương trình $(3-x)\sqrt{x^2-4x+3} \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 1 \end{cases}$

- Xét $x=1 \vee x=3$ thì bất phương trình đã cho nghiệm đúng.
- Xét $\begin{cases} x > 3 \\ x < 1 \end{cases}$ thì bất phương trình trở thành $3-x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$. Kết hợp điều kiện suy ra $x > 3$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S = \{1\} \cup [3; +\infty)$.

Bài toán 208. Giải bất phương trình $(x^2 + x - 2)\sqrt{2x^2 - 5x + 2} \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2 \vee x \leq \frac{1}{2}$.

- Xét $x=2 \vee x=\frac{1}{2}$; bất phương trình đã cho nghiệm đúng.
- Xét $x > 2 \vee x < \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{2x^2-5x+2} > 0$.

Bất phương trình trở thành $x^2 + x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1$. Suy ra $-2 \leq x < \frac{1}{2}$.

Kết luận nghiệm của bất phương trình là $-2 \leq x \leq \frac{1}{2} \vee x = 2$.

Bài toán 209. Giải bất phương trình $\left(\frac{3x-7}{x^2-x-2} + 1\right)\sqrt{x^2-4x} \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 4 \\ -1 \neq x \leq 0 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2} \cdot \sqrt{x^2 - 4x} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+4)}{(x+1)(x-2)} \cdot \sqrt{x(x-4)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x+4}{x+1} \sqrt{x(x-4)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x(x-4)} = 0 \\ \frac{x+4}{x+1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; x = 4 \\ x > -1 \\ x \leq -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = (-\infty; -4] \cup \{0\} \cup [4; +\infty)$

Bài toán 210. Giải bất phương trình $(x^3 + 4x - 5)\sqrt{5x^3 - 6x^2 + 12x - 8} \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $5x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow 4x^3 + (x-2)^3 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{4x} \geq 2-x \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{\sqrt[3]{4}+1}$.

Bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} \sqrt{5x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = 0 \\ x^3 + 4x - 5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ (x-1)(x^2 + x + 5) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{4x} \geq 2-x \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{\sqrt[3]{4}+1} \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt[3]{4}+1} \leq x \leq 1.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S = \left[\frac{2}{\sqrt[3]{4}+1}; 1\right]$.

Bài toán 211. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{4x-3}}{x-2} \leq \frac{\sqrt{4x-3}}{2x-1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{3}{4} \leq x \neq 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x-3} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2x-1} \right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{(x-2)(2x-1)} \sqrt{4x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4x-3}}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x-3} = 0 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ x < 2 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $\frac{3}{4} \leq x < 2$.

Bài toán 212. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{x-2}}{3x} \geq \frac{2\sqrt{x-2}}{x-3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2 \leq x \neq 3$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x-2} \left(\frac{1}{3x} - \frac{2}{x-3} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5x+3}{3x(x-3)} \sqrt{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-2}}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x < 3 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $2 \leq x < 3$.

Bài toán 213. Giải bất phương trình $\frac{2\sqrt{4-x}}{x+1} \geq \frac{3\sqrt{4-x}}{3x-1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 4; x \neq \frac{1}{3}; x \neq -1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4-x} \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{3x-1} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5x-3}{(x+1)(3x-1)} \sqrt{4-x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-x} = 0 \\ \frac{5x-3}{(x+1)(3x-1)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ -1 < x < \frac{1}{3} \\ x \geq \frac{3}{5} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = \left(-1; -\frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{3}{5}; 4\right]$.

Bài toán 214. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{x-1}}{3x+2} \leq \frac{2\sqrt{x-1}}{5x-1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{1}{3x+2} - \frac{2}{5x-1} \right) \sqrt{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+5}{(3x+2)(5x-1)} \sqrt{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-1}}{5x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x > \frac{1}{5} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x \geq 1$.

Bài toán 215. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{2x-1}}{x^2+x+1} \leq \frac{\sqrt{2x-1}}{x-1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x-1} \left(\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x-1} \right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2}{(x^2+x+1)(x-1)} \sqrt{2x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x-1}}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\} \cup (1; +\infty)$.

Bài toán 216. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{6-x}}{x^2+x+1} > \frac{\sqrt{6-x}}{x^2+2x-3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 6$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x^2+2x-3} \right) \sqrt{6-x} > 0 &\Leftrightarrow \frac{x-4}{(x^2+x+1)(x-1)(x+3)} \sqrt{6-x} > 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x-4}{(x-1)(x+3)} \sqrt{6-x} > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6-x} > 0 \\ \frac{x-4}{(x-1)(x+3)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 < x < 6 \\ -3 < x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S = (-3; 1) \cup (4; 6)$.

Bài toán 217. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2+1} \leq \frac{\sqrt{x-2}+1}{2x^2+4x+5} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2.$

Bất phương trình đã cho tương đương với $x^2+1 \geq 2x^2+4x+5 \Leftrightarrow 2(x+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = -1.$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 218. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{3x-5}}{x^3-x} > \frac{\sqrt{3x-5}}{x^3+2x-3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{5}{3}.$

Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{1}{x^3-x} > \frac{1}{x^3+2x-3} \right) \sqrt{3x-5} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-1)}{x(x-1)^2(x+1)(x^2+x+3)} \cdot \sqrt{3x-5} > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3x-5}}{x-1} > 0 \quad (*)$$

Bất phương trình (*) nghiệm đúng với $x \geq \frac{5}{3}.$ Kết luận nghiệm $S = \left[\frac{5}{3}; +\infty \right).$

Bài toán 219. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{4x-5}}{x^2-2x} \geq \frac{\sqrt{4x-5}}{2x^2+x+9} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{5}{4}$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x-5} \left(\frac{1}{x^2-2x} - \frac{1}{2x^2+x+9} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+3x+9}{(x^2-2x)(2x^2+x+9)} \sqrt{4x-5} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x-5} = 0 \\ x(x-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} \vee \begin{cases} x > 2 \\ x < 0 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = \left\{ \frac{5}{4} \right\} \cup (2; +\infty).$

Bài toán 220. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{1-x}}{x^3+4x^2+7x} \leq \frac{\sqrt{1-x}}{4x^2+7x+8} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 1.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{1}{x^3+4x^2+7x} - \frac{1}{4x^2+7x+8} \right) \sqrt{1-x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{8-x^3}{x(x^2+4x+7)(4x^2+7x+8)} \sqrt{1-x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{8-x^3}{x} \sqrt{1-x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x} = 0 \\ \frac{8-x^3}{x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \geq 2 \\ x < 0 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = (-\infty; 0) \cup \{1\}.$

Bài toán 221. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{x^2+3x-4}}{x-2} \geq \frac{\sqrt{x^2+3x-4}}{3x-2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 1; x \neq 2; x \neq \frac{2}{3} \\ x \leq -4 \end{cases}$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+3x-4} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{3x-2} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{(x-2)(3x-2)} \sqrt{x^2+3x-4} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+3x-4} = 0 \\ \frac{2x}{(x-2)(3x-2)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; x = -4 \\ 0 \leq x < \frac{2}{3} \\ x > 2 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = (-\infty; -4] \cup \{1\} \cup (2; +\infty).$

Bài toán 222. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{-x^2+4x}}{x^2+5x+4} > \frac{\sqrt{-x^2+4x}}{2x^2+5x} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $0 < x \leq 4.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{1}{x^2+5x+4} - \frac{1}{2x^2+5x} \right) \sqrt{-x^2+4x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x(x+1)(x+4)(2x+5)} \sqrt{x(4-x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x(4-x)} = 0 \\ x^2-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; x = 4 \\ x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện thu được tập nghiệm $2 \leq x \leq 4.$

Bài toán 223. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{-2x^2+5x-3}}{x^2+x+6} \leq \frac{\sqrt{-2x^2+5x-3}}{3x^2+5x+6} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } -2x^2+5x-3 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{3}{2}.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{1}{x^2+x+6} - \frac{1}{3x^2+5x+6} \right) \sqrt{-2x^2+5x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x}{(x^2+x+6)(3x^2+5x+6)} \sqrt{-2x^2+5x-3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-2x^2+5x-3} = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = \frac{3}{2}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x = 1; x = \frac{3}{2}.$

Bài toán 224. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{x-3x^2}}{x^3+x^2+2} \geq \frac{\sqrt{x-3x^2}}{2x^3+x^2-3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x(1-3x) \geq 0 \\ x^3+x^2+2 \neq 0 \\ (x-1)(2x^2+3x+3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{3}.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{1}{x^3 + x^2 + 2} - \frac{1}{2x^3 + x^2 - 3} \right) \sqrt{x - 3x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^3 - 5}{(x^3 + x^2 + 2)(2x^3 + x^2 - 3)} \sqrt{x - 3x^2} \geq 0$$

$$\frac{x^3 - 5}{(x - 1)(2x^2 + 3x + 3)} \sqrt{x - 3x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x(1 - 3x)} = 0 \\ \frac{x^3 - 5}{x - 1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; x = \frac{1}{3} \\ x < 1 \\ x \geq \sqrt[3]{5} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$.

Bài toán 225. Giải bất phương trình $\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x - x^2} \leq 3x\sqrt{x - x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x(1 - x) \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 1.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x} \sqrt{x - x^2} \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 (2x + 1) \sqrt{x - x^2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x(1 - x)} = 0 \\ (x - 1)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0; 1\}.$$

Kết hợp điều kiện thu được nghiệm $S = \{1\}$.

Bài toán 226. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{x^3 + 4x - 5}}{x^2 + 6x} \leq \frac{\sqrt{x^3 + 4x - 5}}{2x + 5} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} (x - 1)(x^2 + x + 5) \geq 0 \\ (x^2 + 6x)(2x + 5) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{1}{x^2 + 6x} - \frac{1}{2x + 5} \right) \sqrt{x^3 + 4x - 5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x - 5}{(x^2 + 6x)(2x + 5)} \sqrt{x^3 + 4x - 5} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 5) \sqrt{(x - 1)(x^2 + x + 5)} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x \geq 1$.

Bài toán 227. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{4x^3 + 3x - 7}}{2 - x} > \frac{\sqrt{4x^3 + 3x - 7}}{2x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $(x - 1)(4x^2 + 4x + 7) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{1}{2 - x} - \frac{1}{2x} \right) \sqrt{4x^3 + 3x - 7} > 0 \Leftrightarrow \frac{3x - 2}{(x - 2)x} \sqrt{4x^3 + 3x - 7} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x^3 + 3x - 7} > 0 \\ \frac{3x - 2}{(x - 2)x} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{3}{2} < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 0 \end{cases}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x > 1$.

Bài toán 228. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{x^4 - 4x + 4}}{x^3 + 2x^2} > \frac{2\sqrt{x^4 - 4x + 4}}{x^2 - 3x - 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x^4 - 4x + 4 \geq 0; x^3 + 2x^2 \neq 0; x^2 - 3x - 1 \neq 0.$

Nhận xét $x^4 - 4x + 4 = x^4 - 2x^2 + 1 + 2(x^2 - 2x + 1) + 1 = (x^2 - 1)^2 + 2(x - 1)^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3 + 2x^2} - \frac{2}{x^2 - 3x - 1} > 0 &\Leftrightarrow \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2(x + 2)(x^2 - 3x - 1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{(2x + 1)(x^2 + x + 1)}{x^2(x + 2)(x^2 - 3x - 1)} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x + 1}{(x + 2)(x^2 - 3x - 1)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < -1 \\ \frac{3 - \sqrt{13}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có $S = (-2; -1) \cup \left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2}; \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right).$

Bài toán 228. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{2x^2 - 5x + 2}}{x + 1} \leq \frac{\sqrt{2x^2 - 5x + 2}}{x^2 + 7} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \vee x \leq \frac{1}{2}.$ Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{1}{x^2 + 7} - \frac{1}{x + 1}\right)\sqrt{2x^2 - 5x + 2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 6}{(x^2 + 7)(x + 1)}\sqrt{2x^2 - 5x + 2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = 0 \\ x + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; x = \frac{1}{2} \\ x < -1 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm $S = (-\infty; -1) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [2; +\infty).$

Bài toán 229. Giải bất phương trình $(10x^3 + 3x^2 + 3x + 1)\sqrt{\frac{x - 7}{7x + 1}} \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 7 \vee x < -\frac{1}{7}.$

$$\text{Bất phương trình đã cho tương đương với } \begin{cases} \sqrt{\frac{x - 7}{7x + 1}} = 0 \\ 9x^3 + (x + 1)^3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x + 1 \leq -x\sqrt[3]{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x \leq -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{9}} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x = 7 \vee x \leq -\frac{1}{1 + \sqrt[3]{9}}.$

Bài toán 230. Giải bất phương trình $(x^3 - x^2 + 2x - 7)\sqrt{\frac{x - 2}{1 + 3x^2}} \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 2.$

Ta có $x^3 - x^2 + 2x - 7 = (x - 2)(x^2 + x) + 4x - 7 \geq 4.2 - 7 = 1, \forall x \geq 2.$

Do đó bất phương trình đã cho nghiệm đúng với $x \geq 2$. Tập nghiệm $S = [2; +\infty)$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 2$.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 7; x \geq 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$, hiển nhiên liên tục và đồng biến trên $[2; +\infty)$.

Ta có $f(x) \geq f(2) = 1$. Vậy bất phương trình đã cho nghiệm đúng với $x \geq 2$.

Kết luận tập hợp nghiệm $S = [2; +\infty)$.

Bài toán 231. Giải bất phương trình $(x^3 - 3x^2 + 5)\sqrt{\frac{x-2}{x^2+x+1}} \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5; x \geq 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) \geq 0, \forall x \geq 2$.

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến trên miền $[2; +\infty)$, do đó $f(x) \geq f(2) = 1$.

Bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq 2$.

Bài toán 232. Giải bất phương trình $(2x^4 - 4x + 5)\sqrt{\frac{x-4}{x^2-6x+5}} \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x > 5 \\ 1 < x \leq 4 \end{cases}$

Nhận xét $2x^4 - 4x + 5 = 2(x^4 - 2x^2 + 1) + 4x^2 - 4x + 1 + 2 = 2(x^2 - 1)^2 + (2x - 1)^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\frac{x-4}{x^2-6x+5}} = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Vậy bất phương trình đề bài có tập nghiệm là $S = \{4\}$.

Bài toán 233. Giải bất phương trình $(x^3 - 1)\sqrt{\frac{3x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 5x + 6}} \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{3x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 5x + 6} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3 + (x+1)^3}{(x-2)(x-3)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \leq -\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}} \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{3x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 5x + 6}} = 0 \\ x^3 - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + (x+1)^3 = 0 \\ x^3 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}} \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x \leq -\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$.

Nhận xét.

- Đây đã là bài toán số 233 của tài liệu, nhưng tạm dừng lại với bất phương trình quy về dạng tích chứa một căn thức độc lập trên mẫu thức hoặc với một căn thức có biểu thức trong căn phức tạp, phạm vi bao quát vẫn gói gọn trong khuôn khổ hạn hẹp. Tài liệu nhỏ được biên soạn với số lượng ví dụ lớn, đa dạng, đề cao

tính chi tiết, tỉ mỉ và chuẩn mực, với tiêu chí ấy, tác giả cố gắng đi sâu vào từng dạng toán, thay đổi và phức tạp hóa các biểu thức dưới dấu căn, mục đích hướng bạn đọc tới một cái nhìn đa chiều và đầy đủ nhất về bất phương trình chứa căn.

➤ Đối với lớp bất phương trình tích trên, các bạn học sinh lưu ý kiến thức cơ bản sau

$$A.B.C...\sqrt{f(x)}.\sqrt{g(x)}....\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{f(x)}=0 \\ \sqrt{g(x)}=0 \\ \dots \\ A.B.C...\geq 0 \end{cases}; A.B.C...\sqrt{f(x)}.\sqrt{g(x)}....< 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{f(x)}>0 \\ \sqrt{g(x)}>0 \\ \dots \\ A.B.C...<0 \end{cases}$$

Bài toán 234. Giải bất phương trình $(x^4 - 3x^2 + 6x - 8)\sqrt{\frac{x^4 - 4x + 11}{x^4 - 2x + 7}} < 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Nhận xét $x^4 - 2x + 7 = x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 + x^2 - 2x + 1 + 5 = (x^2 - 1)^2 + x^2 + (x - 1)^2 + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$x^4 - 4x + 11 = x^4 - 4x^2 + 4 + 4x^2 - 4x + 1 + 6 = (x^2 - 2)^2 + (2x - 1)^2 + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Do đó bất phương trình đã cho có tập xác định $\mathbb{R}$. Để thấy bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 + 6x - 8 < 0 &\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 < x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 - (x - 3)^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - x + 2)(x^2 + x - 4) < 0 \Leftrightarrow \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < x < \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

Kết luận tập hợp nghiệm $S = \left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right)$.

Bài toán 235. Giải bất phương trình $(x^3 - 3x + 2)\sqrt{\frac{x^4 + x^2 + 6x - 8}{x^2 + x + 10}} \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Nhận xét $x^2 + x + 10 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{39}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x^3 - 3x + 2 \leq 0 & (1) \\ x^4 + x^2 + 6x - 8 = 0 & (2) \end{cases}$

- $(1) \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 2) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \leq -2 \end{cases}$
- $(2) \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 - (x^2 - 6x + 9) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 - (x - 3)^2 = 0$
 $\Leftrightarrow (x^2 + x - 2)(x^2 - x + 4) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2)\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 1\}$.

Kết hợp hai trường hợp ta thu được nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ x \leq -2 \end{cases}$

Bài tập tương tự.

Giải các bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $7x^3\sqrt{3x-1} \leq 0.$
2. $2(x^4 - x^2 + 1)\sqrt{1-3x} \geq 0.$
3. $x^2(2x-5)\sqrt{x-1} < 0.$
4. $3x^3(5x-1)\sqrt{3x-2} > 0.$
5. $(3x^2 - 5x + 2)\sqrt{2x-1} \leq 0.$
6. $9(4-3x-x^2)\sqrt{x} \geq 0.$
7. $(4x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\sqrt{5-x} > 0.$
8. $(5x^3 - 6x^2 + 12x - 8)\sqrt{2-x} < 0.$
9. $11(2x^4 - 4x + 3)\sqrt{6x-5} \leq 0.$
10. $(5x^4 - 6x^2 + 1)\sqrt{3-2x} \geq 0.$
11. $(x^3 - 6x^2 + 2x + 3)\sqrt{3x^2 - 2x} \leq 0.$
12. $\frac{4x-5}{x+1} \cdot \sqrt{3-8x} < 0.$
13. $\frac{4x^2 - 4x + 3}{4x-1} \cdot \sqrt{7x-2} > 0.$
14. $(4x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\sqrt{x^2 - 8x} > 0.$
15. $\frac{x^3 + 3x^3 + x - 5}{3x-1} \cdot \sqrt{x-3} \geq 0.$
16. $\frac{3x^3 + x^2 + 3x - 7}{1-9x^2} \cdot \sqrt{5-x} \leq 0.$
17. $\frac{6x^3 + 3x^2 + x - 10}{x^2 - 5x + 6} \cdot \sqrt{x-2} \geq 0.$
18. $\frac{x^3 - 8}{x^3 + 2x - 3} \cdot \sqrt{9x-1} > 0.$
19. $\frac{4x^2 - 1}{4x^2 + x - 18} \cdot \sqrt{5x^2 - 1} < 0.$
20. $\frac{4x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 + 4x^2 + 4x - 9} \sqrt{2x-1} \leq 0.$
21. $(3x-1)\sqrt{x^2 - 9x + 8} \leq 0.$
22. $(2-7x)\sqrt{-x^2 + 10x - 9} > 0.$
23. $\left(2 - \frac{1}{x-5}\right)\sqrt{x^2 - 8x + 7} \geq 0.$
24. $\left(3 + x - \frac{2}{x}\right)\sqrt{5x^2 - 4x - 1} < 0.$
25. $\left(x + \frac{2}{x}\right)\sqrt{9x^2 - 8x} \leq 0.$

$$26. \left(x + 2 - \frac{2}{x+1} \right) \sqrt{-x^2 + 3x - 2} > 0.$$

$$27. \left(3x + 1 - \frac{2}{x+4} \right) \sqrt{-3x^2 + 7x - 4} \leq 0.$$

$$28. \left(2x - \frac{1}{x+3} \right) \sqrt{-9x^2 + 8x + 1} < 0.$$

$$29. \frac{x^2 - 8x + 7}{x} \sqrt{x^2 + 2x - 8} \geq 0.$$

$$30. \frac{7x^2 - 9x + 2}{2x^2 - 5x + 2} \sqrt{4x^2 - 7x} > 0.$$

$$31. \frac{3x+1}{x^2-7x} \sqrt{-4x^2+3x} \leq 0.$$

$$32. \frac{6x^2-7x+1}{x^2+3x} \sqrt{-10x^2+3x} < 0.$$

$$33. \frac{2x-1}{4x^2-8x+3} \sqrt{1+2x-3x^2} \geq 0.$$

$$34. \frac{x^3-1}{x^2+3x+8} \sqrt{2+7x-9x^2} > 0.$$

$$35. \frac{x^3-3x^2+2}{x^2+1} \sqrt{1+9x-10x^2} < 0.$$

$$36. \frac{4+x}{x^3-7x^2+6} \sqrt{2+5x-7x^2} < 0.$$

$$37. \frac{x^2-10x+27}{x^3+3x^2+5x-9} \sqrt{4x^2-11x} \geq 0.$$

$$38. (x^3-7x^2+6) \sqrt{6x^3+x^2+x-9} > 0.$$

$$39. (6x-9) \sqrt{3x^3+4x^2+x-8} \geq 0.$$

$$40. \left(4 - \frac{1}{x} \right) \sqrt{x^3+4x^2+x-6} > 0.$$

$$41. (6x^2+x-7) \sqrt{4x^3+x^2+2x-7} \leq 0.$$

$$42. \left(x^2+x-\frac{2}{x} \right) \sqrt{2x^3+2x^2+x-5} \geq 0.$$

$$43. \left(x - \frac{1}{x} \right) \sqrt{5x^3+6x^2+12x+8} < 0.$$

$$44. \frac{x+4}{x-2} \sqrt{x^3-1} > 0.$$

$$45. \frac{x^2-9x+18}{x^2-5x+6} \sqrt{4x^3-7} \leq 0.$$

$$46. \left(x + 2 - \frac{3}{x} \right) \sqrt{3x^3+x^2-4} \leq 0.$$

$$47. \left(x^2+x+1-\frac{3}{x} \right) \sqrt{x^3-27} > 0.$$

48. $\left(3x^2 + 1 - \frac{4}{x}\right)\sqrt{x^3 + 2x^2 + x - 4} \geq 0.$
49. $\left(2x - \frac{1}{x}\right)\sqrt{x^3 + x - 2} \geq 0.$
50. $\frac{x^3 + 1}{x^3 + 4x - 5}\sqrt{x^3 + x - 10} < 0.$
51. $\frac{x}{1 - 3x^2}\sqrt{1 - 4x^3} > 0.$
52. $\left(x^2 + 1 - \frac{2}{x}\right)\sqrt{5x^3 + x^2 + x - 7} < 0.$
53. $\frac{3x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 4}\sqrt{x^3 + 3x^2 + x - 5} > 0.$
54. $\frac{4x^2 - x}{x^2 - 10x + 9}\sqrt{5x^3 - 7x + 2} \geq 0.$
55. $(4x - 1)\sqrt{2(x^3 - 9)} < 0.$
56. $(4x^2 - 5x + 1)\sqrt{x^3 + 4x^2 - 5} \leq 0.$
57. $(2x^2 - 5x + 2)\sqrt{8 - x^3} \geq 0.$
58. $\frac{x^2 - 6x + 5}{x^4 - x + 4}\sqrt{1 + x^3} < 0.$
59. $\frac{4x - 9}{x + 2}\sqrt{8x^3 - 1} < 0.$
60. $\frac{x}{5 - x}\sqrt{9x^3 - 1} > 0.$
61. $\frac{(x^2 + 3x + 2)\sqrt{x^4 - 2x + 7}}{x^3 + 3x^2 + x - 5} < 0.$
62. $\frac{(x^3 + 3x^2 - 4)\sqrt{x^4 - 3x + 17}}{x^3 + x - 10} \leq 0.$
63. $(6x^2 - 1)\sqrt{\frac{x^3 - 5x + 4}{x^2 - x + 18}} \leq 0.$
64. $(9x^2 - 1)\sqrt{\frac{x}{8x^2 - 1}} \leq 0.$
65. $(7x^2 - 1)\sqrt{\frac{x^4 + x - 2}{x^2 + x + 10}} \geq 0.$
66. $(x^4 + 2x^2 - 8x - 4)\sqrt{\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x + 6}} \geq 0.$
67. $\frac{1}{x^3 + x - 2}\sqrt{\frac{x^4 - 8x^2 + 17}{x^4 - x^2 - 12x - 11}} \geq 0.$
68. $\frac{x^4 - 4x + 20}{x^3 + 3x^2 + 4x - 8}\sqrt{\frac{4x^4 + x^2 - 12x - 11}{x^2 - 5x + 6}} \leq 0.$

Bài toán 236. Giải bất phương trình $\frac{3x+1}{\sqrt{2x-1}} < \frac{x^2+x+1}{\sqrt{2x-1}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x > \frac{1}{2}.$

Bất phương trình đã cho tương đương với $3x+1 < x^2+x+1 \Leftrightarrow x^2-2x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 0 \end{cases}$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x > 2.$

Bài toán 237. Giải bất phương trình $\frac{2x+1}{\sqrt{1-x}} < \frac{x^3+2x-7}{\sqrt{1-x}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x < 1.$

Bất phương trình đã cho tương đương với $2x+1 < x^3+2x-7 \Leftrightarrow x^3-8 > 0 \Leftrightarrow x > 2.$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 238 Giải bất phương trình $\frac{x^2+x+2}{\sqrt{6-x}} \geq \frac{x^3+2x^2+2x-1}{\sqrt{6-x}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x < 6.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+x+2 \geq x^3+2x^2+2x-1 \Leftrightarrow x^3+x^2+x-3 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+3) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \leq 1.$

Bài toán 239. Giải bất phương trình $\frac{1-x}{1+\sqrt{2-x}} \leq \frac{3+x}{1+\sqrt{2-x}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 2.$

Bất phương trình đã cho tương đương với $1-x \leq 3+x \Leftrightarrow x \geq -1.$ Kết hợp điều kiện ta được $-1 \leq x \leq 2.$

Bài toán 240. Giải bất phương trình $\frac{x^2+4x+1}{2+3\sqrt{5-2x}} \geq \frac{2x^2+3x+1}{2+3\sqrt{5-2x}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \leq \frac{5}{2}.$

Bất phương trình đã cho tương đương với $x^2+4x+1 \geq 2x^2+3x+1 \Leftrightarrow x^2-x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $0 \leq x \leq 1.$

Bài toán 241. Giải bất phương trình $\frac{3x^2+x+5}{3+\sqrt{x+9}} > \frac{x(x+2)^2}{3+\sqrt{x+9}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -9.$ Bất phương trình đã cho tương đương với

$$3x^2+x+5 > x^3+4x^2+4x \Leftrightarrow x^3+x^2+3x-5 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+5) < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $-9 \leq x < 1.$

Bài toán 242. Giải bất phương trình $\frac{x^2 + x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1} + 1} \leq \frac{3x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{2\sqrt{x^2 + x + 1} + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 + x + 1 \leq 3x^3 + 4x^2 + 4x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \geq -2x^3 \Leftrightarrow (x+1)^3 \geq -2x^3 \Leftrightarrow x+1 \geq -\sqrt[3]{2}x \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}.$$

Kết luận tập nghiệm $S = \left[-\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}; +\infty \right).$

Bài toán 243. Giải bất phương trình $\frac{x^2 + 3x + 2}{5 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}} > \frac{x^2 + 5x}{5 + \sqrt{x^2 - 3x + 2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2 \vee x \leq 1.$

Bất phương trình đã cho tương đương với $x^2 + 3x + 2 > x^2 + 5x \Leftrightarrow x < 1.$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x < 1.$

Bài toán 244. Giải bất phương trình $\frac{4x^2 + x + 1}{3 + \sqrt{4 - x^2}} \leq \frac{x^4 + 4x^2 - 11x + 21}{3 + \sqrt{4 - x^2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $-2 \leq x \leq 2.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^4 - 12x + 20 \geq 0 \Leftrightarrow (x^4 - 2x^2 + 1) + 2(x^2 - 6x + 9) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 + 2(x - 3)^2 + 1 \geq 0 \text{ (Hiển nhiên)}.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $-2 \leq x \leq 2.$

Bài toán 245. Giải bất phương trình $\frac{3x^3 + 4x^2 + x + 1}{11\sqrt{x+5} + 7} > \frac{4x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 3x + 4}{11\sqrt{x+5} + 7} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -5.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$3x^3 + 4x^2 + x + 1 > 4x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 3x + 4 \Leftrightarrow 4x^4 - 4x + 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow (4x^4 - 4x^2 + 1) + (4x^2 - 4x + 1) + 1 < 0 \Leftrightarrow (2x^2 - 1)^2 + (2x - 1)^2 + 1 < 0 \quad [*]$$

Dễ thấy [*] vô nghiệm. Kết luận bất phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 246. Giải bất phương trình $\frac{4x + 3}{4 + \sqrt{3x - x^2}} \leq \frac{x^4 + 3x + 4}{4 + \sqrt{3x - x^2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $0 \leq x \leq 3.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$4x + 3 \leq x^4 + 3x + 4 \Leftrightarrow x^4 - x + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - x^2 + \frac{1}{4} + x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq 0$$

Vậy bất phương trình đề bài có tập nghiệm $0 \leq x \leq 3.$

Bài toán 247. Giải bất phương trình $\frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + \sqrt{1-2x}} \leq \frac{2x^2 + x + 4}{x^2 + \sqrt{1-2x}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \leq \frac{1}{2}$. Biến đổi về $x^2 + 2x + 4 \leq 2x^2 + x + 4 \Leftrightarrow x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 0 \end{cases}$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \leq 0$.

Bài toán 248. Giải bất phương trình $\frac{3x^3 + 2x + 1}{x - 1 + 3\sqrt{x-2}} > \frac{2x^3 + x + 3}{x - 1 + 3\sqrt{x-2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$.

Nhận xét $x - 2 + 3\sqrt{x-2} > 0, \forall x \geq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$3x^3 + 2x + 1 > 2x^3 + x + 3 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Kết hợp điều kiện thu được nghiệm $S = [2; +\infty)$.

Bài toán 249. Giải bất phương trình $\frac{x^3 + x^2 + 1}{3x^3 - 2 + \sqrt{x-1}} \geq \frac{x^3 + 5}{3x^3 - 2 + \sqrt{x-1}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$.

Nhận xét $3x^3 - 2 + \sqrt{x-1} > 0, \forall x \geq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $x^3 + x^2 + 1 \geq x^3 + 5 \Leftrightarrow x^2 \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x \geq 2$.

Bài toán 250. Giải bất phương trình $\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x - \sqrt{x} + 2} \leq \frac{x^2 + 3}{x - \sqrt{x} + 2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Ta có $x - \sqrt{x} + 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0, \forall x \geq 0$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 2x^2 + 1 \leq x^2 + 3 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $0 \leq x \leq 1$.

Bài toán 251. Giải bất phương trình $\frac{x^4 + 3x + 2}{x^2 - x + \sqrt{x-2}} \geq \frac{4x + 1}{x^2 - x + \sqrt{x-2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$.

Nhận xét $x^2 - x + \sqrt{x-2} = x(x-1) + \sqrt{x-2} > 0, \forall x \geq 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^4 + 3x + 2 \geq 4x + 1 \Leftrightarrow x^4 - x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 + \frac{1}{4} + x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq 0 \text{ (Hiển nhiên).}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq 2$.

Bài toán 252. Giải bất phương trình $\frac{x^3 + 5x^2 + 2x + 1}{\sqrt{4x^2 - 8x + 3} + 1} < \frac{4x^2 + x + 4}{\sqrt{4x^2 - 8x + 3} + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $4x^2 - 8x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2} \vee x \leq \frac{1}{2}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 5x^2 + 2x + 1 \leq 4x^2 + x + 4 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2x + 3) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x \leq \frac{1}{2}$.

Bài toán 253. Giải bất phương trình $\frac{3x^4 + x^2 - 2x + 20}{2x - 1 + \sqrt{x^3 - 1}} > \frac{x^4 + x^2 + 14x + 1}{2x - 1 + \sqrt{x^3 - 1}} \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$.

Nhận xét $2x - 1 + \sqrt{x^3 - 1} > 0, \forall x \geq 1$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$3x^4 + x^2 - 2x + 20 > x^4 + x^2 + 14x + 1 \Leftrightarrow 2x^4 - 16x + 19 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^4 - 2x^2 + 1) + 4(x^2 - 4x + 4) + 1 > 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 1)^2 + 4(x - 2)^2 + 1 > 0 \quad [*]$$

Dễ thấy [*] hiển nhiên với mọi giá trị thực x . Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq 1$.

Bài toán 254. Giải bất phương trình $\frac{5x^2 + x}{3x - 1 - \sqrt{2x - 1}} \geq \frac{7x - 1}{3x - 1 - \sqrt{2x - 1}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$.

Nhận xét $3x - 1 - \sqrt{2x - 1} = \frac{1}{2}x + 2x - 1 - \sqrt{2x - 1} + \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{2}x + 2x - 1 - \sqrt{2x - 1} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}x + \left(\sqrt{2x - 1} - \frac{1}{2}\right)^2 > 0, \forall x \geq \frac{1}{2}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $5x^2 + x \geq 7x - 1 \Leftrightarrow 5x^2 - 6x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \frac{1}{5} \end{cases}$

Kết hợp điều kiện ta thu được tập nghiệm $S = [1; +\infty)$.

Bài toán 255. Giải bất phương trình $\frac{29x^2 + 3x}{x^2 - \sqrt{x} + 1} \leq \frac{28x^2 + 3x + 4}{x^2 - \sqrt{x} + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Nhận xét $x^2 - \sqrt{x} + 1 = x^2 - x + \frac{1}{4} + x - \sqrt{x} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0, \forall x \geq 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $29x^2 + 3x \leq 28x^2 + 3x + 4 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = [0; 2]$.

Bài toán 256. Giải bất phương trình $\frac{x^3 + 4x^2 + 3x + 1}{x - \sqrt{x - 1}} > \frac{x^2 + 2x + 5}{x - \sqrt{x - 1}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$.

$$\text{Nhận xét } x - \sqrt{x-1} = \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x-1}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(2x-1)^2 + 3}{x + \sqrt{x-1}} > 0, \forall x \geq 1.$$

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 4x^2 + 3x + 1 > x^2 + 2x + 5 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + x - 4 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 4x + 4) + x > 0 \quad (*)$$

Dễ thấy (*) nghiệm đúng với $x \geq 1$. Kết luận nghiệm $x \geq 1$.

Bài toán 257. Giải bất phương trình $\frac{x^4 + 3x^2}{2x - \sqrt{x-2}} \leq \frac{x^2 + 3}{2x - \sqrt{x-2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$.

$$\text{Nhận xét } 2x - \sqrt{x-2} = \frac{4x^2 - x + 2}{2x + \sqrt{x-2}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{(8x-1)^2 + 31}{2x + \sqrt{x-2}} > 0, \forall x \geq 2.$$

Bất phương trình đã cho trở thành $x^4 + 3x^2 \leq x^2 + 3 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$.

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 258. Giải bất phương trình $\frac{2x^3 + 4x^2 + x + 4}{\sqrt{x^2 - 2x + 5} - 2} \leq \frac{x^3 + 7x^2 - 2x + 5}{\sqrt{x^2 - 2x + 5} - 2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 1$.

$$\text{Nhận xét } \sqrt{x^2 - 2x + 5} - 2 = \sqrt{(x-1)^2 + 4} - 2 > 0, \forall x \neq 1.$$

Bất phương trình đã cho trở thành

$$2x^3 + 4x^2 + x + 4 \leq x^3 + 7x^2 - 2x + 5 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x < 1$.

Bài toán 259. Giải bất phương trình $\frac{x^4 + 2x^2 + 3x}{\sqrt{x^2 - x + 5} - 2} \geq \frac{2x^2 + 15x - 16}{\sqrt{x^2 - x + 5} - 2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Nhận xét } \sqrt{x^2 - x + 5} - 2 = \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 5} + 2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(2x-1)^2 + 3}{\sqrt{x^2 - x + 5} + 2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2 + 3x &\geq 2x^2 + 15x - 16 \Leftrightarrow x^4 - 12x + 16 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 9 + 6(x^2 - 2x + 1) + 16 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3)^2 + 6(x-1)^2 + 16 \geq 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Dễ thấy (*) hiển nhiên với mọi giá trị thực x . Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in \mathbb{R}$.

Bài toán 260. Giải bất phương trình $\frac{4x^2 + 1}{\sqrt{2(x^2 - x + 3)} - 2} > \frac{x^2 + 13}{\sqrt{2(x^2 - x + 3)} - 2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét $\sqrt{2(x^2 - x + 3)} - 2 = \frac{2x^2 - 2x + 2}{\sqrt{2(x^2 - x + 3)} + 2} = \frac{x^2 + (x-1)^2 + 1}{\sqrt{2(x^2 - x + 3)} + 2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Bất phương trình đã cho trở thành $4x^2 + 1 > x^2 + 13 \Leftrightarrow 3x^2 > 12 \Leftrightarrow x > 2 \vee x < -2.$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty).$

Bài toán 261. Giải bất phương trình $\frac{x^4 + x^3 + x^2 + x}{3x - \sqrt{2x-7}} > \frac{x^3 + x^2 + 25x - 33}{3x - \sqrt{2x-7}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{7}{2}.$

Nhận xét $3x - \sqrt{2x-7} = \frac{9x^2 - 2x + 7}{3x + \sqrt{2x-7}} = \frac{8x^2 + (x-1)^2 + 8}{3x + \sqrt{2x-7}} > 0, \forall x \geq \frac{7}{2}.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + x^2 + x > x^3 + x^2 + 25x - 33 &\Leftrightarrow x^4 - 24x + 33 > 0 \\ \Leftrightarrow x^4 - 6x^2 + 9 + 6(x^2 - 4x + 4) > 0 &\Leftrightarrow (x^2 - 3)^2 + 6(x-2)^2 > 0 \quad [*] \end{aligned}$$

Dễ thấy [*] hiển nhiên do hệ $\begin{cases} x^2 = 3 \\ x = 2 \end{cases}$ vô nghiệm. Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq \frac{7}{2}.$

Bài toán 262. Giải bất phương trình $\frac{1-x-3x^2}{1-\sqrt{x^2+x+9}} > \frac{1-3x+x^2}{1-\sqrt{x^2+x+9}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Ta có $1 - \sqrt{x^2 + x + 9} = 1 - \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{35}{4}} < 1 - \sqrt{\frac{35}{4}} < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$ Bất phương trình đã cho trở thành

$$1 - x - 3x^2 < 1 - 3x + x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x(2x-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < 0 \end{cases}$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$

Bài toán 263. Giải bất phương trình $\frac{x^3 + 2x^2}{3 - \sqrt{1-x^2}} \leq \frac{x^2 + 2}{3 - \sqrt{1-x^2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1.$

Nhận xét $\sqrt{1-x^2} \leq 1, \forall x \in [-1; 1] \Rightarrow 3 - \sqrt{1-x^2} > 0, \forall x \in [-1; 1].$ Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 2x^2 \leq x^2 + 2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2x + 2) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Kết luận nghiệm $-1 \leq x \leq 1.$

Bài toán 264. Giải bất phương trình $\frac{x^3 + 3x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 11} - 3} \geq \frac{4x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 11} - 3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét $\sqrt{x^2 + 2x + 11} - 3 = \sqrt{(x+1)^2 + 10} - 3 \geq \sqrt{10} - 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $x^3 + 3x^2 + 1 \geq 4x^2 + 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x \geq 1 \end{cases}$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S = \{0\} \cup [1; +\infty)$.

Bài toán 265. Giải bất phương trình $\frac{3x^3 + 2x^2 + x + 1}{1 - \sqrt{x^2 + x + 4}} \leq \frac{2x^3 + 6x^2 - 3x + 3}{1 - \sqrt{x^2 + x + 4}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét $1 - \sqrt{x^2 + x + 4} = 1 - \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}} \leq 1 - \frac{\sqrt{15}}{2} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$3x^3 + 2x^2 + x + 1 \geq 2x^3 + 6x^2 - 3x + 3 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S = \{1\} \cup [2; +\infty)$.

Bài toán 266. Giải bất phương trình $\frac{5x^3 - x^2 + 4x + 4}{2 - \sqrt{3x^2 + x + 5}} \leq \frac{x^3 + 7x^2 - x + 5}{2 - \sqrt{3x^2 + x + 5}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét $2 - \sqrt{3x^2 + x + 5} = -\frac{3x^2 + x + 1}{2 + \sqrt{3x^2 + x + 5}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{5x^2 + (x+1)^2 + 1}{2 + \sqrt{3x^2 + x + 5}} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$5x^3 - x^2 + 4x + 4 \geq x^3 + 7x^2 - x + 5 \Leftrightarrow 4x^3 - 8x^2 + 5x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S = \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup [1; +\infty)$.

Bài toán 267. Giải bất phương trình $\frac{4x^3 + x^2 - 2x - 4}{2x - 2\sqrt{x} + 1} \leq \frac{x^3 + 6x^2 - 3x - 3}{2x - 2\sqrt{x} + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Nhận xét $2x - 2\sqrt{x} + 1 = x + (\sqrt{x} - 1)^2 > 0, \forall x \geq 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$4x^3 + x^2 - 2x - 4 \leq x^3 + 6x^2 - 3x - 3 \Leftrightarrow 3x^3 - 5x^2 + x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(3x+1) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x \leq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x = 1$.

Bài toán 268. Giải bất phương trình $\frac{2x^3 + 3x^2 + 9x + 1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} \geq \frac{x^3 + 8x^2 + 2x + 4}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x > 2 \vee x < 1.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2x^3 + 3x^2 + 9x + 1 \geq x^3 + 8x^2 + 2x + 4 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 7x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện, bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq 3.$

Bài toán 269. Giải bất phương trình $\frac{3x^3 + 2x^2 + x + 3}{4 + \sqrt{x^2 - 5x + 6}} \geq \frac{2x^3 + 9x^2 - 15x + 15}{4 + \sqrt{x^2 - 5x + 6}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3 \vee x \leq 2.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$3x^3 + 2x^2 + x + 3 \geq 2x^3 + 9x^2 - 15x + 15 \Leftrightarrow x^3 - 7x^2 + 16x - 12 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = \{2\} \cup [3; +\infty).$

Bài toán 270. Giải bất phương trình $\frac{5x^3 + x^2 - 2x + 1}{3 + 7\sqrt{2x^2 - x}} \leq \frac{2x^3 + 8x^2 - 7x + 2}{3 + 7\sqrt{2x^2 - x}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2} \vee x \leq 0.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$5x^3 + x^2 - 2x + 1 \leq 2x^3 + 8x^2 - 7x + 2 \Leftrightarrow 3x^3 - 7x^2 + 5x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(3x-1) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = (-\infty; 0] \cup \{1\}.$

Bài toán 271. Giải bất phương trình $\frac{3x-4}{2+5\sqrt{3x^3+x-2}} > \frac{x+8}{2+5\sqrt{3x^3+x-2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $3x^3 + x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 3x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$

Bất phương trình đã cho tương đương với $3x - 4 > x + 8 \Leftrightarrow 2x > 12 \Leftrightarrow x > 6.$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x > 6.$

Bài toán 272. Giải bất phương trình $\frac{3x^3 + x^2 + 3x + 1}{4 + \sqrt{x^3 + 2x - 3}} > \frac{2x^2 + 2x + 3}{4 + \sqrt{x^3 + 2x - 3}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x^3 + 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$3x^3 + x^2 + 3x + 1 > 2x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow 3x^3 - x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 2x + 3) + 1 > 0 \quad [*]$$

Nhận thấy [*] nghiệm đúng với mọi giá trị $x \geq 1.$ Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq 1.$

Bài toán 273. Giải bất phương trình $\frac{4x^3 + x^2 + x + 1}{\sqrt{x^3 + x - 2}} > \frac{3x^3 + 2x^2}{\sqrt{x^3 + x - 2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x^3 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) > 0 \Leftrightarrow x > 1.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$4x^3 + x^2 + x + 1 > 3x^3 + 2x^2 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x + 1 > 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) + x + 1 > 0 \quad [*]$$

Dễ nhận thấy [*] nghiệm đúng với $x > 1$. Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x > 1$.

Bài toán 274. Giải bất phương trình $\frac{x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{x + 1 + \sqrt{x^3 - 2x^2 + x}} \geq \frac{2x^3 + 7x + 2}{x + 1 + \sqrt{x^3 - 2x^2 + x}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x(x^2 - 2x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0.$

Với $x \geq 0 \Rightarrow x + 1 + \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} > 0$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 4x^2 + 3x + 2 \geq 2x^3 + 7x + 2 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 4x \leq 0 \Leftrightarrow x(x-2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \{0; 2\}.$

Bài toán 275. Giải bất phương trình $\frac{5x^3 + x^2 + 2x + 1}{\sqrt{2x^3 + 3x - 5} + 5x - 4} < \frac{4x^2 + 5x + 2}{\sqrt{2x^3 + 3x - 5} + 5x - 4} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x^3 + 3x - 5 \geq 0 \\ \sqrt{2x^3 + 3x - 5} + 5x - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$

Nhận xét $\sqrt{2x^3 + 3x - 5} + 5x - 4 > 0, \forall x \geq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 5x^3 + x^2 + 2x + 1 &< 4x^2 + 5x + 2 \Leftrightarrow 6x^3 < x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ \Leftrightarrow 6x^3 &< (x+1)^3 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{6} < x+1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{\sqrt[3]{6}-1} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = \left[1; \frac{1}{\sqrt[3]{6}-1}\right).$

Bài toán 276. Giải bất phương trình $\frac{x^3 + 4x^2 + 2x}{2x - 1 + \sqrt[3]{2x^3 + 5x - 7}} \leq \frac{6x^2 - 3x + 3}{2x - 1 + \sqrt[3]{2x^3 + 5x - 7}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x^3 + 5x - 7 \geq 0 \\ 2x - 1 + \sqrt[3]{2x^3 + 5x - 7} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 4x^2 + 2x \leq 6x^2 - 3x + 3 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x + 3) + x \leq 0 \quad [*]$$

Dễ thấy bất phương trình [*] vô nghiệm với $x \geq 1$.

Nhận xét.

40 thí dụ từ bài toán 236 đến 276 đều là các bất phương trình cơ bản dạng phân thức hữu tỷ có đặc điểm chứa biểu thức căn thức giống nhau phía dưới mẫu thức, tăng dần từ bậc nhất lên bậc ba, sự sắp xếp này mục đích hướng độc giả đến cái nhìn "nhập môn" đối với bất phương trình có sử dụng đánh giá biểu thức chứa căn, vì thông thường chúng ta phải xét hai trường hợp theo dấu của mẫu thức. Quý bạn đọc có thể nhận thấy trong các bài toán trên dấu của mẫu số đều hoặc dương hoặc âm, thực hiện bằng đánh giá thuần túy sơ đẳng hoặc tam thức bậc hai, thêm bớt hằng đẳng thức. Việc lập luận dấu như vậy sẽ giảm thiểu đi các trường hợp không cần thiết, từ đó phần nào giảm bớt công kênh và đôi khi mở ra hướng đi cho bài toán.

Bài tập tương tự.

Giải các bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\frac{3x^2 + 4x + 6}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}} \leq \frac{3x^3 + 5x + 6}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}.$
2. $\frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{5\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 3} \geq \frac{4x^2 + 4x + 8}{5\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 3}.$
3. $\frac{x^3 + 4x^2 + 5x}{7\sqrt{x^2 - 1} + 5} < \frac{7x + 2}{7\sqrt{x^2 - 1} + 5}.$
4. $\frac{4x^3 + 5x^2}{x - 1 + 3\sqrt{x - 2}} > \frac{3x^3 + 7x^2 - 3x - 1}{x - 1 + 3\sqrt{x - 2}}.$
5. $\frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 5}{2x^2 - \sqrt{x} + 1} < \frac{x^2 + 2x + 9}{2x^2 - \sqrt{x} + 1}.$
6. $\frac{x^4 + 4x}{x^2 + 1 - \sqrt{2x - 1}} \geq \frac{5x - 1}{x^2 + 1 - \sqrt{2x - 1}}.$
7. $\frac{x^4 + 7x^2 - 3x}{x - 1 - \sqrt{x - 2}} \leq \frac{7x^2 + 5x - 63}{x - 1 - \sqrt{x - 2}}.$
8. $\frac{x^3 + 5x^2 + 6x + 1}{2x + 1 - \sqrt{x - 1}} > \frac{6x^2 + 5x + 2}{2x + 1 - \sqrt{x - 1}}.$
9. $\frac{x^3 + 7x^2 + 4x + 2}{\sqrt{x^3 - 1}} < \frac{13x^2 - 7x + 8}{\sqrt{x^3 - 1}}.$
10. $\frac{5x^3 + 3x^2 - 4x + 5}{\sqrt{4 - x^2} + 19} \leq \frac{4x^3 + 8x^2 - 12x + 9}{\sqrt{4 - x^2} + 19}.$
11. $\frac{3x^3 + 4x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 11} - 3} \geq \frac{x^3 + 11x^2 - 6x + 4}{\sqrt{x^2 - 2x + 11} - 3}.$
12. $\frac{2x^4 + 3x^3 + x + 5}{\sqrt{2(x^2 + x + 1)} - 1} \leq \frac{x^4 + 2x^3 + 2x + 6}{\sqrt{2(x^2 + x + 1)} - 1}.$
13. $\frac{x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 4}{4 - \sqrt{-x^2 + 2x + 14}} > \frac{3x^3 + x^2 - 1}{4 - \sqrt{-x^2 + 2x + 14}}.$
14. $\frac{4x^2 + 5x + 1}{\sqrt{x^3 + 4x^2 - 5}} > \frac{6x + 1}{\sqrt{x^3 + 4x^2 - 5}}.$
15. $\frac{x^4 - 3x^2 + 3x}{\sqrt{x^3 + 1} + x + 3} \geq \frac{-3x^2 + 19x - 24}{\sqrt{x^3 + 1} + x + 3}.$

Bài toán 277. Giải bất phương trình $\frac{x}{\sqrt{x^2-6x-7}} > \frac{x}{2x-3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x > 7 \vee x < -1.$

➤ Xét trường hợp $x > 7$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2-6x-7} < 2x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x^2-6x-7 > 4x^2-12x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ 3(x-1)^2+13 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}.$$

Kết hợp $x > 7$ ta có $x > 7.$

➤ Xét trường hợp $x < -1$, bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{1}{\sqrt{x^2-6x-7}} < \frac{1}{2x-3}$ (Vô nghiệm).

Kết luận nghiệm $x > 7.$

Bài toán 278. Giải bất phương trình $\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}} \leq \frac{1}{3-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x < 1 \\ 2 < x \neq 3 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x < 3 \\ \sqrt{x^2-3x+2} \geq 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x^2-3x+2 \geq x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{3} \leq x < 3.$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = \left[\frac{7}{3}; 3\right).$

Bài toán 279. Giải bất phương trình $\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}} > \frac{1}{x-4} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x < 1 \vee 3 < x \neq 4.$ Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x-4 < 0 \\ \begin{cases} x-4 > 0 \\ \sqrt{x^2-4x+3} < x-4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ \begin{cases} x > 4 \\ x^2-4x+3 < x^2-8x+16 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ \begin{cases} x > 4 \\ 4x < 13 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x < 4.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = (-\infty; 1) \cup (3; 4).$

Bài toán 280. Giải bất phương trình $\frac{1}{1+\sqrt{4x-3}} > \frac{1}{2x} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{4}.$ Bất phương trình đã cho tương đương với

$$1+\sqrt{4x-3} < 2x \Leftrightarrow \sqrt{4x-3} < 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x-3 < 4x^2-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2-8x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4(x-1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \neq 1.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $\frac{3}{4} \leq x \neq 1.$

Bài toán 281. Giải bất phương trình $\frac{1}{3+\sqrt{2-x}} > \frac{1}{x+3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $-3 \neq x \leq 2.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x+3 < 0 \\ x+3 > 0 \\ 3+\sqrt{2-x} < x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x > -3 \\ \sqrt{2-x} < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x \geq 0 \\ x^2+x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x \geq 0 \\ x \geq 1 \vee x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện thu được tập nghiệm $S = (-\infty; -3) \cup [1; 2].$

Bài toán 282. Giải bất phương trình $\frac{3}{2+\sqrt{5-x}} \leq \frac{1}{x-3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $3 \neq x \leq 5.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x-3 > 0 \\ 3x-9 \leq 2+\sqrt{5-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 3x-11 \leq \sqrt{5-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 3x < 11 \\ 3x \geq 11 \\ 9x^2-66x+121 \leq 5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 3x < 11 \\ 3x \geq 11 \\ \frac{29}{9} \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 3x < 11 \\ \frac{11}{3} \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x \leq 4$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = (3; 4].$

Bài toán 283. Giải bất phương trình $\frac{1}{\sqrt{3x-2}} \leq \frac{1}{2x-1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}.$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{3x-2} \geq 2x-1 \Leftrightarrow 3x-2 \geq 4x^2-4x+1 \Leftrightarrow 4x^2-7x+3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{7} \leq x \leq 1.$

Kết hợp điều kiện, suy ra tập nghiệm $S = \left[\frac{2}{3}; 1\right].$

Bài toán 284. Giải bất phương trình $\frac{1}{2+\sqrt{1-x}} \leq \frac{2}{x+3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $-3 \neq x \leq 1.$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x > -3 \\ 4+2\sqrt{1-x} \geq x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ 2\sqrt{1-x} \geq x-1 \end{cases} \Leftrightarrow x > -3 \text{ (Vì } -3 \neq x \leq 1).$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $-3 < x \leq 1.$

Bài toán 285. Giải bất phương trình $\frac{1}{2+\sqrt{x^2-5x+4}} > \frac{1}{x+1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $-1 \neq x \leq 1 \vee x \geq 4$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x+1 < 0 \\ \begin{cases} x+1 > 0 \\ 2+\sqrt{x^2-5x+4} < x+1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ \begin{cases} x > -1 \\ \sqrt{x^2-5x+4} < x-1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ \begin{cases} x > 1 \\ x^2-5x+4 > x^2-2x+1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x < -1.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x < -1$.

Bài toán 286. Giải bất phương trình $\frac{2}{\sqrt{x^2+2x+9}-1} \leq \frac{1}{x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -1$.

Nhận xét $\sqrt{x^2+2x+9}-1 = \sqrt{(x+1)^2+8}-1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ \sqrt{x^2+2x+9}-1 \geq 2x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2+2x+9 \geq 4x^2+12x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 3x^2+10x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leq 0.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S = [-1; 0)$.

Bài toán 287. Giải bất phương trình $\frac{1}{x-\sqrt{x-1}} \leq \frac{3}{x+2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$.

Nhận xét $x-\sqrt{x-1} = \frac{x^2+x+1}{x+\sqrt{x-1}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(2x+1)^2+3}{x+\sqrt{x-1}} > 0, \forall x \geq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x+2 \leq 3x-3\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 3\sqrt{x-1} \leq 2x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 9x-9 \leq 4x^2-8x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4x^2-17x+13 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{13}{4} \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S = \{1\} \cup \left[\frac{13}{4}; +\infty\right)$.

Bài toán 288. Giải bất phương trình $\frac{1}{3-x-\sqrt{2-x}} \leq \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $0 \neq x \leq 2$.

Nhận xét $3-x-\sqrt{2-x} = 2-x-\sqrt{2-x} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(\sqrt{2-x}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \leq 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x > 0 \\ 3-x-\sqrt{2-x} \geq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3-2x \geq \sqrt{2-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{3}{2} \\ 4x^2-12x+9 \geq 2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \frac{3}{2} \\ 4x^2-11x+7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 1.$$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm $S = (0; 1]$.

Bài toán 289. Giải bất phương trình $\frac{1}{\sqrt{2x^2+x+2}-1} \geq \frac{1}{x-1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 1$.

Nhận xét $\sqrt{2x^2+x+2}-1 = \frac{2x^2+x+1}{\sqrt{2x^2+x+2}+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x+1)^2+3x^2+1}{\sqrt{2x^2+x+2}+1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

- Với $x < 1$, bất phương trình đã cho nghiệm đúng.
- Với $x > 1$ ta thu được $\begin{cases} x > 1 \\ \sqrt{2x^2+x+2}-1 \leq x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 2x^2+x+2 \leq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2+x+2 \leq 0 \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm).}$

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $x < 1$.

Bài toán 290. Giải bất phương trình $\frac{1}{\sqrt{2x^2-5x+2}+1} \geq \frac{1}{x-1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2 \vee 2x \leq 1$.

- Với $x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x-1 < 0$, bất phương trình đã cho nghiệm đúng.
- Với $x \geq 2$, bất phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{2x^2-5x+2}+1 \leq x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2-5x+2 \leq x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-x-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \{2\}.$

Bài toán 291. Giải bất phương trình $\frac{2}{\sqrt{x^2-5x+4}} < \frac{1}{x+1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x > 4 \vee x < 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ \sqrt{x^2-5x+4} > 2x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2-5x+4 > 4x^2+8x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 3x^2+13x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 0.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $-1 < x < 0$.

Bài toán 292. Giải bất phương trình $\frac{1}{\sqrt{x^2-x+3}-1} \leq \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$.

Nhận xét $\sqrt{x^2-x+3}-1 = \frac{x^2-x+2}{\sqrt{x^2-x+3}+1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(2x-1)^2+7}{\sqrt{x^2-x+3}+1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình đã cho tương đương

$$\begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x^2-x+3}-1 \geq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x^2-x+3} \geq x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2-x+3 \geq x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{2}{3}.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S = \left(0; \frac{2}{3}\right].$

Bài toán 293. Giải phương trình $\frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{2x - 1} + 1} \geq \frac{x^2 - 2x + 1}{2x} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $2x \geq 1$.

Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (x-1)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2x-1}+1} - \frac{1}{2x} \right) &\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{1}{\sqrt{2x-1}+1} - \frac{1}{2x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2x-1 \geq \sqrt{2x-1} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \begin{cases} 2x \geq 1 \\ 4x^2 - 4x + 1 \geq 2x - 1 \end{cases} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \begin{cases} 2x \geq 1 \\ 4x^2 - 6x + 2 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\} \cup [1; +\infty).$

Bài toán 294. Giải bất phương trình $\frac{1}{\sqrt{x^3 + x^2 + 2x - 4} + 1} \leq \frac{1}{x + 2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^3 + x^2 + 2x - 4 \geq 0 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2 + 2x + 4) \geq 0 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3 + x^2 + 2x - 4} + 1 \geq x + 2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + 2x - 4 \geq x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^3 \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{5}.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \geq \sqrt[3]{5}$.

Bài toán 295. Giải bất phương trình $\frac{1}{\sqrt{x^3 + x^2 + 4x - 6} + 1} < \frac{1}{x + 3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^3 + x^2 + 4x - 6 \geq 0 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2 + 2x + 6) \geq 0 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{x^3 + x^2 + 4x - 6} + 1 > x + 3 \\ x \geq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3 + x^2 + 4x - 6} > x + 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x^2 + 4x - 6 > x^2 + 4x + 4 \\ x \geq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 > 10 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{10} \end{aligned}$$

Kết luận nghiệm $S = [\sqrt[3]{10}; +\infty).$

Bài toán 296. Giải bất phương trình $\frac{2x^2 - x + 1}{\sqrt{2x + 3} + 1} \leq \frac{2x^2 - x + 1}{x + 2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } x \geq -\frac{3}{2}. \text{ Nhận xét } 2x^2 - x + 1 = \frac{4x^2 - 2x + 2}{2} = \frac{3x^2 + (x-1)^2 + 1}{2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x+3}+1 \geq x+2 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3} \geq x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x \geq -1 \\ 2x+3 \geq x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x \geq -1 \\ x^2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ -1 \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \sqrt{2}.$$

Vậy bất phương trình ban đầu có nghiệm $S = \left[-\frac{3}{2}; \sqrt{2}\right]$.

Bài toán 297. Giải bất phương trình $\frac{x^2+4x+4}{\sqrt{x-2}+2} \leq \frac{x^2+4x+4}{\sqrt{x-2}-1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Rõ ràng $x^2+4x+4 > 0, \forall x \geq 2$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 1 \leq \frac{\sqrt{x-2}+2}{\sqrt{x-2}-1} \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{x-2}-1} \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} > 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$$

Kết luận nghiệm $x > 2$.

Bài toán 298. Giải bất phương trình $\frac{x^2+3x+4}{\sqrt{2x-1}+3} \leq \frac{x^2+3x+4}{x+2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Dễ thấy $x^2+3x+4 > 0, \forall x \geq \frac{1}{2}$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2x-1}+3} - \frac{1}{x+2} \leq 0 \\ 2x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-\sqrt{2x-1}-1}{(\sqrt{2x-1}+3)(x+2)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \leq \sqrt{2x-1} \\ 2x \geq 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ x \geq 1 \\ x^2-2x+1 \leq 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ x \geq 1 \\ x^2-4x+2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 1 \leq x \leq 2+\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 2+\sqrt{2} \end{aligned}$$

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $S = \left[\frac{1}{2}; 2+\sqrt{2}\right]$.

Bài toán 299. Giải bất phương trình $\frac{x^2+2x+4}{\sqrt{x}+1} \leq \frac{x^2+2x+4}{x-1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $0 \leq x \neq 1$.

Nhận xét $x^2+2x+4 = (x+1)^2+3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

- Nếu $0 < x < 1 \Rightarrow x-1 < 0$, bất phương trình đã cho không thỏa mãn.
- Nếu $x > 1$ thì bất phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{x}+1 \geq x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 2 \\ x \geq x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 2 \\ x^2-5x+4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 2 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Tổng hợp quá trình thu được nghiệm $S = [2; 4]$.

Bài toán 300. Giải bất phương trình $\frac{2x^2 - x + 7}{\sqrt{x^2 - 3} + 2} \leq \frac{2x^2 - x + 7}{x - 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x^2 \geq 3$. Nhận xét rằng $2x^2 - x + 7 = 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{55}{8} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Xét hai trường hợp xảy ra

- Nếu $x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ thì bất phương trình đã cho không thỏa mãn.
- Nếu $x > 1$ thì bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} + 2 \geq x - 1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 3} \geq x - 3 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ x \geq 3 \\ x^2 - 3 \geq x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ x \geq 3 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Kết hợp điều kiện thu được nghiệm $x \geq \sqrt{3}.$

Bài toán 301. Giải bất phương trình $\frac{x^2 + 6x + 17}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} \leq \frac{x^2 + 6x + 17}{x + 2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -2.$

Để ý rằng $x^2 + 6x + 17 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình trở thành

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} \leq \frac{1}{x + 2} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 > 0 \\ \sqrt{x^2 + 1} + 1 \geq x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ \sqrt{x^2 + 1} \geq x + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < -1 \\ x \geq -1 \\ x^2 + 1 \geq x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < -1 \\ -1 \leq x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x \leq 0 \end{aligned}$$

Tổng hợp hai trường hợp thu được nghiệm $S = \{-7\} \cup (-2; 0] \cup \{1\}.$

Bài toán 302. Giải bất phương trình $\frac{x^2 + x + 3}{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2} \leq \frac{x^2 + x + 3}{x + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2 + x + 2 \neq 4 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \notin \{-2; -1; 1\}.$

Nhận xét $x^2 + x + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2} \leq \frac{1}{x + 1} &\Leftrightarrow \frac{x + 3 - \sqrt{x^2 + x + 2}}{(\sqrt{x^2 + x + 2} - 2)(x + 1)} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x^2 + x + 2} + 2)(x + 3 - \sqrt{x^2 + x + 2})}{(x^2 + x - 2)(x + 1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x + 3 - \sqrt{x^2 + x + 2}}{(x - 1)(x + 2)(x + 1)} \leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Xét } x + 3 \geq \sqrt{x^2 + x + 2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 + 6x + 9 \geq x^2 + x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{5}.$$

Khi đó (1) trở thành $(x-1)(x+2)(x+1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$; Suy ra tập nghiệm thành phần $S_1 = (-1; 1)$.

$$\text{Xét } x+3 \leq \sqrt{x^2+x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x \geq -3 \\ x^2+6x+9 \leq x^2+x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ -3 \leq x \leq -\frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -\frac{7}{5}.$$

Khi đó (1) trở thành $(x-1)(x+2)(x+1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -2 < x < -1 \end{cases}$;

Suy ra tập nghiệm thành phần $S_2 = \left(-2; -\frac{7}{5}\right]$.

Tổng hợp toàn bộ quá trình ta thu được tập nghiệm $S = \left(-2; -\frac{7}{5}\right] \cup (-1; 1)$.

Bài toán 303. Giải bất phương trình $\frac{x^2+2x+8}{\sqrt{x^2+x-2}+1} \leq \frac{x^2+2x+8}{x-1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2+x-2 \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \vee x \leq -2$.

Nhận xét $x^2+2x+8 = (1+x)^2 + 7 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}+1} &\leq \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ \sqrt{x^2+x-2}+1 \geq x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \sqrt{x^2+x-2} \geq x-2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x \geq 2 \\ x^2+x-2 \geq x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x \geq 2 \\ 5x \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1 \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta thu được nghiệm $S = \{-4\} \cup (1; +\infty)$.

Bài toán 304. Giải bất phương trình $\frac{x^2+4x+5}{\sqrt{x^2+3x-2}} \leq \frac{x^2+4x+5}{x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x(x+3) \geq 0 \\ x^2+3x-4 \neq 0; x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \vee x \leq -3 \\ x \notin \{-4; 0; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ -4 \neq x \leq -3 \end{cases}$

Để ý rằng $x^2+4x+5 = (2+x)^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^2+3x-2}} &\leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x+2-\sqrt{x^2+3x}}{(\sqrt{x^2+3x-2})x} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+2-\sqrt{x^2+3x})(\sqrt{x^2+3x}+2)}{x(x^2+3x-4)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+2-\sqrt{x^2+3x}}{x(x-1)(x+4)} \leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Xét } x+2 \leq \sqrt{x^2+3x} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x \geq -2 \\ x^2+4x+4 \leq x^2+3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x \geq -2 \Leftrightarrow x < -2 \\ x \leq -4 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó (1) trở thành } \begin{cases} x < -2 \\ x(x-1)(x+4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < x < -2.$$

$$\text{Xét } x+2 \geq \sqrt{x^2+3x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2+4x+4 \geq x^2+3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -2$$

$$\text{Khi đó (1) trở thành } \begin{cases} x \geq -2 \\ x(x-1)(x+4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x(x-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Tổng hợp toàn bộ quá trình ta thu được nghiệm $S = (-4; -3] \cup (0; 1)$.

Bài toán 305. Giải bất phương trình $\frac{x^4-2x^2+7}{\sqrt{x^3+x^2+x-3}+1} \leq \frac{x^4-2x^2+7}{x} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^3+x^2+x-3 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2+2x+3) \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Nhận xét rằng $x^4-2x^2+7 = (x^2-1)^2+6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^3+x^2+x-3}+1} \leq \frac{1}{x} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x^3+x^2+x-3} \geq x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x \geq 1 \\ x^3+x^2+x-3 \geq x^2-2x+1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^3+3x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ (x-1)(x^2+x+4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0 \end{aligned}$$

Tổng hợp toàn bộ quá trình ta thu được nghiệm $x \geq 1$.

Bài toán 306. Giải bất phương trình $\frac{x^4-x+2}{\sqrt{x^2+x+2}-2} \geq \frac{x^4-x+2}{x+2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2+x+2 \neq 4 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \notin \{-2; 1\}.$$

$$\text{Nhận xét } x^4-x+2 = \frac{4x^4-4x+8}{2} = \frac{4x^4-4x^2+1+4x^2-4x+1+6}{2} = \frac{(2x^2-1)^2+(2x-1)^2+6}{2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}-2} \geq \frac{1}{x+2} &\Leftrightarrow \frac{x+4-\sqrt{x^2+x+2}}{(\sqrt{x^2+x+2}-2)(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x^2+x+2}+2)(x+4-\sqrt{x^2+x+2})}{(x^2+x-2)(x+2)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x+4-\sqrt{x^2+x+2}}{(x-1)(x+2)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+4-\sqrt{x^2+x+2}}{x-1} \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Các khả năng xảy ra như sau

$$\text{➤ Xét } x+4 \geq \sqrt{x^2+x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x^2+8x+16 \geq x^2+x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -2, \text{ suy ra (1)} \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

Ta có nghiệm thành phần $x > 1$.

$$\text{➤ Xét } x+4 \leq \sqrt{x^2+x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \\ x \geq -4 \\ x^2+8x+16 \leq x^2+x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \\ x \geq -4 \\ x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \\ x \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -2, \text{ suy ra (1)} \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

Ta có nghiệm thành phần $x \leq -2$.

Tổng hợp toàn bộ quá trình ta thu được nghiệm $S = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.

Bài toán 307. Giải bất phương trình $\frac{x^3+2x^2+x+2}{\sqrt{x^3-x^2-4x+4}+2} \leq \frac{x^3+2x^2+x+2}{x} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^3-x^2-4x+4 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2)(x-2) \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 1; x \neq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \quad (D)$$

Chú ý rằng $x^3+2x^2+x+2 = (x+2)(x^2+1) \geq 0, \forall x \in (D)$ nên ta có hai trường hợp

- $(x+2)(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow x = -2.$
- $\frac{1}{\sqrt{x^3-x^2-4x+4}+2} \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x^3-x^2-4x+4}+2 \geq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x^3-x^2-4x+4} \geq x-2 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x^3-x^2-4x+4 \geq x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x^3-2x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x^2(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$

Tổng hợp toàn bộ quá trình ta thu được nghiệm $S = \{-2\} \cup (0; 1] \cup [2; +\infty)$.

Bài toán 308. Giải bất phương trình $\frac{x^4-x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} \leq \frac{x^4-x^3-x+1}{2x+1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \sqrt{x^2+2x+2}+x \neq 0 \\ 2x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ 2x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \notin \left\{-1; -\frac{1}{2}\right\} \\ 2x+1 \neq 0 \end{cases}$$

Chú ý rằng $x^4-x^3-x+1 = x^3(x-1)-(x-1) = 0 = (x-1)^2(x^2+x+1) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta xét hai trường hợp

- $x^4-x^3-x+1 = 0 \Leftrightarrow x^3(x-1)-(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2+x+1) = 0 \Rightarrow x = 1.$

- Xét $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}+x} \leq \frac{1}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{(\sqrt{x^2+2x+2}+x)(2x+1)} \leq 0 \quad (*)$

Đề ý rằng $\sqrt{x^2+2x+2} = \sqrt{(x+1)^2+1} > |x+1| \geq x+1 \Rightarrow x+1-\sqrt{x^2+2x+2} < 0.$

Nếu $x > -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x+1 > 0; \sqrt{x^2+2x+2}+x = \sqrt{(x+1)^2+1}+x \geq 1-\frac{1}{2} > 0$, khi đó $(*)$ nghiệm đúng.

Nếu $x < -\frac{1}{2}$ thì $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x < 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 < x^2 \Leftrightarrow x < -1$.

Tổng hợp hai trường hợp thu được nghiệm $S = (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Bài toán 309. Giải bất phương trình $\frac{2x^4 - 7x^2 + 2x + 9}{\sqrt{x^4 - 2x + 7} + 1} \leq \frac{2x^4 - 7x^2 + 2x + 9}{x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Để nhận thấy $x^4 - 2x + 7 = \frac{4x^4 - 8x + 28}{4} = \frac{4x^4 - 4x^2 + 1 + 4x^2 - 8x + 4 + 23}{4} = \frac{(2x^2 - 1)^2 + (2x - 2)^2 + 23}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hơn nữa $2x^4 - 7x^2 + 2x + 9 = 2(x^2 - 2)^2 + (x + 1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên với $x \neq 0$, ta có biến đổi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^4 - 2x + 7} + 1} \leq \frac{1}{x} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x^4 - 2x + 7} \geq x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x \geq 1 \\ x^4 - 2x + 7 \geq x^2 - 2x + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x \geq 1 \\ x^4 - x^2 + 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x \geq 1 \\ x^2(x^2 - 1) + 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0 \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x > 0$.

Bài toán 310. Giải bất phương trình $\frac{x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1}{\sqrt{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}} \geq \frac{x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1}{x + 4} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x(x+2)^2 \geq 0 \\ x+4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x \geq 0 \end{cases}$

- Với $x = -2$ thì bất phương trình đã cho nghiệm đúng.
- Với $x \geq 0$, để ý rằng

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 + (x^2 + 1)x - 6x^2 = (x^2 + 1)^2 + (x^2 + 1)x - 6x^2 \\ &= (x^2 - 2x + 1)(x^2 + 3x + 1) = (x - 1)^2(x^2 + 3x + 1) \geq 0, \forall x \geq 0 \end{aligned}$$

- Với $x > 0$ thì bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{x^3 + 4x^2 + 4x + 2} \leq x + 4 &\Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 4x^2 + 4x} \leq x + 2 \\ \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 + 4x &\leq x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 \leq 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2)^2 &\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \leq 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 1 \end{aligned}$$

Kết hợp với $x > 0$ thu được nghiệm $0 < x \leq 1$.

Tổng hợp toàn bộ quá trình ta có nghiệm $S = \{-2\} \cup [0; 1]$.

Bài toán 311. Giải bất phương trình $\frac{2x^4 + x - 2}{\sqrt{x^3 + 2x - 3} + 4} \leq \frac{2x^4 + x - 2}{x + 3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^3 + 2x - 3 \geq 0 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2 + x + 3) \geq 0 \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Rõ ràng $2x^4 + x - 2 = x(2x^3 + 1) - 2 \geq 3 - 2 = 1 > 0, \forall x \geq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^3 + 2x - 3} + 4} &\leq \frac{1}{x + 3} \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 2x - 3} + 4 \geq x + 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 2x - 3} \geq x - 1 \\ &\Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 \geq x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 4x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 + 4)(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \end{aligned}$$

Vậy ta có tập nghiệm $S = [1; +\infty)$.

Bài toán 312. Giải bất phương trình $\frac{2x^7 + 3x - 3}{\sqrt{2x^3 + 3x - 5} + 1} - \frac{2x^7 + 3x - 3}{2x - 1} < 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x^3 + 3x - 5 \geq 0 \\ 2x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x^2 + 2x + 5) \geq 0 \\ 2x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Để ý rằng $2x^7 + 3x - 3 = 2x^7 + 3(x - 1) > 0, \forall x \geq 1$. Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2x^3 + 3x - 5} + 1} &< \frac{1}{2x - 1} \Leftrightarrow \sqrt{2x^3 + 3x - 5} + 1 > 2x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x^3 + 3x - 5} > 2x - 2 \\ &\Leftrightarrow 2x^3 + 3x - 5 > 4x^2 - 8x + 4 \Leftrightarrow 2x^3 - 4x^2 + 11x - 9 > 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 - 2x + 9) > 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)[x^2 + (x - 1)^2 + 8] > 0 \Leftrightarrow x > 1 \end{aligned}$$

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $S = (1; +\infty)$.

Bài toán 313. Giải bất phương trình $\frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 5}{\sqrt{x^3 - x - 6} + x} - \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 5}{2x - 2} \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^3 - x - 6 \geq 0 \\ \sqrt{x^3 - x - 6} + x \neq 0 \\ 2x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x^2 + 2x + 3) \geq 0 \\ \sqrt{x^3 - x - 6} + x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Nhận xét $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = (x - 2)(x^2 + 3) + 1 > 0, \forall x \geq 2$. Khi đó bất phương trình ban đầu trở thành

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^3 - x - 6} + x} - \frac{1}{2x - 2} &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^3 - x - 6} + x} \geq \frac{1}{2x - 2} \Leftrightarrow \sqrt{x^3 - x - 6} + x \leq 2x - 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^3 - x - 6} \leq x - 2 \Leftrightarrow x^3 - x - 6 \leq x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 3x - 10 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + x + 5) \leq 0 \Leftrightarrow (x - 2)[(2x + 1)^2 + 19] \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \end{aligned}$$

Đối chiếu với điều kiện ta có tập nghiệm $S = \{2\}$.

Bài toán 314. Giải bất phương trình $\frac{3x^6 + 2x^4 - 6x^3 + 3}{\sqrt{x^3 + x^2 - 6x + 9} + 2} < \frac{3x^6 + 2x^4 - 6x^3 + 3}{x - 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Nhận xét $3x^6 + 2x^4 - 6x^3 + 3 = 2x^4 + 3(x^3 - 1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó bất phương trình đã cho có nghiệm khi $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Từ đây suy ra $x^3 + x^2 - 6x + 9 = x^3 + (x - 3)^2 > 0, \forall x > 1$. Khi đó bất phương trình trở thành

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x^3 + x^2 - 6x + 9} + 2} < \frac{1}{x - 1} &\Leftrightarrow \sqrt{x^3 + x^2 - 6x + 9} + 2 > x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + x^2 - 6x + 9} > x - 3 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 < 0 \\ x \geq 3 \\ x^3 + x^2 - 6x + 9 > x^2 - 6x + 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \geq 3 \\ x^3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x > 1$.

Bài toán 315. Giải bất phương trình $\frac{x^{10} + x^4 - 4x^2 + 6}{\sqrt{2x^3 + 4x^2 - 8x + 5} + 1} \leq \frac{x^{10} + x^4 - 4x^2 + 6}{2x - 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Nhận xét $x^{10} + x^4 - 4x^2 + 6 = x^{10} + (x^2 - 2)^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó bất phương trình đã cho trở thành $\frac{1}{\sqrt{2x^3 + 4x^2 - 8x + 5} + 1} \leq \frac{1}{2x - 1}$.

Bất phương trên có nghiệm khi $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$. Lúc này $2x^3 + 4x^2 - 8x + 5 = 2x^3 + 1 + (2x - 2)^2 > 0, \forall x > \frac{1}{2}$.

Biến đổi

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^3 + 4x^2 - 8x + 5} + 1 \geq 2x - 1 &\Leftrightarrow \sqrt{2x^3 + 4x^2 - 8x + 5} \geq 2x - 2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 < 0 \\ 2x - 2 \geq 0 \\ 2x^3 + 1 + (2x - 2)^2 \geq (2x - 2)^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 1 \\ 2x^3 + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Kết luận bất phương trình ban đầu có nghiệm $x > \frac{1}{2}$.

Nhận xét.

Hai bài toán 314 và 315 là hai bài toán cuối cùng trong tài liệu, kết thúc lớp phương trình, bất phương trình một căn thức giải bằng phép biến đổi tương đương – nâng lũy thừa. Các bạn lưu ý với bất phương trình căn linh hoạt sử dụng tổng hợp kiến thức, liên hệ và kết nối các đặc điểm của bài toán, nhiều khi không cần tìm điều kiện chính xác của bài toán (hoặc thao tác giải cũng rất phức tạp, khó khăn, mất thì giờ), rõ ràng trong hai công việc giải bất phương trình là chính, tìm tập xác định là phụ, bổ trợ và tiên quyết, nhưng nhầm lẫn thế nào được! Sử dụng điều kiện phụ có nghiệm của bất phương trình hay phương trình đôi khi giúp chúng ta mở ra hướng đi mới, khơi gợi sáng tạo tìm tòi học hỏi, tăng cường kinh nghiệm giải toán, tư duy logic phản biện, hy vọng thích ứng với nhiều tình huống phức tạp trong học tập, trong cuộc sống mai sau.

Bài tập tương tự.

Giải các bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}} > \frac{x}{x+1}.$

2. $\frac{1}{\sqrt{x+5}+5} > \frac{1}{x+3}.$

3. $\frac{1}{x+\sqrt{5-x}} > \frac{1}{2x}.$

4. $\frac{1}{x+1+\sqrt{x-3}} \leq \frac{1}{2x-1}.$

5. $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 8} + x} \leq \frac{1}{2x+5}.$

6. $\frac{1}{x+\sqrt{x^2 - 5x + 4}} > \frac{1}{2x+3}.$

7. $\frac{1}{2x+\sqrt{3x-1}} \leq \frac{1}{3x-2}.$

8. $\frac{x+4}{\sqrt{x^2 - x + 8} - 2} \leq \frac{x+4}{x+1}.$

9. $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}} > \frac{1}{x+3}.$

10. $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} \leq \frac{1}{x-3}.$

11. $\frac{2}{3+\sqrt{4x^2 - 3x - 1}} \leq \frac{1}{x}.$

12. $\frac{3}{1+\sqrt{9x^2 - 8x - 1}} > \frac{1}{x+2}.$

13. $\frac{2}{x-\sqrt{x^2 + 4x - 5}} \leq \frac{1}{x-1}.$

14. $\frac{1}{x-\sqrt{x-3}} \leq \frac{1}{3x-2}.$

15. $\frac{1}{x+1-\sqrt{x-3}} \geq \frac{1}{2x+1}.$

16. $\frac{2}{x+3-2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x+4}.$

17. $\frac{1}{\sqrt{4x^2 + 6x + 5}} > \frac{1}{2x}.$

18. $\frac{1}{3+\sqrt{x^3 + x^2 + 2x - 5}} < \frac{1}{x+4}.$

19. $\frac{1}{\sqrt{x^2 + x + x + 1}} \leq \frac{1}{x+6}.$

20. $\frac{1}{x+2+\sqrt{x^2 - x + 5}} < \frac{1}{2x}.$

21. $\frac{x}{\sqrt{2x-1}} - \frac{x}{1+x} \leq 0.$
22. $\frac{x^2-2x+9}{\sqrt{x^2+4x-5}+5} \leq \frac{x^2-2x+9}{x+4}.$
23. $\frac{2x^2-6x+10}{\sqrt{4x^2-2x+17}+x+4} \leq \frac{2x^2-6x+10}{3x+2}.$
24. $\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+5}+1} \geq \frac{x}{2x+4}.$
25. $\frac{x^4+x+6}{\sqrt{x^3+3x-4}+2} \leq \frac{x^4+x+6}{5x-3}.$
26. $\frac{x^2-3x+19}{\sqrt{2x-1}+3x-1} \leq \frac{x^2-3x+19}{2\sqrt{2x-1}+5}.$
27. $\frac{x^4+2x+11}{\sqrt{x^3+2x^2+x-4}+2} \leq \frac{x^4+2x+11}{3x-1}.$
28. $\frac{x^4-2x+17}{\sqrt{2x^3+x^2+6x-9}+2} \leq \frac{x^4-2x+17}{x+5}.$
29. $\frac{x^3-x^2+6x-5}{\sqrt{x^3+x^2+x-3}+1} > \frac{x^3-x^2+6x-5}{2x-1}.$
30. $\frac{2x^3-2x^2+6x-5}{\sqrt{2x^3+x^2+4x-7}+x} > \frac{2x^3-2x^2+6x-5}{2(x+1)}.$
31. $\frac{x^3+2x^2+x-3}{\sqrt{x^3+4x-5}+x} \leq \frac{x^3+2x^2+x-3}{3x-2}.$
32. $\frac{x^4+2x^2+3x-4}{\sqrt{x^3+4x^2+4x-9}+2x-1} \leq \frac{x^4+2x^2+3x-4}{4x}.$
33. $\frac{x^4+5x-4}{\sqrt{3x^3+x^2+4x-8}+2x+3} < \frac{x^4+5x-4}{3x+2}.$
34. $\frac{4x^6+4x^4-4x^3+1}{\sqrt{2x^3+x^2-6x+10}+1} \leq \frac{4x^6+4x^4-4x^3+1}{x-2}.$
35. $\frac{x^4-4x+4}{\sqrt{3x^3+x^2-10x+1}+3} < \frac{x^4-4x+4}{x-2}.$
36. $\frac{x^4+x^2-x+8}{\sqrt{4x^3+x^2-4x+5}+1} \leq \frac{x^4+x^2-x+8}{x-1}.$
37. $\frac{x^4-4x+5}{\sqrt{x^5+4x^2-12x+10}+2} < \frac{x^4-4x+5}{2x-1}.$
38. $\frac{x^4-x^3+2x^2-5x+6}{\sqrt{x^4+x^2-12x+1}+2} \leq \frac{x^4-x^3+2x^2-5x+6}{x-4}.$
39. $\frac{3x^8+2x^6-4x^3+2}{\sqrt{2x^5+x^2-14x+40}+2} < \frac{3x^8+2x^6-4x^3+2}{x-5}.$

III. MỘT SỐ TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 8.*
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
2. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 9.*
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
3. *Nâng cao và phát triển toán 8, tập 1 – tập 2.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
4. *Nâng cao và phát triển toán 9, tập 1 – tập 2.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
5. *Toán nâng cao Đại số 10.*
Nguyễn Huy Đoan; NXB Giáo dục Việt Nam; 1999.
6. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Đại số 10.*
Nguyễn Huy Đoan; Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2006.
7. *Tài liệu chuyên toán: Đại số 10 – Bài tập Đại số 10.*
Đoàn Quỳnh – Doãn Minh Cường – Trần Nam Dũng – Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2010.
8. *Một số chuyên đề Đại số bồi dưỡng học sinh giỏi THPT.*
Nguyễn Văn Mậu – Nguyễn Văn Tiến và một số tác giả; NXB Giáo dục Việt Nam; 2009.
9. *Tuyển tập các bài toán hay và khó Đại số 9.*
Nguyễn Đức Tấn – Đặng Đức Trọng – Nguyễn Cao Huynh – Vũ Minh Nghĩa – Bùi Ruy Tân – Lương Anh Văn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
10. *Một số phương pháp chọn lọc giải các bài toán sơ cấp, tập 1 – tập 3.*
Phan Đức Chính – Phạm Văn Điều – Đỗ Văn Hà – Phạm Văn Hạp – Phạm Văn Hùng – Phạm Đăng Long – Nguyễn Văn Mậu – Đỗ Thanh Sơn – Lê Đình Thịnh; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 1997.
11. *Bài giảng chuyên sâu Toán THPT: Giải toán Đại số 10.*
Lê Hồng Đức – Nhóm Cụ Môn; NXB Hà Nội; 2011.
12. *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình.*
Nguyễn Văn Mậu; NXB Giáo dục Việt Nam; 1994.
13. *Toán bồi dưỡng học sinh phổ thông trung học – quyển 1; Đại số.*
Hàn Liên Hải – Phan Huy Khải – Đào Ngọc Nam – Nguyễn Đạo Phương – Lê Tất Tôn – Đặng Quan Viễn; NXB Hà Nội; 1991.
14. *Phương trình và hệ phương trình không mẫu mực.*
Nguyễn Đức Tấn – Phan Ngọc Thảo; NXB Giáo dục Việt Nam; 1996.
15. *Chuyên đề bồi dưỡng Toán cấp ba; Đại số.*
Nguyễn Sinh Nguyên; NXB Đà Nẵng; 1997.
16. *Giải toán Đại số sơ cấp (Dùng cho học sinh 12 chuyên, luyện thi đại học).*
Trần Thành Minh – Vũ Thiện Căn – Võ Anh Dũng; NXB Giáo dục Việt Nam; 1995.
17. *Những dạng toán điển hình trong các kỳ thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng; Tập 3.*
Bùi Quang Trường; NXB Hà Nội; 2002.
18. *Ôn luyện thi môn Toán THPT theo chủ đề; Tập một: Đại số và lượng giác.*
Cung Thế Anh; NXB Giáo dục Việt Nam; 2011.
19. *Phương pháp giải toán trọng tâm.*
Phan Huy Khải; NXB Đại học Sư phạm; 2011.
20. *Các bài giảng luyện thi môn Toán; Tập 2.*
Phan Đức Chính – Vũ Dương Thụy – Đào Tam – Lê Thống Nhất; NXB Giáo dục Việt Nam; 1993.
21. *Hệ phương trình và phương trình chứa căn thức.*
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2006.

22. **Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT Chuyên trực thuộc đại học và THPT Chuyên các tỉnh thành.**
23. **Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT hệ đại trà các địa phương trên toàn quốc.**
24. **Đề thi học sinh giỏi môn toán khối 8 đến khối 12 các cấp.**
25. **Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán (chính thức – dự bị) qua các thời kỳ.**
26. **Đề thi Olympic 30 tháng 4 Toán học khối 10, khối 11 các tỉnh miền Trung và Nam bộ (1995 – 2013).**
27. **Các tạp chí toán học:** Tạp chí Toán học và tuổi trẻ; Tạp chí Toán tuổi thơ 2 THCS; Tạp chí Kvant...
28. **Các diễn đàn toán học:** Boxmath.vn; Math.net.vn; Mathscope.org; Onluyentoan.vn; Diendantoanhoc.net; Math.net.vn; K2pi.net; Mathlink.ro;...
29. **Một số trang mạng học tập thông qua facebook; twiter;...**



THÂN THỂ TẠI NGỰC TRUNG
TINH THẦN TẠI NGỰC NGOẠI
DỤC THÀNH ĐẠI SỰ NGHIỆP
TINH THẦN CẢNH YẾU ĐẠI

TÀI LIỆU CHÍNH THỨC

TÀI LIỆU THAM KHẢO TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

$$\sqrt[17]{30.06.1954}$$

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

LÝ THUYẾT SỬ DỤNG BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG,
NÂNG CAO LŨY THỪA (PHẦN 4)

TRUNG ĐOÀN TRẦN NGUYỄN HẸN – QUÂN ĐOÀN BỘ BINH

CHỦ ĐẠO: SỬ DỤNG LINH HOẠT PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG,
NÂNG CAO LŨY THỪA

- MỘT SỐ DẠNG TOÁN ĐẶC TRƯNG QUEN THUỘC.
- PHÂN TÍCH NHÂN TỬ, ĐƯA VỀ DẠNG TÍCH – THƯƠNG.
- BÀI TOÁN NHIỀU CÁCH GIẢI.

CREATED BY GIANG SƠN (FACEBOOK); XYZ1431988@GMAIL.COM (GMAIL)

THỦ ĐÔ HÀ NỘI – MÙA THU 2013

“Non sông Việt Nam có trở nên tươi đẹp hay không, dân tộc Việt Nam có bước tới đài vinh quang để sánh vai với các cường quốc năm châu được hay không, chính là nhờ một phần lớn ở công học tập của các em”

(Trích thư Chủ tịch Hồ Chí Minh).



*Này là tiếng sáo, tiếng sáo
Có biết thế nào là hát ca không ?
Chỉ một sợi dây mảnh ràng buộc với đất,
Đứt lúc nào chẳng hay...
(Những bài học nông thôn – Nguyễn Huy Thiệp).*

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

LÝ THUYẾT SỬ DỤNG BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG – NÂNG CAO LŨY THỪA (PHẦN 4)

TRUNG ĐOÀN TRẦN NGUYỄN HẸN – QUÂN ĐOÀN BỘ BINH

Trong chương trình Toán học phổ thông nước ta, cụ thể là chương trình Đại số, phương trình và bất phương trình là một nội dung quan trọng, phổ biến trên nhiều dạng toán xuyên suốt các cấp học, cũng là bộ phận thường thấy trong các kỳ thi kiểm tra chất lượng học kỳ, thi tuyển sinh lớp 10 THPT, thi học sinh giỏi môn Toán các cấp và kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng với hình thức hết sức phong phú, đa dạng. Mặc dù đây là một đề tài quen thuộc, chính thống nhưng không vì thế mà giảm đi phần thú vị, nhiều bài toán cơ bản tăng dần đến mức khó thậm chí rất khó, với các biến đổi đẹp kết hợp nhiều kiến thức, kỹ năng vẫn làm khó nhiều bạn học sinh THCS, THPT. Ngoài phương trình đại số bậc cao, phương trình phân thức hữu tỷ thì phương trình chứa căn (còn gọi là phương trình vô tỷ) đang được đông đảo các bạn học sinh, các thầy cô giáo và các chuyên gia Toán phổ thông quan tâm sâu sắc. Chương trình Toán Đại số lớp 9 THCS bước đầu giới thiệu các phép toán với căn thức, kể từ đó căn thức xuất hiện hầu hết trong các vấn đề đại số, hình học, lượng giác và xuyên suốt chương trình Toán THPT. Sự đa dạng về hình thức của lớp bài toán căn thức đặt ra yêu cầu cấp thiết là làm thế nào để đơn giản hóa, thực tế các phương pháp giải, kỹ năng, mẹo mực đã hình thành, đi vào hệ thống. Về cơ bản để làm việc với lớp phương trình, bất phương trình vô tỷ chúng ta ưu tiên khử hoặc giảm các căn thức phức tạp của bài toán. Sử dụng biến đổi tương đương – nâng cao lũy thừa là một phương thức cơ bản nhất, đơn giản nhất nhằm mục đích đó. Phép biến đổi tương đương theo nghĩa rộng là một phép toán bắt buộc thực hiện đối với nhiều dạng phương trình, hệ phương trình, vấn đề quan trọng hơn là việc giải quyết các công đoạn trung gian dẫn đường. Tiếp theo lý thuyết phần 3, tác giả trân trọng giới thiệu với các bạn học sinh và độc giả phần lý thuyết phần 4, trọng tâm tài liệu phần 4 đi sâu các bài toán đặc trưng giải bằng biến đổi tương đương đơn thuần, các bài toán nâng lũy thừa trực tiếp quy về phương trình đại số bậc cao, phân thức hữu tỷ. Tài liệu nhỏ được viết theo trình tự kiến thức tăng dần, phù hợp với các bạn học sinh THCS (lớp 9) ôn thi vào lớp 10 THPT, các bạn học sinh THPT thi học sinh giỏi Toán các cấp và luyện thi vào hệ đại học, cao đẳng, cao hơn là tài liệu tham khảo dành cho các thầy cô giáo và các bạn yêu Toán khác.

I. KIẾN THỨC – KỸ NĂNG CHUẨN BỊ

1. Nắm vững các biến đổi đại số cơ bản (nhân, chia đa thức, phân tích đa thức thành nhân tử, biến đổi phân thức đại số và căn thức).
2. Kỹ năng biến đổi tương đương, nâng lũy thừa, phân tích hằng đẳng thức, thêm bớt.
3. Sử dụng thành thạo các ký hiệu logic trong phạm vi toán phổ thông.
4. Nắm vững lý thuyết bất phương trình, dấu nhị thức bậc nhất, dấu tam thức bậc hai.

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH VÀ KINH NGHIỆM THAO TÁC

Bài toán 1. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - 4x} = \sqrt{3x^2 + x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \leq -\frac{1}{3} \vee x = 0 \vee x \geq 4$.

- Xét $x = 0$, phương trình đã cho nghiệm đúng.
- Xét $x \geq 4$; phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2} + \sqrt{x-4} = \sqrt{3x+1} &\Leftrightarrow 2x-6+2\sqrt{x^2-6x+8} = 3x+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-6x+8} = x+7 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-24x+32 = x^2+14x+49 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-38x-17=0 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{19+2\sqrt{103}}{3} \end{aligned}$$

- Xét $x \leq -\frac{1}{3}$; phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{2-x} + \sqrt{4-x} = \sqrt{-3x-1} &\Leftrightarrow 6-2x+2\sqrt{x^2-6x+8} = -3x-1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-6x+8} = -x-7 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-24x+32 = x^2+14x+49 \\ x \leq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-38x-17=0 \\ x \leq -7 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0; x = \frac{19+2\sqrt{103}}{3}$.

Bài toán 2. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{x^2 - 5x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \leq -1 \vee x = 0 \vee x \geq 5$

- Xét $x = 0$ là một nghiệm của phương trình đã cho.
- Xét $x \geq 5$; phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x-5} &\Leftrightarrow 2x-1+2\sqrt{(x+1)(x-2)} = x-5 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+1)(x-2)} = -x-4 \end{aligned}$$

Trường hợp này vô nghiệm.

- Xét $x \leq -1$; phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{-x-1} + \sqrt{2-x} = \sqrt{5-x} &\Leftrightarrow -2x+2\sqrt{(x+1)(x-2)} = 5-x \Leftrightarrow 2\sqrt{(x+1)(x-2)} = x+3 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq -1 \\ 4(x^2-x-2) = x^2+6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq -1 \\ 3x^2-10x-17=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5-2\sqrt{19}}{3} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ 0; \frac{5-2\sqrt{19}}{3} \right\}$.

Bài toán 3. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{x^2 + 3x + 2} \geq \sqrt{x^2 + 4x + 3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x = -1 \vee x \geq 2 \vee x \leq -3$.

- Xét $x = -1$ thỏa mãn phương trình đã cho.
- Xét $x \geq 2$; bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2} \geq \sqrt{x+3} \Leftrightarrow 2x+2\sqrt{x^2-4} \geq x+3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-4} \geq 3-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 2 \leq x \leq 3 \\ 4x^2 - 16 \geq x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 2 \leq x \leq 3 \\ 3x^2 + 6x - 25 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -3 + 2\sqrt{21} \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{-3 + 2\sqrt{21}}{3}.$$

➤ Xét $x \leq -3$; bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{-x-2} \geq \sqrt{-x-3} \Leftrightarrow -2x + 2\sqrt{x^2-4} \geq -x-3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-4} \geq x-3 \quad (1).$$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với $x \leq -3$.

Kết luận nghiệm $S = (-\infty; -3] \cup \{-1\} \cup \left[\frac{-3+2\sqrt{21}}{3}; +\infty\right).$

Bài toán 4. Giải phương trình $\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+3x} = 2\sqrt{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0 \vee x \leq -3$.

- Xét $x = 0$ thỏa mãn phương trình đã cho.
- Xét $x > 0$; phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+3x} &= 2\sqrt{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x+4 + 2\sqrt{x^2+4x+3} = 4x \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x+3} &= x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2+4x+3 = x^2-4x+4 \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Hệ (*) vô nghiệm.

- Xét $x \leq -3$; phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{-x-1} + \sqrt{-x-3} &= 2\sqrt{-x} \Leftrightarrow -2x-4 + 2\sqrt{x^2+4x+3} = -4x \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x+3} &= -x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2+4x+3 = x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Giá trị này bị loại do $x \leq -3$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$.

Bài toán 5. Giải phương trình $\sqrt{2x^2-x} + \sqrt{x^2-x} = \sqrt{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 0 \vee x \geq 1$.

- Xét $x = 0$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.
- Xét $x \geq 1$, phương trình trên trở thành

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{2x-1} = \sqrt{x} - \sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x-1 = 2x-1-2\sqrt{x(x-1)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

- Xét $x < 0$, phương trình trên trở thành

$$\begin{cases} x < 0 \\ \sqrt{1-2x} + \sqrt{1-x} = \sqrt{-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \sqrt{1-2x} = \sqrt{1-x} - \sqrt{-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 1-2x = 1-2x-2\sqrt{x(x-1)} \end{cases}$$

Kết hợp các trường hợp ta có nghiệm $S = [0; 1]$.

Bài toán 6. Giải phương trình $\sqrt{3x^2-2x} + \sqrt{x^2-x} = x \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1 \vee x \leq 0$.

Nhận xét $x = \sqrt{3x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - x} \geq 0$, vậy ta có $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = \sqrt{x} \Leftrightarrow 4x-3+2\sqrt{3x^2-5x+2} = x \Leftrightarrow 2\sqrt{3x^2-5x+2} = 3-3x \quad [*].$$

Dễ thấy [*] có nghiệm khi và chỉ khi $x = 1$. Kết luận $S = \{1\}$.

Bài toán 7. Giải phương trình $\sqrt{x^3 - x^2 + x} + x = \sqrt{x^3 + 3x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + x + x^2 + 2x\sqrt{x^3 - x^2 + x} &= x^3 + 3x \Leftrightarrow 2x\sqrt{x^3 - x^2 + x} = 2x \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x^3 - x^2 + x} = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x^2 + 1)(x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0; x = 1$.

Bài toán 8. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - x} \geq \sqrt{4x^2 - 7x + 3} \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 0 \vee x = 1 \vee x \geq 2$.

- Xét $x = 1$, bất phương trình đã cho nghiệm đúng.
- Xét $x \leq 0$, bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{2-x} + \sqrt{-x} &\geq \sqrt{3-4x} \Leftrightarrow 2-2x+2\sqrt{x(x-2)} \geq 3-4x \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x(x-2)} &\geq 1-2x \Leftrightarrow 4x^2-8x \geq 4x^2-4x+1 \Leftrightarrow 4x \leq -1 \end{aligned}$$

- Xét $x \geq 2$, bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2} + \sqrt{x} &\geq \sqrt{4x-3} \Leftrightarrow 2x-2+2\sqrt{x(x-2)} \geq 4x-3 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x(x-2)} &\geq 2x-1 \Leftrightarrow 4x^2-8x \geq 4x^2-4x+1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \leq -\frac{1}{4} \vee x = 1$.

Bài toán 9. Giải bất phương trình $2\sqrt{2x^2 - x} - |x| \leq \sqrt{3x^2 - 2x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 0 \vee x \geq \frac{2}{3}$.

- ✓ Xét $x = 0$, bất phương trình đã cho nghiệm đúng.
- ✓ Xét $x \geq \frac{2}{3}$, bất phương trình ban đầu trở thành

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2x-1} - \sqrt{x} &\leq \sqrt{3x-2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} \leq \sqrt{x} + \sqrt{3x-2} \Leftrightarrow 8x-4 \leq 4x-2+2\sqrt{3x^2-2x} \\ \Leftrightarrow 2x-1 &\leq \sqrt{3x^2-2x} \Leftrightarrow 4x^2-4x+1 \leq 3x^2-2x \Leftrightarrow x^2-2x+1 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

- ✓ Xét $x < 0$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2\sqrt{1-2x} - \sqrt{-x} &\leq \sqrt{2-3x} \Leftrightarrow 2\sqrt{1-2x} \leq \sqrt{-x} + \sqrt{2-3x} \Leftrightarrow 4-8x \leq 2-4x+2\sqrt{3x^2-2x} \\ \Leftrightarrow 1-2x &\leq \sqrt{3x^2-2x} \Leftrightarrow 4x^2-4x+1 \leq 3x^2-2x \Leftrightarrow x^2-2x+1 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $x = 0; x = 1$.

Bài toán 10. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x^2 - x} \leq x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 0 \vee x = 1 \vee x \geq 3$.

- ❖ Xét $x = 1$, bất phương trình đã cho nghiệm đúng.
- ❖ Nhận xét $x - 1 \geq \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x^2 - x} \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$. Kết hợp điều kiện ta có $x \geq 3$.

Bất phương trình trở thành $\sqrt{x - 3} + \sqrt{x} \leq \sqrt{x - 1} \quad [*]$.

Dễ thấy $\sqrt{x} > \sqrt{x - 1} \Rightarrow \sqrt{x - 3} + \sqrt{x} > \sqrt{x - 1}, \forall x \geq 3$. Do đó $[*]$ vô nghiệm.

Kết luận nghiệm $x = 1$.

Bài toán 11. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 + x - 6} \geq \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2 \vee x \leq -3$.

- Xét $x \geq 2$, bất phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{x} + \sqrt{x + 3} \geq \sqrt{2x + 1} \Leftrightarrow 2x + 3 + 2\sqrt{x^2 + 3x} \geq 2x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3x} + 1 \geq 0 \quad [*].$$

Dễ thấy bất phương trình $[*]$ nghiệm đúng với $x \geq 2$.

- Xét $x \leq -3$, bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{-x} + \sqrt{-x - 3} &\geq \sqrt{-2x - 1} \Leftrightarrow -2x - 3 + 2\sqrt{x^2 + 3x} \geq -2x - 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3x} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{\sqrt{13} - 3}{2} \vee x \leq \frac{-\sqrt{13} - 3}{2} \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq 2 \vee x \leq -\frac{\sqrt{13} + 3}{2}$.

Bài toán 12. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 - 4x} \leq 2\sqrt{x^2 + 3x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x = 0 \\ x \geq 4 \\ x \leq -3 \end{cases}$$

- ❖ Xét $x = 0$ thỏa mãn bài toán.
- ❖ Xét $x \geq 4$, bất phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x - 3} + \sqrt{x} \cdot \sqrt{x - 4} \leq 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + 3} \Leftrightarrow \sqrt{x - 3} + \sqrt{x - 4} \leq 2\sqrt{x + 3} \quad [1].$$

Chú ý rằng $\sqrt{x - 3} < \sqrt{x + 3}, \sqrt{x - 4} \leq \sqrt{x + 3} \Rightarrow \sqrt{x - 3} + \sqrt{x - 4} \leq 2\sqrt{x + 3}$, $[1]$ nghiệm đúng.

- ❖ Xét $x \leq -3$, bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{x} \cdot \sqrt{3 - x} + \sqrt{x} \cdot \sqrt{4 - x} &\leq 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{-x - 3} \Leftrightarrow \sqrt{3 - x} + \sqrt{4 - x} \leq 2\sqrt{-x - 3} \\ &\Leftrightarrow 7 - 2x + 2\sqrt{x^2 - 7x + 12} \leq -4x - 12 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 7x + 12} \leq -2x - 19 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x \geq 19 \\ 4(x^2 - 7x + 12) \leq 4x^2 + 76x + 361 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{19}{2} \\ x \geq -\frac{313}{104} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \end{aligned}$$

Kết luận nghiệm $x \geq 4$ hoặc $x = 0$.

Bài toán 13. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 5x} + \sqrt{x} \leq \sqrt{x^2 - 2x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x = 0 \\ x \geq 5 \end{cases}$$

- Xét $x = 0$ nghiệm đúng bất phương trình đã cho.
- Xét $x \geq 5$ thì bất phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{x-5} + 1 \leq \sqrt{x-2} \Leftrightarrow x-5+2\sqrt{x-5} \leq x-2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-5} \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{29}{4}. \text{ Suy ra } 5 \leq x \leq \frac{29}{4}.$$

Kết hợp hai trường hợp ta có tập nghiệm $S = \{0\} \cup \left[5; \frac{29}{4}\right]$.

Bài toán 14. Giải phương trình $\sqrt{x(x^2+1)} + \sqrt{x(x-1)} = \sqrt{2x^2(x+1)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x = 0 \vee x \geq 1$.

- Xét $x = 0$ nghiệm đúng phương trình đã cho.
- Xét $x \geq 1$, ta thu được

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x-1} &= \sqrt{2x(x+1)} \Leftrightarrow x^2+x+2\sqrt{(x^2+1)(x-1)} = 2x(x+1) \\ \Leftrightarrow x^2+1+x-1-2\sqrt{(x^2+1)(x-1)} &= 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x-1})^2 = 0 \\ \Leftrightarrow x^2+1 &= x-1 \Leftrightarrow x^2-x+2 = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Phương trình (*) vô nghiệm vì $\Delta < 0$.

Kết luận phương trình đề bài vô nghiệm.

Nhận xét.

Bất phương trình chứa căn thức (bất phương trình vô tỷ) là một dạng toán cơ bản nhưng ẩn chứa nhiều điều thú vị, đòi hỏi nắm vững kiến thức và khả năng thực hành, tính toán chính xác. Không nằm ngoài phạm vi biến đổi tương đương – nâng lũy thừa, các bạn có thể thấy 14 thí dụ trên đều có cái gì đó rất "khó xử lý", hay nói khác là để giải quyết trọn vẹn nó cũng không phải một việc làm đơn giản, đây là một dạng toán đặc trưng phổ biến, xây dựng chỉ từ sử dụng biến đổi tương đương và kiến thức khai phương cơ bản kèm theo điều kiện phức tạp, chính vì vậy nó đã xuất hiện khá nhiều trên các đề thi tuyển sinh đại học môn Toán thời kỳ trước kỳ thi "Ba chung" năm 2002 và các kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT Chuyên các tỉnh thành trên toàn quốc. Điều này xuất phát bởi mỗi hạng tử tham gia đều chứa hai căn thức, và hai vế đều chứa nhân tử chung, tức là đưa được về dạng tích – thương, giảm bớt các biến đổi cồng kềnh. Tuy nhiên điều kiện xác định lại là một vấn đề rất đáng lưu ý, một số bài toán có điều kiện xác định hết sức đặc biệt, là hợp của các khoảng – đoạn – điểm, gây không ít khó khăn cho quá trình phân tích thừa số của chúng ta. Đôi khi điều kiện lại chính là chìa khóa gỡ bỏ các bẽ tắc cho bài toán, thậm chí đi đến những đánh giá bất ngờ, gọn nhẹ.

Xin lưu ý các phép biến đổi căn thức cơ bản (đã được đề cập trong chương trình Đại số 9 THCS):

$$\sqrt{ABC\dots} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \cdot \sqrt{C} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ C \geq 0 \\ \dots \end{cases}; \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \end{cases}$$

Mặc dù vấn đề rất rõ ràng, nhưng nếu một chút "sơ ý" kết hợp "nhanh nhẹn, xông pha" thì sự ngộ nhận hoàn toàn có thể xảy ra. Đứng trước lớp bài toán có điều kiện phức tạp dạng tương tự, các bạn cần hết sức bình tĩnh, nhìn nhận khách quan, cẩn thận để tìm được phương án giải quyết hợp lý nhất. Ngoài cách làm trên, bình phương trực tiếp hai vế kèm theo điều kiện cũng cho lời giải thuần túy, tuy nhiên nó khá rườm rà.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{3x^2 - 4x} \leq \sqrt{2x^2 + x}$.
2. $\sqrt{x^2} + \sqrt{2x^2 - x} = 2\sqrt{4x^2 - 3x}$.
3. $\sqrt{2x - x^2} + \sqrt{3x - 2x^2} = 2\sqrt{4x - 3x^2}$.
4. $\sqrt{x^2 - 6x + 5} = \sqrt{x^2 + 2x - 3} - \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.
5. $\sqrt{x(x-2)} + \sqrt{x(x+1)} < \sqrt{x(x-1)}$.
6. $\sqrt{x^2 - 6x} + \sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{x^2 - 5x}$.
7. $\sqrt{x^2 - 8x + 7} + \sqrt{x^2 - 1} \geq x - 1$.
8. $\sqrt{x^2 - 7x + 6} + 2\sqrt{x^2 - 1} \geq x - 1$.
9. $\sqrt{x^2 - x} = \sqrt{3x^2 - 5x} - 2\sqrt{x^2 + x}$.
10. $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + 2\sqrt{x^2 - 1} < 3x - 3$.
11. $\sqrt{x^2 - 3x} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} < \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.
12. $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 + 7x} = \sqrt{4x^2 - 5x}$.
13. $3\sqrt{x^2 + 6x + 5} - \sqrt{x^2 + 3x + 2} \geq \sqrt{x + 1}$.
14. $\sqrt{x^2 - 5x} + \sqrt{x} \leq \sqrt{x^2 - 4x}$.
15. $\sqrt{3x^2 + x} < 2\sqrt{x^2 - 5x} - \sqrt{x^2 - 4x}$.
16. $\sqrt{2x^2 - 3x} + \sqrt{4x^2 + 3x} = \sqrt{6x^2}$.
17. $\sqrt{x^2 - 6x + 5} + \sqrt{3x^2 - x - 2} \leq 2\sqrt{x^2 - 9x + 8}$.
18. $\sqrt{5x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + x} < 3\sqrt{x^2}$.
19. $\sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \geq \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.
20. $\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 + 4x} = \sqrt{2x^2 - 5x}$.
21. $\sqrt{x^2 - 7x} + \sqrt{x^2 + x} \geq \sqrt{2x^2 - x}$.
22. $\sqrt{5x^2 + 3x} < 2\sqrt{2x^2 - 9x} - \sqrt{3x^2 + 4x}$.
23. $\sqrt{x^2 - x} + 2\sqrt{x^2 + x} \geq \sqrt{5x^2 - 3x}$.
24. $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 - 3x + 2} \leq x - 1$.
25. $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - 5x + 6} \geq \sqrt{2(x-2)^2}$.
26. $\sqrt{x^2 - 5x + 6} + \sqrt{x^2 - 7x + 10} \leq \sqrt{x^2 - x - 2}$.
27. $\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + 3x} \geq \sqrt{2x^2 - 11x}$.
28. $\sqrt{7x^2 + x} = 4\sqrt{x^2 - 8x} - \sqrt{9x^2 + 10x}$.
29. $\sqrt{2x^2 + x} + \sqrt{3x^2 + x} \geq \sqrt{5x^2 - 13x}$.
30. $\sqrt{x^2 + 5x} + \sqrt{3x^2 + 4x} < 2\sqrt{x^2 - 2x}$.
31. $\sqrt{5x^2} + \sqrt{3x^2 + 10x} = 2\sqrt{2x^2 - x}$.
32. $\sqrt{3x^2 - x} > \sqrt{x} + \sqrt{2x^2 + x}$.
33. $\sqrt{5x^2 - 2x} = \sqrt{x} - 2\sqrt{x^2 + x}$.

Bài toán 15. Giải bất phương trình $2\sqrt{x^2-9} = (x+5)\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 3 \vee x < -3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 4(x^2-9) = (x+5)^2 \cdot \frac{x+3}{x-3} \\ x+5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3) \cdot \left[4(x-3) - \frac{(x+5)^2}{x-3} \right] = 0 \\ x \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)[4(x-3)^2 - (x+5)^2] = 0 \\ x \geq -5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-11)(3x-1) = 0 \\ x \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ -3; 11; \frac{1}{3} \right\}$$

So sánh với điều kiện xác định thu được nghiệm $S = \{-3; 11\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 3 \vee x < -3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^2-9} &= (x+5)\sqrt{\frac{x^2-9}{(x-3)^2}} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-9} = \frac{x+5}{|x-3|} \cdot \sqrt{x^2-9} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-9} = 0 \\ 2|x-3| = x+5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ 2x-6 = x+5 \\ 6-2x = x+5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ -3; \frac{1}{3}; 3; 11 \right\} \end{aligned}$$

So sánh với điều kiện xác định thu được nghiệm $S = \{-3; 11\}$.

Bài toán 16. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-4} \geq (7-x)\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x > 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2-4} \geq (7-x)\sqrt{\frac{x^2-4}{(x+2)^2}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4} \geq \frac{7-x}{|x+2|} \cdot \sqrt{x^2-4} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4} (|x+2| + x - 7) \geq 0 \quad (1)$$

- Xét $\sqrt{x^2-4} = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 2\}$. Bất phương trình (1) nghiệm đúng với $x = 2$.
- Xét $\sqrt{x^2-4} > 0$ thì (1) $\Leftrightarrow |x+2| + x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 7-x \\ x-7 \geq x+2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$.

Kết hợp điều kiện $\begin{cases} x > 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$ ta thu được nghiệm $S = \{2\} \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty \right)$.

Bài toán 17. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-1} \leq x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1 \vee x < -1$.

- Xét $x < -1$, bất phương trình đã cho không thỏa mãn.
- Xét $x \geq 1$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2-1} \leq x \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} \left(\frac{x}{x+1} - 1 \right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} = 0 \Rightarrow x = 1$$

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

Bài toán 18. Giải bất phương trình $\sqrt{4x^2-1} \leq (x-1)\sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2} \vee x < -\frac{1}{2}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x^2-1} \leq (x-1) \frac{\sqrt{4x^2-1}}{|2x+1|} \Leftrightarrow \sqrt{4x^2-1} \left(\frac{x-1}{|2x+1|} - 1 \right) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x^2-1} = 0 \\ x-1 \geq |2x+1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\} \\ x \geq 1 \\ x-1 \geq 2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}.$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

Bài toán 19. Giải bất phương trình $2\sqrt{9x^2-1} \leq (x-2)\sqrt{\frac{3x+1}{3x-1}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > \frac{1}{3} \vee x \leq -\frac{1}{3}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{9x^2-1} \leq (x-2) \frac{\sqrt{9x^2-1}}{|3x-1|} \Leftrightarrow \sqrt{9x^2-1} \left(\frac{x-2}{|3x-1|} - 2 \right) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{9x^2-1} = 0 \\ x-2 \geq 2|3x-1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right\} \\ x \geq 2 \\ x-2 \geq 6x-2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right\}.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = \left\{ -\frac{1}{3} \right\}$.

Bài toán 20. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-1} \leq (\sqrt{x-3}+2x-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x-1} \leq (\sqrt{x-3}+2x-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow x-1 \leq \sqrt{x-3}+2x-1 \Leftrightarrow -x \leq \sqrt{x-3} \quad [*].$$

Dễ thấy [*] nghiệm đúng với $x \geq 3$. Kết luận nghiệm $x \geq 3$.

Bài toán 21. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-16} \leq (\sqrt{x-1}-1)\sqrt{\frac{x-4}{x+4}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 4 \vee x < -4 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x-4} \cdot \sqrt{x+4} \leq (\sqrt{x-1}-1) \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+4}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-4}=0 \\ x+4 \leq \sqrt{x-1}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x+5 \leq \sqrt{x-1} \end{cases} \quad (*)$$

Nhận xét $x+5 > x-1 > \sqrt{x-1}$, $\forall x \geq 4$ nên $(*)$ vô nghiệm. Kết luận nghiệm $S = \{4\}$.

Bài toán 22. Giải bất phương trình $\sqrt{4x^2-1} > (\sqrt{4x^2-x}-1)\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > \frac{1}{2} \vee x \leq -\frac{1}{2}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2-1} > (\sqrt{4x^2-x}-1) \frac{\sqrt{4x^2-1}}{|2x-1|} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 \neq 1 \\ \sqrt{4x^2-x} < |2x-1|+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 \neq 1 \\ 4x^2-x < 4x^2-4x+1+2|2x-1|+1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 \neq 1 \\ 3x-2 < 2|2x-1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x > 1 \\ 3x-2 < 4x-2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x < 1; 2x+1 \neq 0 \\ 3x-2 < 2-4x \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x > 1 \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -\frac{1}{2} \neq x < \frac{1}{2} \\ x < 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \neq x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x > \frac{1}{2} \vee x < -\frac{1}{2}$.

Bài toán 23. Giải bất phương trình $2\sqrt{x^2-25} \leq (\sqrt{x}+1)\sqrt{\frac{x-5}{x+5}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 5$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{x-5} \cdot \sqrt{x+5} \leq (\sqrt{x}+1) \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+5}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-5}=0 \\ 2(x+5) \leq \sqrt{x}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ 2x-\sqrt{x}+9 \leq 0 \end{cases} \quad [*]$$

Dễ thấy $[*] \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{4}\right)^2 \leq -\frac{71}{8}$ (Vô nghiệm). Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x=5$.

Bài toán 24. Giải bất phương trình $3\sqrt{1-x^2} \leq (\sqrt{x}-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $0 \leq x < 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x} &\leq (\sqrt{x}-1) \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+x}=0 \\ 3(1-x) \leq \sqrt{x}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 3x+\sqrt{x}-4 \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ (\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \sqrt{x} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện, bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 25. Giải bất phương trình $3\sqrt{x} \leq (\sqrt{x}-1)\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 1 \vee x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x > 1 \end{cases}$$

Nhận xét bất phương trình nhận $x=0$ là một nghiệm. Với $x > 1$, phương trình đã cho tương đương với

$$3\sqrt{x-1} \leq \sqrt{x}-1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x-1}+1 \leq \sqrt{x} \Leftrightarrow 9x-9+6\sqrt{x-1}+1 \leq x \Leftrightarrow 4x+3\sqrt{x-1} \leq 4 \quad [*].$$

Dễ thấy [*] vô nghiệm do $x > 1$. Kết luận nghiệm $x=0$.

Bài toán 26. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-3x+2} \leq (\sqrt{x^2+2}+1)\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > 2 \vee x \leq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2-3x+2} \leq (\sqrt{x^2+2}+1)\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{|x-2|} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-3x+2} = 0 & [1] \\ \sqrt{x^2+2}+1 \geq |x-2| & [2] \end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\triangleright [1] \Leftrightarrow x=1 \vee x=2.$$

$$\triangleright [2] \Leftrightarrow x^2+2+2\sqrt{x^2+2}+1 \geq x^2-4x+4 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+2} \geq -4x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x > 1 \\ 4x \leq 1 \\ 4x^2+8 \geq 16x^2-8x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x > 1 \\ 4x \leq 1 \\ 12x^2-8x-7 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = \left[-\frac{1}{2}; 1\right] \cup (2; +\infty)$.

Bài toán 27. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-x} \leq (\sqrt{x^2-3x}-1)\sqrt{\frac{x-1}{x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3 \vee x < 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-x} &\leq (\sqrt{x^2-3x}-1)\frac{\sqrt{x^2-x}}{|x|} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-x} = 0 \\ |x|+1 \leq \sqrt{x^2-3x} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ x^2+2|x|+1 \leq x^2-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0; x=1 \\ 2|x| \leq -3x-1 \end{cases} \quad [*] \end{aligned}$$

Dễ thấy [*] vô nghiệm khi $x \geq 3$. Với $x < 0$ thì $[*] \Leftrightarrow -2x \leq -3x-1 \Leftrightarrow x \leq -1$.

Kết hợp các trường hợp và điều kiện ta thu được nghiệm $S = (-\infty; -1] \cup \{1\}$.

Nhận xét.

Lớp các bài toán từ 15 đến 27 là dạng đặc trưng thứ hai, chỉ sử dụng biến đổi tương đương thông thường, một đặc điểm nhận dạng mà bạn đọc có thể thấy là hai vế của phương trình hay bất phương trình đều có nhân tử chung, nhưng không lộ liễu mà ẩn phía trong căn thức, thường là dạng phân thức. Điều kiện xác định khá phức tạp của bài toán buộc người làm phải dẫn dắt và cẩn thận trong quá trình tính toán, lập luận.

Có thể tổng quát dạng toán nhỏ này như sau $\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = h(x) \sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$

Một số thí dụ cụ thể có thể dựa vào điều kiện xác định "đẹp đẽ", cho phép chúng ta khai phương trực tiếp về dạng

$$\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} = h(x) \frac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{f(x)} = 0 \\ g(x) = h(x) \end{cases}$$

Một số trường hợp khác khó khăn hơn, hai biểu thức $f(x), g(x)$ không thể tách rời nhau nếu không chia trường hợp, thành thử nếu thực hiện như vậy sẽ khá phức tạp. Tất nhiên trong đại đa số các phi vụ này, cũng như các lời giải ở phía trên, bạn đọc có thể "tác thành" cho chúng, để nguyên chúng "dính kếp" với nhau, cố gắng đưa về nhân tử chung $\sqrt{f(x) \cdot g(x)}$, hoàn toàn không ảnh hưởng tới tập xác định ban đầu. Khi đó thì

$$\sqrt{f(x) \cdot g(x)} = h(x) \sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}} \Leftrightarrow \sqrt{f(x) \cdot g(x)} = h(x) \cdot \frac{\sqrt{f(x) \cdot g(x)}}{|g(x)|} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{f(x) \cdot g(x)} = 0 \\ h(x) = |g(x)| \end{cases}$$

Yếu tố quyết định trong thao tác này vẫn là nắm vững kiến thức cơ bản, chưa cần thiết đến các kỹ thuật phức tạp, nhưng đòi hỏi tư duy logic, chính xác, đức tính kiên trì bền bỉ và một chút linh hoạt, sáng tạo khi xử lý công đoạn cuối cùng với phương trình, bất phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối.

Bài toán 28. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 5x + 6} < (\sqrt{x^2 + x + 1} - 1) \sqrt{\frac{x-2}{x-3}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > 3 \vee x \leq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 5x + 6} < (\sqrt{x^2 + x + 1} - 1) \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 6}{(x-3)^2}} &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 5x + 6} < (\sqrt{x^2 + x + 1} - 1) \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{|x-3|} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 5x + 6} \neq 0 \\ |x-3| + 1 < \sqrt{x^2 + x + 1} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \notin \{2; 3\} \\ x^2 - 6x + 9 + 2|x-3| + 1 < x^2 + x + 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin \{2; 3\} \\ 2|x-3| < 7x - 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \notin \{2; 3\}; x \geq \frac{9}{7} \\ \begin{cases} 2x - 6 < 7x - 9 \\ 6 - 2x < 7x - 9 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin \{2; 3\}; x \geq \frac{9}{7} \\ x > \frac{3}{5} \vee x > \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin \{2; 3\} \\ x > \frac{5}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được tập hợp nghiệm $S = \left(\frac{5}{3}; 2\right) \cup (3; +\infty)$.

Bài toán 29. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3 - 1} \leq (\sqrt{x^2 + x + 1}) \sqrt{\frac{x-1}{x^2 + x + 1}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$.

- Nhận xét $x = 1$ thỏa mãn bất phương trình ban đầu.
- Với $x > 1$ ta biến đổi đưa về

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x + 1} &\leq \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1})}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \Leftrightarrow x^2 + x + 1 \leq \sqrt{x^2 + x + 1} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x} (\sqrt{x^2 + x - 1}) &\leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 \leq 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Rõ ràng $x^2 + x > 2, \forall x > 1$ nên (*) vô nghiệm.
 Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 30. Giải bất phương trình $\sqrt{(x-1)(x^2+1)} \leq \left[\sqrt{2(x^2-x+1)} - \sqrt{x} \right] \sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} &\leq \left[\sqrt{2(x^2-x+1)} - \sqrt{x} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow x-1 + \sqrt{x} \leq \sqrt{2(x^2-x+1)} \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x + 2(x-1)\sqrt{x} \leq 2(x^2-x+1) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 2(x-1)\sqrt{x} + x \geq 0 \Leftrightarrow (x-1-\sqrt{x})^2 \geq 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Để thấy bất phương trình (*) luôn luôn nghiệm đúng với mọi $x > 1$. Kết luận nghiệm $S = (1; +\infty)$.

Bài toán 31. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+2x-3} \leq (\sqrt{x^2+x-1}-x^2) \sqrt{\frac{x^2+x+3}{x-1}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)(x^2+x+3)} &\leq (\sqrt{x^2+x-1}-x^2) \sqrt{\frac{x^2+x+3}{x-1}} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x-1} \leq \frac{\sqrt{x^2+x-1}-x^2}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow x-1+x^2 \leq \sqrt{x^2+x-1} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-1}(\sqrt{x^2+x-1}-1) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-1} \geq 1 \Leftrightarrow x^2+x-2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu với điều kiện ta thu được nghiệm $x > 1$.

Bài toán 32. Giải bất phương trình $\sqrt{(x-2)(x^4-x+1)} = (x^2-x+2) \sqrt{\frac{x-2}{x^4-x+1}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Ta có $x^4 - x + 1 = \frac{4x^4 - 4x + 4}{4} = \frac{4x^4 - 4x^2 + 1 + 4x^2 - 4x + 1 + 2}{4} = \frac{(2x^2-1)^2 + (2x-1)^2 + 2}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra điều kiện xác định $x \geq 2$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x^4-x+1} &= (x^2-x+2) \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^4-x+1}} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x^4-x+1 = x^2-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x^4 = x^2-2x+1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x^4 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ (x^2+x-1)(x^2-x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ 2; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm $x = 2$.

Bài toán 33. Giải bất phương trình $\sqrt{(x-3)(x^2+x-2)} \geq (\sqrt{x^2+1}+1) \sqrt{\frac{x^2+x-2}{x-3}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} (x-3)(x^2+x-2) \geq 0 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{(x-3)(x^2+x-2)} \geq (\sqrt{x^2+1}+1) \cdot \frac{\sqrt{(x-3)(x^2+x-2)}}{|x-3|} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x^2+x-2) = 0 \\ \sqrt{x^2+1}+1 \leq |x-3| \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{➤ } (1) \Leftrightarrow (x-3)(x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3; -2; 1\}.$$

$$\text{➤ } (2) \Leftrightarrow x^2+1+2\sqrt{x^2+1} \leq x^2-6x+9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \leq 4-3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ x^2+1 \leq 9x^2-24x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ 8x^2-24x+15 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{6+\sqrt{6}}{4} \\ \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{6-\sqrt{6}}{4} \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta thu được nghiệm } S = \left[\frac{3}{4}; \frac{6-\sqrt{6}}{4} \right] \cup (3; +\infty).$$

Bài toán 34. Giải bất phương trình $\sqrt{(x-4)x} \leq (\sqrt{x^3+x^2+2x-4}-1)\sqrt{\frac{x-4}{x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x(x-4) \geq 0; x \neq 0 \\ x^3+x^2+2x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \vee x < 0 \\ (x-1)(x^2+2x+4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x-4} \cdot \sqrt{x} &\leq (\sqrt{x^3+x^2+2x-4}-1) \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x+1 \leq \sqrt{x^3+x^2+2x-4} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x^2+2x+1 \leq x^3+x^2+2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x^3-5 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện đi đến tập nghiệm } S = [4; +\infty).$$

Bài toán 35. Giải phương trình $\sqrt{(x-3)(x^2-x+6)} \leq \left[2\sqrt{(x^2+3)(4-x)}-1 \right] \sqrt{\frac{x-3}{x^2-x+6}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $3 \leq x \leq 4$ do $x^2-x+6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x^2-x+6} &\leq \left[2\sqrt{(x^2+3)(4-x)}-1 \right] \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-x+6}} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x^2-x+6 \leq 2\sqrt{(x^2+3)(4-x)}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x^2+3+4-x \leq 2\sqrt{(x^2+3)(4-x)} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ (\sqrt{x^2+3}-\sqrt{4-x})^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x^2+x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ 3; \frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \right\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm duy nhất $x = 3$.

Bài toán 36. Giải phương trình $\sqrt{x(x^2-1)} = (1+\sqrt{2-x})\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \leq 2 \\ x > 1 \\ -1 < x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 2 \\ -1 < x \leq 0 \end{cases}$$

Phương trình ban đầu tương đương với

$$\sqrt{x(x^2-1)} = (1+\sqrt{2-x})\frac{\sqrt{x(x^2-1)}}{|x^2-1|} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2-1) = 0 & (1) \\ |x^2-1| = 1+\sqrt{2-x} & (2) \end{cases}$$

Xét các khả năng xảy ra

$$\diamond (1) \Leftrightarrow x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 0; 1\}.$$

$$\diamond \text{ Với } -1 < x \leq 0 \text{ thì } (2) \Leftrightarrow -x^2 = \sqrt{2-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2-x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$\diamond$ Với $1 < x \leq 2$ thì (2) trở thành

$$\begin{aligned} x^2 &= 2 + \sqrt{2-x} \Leftrightarrow 4x^2 = 8 + 4\sqrt{2-x} \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 4(2-x) + 4\sqrt{2-x} + 1 \\ &\Leftrightarrow (2x-1)^2 = (2\sqrt{2-x}+1)^2 \Leftrightarrow |2x-1| = |2\sqrt{2-x}+1| \Leftrightarrow 2x-1 = 2\sqrt{2-x}+1 \\ &\Leftrightarrow x-1 = \sqrt{2-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 2 \\ x^2-2x+1 = 2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 2 \\ x^2-x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được tập nghiệm $S = \left\{0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Bài toán 37. Giải phương trình $\sqrt{x^4-x^2+1} = (x+\sqrt{x}+1)\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Ta có } x^2-x+1 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}; x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hơn nữa $x^4-x^2+1 = (x^2-x+1)(x^2+x+1) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên suy ra điều kiện xác định: $x \geq 0$. Biến đổi

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2+x+1} &= (x+\sqrt{x}+1)\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}} \Leftrightarrow x^2+x+1 = x+\sqrt{x}+1 \\ &\Leftrightarrow x^2-\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(x\sqrt{x}-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 1 \end{aligned}$$

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

$$1. \quad 3\sqrt{x^2 - 25} = (x + 4)\sqrt{\frac{x+5}{x-5}}.$$

$$2. \quad 4\sqrt{x^2 - 4} = (x^2 + x + 1)\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}.$$

$$3. \quad \sqrt{x^2 - 1} \leq (\sqrt{x} + x + 4)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

$$4. \quad \sqrt{x(x-5)} = (x^2 + 4x + 6)\sqrt{\frac{x}{x-5}}.$$

$$5. \quad \sqrt{x(2x-1)} > (2 - \sqrt{x})\sqrt{2 - \frac{1}{x}}.$$

$$6. \quad \sqrt{x(x^2 + 1)} = \left[\sqrt{2(x^2 + 3x + 1)} + \sqrt{x} - 1 \right] \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x}}.$$

$$7. \quad \sqrt{(x-3)(x-1)} = (5 - |2x + 3|)\sqrt{\frac{x-1}{x-3}}.$$

$$8. \quad \sqrt{x(x+4)} < \left[\sqrt{2(2x^2 - 3x + 2)} - \sqrt{(x-1)(x-2)} \right] \sqrt{1 + \frac{4}{x}}.$$

$$9. \quad \sqrt{(x-3)(x+1)} = \left[\sqrt{2(2x^2 + 3x + 4)} - \sqrt{x^2 + x + 3} \right] \sqrt{\frac{x-3}{x+1}}.$$

$$10. \quad \sqrt{x(x^2 - 4x + 3)} > (\sqrt{x^2 + 3x + 9} - 1)\sqrt{x + \frac{3}{x} - 4}.$$

$$11. \quad x\sqrt{x(x-2)} = (\sqrt{x^2 + 3} + 1)\sqrt{1 - \frac{2}{x}}.$$

$$12. \quad \sqrt{(x-1)(x^3 + 1)} = (\sqrt{x^2 + 3} - |2x + 3|)\sqrt{\frac{x^3 + 1}{x-1}}.$$

$$13. \quad x\sqrt{x(3x-2)} = (x^3 + x^2 - 3)\sqrt{3 - \frac{2}{x}}.$$

$$14. \quad \sqrt{x(x^2 + x + 3)} \leq (\sqrt{x^3 + x^2 + 4x - 6} - 2)\sqrt{x + \frac{3}{x} + 1}.$$

$$15. \quad \sqrt{x^2 - 5x + 4} = (|x-3| - 2|x| + 1)\sqrt{\frac{x-1}{x-4}}.$$

$$16. \quad \sqrt{x^2 - 6x + 5} = \left(\frac{1}{x} - 4|x| \right) \sqrt{\frac{x-1}{x-5}}.$$

$$17. \quad \sqrt{2x^2 - 5x + 2} \leq (4\sqrt{x} - 2|x-5|)\sqrt{\frac{2x-1}{x-2}}.$$

$$18. \quad \sqrt{(x-5)(x+1)} = (4x^2 - x|x| + 6)\sqrt{\frac{x-5}{x+1}}.$$

$$19. \quad \sqrt{(2x-5)(x-2)} \leq (\sqrt{x^2 + 4x + 8} - x)\sqrt{\frac{2x-5}{x-2}}.$$

Bài toán 38. Giải phương trình $\sqrt{x+2} + \sqrt{5-2x} = \sqrt{2x} + \sqrt{7-3x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $0 \leq x \leq \frac{7}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x+2+5-2x+2\sqrt{(x+2)(5-2x)} &= 2x+7-3x+2\sqrt{2x(7-3x)} \\ \Leftrightarrow 7-x+2\sqrt{-2x^2+x+10} &= 7-x+2\sqrt{14x-6x^2} \\ \Leftrightarrow -2x^2+x+10 &= 14x-6x^2 \Leftrightarrow 4x^2-13x+10=0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{5}{4}; 2\right\} \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện đi đến hai nghiệm kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $0 \leq x \leq \frac{7}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{5-2x} - \sqrt{7-3x} &= \sqrt{2x} - \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \frac{5-2x-(7-3x)}{\sqrt{5-2x} + \sqrt{7-3x}} = \frac{2x-(x+2)}{\sqrt{2x} + \sqrt{x+2}} \\ \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{5-2x} + \sqrt{7-3x}} &= \frac{x-2}{\sqrt{2x} + \sqrt{x+2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \sqrt{5-2x} + \sqrt{7-3x} = \sqrt{2x} + \sqrt{x+2} \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Kết hợp (1) và phương trình ban đầu thu được

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-3x} = \sqrt{7-3x} - \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = \sqrt{7-3x} \Leftrightarrow x+2 = 7-3x \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}.$$

Kết luận phương trình đề bài có hai nghiệm $x=2; x=\frac{5}{4}$.

Bài toán 39. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x+2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 0$.

Nhận xét $x=1$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Với $x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x+3} \neq \sqrt{3x+1}; 2\sqrt{x} \neq \sqrt{2x+2}$. Ta có biến đổi

$$\begin{aligned} \frac{x+3-(3x+1)}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}} &= \frac{4x-(2x+2)}{2\sqrt{x}-\sqrt{2x+2}} \Leftrightarrow \frac{2-2x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}} = \frac{2x-2}{2\sqrt{x}-\sqrt{2x+2}} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1} = \sqrt{2x+2}-2\sqrt{x} \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Kết hợp (1) với đề bài thu được $2\sqrt{x+3} = 2\sqrt{2x+2} \Leftrightarrow x+3 = 2x+2 \Leftrightarrow x=1$. Giá trị này bị loại.

Vậy bài toán có duy nhất nghiệm $x=1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 0$.

Khi đó ta có nhận xét

$$(\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+2})(2\sqrt{x}-\sqrt{x+3}) = \frac{x-1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+2}} \cdot \frac{3x-3}{2\sqrt{x}+\sqrt{x+3}} = \frac{3(x-1)^2}{(\sqrt{3x+1}+\sqrt{2x+2})(2\sqrt{x}+\sqrt{x+3})} > 0.$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x+2} &= 2\sqrt{x} - \sqrt{x+3} \\
\Leftrightarrow 3x+1+2x+2-2\sqrt{(3x+1)(2x+2)} &= 4x+x+3-4\sqrt{x(x+3)} \\
\Leftrightarrow \sqrt{6x^2+8x+2} &= \sqrt{4x^2+12x} \Leftrightarrow 2x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1
\end{aligned}$$

Vậy bài toán có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 40. Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{x+4} = \sqrt{2x+3} + 1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
2x+4+2\sqrt{x^2+4x} &= 2x+4+2\sqrt{2x+3} \\
\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x} &= \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 3\}
\end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm $x=3$.

Bài toán 41. Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{3x+4} = \sqrt{5x+3} + \sqrt{1-x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $0 \leq x \leq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
4x+4+2\sqrt{x(3x+4)} &= 4x+4+2\sqrt{(5x+3)(1-x)} \\
\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+4x} &= \sqrt{-5x^2+2x+3} \Leftrightarrow 3x^2+4x = -5x^2+2x+3 \\
\Leftrightarrow 8x^2+2x-3 &= 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}; x = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$.

Bài toán 42. Giải phương trình $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+5} = \sqrt{7x+1} + \sqrt{7-4x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{1}{7} \leq x \leq \frac{7}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
3x+8+2\sqrt{(2x+3)(x+5)} &= 3x+8+2\sqrt{(7x+1)(7-4x)} \\
\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+13x+18} &= \sqrt{-28x^2+45x+7} \\
\Leftrightarrow 2x^2+13x+18 &= -28x^2+45x+7 \Leftrightarrow 30x^2-32x+9=0 \quad (1)
\end{aligned}$$

Phương trình (1) vô nghiệm vì $\Delta < 0$. Kết luận phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 43. Giải phương trình $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x-2} = \sqrt{x} + \sqrt{4x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
2x+1+3x-2+2\sqrt{(2x+1)(3x-2)} &= 5x-1+2\sqrt{x(4x-1)} \\
\Leftrightarrow \sqrt{6x^2-x-2} &= \sqrt{4x^2-x} \Leftrightarrow 2x^2-2=0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}
\end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x=1$.

Bài toán 44. Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{4x+3} = \sqrt{2(x+1)} + \sqrt{3x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 5x+3+2\sqrt{x(4x+3)} &= 4x+3+2\sqrt{2(x+1)(3x+1)} \\ \Leftrightarrow 4x^2+3x &= 2(3x^2+4x+1) \Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0 \Leftrightarrow x \in \left\{-2; -\frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 45. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{6x} = \sqrt{3x+4} + \sqrt{4x-1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{4}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 7x+3+2\sqrt{6x(x+3)} &= 7x+3+2\sqrt{12x^2+13x-4} \\ \Leftrightarrow 6x^2+18x &= 12x^2+13x-4 \Leftrightarrow 6x^2-5x-4=0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{4}{3}; -\frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện đi đến nghiệm duy nhất $x = \frac{4}{3}$.

Bài toán 46. Giải phương trình $\sqrt{4x+5} + \sqrt{3x+1} = \sqrt{2x+7} + \sqrt{x+3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$.

Phương trình đã cho biến đổi về $\sqrt{4x+5} - \sqrt{x+3} = \sqrt{2x+7} - \sqrt{3x+1} \quad (1)$.

Nhận thấy (1) có nghiệm khi hai vế cùng dấu, nghĩa là

$$(\sqrt{4x+5} - \sqrt{x+3})(\sqrt{2x+7} - \sqrt{3x+1}) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3x+2}{\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+3}} \cdot \frac{6-x}{\sqrt{2x+7} + \sqrt{3x+1}} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6.$$

Với $-\frac{1}{3} \leq x \leq 6$ thì (1) trở thành $5x+8-2\sqrt{(4x+5)(x+3)} = 5x+8-2\sqrt{(2x+7)(3x+1)}$

$$\Leftrightarrow 4x^2+17x+15 = 6x^2+23x+7 \Leftrightarrow 2x^2+6x-8=0 \Leftrightarrow 2(x-1)(x+4)=0 \Leftrightarrow x \in \{-4; 1\}.$$

Đối chiếu và kết luận, phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Bài toán 47. Giải phương trình $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} = \sqrt{2x} + \sqrt{2x-1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$.

Nhận xét rằng $\sqrt{x+2} \neq \sqrt{x+1}, \sqrt{2x} \neq \sqrt{2x-1}, \forall x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x} - \sqrt{2x-1}} \Rightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} = \sqrt{2x} - \sqrt{2x-1} \quad (1).$$

Kết hợp phương trình (1) với đề bài ban đầu thu được $2\sqrt{x+2} = 2\sqrt{2x} \Leftrightarrow x+2 = 2x \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy ta thu được nghiệm duy nhất $x = 2$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho biến đổi về $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-1} = \sqrt{2x} - \sqrt{x+1}$ (2).

Rõ ràng điều kiện cần để (2) có nghiệm là hai vế cùng dấu, nghĩa là

$$\begin{aligned} & (\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-1})(\sqrt{2x} - \sqrt{x+1}) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{3-x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x-1}} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{2x} + \sqrt{x+1}} \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3 \end{aligned}$$

Lúc này (2) $\Leftrightarrow 3x+1-2\sqrt{2x^2+3x-2}=3x+1-2\sqrt{2x^2+2x} \Leftrightarrow 2x^2+3x-2=2x^2+2x \Leftrightarrow x=2$.

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x=2$.

Nhận xét.

Các bài toán từ 38 đến 47 thuộc lớp bài toán đặc trưng thứ ba chỉ sử dụng biến đổi tương đương, nâng cao lũy thừa mà tác giả trân trọng giới thiệu tới quý bạn đọc. Một số bài toán có lời giải phụ thông qua sử dụng đại lượng liên hợp – phép trục căn thức và hệ tam thời, hình thức khá ngắn gọn, tác giả xin được trình bày tại tài liệu Lý thuyết sử dụng đại lượng liên hợp – trục căn thức – hệ phương trình tam thời (gồm 5 phần) ngay sau khi kết thúc 7 phần lý thuyết cơ bản này.

Trở lại các bài toán từ 38 đến 47, có lẽ nhiều bạn đọc dễ dàng nhận ra hình thức đặc biệt của bài toán, cũng chính là mấu chốt dẫn đến lời giải. Có thể nói đại bộ phận các bài toán trên chứa số lượng căn thức nhiều (3 căn thức trở lên), phần nào gây nên sự phân vân hoặc khó khăn trong quá trình lựa chọn phương pháp, đối với các bạn học sinh chưa thực hành nhiều với phương trình chứa căn nói chung.

Tác giả xin được mạo muội tổng quát dạng toán như sau

$$\begin{cases} \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{m(x)} + \sqrt{n(x)} & (1) \\ \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{m(x)} - \sqrt{n(x)} & (2) \end{cases}$$

Trong đó $f(x), g(x), m(x), n(x)$ là các biểu thức biến x xác định, thỏa mãn $f(x) + g(x) = m(x) + n(x)$.

Đặc tính này cho chúng ta một nhận định quan trọng, đó là sau khi thực hiện nâng lũy thừa (cụ thể là phép bình phương đồng bộ hai vế) đều sẽ thu được phương trình hệ quả có dạng

$$\sqrt{f(x)} \cdot g(x) = \sqrt{m(x)} \cdot n(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) = m(x) \cdot n(x) \Leftrightarrow \dots$$

Thao tác biến đổi trên đối với (1) là cơ bản, vì hai vế của phương trình đều không âm thậm chí đều nhận giá trị dương (với điều kiện đã xác định), tuy nhiên đối với phương trình (2) đã xuất hiện một số khác biệt "nhỏ nhỏ". Chú ý rằng để (2) có nghiệm thì điều kiện tối thiểu là hai vế cùng dấu (cùng âm hoặc cùng dương) hoặc cùng bằng 0 (trường hợp ít xảy ra). Như vậy trước khi bình phương (2) cần có

$$(\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)})(\sqrt{m(x)} - \sqrt{n(x)}) \geq 0 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - g(x)}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}} \cdot \frac{m(x) - n(x)}{\sqrt{m(x)} - \sqrt{n(x)}} \geq 0 \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow [f(x) - g(x)][m(x) - n(x)] \geq 0 \quad (5)$$

Giải bất phương trình chứa căn này theo nguyên tắc thì chia từng trường hợp, rõ ràng là khá phức tạp. Để ý một chút các bạn có thể sử dụng hệ quả (4), dựa trên thao tác trục căn thức hết sức đơn thuần, tiếp tục quy về (5), giải quyết khá đơn giản. Ngoài ra các bạn có thể sử dụng giả sử hai vế của phương trình cùng dấu, giải lấy nghiệm và thử trực tiếp vào đề bài và loại – chọn cũng là một phương án hoàn toàn khả thi!

Bài toán 48. Giải bất phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{x+4} < \sqrt{4x+1} + \sqrt{3-2x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $0 \leq x \leq \frac{3}{2}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x+4+2\sqrt{x^2+4x} &< 2x+4+2\sqrt{-8x^2+10x+3} \Leftrightarrow x^2+4x < -8x^2+10x+3 \\ \Leftrightarrow 9x^2-6x-3 &< 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(3x+1) < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 1 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = [0; 1)$.

Bài toán 49. Giải bất phương trình $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x} \geq \sqrt{3x-4} + 1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$. Bất phương trình đã cho biến đổi về

$$\begin{aligned} 3x-3+2\sqrt{2x^2-3x} &\geq 3x-3+2\sqrt{3x-4} \Leftrightarrow 2x^2-3x \geq 3x-4 \\ \Leftrightarrow 2x^2-6x+4 &\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x \geq 2$.

Bài toán 50. Giải bất phương trình $\sqrt{x} - \sqrt{3x-2} \leq \sqrt{4x-6} - 2$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$. Ta có $\sqrt{x} - \sqrt{3x-2} = \frac{2-2x}{\sqrt{x} + \sqrt{3x-2}} < 0, \forall x \geq \frac{3}{2}$. Xét các trường hợp xảy ra

- Với $\sqrt{4x-6} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 4x-6 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$. Bất phương trình nghiệm đúng với $x \geq \frac{5}{2}$.
- Với $\sqrt{4x-6} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow 4x-6 \leq 4 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$.

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} - \sqrt{3x-2})^2 &\geq (\sqrt{4x-6} - 2)^2 \Leftrightarrow 4x-2-2\sqrt{3x^2-2x} \geq 4x-2-4\sqrt{4x-6} \\ \Leftrightarrow \sqrt{3x^2-2x} &\leq 2\sqrt{4x-6} \Leftrightarrow 3x^2-2x \leq 16x-24 \Leftrightarrow 3x^2-18x+24 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4 \end{aligned}$$

Thu được nghiệm trường hợp này là $2 \leq x \leq \frac{5}{2}$.

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq \frac{3}{2}$.

Bài toán 51. Giải bất phương trình $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x} < \sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Nhận xét $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x} = \frac{x+5}{\sqrt{2x+5} + \sqrt{x}} > 0, \forall x \geq 0$ và $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2} = \frac{x+1}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+2}} > 0, \forall x \geq 0$.

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (\sqrt{2x+5} - \sqrt{x})^2 &< (\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2})^2 \\ \Leftrightarrow 3x+5-2\sqrt{2x^2+5x} &< 3x+5-2\sqrt{2x^2+7x+6} \\ \Leftrightarrow 2x^2+7x+6 &< 2x^2+5x \Leftrightarrow 2x+6 < 0 \Leftrightarrow x < -3 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện đi đến bất phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 52. Giải bất phương trình $\sqrt{4x+3} + \sqrt{x+1} < \sqrt{6x+2} + \sqrt{3x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{4x+3} - \sqrt{3x} < \sqrt{6x+2} - \sqrt{x+1}$

Nhận xét $\sqrt{4x+3} - \sqrt{3x} = \frac{x+3}{\sqrt{4x+3} + \sqrt{3x}} > 0, \forall x \geq 0$ và $\sqrt{6x+2} - \sqrt{x+1} = \frac{5x+1}{\sqrt{6x+2} + \sqrt{x+1}} > 0, \forall x \geq 0$.

Do đó ta có biến đổi

$$\begin{aligned} & (\sqrt{4x+3} - \sqrt{3x})^2 < (\sqrt{6x+2} - \sqrt{x+1})^2 \\ & \Leftrightarrow 7x+3 - 2\sqrt{12x^2+9x} < 7x+3 - 2\sqrt{6x^2+8x+2} \\ & \Leftrightarrow 6x^2+8x+2 < 12x^2+9x \Leftrightarrow 6x^2+x-2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \vee x < -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện đi đến nghiệm $S = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Bài toán 53. Giải bất phương trình $\sqrt{3x+4} + \sqrt{2x-3} \leq \sqrt{x+1} + \sqrt{2x+6}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{3x+2} - \sqrt{x+1} \leq \sqrt{2(x+3)} - \sqrt{2x-3}$ (1).

Ta có $\sqrt{3x+2} - \sqrt{x+1} = \frac{2x+1}{\sqrt{3x+4} + \sqrt{x+1}} > 0, \forall x \geq \frac{3}{2}$ và $\sqrt{2(x+3)} - \sqrt{2x-3} = \frac{9}{\sqrt{2(x+3)} + \sqrt{2x-3}} > 0, \forall x \geq \frac{3}{2}$.

Do đó (1) biến đổi về

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3x+2} - \sqrt{x+1})^2 \leq (\sqrt{2(x+3)} - \sqrt{2x-3})^2 \\ & \Leftrightarrow 3x+3 - 2\sqrt{3x^2+5x+2} \leq 4x+3 - 2\sqrt{2(2x^2+3x-9)} \\ & \Leftrightarrow 4x^2+6x-18 \leq 3x^2+5x+2 \Leftrightarrow x^2+x-20 \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 4 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện thu được nghiệm $S = \left[\frac{3}{2}; 4\right]$.

Bài toán 54. Giải phương trình $\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x^2+2x+2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+2x+2+2\sqrt{(x^2+x+1)(x+1)} = x^2+2x+2 \Leftrightarrow \sqrt{(x^2+x+1)(x+1)} = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Bài toán 55. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3x+1} + \sqrt{x+1} = \sqrt{3x+1} + \sqrt{x^2+x+1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
x^2 + 4x + 2 + 2\sqrt{(x^2 + 3x + 1)(x + 1)} &= x^2 + 4x + 2 + 2\sqrt{(x^2 + x + 1)(3x + 1)} \\
\Leftrightarrow (x^2 + 3x + 1)(x + 1) &= (x^2 + x + 1)(3x + 1) \\
\Leftrightarrow x^2(x + 1) + (3x + 1)(x + 1) &= x^2(3x + 1) + (x + 1)(3x + 1) \Leftrightarrow 2x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0
\end{aligned}$$

So sánh với điều kiện, kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = 0$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{3x + 1} = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x + 1} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x + 1}} &= \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x + 1}} \\
\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x^2 + 3x + 1} + \sqrt{3x + 1} = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x + 1} \end{cases} &\quad (2)
\end{aligned}$$

Kết hợp (1) và (2) thu được $2\sqrt{x^2 + 3x + 1} = 2\sqrt{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x = 0$.

So sánh với điều kiện, kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = 0$.

Bài toán 56. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 4x + 2} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{4x + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
x^2 + 5x + 5 + 2\sqrt{(x^2 + 4x + 2)(x + 3)} &= x^2 + 5x + 5 + 2\sqrt{(x^2 + x + 4)(4x + 1)} \\
\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 2)(x + 3) &= (x^2 + x + 4)(4x + 1) \\
\Leftrightarrow x^3 + 7x^2 + 14x + 6 &= 4x^3 + 5x^2 + 17x + 4 \Leftrightarrow 3x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0 \\
\Leftrightarrow (3x - 2)(x + 1)(x - 1) &= 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-1; 1; \frac{2}{3}\right\}
\end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện đi đến tập nghiệm $S = \left\{\frac{2}{3}; 1\right\}$.

Bài toán 57. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + x + 7} = \sqrt{2x^2 + 2x + 5} + \sqrt{2x + 2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x(x + 3) \geq 0 \\ 2(x + 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x^2 + 3x)(x^2 + x + 7)} &= \sqrt{(2x^2 + 2x + 5)(2x + 2)} \\
\Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 21x &= 4x^3 + 8x^2 + 14x + 10 \\
\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 7x - 10 &= 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^3 + x^2 + 3x + 10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^3 + x^2 + 3x + 10 = 0 \end{cases} \quad (1)
\end{aligned}$$

Dễ thấy rằng $x^3 + x^2 + 3x + 10 > 0, \forall x \geq 0$ nên (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 58. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+5x+4}+\sqrt{x+2}\geq\sqrt{x^2+x}+\sqrt{5x+6}$ ($x\in\mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} (x+1)(x+4)\geq 0 \\ x(x+1)\geq 0 \\ 5x+6\geq 0; x+2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

- Nhận xét bất phương trình nghiệm đúng với $x=-1$.
- Với $x\geq 0$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2+6x+6+2\sqrt{(x^2+5x+4)(x+2)} &\geq x^2+6x+6+2\sqrt{(x^2+x)(5x+6)} \\ \Leftrightarrow x^3+7x^2+14x+8 &\geq 5x^3+11x^2+6x \Leftrightarrow 4x^3+4x^2-8x-8\leq 0 \\ \Leftrightarrow x^2(x+1)-2(x+1) &\leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-2)\leq 0 \Rightarrow x^2\leq 2 \Rightarrow 0\leq x\leq\sqrt{2} \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\{-1\}\cup[0;\sqrt{2}]$.

Bài toán 59. Giải phương trình $\sqrt{x^2+x+4}+\sqrt{2x+7}=\sqrt{4x+6}+\sqrt{x^2-x+5}$ ($x\in\mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x\geq-\frac{3}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2+3x+11+2\sqrt{(x^2+x+4)(2x+7)} &= x^2+3x+11+2\sqrt{(4x+6)(x^2-x+5)} \\ \Leftrightarrow (x^2+x+4)(2x+7) &= (4x+6)(x^2-x+5) \\ \Leftrightarrow 2x^3+9x^2+15x+28 &= 4x^3+2x^2+14x+30 \Leftrightarrow 2x^3-7x^2-x+2=0 \\ \Leftrightarrow (2x-1)(x^2-3x-2) &= 0 \Rightarrow x\in\left\{\frac{1}{2}; \frac{3+\sqrt{17}}{2}; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right\} \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện đi đến tập nghiệm $S=\left\{\frac{1}{2}; \frac{3+\sqrt{17}}{2}; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right\}$.

Bài toán 60. Giải phương trình $\sqrt{x^2+6x+5}-\sqrt{3x-1}=\sqrt{x^2+4x+3}-\sqrt{x-3}$ ($x\in\mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x\geq 3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+6x+5}+\sqrt{x-3} &= \sqrt{x^2+4x+3}+\sqrt{3x-1} \\ \Leftrightarrow x^2+7x+2+2\sqrt{(x^2+6x+5)(x-3)} &= x^2+7x+2+2\sqrt{(x^2+4x+3)(3x-1)} \\ \Leftrightarrow (x+1)(x+5)(x-3) &= (x+1)(x+3)(3x-1) \Leftrightarrow (x+1)\left[(x^2+2x-15)-(3x^2+8x-3)\right]=0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(2x^2+6x+12) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ (2x+3)^2=-15 \end{cases} \Rightarrow x=-1 \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện suy ra bài toán vô nghiệm.

Bài toán 61. Giải phương trình $\sqrt{x^2+4x+1}=\sqrt{x^2+5x-1}-\sqrt{x-2}$ ($x\in\mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x\geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2 + 4x + 1} + \sqrt{x - 2} = \sqrt{x^2 + 5x - 1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 1 + 2\sqrt{(x^2 + 4x + 1)(x - 2)} = x^2 + 5x - 1 \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 2$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài toán 62. Giải phương trình $\sqrt{3x^2 + 2x + 4} + \sqrt{x^2 + 3x} = \sqrt{2x^2 + x + 1} + \sqrt{2x^2 + 4x + 3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x(x + 3) \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2 + 5x + 4 + 2\sqrt{(3x^2 + 2x + 4)(x^2 + 3x)} = 4x^2 + 5x + 4 + 2\sqrt{(2x^2 + x + 1)(2x^2 + 4x + 3)}$$

$$\Leftrightarrow 3x^4 + 11x^3 + 10x^2 + 12x = 4x^4 + 10x^3 + 12x^2 + 7x + 3$$

$$\Leftrightarrow x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^3 + 2x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2(x^2 + x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x^2 + x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1$$

Kết hợp với điều kiện thu được nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 63. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^2 - x + 2 + 2\sqrt{(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)} = 2x^2 - x + 2 + 2\sqrt{(2x^2 - 2x + 1)(x + 1)}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^2 - x + 1) = (2x^2 - 2x + 1)(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = 2x^3 - x + 1 \Leftrightarrow x^4 - 3x^3 + 2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 1; 2\}$$

Kết luận phương trình đề bài có tập nghiệm $S = \{0; 1; 2\}$.

Bài toán 64. Giải phương trình $\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x + 2} = \sqrt{x^3 - x + 2} + \sqrt{2x + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{2x + 1} = \sqrt{x^3 - x + 2} - \sqrt{x + 2} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 - 2x}{\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{2x + 1}} = \frac{x^3 - 2x}{\sqrt{x^3 - x + 2} + \sqrt{x + 2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 2) = 0 \\ \sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{2x + 1} = \sqrt{x^3 - x + 2} + \sqrt{x + 2} \end{cases} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{2x + 1} = \sqrt{x^3 - x + 2} + \sqrt{x + 2} \quad (3)$$

$$\bullet \quad (2) \Leftrightarrow x \in \{0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\}.$$

$$\bullet \quad \text{Kết hợp (1) và (3) thu được } 2\sqrt{x^3 + 1} = 2\sqrt{x^3 - x + 2} \Leftrightarrow x^3 + 1 = x^3 - x + 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Đối chiếu điều kiện đi đến tập nghiệm $S = \{0; 1; \sqrt{2}\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x+2} &= \sqrt{x^3-x+2}+\sqrt{2x+1} \quad (x \in \mathbb{R}) \\ x^3+x+3+2\sqrt{(x^3+1)(x+2)} &= x^3+x+3+2\sqrt{(x^3-x+2)(2x+1)} \\ \Leftrightarrow x^4+2x^3+x+2 &= 2x^4+x^3-2x^2+3x+2 \Leftrightarrow x^4-x^3-2x^2+2x=0 \\ \Leftrightarrow x^3(x-1)-2x(x-1) &= 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x^2-2)=0 \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{2}; 0; 1; \sqrt{2}\}\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện thu được ba nghiệm, $S = \{0; 1; \sqrt{2}\}$.

Bài toán 65. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x+2} \leq \sqrt{x^2-2x+4}+\sqrt{4x-1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{4}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}x^2+2x+3+2\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{x+2} &\leq x^2+2x+3+2\sqrt{x^2-2x+4}\sqrt{4x-1} \\ \Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+2 &\leq 4x^3-9x^2+18x-4 \Leftrightarrow 3x^3-12x^2+15x-6 \geq 0 \\ \Leftrightarrow 3(x-1)^2(x-2) &\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x \geq 2 \end{cases}\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện thu được tập nghiệm $S = \{1\} \cup [2; +\infty)$.

Bài toán 66. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+x+2}+\sqrt{3x+1} \leq \sqrt{x^3+2x+1}+\sqrt{2x+2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Trước hết ta có $x \geq -\frac{1}{3}$. Để ý thấy rằng

$$\begin{aligned}x^3+x+2 &= \frac{(3x+1)(x^2-x+1)+2x^2+x+5}{3} > 0, \forall x \geq -\frac{1}{3}. \\ x^3+2x+1 &= \frac{(3x+1)(x^2-x+1)+2x^2+2}{3} > 0, \forall x \geq -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Do đó điều kiện xác định là $x \geq -\frac{1}{3}$. Bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}x^3+4x+3+2\sqrt{x^3+x+2}\sqrt{3x+1} &\leq x^3+4x+3+2\sqrt{x^3+2x+1}\sqrt{2x+2} \\ \Leftrightarrow 3x^4+x^3+3x^2+7x+2 &\leq 2x^4+2x^3+4x^2+6x+2 \\ \Leftrightarrow x^4-x^3-x^2+x &\leq 0 \Leftrightarrow x^3(x-1)-x(x-1) \leq 0 \\ \Leftrightarrow x(x+1)(x-1)^2 &\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x(x+1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ -1 \leq x \leq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được tập nghiệm $S = \left[-\frac{1}{3}; 0\right] \cup \{1\}$.

Bài toán 67. Giải bất phương trình $\sqrt{2x^2 + x + 2} + \sqrt{2x + 3} \geq \sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{x^2 + 2x + 2}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{3}{2}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x + 5 + 2\sqrt{2x^2 + x + 2} \cdot \sqrt{2x + 3} &\geq 2x^2 + 3x + 5 + 2\sqrt{x^2 + x + 3} \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 2} \\ \Leftrightarrow 4x^3 + 8x^2 + 7x + 6 &\geq x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 8x + 6 \\ \Leftrightarrow x^4 - x^3 - x^2 + x &\leq 0 \Leftrightarrow x^3(x-1) - x(x-1) \leq 0 \\ \Leftrightarrow x(x+1)(x-1)^2 &\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x(x+1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ -1 \leq x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận nghiệm $S = [-1; 0] \cup \{1\}$.

Bài toán 68. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3 + 2} + \sqrt{2x + 1} \leq \sqrt{x^3 + x + 1} + \sqrt{x + 2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Trước tiên ta có điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$.

Nhận xét rằng $x^3 + x + 1 = \frac{(2x+1)(x^2 - x + 1) + x^2 + x + 1}{2} > 0, \forall x \geq -\frac{1}{2}$ nên điều kiện xác định là $x \geq -\frac{1}{2}$.

Bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} x^3 + 2x + 3 + 2\sqrt{x^3 + 2} \cdot \sqrt{2x + 1} &\leq x^3 + 2x + 3 + 2\sqrt{x^3 + x + 1} \cdot \sqrt{x + 2} \\ \Leftrightarrow 2x^4 + x^3 + 4x + 2 &\leq x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 2 \\ \Leftrightarrow x^4 - x^3 - x^2 + x &\leq 0 \Leftrightarrow x^3(x-1) - x(x-1) \leq 0 \\ \Leftrightarrow x(x+1)(x-1)^2 &\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x(x+1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ -1 \leq x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm $S = \left[-\frac{1}{2}; 0\right] \cup \{1\}$.

Bài toán 69. Giải phương trình $\sqrt{x^4 + 2} + \sqrt{2x + 1} \leq \sqrt{x^4 + x + 1} + \sqrt{x + 2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Nhận xét $x^4 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $x^4 + x + 1 = x^4 - x^2 + \frac{1}{4} + x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra ta có điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$. Lúc này bất phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} x^4 + 2x + 3 + 2\sqrt{x^4 + 2} \cdot \sqrt{2x + 1} &\leq x^4 + 2x + 3 + 2\sqrt{x^4 + x + 1} \cdot \sqrt{x + 2} \\ \Leftrightarrow 2x^5 + x^4 + 4x + 2 &\leq x^5 + 2x^4 + x^2 + 3x + 2 \\ \Leftrightarrow x^5 - x^4 - x^2 + x &\leq 0 \Leftrightarrow x^4(x-1) - x(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1)(x-1) \leq 0 \\ \Leftrightarrow x(x^2 + x + 1)(x-1)^2 &\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện đi đến nghiệm $S = \left[-\frac{1}{2}; 0\right] \cup \{1\}$.

Bài toán 70. Tìm nghiệm dương của phương trình

$$\sqrt{x^4 + x + 1} + \sqrt{x^2 + 2} = \sqrt{x^4 + 2x} + \sqrt{x^2 - x + 3} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Với $x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^4 + x + 1} > 0, \sqrt{x^2 + 2} > 0, \sqrt{x^4 + 2x} > 0, \sqrt{x^2 - x + 3} > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + x + 3 + 2\sqrt{x^4 + x + 1} \cdot \sqrt{x^2 + 2} &= x^4 + x^2 + x + 3 + 2\sqrt{x^4 + 2x} \cdot \sqrt{x^2 - x + 3} \\ \Leftrightarrow x^6 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 2 &= x^6 - x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 6x \\ \Leftrightarrow x^5 - x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 2 &= 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^4 - x^2 + 2x - 2) \geq 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 [x^2(x+1) + 2] &= 0 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm dương duy nhất $x = 1$.

Bài toán 71. Giải phương trình $\sqrt{x^4 + x^3 + 2} + \sqrt{x^2 + x + 2} = \sqrt{x^4 + x^2 + x + 1} + \sqrt{x^3 + 3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Giả sử các căn thức trong bài toán đều xác định. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 4 &= x^7 + x^5 + 4x^4 + x^3 + 3x^2 + 3x + 3 \\ \Leftrightarrow x^7 - x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 + x - 1 &= 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^6 - x^4 - x^2 + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 1)(x^4 - 1) &= 0 \Leftrightarrow (x-1)^3(x+1)^2(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x \in \{-1; 1\} \end{aligned}$$

Thử lại nghiệm trực tiếp, ta thu được tập nghiệm $S = \{-1; 1\}$.

Bài toán 72. Tìm nghiệm không âm của phương trình

$$\sqrt{2x^4 + x^2 + 1} + \sqrt{x^3 + x + 2} = \sqrt{2x^4 + x + 1} + \sqrt{x^3 + x^2 + 2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Khi $x \geq 0$ thì các căn thức đều xác định. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x^4 + x^3 + x^2 + x + 3 + 2\sqrt{2x^4 + x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^3 + x + 2} &= 2x^4 + x^3 + x^2 + x + 3 + 2\sqrt{2x^4 + x + 1} \cdot \sqrt{x^3 + x^2 + 2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2x^4 + x^2 + 1} \cdot \sqrt{x^3 + x + 2} &= \sqrt{2x^4 + x + 1} \cdot \sqrt{x^3 + x^2 + 2} \\ \Leftrightarrow 2x^7 + 3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 2 &= 2x^7 + 2x^6 + 5x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2 \\ \Leftrightarrow 2x^6 - 3x^5 + x^4 - x^2 + x &= 0 \Leftrightarrow x(2x^5 - 3x^4 + x^3 - x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow x(x-1)(2x^4 - x^3 - 1) &= 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2(2x^3 + x^2 + x + 1) = 0 \end{aligned}$$

Rõ ràng $2x^3 + x^2 + x + 1 > 0, \forall x \geq 0$. Do đó phương trình ban đầu có hai nghiệm $x = 0; x = 1$.

Bài toán 73. Giải phương trình $\sqrt{x^4 + 3x^2} + \sqrt{x-1} = \sqrt{x^4 + x^2 + 2} + \sqrt{2x^2 + x - 3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
x^4 + 3x^2 + x - 1 + 2\sqrt{x^4 + 3x^2} \cdot \sqrt{x-1} &= x^4 + 3x^2 + x - 1 + 2\sqrt{x^4 + x^2 + 2} \cdot \sqrt{2x^2 + x - 3} \\
\Leftrightarrow x^5 - x^4 + 3x^3 - 3x^2 &= 2x^6 + x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + 2x - 6 \\
\Leftrightarrow 2x^6 - 2x^3 + 4x^2 + 2x - 6 &= 0 \Leftrightarrow x^6 - x^3 + 2x^2 + x - 3 = 0 \\
\Leftrightarrow (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + 2x + 3) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^5 + x^4 + x^3 + 2x + 3 = 0 \end{cases} \quad (1)
\end{aligned}$$

Nhận xét $x^5 + x^4 + x^3 + 2x + 3 > 0, \forall x \geq 1$ nên (1) vô nghiệm. Vậy kết luận tập nghiệm $S = \{1\}$.

Bài toán 74. Giải phương trình $\sqrt{x^4 + x + 2} + 1 = \sqrt{x^4 - x + 4} + \sqrt{2x - 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Ta có $x^4 + x + 2 = x^4 - x^2 + \frac{1}{4} + x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Và $x^4 - x + 4 = x^4 - x^2 + \frac{1}{4} + x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{7}{2} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó điều kiện là $x \geq \frac{1}{2}$. Khi đó phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
x^4 + x + 3 + 2\sqrt{x^4 + x + 2} &= x^4 + x + 3 + 2\sqrt{x^4 - x + 4} \cdot \sqrt{2x - 1} \\
\Leftrightarrow x^4 + x + 2 &= 2x^5 - x^4 - 2x^2 + 9x - 4 \Leftrightarrow 2x^5 - 2x^4 - 2x^2 + 8x - 6 = 0 \\
\Leftrightarrow x^5 - x^4 - x^2 + 4x - 3 &= 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^4 - x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^4 - x + 3 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Rõ ràng $x^4 - x + 4 = x^4 - x^2 + \frac{1}{4} + x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{5}{2} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tổng hợp quá trình, kết luận bài toán có nghiệm duy nhất, $S = \{1\}$.

Nhận xét.

37 bài toán trên đây (từ 38 đến 74) là những thí dụ điển hình nhất cho dạng toán đặc trưng thứ ba của phương pháp biến đổi tương đương – nâng lũy thừa, với mức độ nâng cao hơn các phần trước. Tuy nhiên tới đây tác giả chỉ dừng lại với bài toán tối đa bốn căn thức bậc hai, với bài toán năm căn thức bậc hai trở lên sẽ khá phức tạp, xin được trình bày tại phần sau, Lý thuyết phần 5. Thông qua đây mong muốn thân gửi tới toàn thể bạn đọc yêu Toán, đặc biệt là các em học sinh một thông điệp: "Cần hết sức bình tĩnh trong cách nhìn nhận một bài toán, khởi động thuần thực với những kỹ năng cơ bản, linh hoạt lựa chọn bước đi đúng hướng để thu được lời giải đơn giản, gọn gàng, đẹp mắt hay đơn thuần là "thanh thản" nhất, trước tiên bắt đầu từ những thứ thân thương nhất với mình, để không phải hối tiếc thời gian như tình tiết thiên truyện ngắn "Bến quê" của nhà văn Nguyễn Minh Châu". Sau đây tác giả kính giới thiệu tới bạn đọc một số bài toán chứa căn thức bậc ba dạng tương tự.

Bài toán 75. Giải phương trình $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+3} = \sqrt[3]{2x+3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+3}\right)^3 &= \left(\sqrt[3]{2x+3}\right)^3 \Leftrightarrow x + x + 3 + 3\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x+3} \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+3}\right) = 2x + 3 \\
\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x+3} \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+3}\right) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x(x+3)} = 0 \\ \sqrt[3]{x+3} = -\sqrt[3]{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+3) = 0 \\ x+3 = -x \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-3; -\frac{3}{2}; 0\right\}
\end{aligned}$$

Thử lại nghiệm trực tiếp, kết luận $S = \left\{-3; -\frac{3}{2}; 0\right\}$.

Bài toán 76. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{2x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{2x}\right)^3 \\ & \Leftrightarrow x+1 + x-1 + 3\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{x-1} \cdot \left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}\right) = 2x \\ & \Rightarrow 2x + 3\sqrt[3]{(x-1)(x+1)} \cdot \sqrt[3]{2x} = 2x \quad (*) \\ & \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x \in \{-1; 0; 1\} \end{aligned}$$

Thử trực tiếp ta thu được tập nghiệm $S = \{-1; 0; 1\}$.

Nhận xét.

Hai bài toán 75 và 76 là hai bài toán hết sức cơ bản, trên thực tế dạng thức đã rất quen thuộc bởi đã được đề cập tại Lý thuyết sử dụng biến đổi tương đương – nâng cao lũy thừa phần 3. Lẽ dĩ nhiên "trăm hay không bằng tay quen", tác giả vẫn xin đề cập nhắc lại một đôi điều.

- Hai lời giải trên đều giải bằng phép lập phương, hữu tỷ hóa căn thức bậc ba. Chú ý các hằng đẳng thức sau

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

- Hệ quả quy về dạng đơn giản $\sqrt[3]{f(x)} \cdot \sqrt[3]{g(x)} \cdot \sqrt[3]{h(x)} \dots = 0$.
- Hai bài toán trên có thể giải bằng phép đặt hai ẩn phụ.
- Lời giải bài toán 75 chỉ sử dụng biến đổi tương đương, không sử dụng biến đổi hệ quả. Đối với các bài toán có sự đặc biệt và đơn giản như thế này thì điều này "được chấp nhận".
- Lời giải bài toán 76 sử dụng biến đổi hệ quả (*), vì $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{2x}$, điều này xuất phát từ đề bài. Thành thử không sử dụng như lời giải bài toán 75, ta sẽ thu được $\sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{1-x} \Leftrightarrow 1+x = 1-x \Leftrightarrow x=0$ thay vì $2x=0$. Trong các bài toán phức tạp hơn, phép thay thế tương tự (*) là tất yếu định hướng công đoạn cuối cùng.
- Với đại đa số phương trình chứa căn có sử dụng giả thiết đề bài, ưu tiên tìm điều kiện chặt và thử lại các nghiệm một cách trực tiếp để tránh mất nghiệm hoặc thừa nghiệm !

Bài toán 77. Giải phương trình $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-1} = \sqrt[3]{3x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt[3]{x} = a; \sqrt[3]{2x-1} = b \Rightarrow a^3 + b^3 = x + 2x - 1 = 3x - 1$ và $a + b = \sqrt[3]{3x-1}$.

Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} a + b &= \sqrt[3]{a^3 + b^3} \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = a^3 + b^3 \\ &\Leftrightarrow ab(a+b) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{2x-1} \cdot \sqrt[3]{3x-1} = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\} \end{aligned}$$

Thử lại nghiệm trực tiếp, thu được tập hợp nghiệm $S = \left\{0; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$.

Bài toán 78. Giải phương trình $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x+5} = \sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+6}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x + 5 + 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{3x+5}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x+5}) &= 4x + 5 + 3\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{2x+6}(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+6}) \\ \Rightarrow \sqrt[3]{x(3x+5)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x+5}) &= \sqrt[3]{(2x-1)(2x+6)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x+5}) \\ \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x+5})[\sqrt[3]{(2x-1)(2x+6)} - \sqrt[3]{x(3x+5)}] &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x+5} = 0 \\ \sqrt[3]{(2x-1)(2x+6)} = \sqrt[3]{x(3x+5)} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{3x+5} = -\sqrt[3]{x} \\ (2x-1)(2x+6) = x(3x+5) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+5 = -x \\ 4x^2 + 10x - 6 = 3x^2 + 5x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = -5 \\ x^2 + 5x - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{-6; -\frac{5}{4}; 1\right\} \end{aligned}$$

Thử lại trực tiếp các nghiệm đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Kết luận $S = \left\{-6; -\frac{5}{4}; 1\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt[3]{x} = a; \sqrt[3]{3x+5} = b; \sqrt[3]{2x-1} = c; \sqrt[3]{2x+6} = d$. Phương trình đã cho trở thành $a + b = c + d = k$.

Nhận thấy rằng

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 = c^3 + d^3 &\Leftrightarrow (a+b)^3 - 3ab(a+b) = (c+d)^3 - 3cd(c+d) \\ \Rightarrow k^3 - 3ab.k &= k^3 - 3cd.k \Leftrightarrow 3k(ab - cd) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ ab = cd \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{➤ } k = 0 \Leftrightarrow a = -b \Leftrightarrow a^3 = -b^3 \Leftrightarrow 3x+5 = -x \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}.$$

$$\text{➤ } ab = cd \Rightarrow a^3b^3 = c^3d^3 \Leftrightarrow 3x^2 + 5x = 4x^2 + 10x - 6 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-6; 1\}.$$

Thử lại trực tiếp các nghiệm đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Kết luận $S = \left\{-6; -\frac{5}{4}; 1\right\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Viết lại phương trình ban đầu dưới dạng $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x+5} + \sqrt[3]{1-2x} = \sqrt[3]{2x+6}$ (1).

Đặt $\sqrt[3]{x} = a; \sqrt[3]{3x+5} = b; \sqrt[3]{1-2x} = c; \sqrt[3]{2x+6} = d$ ta có $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$. Khi đó (1) trở thành

$$\begin{aligned} a + b + c = d &\Leftrightarrow (a+b+c)^3 = d^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a) = d^3 \\ \Rightarrow d^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a) &= d^3 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x+5} = 0 \\ \sqrt[3]{3x+5} + \sqrt[3]{1-2x} = 0 \\ \sqrt[3]{1-2x} + \sqrt[3]{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+5 = -x \\ 3x+5 = 2x-1 \\ 2x-1 = x \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-6; -\frac{5}{4}; 1\right\} \end{aligned}$$

Thử lại trực tiếp các nghiệm đều thỏa mãn phương trình đề bài. Kết luận $S = \left\{-6; -\frac{5}{4}; 1\right\}$.

Bài toán 79. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{3x+3} = \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{2x+5}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x+5+3\sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt[3]{3x+3}(\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{3x+3}) &= 4x+5+3\sqrt[3]{2x}\cdot\sqrt[3]{2x+5}(\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{2x+5}) \\ \Rightarrow \sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt[3]{3x+3}(\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{3x+3}) &= \sqrt[3]{2x}\cdot\sqrt[3]{2x+5}(\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{3x+3}) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{3x+3}=0 \\ \sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt[3]{3x+3}=\sqrt[3]{2x}\cdot\sqrt[3]{2x+5} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x+2}=-\sqrt[3]{3x+3} \\ 3x^2+9x+6=4x^2+10x \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=-3x-3 \\ x^2+x-6=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x=-5 \\ (x-2)(x+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{5}{4}; -3; 2\right\} \end{aligned}$$

Thử lại các nghiệm vào phương trình đề bài, ta thu được nghiệm $S = \left\{-\frac{5}{4}; -3; 2\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt[3]{x+2}=a; \sqrt[3]{3x+3}=b; \sqrt[3]{2x}=c; \sqrt[3]{2x+5}=d$. Phương trình đề bài trở thành $a+b=c+d=k$.

Nhận xét

$$\begin{aligned} a^3+b^3=c^3+d^3 &\Leftrightarrow (a+b)^3-3ab(a+b)=(c+d)^3-3cd(c+d) \\ \Rightarrow k^3-3ab.k &= k^3-3cd.k \Leftrightarrow 3k(ab-cd)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \\ ab=cd \end{cases} \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad k=0 \Leftrightarrow a=-b \Leftrightarrow a^3=-b^3 \Leftrightarrow x+2=-3x-3 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{4}.$$

$$\checkmark \quad ab=cd \Rightarrow a^3b^3=c^3d^3 \Leftrightarrow 3x^2+9x+6=4x^2+10x \Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x \in \{-3; 2\}.$$

Thử lại các nghiệm trực tiếp vào phương trình ban đầu, đi đến tập nghiệm $S = \left\{-3; -\frac{5}{4}; 2\right\}$.

Bài toán 80. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{3x-1}=\sqrt[3]{4x-7}+2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 5x+1+3\sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt[3]{3x-1}(\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{3x-1}) &= 5x+1+6\sqrt[3]{4x-7}(\sqrt[3]{4x-7}+2) \\ \Rightarrow \sqrt[3]{x+2}\cdot\sqrt[3]{3x-1}(\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{3x-1}) &= 2\sqrt[3]{4x-7}(\sqrt[3]{4x-7}+2) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{4x-7}=-2 \\ \sqrt[3]{(x+2)(3x-1)}=2\sqrt[3]{4x-7} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-7=-8 \\ 3x^2+5x-2=32x-56 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=-1 \\ 3x^2-27x+54=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x=-1 \\ 3(x-3)(x-6)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{6}; 3; 6\right\} \end{aligned}$$

Thử lại các nghiệm vào phương trình ban đầu, dẫn đến tập nghiệm $S = \left\{-\frac{1}{6}; 3; 6\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{3x-1}+\sqrt[3]{7-4x}=2 \quad (1)$.

Đặt $\sqrt[3]{x+2}=a; \sqrt[3]{3x-1}=b; \sqrt[3]{7-4x}=c \Rightarrow a^3+b^3+c^3=8$. Phương trình (1) ở trên trở thành

$$\begin{aligned}
 a+b+c=2 &\Leftrightarrow (a+b+c)^3=8 \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=8 \\
 &\Rightarrow 8+3(a+b)(b+c)(c+a)=8 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{3x-1}=0 \\ \sqrt[3]{3x-1}+\sqrt[3]{7-4x}=0 \\ \sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{7-4x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=1-3x \\ 3x-1=4x-7 \\ x+2=4x-7 \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{-\frac{1}{4}; 3; 6\right\}
 \end{aligned}$$

Thử lại các nghiệm vào phương trình ban đầu, dẫn đến tập nghiệm $S = \left\{-\frac{1}{4}; 3; 6\right\}$.

Nhận xét.

Dạng tổng quát của các phương trình trên (từ bài toán 76 đến bài toán 79) là

$$\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{h(x)} + \sqrt[3]{k(x)} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Với điều kiện $f(x) + g(x) = h(x) + k(x)$.

Chú ý rằng các biểu thức trong căn thức có thể có dạng đa thức, phân thức, thậm chí đơn giản hơn trong các trường hợp đồng nhất hằng số. Trọng tâm tài liệu vẫn là sử dụng thuần túy phép biến đổi tương đương, nâng cao lũy thừa, hữu tỷ hóa căn thức, phá tan sự vô tỷ hình thức. Tuy nhiên nguyên do đặc điểm đặc trưng của dạng toán, các bạn có thể sử dụng phép đặt ẩn phụ như các lời giải bài toán 78, 79, 80, hơn nữa các cách đặt ẩn cũng rất đa dạng, mặc dù bản chất các lời giải có cùng "cội nguồn". Có được một lời giải đẹp, chúng ta chớ vội vàng thỏa mãn, tự mãn, mà tiếp tục đào sâu, phân tích mối liên hệ giữa giả thiết – kết luận đã được vận dụng trong toàn bộ quá trình giải toán. Xoay sở, kiên trì, tìm tòi nhiều khi lại giúp chúng ta tìm ra một lời giải khác, nếu xấu thì "rườm rà, thủ công", hoặc có thể hay hơn, ngắn gọn hơn, hoặc chỉ ít cũng mạnh mẽ hơn một "mạch nước ngầm" nào đó, làm công cụ, làm đòn bẩy, điểm tựa để có được những phát hiện theo kiểu "Eureka" theo sau đó, mặc dù chúng ta không giải quyết được trọn vẹn vấn đề ngay tại thời điểm hiện tại.

Phải chăng đó là một "phong cách học Toán" hiệu quả?

Lại nói về nhà sư phạm, nhà toán học G. Polya (1887 – 1985), một thần đồng Toán học gốc Hungary, nghiên cứu khoa học tại đất nước Hoa Kỳ. Ông đã có một lời khuyên cho thế hệ sau rất thú vị, lược dịch:

"Ngay khi lời giải mà ta đã tìm được là tốt rồi thì tìm được một lời giải khác vẫn có lợi. Thật là sung sướng khi kết quả tìm được xác nhận nhờ hai lý thuyết khác nhau. Có được một chứng cứ rồi, chúng ta còn muốn tìm thêm một chứng cứ nữa cũng như chúng ta muốn sờ vào một vật mà ta đã trông thấy".

Thiết nghĩ học toán nói chung để tăng cường tư duy logic, tăng cường sự linh hoạt, cẩn thận, chính xác, ngoài ra điều này cũng rất hữu ích trong các ngành khoa học cơ bản khác, trong hoạt động các lĩnh vực văn hóa, nghệ thuật hay đối nhân xử thế, như vậy câu nói "Toán học ứng dụng ít" là đường đột quá chăng?

Bài toán 81. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2+4x+3} + \sqrt[3]{4x^2-9x-3} = \sqrt[3]{3x^2-2x+2} + \sqrt[3]{2x^2-3x-2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt[3]{x^2+4x+3} = a; \sqrt[3]{4x^2-9x-3} = b; \sqrt[3]{3x^2-2x+2} = c; \sqrt[3]{2x^2-3x-2} = d$.

Phương trình đề bài trở thành $a+b=c+d=k$. Để ý rằng

$$\begin{aligned}
 a^3+b^3 &= c^3+d^3 \Leftrightarrow (a+b)^3 - 3ab(a+b) = (c+d)^3 - 3cd(c+d) \\
 &\Rightarrow k^3 - 3ab.k = k^3 - 3cd.k \Leftrightarrow 3k(ab-cd) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \\ ab=cd \end{cases}
 \end{aligned}$$

- $k=0 \Leftrightarrow a=-b \Leftrightarrow a^3=-b^3 \Leftrightarrow x^2+4x+3=-4x^2+9x+3 \Leftrightarrow 5x^2-5x=0 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x \in \{0;1\}$.
- $ab=cd \Rightarrow a^3b^3=c^3d^3 \Leftrightarrow (x^2+4x+3)(4x^2-9x-3) = (3x^2-2x+2)(2x^2-3x-2)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 4x^4 + 7x^3 - 27x^2 - 39x - 9 = 6x^4 - 13x^3 + 4x^2 - 2x - 4 \\
&\Leftrightarrow 2x^4 - 20x^3 + 31x^2 + 37x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 7x - 5)(2x^2 - 6x - 1) = 0 \\
&\Rightarrow x \in \left\{ \frac{7 - \sqrt{69}}{2}; \frac{7 + \sqrt{69}}{2}; \frac{3 - \sqrt{11}}{2}; \frac{3 + \sqrt{11}}{2} \right\}
\end{aligned}$$

Thử trực tiếp các nghiệm vào phương trình ban đầu, kết luận bài toán có 6 nghiệm, tập nghiệm là

$$S = \left\{ 0; 1; \frac{7 - \sqrt{69}}{2}; \frac{7 + \sqrt{69}}{2}; \frac{3 - \sqrt{11}}{2}; \frac{3 + \sqrt{11}}{2} \right\}.$$

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Viết lại phương trình dưới dạng $\sqrt[3]{x^2 + 4x + 3} + \sqrt[3]{4x^2 - 9x - 3} + \sqrt[3]{3x + 2 - 2x^2} = \sqrt[3]{3x^2 - 2x + 2} \quad (*)$.

Đặt $\sqrt[3]{x^2 + 4x + 3} = a; \sqrt[3]{4x^2 - 9x - 3} = b; \sqrt[3]{3x + 2 - 2x^2} = c; \sqrt[3]{3x^2 - 2x + 2} = d$ thì $(*) \Leftrightarrow a + b + c = d$.

Mặt khác, dễ thấy rằng

$$\begin{aligned}
a + b + c = d &\Leftrightarrow (a + b + c)^3 = d^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a) = d^3 \\
&\Rightarrow d^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a) = d^3 \Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ b + c = 0 \\ c + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3} + \sqrt[3]{4x^2 - 9x - 3} = 0 \\ \sqrt[3]{4x^2 - 9x - 3} + \sqrt[3]{3x + 2 - 2x^2} = 0 \\ \sqrt[3]{3x + 2 - 2x^2} + \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 3 = -4x^2 + 9x + 3 \\ 4x^2 - 9x - 3 = 2x^2 - 3x - 2 \\ x^2 + 4x + 3 = 2x^2 - 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ 2x^2 - 6x - 1 = 0 \\ x^2 - 7x - 5 = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow x \in \left\{ 0; 1; \frac{7 - \sqrt{69}}{2}; \frac{7 + \sqrt{69}}{2}; \frac{3 - \sqrt{11}}{2}; \frac{3 + \sqrt{11}}{2} \right\}
\end{aligned}$$

Từ đây thử lại, suy ra phương trình ban đầu có 6 nghiệm như trên.

Bài toán 82. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^2 - x + 2} = \sqrt[3]{2x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&x^2 + 1 + x^2 - x + 2 + 3\sqrt[3]{x^2 + 1} \cdot \sqrt[3]{x^2 - x + 2} \left(\sqrt[3]{x^2 + 1} + \sqrt[3]{x^2 - x + 2} \right) \\
&= 2x^2 - x + 1 + 2 + 3\sqrt[3]{2x^2 - x + 1} \cdot \sqrt[3]{2} \left(\sqrt[3]{2x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{2} \right)
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
&2x^2 - x + 3 + 3\sqrt[3]{(x^2 + 1)(x^2 - x + 2)} \left(\sqrt[3]{2x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{2} \right) \\
&= 2x^2 - x + 3 + 3\sqrt[3]{2(2x^2 - x + 1)} \left(\sqrt[3]{2x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{2} \right) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2x^2 - x + 1} + \sqrt[3]{2} = 0 \\ \sqrt[3]{(x^2 + 1)(x^2 - x + 2)} = \sqrt[3]{2(2x^2 - x + 1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x + 1 = -2 \\ x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 2 = 4x^2 - 2x + 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x + 3 = 0 \\ x^4 - x^3 - x^2 + x = 0 \end{cases} \Rightarrow (x^3 - 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1
\end{aligned}$$

Vậy phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 83. Giải phương trình $\sqrt[3]{3x^2+x+5} + \sqrt[3]{x^2+x+3} = \sqrt[3]{2x^2+2x+1} + \sqrt[3]{2x^2+7}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Đặt $\sqrt[3]{3x^2+x+5} = a; \sqrt[3]{x^2+x+3} = b; \sqrt[3]{2x^2+2x+1} = c; \sqrt[3]{2x^2+7} = d$.

Phương trình đề bài trở thành $a + b = c + d = k$. Để ý rằng

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= c^3 + d^3 \Leftrightarrow (a+b)^3 - 3ab(a+b) = (c+d)^3 - 3cd(c+d) \\ \Rightarrow k^3 - 3ab.k &= k^3 - 3cd.k \Leftrightarrow 3k(ab - cd) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ ab = cd \end{cases} \end{aligned}$$

- $k = 0 \Leftrightarrow a = -b \Leftrightarrow a^3 = -b^3 \Leftrightarrow 3x^2 + x + 5 = -x^2 - x - 3 \Leftrightarrow 2x^2 = -2$ (Vô nghiệm).
- $ab = cd \Rightarrow a^3 b^3 = c^3 d^3 \Leftrightarrow (3x^2 + x + 5)(x^2 + x + 3) = (2x^2 + 2x + 1)(2x^2 + 7)$
 $\Leftrightarrow (x^2 + x - 2)(x^2 - x + 4) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x^2 - x + 4) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 1\}$.

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -2; x = 1$.

Bài toán 84. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^3-1} + \sqrt[3]{x^4-x^3-4} = \sqrt[3]{x^2+x-2} + \sqrt[3]{x^4-x^2-x-3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho quy về $\sqrt[3]{x^3-1} + \sqrt[3]{x^4-x^3-4} - \sqrt[3]{x^2+x-2} = \sqrt[3]{x^4-x^2-x-3}$.

Đặt $\sqrt[3]{x^3-1} = a; \sqrt[3]{x^4-x^3-4} = b; -\sqrt[3]{x^2+x-2} = c; \sqrt[3]{x^4-x^2-x-3} = d$ thì ta có phương trình $a + b + c = d$.

Mặt khác, để ý rằng

$$\begin{aligned} a + b + c &= d \Leftrightarrow (a+b+c)^3 = d^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a) = d^3 \\ \Rightarrow d^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a) &= d^3 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x^3-1} + \sqrt[3]{x^4-x^3-4} = 0 \\ \sqrt[3]{x^2+x-2} = \sqrt[3]{x^3-1} \\ \sqrt[3]{x^4-x^3-4} = \sqrt[3]{x^2+x-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-1 = -x^4+x^3+4 \\ x^2+x-2 = x^3-1 \\ x^4-x^3-4 = x^2+x-2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = -5 \\ x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \\ x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2(x+1) = 0 \\ (x-2)(x+1)(x^2+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \{-1; 1; 2\} \end{aligned}$$

Thử lại nghiệm trực tiếp ta thu được ba nghiệm $x = -1; x = 1; x = 2$.

Bài toán 85. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^3+x-2} + \sqrt[3]{x^2+2x-3} = \sqrt[3]{x^3+x^2-2} + \sqrt[3]{3x-3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &x^3 + x^2 + 3x - 5 + 3\sqrt[3]{x^3+x-2}.\sqrt[3]{x^2+2x-3} \left(\sqrt[3]{x^3+x-2} + \sqrt[3]{x^2+2x-3} \right) \\ &= x^3 + x^2 + 3x - 5 + 3\sqrt[3]{x^3+x^2-2}.\sqrt[3]{3x-3} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2-2} + \sqrt[3]{3x-3} \right) \\ \Rightarrow \sqrt[3]{x^3+x-2}.\sqrt[3]{x^2+2x-3} &\left(\sqrt[3]{x^3+x^2-2} + \sqrt[3]{3x-3} \right) = \sqrt[3]{x^3+x^2-2}.\sqrt[3]{3x-3} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2-2} + \sqrt[3]{3x-3} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x^3+x^2-2} + \sqrt[3]{3x-3} \right) &\left[\sqrt[3]{(x^2+x-2)(x^2+2x-3)} - \sqrt[3]{(x^3+x^2-2)(3x-3)} \right] = 0 \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned}
&\triangleright \sqrt[3]{x^3 + x^2 - 2} = -\sqrt[3]{3x - 3} \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2 = 3 - 3x \Leftrightarrow x^3 + x^2 + 3x - 5 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2x + 5) = 0 \Leftrightarrow (x-1)[(x+1)^2 + 4] = 0 \Rightarrow x = 1. \\
&\triangleright \sqrt[3]{(x^2 + x - 2)(x^2 + 2x - 3)} = \sqrt[3]{(x^3 + x^2 - 2)(3x - 3)} \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)(x+3) = 3(x-1)^2(x^2 + 2x + 2) \\
&\Leftrightarrow (x-1)^2[x^2 + 5x + 6 - 3(x^2 + 2x + 2)] = 0 \Leftrightarrow x(2x-1)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}.
\end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 86. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^4 - 2x + 4} = \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 2x + 1} + \sqrt[3]{x^4 - x^3 + 2x^2 + 4} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Phương trình đã cho viết lại dưới dạng

$$\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^4 - 2x + 4} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 2x + 1} = \sqrt[3]{x^4 - x^3 + 2x^2 + 4}.$$

Đặt $\sqrt[3]{(x+1)^2} = a; \sqrt[3]{x^4 - 2x + 4} = b; -\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 2x + 1} = c; \sqrt[3]{x^4 - x^3 + 2x^2 + 4} = d$ thu được $a + b + c = d$.

Ngoài ra, chú ý thấy rằng

$$a + b + c = d \Leftrightarrow (a + b + c)^3 = d^3 \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a) = d^3$$

$$\Rightarrow d^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a) = d^3 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} + \sqrt[3]{x^4 - 2x + 4} = 0 \\ \sqrt[3]{x^4 - 2x + 4} = \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 2x + 1} \\ \sqrt[3]{x^2 + 2x + 1} = \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 2x + 1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 = -x^4 + 2x - 4 \\ x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^3 - 2x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + x^2 + 5 = 0 \\ (x-1)(x^3 + x - 3) = 0 \\ x^2(x-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{0; 1; 2\} \\ x^3 + x - 3 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Về trái phương trình (*) là hàm số $f(x) = x^3 + x$ đồng biến, suy ra (*) có nghiệm duy nhất $x = \alpha$.

Kết luận phương trình đã cho có bốn nghiệm $x \in \{0; 1; 2; \alpha\}$ trong đó α thỏa mãn $\alpha^3 + \alpha = 3$.

Ghi chú.

Phương trình (*) giải nghiệm tương minh rất phức tạp, cần sử dụng đến công cụ nghiệm Cacdarno, nó nằm ngoài khuôn khổ của tài liệu này nên tác giả xin phép không trình bày. Mọi thắc mắc về vấn đề nghiệm tổng quát các bạn có thể tham khảo Lý thuyết giải phương trình – bất phương trình đại số bậc cao, phân thức hữu tỷ phần 3.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\sqrt{2x+7} + \sqrt{x+8} = \sqrt{3x+15}$.
2. $\sqrt{x+6} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{3x+5}$.
3. $\sqrt{x} + \sqrt{2x-7} = \sqrt{3x-7}$.
4. $\sqrt{7x+1} + \sqrt{x} = \sqrt{8x+1}$.
5. $\sqrt{2x+5} + \sqrt{4x-1} > \sqrt{3x+5} + \sqrt{3x-1}$.
6. $\sqrt{x} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{2x} + \sqrt{2x-5}$.
7. $\sqrt{x} + \sqrt{4x-3} \leq \sqrt{2x+5} + \sqrt{3x-8}$.
8. $\sqrt{3x+2} + \sqrt{2x-5} = \sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-1}$.
9. $\sqrt{x} + \sqrt{5x+4} > \sqrt{6x+1} + \sqrt{3}$.
10. $\sqrt{x+3} + \sqrt{4x+5} = \sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+5}$.
11. $\sqrt{2x} \leq \sqrt{7x+8} + \sqrt{x-1} - \sqrt{6x+7}$.
12. $\sqrt{6x+8} + \sqrt{x+5} \geq \sqrt{4x+2} + \sqrt{3x+11}$.
13. $\sqrt{7x-3} + \sqrt{2x+6} = \sqrt{5x+3} + 2\sqrt{x}$.
14. $\sqrt{8x+1} + \sqrt{x+3} > \sqrt{7x-4} + \sqrt{2x+8}$.
15. $\sqrt{11x+5} + \sqrt{2x+1} = \sqrt{10x} + \sqrt{3x+6}$.
16. $\sqrt{8x+9} + \sqrt{x} \leq \sqrt{5x+4} + \sqrt{4x+5}$.
17. $\sqrt{2x+7} = \sqrt{4x+1} + \sqrt{3x+14} - \sqrt{5x+8}$.
18. $\sqrt{5x+4} > \sqrt{2x+5} + \sqrt{7x+4} - \sqrt{4x+5}$.
19. $\sqrt{x} + \sqrt{5x+7} \leq \sqrt{7x+2} + \sqrt{5-x}$.
20. $\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{2x+3} = \sqrt{x^2-x+6} + \sqrt{5x-3}$.
21. $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{3x+2} = \sqrt{9x+4} + \sqrt{x^2-6x-1}$.
22. $\sqrt{x^2+2x+4} + \sqrt{3x} = \sqrt{x^2+x+3} + \sqrt{4x+1}$.
23. $\sqrt{x^2+7x+1} + \sqrt{4x-3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2+10x}$.
24. $\sqrt{x^2+4x+1} + \sqrt{x-3} = \sqrt{x^2+3x+3} + \sqrt{2x-5}$.
25. $\sqrt{2x^2+x+4} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x^2+2x+3} + \sqrt{x^2+3}$.
26. $\sqrt{x^2+3x+5} + \sqrt{2x^2-x+3} \leq \sqrt{3x^2+x+5} + \sqrt{x+3}$.
27. $\sqrt{4x^2-x+1} + \sqrt{x+3} > \sqrt{3x^2-2x+3} + |x+1|$.
28. $\sqrt{x^2+6x} + \sqrt{x+4} = \sqrt{x^2+5x+1} + \sqrt{2x+3}$.
29. $\sqrt{x^2-x} + \sqrt{2x^2-x+4} = \sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2+x+2}$.
30. $\sqrt{x^3+x^2+x+1} + \sqrt{x} = \sqrt{x^3+x^2+2} + \sqrt{x-1}$.
31. $\sqrt{4x^2+x+4} + \sqrt{5x-1} < \sqrt{3x^2-x+2} + \sqrt{x^2+7x+1}$.
32. $\sqrt{x^3+2x+1} + \sqrt{x} = \sqrt{x^3+x+2} + \sqrt{2x-1}$.
33. $x\sqrt{x} = \sqrt{x^3-2x+3} + \sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4}$.
34. $\sqrt{x^2+4x+5} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x+3} + \sqrt{x^2+4x}$.
35. $\sqrt{x^3-x^2+x+3} + \sqrt{3x+1} = \sqrt{x^3-2x^2+3} + \sqrt{x^2+4x+1}$.
36. $\sqrt{x^3-x+4} + \sqrt{3x-2} = \sqrt{x^3-2x+5} + \sqrt{4x-3}$.

37. $\sqrt[3]{6x+5} + \sqrt[3]{4-3x} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{4x+7}$.
38. $\sqrt[3]{5x+1} + \sqrt[3]{5-3x} = \sqrt[3]{6+2x}$.
39. $\sqrt[3]{6x+7} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{7x+13}$.
40. $\sqrt[3]{x+13} + \sqrt[3]{2x+5} = \sqrt[3]{3x+18}$.
41. $\sqrt[3]{7x-2} + \sqrt[3]{x+7} = \sqrt[3]{8x+5}$.
42. $\sqrt[3]{5x} + \sqrt[3]{2x+5} = \sqrt[3]{6x+9} + \sqrt[3]{x-4}$.
43. $\sqrt[3]{3x+8} + \sqrt[3]{11x+4} = \sqrt[3]{16x+9} + \sqrt[3]{3-2x}$.
44. $\sqrt[3]{x+8} + \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{8x+1} + \sqrt[3]{7-6x}$.
45. $\sqrt[3]{7x+6} + \sqrt[3]{4x+6} = \sqrt[3]{10x+3} + \sqrt[3]{x+9}$.
46. $\sqrt[3]{4x+13} + \sqrt[3]{2x+5} = \sqrt[3]{8x+1} + \sqrt[3]{17-2x}$.
47. $\sqrt[3]{4x+13} + \sqrt[3]{9x+3} - \sqrt[3]{5x+15} = \sqrt[3]{8x+1}$.
48. $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{7-4x} = \sqrt[3]{7x+1} + \sqrt[3]{8-10x}$.
49. $\sqrt[3]{5x-3} + \sqrt[3]{x+5} = \sqrt[3]{4x+1} + \sqrt[3]{2x+1}$.
50. $\sqrt[3]{8x+5} + \sqrt[3]{7x+5} = \sqrt[3]{10x+1} + \sqrt[3]{5x+9}$.
51. $\sqrt[3]{x^2+x+2} + \sqrt[3]{2x-1} = \sqrt[3]{x^2+2x+1} + \sqrt[3]{x}$.
52. $\sqrt[3]{2x^2+x+1} + \sqrt[3]{6x+2} = \sqrt[3]{x^2+x+1} + \sqrt[3]{x^2+6x+2}$.
53. $\sqrt[3]{x^2+5x+1} + \sqrt[3]{x-3} = \sqrt[3]{x^2+3} + \sqrt[3]{x^2+6x-5}$.
54. $\sqrt[3]{x^2-4x+3} + \sqrt[3]{x-5} = \sqrt[3]{x^2+x-6} + \sqrt[3]{4-3x}$.
55. $\sqrt[3]{x^2+5x+7} + \sqrt[3]{2x^2+x+7} - \sqrt[3]{3x^2+3x+4} = \sqrt[3]{3x+10}$.
56. $\sqrt[3]{x^2+7} + \sqrt[3]{x^2-x+7} = \sqrt[3]{x^2+4x+1} + \sqrt[3]{x^2-5x+13}$.
57. $\sqrt[3]{x^2-5x+6} + \sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{11x-14} = \sqrt[3]{x^2+7x-3}$.
58. $\sqrt[3]{7x+2} + \sqrt[3]{x^2-5x+4} - \sqrt[3]{x^2-x} = \sqrt[3]{3x+6}$.
59. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{8x^2-x+1} = \sqrt[3]{7x^2-4x+6} + \sqrt[3]{x^2+4x-5}$.
60. $\sqrt[3]{4x+1} = \sqrt[3]{3x^2+5x+1} + \sqrt[3]{x^2-2x+7} - \sqrt[3]{4x^2-x+7}$.
61. $\sqrt[3]{x+6} + \sqrt[3]{2x^2-x+5} = \sqrt[3]{x^2+6x+5} + \sqrt[3]{x^2-6x+6}$.
62. $\sqrt[3]{8x-3} + \sqrt[3]{x^2+4x+1} = \sqrt[3]{x^2-x+11} + \sqrt[3]{13(x-1)}$.
63. $\sqrt[3]{4x-1} + \sqrt[3]{x^2+4x+5} = \sqrt[3]{x^2-4x+9} + \sqrt[3]{12x-5}$.
64. $\sqrt[3]{x^2+4x+4} + \sqrt[3]{x^2+6x+9} = \sqrt[3]{2x^2+x+1} + \sqrt[3]{9x+12}$.
65. $\sqrt[3]{4x^2-2x+3} + \sqrt[3]{x^2+3x+2} = \sqrt[3]{5x^2-3x+1} + \sqrt[3]{4(1+x)}$.
66. $\sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt[3]{x^2+x-1} + \sqrt[3]{3x-1} = \sqrt[3]{x^3+x^2+4x-1}$.
67. $\sqrt[3]{x^3+x+1} + \sqrt[3]{x^2+x-1} + \sqrt[3]{2x^2+x-1} = \sqrt[3]{x^3+3x^2+3x-1}$.
68. $\sqrt[3]{x^4-1} + \sqrt[3]{x^3+2x^2-4x+1} + \sqrt[3]{x^2+1} = \sqrt[3]{x^4+x^3+3x^2-4x+1}$.
69. $\sqrt[3]{x^3+x-3} + \sqrt[3]{x^2+x+3} + \sqrt[3]{x^2-x+3} = \sqrt[3]{x^3+2x^2+x+3}$.
70. $\sqrt[3]{x^3-4} + \sqrt[3]{2x^2-x+4} = \sqrt[3]{x^3+5x^2+4} - \sqrt[3]{3x^2+x+4}$.
71. $\sqrt[3]{2x^3-7} + \sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{x^3+x^2+7} = \sqrt[3]{3x^3+x^2+x+7}$.

Bài toán 87. Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^3+1}{x}} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^3+1}{x}} \right)^2 &= \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-x+1} \right)^2 \Leftrightarrow x + \frac{x^3+1}{x} + 2\sqrt{x^3+1} = x^2 + 2 + 2\sqrt{x^3+1} \\ \Leftrightarrow \frac{x^3+x^2+1}{x} &= x^2 + 2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + 1 = x^3 + 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện thu được nghiệm $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x}} - \sqrt{x^2-x+1} &= \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}(\sqrt{x-1} - \sqrt{x}) = \sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x^2-x+1} - \sqrt{x}) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = x \\ x^2-2x+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x = -1 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện thu được nghiệm $x = 1$.

Bài toán 88. Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x-1}{x}} = \sqrt{x-1} + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x}} - \sqrt{x-1} &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x-1}) + \sqrt{x-1}(1-\sqrt{x}) = 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x-1} = \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 0x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện, kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x + \frac{x-1}{x} + 2\sqrt{x-1} = x + 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Đổi chiều điều kiện thu được nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 89. Giải phương trình $\sqrt{2x} + \sqrt{\frac{x^2+5x+6}{2x}} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x + \frac{x^2+5x+6}{2x} + 2\sqrt{x^2+5x+6} &= 2x + 5 + 2\sqrt{x^2+5x+6} \\ \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 &= 10x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2; 3\} \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện, kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 90. Giải phương trình $\sqrt{x+2} + \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} = \sqrt{x+3} + \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Bình phương hai vế phương trình đã cho ta thu được

$$\begin{aligned} x+2 + \frac{x-1}{x+2} + 2\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} &= x+3 + \frac{x-1}{x+3} + 2\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} \\ \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} + 2\sqrt{x-1} &= 1 + \frac{x-1}{x+3} + 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} = \frac{2x+2}{x+3} \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 &= 2x^2 + 6x + 4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 7 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 = -3 \end{aligned} \quad (1)$$

Dễ thấy phương trình (1) vô nghiệm. Do đó phương trình đề bài vô nghiệm.

Bài toán 91. Giải phương trình $\sqrt{4x+1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{\frac{x^3+1}{x-1}} + \sqrt{\frac{x^3+1}{4x+1}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x > 1$. Phương trình đã cho biến đổi về $\sqrt{4x+1} - \sqrt{\frac{x^3+1}{4x+1}} = \sqrt{\frac{x^3+1}{x-1}} - \sqrt{x-1}$ (1).

Dễ thấy (1) có nghiệm khi và chỉ khi hai vế cùng dấu, nghĩa là

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{4x+1} - \sqrt{\frac{x^3+1}{4x+1}} \right) \left(\sqrt{\frac{x^3+1}{x-1}} - \sqrt{x-1} \right) &\geq 0 \Leftrightarrow [4x+1 - (x^3+1)] [x^3+1 - (x-1)] \geq 0 \\ \Leftrightarrow (x^3 - 4x)(x^3 - x + 2) &\geq 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2)[x(x^2-1)+2] \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Rõ ràng $x(x^2-1)+2 > 0; x(x+2) > 0, \forall x > 1$ nên (2) $\Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Khi đó

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 4x+1 + \frac{x^3+1}{4x+1} - 2\sqrt{4x+1} \cdot \sqrt{\frac{x^3+1}{4x+1}} = \frac{x^3+1}{x-1} + x-1 - 2\sqrt{\frac{x^3+1}{x-1}} \cdot \sqrt{x-1} \\ &\Leftrightarrow 3x+2 = \frac{x^3+1}{x-1} - \frac{x^3+1}{4x+1} \Leftrightarrow 3x+2 = (x^3+1) \frac{(4x+1)-(x-1)}{(4x+1)(x-1)} \\ &\Leftrightarrow 3x+2 = \frac{(x^3+1)(3x+2)}{(4x+1)(x-1)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2=0 \\ 4x^2-3x-1=x^3+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ x^3-4x^2+3x+2=0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Ta có (3) $\Leftrightarrow (x-2)(x^2-2x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ (x-1)^2=2 \end{cases} \Rightarrow x \in \{2; \sqrt{2}+1; 1-\sqrt{2}\}$.

So sánh với điều kiện $x \geq 2$ và thử trực tiếp suy ra tập hợp nghiệm $S = \{2; \sqrt{2}+1\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x > 1$. Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{4x+1} + \sqrt{x-1} &= \sqrt{\frac{x^3+1}{(4x+1)(x-1)}} (\sqrt{4x+1} + \sqrt{x-1}) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{4x+1} + \sqrt{x-1}) &\left(\sqrt{\frac{x^3+1}{4x^2-3x-1}} - 1 \right) = 0 \end{aligned} \quad (*)$$

Chú ý rằng $\sqrt{4x+1} + \sqrt{x-1} > 0, \forall x > 1$ nên (*) trở thành

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{x^3+1}{4x^2-3x-1}}=1 &\Leftrightarrow \frac{x^3+1}{4x^2-3x-1}=1 \Leftrightarrow x^3+1=4x^2-3x-1 \Leftrightarrow x^3-4x^2+3x+2=0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x^2-2x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ (x-1)^2=2 \end{cases} \Rightarrow x \in \{2; \sqrt{2}+1; 1-\sqrt{2}\}\end{aligned}$$

Đối chiếu với $x > 1$ và thử trực tiếp vào phương trình ban đầu, kết luận nghiệm $S = \{2; \sqrt{2}+1\}$.

Bài toán 92. Giải phương trình $\sqrt{5x+6} + \sqrt{x-1} = \sqrt{\frac{x^3+8}{x-1}} + \sqrt{\frac{x^3+8}{5x+6}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}\sqrt{5x+6} + \sqrt{x-1} &= \sqrt{\frac{x^3+8}{(x-1)(5x+6)}} (\sqrt{x-1} + \sqrt{5x+6}) \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{5x+6} + \sqrt{x-1}) \left(\sqrt{\frac{x^3+8}{(x-1)(5x+6)}} - 1 \right) = 0\end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

- Phương trình $\sqrt{5x+6} + \sqrt{x-1} = 0$ vô nghiệm vì $\sqrt{5x+6} + \sqrt{x-1} > 0, \forall x > 1$.
- $\sqrt{\frac{x^3+8}{(x-1)(5x+6)}} = 1 \Leftrightarrow x^3+8=5x^2+x-6 \Leftrightarrow x^3-5x^2-x+14=0$
 $\Leftrightarrow (x-2)(x^2-3x-7)=0 \Rightarrow x \in \left\{ 2; \frac{3-\sqrt{37}}{2}; \frac{3+\sqrt{37}}{2} \right\}.$

Đối chiếu các nghiệm với điều kiện ta thu được $S = \left\{ 2; \frac{3+\sqrt{37}}{2} \right\}.$

Bài toán 93. Giải bất phương trình $\sqrt{2x-1} - \sqrt{\frac{x+3}{2x-1}} \leq \sqrt{4x-3} - \sqrt{\frac{x+3}{4x-3}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > \frac{3}{4}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}\sqrt{2x-1} - \sqrt{4x-3} &\leq \sqrt{\frac{x+3}{2x-1}} - \sqrt{\frac{x+3}{4x-3}} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} - \sqrt{4x-3} \leq \sqrt{\frac{x+3}{(2x-1)(4x-3)}} (\sqrt{4x-3} - \sqrt{2x-1}) \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{2x-1} - \sqrt{4x-3}) \left(\sqrt{\frac{x+3}{(2x-1)(4x-3)}} + 1 \right) \geq 0 \quad (*)\end{aligned}$$

Dễ thấy rằng $\sqrt{\frac{x+3}{(2x-1)(4x-3)}} + 1 > 0, \forall x > \frac{3}{4}$ nên $(*) \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} - \sqrt{4x-3} \geq 0 \Leftrightarrow 2x-1 \geq 4x-3 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Kết hợp với điều kiện $x > \frac{3}{4}$ ta có tập nghiệm $S = \left(\frac{3}{4}; 1 \right]$.

Bài toán 94. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+3} + \sqrt{\frac{x^2+x+6}{x^2+3}} \leq \sqrt{\frac{x^2+x+6}{x+1}} + \sqrt{x+1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x > -1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x+1} &\leq \sqrt{\frac{x^2+x+6}{x+1}} - \sqrt{\frac{x^2+x+6}{x^2+3}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x+1} \leq \sqrt{\frac{x^2+x+6}{(x^2+3)(x+1)}} (\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x+1}) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x+1}) \left(\sqrt{\frac{x^2+x+6}{(x^2+3)(x+1)}} - 1 \right) &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x+2}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x+1}} \cdot \left(\sqrt{\frac{x^2+x+6}{(x^2+3)(x+1)}} - 1 \right) \geq 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Nhận thấy rằng $x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $(*) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+x+6}{(x^2+3)(x+1)}} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+x+6}{(x^2+3)(x+1)}} \geq 1$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 6 \geq x^3 + x^2 + 3x + 3 \Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 3x + 3) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Kết luận bất phương trình có nghiệm $-1 < x \leq 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x > -1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2 + 3 + \frac{x^2+x+6}{x^2+3} + 2\sqrt{x^2+3} \cdot \sqrt{\frac{x^2+x+6}{x^2+3}} &\leq \frac{x^2+x+6}{x+1} + x+1 + 2\sqrt{\frac{x^2+x+6}{x+1}} \cdot \sqrt{x+1} \\ \Leftrightarrow x^2 - x + 2 &\leq \frac{x^2+x+6}{x+1} - \frac{x^2+x+6}{x^2+3} \Leftrightarrow x^2 - x + 2 \leq \frac{(x^2+x+6)(x^2-x+2)}{(x+1)(x^2+3)} \quad (*) \end{aligned}$$

Nhận thấy rằng $x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow (x+1)(x^2+3) \leq x^2+x+6 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + 3x + 3 \leq x^2 + x + 6 \\ &\Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 3x + 3) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đề bài có tập nghiệm $S = (-1; 1]$

Nhận xét.

Các bài toán từ 87 đến 94 là dạng toán đặc trưng thứ 4 của phương pháp biến đổi tương đương, nâng cao lũy thừa. Dạng tổng quát đối với (phương trình) bốn căn thức là

$$\begin{cases} \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{k(x)} & (i) \\ \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} - \sqrt{k(x)} & (ii) \end{cases}$$

Trong đó các biểu thức trong căn xác định, thỏa mãn điều kiện $f(x) \cdot g(x) = h(x) \cdot k(x)$ (*).

Yếu tố đặc biệt (*) này chính là chìa khóa để giải bài toán. Qua quan sát lời giải phía trên các bạn có thể thấy đối với phương trình hoặc bất phương trình chúng ta bình phương hai vế và đưa về dạng $f(x) + g(x) = h(x) + k(x)$, đây là một phương trình đại số bậc cao hoặc phân thức hữu tỷ, cách giải đã hết sức quen thuộc!

Lưu ý đối với phương trình dạng (ii), khi nâng lũy thừa cần kèm theo điều kiện (hoặc giả sử) hai vế cùng dấu, trường hợp (i) thì thực hiện trực tiếp. Trong trường hợp bất phương trình dạng (ii), nếu sử dụng biến đổi tương đương có lẽ sẽ khá phức tạp khi thao tác chia trường hợp, khi đó chúng ta có thể tham khảo lời giải 2 của các bài toán 90, 93 và các bài 91, 92. Thông thường hầu hết các bài toán dạng này có thể quy về dạng phương trình tích, không nhất thiết sử dụng biến đổi tương đương – nâng lũy thừa. Đó là dạng toán đặc trưng thứ 5, tác giả xin được lồng ghép với dạng toán thứ 4 để tăng tính mạch lạc, dù rằng chưa được tường minh!

Bài toán 95. Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = 1 + \sqrt{x^2 + 3x + 2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = 1 + \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+2} &\Leftrightarrow \sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+2} - \sqrt{x+2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x+2} (\sqrt{x+1} - 1) \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+2} - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = 1 \\ \sqrt{x+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 1 \\ x+2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x \in \{-1; 0\}$.

Bài toán 96. Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x^2 - x - 2} + 1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x^2 - x - 2} + 1 &\Leftrightarrow \sqrt{x-2} - 1 = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-2} - \sqrt{x+1} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x-2} - 1 = \sqrt{x+1} (\sqrt{x-2} - 1) \Leftrightarrow (\sqrt{x-2} - 1)(\sqrt{x+1} - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 1 \\ \sqrt{x+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 1 \\ x+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện $x \geq 2$ ta thu được nghiệm $S = \{2\}$.

Bài toán 97. Giải bất phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} - \sqrt{x-x^2} \leq 1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $0 \leq x \leq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - 1 + \sqrt{1-x} - \sqrt{x-x^2} \leq 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 + \sqrt{1-x} (1 - \sqrt{x}) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - \sqrt{x})(\sqrt{1-x} - 1) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{x} \leq 0 \\ \sqrt{1-x} - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 1 - x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Kết luận tập nghiệm $0 \leq x \leq 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $0 \leq x \leq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} \leq 1 - \sqrt{1-x} &\Leftrightarrow \sqrt{x} (1 - \sqrt{1-x}) \leq 1 - \sqrt{1-x} \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(1 - \sqrt{1-x}) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{x}{1+\sqrt{1-x}} \leq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Kết luận tập nghiệm $S = [0; 1]$.

Lời giải 3.

Điều kiện $0 \leq x \leq 1$. Đặt $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = t \Rightarrow t^2 = 1 + 2\sqrt{x-x^2}$. Bất phương trình đã cho trở thành

$$t - \frac{t^2 - 1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 2t - t^2 + 1 \leq 2 \Leftrightarrow (t-1)^2 \geq 0 \text{ (Hiển nhiên)}.$$

Vậy bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi giá trị $0 \leq x \leq 1$ hay $S = [0; 1]$.

Bài toán 98. Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{x^3+1} + 1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-x+1} &= \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x^2-x+1} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x^2-x+1} (\sqrt{x+1} - 1) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x^2-x+1} - 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = 1 \\ \sqrt{x^2-x+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 1 \\ x^2-x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

So sánh với điều kiện $x \geq -1$ thu được nghiệm $S = \{0; 1\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x+1 + x^2-x+1 + 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x^2-x+1} &= x^3+1 + 2\sqrt{x^3+1} + 1 \\ \Leftrightarrow x^2+2 &= x^3+2 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 1 \end{aligned}$$

So sánh với điều kiện $x \geq -1$ thu được nghiệm $S = \{0; 1\}$.

Bài toán 99. Giải bất phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{x^3+x^2+x+1} \leq 1 + \sqrt{x^4-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} + \sqrt{x^3+x^2+x+1} &\leq 1 + \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x^3+x^2+x+1} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-1} - 1 &\leq \sqrt{x^3+x^2+x+1} (\sqrt{x-1} - 1) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 1)(\sqrt{x^3+x^2+x+1} - 1) &\geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Từ $x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^3+x^2+x+1} \geq \sqrt{4} > 1$. Do đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2$. Kết luận tập nghiệm $S = [2; +\infty)$.

Bài toán 100. Giải phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2+x+1} = 1 + \sqrt{x^3-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x-1 + x^2+x+1 + 2\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x^2+x+1} &= x^3-1 + 2\sqrt{x^3-1} + 1 \\ \Leftrightarrow x^2+2x+2\sqrt{x^3-1} &= x^3+2\sqrt{x^3-1} \Leftrightarrow x^3-x^2-2x = 0 \\ \Leftrightarrow x(x^2-x-2) &= 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x \in \{-1; 0; 2\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x = 2$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2+x+1} &= 1 + \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} - 1 = \sqrt{x^2+x+1} (\sqrt{x-1} - 1) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 1)(\sqrt{x^2+x+1} - 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 1 \\ \sqrt{x^2+x+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2+x = 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \{-1; 0; 2\} \end{aligned}$$

Đối chiếu với điều kiện ta có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài toán 101. Giải phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{x^3-2} = \sqrt{x^4-2x^3-2x+4} + 1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2} + \sqrt{x^3-2} &= \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x^3-2} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} - 1 = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x^3-2} - \sqrt{x^3-2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-2} - 1 &= \sqrt{x^3-2} (\sqrt{x-2} - 1) \Leftrightarrow (\sqrt{x-2} - 1) (\sqrt{x^3-2} - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 1 \\ \sqrt{x^3-2} = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 1 \\ x^3-2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \sqrt[3]{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm duy nhất $x = 3$.

Bài toán 102. Giải phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2+2x+4} = 1 + \sqrt{x^3-8}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2} + \sqrt{x^2+2x+4} &= 1 + \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x^2+2x+4} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-2} - 1 &= \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{x^2+2x+4} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-2} - 1 &= \sqrt{x^2+2x+4} (\sqrt{x-2} - 1) \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+2x+4} - 1) (\sqrt{x-2} - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+2x+4} = 1 \\ \sqrt{x-2} = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = -3 \\ x-2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ban đầu ta có nghiệm $x = 3$.

Bài toán 103. Giải phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+2} = 1 + \sqrt{x^2-4}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2} - 1 &= \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+2} - \sqrt{x+2} \Leftrightarrow \sqrt{x-2} - 1 = \sqrt{x+2} (\sqrt{x-2} - 1) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x-2} - 1) (\sqrt{x+2} - 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 1 \\ \sqrt{x+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = 3$.

Bài toán 104. Giải phương trình $\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{2x^2-1} = 1 + \sqrt{2x^4+2x^3+x^2-x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $2x^2 \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{2x^2-1} &= 1 + \sqrt{x^2+x+1} \cdot \sqrt{2x^2-1} \\ \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-1} - 1 &= \sqrt{x^2+x+1} \cdot \sqrt{2x^2-1} - \sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-1} - 1 = \sqrt{x^2+x+1} (\sqrt{2x^2-1} - 1) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2x^2-1} - 1) (\sqrt{x^2+x+1} - 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2-1} = 1 \\ \sqrt{x^2+x+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ x^2+x = 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \{-1; 0; 1\} \end{aligned}$$

Đối chiếu với điều kiện đi đến tập nghiệm $S = \{-1; 1\}$

Nhận xét.

Các bài toán từ 95 đến 104 thuộc lớp phương trình – bất phương trình quy về phương trình tích, thương thông qua phép biến đổi tương đương thông thường. Dạng tổng quát như sau

$$au + bv = ab + uv \Leftrightarrow au - uv + bv - ab = 0 \Leftrightarrow u(a - v) + b(v - a) = 0 \Leftrightarrow (u - b)(v - a) = 0 \quad [*]$$

Trong đó dạng đặc biệt khó nhận thấy với $a = b = 1$: $u + v = 1 + uv \Leftrightarrow (u - 1)(v - 1) = 0$.

Các đồng nhất thức trên rất hiệu quả đối với phương trình chứa căn chứa bốn căn thức có dạng đặc biệt.

Chú ý rằng u và v có thể thay đổi, phức tạp hóa bởi các đa thức, căn thức, phân thức hữu tỷ,...mức độ ẩn giấu bao nhiêu thì độ khó bài toán tăng thêm bấy nhiêu. Có thể nói rằng dạng toán đặc trưng và 4 và 5 có sự "đồng điệu" với nhau, tùy theo khả năng bản thân và gu trình bày mà quý độc giả lựa chọn cho mình phương án tối ưu nhất.

Tác giả xin đi sâu vào dạng [*] với thí dụ đầu tiên, trích lược câu 1; Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên ĐHKHTN; Đại học Khoa học Tự nhiên; ĐHQG Hà Nội; Năm học 2012 – 2013.

Bài toán 105. Giải phương trình $\sqrt{x+9} + 2012\sqrt{x+6} = 2012 + \sqrt{(x+6)(x+9)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -6$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x+9} - \sqrt{(x+6)(x+9)} + 2012\sqrt{x+6} - 2012 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x+9}(1 - \sqrt{x+6}) + 2012(\sqrt{x+6} - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - \sqrt{x+6})(\sqrt{x+9} - 2012) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+6} = 1 \\ \sqrt{x+9} = 2012 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 4048135 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -5; x = 4048135$.

Thí dụ thứ hai trích lược câu 1, Đề thi tuyển sinh vào lớp 10; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Toán, chuyên Tin học); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Thái Bình; Tỉnh Thái Bình; Năm học 2013 – 2014.

Bài toán 106. Giải phương trình $x + 4\sqrt{7-x} = 4\sqrt{x-1} + \sqrt{(7-x)(x-1)} + 1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $1 \leq x \leq 7$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x - 1 - 4\sqrt{x-1} &= \sqrt{(7-x)(x-1)} - 4\sqrt{7-x} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1} - 4) = \sqrt{7-x}(\sqrt{x-1} - 4) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 4)(\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 1 \\ \sqrt{x-1} = \sqrt{7-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 16 \\ x-1 = 7-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện $1 \leq x \leq 7$ ta thu được nghiệm $S = \{4\}$.

Thí dụ thứ 3 trích lược câu 1; Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Tin học); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Vĩnh Phúc; Tỉnh Vĩnh Phúc; Năm học 2012 – 2013.

Bài toán 107. Giải phương trình $\sqrt{x^3 + x^2 + 3x + 3} + \sqrt{2x} = \sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{2x^2 + 2x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 3} \cdot \sqrt{x+1} - \sqrt{x^2 + 3} &= \sqrt{2x(x+1)} - \sqrt{2x} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3}(\sqrt{x+1} - 1) &= \sqrt{2x}(\sqrt{x+1} - 1) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{2x})=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}=1 \\ \sqrt{x^2+3}=\sqrt{2x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ x^2+3=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (x-1)^2=-2 \end{cases} \Rightarrow x=0$$

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài toán 108. Giải bất phương trình $(\sqrt{x+1}-1)^2 + 6\sqrt{2-x} \leq 3\sqrt{-x^2-x+2} + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $-1 \leq x \leq 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x+1-2\sqrt{x+1}+6\sqrt{2-x} \leq 3\sqrt{-x^2-x+2} \Leftrightarrow \sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-2) \leq 3\sqrt{2-x}(\sqrt{x+1}-2)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-2)(3\sqrt{2-x}-\sqrt{x+1}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}-2 \geq 0 \\ 3\sqrt{2-x}-\sqrt{x+1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 4 \\ 18-9x \geq x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq \frac{17}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{17}{10} \leq x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}-2 \leq 0 \\ 3\sqrt{2-x}-\sqrt{x+1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \leq 4 \\ 18-9x \leq x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq \frac{17}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{17}{10} \leq x \leq 3$$

Kết hợp điều kiện $-1 \leq x \leq 2$ thu được nghiệm $\frac{17}{10} \leq x \leq 2$.

Lời giải 2.

Điều kiện $-1 \leq x \leq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x+1-2\sqrt{x+1}+6\sqrt{2-x} \leq 3\sqrt{-x^2-x+2} \Leftrightarrow \sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-2) \leq 3\sqrt{2-x}(\sqrt{x+1}-2)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-2)(3\sqrt{2-x}-\sqrt{x+1}) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-4}{\sqrt{x+1}+2} \cdot \frac{9(2-x)-(x+1)}{3\sqrt{2-x}+\sqrt{x+1}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(17-10x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{17}{10} \leq x \leq 3$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $\frac{17}{10} \leq x \leq 2$.

Bài toán 109. Giải phương trình $\sqrt{x^2-3x}+2\sqrt{x}=4\sqrt{x-3}+x-8 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x-3}.\sqrt{x}-4\sqrt{x-3}=x-2\sqrt{x}-8$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-3}(\sqrt{x}-4)=(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+2) \Leftrightarrow (\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+2-\sqrt{x-3})=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=4 \\ \sqrt{x}+2=\sqrt{x-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ x+4\sqrt{x}+4=x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16 \\ 4\sqrt{x}=-7 \quad (*) \end{cases}$$

Phương trình (*) vô nghiệm. Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x=16$.

Bài toán 110. Giải bất phương trình $x + 2 + \sqrt{x-1} \geq \sqrt{x^2-1} + 2\sqrt{x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x+1-2\sqrt{x+1}+1 &\geq \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} \Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-1)^2 \geq \sqrt{x-1}(\sqrt{x+1}-1) \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}-1-\sqrt{x-1}) \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Do $x \geq 1$ nên $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1}-1-\sqrt{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \geq 1+\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x+1 \geq x+2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{4}$.

Kết luận điều kiện $x \geq 1$ thu được nghiệm $S = \left[1; \frac{5}{4}\right]$.

Bài toán 111. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+4x+3}+15x < 3\sqrt{x(x+1)}+5\sqrt{x(x+3)} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -3 \end{cases}$

- Xét $x \geq 0$ thu được

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+3} + 15x &< 3\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1} + 5\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+3} \Leftrightarrow \sqrt{x+1}(\sqrt{x+3}-3\sqrt{x}) < 5\sqrt{x}(\sqrt{x+3}-3\sqrt{x}) \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-5\sqrt{x})(\sqrt{x+3}-3\sqrt{x}) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 25x \\ x+3 < 9x \\ x+1 < 25x \\ x+3 > 9x \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{24} < x < \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện thu được $\frac{1}{24} < x < \frac{3}{8}$.

- Xét $x \leq -3$ thu được

$$\begin{aligned} \sqrt{-x-1} \cdot \sqrt{-x-3} + 15x &< 3\sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x-1} + 5\sqrt{-x} \cdot \sqrt{-x-3} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{-x-1}(\sqrt{-x-3}-3\sqrt{-x}) < 5\sqrt{-x}(\sqrt{-x-3}-3\sqrt{-x}) \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{-x-1}-5\sqrt{-x})(\sqrt{-x-3}-3\sqrt{-x}) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x-1 > -25x \\ -x-3 < -9x \\ -x-1 < -25x \\ -x-3 > -9x \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{24} < x < \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Kết luận tập nghiệm của bất phương trình là $\frac{1}{24} < x < \frac{3}{8}$.

Bài toán 112. Giải bất phương trình $1 + \sqrt{x^2-x} + \sqrt{x-1} \leq 3x + 2\sqrt{x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} - \sqrt{x-1} &\leq 3x + 2\sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x}-1) \leq (\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+1) \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+1-\sqrt{x-1}) \geq 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Do $x \geq 1$ nên $(*) \Leftrightarrow 3\sqrt{x}+1 \geq \sqrt{x-1} \Leftrightarrow 9x+6\sqrt{x}+1 \geq x-1 \Leftrightarrow 4x+3\sqrt{x}+1 \geq 0 \quad (1)$.

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với $x \geq 1$ nên suy ra nghiệm của bài toán là $x \geq 1$.

Bài toán 113. Giải phương trình $x\sqrt{2x^2+x-3}+2=2x\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{x+3}+2 &= 2x\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+3} \\ \Leftrightarrow x\sqrt{2x-1}(\sqrt{x+3}-2) &= \sqrt{x+3}-2 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-2)(x\sqrt{2x-1}-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=4 \\ x^2(2x-1)=1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (x-1)(2x^2+x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2x^2+x+1=0 \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Phương trình (*) vô nghiệm do $x \geq \frac{1}{2}$ (hoặc $\Delta < 0$). Kết luận nghiệm $S = \{1\}$.

Bài toán 114. Giải phương trình $\sqrt{x+8}+8\sqrt{x+2013}=\sqrt{(x+8)(x+2013)}+8$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -8$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x+8}-8 &= \sqrt{x+8}\cdot\sqrt{x+2013}-8\sqrt{x+2013} \Leftrightarrow \sqrt{x+8}-8 = \sqrt{x+2013}(\sqrt{x+8}-8) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x+8}-8)(\sqrt{x+2013}-1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+8}=8 \\ \sqrt{x+2013}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=56 \\ x=-2012 \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện đi đến phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 56$.

Bài toán 115. Giải phương trình $2\sqrt{x^4+x^2+1}+1=\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x+1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Vì $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ nên ta có điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^2+x+1}\cdot\sqrt{x^2-x+1}+1 &= \sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2-x+1} \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+x+1}\cdot\sqrt{x^2-x+1}-2\sqrt{x^2-x+1} &= \sqrt{x^2+x+1}-1 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-x+1}(\sqrt{x^2+x+1}-1) &= \sqrt{x^2+x+1}-1 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+x+1}-1)(2\sqrt{x^2-x+1}-1)=0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x+1}=1 \\ 2\sqrt{x^2-x+1}=1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x=0 \\ 4x^2-4x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)=0 \\ (2x-1)^2=-2 \end{cases} \Rightarrow x \in \{-1; 0\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1; x = 0$.

Bài toán 116. Giải phương trình $2\sqrt{x^2+9x+8}+x=2\sqrt{x+1}+x\sqrt{8+x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& 2\sqrt{x+8}\cdot\sqrt{x+1}-2\sqrt{x+1}=x\sqrt{8+x}-x \\
& \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}(\sqrt{x+8}-1)=x(\sqrt{x+8}-1) \Leftrightarrow (\sqrt{x+8}-1)(2\sqrt{x+1}-x)=0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+8}=1 \\ 2\sqrt{x+1}=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+8=1 \\ x \geq 0 \\ x^2-4x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7 \\ x=2+2\sqrt{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x = 2 + 2\sqrt{2}$.

Bài toán 117. Giải bất phương trình $x + \sqrt{x-1} \leq \sqrt{x^2-3x+2} + x\sqrt{x-2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& x + \sqrt{x-1} \leq \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-2} + x\sqrt{x-2} \Leftrightarrow x - x\sqrt{x-2} \leq \sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-2} - \sqrt{x-1} \\
& \Leftrightarrow x(1-\sqrt{x-2}) \leq \sqrt{x-1}(\sqrt{x-2}-1) \Leftrightarrow (\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-1}+x) \geq 0 \quad (*)
\end{aligned}$$

Nhận thấy $\sqrt{x-1}+x > 0, \forall x \geq 2$ nên $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x-2} \geq 1 \Leftrightarrow x-2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq 3$.

Bài toán 118. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + 2x\sqrt{x+1} = 2x + \sqrt{x^2+4x+3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& 2x\sqrt{x+1} - 2x = \sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+3} - \sqrt{x+3} \Leftrightarrow 2x(\sqrt{x+1}-1) = \sqrt{x+3}(\sqrt{x+1}-1) \\
& \Leftrightarrow (2x-\sqrt{x+3})(\sqrt{x+1}-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \sqrt{x+3} \\ \sqrt{x+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 1\} \\ x+1 = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0; x = 1$.

Bài toán 119. Giải phương trình $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} + \sqrt{\frac{x+2}{x+1}} = 1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x+1} - 1 + \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-1) + \sqrt{x+2}(1-\sqrt{x+1}) = 0 \\
& \Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})(\sqrt{x+1}-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = \sqrt{x+2} \\ \sqrt{x+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x = 1 \\ x+1 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 0
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài toán 120. Giải phương trình $x\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-x+1} = x + \sqrt{x^3+1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 x\sqrt{x+1}-x &= \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x^2-x+1} - \sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow x(\sqrt{x+1}-1) = \sqrt{x^2-x+1}(\sqrt{x+1}-1) \\
 \Leftrightarrow (x-\sqrt{x^2-x+1})(\sqrt{x+1}-1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{x^2-x+1} \\ \sqrt{x+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = x^2-x+1 \\ x+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x = 0; x = 1$.

Bài toán 121. Giải phương trình $x\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1} = x + \sqrt{x^4+x^2+1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Vì $x^2+x+1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $x^2-x+1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ nên ta có điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
 x\sqrt{x^2+x+1}-x &= \sqrt{x^2-x+1} \cdot \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} \\
 \Leftrightarrow x(\sqrt{x^2+x+1}-1) &= \sqrt{x^2-x+1}(\sqrt{x^2+x+1}-1) \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+x+1}-1)(\sqrt{x^2-x+1}-x) \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x+1} = 1 \\ \sqrt{x^2-x+1} = x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1 = 1 \\ x \geq 0 \\ x^2-x+1 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-1; 0; 1\}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đề bài có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 122. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + 2x\sqrt{2x+1} = 2x + \sqrt{2x^2+7x+3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x+3}-2x &= \sqrt{2x+1} \cdot \sqrt{x+3} - 2x\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x+3}-2x = \sqrt{2x+1}(\sqrt{x+3}-2x) \\
 \Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-2x)(\sqrt{2x+1}-1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 2x \\ \sqrt{2x+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2-x-3 = 0 \\ 2x+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0; 1\}
 \end{aligned}$$

Đối chiếu với điều kiện ta có hai nghiệm $x = 0; x = 1$.

Bài toán 123. Giải phương trình $\frac{\sqrt{x+3}}{x} + 2x\sqrt{2x-1} = 2 + \sqrt{2x^2+5x-3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{x+3}}{x}-2 &= \sqrt{(x+3)(2x-1)} - 2x\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+3}-2x}{x} = \sqrt{2x-1}(\sqrt{x+3}-2x) \\
 \Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-2x)(x\sqrt{2x-1}-1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 2x & (1) \\ x\sqrt{2x-1} = 1 & (2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-1)(4x+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2(2x-1) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)(2x^2 + x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Kết hợp điều kiện thu được nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 124. Giải phương trình $\frac{4x+2}{\sqrt{x+3}} + x\sqrt{x+8} = 2x^2 + x + 2\sqrt{\frac{x+8}{x+3}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > -3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{4x+2}{\sqrt{x+3}} - 2\sqrt{\frac{x+8}{x+3}} &= 2x^2 + x - x\sqrt{x+8} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x+3}}(2x+1 - \sqrt{x+8}) = x(2x+1 - \sqrt{x+8}) \\ \Leftrightarrow (2x+1 - \sqrt{x+8})(x\sqrt{x+3} - 2) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = \sqrt{x+8} & (1) \\ x\sqrt{x+3} = 2 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 4x^2 + 4x + 1 = x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 4x^2 + 3x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2(x+3) - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)(x+2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 125. Giải phương trình $x\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\sqrt{x+2} = 1 + \sqrt{x+\frac{2}{x}+3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} -2 \leq x \leq -1 \\ x > 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x\sqrt{\frac{x+1}{x}} - \sqrt{\frac{x+1}{x}} \cdot \sqrt{x+2} + \frac{1}{x}\sqrt{x+2} - 1 &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+1}{x}}(x - \sqrt{x+2}) + \frac{\sqrt{x+2} - x}{x} = 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x+2} - x) \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} - \frac{1}{x} \right) &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = x \vee \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

- ✓ $\sqrt{x+2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x+1)(x-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$
- ✓ $\sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x(x+1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x = 2; x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$

Bài toán 126. Giải phương trình $14\sqrt{x+35} + 6\sqrt{x+1} = 84 + \sqrt{x^2 + 36x + 35}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 14\sqrt{x+35} - 84 + 6\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x+35} &= 0 \\ \Leftrightarrow 14(\sqrt{x+35} - 6) + \sqrt{x+1}(6 - \sqrt{x+35}) &= 0 \\ \Leftrightarrow (14 - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+35} - 6) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = 14 \\ \sqrt{x+35} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 195 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1; x = 195$.

Bài toán 127. Giải phương trình $2\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = \frac{2}{\sqrt{x}} + x\sqrt{x+3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = x\sqrt{x+3} - \sqrt{x+3} &\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}}(x-1) = (x-1)\sqrt{x+3} \\ \Leftrightarrow (x-1)(2 - \sqrt{x^2+3x}) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1; -4\} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = 1$.

Nhận xét.

Thông qua các bài toán dạng đặc trưng thứ 5 (từ 94 đến 126), nhiều bạn đọc chắc chắn đã hình dung được phương cách sử dụng đồng nhất thức

$$au + bv = ab + uv \Leftrightarrow au - uv + bv - ab = 0 \Leftrightarrow u(a-v) + b(v-a) = 0 \Leftrightarrow (u-b)(v-a) = 0 \quad [*].$$

Trên thực tế, đối với các phương trình, bất phương trình chứa căn thức, đặc biệt với các bài có hình thức phức tạp, việc nhận biết các biến a, b, u, v tỏ ra khá khó khăn, thậm xưng là cần có "kinh nghiệm, tinh tế". Nhưng các bạn đừng bận tâm nhiều, vì dạng 4 và dạng 5 thông thường chuyển đổi được cho nhau, ngoài cách phân tích nhân tử đặc biệt như trên chúng ta hoàn toàn có thể sử dụng phép biến đổi tương đương, nâng lũy thừa gần gũi. Dấu hiệu để nhận biết dạng 4 và dạng 5 có sự tương đồng với nhau.

Với dạng 4: $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} \pm \sqrt{k(x)}$ với $f(x) \cdot g(x) = h(x) \cdot k(x)$.

Với dạng 5: $au + bv = ab + uv$ có sự đặc biệt $au \cdot bv = ab \cdot uv$.

Sở dĩ phép phân tích [*] là duy nhất nên có thể ghép bất kỳ hai trong bốn biểu thức với nhau, yêu cầu là có tối thiểu một biểu thức chung. Nói chung hai dạng toán trên chỉ cần để ý một chút là sẽ thu được lời giải hết sức ngắn gọn, chỉ cần sử dụng kiến thức không vượt quá lớp 9 THCS. Ngoài ra quá trình tạo lập bài toán cũng khá đơn giản, chỉ cần thay thế bởi các biểu thức, đa thức, phân thức phức tạp sẽ thu được nhiều bài toán thú vị!

Mời quý độc giả xét tiếp các bài toán sau.

Bài toán 128. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 3x} + 2\sqrt{x+2} = 2x + \sqrt{x + \frac{6}{x} + 5}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+3} - \sqrt{\frac{(x+2)(x+3)}{x}} + 2\sqrt{x+2} - 2x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+3}{x}}(x - \sqrt{x+2}) + 2(\sqrt{x+2} - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \sqrt{x+2}) \left(\sqrt{\frac{x+3}{x}} - 2 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{x+2} \\ \sqrt{x+3} = 2\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x+3 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-1; 1; 2\}.$$

Đối chiếu điều kiện đi đến nghiệm $x = 1; x = 2$.

Bài toán 129. Giải phương trình $2\sqrt{\frac{24}{x} - x - 2} + 4\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{8-2x}}{x\sqrt{x}} + x\sqrt{x+6}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $0 < x \leq 4$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{(4-x)(x+6)}{x}} - \frac{8\sqrt{2(4-x)}}{x\sqrt{x}} &= x\sqrt{x+6} - 4\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{4-x}{x}} \left(\sqrt{x+6} - \frac{4\sqrt{2}}{x} \right) = x\sqrt{x+6} - 4\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow (x\sqrt{x+6} - 4\sqrt{2}) \left(2\sqrt{\frac{4-x}{x}} - x \right) &= 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{4-x}{x}} = x \vee x\sqrt{x+6} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

- $2\sqrt{\frac{4-x}{x}} = x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 4 \\ x^3 = 4(4-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 4 \\ (x-2)(x^2+2x+8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$
- $x\sqrt{x+6} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 4 \\ x^2(x+6) = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 4 \\ (x-2)(x+4)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài toán 130. Giải phương trình $\sqrt{3x^2+10x+3}+4=2\sqrt{x(x^2+3x)}+2\sqrt{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{1}{3} \leq x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{3x+1} + 4 &= 2|x|\sqrt{x+3} + \frac{2}{|x|}\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{3x+1} - 2x\sqrt{x+3} = \frac{2}{|x|}\sqrt{3x+1} - 4 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x+3} \left(\sqrt{3x+1} - 2|x| \right) &= \frac{2\sqrt{3x+1} - 4x}{|x|} \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+1} - 2|x| \right) \left(\sqrt{x+3} - \frac{2}{|x|} \right) = 0 \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

- $\sqrt{3x+1} = 2|x| \Leftrightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(4x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -\frac{1}{4}.$
- $|x|\sqrt{x+3} = 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -2.$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x = -\frac{1}{4}; x = 2$.

Bài toán 131. Giải phương trình $\sqrt{\frac{x^2+14x+48}{7}} - x\sqrt{8+x} + 3\sqrt{x} = 3\sqrt{\frac{6+x}{7x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{(x+6)(x+8)}{7}} - 3\sqrt{\frac{6+x}{7x}} + 3\sqrt{x} - x\sqrt{8+x} = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{6+x}{7}} \left(\sqrt{x+8} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) + x \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \sqrt{8+x} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{6+x}{7}} - x \right) \left(\sqrt{x+8} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{6+x}{7}} = x \vee \sqrt{x^2+8x} = 3 \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad \sqrt{\frac{6+x}{7}} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 7x^2 - x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-1)(7x+6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\checkmark \quad \sqrt{x^2+8x} = 3 \Leftrightarrow x^2+8x-9 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+9) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-9; 1\}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x = 1$.

Bài toán 132. Giải phương trình $\sqrt{(3x+1)(x^2+x+2)} - 2x\sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}} + \frac{4x}{2x-1} = 2\sqrt{\frac{x^2+x+2}{2x-1}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+1} \cdot \sqrt{x^2+x+2} - 2\sqrt{\frac{x^2+x+2}{2x-1}} &= 2x\sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}} - \frac{4x}{2x-1} \\ \sqrt{x^2+x+2} \left(\sqrt{3x+1} - \frac{2}{\sqrt{2x-1}} \right) &= \frac{2x}{\sqrt{2x-1}} \left(\sqrt{3x+1} - \frac{2}{\sqrt{2x-1}} \right) \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+x+2} - \frac{2x}{\sqrt{2x-1}} \right) \left(\sqrt{3x+1} - \frac{2}{\sqrt{2x-1}} \right) = 0 \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \circ \quad \sqrt{x^2+x+2} - \frac{2x}{\sqrt{2x-1}} = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+2} \cdot \sqrt{2x-1} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x^3 + x^2 + 3x - 2 = 4x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)(2x^2-x+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \\ \circ \quad \sqrt{3x+1} - \frac{2}{\sqrt{2x-1}} = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{6x^2-x-1} = 2 \Leftrightarrow 6x^2-x-5 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -\frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x = 1$.

Bài toán 133. Giải bất phương trình $\sqrt{4x^3-3x^2+12x-9} + 2 > \sqrt{x^3+3x} + 2\sqrt{\frac{4x-3}{x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{4}{3}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{4x-3} \cdot \sqrt{x^2+3} - \sqrt{x(x^2+3)} &> 2\sqrt{\frac{4x-3}{x}} - 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} (\sqrt{4x-3} - \sqrt{x}) > 2 \left(\sqrt{\frac{4x-3}{x}} - 1 \right) \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{4x-3} - \sqrt{x}) \left[\sqrt{x(x^2+3)} - 2 \right] \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x-4}{\sqrt{4x-3} + \sqrt{x}} \cdot \frac{x^3+3x-4}{\sqrt{x(x^2+3)} + 2} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1)^2(x^2+x+4) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2[(2x+1)^2+15] \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq \frac{4}{3}$.

Bài toán 134. Giải bất phương trình $\sqrt{5x^3+4x^2+5x+4}+3\sqrt{2x} \leq \sqrt{10+\frac{8}{x}}+3x\sqrt{1+x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{(5x+4)(x^2+1)}-3x\sqrt{1+x^2}+3\sqrt{2x}-\sqrt{\frac{2(5x+4)}{x}} \leq 0 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}(\sqrt{5x+4}-3x)+\sqrt{2x}\left(3-\frac{1}{x}\sqrt{5x+4}\right) \leq 0 \\ & \Leftrightarrow (x\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x})(\sqrt{5x+4}-3x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x^2+1)-2x}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x}} \cdot \frac{9x^2-5x-4}{\sqrt{5x+4}+3x} \geq 0 \\ & \Leftrightarrow x(x^3+x-2)(x-1)(9x+4) \geq 0 \Leftrightarrow x(9x+4)(x-1)^2(x^2+x+2) \geq 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Dễ thấy (*) nghiệm đúng với $x > 0$ nên bất phương trình ban đầu có nghiệm $x > 0$.

Bài toán 135. Giải bất phương trình $\sqrt{(x^2+3)(3x+1)}-\sqrt{x(x^2+3)}+2=2\sqrt{3+\frac{1}{x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2+3}\sqrt{3x+1}-\sqrt{x(x^2+3)}=2\sqrt{\frac{3x+1}{x}}-2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3}(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x})=\frac{2(\sqrt{3x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \\ & \Leftrightarrow (\sqrt{3x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x^3+3x}-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+1}=\sqrt{x} \\ \sqrt{x^3+3x}=2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1=x \\ x^3+3x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ (x-1)(x^2+x+4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ x=1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=1$.

Bài toán 136. Giải phương trình $\sqrt{2x+1}+3\sqrt{4x^2-2x+1}=3+\sqrt{8x^3+1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{4x^2-2x+1}-3=\sqrt{4x^2-2x+1}\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x+1} \\ & \Leftrightarrow 3(\sqrt{4x^2-2x+1}-1)=\sqrt{2x+1}(\sqrt{4x^2-2x+1}-1) \\ & \Leftrightarrow (\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{4x^2-2x+1}-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+1}=3 \\ \sqrt{4x^2-2x+1}=1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=9 \\ 4x^2-2x+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=8 \\ 2x(2x-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{1}{2}; 4\right\}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm như trên.

Bài toán 137. Giải phương trình $\sqrt{4x^2-1}+\sqrt{x}=\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{2x+1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1} \\ & \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} \cdot \sqrt{2x+1} - \sqrt{2x+1} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{2x-1} - \sqrt{x} \\ & \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}(\sqrt{2x-1}-1) = \sqrt{x}(\sqrt{2x-1}-1) \\ & \Leftrightarrow (\sqrt{2x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{2x-1}-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+1} = \sqrt{x} \\ \sqrt{2x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x = 1$.

Bài toán 138. Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x-8}=\sqrt{x^2-2x-6}+\sqrt{x-5}-\sqrt{x-3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 5$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2-2x-8}+\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-2x-6}+\sqrt{x-5} \\ & \Leftrightarrow x^2-2x-8+x-3+2\sqrt{(x^2-2x-8)(x-3)}=x^2-2x-6+x-5+2\sqrt{(x^2-2x-6)(x-5)} \\ & \Leftrightarrow x^2-x-11+2\sqrt{x^3-5x^2-2x+24}=x^2-x-11+2\sqrt{x^3-7x^2+4x+30} \\ & \Leftrightarrow \sqrt{x^3-5x^2-2x+24}=\sqrt{x^3-7x^2+4x+30} \\ & \Leftrightarrow x^3-5x^2-2x+24=x^3-7x^2+4x+30 \Leftrightarrow 2x^2+6x+6=0 \quad (1) \end{aligned}$$

Dễ thấy phương trình (1) vô nghiệm vì $\Delta = -12 < 0$. Kết luận phương trình đề bài vô nghiệm.

Bài toán 139. Giải phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-5x+6}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-4x+3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-1}+\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-3} \\ & \Leftrightarrow \sqrt{x-3}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x-1})=\sqrt{x-2}-\sqrt{x-1} \\ & \Leftrightarrow (\sqrt{x-2}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x-3}-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}=\sqrt{x-1} \\ \sqrt{x-3}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x=1 \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow x=4 \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện ta có nghiệm $x = 4$.

Bài toán 140. Giải phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{x^3-1}=\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x(x-1)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1} - \sqrt{x} \\
& \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1}(\sqrt{x-1}-1) = \sqrt{x}(\sqrt{x-1}-1) \\
& \Leftrightarrow (\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=1 \\ \sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x^2+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài toán 141. Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{2x + \frac{1}{x} + 1} = \sqrt{2x^2 + x + 1} + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \sqrt{x} - 1 = \sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{\frac{2x^2 + x + 1}{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = \sqrt{2x^2 + x + 1}(\sqrt{x} - 1) \\
& \Leftrightarrow (\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{x})(\sqrt{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 + x + 1} = \sqrt{x} \\ \sqrt{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 1 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1
\end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 142. Giải phương trình $x\sqrt{3x^3 + x^2 + 9x + 3} + \frac{4}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x^2 + 3} + 2\sqrt{x(3x+1)} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& x\sqrt{x^2 + 3} \cdot \sqrt{3x+1} - 2\sqrt{x^2 + 3} = 2\sqrt{x(3x+1)} - \frac{4}{\sqrt{x}} \\
& \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3}(x\sqrt{3x+1} - 2) = \frac{2}{\sqrt{x}}(x\sqrt{3x+1} - 2) \\
& \Leftrightarrow (x\sqrt{3x+1} - 2)\left(\sqrt{x^2 + 3} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{3x+1} = 2 & (1) \\ \sqrt{x^3 + 3x} = 2 & (2) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\circ (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3x^3 + x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)(3x^2 + 4x + 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\circ (2) \Leftrightarrow x^3 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 143. Giải phương trình $\sqrt{x^3 + 4x^2 + 5x + 6} + \frac{4}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x+3}}{x} + 2\sqrt{x(x^2 + x + 2)} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(x+3)(x^2 + x + 2)} - 2\sqrt{x(x^2 + x + 2)} = \frac{2\sqrt{x+3}}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} \\
& \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 2}(\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x}) = \frac{2}{x}(\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x})
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x}) \left(\sqrt{x^2+x+2} - \frac{2}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 2\sqrt{x} \\ x\sqrt{x^2+x+2} = 2 \end{cases}$$

Xét các khả năng sau xảy ra

$$\begin{aligned} \diamond \sqrt{x+3} = 2\sqrt{x} &\Leftrightarrow x+3 = 4x \Leftrightarrow x=1. \\ \diamond x\sqrt{x^2+x+2} = 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2(x^2+x+2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)(x^3+2x^2+2x+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 144. Giải phương trình $\sqrt{3x^3+3x^2+x+1}+6=3\sqrt{x(1+3x^2)}+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{(3x^2+1)(x+1)} - 2\sqrt{\frac{x+1}{x}} &= 3\sqrt{x(1+3x^2)} - 6 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \left(\sqrt{3x^2+1} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) &= 3 \left[3\sqrt{x(1+3x^2)} - 2 \right] \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} - 3\sqrt{x}) \left(\sqrt{3x^3+x} - 2 \right) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = 3\sqrt{x} \\ \sqrt{3x^3+x} = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 9x \\ 3x^3+x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 1 \\ (x-1)(3x^2+3x+4) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1}{8}; 1 \right\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 145. Giải phương trình $\sqrt{x^4+x^3+3x+3} + \frac{2}{\sqrt{x}} = \sqrt{x^3+3} + 2\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+1)(x^3+3)} - \sqrt{x^3+3} &= 2\sqrt{\frac{x+1}{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^3+3} (\sqrt{x+1} - 1) &= \frac{2}{\sqrt{x}} (\sqrt{x+1} - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = 1 \\ \sqrt{x^4+3x} = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp

$$\begin{aligned} \bullet \sqrt{x+1} = 1 &\Leftrightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow x=0. \\ \bullet \sqrt{x^4+3x} = 2 &\Leftrightarrow x^4+3x-4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3+x^2+x+4) = 0 \quad (1). \end{aligned}$$

Rõ ràng $x^3+x^2+x+4 > 0, \forall x > 0$ nên (1) có duy nhất nghiệm $x=1$.

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\sqrt{x(x+3)} - x - 2\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x} = 0.$
2. $\sqrt{3x} + \sqrt{\frac{x^2-1}{3x}} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}.$
3. $\sqrt{x+1} + \sqrt{\frac{x^2+6x+8}{x+1}} = \sqrt{x+4} + \sqrt{x+2}.$
4. $\sqrt{x(x+2)} + 1 = \sqrt{x} + \sqrt{2+x}.$
5. $\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^2+7x+6}{x}} - \sqrt{x+1} = \sqrt{x+6}.$
6. $\sqrt{2x^2+3x+1} + 3x\sqrt{3} \leq 3\sqrt{2x^2+x} + \sqrt{3x^2+3x}.$
7. $\sqrt{x} + \sqrt{\frac{3x+2}{x^2+1}} \leq \sqrt{\frac{3x+2}{x}} + \sqrt{x^2+1}.$
8. $\sqrt{2x^2+5x+3} + \sqrt{x} = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x^2+x}.$
9. $\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x^2+2x} = \frac{1}{\sqrt{x+3}} - \sqrt{x^2+5x+6}.$
10. $\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^2-1}{x}} = \sqrt{x^2+4x+3} + \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}.$
11. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1} = \sqrt{\frac{x^3+7}{x+3}} + \sqrt{\frac{x^3+7}{x+1}}.$
12. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{\frac{x^3+2}{2x+1}} + \sqrt{\frac{x^3+2}{2x-1}}.$
13. $\sqrt{3x-1} + \sqrt{x} = \sqrt{\frac{2x^3+1}{3x-1}} + \sqrt{2x^2+\frac{1}{x}}.$
14. $\sqrt{3x^2+5x+1} + \sqrt{2x-3} < \sqrt{x+1} + \sqrt{(3x+2)(2x-3)}.$
15. $\sqrt{x^2+5x+6} - x - 2 + \sqrt{x+2} = \sqrt{3+x}.$
16. $\sqrt{x} + \sqrt{\frac{2x^2-x+4}{x}} > \sqrt{3x+2} + \sqrt{\frac{2x^2-x+4}{3x+2}}.$
17. $\sqrt{x^2+7x+10} + 3\sqrt{x-1} > 3\sqrt{x^2+4x-5} + \sqrt{2+x}.$
18. $\sqrt{x(x+3)} + 4\sqrt{x} = 2x + 2\sqrt{x+3}.$
19. $\sqrt{x+3} + \sqrt{\frac{x^2+3x+4}{x+3}} \leq \sqrt{\frac{x^2+3x+4}{2x-1}} + \sqrt{2x-1}.$
20. $2\sqrt{x^2+x} - 3\sqrt{x+1} = 4\sqrt{x} - 6.$
21. $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} > \sqrt{x+\frac{2}{x}-1} + \sqrt{\frac{x^2-x+2}{x+1}}.$
22. $\sqrt{x^2+4x+3} + 2x^2 = x(\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x+1}).$
23. $6\sqrt{x^2+3x+2} + 2x > 3x\sqrt{x+1} + 4\sqrt{x+2}.$
24. $6\sqrt{x^2+3x+2} + 2x \leq 3x\sqrt{x} + 4\sqrt{3+x}.$

25. $\sqrt{x+1} + \sqrt{\frac{x-4}{x-1}} = \sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x+1}} + \sqrt{x^2-4x+3}$
26. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{\frac{x^3-1}{2x+1}} = \sqrt{x+\frac{1}{x}+1} + \sqrt{x(x-1)}$.
27. $6\sqrt{x} + \sqrt{x^2+4x+3} - 3\sqrt{x^2+3x} \geq 2\sqrt{x+1}$.
28. $\sqrt{\frac{x}{x^2+6x+5}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+5}} - \sqrt{\frac{1}{x}}$.
29. $\sqrt{x-1} - \sqrt{1+x} + \sqrt{\frac{x^2+3x+2}{x-1}} = \sqrt{2+x}$.
30. $\sqrt{2x-1} + 2\sqrt{x} = \sqrt{\frac{3x^3+1}{2x-1}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3x^3+1}{x}}$.
31. $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{\frac{x^2-2x+3}{x^2+1}} > \sqrt{x} + \sqrt{x+\frac{3}{x}-2}$.
32. $\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{2x-1} = \sqrt{\frac{x^3-x+3}{x^2+x+1}} + \sqrt{\frac{x^3-x+3}{2x-1}}$.
33. $\sqrt{x} + \sqrt{\frac{x^3+3x-4}{x}} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2+x+4}$.
34. $\sqrt{2x-1} + \sqrt{\frac{x^3+4x-5}{2x-1}} = \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2+x+5}$.
35. $\sqrt{2x^2+7x+3} + 2 < \sqrt{3+x} + 2\sqrt{1+2x}$.
36. $3\sqrt{x^2+7x+12} + 6 \leq 2\sqrt{4+x} + 9\sqrt{x+3}$.
37. $\sqrt{4-x} + 2\sqrt{3-x} \geq \sqrt{x^2-7x+12} + 2$.
38. $\sqrt{2x^3+x^2+4x+2} + 6 \leq 2\sqrt{2+x^2} + 3\sqrt{2x+1}$.
39. $3\sqrt{x^2+3x} - 4\sqrt{x+3} - 9\sqrt{x} + 12 > 0$.
40. $\sqrt{x^3+x^2+x+1} + 2 = \sqrt{x^2+1} + 2\sqrt{x+1}$.
41. $\sqrt{2x^3+x} + 6 > 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x^2+1}$.
42. $2\sqrt{(3x^2+2)(x+1)} + 12 < 3\sqrt{2+3x^2} + 8\sqrt{x+1}$.
43. $\sqrt{x+3} + 13\sqrt{x+5} < 13 + \sqrt{x^2+8x+15}$.
44. $\sqrt{x^3-1} - 3\sqrt{x^2+x+1} + 3 = \sqrt{x-1}$.
45. $\sqrt{3x^3+6x^2-x-2} + 6 = 3\sqrt{3x^2-1} + 2\sqrt{2+x}$.
46. $\sqrt{(x+2)(x^2+4)} + \sqrt{3x} - \sqrt{3x(x+2)} = \sqrt{x^2+4}$.
47. $2\sqrt{x^3+x^2+5x+5} + 3\sqrt{5x+2} = 3\sqrt{x^2+5} + 3\sqrt{5x+2}$.
48. $\sqrt{2x^3+5x^2+3x+2} + 2\sqrt{1+3x} > 2\sqrt{2x^2+x+1} + \sqrt{(3x+1)(2+x)}$.
49. $\sqrt{x^3+x^2+2x} + 3\sqrt{5x} = 3\sqrt{x^2+x+2} + x\sqrt{5}$.
50. $\sqrt{x^2+3x+2} + 8x > 2\sqrt{x^2+x} + 4\sqrt{x(2+x)}$.
51. $x = \sqrt{x^2+10x+21} - \sqrt{x+7} + x\sqrt{x+3}$.

$$52. \sqrt{x^2 + 23x + 60} - 3\sqrt{3 + x} + 21 \leq 7\sqrt{20 + x}.$$

$$53. x\sqrt{3x^2 + 4x + 1} + 4 > 2x\sqrt{1 + 3x} + 2\sqrt{1 + x}.$$

$$54. x\sqrt{2 + x} + \sqrt{x + 4} > \sqrt{x^2 + 6x + 8} + x.$$

$$55. \sqrt{x^4 + x^2 + 1} + 6x = 3x\sqrt{x^2 + x + 1} + 2\sqrt{x^2 - x + 1}.$$

$$56. 3\sqrt{x^2 + 8x + 7} + 2x \leq 6\sqrt{1 + x} + x\sqrt{x + 7}.$$

$$57. 6 + x\sqrt{2x^2 + 13x + 21} = 3x\sqrt{3 + x} + 2\sqrt{7 + 2x}.$$

$$58. 2\sqrt{x^2 + 3x + 2} + 5\sqrt{6 - x} \leq 2\sqrt{-x^2 + 5x + 6} + 5\sqrt{2 + x}.$$

$$59. \sqrt{x^2 - x - 6} + 3\sqrt{5 - x} = 3\sqrt{x - 3} + \sqrt{-x^2 + 3x + 10}.$$

$$60. \sqrt{x^3 + 2x^2 + 3x + 2} + 2 \geq 2\sqrt{x + 1} + \sqrt{x^2 + x + 2}.$$

$$61. x + 2 + 2\sqrt{2 - x} \leq 2\sqrt{x + 3} + \sqrt{-x^2 - x + 6}.$$

$$62. 2x^2 + \sqrt{x^3 + 1} = 2x\sqrt{x^2 - x + 1} + x\sqrt{1 + x}.$$

$$63. 2x\sqrt{x + 2} + \sqrt{1 + 3x} > 2x + \sqrt{3x^2 + 7x + 2}.$$

$$64. 3 + \sqrt{2x^2 + x - 1} = \frac{\sqrt{1 + x}}{x} + 3x\sqrt{2x - 1}.$$

$$65. x\sqrt{3x + 1} + \frac{2\sqrt{x + 5}}{x} = \sqrt{3x^2 + 16x + 5} + 2.$$

$$66. 3 + \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x + 2}}{x} + \sqrt{x^2 + 2x}.$$

$$67. 4 + \sqrt{x + \frac{3}{x}} + 4 = \frac{2\sqrt{x + 1}}{x} + 2\sqrt{x^2 + 3x}.$$

$$68. \sqrt{x^2 + 3x} - x + \sqrt{2x + 3} = \sqrt{2x + 9 + \frac{9}{x}}.$$

$$69. 2\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x + 1} = 2x + \frac{x + 1}{\sqrt{x}}.$$

$$70. 1 + \frac{2(x + 1)}{\sqrt{2x}} - \frac{2\sqrt{x + 1}}{x} = x\sqrt{\frac{x + 1}{2x}}.$$

$$71. 6 + 3\sqrt{\frac{x^2 + 2x}{x + 1}} = 9\sqrt{x} + 2\sqrt{1 + \frac{1}{1 + x}}.$$

$$72. 3\sqrt{x + 1} + 11\sqrt{x + 2} = 33 + \sqrt{x^2 + 3x + 2}.$$

$$73. \sqrt{2x^3 + 11x^2 + 6x + 5} + \frac{6}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + 3\sqrt{x(1 + x + x^2)}.$$

$$74. 2\sqrt{(7x^3 + 1)(x + 5)} + 2\sqrt{x} = x\sqrt{7x^3 + 1} + 4\sqrt{1 + \frac{5}{x}}.$$

$$75. \sqrt{\left(3x + \frac{2}{x} + 1\right)(x + 3)} + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{3x^2 + x + 2}}{x} + 2\sqrt{3 + x}.$$

Bài toán 146. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} = 1 + \sqrt[3]{x^2 + 3x + 2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x+1} - 1 &= \sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x+2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1} - 1 = \sqrt[3]{x+2} (\sqrt[3]{x+1} - 1) \\ \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+2} - 1)(\sqrt[3]{x+1} - 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x+2} = 1 \\ \sqrt[3]{x+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Đáp số $x = 0; x = -1$.

Bài toán 147. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2 + x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{x} &= \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1} (1 - \sqrt[3]{x}) = \sqrt[3]{x} (1 - \sqrt[3]{x}) \\ \Leftrightarrow (1 - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 1 \\ \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 0x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 148. Giải phương trình $\sqrt[4]{x+1} + \sqrt{x} = 1 + \sqrt[4]{x^3 + x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - 1 &= \sqrt[4]{x^3 + x^2} - \sqrt[4]{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = \sqrt[4]{x+1} (\sqrt{x} - 1) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt[4]{x+1} - 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt[4]{x+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

Bài toán 149. Giải phương trình $\sqrt[3]{(3x^3 - x - 1)(x + 7)} + 2 = \sqrt[3]{x^2 + 7x} + 2\sqrt[3]{3x^2 - \frac{1}{x} - 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(3x^3 - x - 1)(x + 7)} - 2\sqrt[3]{\frac{3x^3 - x - 1}{x}} &= \sqrt[3]{x^2 + 7x} - 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{3x^3 - x - 1}{x}} (\sqrt[3]{x^2 + 7x} - 2) &= \sqrt[3]{x^2 + 7x} - 2 \\ \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x^2 + 7x} - 2) \left(\sqrt[3]{\frac{3x^3 - x - 1}{x}} - 1 \right) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 + 7x} = 2 \\ \sqrt[3]{\frac{3x^3 - x - 1}{x}} = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 7x - 8 = 0 \\ 3x^3 - x - 1 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+8) = 0 \\ (x-1)(3x^2 + 3x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -8; x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -8; x = 1$.

Bài toán 150. Giải phương trình $\sqrt[3]{21x^3 + 25x^2 + 3x + 5} + 4 = 2\sqrt[3]{x(3x+5)} + 2\sqrt[3]{7x + \frac{1}{x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{3x+5} \cdot \sqrt[3]{7x^2+1} - 2\sqrt[3]{7x+\frac{1}{x}} = 2\sqrt[3]{x(3x+5)} - 4 \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{7x+\frac{1}{x}} \left[\sqrt[3]{x(3x+5)} - 2 \right] = 2 \left[\sqrt[3]{x(3x+5)} - 2 \right] \\ \Leftrightarrow & \left[\sqrt[3]{x(3x+5)} - 2 \right] \left(\sqrt[3]{7x+\frac{1}{x}} - 2 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x(3x+5)} = 2 \\ \sqrt[3]{7x+\frac{1}{x}} = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3x^2 + 5x - 8 = 0 \\ 7x^2 - 8x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(3x+8) = 0 \\ (x-1)(7x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{8}{3}; \frac{1}{7}; 1 \right\} \end{aligned}$$

Vậy phương trình ban đầu có ba nghiệm, $S = \left\{ -\frac{8}{3}; \frac{1}{7}; 1 \right\}$.

Bài toán 151. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+1} + 2\sqrt[3]{x^2-x+1} = 2\sqrt[3]{x^3-1} + 1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{x+1} - 1 = 2\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{x^2-x+1} - 2\sqrt[3]{x^2-x+1} \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{x+1} - 1 = 2\sqrt[3]{x^2-x+1} (\sqrt[3]{x+1} - 1) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+1} - 1) (2\sqrt[3]{x^2-x+1} - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} = 1 \\ 2\sqrt[3]{x^2-x+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ 4x^2-4x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (2x-1)^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x=0 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài toán 152. Giải phương trình $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3x-2} + \sqrt[3]{x(3x-2)} = -1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Phương trình đã cho đưa về dạng

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{x} + 1 + \sqrt[3]{3x-2} (\sqrt[3]{x} + 1) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x} + 1) (\sqrt[3]{3x-2} + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt[3]{x} = -1 \\ \sqrt[3]{3x-2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 3x-2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm $x = -1; x = \frac{1}{3}$.

Bài toán 153. Giải phương trình $(\sqrt[3]{x+2} - 1)^2 + 2\sqrt[3]{x^2+1} = \sqrt[3]{(x^2+1)(x+2)} + 1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{(x+2)^2} - 2\sqrt[3]{x+2} + 2\sqrt[3]{x^2+1} = \sqrt[3]{(x^2+1)(x+2)} \\ & \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+2}(\sqrt[3]{x+2} - 2) = \sqrt[3]{x^2+1}(\sqrt[3]{x+2} - 2) \\ & \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+2} - 2)(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x^2+1}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x+2} = 2 \\ \sqrt[3]{x+2} = \sqrt[3]{x^2+1} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=8 \\ x^2-x-1=0 \end{cases} \Rightarrow x=6; x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}; x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm $x=6; x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}; x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Bài toán 154. Giải phương trình $2\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt[3]{(2x+1)(x^2-4)} + \sqrt[3]{x^2-4} = 2\sqrt[3]{2x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{2x+1}(2\sqrt[3]{2x+1} - \sqrt[3]{x^2-4}) = 2\sqrt[3]{2x+1} - \sqrt[3]{x^2-4} \\ & \Leftrightarrow (2\sqrt[3]{2x+1} - \sqrt[3]{x^2-4})(\sqrt[3]{2x+1} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8(2x+1) = x^2 - 4 \\ 2x+1 = 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16x + 12 = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 8 - 2\sqrt{13}; x = 8 + 2\sqrt{13}; x = 0 \end{aligned}$$

Vậy phương trình ban đầu có ba cặp nghiệm $x = 8 - 2\sqrt{13}; x = 8 + 2\sqrt{13}; x = 0$.

Bài toán 155. Giải phương trình

$$(\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x^2+3x+2})^2 + 9 = (\sqrt[3]{x^2+3x+2} - 3)^2 + 3\sqrt[3]{x^2+x+1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Đặt $\sqrt[3]{x^2+x+1} = a; \sqrt[3]{x^2+3x+2} = b$, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & (a-b)^2 + 9 = (b-3)^2 + 3a \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + 9 = b^2 - 6b + 9 + 3a \\ & \Leftrightarrow a^2 - 2ab = 3a - 6b \Leftrightarrow a(a-2b) = 3(a-2b) \Leftrightarrow (a-3)(a-2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 2b \end{cases} \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad a = 3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2+x+1} = 3 \Leftrightarrow x^2+x-26 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{105}}{2}; x = \frac{-1-\sqrt{105}}{2}.$$

$$\checkmark \quad a = 2b \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2+x+1} = 2\sqrt[3]{x^2+3x+2} \Leftrightarrow x^2+x+1 = 8(x^2+3x+2)$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 + 23x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-23+\sqrt{109}}{14}; x = \frac{-23-\sqrt{109}}{14}.$$

Kết luận phương trình ban đầu có 4 nghiệm $x = \frac{-23+\sqrt{109}}{14}; x = \frac{-23-\sqrt{109}}{14}; x = \frac{-1+\sqrt{105}}{2}; x = \frac{-1-\sqrt{105}}{2}$.

Bài toán 156. Giải phương trình $3\sqrt[3]{(x^2+1)^2} + 4\sqrt[3]{x+27} = \sqrt[3]{x^2+1}(\sqrt[3]{x+27} + 12) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Đặt $\sqrt[3]{x^2+1} = a; \sqrt[3]{x+27} = b$, phương trình đã cho trở thành

$$3a^2 + 4b = a(b+12) \Leftrightarrow 3a^2 - ab + 4b - 12a = 0 \Leftrightarrow a(3a-b) + 4(b-3a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-4)(3a-b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ 3a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x^2+1} = 4 \\ 3\sqrt[3]{x^2+1} = \sqrt[3]{x+27} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=64 \\ 27(x^2+1)=x+27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=63 \\ 27x^2-x=0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{ -3\sqrt{7}; 3\sqrt{7}; 0; \frac{1}{27} \right\}$$

Kết luận tập nghiệm $S = \left\{ -3\sqrt{7}; 3\sqrt{7}; 0; \frac{1}{27} \right\}$.

Bài toán 157. Giải phương trình $2\sqrt[3]{(x+1)^2} + 3\sqrt[3]{x^2-x+1} = 2\sqrt[3]{x^3+1} + 3\sqrt[3]{x+1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Đặt $\sqrt[3]{x+1} = u; \sqrt[3]{x^2-x+1} = v$, phương trình đã cho trở thành

$$2u^2 + 3v = 2uv + 3u \Leftrightarrow 2u(u-v) = 3(u-v) \Leftrightarrow (u-v)(2u-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ 2u=3 \end{cases}$$

- $u=v \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{x^2-x+1} \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=0; x=2$.
- $2u=3 \Leftrightarrow 8(x+1)=27 \Leftrightarrow x=\frac{19}{8}$.

Vậy phương trình đề bài có các nghiệm $x=0; x=2; x=\frac{19}{8}$.

Bài toán 158. Giải phương trình $\sqrt[3]{7x^5+49x^3+x^2+7} + 2\sqrt[3]{6+\frac{1}{x}} = 2\sqrt[3]{7x^2+\frac{1}{x}} + \sqrt[3]{(x^2+7)(6x+1)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[3]{x^2+7} \cdot \sqrt[3]{7x^3+1} - \sqrt[3]{(x^2+7)(6x+1)} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \left(\sqrt[3]{7x^3+1} - \sqrt[3]{6x+1} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2+7} \left(\sqrt[3]{7x^3+1} - \sqrt[3]{6x+1} \right) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \left(\sqrt[3]{7x^3+1} - \sqrt[3]{6x+1} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x^2+7} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) \left(\sqrt[3]{7x^3+1} - \sqrt[3]{6x+1} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+7x=8 \\ 7x^3+1=6x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2+x+8)=0 \\ x(7x^2-6)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ 0; 1; \sqrt{\frac{6}{7}}; -\sqrt{\frac{6}{7}} \right\}$$

Kết luận phương trình đã cho có bốn nghiệm $S = \left\{ 0; 1; \sqrt{\frac{6}{7}}; -\sqrt{\frac{6}{7}} \right\}$.

Bài toán 159. Giải phương trình $\sqrt[3]{(2x-1)(5x+3)} - 2\sqrt[3]{x(2x-1)} + 2 = \sqrt[3]{5+\frac{3}{x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{(2x-1)(5x+3)} - \sqrt{\frac{5x+3}{x}} = 2\sqrt[3]{x(2x-1)} - 2 \\ & \Leftrightarrow \sqrt[3]{5x+3} \left(\sqrt[3]{2x-1} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) = 2\sqrt[3]{x} \left(\sqrt[3]{2x-1} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) \\ & \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2x-1} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) \left(\sqrt[3]{5x+3} - 2\sqrt[3]{x} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2x^2-x} = 1 \\ \sqrt[3]{5x+3} = 2\sqrt[3]{x} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-x-1=0 \\ 5x+3=8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x+1)=0 \\ 3x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}; x=1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x = -\frac{1}{2}; x=1$.

Bài toán 160. Giải phương trình $\sqrt[3]{7x^3+x^2+\frac{7}{x}+49} - 2\sqrt[3]{x(7x+1)} + 4 = 2\sqrt[3]{x+\frac{7}{x^2}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{(7x+1)\left(x^2+\frac{7}{x}\right)} - 2\sqrt[3]{x(7x+1)} = 2\sqrt[3]{x+\frac{7}{x^2}} - 4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x(7x+1)} \left(\sqrt[3]{\frac{x^3+7}{x^2}} - 2 \right) = 2 \left(\sqrt[3]{x+\frac{7}{x^2}} - 2 \right) \\ & \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x+\frac{7}{x^2}} - 2 \right) \left[\sqrt[3]{x(7x+1)} - 2 \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{7}{x^2}=8 \\ 7x^2+x=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-8x^2+7=0 \\ 7x^2+x-8=0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2-7x-7)=0 \\ (x-1)(7x+8)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1; x=-\frac{8}{7}; x=\frac{7+\sqrt{77}}{2}; x=\frac{7-\sqrt{77}}{2} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có các nghiệm $x=1; x=-\frac{8}{7}; x=\frac{7+\sqrt{77}}{2}; x=\frac{7-\sqrt{77}}{2}$.

Bài toán 161. Giải phương trình $1 + \sqrt[3]{\frac{2x^2-1}{x} \cdot \frac{2x-1}{x}} = \sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2-\frac{1}{x^2}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{2x-1} \cdot \sqrt[3]{\frac{2x^2-1}{x^2}} - \sqrt[3]{2x-1} = \sqrt[3]{2-\frac{1}{x^2}} - 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x-1} \left(\sqrt[3]{2-\frac{1}{x^2}} - 1 \right) = \sqrt[3]{2-\frac{1}{x^2}} - 1 \\ & \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2-\frac{1}{x^2}} - 1 \right) \left(\sqrt[3]{2x-1} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\frac{1}{x^2}=1 \\ 2x-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ 2x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\} \end{aligned}$$

Kết luận tập nghiệm $S = \{-1; 1\}$.

Bài toán 162. Giải phương trình $\sqrt[3]{18x^2-11x+1} + \sqrt[3]{81x^2-1} - 2 = 2\sqrt[3]{\frac{9x+1}{2x-1}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{9x-1} \cdot \sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{9x-1} \cdot \sqrt[3]{9x+1} &= 2\sqrt[3]{\frac{9x+1}{2x-1}} + 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{9x-1} \left(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{9x+1} \right) &= \frac{2}{\sqrt[3]{2x-1}} \left(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{9x+1} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{9x-1} - \frac{2}{\sqrt[3]{2x-1}} \right) \left(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{9x+1} \right) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{18x^2-11x+1} = 2 \\ \sqrt[3]{1-2x} = \sqrt[3]{9x+1} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 18x^2-11x-7=0 \\ 1-2x=9x+1 \end{cases} &\Leftrightarrow x=0; x=-\frac{7}{18}; x=1 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x = -\frac{7}{18}; x = 1$.

Bài toán 163. Giải phương trình $\sqrt[3]{21x^2 + \frac{5}{x^2} + 38} - 2\sqrt[3]{3x^3 + 5x} + 4\sqrt[3]{2x^3 - x^2} = 2\sqrt[3]{14x^2 - 7x - \frac{1}{x} + 2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{3x^2+5}{x}} \cdot \sqrt[3]{\frac{7x^2+1}{x}} - 2\sqrt[3]{3x+\frac{5}{x}} \cdot \sqrt[3]{x^2} &= 2\sqrt[3]{7x+\frac{1}{x}} \cdot \sqrt[3]{2x-1} - 4\sqrt[3]{2x^3-x^2} \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x+\frac{5}{x}} \left(\sqrt[3]{7x+\frac{1}{x}} - 2\sqrt[3]{x^2} \right) &= 2\sqrt[3]{2x-1} \left(\sqrt[3]{7x+\frac{1}{x}} - 2\sqrt[3]{x^2} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{3x+\frac{5}{x}} - 2\sqrt[3]{2x-1} \right) \left(\sqrt[3]{7x+\frac{1}{x}} - 2\sqrt[3]{x^2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+5=8x(2x-1) \\ 7x^2+1=8x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 13x^2-8x-5=0 \\ 7x^2-8x+1=0 \end{cases} \Rightarrow x=1; x=\frac{1}{7}; x=-\frac{5}{13} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có các nghiệm $x = 1; x = \frac{1}{7}; x = -\frac{5}{13}$.

Bài toán 164. Giải phương trình $\sqrt[3]{9x^2-4} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^2-x}} = 2\sqrt[3]{\frac{3x-2}{x-1}} + \sqrt[3]{3+\frac{2}{x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \notin \{0; 1\}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{3x-2} \cdot \sqrt[3]{3x+2} - 2\sqrt[3]{\frac{3x-2}{x-1}} &= \sqrt[3]{\frac{3x+2}{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x-1}} \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x-2} \left(\sqrt[3]{3x+2} - \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}} \right) &= \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \left(\sqrt[3]{3x+2} - \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{3x-2} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) \left(\sqrt[3]{3x+2} - \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}} \right) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x(3x-2)} = 1 \\ \sqrt[3]{(3x+2)(x-1)} = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(3x-2)=1 \\ (3x+2)(x-1)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-2x-1=0 \\ 3x^2-x-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(3x+1)=0 \\ (x-2)(3x+5)=0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; 1; 2\right\}$$

Đổi chiều điều kiện thu được tập nghiệm là $S = \left\{-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; 2\right\}$.

Bài toán 165. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2+7x} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x}} - \sqrt[3]{1+7x+\frac{7}{x}+49} = 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{x^2+7x} - \sqrt[3]{1+7x+\frac{7}{x}+49} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x}} - 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+7} \cdot \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+7} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}+7} + 2\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x}} - 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+7} \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\frac{1}{x}+7} \right) + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}+7} - \sqrt[3]{x} \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x+7} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\frac{1}{x}+7} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x^2+7x} = 2 \\ \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{7x+1} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+7x-8=0 \\ x^2-7x-1=0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{-8; 1; \frac{7+\sqrt{53}}{2}; \frac{7-\sqrt{53}}{2}\right\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình có tập nghiệm $x \in \left\{-8; 1; \frac{7+\sqrt{53}}{2}; \frac{7-\sqrt{53}}{2}\right\}$.

Bài toán 166. Giải phương trình $\sqrt[3]{2x^2+2x+1+\frac{1}{x}} + \sqrt[3]{3x+2} = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{6x^2+4x+3+\frac{2}{x}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{(x+1)\left(2x+\frac{1}{x}\right)} + \sqrt[3]{3x+2} = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{(3x+2)\left(2x+\frac{1}{x}\right)} \\ & \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+\frac{1}{x}} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{3x+2} \right) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{3x+2} \\ & \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{3x+2} \right) \left(\sqrt[3]{2x+\frac{1}{x}} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=3x+2 \\ 2x+\frac{1}{x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=-1 \\ 2x^2-x+1=0 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có duy nhất nghiệm $x = -\frac{1}{2}$.

Bài toán 167. Giải phương trình $\sqrt[3]{2x^2+6x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x(2x-1)}} - 2 = \sqrt[3]{\frac{2x+6}{2x-1}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \notin \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{2x+6} \cdot \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\frac{2x+6}{2x-1}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x(2x-1)}} - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{2x+6} \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} \right) + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} - \sqrt[3]{x} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt[3]{2x+6} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{2x+6} \cdot \sqrt[3]{x} = 2 \\ \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{2x-1} = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x(x+3) = 4 \\ x(2x-1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+4) = 0 \\ (x-1)(2x+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{-4; -\frac{1}{2}; 1\right\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm, $S = \left\{-4; -\frac{1}{2}; 1\right\}$.

Bài toán 168. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2 + 2x + \frac{4}{x} + 2} + \sqrt[3]{6x^2} = \sqrt[3]{3(x^2 + 2x)} + \sqrt[3]{2x^2 + 4} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{\left(x+2\right)\left(x+\frac{2}{x}\right)} - \sqrt[3]{3x(x+2)} = \sqrt[3]{2x^2+4} - \sqrt[3]{6x^2} \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{x+\frac{2}{x}} \left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2x} \right) = \sqrt[3]{2x} \left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2x} \right) \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2x} \right) \left(\sqrt[3]{x+\frac{2}{x}} - \sqrt[3]{3x} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x+2 = 2x \\ x+\frac{2}{x} = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-1; 1; 2\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 169. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2 + 3x} + \sqrt[3]{3x^2 + x + 9 + \frac{3}{x}} = \sqrt[3]{3x^2 + 4x + 1} + \sqrt[3]{x^2 + 3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{x^2 + 3x} - \sqrt[3]{3x^2 + 4x + 1} + \sqrt[3]{3x^2 + x + 9 + \frac{3}{x}} - \sqrt[3]{x^2 + 3} = 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{x+3} \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3x+1} \right) - \sqrt[3]{x+\frac{3}{x}} \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3x+1} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt[3]{x+3} - \sqrt[3]{x+\frac{3}{x}} \right) \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3x+1} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = x+\frac{3}{x} \\ x = 3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm như trên.

Bài toán 170. Giải phương trình $\sqrt[3]{4x^2+6x} + \sqrt[3]{5x^2-3x-\frac{12}{x}} + 20 = \sqrt[3]{2x^2+8} + \sqrt[3]{10x^2+9x-9}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{4x^2+6x} - \sqrt[3]{10x^2+9x-9} + \sqrt[3]{5x^2-3x-\frac{12}{x}} + 20 = \sqrt[3]{2x^2+8} = 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{2x+3} \left(\sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{5x-3} \right) + \sqrt[3]{x+\frac{4}{x}} \left(\sqrt[3]{5x-3} - \sqrt[3]{2x} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt[3]{2x+3} - \sqrt[3]{x+\frac{4}{x}} \right) \left(\sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{5x-3} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x+3 = x+\frac{4}{x} \\ 2x = 5x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = \frac{4}{x} \\ 3x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4=0 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-4; 1\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm như trên.

Bài toán 171. Giải phương trình $\frac{\sqrt[3]{x^2+2x+\frac{12}{x}}+6+\sqrt[3]{(2x^2+1)(x+6)}}{\sqrt[3]{2x^3+12x+x+\frac{6}{x}}+\sqrt[3]{x^2+8x+12}}=1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$; $\sqrt[3]{2x^3+12x+x+\frac{6}{x}}+\sqrt[3]{x^2+8x+12} \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{x^2+2x+\frac{12}{x}}+6-\sqrt[3]{x^2+8x+12}+\sqrt[3]{(2x^2+1)(x+6)} = \sqrt[3]{2x^3+12x+x+\frac{6}{x}} \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{(x+2)\left(x+\frac{6}{x}\right)} - \sqrt[3]{(x+2)(x+6)} = \sqrt[3]{(2x^2+1)\left(x+\frac{6}{x}\right)} - \sqrt[3]{(2x^2+1)(x+6)} \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{x+\frac{6}{x}} \left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2x^2+1} \right) = \sqrt[3]{2x^2+1} \left(\sqrt[3]{x+\frac{6}{x}} - \sqrt[3]{x+6} \right) \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{2x^2+1} \right) \left(\sqrt[3]{x+\frac{6}{x}} - \sqrt[3]{x+6} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x+2 = 2x^2+1 \\ x+\frac{6}{x} = x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-x-1=0 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ 1; -\frac{1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 172. Giải phương trình $\sqrt[3]{2x^2+2x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x^3+x} = \sqrt[3]{2x^4+2x^2-x-\frac{1}{x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\left(\sqrt[3]{2x^2-\frac{1}{x}}-\sqrt[3]{x}\right)-\sqrt[3]{x^2+1}\left(\sqrt[3]{2x^2-\frac{1}{x}}-\sqrt[3]{x}\right)=0 \\
& \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}-\sqrt[3]{x^2+1}\right)\left(\sqrt[3]{2x^2-\frac{1}{x}}-\sqrt[3]{x}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\frac{1}{x}=x^2+1 \\ 2x^2-\frac{1}{x}=x \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=1 \\ 2x^3-x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (x-1)(2x^2+x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1
\end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 173. Giải phương trình $\sqrt[3]{6x-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+2}+\sqrt[3]{x(3x^2+1)}=\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{6x^3-x-\frac{1}{x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \sqrt[3]{6x-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+2}-\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt[3]{6x^3-x-\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{x(3x^2+1)}=0 \\
& \Leftrightarrow \sqrt[3]{3+\frac{1}{x}}\left(\sqrt[3]{2x-\frac{1}{x}}-\sqrt[3]{x}\right)-\sqrt[3]{3x^2+1}\left(\sqrt[3]{2x-\frac{1}{x}}-\sqrt[3]{x}\right)=0 \\
& \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{3+\frac{1}{x}}-\sqrt[3]{3x^2+1}\right)\left(\sqrt[3]{2x-\frac{1}{x}}-\sqrt[3]{x}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3+\frac{1}{x}=3x^2+1 \\ 2x-\frac{1}{x}=x \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3-2x-1=0 \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(3x^2+3x+1)=0 \\ x \in \{-1;1\} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-1;1\}
\end{aligned}$$

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm như trên.

Bài toán 174. Giải phương trình $\sqrt[3]{15x^2-x-6}+2\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}-\sqrt[3]{10x-\frac{3}{x}+1}=2\sqrt[3]{3-\frac{2}{x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \sqrt[3]{15x^2-x-6}-\sqrt[3]{10x-\frac{3}{x}+1}-2\sqrt[3]{3-\frac{2}{x}}+2\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}=0 \\
& \Leftrightarrow \sqrt[3]{5x+3}\left(\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt[3]{2-\frac{1}{x}}\right)-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt[3]{2-\frac{1}{x}}\right)=0 \\
& \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{5x+3}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt[3]{2-\frac{1}{x}}\right)=0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3=3x-2 \\ 3x-2=2-\frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=-5 \\ 3x+\frac{1}{x}=4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{5}{2}; \frac{1}{3}; 1\right\}
\end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm, $S = \left\{ -\frac{5}{2}; \frac{1}{3}; 1 \right\}$.

Bài toán 175. Giải phương trình $\sqrt[3]{2x^3 - x^2 + 14x - 7} + 2 = x\sqrt[3]{x^2 + 7} + \frac{2\sqrt[3]{2x-1}}{x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{2x^3 - x^2 + 14x - 7} - x\sqrt[3]{x^2 + 7} - \frac{2\sqrt[3]{2x-1}}{x} + 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{x^2 + 7} \left(\sqrt[3]{2x-1} - x \right) - \frac{2}{x} \left(\sqrt[3]{2x-1} - x \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt[3]{x^2 + 7} - \frac{2}{x} \right) \left(\sqrt[3]{2x-1} - x \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 + 7 = \frac{8}{x^3} \\ 2x - 1 = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^5 + 7x^3 - 8 = 0 & (1) \\ x^3 - 2x + 1 = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp

- Để ý rằng nếu $x \leq 0 \Rightarrow x^5 + 7x^3 = x^3(x^2 + 7) \leq 0$, khi đó (1) vô nghiệm.

$$\text{Xét trường hợp } x > 0 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow (x-1)(x^4 + x^3 + 7x^2 + 7x + 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^4 + x^3 + 7x^2 + 7x + 8 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$x^4 + x^3 + 7x^2 + 7x + 8 > 0, \forall x > 0$ nên (3) vô nghiệm. Ta thu được nghiệm $x = 1$.

- (2) $\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; 1 \right\}$.

Kết luận phương trình ban đầu có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; 1 \right\}$.

Nhận xét.

Đối với bài toán 175, phương trình (1) có thể xử lý theo các phương cách khác (sử dụng tính chất đơn điệu hàm số hoặc đánh giá) như sau

1. Nếu $x < 1 \Rightarrow x^5 + 7x^3 < 8$ và $x > 1 \Rightarrow x^5 + 7x^3 > 8$. Cả hai trường hợp (1) đều vô nghiệm.
Nếu $x = 1$ thì (1) nghiệm đúng, do đó ta thu được nghiệm $x = 1$.
2. Xét hàm số $f(x) = x^5 + 7x^3, x \in \mathbb{R}$ ta có $f'(x) = 5x^4 + 7x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số liên tục, đồng biến. Phương trình (1) trở thành $f(x) = f(1) \Leftrightarrow x = 1$.

Bài toán 176. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^3 - 1} + 3\sqrt[3]{x} = 3\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + \sqrt[3]{x^2 - x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{x^3 - 1} - 3\sqrt[3]{x^2 + x + 1} = \sqrt[3]{x^2 - 1} - 3\sqrt[3]{x} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2 + x + 1} \left(\sqrt[3]{x-1} - 3 \right) = \sqrt[3]{x} \left(\sqrt[3]{x-1} - 3 \right) \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt[3]{x-1} - 3 \right) \left(\sqrt[3]{x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} = 3 \\ \sqrt[3]{x^2 + x + 1} = \sqrt[3]{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 27 \\ x^2 + x + 1 = x \end{cases} \Leftrightarrow x = 28 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = 28$.

Bài toán 177. Giải phương trình $\sqrt[3]{9x^2+9x-10} + \frac{2(2x-1)}{\sqrt[3]{x}} = (2x-1)\sqrt[3]{3+\frac{5}{x}} + 2\sqrt[3]{3x^2-2x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{9x^2+9x-10} - 2\sqrt[3]{3x^2-2x} + \frac{2(2x-1)}{\sqrt[3]{x}} - (2x-1)\sqrt[3]{3+\frac{5}{x}} = 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{3x-2}(\sqrt[3]{3x+5} - 2\sqrt[3]{x}) - \frac{2x-1}{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{3x+5} - 2\sqrt[3]{x}) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt[3]{3x-2} - \frac{2x-1}{\sqrt[3]{x}}\right)(\sqrt[3]{3x+5} - 2\sqrt[3]{x}) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x(3x-2) = (2x-1)^3 \\ 3x+5 = 8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3 - 15x^2 + 8x - 1 = 0 \\ x = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (x-1)(8x^2 - 7x + 1) = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{7+\sqrt{17}}{16}; \frac{7-\sqrt{17}}{16}\right\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được tập nghiệm $S = \left\{1; \frac{7+\sqrt{17}}{16}; \frac{7-\sqrt{17}}{16}\right\}$.

Bài toán 178. Giải bất phương trình $\sqrt[3]{5x^3-4x^2+5x-4} + \sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} \geq \sqrt[3]{x+\frac{1}{x}} \geq \sqrt[3]{(5x-4)(x-1)} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{5x^3-4x^2+5x-4} - \sqrt[3]{(5x-4)(x-1)} + \sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} - \sqrt[3]{x+\frac{1}{x}} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{5x-4}(\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x-1}) - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x-1}) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt[3]{5x-4} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)(\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x-1}) \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Dễ thấy rằng $x^2+1-(x-1) = x^2-x+2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $\sqrt[3]{x^2+1} > \sqrt[3]{x-1} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{x-1} > 0$.

Do đó (1) trở thành

$$\begin{aligned} (1) & \Leftrightarrow \sqrt[3]{5x-4} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{5x^2-4x-1}}{\sqrt[3]{x}} \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (5x^2-4x-1)x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -\frac{1}{4} \leq x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left[-\frac{1}{4}; 0\right) \cup [1; +\infty)$.

Bài toán 179. Giải bất phương trình $\sqrt[3]{8x^3 - 6x^2 + 4x - 3} + 1 \geq \sqrt[3]{\frac{2x^2 + 1}{2x - 1}} + \sqrt[3]{8x^2 - 10x + 3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x \neq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{8x^3 - 6x^2 + 4x - 3} - \sqrt[3]{8x^2 - 10x + 3} &\geq \sqrt[3]{\frac{2x^2 + 1}{2x - 1}} - 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{4x - 3} \left(\sqrt[3]{2x^2 + 1} - \sqrt[3]{2x - 1} \right) &\geq \frac{1}{\sqrt[3]{2x - 1}} \left(\sqrt[3]{2x^2 + 1} - \sqrt[3]{2x - 1} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{4x - 3} - \frac{1}{\sqrt[3]{2x - 1}} \right) \left(\sqrt[3]{2x^2 + 1} - \sqrt[3]{2x - 1} \right) &\geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $2x^2 + 1 - (2x - 1) = 2x^2 - 2x + 2 = \frac{(2x - 1)^2 + 3}{2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{4x - 3} - \frac{1}{\sqrt[3]{2x - 1}} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{8x^2 - 10x + 3} - 1}{\sqrt[3]{2x - 1}} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq 1 \\ (2x - 1)(8x^2 - 10x + 2) \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} \\ (2x - 1)(x - 1)(4x - 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận bất phương trình có tập nghiệm $S = \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right) \cup [1; +\infty)$.

Bài toán 180. Giải bất phương trình $\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} + \sqrt[3]{3x + 6} \leq \sqrt[3]{6x + 3} + \sqrt[3]{2x^2 + x + 4 + \frac{2}{x}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x \neq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} - \sqrt[3]{2x^2 + x + 4 + \frac{2}{x}} &\leq \sqrt[3]{6x + 3} - \sqrt[3]{3x + 6} \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2 + 2} \left(\sqrt[3]{x + 2} - \sqrt[3]{2 + \frac{1}{x}} \right) &\leq \sqrt[3]{3x} \left(\sqrt[3]{x + 2} - \sqrt[3]{2 + \frac{1}{x}} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x^2 + 2} - \sqrt[3]{3x} \right) \left(\sqrt[3]{x + 2} - \sqrt[3]{2 + \frac{1}{x}} \right) &\leq 0 \end{aligned}$$

Xét các trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \leq 0 \\ x + 2 \geq 2 + \frac{1}{x} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(x - 2) \leq 0 \\ \frac{x^2 - 1}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 < x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ x \leq -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x + 2 \leq 2 + \frac{1}{x} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)(x - 2) \geq 0 \\ \frac{x^2 - 1}{x} \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = (-\infty; 1] \cup (0; 2]$.

Bài toán 181. Giải bất phương trình $\sqrt[3]{3x^3 + 14x + \frac{15}{x}} + 2\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} = \sqrt[3]{3x^3 - 3x^2 + 5x - 5} + 2\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x^2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $2x \neq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{3x^3 + 14x + \frac{15}{x}} - \sqrt[3]{3x^3 - 3x^2 + 5x - 5} - 2\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x^2}} + 2\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} = 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{3x^2 + 5} \left(\sqrt[3]{x + \frac{3}{x}} - \sqrt[3]{x-1} \right) - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \left(\sqrt[3]{x + \frac{3}{x}} - \sqrt[3]{x-1} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt[3]{3x^2 + 5} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) \left(\sqrt[3]{x + \frac{3}{x}} - \sqrt[3]{x-1} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x(3x^2 + 5) = 8 \\ x + \frac{3}{x} = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3 + 5x - 8 = 0 \\ 3 = -x \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ -3; -\frac{8}{3}; 1 \right\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 182. Giải phương trình $\sqrt[3]{(3-2x)(x^2+4)} + \sqrt[3]{2 + \frac{3}{x^2}} = \sqrt[3]{x + \frac{4}{x}} + \sqrt[3]{6x + \frac{9}{x} - 4x^2 - 6} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $2x \neq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{(3-2x)(x^2+4)} - \sqrt[3]{6x + \frac{9}{x} - 4x^2 - 6} + \sqrt[3]{2 + \frac{3}{x^2}} - \sqrt[3]{x + \frac{4}{x}} = 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{3-2x} \left(\sqrt[3]{x^2+4} - \sqrt[3]{2x + \frac{3}{x}} \right) - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \left(\sqrt[3]{x^2+4} - \sqrt[3]{2x + \frac{3}{x}} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt[3]{3-2x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) \left(\sqrt[3]{x^2+4} - \sqrt[3]{2x + \frac{3}{x}} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(3-2x) = 1 \\ x^2 + 4 = 2x + \frac{3}{x} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 = 0 \\ x^3 - 2x^2 - 4x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x-1) = 0 \\ (x-1)(x^2 - x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 183. Giải phương trình $\sqrt[3]{2x+1} \cdot \sqrt{x+3} + \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x+3} + \sqrt[3]{2x+1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{2x+1} \cdot \sqrt{x+3} - \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x+3} - \sqrt[3]{x} \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{2x+1} (\sqrt{x+3} - 1) = \sqrt[3]{x} (\sqrt{x+3} - 1) \\ \Leftrightarrow & (\sqrt[3]{2x+1} - \sqrt[3]{x}) (\sqrt{x+3} - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt[3]{2x+1} - \sqrt[3]{x} \\ \sqrt{x+3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = x \\ x+3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 184. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 8x + 3} + x + 1 = (x + 1)\sqrt[3]{x + 3} + \sqrt[3]{x^3 - 3x + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 8x + 3} - \sqrt[3]{x^3 - 3x + 1} = (x + 1)\sqrt[3]{x + 3} - (x + 1) \\ & \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3 - 3x + 1}(\sqrt[3]{x + 3} - 1) = (x + 1)(\sqrt[3]{x + 3} - 1) \\ & \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x^3 - 3x + 1} - x - 1)(\sqrt[3]{x + 3} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x^3 - 3x + 1} = x + 1 \\ \sqrt[3]{x + 3} = 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ x + 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-2; 0\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có hai nghiệm $x = -2; x = 0$.

Bài toán 185. Tìm nghiệm dương của phương trình

$$\sqrt[3]{3x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 18x + 5} + 2 = \frac{2\sqrt[3]{x^3 + 3x + 1}}{x} + x\sqrt[3]{3x + 5} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{3x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 18x + 5} - \frac{2\sqrt[3]{x^3 + 3x + 1}}{x} = x\sqrt[3]{3x + 5} - 2 \\ & \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3 + 3x + 1} \left(\sqrt[3]{3x + 5} - \frac{2}{x} \right) = x\sqrt[3]{3x + 5} - 2 \\ & \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x^3 + 3x + 1} - x) \left(\sqrt[3]{3x + 5} - \frac{2}{x} \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x^3 + 3x + 1} = x \\ x\sqrt[3]{3x + 5} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x + 1 = x^3 \\ 3x^4 + 5x^3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ 3x^4 + 5x^3 = 8 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Xét $x > 1 \Rightarrow 3x^4 + 5x^3 > 8$ và $0 < x < 1 \Rightarrow 3x^4 + 5x^3 < 8$, khi đó (1) vô nghiệm.

Nếu $x = 1$ thì (1) nghiệm đúng. Vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm dương $x = 1$.

Bài toán 186. Giải bất phương trình

$$\sqrt[3]{x^5 + x^4 + 2x^3 - 1} + \sqrt[3]{2x^2 - 5x + 3} \leq \sqrt[3]{2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 3} + \sqrt[3]{x^3 - 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{x^5 + x^4 + 2x^3 - 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1} \leq \sqrt[3]{2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 3} - \sqrt[3]{2x^2 - 5x + 3} \\ & \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2 + x + 1}(\sqrt[3]{x^3 + x - 1} - \sqrt[3]{x - 1}) \leq \sqrt[3]{2x - 3}(\sqrt[3]{x^3 + x - 1} - \sqrt[3]{x - 1}) \\ & \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{2x - 3})(\sqrt[3]{x^3 + x - 1} - \sqrt[3]{x - 1}) \leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Đề ý rằng $x^2 + x + 1 - (2x - 3) = x^2 - x + 4 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0, \forall x$ nên $\sqrt[3]{x^2 + x + 1} > \sqrt[3]{2x - 3}$.

Do đó (1) trở thành $x^3 + x - 1 \leq x - 1 \Leftrightarrow x^3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

Kết luận bất phương trình có nghiệm $x \leq 0$.

Bài toán 187. Giải phương trình $x + \sqrt{x+4} \cdot \sqrt[3]{x^3+x+2} = x\sqrt{x+4} + \sqrt[3]{x^3+x+2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -4$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4} \cdot \sqrt[3]{x^3+x+2} - \sqrt[3]{x^3+x+2} &= x\sqrt{x+4} - x \\ \sqrt[3]{x^3+x+2} (\sqrt{x+4} - 1) &= x(\sqrt{x+4} - 1) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x+4} - 1)(\sqrt[3]{x^3+x+2} - x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+4=1 \\ x^3+x+2=x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=-2 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 188. Giải phương trình $\sqrt{x} \sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{3x+1} \sqrt{x} + \sqrt[3]{x+3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x} \sqrt[3]{x+3} - \sqrt[3]{x+3} &= \sqrt[3]{3x+1} \sqrt{x} - \sqrt[3]{3x+1} \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+3} (\sqrt{x} - 1) &= \sqrt[3]{3x+1} (\sqrt{x} - 1) \\ \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+3} - \sqrt[3]{3x+1})(\sqrt{x} - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=3x+1 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

Bài toán 189. Giải phương trình $\sqrt[4]{x^2+3x} + \sqrt[4]{x} = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x+3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x^2+3x} - \sqrt[4]{x+3} &= \sqrt{x} - \sqrt[4]{x} \\ \Leftrightarrow \sqrt[4]{x+3} (\sqrt[4]{x} - 1) &= \sqrt[4]{x} (\sqrt[4]{x} - 1) \\ \Leftrightarrow (\sqrt[4]{x+3} - \sqrt[4]{x})(\sqrt[4]{x} - 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4=x \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 190. Giải phương trình $\sqrt[4]{3x^3+x^2+x} + 3\sqrt[4]{x} = 3\sqrt[4]{3x^2+x+1} + \sqrt{x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{3x^3+x^2+x} - 3\sqrt[4]{3x^2+x+1} &= \sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} \Leftrightarrow \sqrt[4]{3x^2+x+1} (\sqrt[4]{x} - 3) = \sqrt[4]{x} (\sqrt[4]{x} - 3) \\ \Leftrightarrow (\sqrt[4]{3x^2+x+1} - \sqrt[4]{x})(\sqrt[4]{x} - 3) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{3x^2+x+1} = \sqrt[4]{x} \\ \sqrt[4]{x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+x+1=x \\ x=81 \end{cases} \Leftrightarrow x=81 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x=81$.

Bài toán 191. Giải phương trình $\sqrt[4]{2x^3 + 4x^2 + 3x + 1} + 2\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x^2 + x} + 2\sqrt[4]{2x^2 + 2x + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{2x^3 + 4x^2 + 3x + 1} - 2\sqrt[4]{2x^2 + 2x + 1} + 2\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{x^2 + x} = 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt[4]{2x^2 + 2x + 1}(\sqrt[4]{x+1} - 2) - \sqrt[4]{x}(\sqrt[4]{x+1} - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt[4]{2x^2 + 2x + 1} - \sqrt[4]{x})(\sqrt[4]{x+1} - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt[4]{2x^2 + 2x + 1} - \sqrt[4]{x} \\ \sqrt[4]{x+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x + 1 = 0 \\ x + 1 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow x = 15 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm.

Bài toán 192. Giải phương trình $\sqrt[4]{2x^4 + x^3 + 2x + 1} + 2\sqrt[4]{2x + 1} = \sqrt{2x + 1} + 2\sqrt[4]{x^3 + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{2x^4 + x^3 + 2x + 1} - 2\sqrt[4]{x^3 + 1} + 2\sqrt[4]{2x + 1} - \sqrt{2x + 1} = 0. \\ \Leftrightarrow & \sqrt[4]{x^3 + 1}(\sqrt[4]{2x + 1} - 2) - \sqrt[4]{2x + 1}(\sqrt[4]{2x + 1} - 2) \\ \Leftrightarrow & (\sqrt[4]{x^3 + 1} - \sqrt[4]{2x + 1})(\sqrt[4]{2x + 1} - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^3 + 1 = 2x + 1 \\ 2x + 1 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 - 2) = 0 \\ 2x = 15 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{15}{2}; -\sqrt{2}; \sqrt{2}; 0 \right\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left\{ \frac{15}{2}; \sqrt{2}; 0 \right\}$.

Bài toán 193. Giải phương trình $\sqrt[4]{2x^5 + 2x^3 - x^2 + x + 2} + x = \sqrt[4]{2x^4 - x + 2} + x\sqrt[4]{x + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x^4 - x + 2 \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{2x^5 + 2x^3 - x^2 + x + 2} - \sqrt[4]{2x^4 - x + 2} = x\sqrt[4]{x + 1} - x \\ \Leftrightarrow & \sqrt[4]{2x^4 - x + 2}(\sqrt[4]{x + 1} - 1) = x(\sqrt[4]{x + 1} - 1) \\ \Leftrightarrow & (\sqrt[4]{2x^4 - x + 2} - x)(\sqrt[4]{x + 1} - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \sqrt[4]{2x^4 - x + 2} = x \\ \sqrt[4]{x + 1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^4 - x + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hệ
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^4 - x + 2 = 0 \end{cases}$$

Đề ý rằng $x^4 - x + 2 = \frac{4x^4 - 4x + 8}{4} = \frac{4x^4 - 4x^2 + 1 + 4x^2 - 4x + 1 + 6}{4} = \frac{(2x^2 - 1)^2 + (2x - 1)^2 + 6}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Do đó hệ trên vô nghiệm. Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài toán 194. Giải phương trình $\sqrt[4]{4x^2 - 1} + \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{2 + \frac{1}{x}} + \sqrt[4]{6 - \frac{3}{x}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{4x^2 - 1} - \sqrt[4]{6 - \frac{3}{x}} &= \sqrt[4]{2 + \frac{1}{x}} - \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow \sqrt[4]{2x - 1} \left(\sqrt[4]{2x + 1} - \sqrt[4]{\frac{3}{x}} \right) &= \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \left(\sqrt[4]{2x + 1} - \sqrt[4]{\frac{3}{x}} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{2x - 1} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right) \left(\sqrt[4]{2x + 1} - \sqrt[4]{\frac{3}{x}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Xét các trường hợp sau

$$\begin{cases} x(2x - 1) = 1 \\ x(2x + 1) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 1 = 0 \\ 2x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ 1; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{2} \right\}.$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x = 1$.

Bài toán 195. Giải phương trình

$$\sqrt[4]{x^5 + 2x^4 + x^3 + 4x^2 + 2} + \sqrt[4]{3x^2 + 2x} = \sqrt[4]{3x^3 + 2x^2 + 3x + 2} + \sqrt[4]{x^4 + 2x^3 + 2x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x^5 + 2x^4 + x^3 + 4x^2 + 2} - \sqrt[4]{3x^3 + 2x^2 + 3x + 2} &= \sqrt[4]{x^4 + 2x^3 + 2x} - \sqrt[4]{3x^2 + 2x} \\ \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^2 + 1} \left(\sqrt[4]{x^3 + 2x^2 + 2} - \sqrt[4]{3x + 2} \right) &= \sqrt[4]{x} \left(\sqrt[4]{x^3 + 2x^2 + 2} - \sqrt[4]{3x + 2} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt[4]{x} \right) \left(\sqrt[4]{x^3 + 2x^2 + 2} - \sqrt[4]{3x + 2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{x^2 + 1} = \sqrt[4]{x} \\ \sqrt[4]{x^3 + 2x^2 + 2} = \sqrt[4]{3x + 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 = 0 & (1) \\ x^3 + 2x^2 - 3x = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp xảy ra

- (1) $\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 = -\frac{3}{4} < 0$ (Vô nghiệm).
- (2) $\Leftrightarrow x(x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3; 0; 1\}.$

Đối chiếu điều kiện ta có hai nghiệm $x = 0; x = 1$.

Bài toán 196. Giải phương trình $\sqrt[4]{x^3-1} + 2\sqrt[4]{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2+x+1} + \sqrt[4]{x^2-1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x^3-1} - \sqrt[4]{x^2-1} &= 2\sqrt[4]{x^2+x+1} - 2\sqrt[4]{x+1} \\ \sqrt[4]{x-1} \left(\sqrt[4]{x^2+x+1} - \sqrt[4]{x+1} \right) &= 2 \left(\sqrt[4]{x^2+x+1} - \sqrt[4]{x+1} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x-1} - 2 \right) \left(\sqrt[4]{x^2+x+1} - \sqrt[4]{x+1} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{x-1} = 2 \\ \sqrt[4]{x^2+x+1} = \sqrt[4]{x+1} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=16 \\ x^2+x+1=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=17 \\ x=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x=17$.

Bài toán 197. Giải bất phương trình

$$\sqrt[4]{3x^3+2x^2+8x-3} + 2\sqrt[4]{2-x} \leq 2\sqrt[4]{x^2+x+3} + \sqrt[4]{-3x^2+7x-2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $\frac{1}{3} \leq x \leq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{3x^3+2x^2+8x-3} - \sqrt[4]{-3x^2+7x-2} &\leq 2\sqrt[4]{x^2+x+3} - 2\sqrt[4]{2-x} \\ \Leftrightarrow \sqrt[4]{3x-1} \left(\sqrt[4]{x^2+x+3} - \sqrt[4]{2-x} \right) &\leq 2 \left(\sqrt[4]{x^2+x+3} - \sqrt[4]{2-x} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{3x-1} - 2 \right) \left(\sqrt[4]{x^2+x+3} - \sqrt[4]{2-x} \right) &\leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $x^2+x+3-(2-x) = x^2+2x+1 = (x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt[4]{x^2+x+3} \geq \sqrt[4]{2-x}$.

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \sqrt[4]{3x-1} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 3x-1 \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x \leq \frac{17}{3} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $\frac{1}{3} \leq x \leq 2$.

Bài toán 198. Giải phương trình $\sqrt[4]{x^2+4x+1} + \sqrt[4]{2+\frac{1}{x}} = \sqrt[4]{2x+1} + \sqrt[4]{x+\frac{1}{x}} + 4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x^2+4x+1} - \sqrt[4]{x+\frac{1}{x}} + 4 &= \sqrt[4]{2x+1} - \sqrt[4]{2+\frac{1}{x}} \\ \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^2+4x+1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right) &= \sqrt[4]{2x+1} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x^2+4x+1} - \sqrt[4]{2x+1} \right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{x^2+4x+1} = \sqrt[4]{2x+1} \\ \sqrt[4]{x} = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x=0 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0; 1; 2\} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x=0; x=1; x=2$.

Bài toán 199. Giải phương trình $x\sqrt[4]{x^2+x+4}+1-\sqrt[4]{x+\frac{4}{x}+1}=x\sqrt[4]{x} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x\sqrt[4]{x^2+x+4}-\sqrt[4]{x+\frac{4}{x}+1}+1-x\sqrt[4]{x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^2+x+4}\left(x-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)+1-x\sqrt[4]{x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{x^2+x+4}-\sqrt[4]{x}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+4=x \\ x\sqrt[4]{x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=-4 \\ x^5=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 200. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{\frac{x+3}{x+2}}=\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{\frac{x+3}{2x+1}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $(x+2)(2x+1) \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2x+1} &= \sqrt[3]{\frac{x+3}{2x+1}}-\sqrt[3]{\frac{x+3}{x+2}} \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2x+1} &= \sqrt[3]{\frac{x+3}{(2x+1)(x+2)}}(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2x+1}) \\ \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{2x+1})\left(\sqrt[3]{\frac{x+3}{(2x+1)(x+2)}}-1\right) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=2x+1 \\ x+3=2x^2+5x+2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 2x^2+4x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-1; \frac{-2+\sqrt{6}}{2}; \frac{-2-\sqrt{6}}{2}\right\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 201. Giải phương trình $\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{\frac{3x+2}{x+3}}=\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{\frac{3x+2}{2x-1}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $(x+3)(2x-1) \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{2x-1} &= \sqrt[3]{\frac{3x+2}{2x-1}}-\sqrt[3]{\frac{3x+2}{x+3}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{2x-1} = \sqrt[3]{\frac{3x+2}{(2x-1)(x+3)}}(\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{2x-1}) \\ \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{2x-1})\left[\sqrt[3]{\frac{3x+2}{(2x-1)(x+3)}}-1\right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=2x-1 \\ 3x+2=2x^2+5x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ 2x^2+2x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{-1+\sqrt{11}}{2}; \frac{-1-\sqrt{11}}{2}; 4\right\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Quý độc giả có thể dễ dàng nhận thấy hai bài toán 200 và 201 gần có dạng tương tự

$$\begin{cases} \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{k(x)} & (i) \\ \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} - \sqrt{k(x)} & (ii) \end{cases}$$

Tuy nhiên mức độ khó đã được tăng cường

$$\begin{cases} \sqrt[n]{f(x)} + \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{h(x)} + \sqrt[n]{k(x)} & (i) \\ \sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{h(x)} - \sqrt[n]{k(x)} & (ii) \end{cases}$$

trong đó các biểu thức trong căn xác định, thỏa mãn điều kiện $f(x).g(x) = h(x).k(x)$ (*).

Yếu tố đặc biệt (*) này chính là chìa khóa để giải bài toán. Tuy nhiên khác với phép lũy thừa bình phương, thao tác lập phương đối với bài toán có lẽ đã trở nên khó khăn hơn nhiều, và tất nhiên đó không phải là phương án tối ưu, lúc này việc phân tử nhân tử phát huy tác dụng. Trong một số tài liệu tham khảo khác, nó được mang tên "Phương pháp đưa về phương trình dạng tích", về cơ bản vẫn là thực hiện biến đổi tương đương, và nâng lũy thừa đối với các phương trình hệ quả xuất hiện. Lưu ý điều kiện căn thức có lợi thế rất nhiều trong việc lập luận cho các trường hợp của bất phương trình chứa căn. Nắm vững các kỹ năng phân tích đa thức thành nhân tử của chương trình đại số 8, kết hợp kiến thức tổng hợp về căn thức sẽ giúp các bạn tự tin chiến thắng với dạng toán này

Bài toán 202. Giải bất phương trình $\sqrt[3]{x+4} + \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+4}} \geq \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{3+\frac{2}{x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x(x+4) \neq 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x+4} - \sqrt[3]{x} &\geq \sqrt[3]{\frac{3x+2}{x}} - \sqrt[3]{\frac{3x+2}{x+4}} \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+4} - \sqrt[3]{x} &\geq \sqrt[3]{\frac{3x+2}{x(x+4)}} (\sqrt[3]{x+4} - \sqrt[3]{x}) \\ \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+4} - \sqrt[3]{x}) &\left[\sqrt[3]{\frac{3x+2}{x(x+4)}} - 1 \right] \leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Để ý rằng $x+4 > x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[3]{x+4} - \sqrt[3]{x} > 0$. Do đó (1) trở thành

$$\sqrt[3]{\frac{3x+2}{x(x+4)}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3x+2}{x(x+4)} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{x(x+4)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -2 \leq x < 0 \\ x < -4 \end{cases}$$

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $S = (-\infty; -4) \cup [-2; 0) \cup [1; +\infty)$.

Bài toán 203. Giải bất phương trình $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{\frac{5x^2+1}{x+1}} \leq \sqrt[3]{x^2+2} + \sqrt[3]{\frac{5x^2+1}{x^2+2}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^2+2} - \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{\frac{5x^2+1}{x^2+2}} - \sqrt[3]{\frac{5x^2+1}{x+1}} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2+2} - \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{\frac{5x^2+1}{(x^2+2)(x+1)}} (\sqrt[3]{x^2+2} - \sqrt[3]{x+1}) &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x^2+2} - \sqrt[3]{x+1} \right) \left(1 - \sqrt[3]{\frac{5x^2+1}{(x^2+2)(x+1)}} \right) \geq 0 \quad (1)$$

Để nhận thấy $x^2+2-(x+1) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[3]{x^2+2} \geq \sqrt[3]{x+1}$. Do đó (1) trở thành

$$1 - \sqrt[3]{\frac{5x^2+1}{(x^2+2)(x+1)}} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{5x^2+1}{(x^2+2)(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3-4x^2+2x+1}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x^2-3x-1)}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x < -1 \\ \frac{3-\sqrt{13}}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm như trên.

Bài toán 204. Giải phương trình $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1+\frac{2}{x}} = \sqrt[4]{2x+1} + \sqrt[4]{\frac{x+2}{2x+1}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[4]{2x+1} - \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{\frac{x+2}{2x+1}} - \sqrt[4]{1+\frac{2}{x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{2x+1} - \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{\frac{x+2}{(2x+1)x}} \left(\sqrt[4]{2x+1} - \sqrt[4]{x} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{2x+1} - \sqrt[4]{x} \right) \left[1 - \sqrt[4]{\frac{x+2}{(2x+1)x}} \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = x \\ 2x^2+x = x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}$$

Đổi chiều điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 205. Giải phương trình $\sqrt[4]{2x+1} + \sqrt[4]{\frac{3x^2+x+2}{2x+1}} = \sqrt[4]{3-x} + \sqrt[4]{\frac{3x^2+x+2}{3-x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{1}{2} < x < 3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[4]{2x+1} - \sqrt[4]{3-x} + \sqrt[4]{\frac{3x^2+x+2}{2x+1}} - \sqrt[4]{\frac{3x^2+x+2}{3-x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[4]{2x+1} - \sqrt[4]{3-x} - \sqrt[4]{\frac{3x^2+x+2}{(2x+1)(3-x)}} \left(\sqrt[4]{2x+1} - \sqrt[4]{3-x} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{2x+1} - \sqrt[4]{3-x} \right) \left(1 - \sqrt[4]{\frac{3x^2+x+2}{(2x+1)(3-x)}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = 3-x \\ 3x^2+x+2 = -2x^2+5x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2 \\ 5x^2-4x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{2}{3}; 1; -\frac{1}{4} \right\}$$

Đổi chiều điều kiện ta có nghiệm $S = \left\{ \frac{2}{3}; 1; -\frac{1}{4} \right\}$.

Bài toán 206. Giải bất phương trình $\sqrt[4]{2x-1} + \sqrt[4]{\frac{3x^2+x+5}{2x-1}} > \sqrt[4]{2x+7} + \sqrt[4]{\frac{3x^2+x+5}{2x+7}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > \frac{1}{2}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{2x-1} - \sqrt[4]{2x+7} + \sqrt[4]{\frac{3x^2+x+5}{2x-1}} - \sqrt[4]{\frac{3x^2+x+5}{2x+7}} > 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt[4]{2x-1} - \sqrt[4]{2x+7} - \sqrt[4]{\frac{3x^2+x+5}{(2x-1)(2x+7)}} (\sqrt[4]{2x-1} - \sqrt[4]{2x+7}) > 0 \\ \Leftrightarrow & (\sqrt[4]{2x-1} - \sqrt[4]{2x+7}) \left(1 - \sqrt[4]{\frac{3x^2+x+5}{(2x-1)(2x+7)}} \right) > 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Dễ thấy $2x-1 < 2x+7, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[4]{2x-1} < \sqrt[4]{2x+7}$ nên (1) trở thành

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{\frac{3x^2+x+5}{(2x-1)(2x+7)}} > 1 \Leftrightarrow 3x^2+x+5 > 4x^2+12x-7 \\ \Leftrightarrow & x^2+11x-12 < 0 \Leftrightarrow -12 < x < 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm $S = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Bài toán 207. Giải bất phương trình $\sqrt[4]{x+3} + \sqrt[4]{\frac{x^3+2x+5}{x+3}} \leq \sqrt[4]{3x-2} + \sqrt[4]{\frac{x^3+2x+5}{3x-2}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > \frac{2}{3}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[4]{x+3} - \sqrt[4]{3x-2} + \sqrt[4]{\frac{x^3+2x+5}{x+3}} - \sqrt[4]{\frac{x^3+2x+5}{3x-2}} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x+3} - \sqrt[4]{3x-2} - \sqrt[4]{\frac{x^3+2x+5}{(x+3)(3x-2)}} (\sqrt[4]{x+3} - \sqrt[4]{3x-2}) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[4]{x+3} - \sqrt[4]{3x-2}) \left(\sqrt[4]{\frac{x^3+2x+5}{(x+3)(3x-2)}} - 1 \right) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \leq 3x-2 \\ \frac{x^3+2x+5}{(x+3)(3x-2)} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 5 \\ x^3+2x+5 \leq 3x^2+8x-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ x^3-3x^2-6x+8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ (x-1)(x+2)(x-4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ -2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left[\frac{2}{3}; 1\right] \cup [2; 4]$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

$$1. \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2 + \frac{1}{x}} = \sqrt[3]{1+x} + 2\sqrt[3]{x^2 - x + 1}.$$

$$2. 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} = \sqrt[3]{x-1} + 2.$$

$$3. \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{\frac{x^2 + 5x + 6}{2x}} = \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3}.$$

$$4. \sqrt[3]{x+1} + 3\sqrt[3]{x+2} = 1 + 3\sqrt[3]{x^2 + 3x + 2}.$$

$$5. \sqrt[3]{4x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{\frac{x^3+8}{x-1}} + \sqrt[3]{\frac{x^3+8}{4x-1}}.$$

$$6. \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{x-x^2} = 1.$$

$$7. \sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{\frac{x+3}{2x-1}} < \sqrt[3]{4x-3} - \sqrt[3]{\frac{x+3}{4x-3}}.$$

$$8. \sqrt[3]{x^2+3} + \sqrt[3]{\frac{x^2+x+6}{x^2+3}} \geq \sqrt[3]{\frac{x^2+x+6}{x+1}} + \sqrt[3]{x+1}.$$

$$9. 3\sqrt[3]{x+4} + 7\sqrt[3]{x+6} = 3 + 7\sqrt[3]{x^2+10x+24}.$$

$$10. 2\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x^2-x+1} = \sqrt[3]{x^3+1} + 2.$$

$$11. \sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} \geq 1 + \sqrt[3]{x^4-1}.$$

$$12. \sqrt[3]{2x+1} + 4\sqrt[3]{x} \geq 1 + 4\sqrt[3]{2x^2+x}.$$

$$13. \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}} < \sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+3}}.$$

$$14. 5\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x^2+x+1} = 5 + \sqrt[3]{x^3-1}.$$

$$15. \sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{x^3-2} = \sqrt[3]{x^4-2x^3-2x+4} + 1.$$

$$16. 6\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{x^2+2x+4} < 1 + 6\sqrt[3]{x^3-8}.$$

$$17. \sqrt[3]{x-2} + 4\sqrt[3]{x+2} = 1 + 4\sqrt[3]{x^2-4}.$$

$$18. \sqrt[3]{x^2+x+1} + \sqrt[3]{2x^2-1} = 1 + \sqrt[3]{2x^4+2x^3+x^2-x-1}.$$

$$19. \sqrt[3]{x+9} + 2011\sqrt[3]{x+5} = 2011 + \sqrt[3]{x^2+14x+45}.$$

$$20. \sqrt[3]{x^3+x^2+x+3} + \sqrt[3]{2x} \leq \sqrt[3]{x^2+3} + \sqrt[3]{2x^2+2x}.$$

$$21. \sqrt[3]{17+x} + 1997\sqrt[3]{6+x} > \sqrt[3]{(17+x)(6+x)} + 1997.$$

$$22. \sqrt[3]{x+29} - 1992\sqrt[3]{x+3} = 1992 - \sqrt[3]{(x+29)(x+3)}.$$

$$23. \sqrt[3]{x+2} - 2007\sqrt[3]{2x+1} = 2007 - \sqrt[3]{2x^2+5x+2}.$$

$$24. \left(\sqrt[3]{x-1}-1\right)^2 + 6\sqrt[3]{2-x} > 3\sqrt[3]{-x^2-x+2} + 1.$$

$$25. 3\sqrt[3]{x+8} + 8\sqrt[3]{x^2+2x+3} = 3\sqrt[3]{(x+8)(x^2+2x+3)} + 8.$$

$$26. 2\sqrt[3]{x^2+9x+8} + x = 2\sqrt[3]{x+1} + x\sqrt[3]{8+x}.$$

$$27. \sqrt[3]{x+7} + 2x\sqrt[3]{x+1} = 2x + \sqrt[3]{x^2+8x+7}.$$

28. $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}} = 1.$
29. $x\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x^2-x+1} = x + \sqrt[3]{x^3+1}.$
30. $\sqrt[3]{4x^3-3x^2+28x-21} + 2 > 2\sqrt[3]{4-\frac{3}{x}} + \sqrt[3]{x^3+7x}.$
31. $x\sqrt[3]{x^2+x+1} + \sqrt[3]{x^2-x+1} = x + \sqrt[3]{x^4+x^2+1}.$
32. $\sqrt[3]{7x+1} + 2x\sqrt[3]{2x+1} = 2x + \sqrt[3]{14x^2+9x+1}.$
33. $\sqrt[3]{2x+1} + 3\sqrt[3]{4x^2-2x+1} = 3 + \sqrt[3]{8x^3+1}.$
34. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x + \frac{1}{x}} + 1 \leq \sqrt[3]{2x^2+x+1} + 1.$
35. $\frac{\sqrt[3]{x+7}}{x} + 2x\sqrt[3]{2x-1} = 2 + \sqrt[3]{(x+7)(2x-1)}.$
36. $x\sqrt[3]{6+\frac{2}{x}} + 2\sqrt[3]{2x-1} \leq \sqrt[3]{12x-\frac{2}{x}-2} + 2x.$
37. $\sqrt[3]{\frac{x^2+8x+7}{2x}} + 2 = 2x\sqrt[3]{\frac{x+1}{2x}} + \frac{1}{x}\sqrt[3]{x+7}.$
38. $\sqrt[3]{4x^2-1} + \sqrt[3]{x} \geq \sqrt[3]{2x^2-x} + \sqrt[3]{2x+1}.$
39. $2 + \sqrt[3]{\frac{21x^2+10x+1}{4x}} = \frac{\sqrt[3]{7x+1}}{x} + 2x\sqrt[3]{\frac{3x+1}{4x}}.$
40. $14\sqrt[3]{x+35} + 6\sqrt[3]{x+1} = 84 + \sqrt[3]{x^2+36x+35}.$
41. $x\sqrt[3]{\frac{5x+3}{x}} + 2x\sqrt[3]{3x-2} > \sqrt[3]{15x-\frac{6}{x}-1} + 2x^2.$
42. $\sqrt[3]{(7x^2+1)(3x+1)} - \sqrt[3]{x(7x^2+1)} + 2 = 2\sqrt[3]{3+\frac{1}{x}}.$
43. $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x^2-5x+6} < \sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{x^2-4x+3}.$
44. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^3-1} = \sqrt[3]{x^2+x+1} + \sqrt[3]{x(x-1)}.$
45. $x\sqrt[3]{(x+7)(3x^2+5)} + \frac{4}{\sqrt[3]{x}} = 2x\sqrt[3]{1+\frac{7}{x}} + 2\sqrt[3]{3x^2+5}.$
46. $\sqrt[3]{\frac{2(x+3)^2}{3x+1}} + 2 = 2x\sqrt[3]{\frac{2x+6}{3x+1}} + \frac{\sqrt[3]{2x+6}}{x}.$
47. $2x\sqrt[3]{\frac{5x+3}{x}} + 2\sqrt[3]{3x+5} = 4x + \sqrt[3]{15x+34} + \frac{15}{x}.$
48. $\sqrt[3]{\frac{(6+x)(x+7)}{x}} + \frac{2x}{\sqrt[3]{x}} = x\sqrt[3]{x+7} + 2\sqrt[3]{\frac{x+6}{7x}}.$
49. $2x\sqrt[3]{\frac{(x+7)(2-x)}{x}} + 2x = 4\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1} + x^2\sqrt[3]{x+7}.$
50. $\frac{1}{x}\sqrt[3]{(6x^3+2)(x^2+1)} + 2\sqrt[3]{\frac{3}{x}} = \sqrt[3]{3\left(6+\frac{2}{x^3}\right)} + 2\sqrt[3]{x+\frac{1}{x}}.$

$$51. \sqrt[4]{3x^4 + 3x^3 + 13x^2 + 13x} + 6\sqrt[4]{x} = 2\sqrt[4]{x+1} + 3\sqrt[4]{3x^4 + 13x^2}.$$

$$52. \sqrt[4]{x^4 + x^3 + 15x^2 + 15x} + \frac{2}{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[4]{x^3 + 15x} + 2\sqrt[4]{1 + \frac{1}{x}}.$$

$$53. \sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x+3} = 1 + \sqrt[4]{x^2 + 4x + 3}.$$

$$54. \sqrt[4]{x+6} + \sqrt[4]{x} = 1 + \sqrt[4]{x^2 + 6x}.$$

$$55. \sqrt[4]{x+2} + \sqrt[4]{x+5} \leq 1 + \sqrt[4]{x^2 + 7x + 10}.$$

$$56. \sqrt[4]{x+1} + \sqrt{x} > \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x^2 + x}.$$

$$57. \sqrt[4]{(3x^3 - x - 1)(3x + 13)} + 2 = 2\sqrt[4]{3x^2 - \frac{1}{x}} - 1 + \sqrt[4]{3x^2 + 13x}.$$

$$58. \sqrt[4]{(11x + 5)(7x^2 + 9)} + 4 = 2\sqrt[4]{x(11x + 5)} + 2\sqrt[4]{7x + \frac{9}{x}}.$$

$$59. \sqrt[4]{x+1} + 2\sqrt[4]{x^2 - x + 1} = 2\sqrt[4]{1 + x^3} + 1.$$

$$60. (\sqrt[4]{x+2} - 1)^2 + 2\sqrt[4]{x^2 + 1} = \sqrt[4]{(x^2 + 1)(x + 2)} + 1.$$

$$61. 2\sqrt{2x+1} - \sqrt[4]{(2x-1)(x^2-4)} + \sqrt[4]{x^2-4} = 2\sqrt[4]{1+2x}.$$

$$62. 3\sqrt{x^2+1} + 4\sqrt[4]{x+27} = \sqrt[4]{x^2+1}(\sqrt[4]{x+27} + 12).$$

$$63. 2\sqrt{1+x} + 3\sqrt[4]{x^2-x+1} = 2\sqrt[4]{1+x^3} + 3\sqrt[4]{x+1}.$$

$$64. \sqrt[4]{\left(x^2 + \frac{15}{x}\right)(2x-1)} + 2 = \sqrt[4]{x + \frac{15}{x^2}} + 2\sqrt[4]{x(2x-1)}.$$

$$65. \sqrt[4]{x(13x+3)(7x^3+1)} + 2\sqrt[4]{6 + \frac{1}{x}} = 2\sqrt[4]{7x^2 + \frac{1}{x}} + \sqrt[4]{(13x^2+3x)(6x+1)}.$$

$$66. \sqrt[4]{14x^2-5x-1} + \sqrt[4]{(1+7x)(1+x)} = 2\sqrt[4]{\frac{2x-1}{x+1}} + 2.$$

$$67. \sqrt[4]{11x^2+5x} + 2\sqrt[4]{\frac{1}{x^2} + \frac{7}{x}} = 2 + \sqrt[4]{(11x+5)\left(7 + \frac{1}{x}\right)}.$$

$$68. \sqrt[4]{(2x^2-1)\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + \sqrt[4]{3x+2} = \sqrt[4]{(3x+2)\left(2x - \frac{1}{x}\right)} + \sqrt[4]{x+1}.$$

$$69. \sqrt[4]{10x^2+6x} + \frac{2}{\sqrt[4]{2x^2-x}} = 2 + \sqrt[4]{\frac{10x+6}{2x-1}}.$$

$$70. \sqrt[4]{4x^2+6x} + \sqrt[4]{\left(x + \frac{4}{x}\right)(5x-3)} = \sqrt[4]{2x^2+8} + \sqrt[4]{10x^2+9x-9}.$$

$$71. \sqrt[4]{\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)} + \sqrt[4]{x(1+x^2)} = \sqrt[4]{(x^2+1)\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)} + \sqrt[4]{x+1}.$$

$$72. \sqrt[4]{\frac{(3x+1)(2x^2-1)}{x^2}} + \sqrt[4]{3x+1} = \sqrt[4]{\left(3x + \frac{1}{x}\right)(2x^2-1)} + \sqrt[4]{3x+1}.$$

$$73. \sqrt[4]{(5x-4)(x^2+1)} + \sqrt[4]{1 - \frac{3}{x}} > \sqrt[4]{x + \frac{1}{x}} + \sqrt[4]{(5x-4)(x-3)}.$$

$$74. \sqrt[4]{6x^3 + 35x + \frac{39}{x}} + 2\sqrt[4]{1 - \frac{3}{x}} = 2\sqrt[4]{2 + \frac{3}{x^2}} + \sqrt[4]{(3x^2 + 13)(x - 3)}.$$

$$75. \sqrt[4]{(4x - 3)(2x^2 + 3)} + 1 < \sqrt[4]{\frac{2x^2 + 3}{2x - 1}} + \sqrt[4]{8x^2 - 10x + 3}.$$

$$76. \sqrt[4]{(x^2 + 3)(x + 3)} + \sqrt[4]{12x + 4} \geq \sqrt[4]{(x^2 + 3)\left(3 + \frac{1}{x}\right)} + \sqrt[4]{4x^2 + 12x}.$$

$$77. \sqrt[4]{(3 - 2x)(x^2 + 5)} + \sqrt[4]{4 + \frac{2}{x^2}} = \sqrt[4]{x + \frac{5}{x}} + \sqrt[4]{(3 - 2x)\left(4x + \frac{2}{x}\right)}.$$

$$78. \sqrt[4]{x^5 + 15x^4 + x^2 + 16x + 15} + 2 = x\sqrt[4]{x + 15} + \frac{2\sqrt[4]{x^4 + x + 1}}{x}.$$

$$79. \sqrt[4]{x + 2} + \sqrt[4]{\frac{x^2 + x + 4}{x + 2}} > \sqrt[4]{\frac{x^2 + x + 4}{2x}} + \sqrt[4]{2x}.$$

$$80. \sqrt[4]{x^2 + 1} + \sqrt[4]{\frac{2x^2 + x + 3}{x^2 + 1}} = \sqrt[4]{x + 2} + \sqrt[4]{\frac{2x^2 + x + 3}{x + 2}}.$$

$$81. \sqrt[4]{x + 4} + \sqrt[4]{\frac{3x + 1}{x + 4}} \leq \sqrt[4]{3 + \frac{2}{x}} + \sqrt[4]{x}.$$

$$82. \sqrt[4]{x^2 + 3x} + \sqrt[4]{3x^2 + 10x + 3} < \sqrt[4]{x^2 + 3} + \sqrt[4]{\left(x + \frac{3}{x}\right)(3x + 1)}.$$

$$83. \sqrt[4]{x + 1} - \sqrt[4]{\frac{5x^2 + 1}{x + 1}} = \sqrt[4]{x^2 + 2} - \sqrt[4]{\frac{5x^2 + 1}{x^2 + 2}}.$$

$$84. \sqrt[4]{x + 5} - \sqrt[4]{\frac{x^2 + 4x + 7}{x + 5}} \leq \sqrt[4]{x + 1} - \sqrt[4]{\frac{x^2 + 4x + 7}{x + 1}}.$$

$$85. \frac{2\sqrt[4]{2x + 3}}{x} + \sqrt[4]{11x + 5} = \frac{2}{x} + \sqrt[4]{22x^2 + 43x + 15}.$$

$$86. \sqrt[4]{x^2 + 4} + \sqrt[4]{\frac{5x^3 + x + 4}{x^2 + 4}} \leq \sqrt[4]{x + 1} + \sqrt[4]{\frac{5x^3 + x + 4}{x + 1}}.$$

$$87. \sqrt[4]{x + 2} + \sqrt[4]{\frac{4x^3 + x + 1}{x + 2}} = \sqrt[4]{x^2 + 1} + \sqrt[4]{\frac{4x^3 + x + 1}{x^2 + 1}}.$$

$$88. \frac{4\sqrt[4]{x + 1}}{x} + 3\sqrt[4]{5x + 11} = \frac{6}{x} + 2\sqrt[4]{5x^2 + 16x + 11}.$$

$$89. \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} + 2\sqrt[4]{9x + 7} < \frac{4}{x} + \sqrt[4]{x(9x + 7)}.$$

$$90. \frac{2}{x}\sqrt[4]{x^4 + x + 1} + x\sqrt[4]{15x + 1} = 2 + \sqrt[4]{(x^4 + x + 1)(15x + 1)}.$$

$$91. \frac{2\sqrt[4]{2x^4 + x + 2}}{x} + x\sqrt[4]{7x + 9} - 2 = \sqrt[4]{(2x^4 + x + 2)(9 + 7x)}.$$

$$92. \frac{2\sqrt[4]{3x^4 + x + 3}}{x} + x\sqrt[4]{x^2 + 3x + 12} = 2 + \sqrt[4]{(3x^4 + x + 3)(x^2 + 3x + 12)}.$$

$$93. \sqrt[4]{2x^5 + x^2 + 4x + 3x} = x\sqrt[4]{x} + 3\sqrt[4]{2x^4 + x + 4}.$$

Bài toán 208. Giải phương trình $\sqrt[5]{x^2+5x+6} + \sqrt[5]{2x-1} = \sqrt[5]{2x^2+3x-2} + \sqrt[5]{x+3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{x^2+5x+6} - \sqrt[5]{x+3} &= \sqrt[5]{2x^2+3x-2} - \sqrt[5]{2x-1} = 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt[5]{x+3}(\sqrt[5]{x+2}-1) &= \sqrt[5]{2x-1}(\sqrt[5]{x+2}-1) \\ \Leftrightarrow (\sqrt[5]{x+2}-1)(\sqrt[5]{x+3}-\sqrt[5]{2x-1}) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=1 \\ x+3=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=4 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 209. Giải phương trình $\sqrt[5]{4x^2+8x-5} + \sqrt[5]{1+\frac{2}{x}} = \sqrt[5]{2+\frac{5}{x}} + \sqrt[5]{2x^2+3x-2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{4x^2+8x-5} - \sqrt[5]{2x^2+3x-2} &= \sqrt[5]{2+\frac{5}{x}} - \sqrt[5]{1+\frac{2}{x}} \\ \Leftrightarrow \sqrt[5]{2x-1}(\sqrt[5]{2x+5}-\sqrt[5]{x+2}) &= \frac{1}{\sqrt[5]{x}}(\sqrt[5]{2x+5}-\sqrt[5]{x+2}) \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[5]{2x-1}-\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)(\sqrt[5]{2x+5}-\sqrt[5]{x+2}) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[5]{x(2x-1)}=1 \\ \sqrt[5]{2x+5}=\sqrt[5]{x+2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-x-1=0 \\ 2x+5=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-3; -\frac{1}{2}; 1\right\} \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện ta thu được ba nghiệm $x = -3; x = -\frac{1}{2}; x = 1$.

Bài toán 210. Giải phương trình $\sqrt[5]{2x^2+7x+6} + \sqrt[5]{x+\frac{1}{x}} = \sqrt[5]{2x+3} + \sqrt[5]{(x+1)^2+\frac{2}{x}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{2x^2+7x+6} - \sqrt[5]{(x+1)^2+\frac{2}{x}} &= \sqrt[5]{2x+3} - \sqrt[5]{x+\frac{1}{x}} \\ \Leftrightarrow \sqrt[5]{x+2}\left(\sqrt[5]{2x+3}-\sqrt[5]{x+\frac{1}{x}}\right) &= \sqrt[5]{2x+3}-\sqrt[5]{x+\frac{1}{x}} \\ \Leftrightarrow (\sqrt[5]{x+2}-1)\left(\sqrt[5]{2x+3}-\sqrt[5]{x+\frac{1}{x}}\right) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=1 \\ 2x+3=x+\frac{1}{x} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x+3=\frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x^2+3x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-1; \frac{-3+\sqrt{13}}{2}; \frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right\} \end{aligned}$$

So sánh với điều kiện ta thu được tập nghiệm $S = \left\{-1; \frac{-3+\sqrt{13}}{2}; \frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Bài toán 211. Giải phương trình $\sqrt[5]{6x^2 + 11x + 3} + 2\sqrt[5]{4x + \frac{1}{x}} - 2\sqrt[5]{2x + 3} = \sqrt[5]{12x^2 + 4x + \frac{1}{x} + 3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[5]{6x^2 + 11x + 3} - \sqrt[5]{12x^2 + 4x + \frac{1}{x} + 3} + 2\sqrt[5]{4x + \frac{1}{x}} - 2\sqrt[5]{2x + 3} = 0 \\ & \Leftrightarrow \sqrt[5]{3x + 1} \left(\sqrt[5]{2x + 3} - \sqrt[5]{4x + \frac{1}{x}} \right) - 2 \left(\sqrt[5]{2x + 3} - \sqrt[5]{4x + \frac{1}{x}} \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \left(\sqrt[5]{3x + 1} - 2 \right) \left(\sqrt[5]{2x + 3} - \sqrt[5]{4x + \frac{1}{x}} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[5]{3x + 1} = 2 \\ 2x + 3 = 4x + \frac{1}{x} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 31 \\ 2x + \frac{1}{x} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 31 \\ 2x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{31}{3}; \frac{1}{2}; 1 \right\} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện đi đến phương trình ban đầu có nghiệm $S = \left\{ \frac{31}{3}; \frac{1}{2}; 1 \right\}.$

Bài toán 212. Giải phương trình $\sqrt[5]{3x^2 - 2x} + 2\sqrt[5]{2x - \frac{1}{x}} = \sqrt[5]{2x^2 - 1} + 2\sqrt[5]{3x - 2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[5]{3x^2 - 2x} - \sqrt[5]{2x^2 - 1} + 2\sqrt[5]{2x - \frac{1}{x}} - 2\sqrt[5]{3x - 2} = 0 \\ & \Leftrightarrow \sqrt[5]{x} \left(\sqrt[5]{3x - 2} - \sqrt[5]{2x - \frac{1}{x}} \right) - 2 \left(\sqrt[5]{3x - 2} - \sqrt[5]{2x - \frac{1}{x}} \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \left(\sqrt[5]{x} - 2 \right) \left(\sqrt[5]{3x - 2} - \sqrt[5]{2x - \frac{1}{x}} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[5]{x} = 2 \\ \sqrt[5]{3x - 2} = \sqrt[5]{2x - \frac{1}{x}} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ 3x - 2 = 2x - \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 32 \\ x + \frac{1}{x} - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1; 32\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm $x = 1; x = 32$.

Bài toán 213. Giải phương trình

$$\sqrt[5]{6x^2 - \frac{1}{x^2} - 1} + \sqrt[5]{2x^2 + 5x - 3} = \sqrt[5]{6x^2 - 3x - \frac{1}{x} + 2} + \sqrt[5]{2x^2 + 6x - \frac{3}{x} - 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[5]{6x^2 - \frac{1}{x^2} - 1} - \sqrt[5]{2x^2 + 6x - \frac{3}{x} - 1} + \sqrt[5]{2x^2 + 5x - 3} - \sqrt[5]{6x^2 - 3x - \frac{1}{x} + 2} = 0$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \sqrt[5]{2x - \frac{1}{x}} \left(\sqrt[5]{3x + \frac{1}{x}} - \sqrt[5]{x+3} \right) - \sqrt[5]{2x-1} \left(\sqrt[5]{3x + \frac{1}{x}} - \sqrt[5]{x+3} \right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(\sqrt[5]{2x - \frac{1}{x}} - \sqrt[5]{2x-1} \right) \left(\sqrt[5]{3x + \frac{1}{x}} - \sqrt[5]{x+3} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[5]{2x - \frac{1}{x}} = \sqrt[5]{2x-1} \\ \sqrt[5]{3x + \frac{1}{x}} = \sqrt[5]{x+3} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{1}{x} = 2x-1 \\ 3x + \frac{1}{x} = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2x^2 - 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ 1; \frac{1}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được hai nghiệm $x = \frac{1}{2}; x = 1$.

Bài toán 214. Giải bất phương trình $\sqrt[5]{x^3 + 3x + \frac{2}{x}} + \sqrt[5]{2x^2 + x} \geq \sqrt[5]{x^2 + 2} + \sqrt[5]{2x^3 + x^2 + 2x + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 &\sqrt[5]{x^3 + 3x + \frac{2}{x}} - \sqrt[5]{2x^3 + x^2 + 2x + 1} \geq \sqrt[5]{x^2 + 2} - \sqrt[5]{2x^2 + x} \\
 &\Leftrightarrow \sqrt[5]{x^2 + 1} \left(\sqrt[5]{x + \frac{2}{x}} - \sqrt[5]{2x+1} \right) \geq \sqrt[5]{x} \left(\sqrt[5]{x + \frac{2}{x}} - \sqrt[5]{2x+1} \right) \\
 &\Leftrightarrow \left(\sqrt[5]{x^2 + 1} - \sqrt[5]{x} \right) \left(\sqrt[5]{x + \frac{2}{x}} - \sqrt[5]{2x+1} \right) \geq 0 \quad (1)
 \end{aligned}$$

Nhận xét rằng $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt[5]{x^2 + 1} > \sqrt[5]{x}$ nên (1) trở thành

$$\sqrt[5]{x + \frac{2}{x}} \geq \sqrt[5]{2x+1} \Leftrightarrow x + \frac{2}{x} \geq 2x+1 \Leftrightarrow x - \frac{2}{x} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+2)}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -2 \leq x < 0 \end{cases}$$

Kết luận tập nghiệm $S = [-2; 0) \cup [1; +\infty)$.

Bài toán 215. Giải bất phương trình $\sqrt[5]{x^2 + \frac{2}{x} + 1} + \sqrt[5]{x^2 + x} \leq \sqrt[5]{x^3 - x^2 + 2x} + \sqrt[5]{\frac{(x+1)^2}{x}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 &\sqrt[5]{x^2 + \frac{2}{x} + 1} - \sqrt[5]{\frac{(x+1)^2}{x}} + \sqrt[5]{x^2 + x} - \sqrt[5]{x^3 - x^2 + 2x} \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt[5]{x^2 - x + 2} \left(\sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt[5]{x} \right) - \sqrt[5]{x+1} \left(\sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt[5]{x} \right) \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(\sqrt[5]{x^2 - x + 2} - \sqrt[5]{x+1} \right) \left(\sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt[5]{x} \right) \leq 0 \quad (1)
 \end{aligned}$$

Để thấy $x^2 - x + 2 - (x + 1) = (x - 1)^2 \geq 0$ nên (1) trở thành

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}} \leq \sqrt[5]{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{x^2-x-1}{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x < 0 \end{cases}$$

Kết luận bất phương trình có nghiệm như trên.

Bài toán 216. Giải bất phương trình $\sqrt[5]{x^2 + \frac{3}{x}} + 2 + \sqrt[5]{3x^2 - x} \geq \sqrt[5]{3x - \frac{1}{x}} + 2 + \sqrt[5]{x^3 - x^2 + 3x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[5]{x^2 + \frac{3}{x}} + 2 - \sqrt[5]{x^3 - x^2 + 3x} \geq \sqrt[5]{3x - \frac{1}{x}} + 2 - \sqrt[5]{3x^2 - x} \\ & \Leftrightarrow \sqrt[5]{x^2 - x + 3} \left(\sqrt[5]{\frac{1}{x} + 1} - \sqrt[5]{x} \right) - \left(\sqrt[5]{\frac{1}{x} + 1} - \sqrt[5]{x} \right) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \left(\sqrt[5]{x^2 - x + 3} - \sqrt[5]{3x - 1} \right) \left(\sqrt[5]{\frac{1}{x} + 1} - \sqrt[5]{x} \right) \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Để thấy rằng $x^2 - x + 3 - (3x - 1) = (x - 2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên (1) trở thành

$$\begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ \sqrt[5]{\frac{1}{x} + 1} \geq \sqrt[5]{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{1}{x} + 1 \geq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{x^2-x-1}{x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 0 < x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm như trên.

Bài toán 217. Giải phương trình $\sqrt[6]{4x^2 - 1} - \sqrt[6]{2x + 1} + \sqrt[6]{3x} = \sqrt[6]{3x(2x - 1)} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[6]{4x^2 - 1} - \sqrt[6]{2x + 1} = \sqrt[6]{3x(2x - 1)} - \sqrt[6]{3x} \\ & \Leftrightarrow \sqrt[6]{2x + 1} (\sqrt[6]{2x - 1} - 1) = \sqrt[6]{3x} (\sqrt[6]{2x - 1} - 1) \\ & \Leftrightarrow (\sqrt[6]{2x + 1} - \sqrt[6]{3x}) (\sqrt[6]{2x - 1} - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 3x \\ 2x - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 1$

Bài toán 218. Tìm nghiệm dương của phương trình $\sqrt[6]{2x^2 + 5x + 3} + \sqrt[6]{\frac{5}{x} + 1} = \sqrt[6]{2 + \frac{3}{x}} + \sqrt[6]{x^2 + 6x + 5} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{2x^2+5x+3} - \sqrt[6]{x^2+6x+5} &= \sqrt[6]{2+\frac{3}{x}} - \sqrt[6]{\frac{5}{x}+1} \\ \Leftrightarrow \sqrt[6]{x+1} \left(\sqrt[6]{2x+3} - \sqrt[6]{x+5} \right) &= \frac{1}{\sqrt[6]{x}} \left(\sqrt[6]{2x+3} - \sqrt[6]{x+5} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[6]{x+1} - \frac{1}{\sqrt[6]{x}} \right) \left(\sqrt[6]{2x+3} - \sqrt[6]{x+5} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x=1 \\ 2x+3=x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1=0 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; 2 \right\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 219. Giải phương trình $\sqrt[6]{x^3+1}+2=\sqrt[6]{x+1}+2\sqrt[6]{x^2-x+1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{x^3+1} - \sqrt[6]{x+1} &= 2\sqrt[6]{x^2-x+1} - 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt[6]{x+1} \left(\sqrt[6]{x^2-x+1} - 1 \right) &= 2 \left(\sqrt[6]{x^2-x+1} - 1 \right) \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[6]{x+1} - 2 \right) \left(\sqrt[6]{x^2-x+1} - 1 \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=64 \\ x^2-x+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0; 1; 63\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 220. Tìm nghiệm dương của phương trình

$$\sqrt[6]{2x^2+3x+\frac{12}{x}+8} + \sqrt[6]{2x^2+8x+9} = \sqrt[3]{2x+3} + \sqrt[6]{x^2+3x+\frac{12}{x}+4} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{2x^2+3x+\frac{12}{x}+8} - \sqrt[3]{2x+3} &= \sqrt[6]{x^2+3x+\frac{12}{x}+4} - \sqrt[6]{2x^2+8x+9} \\ \Leftrightarrow \sqrt[6]{2x+3} \left(\sqrt[6]{x+\frac{4}{x}} - \sqrt[6]{2x+3} \right) &= \sqrt[6]{x+3} \left(\sqrt[6]{x+\frac{4}{x}} - \sqrt[6]{2x+3} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[6]{x+\frac{4}{x}} - \sqrt[6]{2x+3} \right) \left(\sqrt[6]{2x+3} - \sqrt[6]{x+3} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3=x+3 \\ x+\frac{4}{x}=2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+3x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-4; 1; 0\} \end{aligned}$$

Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 221. Giải phương trình $\sqrt[6]{x+3} - \sqrt[6]{x+1} + 1 = \sqrt[6]{\frac{x+3}{x+1}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{x+1} \left(\sqrt[6]{\frac{x+3}{x+1}} - 1 \right) &= \left(\sqrt[6]{\frac{x+3}{x+1}} - 1 \right) \Leftrightarrow \left(\sqrt[6]{x+1} - 1 \right) \left(\sqrt[6]{\frac{x+3}{x+1}} - 1 \right) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[6]{x+1} = 1 \\ \sqrt[6]{\frac{x+3}{x+1}} = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ x+3=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài toán 222. Giải phương trình $\sqrt[6]{x^3+1} + \frac{1}{\sqrt[6]{2x-1}} = \sqrt[6]{\frac{x+1}{2x-1}} + \sqrt[6]{x^2-x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x > \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{x^3+1} - \sqrt[6]{\frac{x+1}{2x-1}} &= \sqrt[6]{x^2-x+1} - \frac{1}{\sqrt[6]{2x-1}} \\ \Leftrightarrow \sqrt[6]{x+1} \left(\sqrt[6]{x^2-x+1} - \frac{1}{\sqrt[6]{2x-1}} \right) &= \sqrt[6]{x^2-x+1} - \frac{1}{\sqrt[6]{2x-1}} \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[6]{x+1} - 1 \right) \left(\sqrt[6]{x^2-x+1} - \frac{1}{\sqrt[6]{2x-1}} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ (x^2-x+1)(2x-1)=1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ 2x^3-3x^2+3x-2=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (x-1)(2x^2-x+2)=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm như trên.

Bài toán 223. Giải phương trình $\sqrt[5]{\frac{x^3-8}{x+2}} + \sqrt[5]{x+2} = \sqrt[5]{x-2} + \sqrt[5]{x^2+2x+4} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{\frac{x^3-8}{x+2}} - \sqrt[5]{x^2+2x+4} &= \sqrt[5]{x-2} - \sqrt[5]{x+2} \\ \Leftrightarrow \sqrt[5]{x^2+2x+4} \left(\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+2}} - 1 \right) &= \sqrt[5]{x-2} - \sqrt[5]{x+2} \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[5]{x-2} - \sqrt[5]{x+2} \right) \left(\sqrt[5]{x^2+2x+4} - \sqrt[3]{x+2} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=x+2 \\ x^2+2x+4=x+2 \end{cases} &\Leftrightarrow x^2+x+2=0 \Leftrightarrow x \in \emptyset \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 224. Giải phương trình $\sqrt[6]{\frac{x^4 + x^2 + 1}{x+1}} + \sqrt[6]{x+1} = \sqrt[6]{x^2 - x + 1} + \sqrt[6]{x^2 + x + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x > -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[6]{\frac{x^4 + x^2 + 1}{x+1}} - \sqrt[6]{x^2 - x + 1} = \sqrt[6]{x^2 + x + 1} - \sqrt[6]{x+1} \\ & \Leftrightarrow \sqrt[6]{x^2 - x + 1} \left(\sqrt[6]{\frac{x^2 + x + 1}{x+1}} - 1 \right) = \sqrt[6]{x^2 + x + 1} - \sqrt[6]{x+1} \\ & \Leftrightarrow \left(\sqrt[6]{x^2 + x + 1} - \sqrt[6]{x+1} \right) \left(\sqrt[6]{x^2 - x + 1} - \sqrt[6]{x+1} \right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 1 = x + 1 \\ x^2 - x + 1 = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0; 2\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 225. Giải phương trình $\sqrt[5]{\frac{x^2 + 1}{x}} + \sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{x+3} + \sqrt[5]{\frac{x^2 + 1}{x+3}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x(x+3) \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[5]{\frac{x^2 + 1}{x}} - \sqrt[5]{\frac{x^2 + 1}{x+3}} = \sqrt[5]{x+3} - \sqrt[5]{x} \Leftrightarrow \sqrt[5]{\frac{x^2 + 1}{x(x+3)}} \left(\sqrt[5]{x+3} - \sqrt[5]{x} \right) = \sqrt[5]{x+3} - \sqrt[5]{x} \\ & \Leftrightarrow \left(\sqrt[5]{x+3} - \sqrt[5]{x} \right) \left(\sqrt[5]{\frac{x^2 + 1}{x(x+3)}} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = x \\ x^2 + 1 = x^2 + 3x \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm $x = \frac{1}{3}$.

Bài toán 226. Giải phương trình $\sqrt[5]{\frac{x^2 - 4}{x+4}} + \sqrt[5]{x+4} = \sqrt[5]{x+2} + \sqrt[5]{x-2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -4$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt[5]{\frac{x^2 - 4}{x+4}} - \sqrt[5]{x-2} = \sqrt[5]{x+2} - \sqrt[5]{x+4} \\ & \Leftrightarrow \sqrt[5]{x-2} \left(\sqrt[5]{\frac{x+2}{x+4}} - 1 \right) = \sqrt[5]{x+2} - \sqrt[5]{x+4} \\ & \Leftrightarrow \left(\sqrt[5]{x+2} - \sqrt[5]{x+4} \right) \left(\sqrt[5]{x-2} - \sqrt[5]{x+4} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = x+4 \\ x+2 = x+4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 227. Giải phương trình $\sqrt[6]{\frac{x^3 - 1}{4x+3}} + \sqrt[6]{4x+3} = \sqrt[6]{x-1} + \sqrt[6]{x^2 + x + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & \sqrt[6]{\frac{x^3-1}{4x+3}} - \sqrt[6]{x^2+x+1} + \sqrt[6]{4x+3} - \sqrt[6]{x-1} = 0 \\
 & \Leftrightarrow \sqrt[6]{x^2+x+1} \left(\sqrt[6]{\frac{x-1}{4x+3}} - 1 \right) = \left(\sqrt[6]{x-1} - \sqrt[6]{4x+3} \right) \\
 & \Leftrightarrow \left(\sqrt[6]{x-1} - \sqrt[6]{4x+3} \right) \left(\sqrt[6]{x^2+x+1} - \sqrt[6]{4x+3} \right) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=4x+3 \\ x^2+x+1=4x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=-4 \\ x^2-3x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{4}{3}; \frac{3+\sqrt{11}}{2}; \frac{3-\sqrt{11}}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm, $S = \left\{ -\frac{4}{3}; \frac{3+\sqrt{11}}{2} \right\}$.

Bài toán 228. Giải phương trình $2\sqrt[6]{\frac{4x^2-25}{x+2}} + \sqrt[6]{x+2} = 2\sqrt[6]{2x-5} + \sqrt[6]{2x+5} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{5}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & 2\sqrt[6]{\frac{4x^2-25}{x+2}} - \sqrt[6]{2x+5} = 2\sqrt[6]{2x-5} - \sqrt[6]{x+2} \\
 & \Leftrightarrow \sqrt[6]{2x+5} \left(2\sqrt[6]{\frac{2x-5}{x+2}} - 1 \right) = \sqrt[6]{x+2} \left(2\sqrt[6]{\frac{2x-5}{x+2}} - 1 \right) \\
 & \Leftrightarrow \left(\sqrt[6]{2x+5} - \sqrt[6]{x+2} \right) \left(2\sqrt[6]{\frac{2x-5}{x+2}} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5=x+2 \\ 32(2x-5)=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=\frac{18}{7} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = 18/7$.

Bài toán 229. Giải phương trình $\sqrt[6]{\frac{x^3-8}{x}} + \sqrt[6]{2x-3} = \sqrt[6]{(2x-4)\left(x+\frac{4}{x}+2\right)} + \sqrt[6]{x-2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & \sqrt[6]{\frac{x^3-8}{x}} - \sqrt[6]{(2x-4)\left(x+\frac{4}{x}+2\right)} + \sqrt[6]{2x-3} - \sqrt[6]{x-2} = 0 \\
 & \Leftrightarrow \sqrt[6]{\frac{x^2+2x+4}{x}} \left(\sqrt[6]{x-2} - \sqrt[6]{2x-3} \right) + \sqrt[6]{2x-3} - \sqrt[6]{x-2} = 0 \\
 & \Leftrightarrow \left(\sqrt[6]{x-2} - \sqrt[6]{2x-3} \right) \left(\sqrt[6]{\frac{x^2+2x+4}{x}} - 1 \right) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=2x-3 \\ x^2+2x+4=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x^2+x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1
 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 230. Giải phương trình $3\sqrt[5]{\frac{4x^2-25}{x}} + 2\sqrt[5]{x} = 2\sqrt[5]{2x+5} + 3\sqrt[5]{2x-5} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{5}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3\sqrt[5]{\frac{4x^2-25}{x}} - 2\sqrt[5]{2x+5} &= 3\sqrt[5]{2x-5} - 2\sqrt[5]{x} \\ \Leftrightarrow \sqrt[5]{2x+5} \left(3\sqrt[5]{\frac{2x-5}{x}} - 2 \right) &= \sqrt[5]{x} \left(3\sqrt[5]{\frac{2x-5}{x}} - 2 \right) \\ \Leftrightarrow (\sqrt[5]{2x+5} - \sqrt[5]{x}) \left(3\sqrt[5]{\frac{2x-5}{x}} - 2 \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5 = x \\ 3x-5 = \frac{8x}{243} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm.

Bài toán 231. Giải phương trình $\sqrt[5]{2x^2+1} + \sqrt[5]{9x^2-6} = \sqrt[5]{3x^2} + \sqrt[5]{6x^2 - \frac{2}{x^2} - 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{2x^2+1} - \sqrt[5]{6x^2 - \frac{2}{x^2} - 1} + \sqrt[5]{9x^2-6} - \sqrt[5]{3x^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt[5]{2x + \frac{1}{x}} \left(\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{3x - \frac{2}{x}} \right) - \sqrt[5]{3x} \left(\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{3x - \frac{2}{x}} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[5]{2x + \frac{1}{x}} - \sqrt[5]{3x} \right) \left(\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{3x - \frac{2}{x}} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{1}{x} = 3x \\ x = 3x - \frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = x \\ 2x - \frac{2}{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 232. Giải phương trình $\sqrt[7]{2x^2+8x-\frac{4}{x}-1} + \sqrt[7]{2x^2+x} - \sqrt[7]{x^2+4x} = \sqrt[7]{4x^2-2x-\frac{1}{x}-2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[7]{2x^2+8x-\frac{4}{x}-1} - \sqrt[7]{x^2+4x} &= \sqrt[7]{4x^2-2x-\frac{1}{x}-2} - \sqrt[7]{2x^2+x} \\ \Leftrightarrow \sqrt[7]{x+4} \left(\sqrt[7]{2x-\frac{1}{x}} - \sqrt[7]{x} \right) &= \sqrt[7]{2x+1} \left(\sqrt[7]{2x-\frac{1}{x}} - \sqrt[7]{x} \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x+4} - \sqrt[3]{2x+1} \right) \left(\sqrt[3]{2x - \frac{1}{x}} - \sqrt[3]{x} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4 = 2x+1 \\ 2x - \frac{1}{x} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-1; 1; 3\}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được ba nghiệm kể trên.

Bài toán 233. Giải phương trình $\sqrt[3]{2x^3 + 3x + 2 + \frac{3}{x^2}} + \sqrt[3]{8x^2 + 2x} = \sqrt[3]{4x^2 + 6} + \sqrt[3]{4x^3 + x^2 + \frac{1}{x} + 4}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[3]{2x^3 + 3x + 2 + \frac{3}{x^2}} - \sqrt[3]{4x^2 + 6} = \sqrt[3]{4x^3 + x^2 + \frac{1}{x} + 4} - \sqrt[3]{8x^2 + 2x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x + \frac{3}{x}} \left(\sqrt[3]{x^2 + \frac{1}{x}} - \sqrt[3]{2x} \right) = \sqrt[3]{4x+1} \left(\sqrt[3]{x^2 + \frac{1}{x}} - \sqrt[3]{2x} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{2x + \frac{3}{x}} - \sqrt[3]{4x+1} \right) \left(\sqrt[3]{x^2 + \frac{1}{x}} - \sqrt[3]{2x} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{3}{x} = 4x+1 \\ x^2 + \frac{1}{x} = 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - 3 = 0 \\ x^3 - 2x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x+3) = 0 \\ (x-1)(x^2 - x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ 1; -\frac{3}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}$$

Kết luận phương trình đã cho có bốn nghiệm kể trên.

Bài toán 234. Giải phương trình $\sqrt[3]{2x+3} + \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{\frac{4x^2+8x+3}{x+1}} + \sqrt[3]{x+1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[3]{2x+3} - \sqrt[3]{\frac{4x^2+8x+3}{x+1}} + \sqrt[3]{2x+1} - \sqrt[3]{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{2x+3}{x+1}} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{2x+1} \right) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x+1}} - 1 \right) \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{2x+1} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 = x+1 \\ x+1 = 2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -2; x = 0$.

Bài toán 235. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^3-1} + \sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}} = \sqrt[3]{x^2-x-\frac{2}{x}+2} + \sqrt[3]{1+x+\frac{1}{x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3-1} - \sqrt[3]{x^2-x-\frac{2}{x}+2} &= \sqrt[3]{1+x+\frac{1}{x}} - \sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}} \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1} \left(\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x+\frac{2}{x}} \right) &= \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \left(\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x+\frac{2}{x}} \right) \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x-1} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) \left(\sqrt[3]{x^2+x+1} - \sqrt[3]{x+\frac{2}{x}} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x=1 \\ x^2+x+1=x+\frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-1=0 \\ x^3+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ 1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được ba nghiệm như trên.

Bài toán 236. Giải phương trình $\sqrt[3]{9x-\frac{1}{x}} + \sqrt[3]{x+2} = \sqrt[3]{3x+1} + \sqrt[3]{\left(3-\frac{1}{x}\right)(x+2)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{9x-\frac{1}{x}} - \sqrt[3]{3x+1} &= \sqrt[3]{\left(3-\frac{1}{x}\right)(x+2)} - \sqrt[3]{x+2} \\ \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x+1} \left(\sqrt[3]{\frac{3x-1}{x}} - 1 \right) &= \sqrt[3]{x+2} \left(\sqrt[3]{\frac{3x-1}{x}} - 1 \right) \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{3x+1} - \sqrt[3]{x+2} \right) \left(\sqrt[3]{\frac{3x-1}{x}} - 1 \right) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1=x+2 \\ 3x-1=x \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất.

Bài toán 237. Giải phương trình $\sqrt[8]{\frac{2x^2+11x+15}{x+4}} + 1 = \sqrt[8]{x+3} + \sqrt[8]{\frac{2x+5}{x+4}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{5}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt[8]{\frac{2x^2+11x+15}{x+4}} - \sqrt[8]{x+3} &= \sqrt[8]{\frac{2x+5}{x+4}} - 1 \Leftrightarrow \sqrt[8]{x+3} \left(\sqrt[8]{\frac{2x+5}{x+4}} - 1 \right) = \sqrt[8]{\frac{2x+5}{x+4}} - 1 \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt[8]{x+3} - 1 \right) \left(\sqrt[8]{\frac{2x+5}{x+4}} - 1 \right) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=1 \\ 2x+5=x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm $x = -1; x = -2$.

Bài toán 238. Giải phương trình $\sqrt[8]{\frac{x^2+3x}{2x-1}} + \sqrt[8]{3x+1} = \sqrt[8]{\frac{x+3}{2x-1}} + \sqrt[8]{3x^2+x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \sqrt[8]{\frac{x^2+3x}{2x-1}} - \sqrt[8]{3x^2+x} = \sqrt[8]{\frac{x+3}{2x-1}} - \sqrt[8]{3x+1} \\
& \Leftrightarrow \sqrt[8]{x} \left(\sqrt[8]{\frac{x+3}{2x-1}} - \sqrt[8]{3x+1} \right) = \left(\sqrt[8]{\frac{x+3}{2x-1}} - \sqrt[8]{3x+1} \right) \\
& \Leftrightarrow (\sqrt[8]{x} - 1) \left(\sqrt[8]{\frac{x+3}{2x-1}} - \sqrt[8]{3x+1} \right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x+3=6x^2-x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 6x^2-2x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{1; -\frac{2}{3}\right\}
\end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 239. Giải phương trình $\sqrt[8]{x+9+\frac{18}{x}} + \sqrt[8]{6x^2+x} = \sqrt[8]{x+6} + \sqrt[8]{6x^2+19x+3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \sqrt[8]{x+9+\frac{18}{x}} - \sqrt[8]{6x^2+19x+3} = \sqrt[8]{x+6} - \sqrt[8]{6x^2+x} \\
& \Leftrightarrow \sqrt[8]{x+3} \left(\sqrt[8]{\frac{x+6}{x}} - \sqrt[8]{6x+1} \right) = \sqrt[8]{x} \left(\sqrt[8]{\frac{x+6}{x}} - \sqrt[8]{6x+1} \right) \\
& \Leftrightarrow (\sqrt[8]{x+3} - \sqrt[8]{x}) \left(\sqrt[8]{\frac{x+6}{x}} - \sqrt[8]{6x+1} \right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=x \\ x+6=6x^2+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x=3 \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}
\end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 240. Tìm nghiệm dương của phương trình sau

$$\sqrt[8]{x+4} + \sqrt[8]{(4x+1)\left(3x-\frac{2}{x}\right)} = \sqrt[8]{4x^2+x} + \sqrt[8]{3x+12-\frac{2(x+4)}{x^2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \sqrt[8]{x+4} - \sqrt[8]{3x+12-\frac{2(x+4)}{x^2}} = \sqrt[8]{4x^2+x} - \sqrt[8]{(4x+1)\left(3x-\frac{2}{x}\right)} \\
& \Leftrightarrow \sqrt[8]{\frac{x+4}{x}} \left(\sqrt[8]{x} - \sqrt[8]{3x-\frac{2}{x}} \right) = \sqrt[8]{4x+1} \left(\sqrt[8]{x} - \sqrt[8]{3x-\frac{2}{x}} \right) \\
& \Leftrightarrow \left(\sqrt[8]{\frac{x+4}{x}} - \sqrt[8]{4x+1} \right) \left(\sqrt[8]{x} - \sqrt[8]{3x-\frac{2}{x}} \right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x+4=4x^2+x \\ 2x=\frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}
\end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=1$.

Nhận xét.

Thông qua gần 100 bài toán (từ 146 đến 240), chủ yếu các bài toán đều đưa về được dạng nhân tử, rải rác và sắp xếp theo bậc tăng dần, từ căn bậc 3 lên đến căn bậc 8. Chắc hẳn thông qua đọc, hiểu, vận dụng, nhiều bạn độc giả đã quen thuộc và hình thành kỹ năng thuần thục với dạng toán này. Bất kỳ điều gì lớn lao cũng xuất phát từ những thứ đơn giản, nền tảng nhất, thân thương nhất, do đó tác giả xin được nhắc lại dạng thức, cũng kèm theo điều kiện có thể phân tích nhân tử (đưa về phương trình tích với mỗi thừa số gồm hai hạng tử):

$$\sqrt[n]{f(x)} \pm \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{h(x)} \pm \sqrt[n]{k(x)} \text{ trong đó } f(x).g(x) = h(x).k(x).$$

Tác giả xin được dừng chân tại các bài toán với căn bậc 8, các bạn có thể phát triển và đào sâu thêm, biến hóa và sáng tạo ra nhiều bài toán độc đáo hơn nữa, thú vị hơn nữa, lưu ý điều kiện xác định đối với bài toán căn thức bậc chẵn và yếu tố nghiệm hữu tỷ sẽ làm cho thao tác tính toán nhẹ nhàng hơn. Tính phức tạp của các hạng tử tỷ lệ thuận với độ khó bài toán, do vậy hy vọng nhận được nhiều ý kiến đóng góp và phát triển mang tính đột phá từ quý độc giả.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\sqrt[5]{x+3} + 3\sqrt[5]{x+1} = \sqrt[5]{x^2+4x+3} + 3.$
2. $2\sqrt[5]{x+1} + 3\sqrt[5]{x+5} = 3\sqrt[5]{x^2+6x+5} + 2.$
3. $3\sqrt[5]{2x+1} + 7\sqrt[5]{x} = 7\sqrt[5]{2x^2+x} + 3.$
4. $\sqrt[5]{x-29} + 1992\sqrt[5]{x+3} = \sqrt[5]{(x-29)(x+3)} + 1992.$
5. $\sqrt[5]{x+2} + 9\sqrt[5]{x+1945} = 9 + \sqrt[5]{(x+2)(x+1945)}.$
6. $\sqrt[5]{2x+3} + 8\sqrt[5]{x+5} = 8\sqrt[5]{2x^2+13x+15} + 1.$
7. $\sqrt[5]{3x+1} + \sqrt[5]{x+4} = \sqrt[5]{3x^2+13x+4} + 1.$
8. $\sqrt[5]{x-3} + \sqrt[5]{x-5} = 1 + \sqrt[5]{x^2-8x+15}.$
9. $x\sqrt[5]{x-4} + \sqrt[5]{2-x} = \sqrt[5]{(x-4)(2-x)} + x.$
10. $\sqrt[5]{2x-7} + \frac{\sqrt[5]{3-2x}}{x} = 1 + \frac{\sqrt[5]{(2x-7)(3-2x)}}{x}.$
11. $\sqrt[5]{x+5} + \sqrt[5]{x^2+x+1} = 1 + \sqrt[5]{x^3+6x^2+6x+5}.$
12. $\sqrt[5]{2x+5} + \sqrt[5]{x^2+1} = \sqrt[5]{2x^3+5x^2+2x+5} + 1.$
13. $\sqrt[5]{x^2+1} + \sqrt[5]{x+1} = 1 + \sqrt[5]{x^3+x^2+x+1}.$
14. $\sqrt[5]{2x+7} + 2011\sqrt[5]{x+1} = 2011 + \sqrt[5]{2x^2+9x+7}.$
15. $26\sqrt[5]{x+2014} + \sqrt[5]{x+4} = 26 + \sqrt[5]{(x+2014)(x+4)}.$
16. $7\sqrt[5]{x+1} + 7\sqrt[5]{x+7} = \sqrt[5]{x^2+8x+7} + 49.$
17. $\sqrt[5]{x+17} + 1997\sqrt[5]{x+6} = 1997 + \sqrt[5]{(x+6)(x+17)}.$
18. $\sqrt[5]{x-19} + 1890\sqrt[5]{x-5} = 1890 + \sqrt[5]{(x-9)(x-5)}.$
19. $5\sqrt[5]{3x-2} + 2\sqrt[5]{x+6} = 2\sqrt[5]{(3x-2)(x+6)} + 5.$
20. $1941\sqrt[5]{x+15} + \sqrt[5]{x+5} = 1941 + \sqrt[5]{x^2+20x+75}.$
21. $3\sqrt[5]{x+4} + 4\sqrt[5]{5-x} = 12\sqrt[5]{(x+4)(5-x)} + 1.$
22. $1954\sqrt[5]{x+7} + \sqrt[5]{x+5} = 1 + 1954\sqrt[5]{(x+7)(x+5)}.$
23. $\sqrt[5]{x^2+1} + 4\sqrt[5]{x+1} = 4 + \sqrt[5]{x^3+x^2+x+1}.$
24. $\sqrt[5]{x-30} + 1975\sqrt[5]{x-4} = 1975 + \sqrt[5]{(x-30)(x-4)}.$
25. $4\sqrt[5]{2x+1} + 5\sqrt[5]{3x+1} = 1 + 20\sqrt[5]{6x^2+5x+1}.$
26. $2\sqrt[5]{x^2+x+1} + 5\sqrt[5]{x-1} = 10\sqrt[5]{x^3-1} + 1.$
27. $\sqrt[5]{x^2-2x+3} + \sqrt[5]{x^2+2x+3} = \sqrt[5]{x^4+2x^2+9} + 1.$
28. $\sqrt[5]{x^2-x+1} + 2\sqrt[5]{x^2+x+1} = \sqrt[5]{x^4+x^2+1} + 2.$
29. $\sqrt[5]{x^2-2x+2} + 5\sqrt[5]{x^2+2x+2} = 1 + 5\sqrt[5]{x^4+4}.$
30. $\sqrt[5]{x^2+4x+9} + \sqrt[5]{x^2-4x+7} = \sqrt[5]{x^4-8x+63} + 1.$
31. $1974\sqrt[6]{x-19} + \sqrt[6]{x-1} = 1974 + \sqrt[6]{(x-19)(x-1)}.$

32. $\sqrt[6]{x+1} + 1959\sqrt[6]{x-1} = 1959 + \sqrt[6]{x^2-1}$.
33. $1988\sqrt[6]{x+14} + \sqrt[6]{x+3} > 1988 + \sqrt[6]{(x+14)(x+3)}$.
34. $\sqrt[6]{x-5} + 2\sqrt[6]{x-4} = 2 + \sqrt[5]{x^2-9x+20}$.
35. $1979\sqrt[6]{x+7} + \sqrt[6]{x+1} = 1979 + \sqrt[6]{x^2+8x+7}$.
36. $1975\sqrt[6]{x+2} + \sqrt[6]{x+5} < 1975 + \sqrt[6]{(x+2)(x+5)}$.
37. $1964\sqrt[6]{x+5} + \sqrt[6]{x+8} = 1964 + \sqrt[6]{x^2+13x+40}$.
38. $\sqrt[6]{x-3} + \sqrt[6]{x-4} = 1 + \sqrt[6]{x^2-7x+12}$.
39. $1945\sqrt[6]{x+19} + \sqrt[6]{x+5} = \sqrt[6]{(x+19)(x+5)} + 1945$.
40. $16\sqrt[6]{x+4} + \sqrt[4]{x+1975} > 16 + \sqrt[6]{(x+4)(x+1975)}$.
41. $\sqrt[6]{x^2-x+1} + 5\sqrt[6]{x+1} = \sqrt[6]{x^3+1} + 5$.
42. $\sqrt[6]{x+2} + 1963\sqrt[6]{x+1} = 1963 + \sqrt[6]{x^2+3x+2}$.
43. $\sqrt[6]{x^2+x+1} + 3\sqrt[6]{x-1} = 3\sqrt[6]{x^3-1} + 1$.
44. $7\sqrt[6]{x+3} + \sqrt[6]{x-1} = \sqrt[6]{x^2+2x-3} + 7$.
45. $2\sqrt[7]{x+1} + \sqrt[7]{2x+1} = 2 + \sqrt[7]{2x^2+3x+1}$.
46. $2\sqrt[7]{x} + 15\sqrt[7]{x+5} = 6\sqrt[7]{x^2+5x+5}$.
47. $\sqrt[7]{x+3} + \sqrt[7]{2x+1} = \sqrt[7]{2x^2+7x+3} + 1$.
48. $\sqrt[7]{x-4} + 3\sqrt[7]{x+4} = \sqrt[7]{x^2-16} + 3$.
49. $\sqrt[7]{x-1} + 2\sqrt[7]{x^2+x+1} = \sqrt[7]{x^3-1} + 2$.
50. $2\sqrt[7]{x+1} + 5\sqrt[7]{x^2-x+1} = \sqrt[7]{x^3+1} + 10$.
51. $2\sqrt[7]{x^2-x+1} - \sqrt[7]{x^2+x+1} = 2\sqrt[7]{x^4+x^2+1} - 1$.
52. $\sqrt[7]{x+17} + 1997\sqrt[7]{x+6} = \sqrt[7]{(x+17)(x+6)} + 1997$.
53. $1973\sqrt[7]{x+27} + \sqrt[7]{x+1} = \sqrt[7]{x^2+28x+27} + 1973$.
54. $\sqrt[7]{x+1} + 1949\sqrt[7]{x-10} = \sqrt[7]{(x+1)(x-10)} + 1949$.
55. $\sqrt[7]{21x+7} + 1954\sqrt[7]{21x-7} = 1954\sqrt[7]{(21x-7)(21x+7)} + 1$.
56. $\sqrt[8]{1-x} + \sqrt[8]{1+x} = 1 + \sqrt[8]{1-x^2}$.
57. $\sqrt[8]{x+30} + 1980\sqrt[8]{x+3} = \sqrt[8]{(x+30)(x+3)} + 1980$.
58. $1975\sqrt[8]{x+21} + \sqrt[8]{x+4} = \sqrt[8]{(x+21)(x+4)} + 1975$.
59. $\sqrt[8]{x+3} + 1930\sqrt[8]{x+2} = 1930\sqrt[8]{(x+3)(2+x)} + 1$.
60. $\sqrt[8]{x-3} + 1931\sqrt[8]{x-26} = \sqrt[8]{(x-3)(x-26)} + 1931$.
61. $\sqrt[8]{x+30} + 1975\sqrt[8]{x+4} = \sqrt[8]{x^2+34x+120} + 1975$.
62. $1954\sqrt[8]{x+10} + \sqrt[8]{x-10} = \sqrt[8]{x^2-100} + 1954$.
63. $\sqrt[8]{16x+5} + 1956\sqrt[8]{16x-5} = \sqrt[8]{(16x-5)(16x+5)} + 1956$.
64. $\sqrt[8]{17x+4} + 1975\sqrt[8]{17x-4} = \sqrt[8]{(17x+4)(17x-4)} + 1975$.

65. $\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{\frac{2}{x} + 1} = \sqrt[5]{2x+1} + \sqrt[5]{\frac{2+x}{1+2x}}.$
66. $\sqrt[5]{2x-1} + \sqrt[5]{\frac{5x^2+x+3}{2x-1}} = \sqrt[5]{2x+7} + \sqrt[5]{\frac{5x^2+x+3}{2x+7}}.$
67. $\sqrt[5]{x+3} + \sqrt[5]{\frac{5x^3+2x+1}{x+3}} = \sqrt[5]{\frac{5x^3+2x+1}{3x-2}} + \sqrt[5]{3x-2}.$
68. $\sqrt[5]{2x+1} + \sqrt[5]{\frac{2x^2+x+3}{2x+1}} = \sqrt[5]{3-x} + \sqrt[5]{\frac{2x^2+x+3}{3-x}}.$
69. $\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{1 + \frac{6}{x}} = \sqrt[5]{6x+1} + \sqrt[5]{\frac{x+6}{6x+1}}.$
70. $\sqrt[5]{x^2+3} + \sqrt[5]{\frac{x^2+x+4}{x^2+3}} < \sqrt[5]{x+1} + \sqrt[5]{\frac{x^2+x+4}{x+1}}.$
71. $\sqrt[5]{2x^2+3} + \sqrt[5]{\frac{7x^2+2x+6}{2x^2+3}} \geq \sqrt[5]{x+2} + \sqrt[5]{\frac{7x^2+2x+6}{x+2}}.$
72. $\sqrt[5]{4x^2-1} + \sqrt[5]{\frac{x^2+x+1}{4x^2-1}} < \sqrt[5]{3x-2} + \sqrt[5]{\frac{x^2+x+1}{3x-2}}.$
73. $\sqrt[5]{2x-1} + \sqrt[5]{\frac{x^3+1}{2x-1}} \leq \sqrt[5]{x^2+1} + \sqrt[5]{\frac{x^3+1}{x^2+1}}.$
74. $\sqrt[5]{x+3} + \sqrt[5]{\frac{x^3+2x+5}{x+3}} \leq \sqrt[5]{x+1} + \sqrt[5]{\frac{x^3+2x+5}{x+1}}.$
75. $\sqrt[5]{x^2-x+2} + \sqrt[5]{\frac{3x^3+1}{x^2-x+2}} \leq \sqrt[5]{3x+1} + \sqrt[5]{\frac{3x^3+1}{x+1}}.$
76. $\sqrt[5]{2x^2-x+3} + \sqrt[5]{\frac{x^3+3x^2+4}{2x^2-x+3}} \geq \sqrt[5]{x^2-x+2} + \sqrt[5]{\frac{x^3+3x^2+4}{x^2-x+2}}.$
77. $\sqrt[5]{x^2-x+2} + \sqrt[5]{\frac{x^3+x^2+x+3}{x^2-x+2}} > \sqrt[5]{x+1} + \sqrt[5]{\frac{x^3+x^2+x+3}{x+1}}.$
78. $\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{\frac{x^3+x+1}{x}} = \sqrt[6]{x+2} + \sqrt[6]{\frac{x^3+x+1}{x+2}}.$
79. $\sqrt[6]{2x-1} + \sqrt[6]{\frac{5x^3-x+1}{2x-1}} \leq \sqrt[6]{x^2-x+5} + \sqrt[6]{\frac{5x^3-x+1}{x^2-x+5}}.$
80. $\sqrt[6]{x+1} + \sqrt[6]{\frac{x^2-x+8}{x+1}} < \sqrt[6]{x^2+3} + \sqrt[6]{\frac{x^2-x+8}{x^2+3}}.$
81. $\sqrt[6]{x+1} + \sqrt[6]{\frac{x^3+x^2+2}{x+1}} \leq \sqrt[6]{x^2+1} + \sqrt[6]{\frac{x^3+x^2+2}{x^2+1}}.$
82. $\sqrt[6]{\frac{x^3+1}{x^2+1}} + \sqrt[6]{x^2+1} = \sqrt[6]{x^2-x+1} + \sqrt[6]{x+1}.$
83. $\sqrt[6]{\frac{x^3+8}{3x+4}} + \sqrt[6]{3x+4} = \sqrt[6]{x^2-2x+4} + \sqrt[6]{x+2}.$

$$84. \sqrt[6]{\frac{x^4+4}{x^2+x+2}} + \sqrt[6]{x^2+x+2} < \sqrt[6]{x^2-2x+2} + \sqrt[6]{x^2+2x+2}.$$

$$85. \sqrt[6]{x^2+1} + \sqrt[6]{\frac{x^2-2x+5}{x^2+1}} = \sqrt[6]{x+1} + \sqrt[6]{\frac{x^2-2x+5}{x+1}}.$$

$$86. \sqrt[6]{x^3+1} + \sqrt[6]{\frac{x^2-3x+6}{x^3+1}} = \sqrt[6]{x^2+1} + \sqrt[6]{\frac{x^2-3x+6}{x^2+1}}.$$

$$87. \sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{x^2 + \frac{2}{x} + 1} \leq \sqrt[6]{x^2+x+1} + \sqrt[6]{\frac{x^3+x+2}{x^2+x+1}}.$$

$$88. \sqrt[6]{2x-1} + \sqrt[6]{\frac{x}{2x-1}} = \sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{x-1 + \frac{1}{x}}.$$

$$89. \sqrt[7]{x} + \sqrt[7]{\frac{3x+5}{x}} = \sqrt[7]{x+7} + \sqrt[7]{\frac{3x+5}{x+7}}.$$

$$90. \sqrt[7]{x+2} + \sqrt[7]{\frac{5x^2+x+6}{x+2}} < \sqrt[7]{x^2+3} + \sqrt[7]{\frac{5x^2+x+6}{x^2+3}}.$$

$$91. \sqrt[7]{\frac{x^3+27}{2x^2+9}} + \sqrt[7]{2x^2+9} = \sqrt[7]{x+3} + \sqrt[7]{x^2-3x+9}.$$

$$92. \sqrt[7]{\frac{x^3+1}{2x^3+1}} + \sqrt[7]{2x^3+1} = \sqrt[7]{x^2-x+1} + \sqrt[7]{x+1}.$$

$$93. \sqrt[7]{\frac{x^4-8x+63}{5x^3+9}} + \sqrt[7]{5x^3+9} = \sqrt[7]{x^2+4x+9} + \sqrt[7]{x^2-4x+7}.$$

$$94. \sqrt[7]{\frac{x^4+x^2+1}{7x+1}} + \sqrt[7]{7x+1} \geq \sqrt[7]{x^2-x+1} + \sqrt[7]{x^2+x+1}.$$

$$95. \sqrt[7]{x+2} + \sqrt[7]{\frac{2x^2-x+3}{x+2}} = \sqrt[7]{x^2+2} + \sqrt[7]{\frac{2x^2-x+3}{x^2+2}}.$$

$$96. \sqrt[8]{x} + \sqrt[8]{x + \frac{4}{x} - 2} = \sqrt[8]{x^2-x+3} + \sqrt[8]{\frac{x^2-2x+4}{x^2-x+3}}.$$

$$97. \sqrt[8]{\frac{3}{x}} + 2 + \sqrt[8]{x} = \sqrt[8]{4x+1} + \sqrt[8]{\frac{2x+3}{4x+1}}.$$

$$98. \sqrt[8]{x+2} + \sqrt[8]{\frac{2x^2-x+8}{x+2}} = \sqrt[8]{2x+1} + \sqrt[8]{\frac{2x^2-x+8}{2x+1}}.$$

$$99. \sqrt[8]{\frac{4x^3+x-1}{x+1}} + \sqrt[8]{x+1} = \sqrt[8]{2x-1} + \sqrt[8]{2x^2+x+1}.$$

III. MỘT SỐ TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 8.*
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
2. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 9.*
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
3. *Nâng cao và phát triển toán 8, tập 1 – tập 2.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
4. *Nâng cao và phát triển toán 9, tập 1 – tập 2.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
5. *Toán nâng cao Đại số 10.*
Nguyễn Huy Đoan; NXB Giáo dục Việt Nam; 1999.
6. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Đại số 10.*
Nguyễn Huy Đoan; Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2006.
7. *Tài liệu chuyên toán: Đại số 10 – Bài tập Đại số 10.*
Đoàn Quỳnh – Doãn Minh Cường – Trần Nam Dũng – Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2010.
8. *Một số chuyên đề Đại số bồi dưỡng học sinh giỏi THPT.*
Nguyễn Văn Mậu – Nguyễn Văn Tiến và một số tác giả; NXB Giáo dục Việt Nam; 2009.
9. *Tuyển tập các bài toán hay và khó Đại số 9.*
Nguyễn Đức Tấn – Đặng Đức Trọng – Nguyễn Cao Huynh – Vũ Minh Nghĩa – Bùi Ruy Tân – Lương Anh Văn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
10. *Một số phương pháp chọn lọc giải các bài toán sơ cấp, tập 1 – tập 3.*
Phan Đức Chính – Phạm Văn Điều – Đỗ Văn Hà – Phạm Văn Hạp – Phạm Văn Hùng – Phạm Đăng Long – Nguyễn Văn Mậu – Đỗ Thanh Sơn – Lê Đình Thịnh; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 1997.
11. *Bài giảng chuyên sâu Toán THPT: Giải toán Đại số 10.*
Lê Hồng Đức – Nhóm Cụ Môn; NXB Hà Nội; 2011.
12. *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình.*
Nguyễn Văn Mậu; NXB Giáo dục Việt Nam; 1994.
13. *Toán bồi dưỡng học sinh phổ thông trung học – quyển 1; Đại số.*
Hàn Liên Hải – Phan Huy Khải – Đào Ngọc Nam – Nguyễn Đạo Phương – Lê Tất Tôn – Đặng Quan Viễn; NXB Hà Nội; 1991.
14. *Phương trình và hệ phương trình không mẫu mực.*
Nguyễn Đức Tấn – Phan Ngọc Thảo; NXB Giáo dục Việt Nam; 1996.
15. *Chuyên đề bồi dưỡng Toán cấp ba; Đại số.*
Nguyễn Sinh Nguyên; NXB Đà Nẵng; 1997.
16. *Giải toán Đại số sơ cấp (Dùng cho học sinh 12 chuyên, luyện thi đại học).*
Trần Thành Minh – Vũ Thiện Căn – Võ Anh Dũng; NXB Giáo dục Việt Nam; 1995.
17. *Những dạng toán điển hình trong các kỳ thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng; Tập 3.*
Bùi Quang Trường; NXB Hà Nội; 2002.
18. *Ôn luyện thi môn Toán THPT theo chủ đề; Tập một: Đại số và lượng giác.*
Cung Thế Anh; NXB Giáo dục Việt Nam; 2011.
19. *Phương pháp giải toán trọng tâm.*
Phan Huy Khải; NXB Đại học Sư phạm; 2011.
20. *Các bài giảng luyện thi môn Toán; Tập 2.*
Phan Đức Chính – Vũ Dương Thụy – Đào Tam – Lê Thống Nhất; NXB Giáo dục Việt Nam; 1993.
21. *Hệ phương trình và phương trình chứa căn thức.*
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2006.

22. **Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT Chuyên trực thuộc đại học và THPT Chuyên các tỉnh thành.**
23. **Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT hệ đại trà các địa phương trên toàn quốc.**
24. **Đề thi học sinh giỏi môn toán khối 8 đến khối 12 các cấp.**
25. **Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán (chính thức – dự bị) qua các thời kỳ.**
26. **Đề thi Olympic 30 tháng 4 Toán học khối 10, khối 11 các tỉnh miền Trung và Nam bộ (1995 – 2013).**
27. **Các tạp chí toán học:** Tạp chí Toán học và tuổi trẻ; Tạp chí Toán tuổi thơ 2 THCS; Tạp chí Kvant...
28. **Các diễn đàn toán học:** Boxmath.vn; Math.net.vn; Mathscope.org; Onluyentoan.vn; Diendantoanhoc.net; Math.net.vn; K2pi.net; Mathlink.ro;...
29. **Một số trang mạng học tập thông qua facebook; twiter;...**



THÂN THỂ TẠI NGỤC TRUNG
TINH THẦN TẠI NGỤC NGOẠI
DỤC THÀNH ĐẠI SỰ NGHIỆP
TINH THẦN CẢNH YẾU ĐẠI

TÀI LIỆU CHÍNH THỨC

TÀI LIỆU THAM KHẢO TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

$\sqrt[17]{30.06.1954}$

**CHUYÊN ĐỀ
PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH**

**LÝ THUYẾT SỬ DỤNG BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG,
NÂNG CAO LỬY THỪA (PHẦN 5)**

TRUNG ĐOÀN NGUYỄN CHÍCH – QUÂN ĐOÀN BỘ BINH

**CHỦ ĐẠO: SỬ DỤNG LINH HOẠT PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG,
NÂNG CAO LỬY THỪA**

- **PHÂN TÍCH HÀNG ĐẲNG THỨC (PHẦN 1).**
- **PHÂN TÍCH NHÂN TỬ – ĐƯA VỀ DẠNG TÍCH, THƯƠNG (PHẦN 1).**
- **MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC.**
- **BÀI TOÁN NHIỀU CÁCH GIẢI.**

CREATED BY GIANG SƠN (FACEBOOK); GACMA1431988@GMAIL.COM (GMAIL)

THỦ ĐÔ HÀ NỘI – MÙA THU 2014

“Non sông Việt Nam có trở nên tươi đẹp hay không, dân tộc Việt Nam có bước tới đài vinh quang để sánh vai với các cường quốc năm châu được hay không, chính là nhờ một phần lớn ở công học tập của các em”

(Trích thư Chủ tịch Hồ Chí Minh).



*“À á ru hời...ơ hời...ru.
Mẹ thương con có hay chăng, thương từ khi thai nghén trong lòng.
Mấy nắng sớm chiều mưa rông.
Chín tháng so chín năm, gian khó tính khôn cùng.
À á ru hời...ơ hời...ru...”*

(Mẹ yêu con – Nguyễn Văn Tý; 1956).

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH**LÝ THUYẾT SỬ DỤNG BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG – NÂNG CAO LŨY THỪA (PHẦN 5)****TRUNG ĐOÀN NGUYỄN CHÍCH – QUÂN ĐOÀN ĐOÀN BỘ BINH**

Trong chương trình Toán học phổ thông nước ta, cụ thể là chương trình Đại số, phương trình và bất phương trình là một nội dung quan trọng, phổ biến trên nhiều dạng toán xuyên suốt các cấp học, cũng là bộ phận thường thấy trong các kỳ thi kiểm tra chất lượng học kỳ, thi tuyển sinh lớp 10 THPT, thi học sinh giỏi môn Toán các cấp và kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng với hình thức hết sức phong phú, đa dạng. Mặc dù đây là một đề tài quen thuộc, chính thống nhưng không vì thế mà giảm đi phần thú vị, nhiều bài toán cơ bản tăng dần đến mức khó thậm chí rất khó, với các biến đổi đẹp kết hợp nhiều kiến thức, kỹ năng vẫn làm khó nhiều bạn học sinh THCS, THPT. Ngoài phương trình đại số bậc cao, phương trình phân thức hữu tỷ thì phương trình chứa căn (còn gọi là phương trình vô tỷ) đang được đông đảo các bạn học sinh, các thầy cô giáo và các chuyên gia Toán phổ thông quan tâm sâu sắc. Chương trình Toán Đại số lớp 9 THCS bước đầu giới thiệu các phép toán với căn thức, kể từ đó căn thức xuất hiện hầu hết trong các vấn đề đại số, hình học, lượng giác chạy dọc chương trình Toán THPT. Sự đa dạng về hình thức của lớp bài toán căn thức đặt ra yêu cầu cấp thiết là làm thế nào để đơn giản hóa, thực tế các phương pháp giải, kỹ năng, mẹo mực đã hình thành, đi vào hệ thống. Về cơ bản để làm việc với lớp phương trình, bất phương trình vô tỷ chúng ta ưu tiên khử hoặc giảm các căn thức phức tạp của bài toán. Sử dụng biến đổi tương đương – nâng cao lũy thừa là một phương thức cơ bản nhất, đơn giản nhất nhằm mục đích đó. Phép biến đổi tương đương theo nghĩa rộng là một phép toán bắt buộc thực hiện đối với nhiều dạng phương trình, hệ phương trình, vấn đề quan trọng hơn là việc giải quyết các bước trung gian dẫn đường. Tiếp theo lý thuyết phần 4, tác giả trân trọng giới thiệu với các bạn học sinh và độc giả phần lý thuyết phần 5, trọng tâm tài liệu phần 5 đi sâu các bài toán sử dụng linh hoạt phép biến đổi tương đương, nâng lũy thừa, bao gồm nhóm hạng tử, phân tích nhân tử nâng cao và kỹ thuật phân tích hằng đẳng thức hiệu hai bình phương đưa về phương trình, bất phương trình tích – thương cơ bản. Tài liệu nhỏ được viết theo trình tự kiến thức tăng dần, phù hợp với các bạn học sinh THCS (lớp 9) ôn thi vào lớp 10 THPT, các bạn học sinh THPT thi học sinh giỏi Toán các cấp và luyện thi vào hệ đại học, cao đẳng, cao hơn là tài liệu tham khảo dành cho các thầy cô giáo và các bạn yêu Toán khác.

I. KIẾN THỨC – KỸ NĂNG CHUẨN BỊ

1. Nắm vững các biến đổi đại số cơ bản (nhân, chia đa thức, phân tích đa thức thành nhân tử, biến đổi phân thức đại số và căn thức).
2. Kỹ năng biến đổi tương đương, nâng lũy thừa, phân tích hằng đẳng thức, thêm bớt.
3. Sử dụng thành thạo các ký hiệu logic trong phạm vi toán phổ thông.
4. Nắm vững lý thuyết bất phương trình, dấu nhị thức bậc nhất, dấu tam thức bậc hai.

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH VÀ KINH NGHIỆM THAO TÁC

Để mở đầu cho dạng toán phương trình, bất phương trình giải được bằng cách sử dụng phân tích hằng đẳng thức, tác giả xin trích lược một số bài toán đã xuất hiện tại các kỳ thi chính thức như sau.

Thí dụ 1, trích lược câu 2, Đề thi tuyển sinh vào lớp 10; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi môn chuyên Khoa học tự nhiên); Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong, Thành phố Hồ Chí Minh; Năm học 1999 – 2000.

Bài toán 1. Giải phương trình $x^2 + 4x + 5 = 2\sqrt{2x+3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -\frac{3}{2}$.

Nhận xét $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 10(x^2 + 4x) + 25 &= 4(2x+3) \Leftrightarrow x^4 + 8x^3 + 26x^2 + 32x + 13 = 0 \\ \Leftrightarrow x^2(x^2 + 2x + 1) + 6x(x^2 + 2x + 1) + 13(x^2 + 2x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 6x + 13) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = 0 \\ (x+3)^2 = -4 \end{cases} \Rightarrow x = -1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -\frac{3}{2}$. Đặt $\sqrt{2x+3} = y+2, (y \geq -2)$ suy ra $2x+3 = y^2 + 4y + 4 \Leftrightarrow y^2 + 4y + 1 = 2x$.

Phương trình đã cho trở thành $x^2 + 4x + 5 = 2(y+2) \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 2y$. Vậy ta có hệ phương trình

$$\begin{aligned} \begin{cases} y^2 + 4y + 1 = 2x \\ x^2 + 4x + 1 = 2y \end{cases} &\Rightarrow y^2 - x^2 + 4y - 4x = 2x - 2y \\ \Leftrightarrow (y-x)(y+x) &= 6(x-y) \Leftrightarrow (x-y)(x+y+6) = 0 \end{aligned}$$

➤ Với $x = y \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 2x \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

➤ Dễ thấy phương trình $x + y + 6 = 0$ vô nghiệm vì $x + y + 6 > 0, \forall x \geq -\frac{3}{2}; \forall y \geq -2$.

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm

Lời giải 3.

Điều kiện $x \geq -\frac{3}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 + 2x + 3 - 2\sqrt{2x+3} + 1 &= 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (\sqrt{2x+3} - 1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{2x+3}-1=0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 2x+3=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1 \end{aligned}$$

Thử lại vào phương trình thấy nghiệm đúng, vậy $S = \{-1\}$.

Nhận xét.

Lời giải 3 là nội dung trọng tâm của tài liệu, sử dụng phép biến đổi tương đương (không thông qua lũy thừa), đi đến lời giải hết sức ngắn gọn, thuần túy. Lời giải 1 sử dụng phép nâng lũy thừa quy về phương trình bậc bốn, khéo léo phân tích nhân tử cũng đi đến kết quả tương tự, vấn đề này đã được trình bày tại phần 4 cùng tiêu mục. Lời giải 2 sử dụng ẩn số phụ quy về hệ phương trình, tác giả xin được trình bày tại lý thuyết các phần sau.

Thí dụ 2, trích lược câu 2, Đề thi tuyển sinh vào lớp 10; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Toán, chuyên Tin học); Trường THPT Chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; Năm học 2001 – 2002.

Bài toán 2. Giải phương trình $4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 14 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -1$.

Phương trình đã cho biến đổi về

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 14 - 4\sqrt{x+1} &= 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + x + 1 - 4\sqrt{x+1} + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow (x-3)^2 + (\sqrt{x+1} - 2)^2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ \sqrt{x+1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = 3$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -1$.

Nhận xét rằng $x^2 - 5x + 14 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{31}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 16(x+1) &= x^4 - 10x^3 + 25x^2 + 28(x^2 - 5x) + 196 \\ \Leftrightarrow x^4 - 10x^3 + 53x^2 - 156x + 180 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2(x^2 - 6x + 9) - 4x(x^2 - 6x + 9) + 20(x^2 - 6x + 9) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 20)(x^2 - 6x + 9) &= 0 \\ \Leftrightarrow [(x-2)^2 + 16](x-3)^2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = -16 \\ x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 3$.

Thí dụ 3, trích lược câu 2, Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 THCS; Môn Toán, tỉnh Thái Bình năm học 2012 – 2013.

Bài toán 3. Giải phương trình $2x^2 + 2x + 1 = (2x+3)(\sqrt{x^2+x+2}-1) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Ta có $x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên điều kiện xác định $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x + 1 &= (2x+3)\sqrt{x^2+x+2} - 2x - 3 \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 4 - (2x+3)\sqrt{x^2+x+2} &= 0 \Leftrightarrow 8x^2 + 16x + 16 - 4(2x+3)\sqrt{x^2+x+2} = 0 \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 12x + 9 - 4(2x+3)\sqrt{x^2+x+2} + 4(x^2+x+2) &= 1 \\ \Leftrightarrow (2x+3)^2 - 4(2x+3)\sqrt{x^2+x+2} + 4(x^2+x+2) &= 1 \Leftrightarrow (2x+3-2\sqrt{x^2+x+2})^2 = 1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3-2\sqrt{x^2+x+2} = 1 \\ 2x+3-2\sqrt{x^2+x+2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x+2} = x+1 & (1) \\ \sqrt{x^2+x+2} = x+2 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

$$\circ \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x + 2 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\circ (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + x + 2 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 3x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -\frac{2}{3}; x = 1$.

Thí dụ 4, trích lược câu 2, Đề thi tuyển sinh vào lớp 10; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Trường THPT Chuyên ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội; Năm học 2005 – 2006.

Bài toán 4. Giải phương trình $x + 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3-2x} = 11$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $-3 \leq x \leq \frac{3}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 11 - x - 4\sqrt{x+3} - 2\sqrt{3-2x} &= 0 \Leftrightarrow (x+3 - 4\sqrt{x+3} + 4) + (3-2x - 2\sqrt{3-2x} + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 2)^2 + (\sqrt{3-2x} - 1)^2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 2 \\ \sqrt{3-2x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 4 \\ 3-2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Thí dụ 5, trích lược câu 2, Đề thi tuyển sinh vào lớp 10; Môn Toán (Dành cho tất cả các thí sinh dự thi); Trường THPT Chuyên Hà Tĩnh, Tỉnh Hà Tĩnh; Năm học 2007 – 2008.

Bài toán 5. Giải phương trình $2x^2 + 2x + 1 = \sqrt{4x+1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{4}$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x + 2 - 2\sqrt{4x+1} &= 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 - 2\sqrt{4x+1} + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow 4x^2 + (\sqrt{4x+1} - 1)^2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ \sqrt{4x+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x+1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Thử trực tiếp thấy $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{4}$.

Nhận xét $2x^2 + 2x + 1 = x^2 + (x+1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} (2x^2 + 2x + 1)^2 &= 4x + 1 \Leftrightarrow 4x^4 + 4x^2 + 8x^3 + 2(2x^2 + 2x) + 1 = 4x + 1 \\ \Leftrightarrow 4x^4 + 8x^3 + 8x^2 &= 0 \Leftrightarrow 4x^2(x^2 + 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ (x+1)^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện, đi đến kết luận nghiệm $x = 0$.

Nhận xét.

Trong quá trình giải một bài toán, đôi khi giữa chặng đường chúng ta thường gặp những sự cố bất thường, sự đơn điệu, hay những may mắn, những món quà tư duy đặc biệt, hay các manh nha kết nối các bài toán lại với nhau, điều này hết sức bình thường và hữu ích. Bài toán 5 ở trên còn có thể giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình đối xứng, xin được trình bày tại các phần tài liệu sau. Dĩ nhiên cùng một bài toán 5 ở trên và các bài toán khác, cùng là ý tưởng biến đổi tương đương nhưng hình thức các lời giải đều có những nét riêng độc đáo, tùy theo từng trường hợp phát huy tác dụng riêng biệt hiệu quả, vì vậy tác giả trình bày các cách giải khác nhau mong muốn quý độc giả có cái nhìn toàn diện nhất, sẵn sàng ứng phó với các tình huống có thể xảy ra !

Thí dụ 6, trích lược câu 3, Đề thi tuyển sinh vào lớp 10; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Toán, chuyên Tin học); Trường THPT Chuyên Nguyễn Trãi, Tỉnh Hải Dương; Năm học 2011 – 2012.

Bài toán 6. Giải phương trình $x^2 + 4\sqrt{x+3} = 3x+6$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2 &= 3x+6-4\sqrt{x+3} \Leftrightarrow x^2-2x+1 = x+3-4\sqrt{x+3}+4 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 &= (\sqrt{x+3}-2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{x+3}-2 \\ x-1 = 2-\sqrt{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \sqrt{x+3} \\ 3-x = \sqrt{x+3} \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

(1)

(2)

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \text{➤ (1)} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+2x+1 = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+x-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1. \\ \text{➤ (2)} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2-6x+9 = x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2-7x+6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ (x-1)(x-6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1. \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện và thử lại trực tiếp ta có tập nghiệm $S = \{1\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} -x^2+3x+6 &= 4\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x+6 \geq 0 \\ x^4+9x^2+36x+36-2x^2(3x+6) = 16x+48 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x+6 \geq 0 \\ x^4-6x^3-3x^2+20x-12 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x+6 \geq 0 \\ x^2(x^2-2x+1)-4x(x^2-2x+1)-12(x^2-2x+1) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x+6 \geq 0 \\ (x^2-2x+1)(x^2-4x-12) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x+6 \geq 0 \\ (x-1)^2(x-6)(x+2) = 0 \end{cases} \Rightarrow x=1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Thí dụ 7, trích lược câu 3, Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 THCS; Môn Toán, Thành phố Hồ Chí Minh; Năm học 2010 – 2011.

Bài toán 7. Giải phương trình $\sqrt{x+x^2} + \sqrt{x-x^2} = x+1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+x^2 \geq 0 \\ x^2-x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1.$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x+x^2} + 2\sqrt{x-x^2} &= 2x+2 \Leftrightarrow 2x+2-2\sqrt{x+x^2}-2\sqrt{x-x^2} = 0 \\ \Leftrightarrow x+x^2-2\sqrt{x+x^2}+1+x-x^2-2\sqrt{x-x^2}+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x+x^2}-1)^2 + (\sqrt{x-x^2}-1)^2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+x^2} = 1 \\ \sqrt{x-x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+x^2 = 1 \\ x+x^2 = x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+x^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Để thấy hệ phương trình (*) vô nghiệm nên phương trình ban đầu vô nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $\begin{cases} x+x^2 \geq 0 \\ x^2-x \leq 0 \end{cases}$

Ta có $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Áp dụng bất đẳng thức này ta có

$$\sqrt{x+x^2} = \sqrt{1(x+x^2)} \leq \frac{1+x+x^2}{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{x-x^2} = \sqrt{1(x-x^2)} \leq \frac{1+x-x^2}{2} \quad (2)$$

Từ đó suy ra $\sqrt{x+x^2} + \sqrt{x-x^2} \leq \frac{1+x+x^2+1+x-x^2}{2} = \frac{2x+2}{2} = x+1$

Phương trình đã cho có nghiệm khi (1) và (2) đồng thời xảy ra đẳng thức, nghĩa là

$$\begin{cases} \sqrt{x+x^2} = 1 \\ \sqrt{x-x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+x^2 = 1 \\ x+x^2 = x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+x^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Kết luận bài toán vô nghiệm.

Lời giải 3.

Điều kiện $\begin{cases} x+x^2 \geq 0 \\ x^2-x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1. \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x+x^2+x-x^2+2\sqrt{x^2-x^4} &= x^2+2x+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-x^4} = x^2+1 \\ \Leftrightarrow 4(x^2-x^4) &= x^4+2x^2+1 \Leftrightarrow 5x^4-2x^2+1=0 \\ \Leftrightarrow 4x^2+(x^2-1)^2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu vô nghiệm.

Thí dụ 8, trích lược câu 1, Đề thi tuyển sinh vào lớp 10; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Toán, chuyên Tin học); Trường THPT Chuyên Hà Tĩnh, Tỉnh Hà Tĩnh; Năm học 2011 – 2012.

Bài toán 8. Giải phương trình $x^2+2x+3=2|x|\sqrt{2x+3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -\frac{3}{2}$.

Ta có $x^2=|x|^2$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} |x|^2-2|x|\sqrt{2x+3}+2x+3 &= 0 \Leftrightarrow (|x|-\sqrt{2x+3})^2=0 \\ \Leftrightarrow |x| &= \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow x^2=2x+3 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có hai nghiệm $x=-1; x=3$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -\frac{3}{2}$.

Xét hai trường hợp xảy ra

- Nếu $x \geq 0 \Rightarrow |x|=x$, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x\sqrt{2x+3} + 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x - \sqrt{2x+3})^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \sqrt{2x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

- Nếu $-\frac{3}{2} \leq x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x < 0 \\ x^2 + 2x\sqrt{2x+3} + 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x < 0 \\ (x + \sqrt{2x+3})^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x < 0 \\ -x = \sqrt{2x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x < 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x = -1; x = 3$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \geq -\frac{3}{2}$.

Rõ ràng $(x^2 + 2x + 3)|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (x^2 + 2x + 3)^2 &= 4x^2(2x + 3) \Leftrightarrow x^4 + 2x^2(2x + 3) + 4x^2 + 12x + 9 = 4x^2(2x + 3) \\ &\Leftrightarrow x^4 - 2x^2(2x + 3) + 2x^2(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 3)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 1)^2(x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 3 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x = -1; x = 3$.

Thí dụ 9, trích lược câu 2, Đề thi tuyển sinh vào lớp 10; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Toán); Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Thành phố Đà Nẵng; Năm học 2008 – 2009.

Bài toán 9. Giải phương trình $x^2 - 5x + 4 = 2\sqrt{x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 &= x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = (\sqrt{x-1} + 1)^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = \sqrt{x-1} + 1 \\ 2-x = \sqrt{x-1} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = \sqrt{x-1} \\ 1-x = \sqrt{x-1} \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Xét hai trường hợp

$$\text{➤ } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 6x + 9 = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ (x-2)(x-5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$$

$$\text{➤ } (2) \text{ có nghiệm khi } 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1, \text{ kết hợp với điều kiện suy ra } x = 1.$$

Thử lại nghiệm trực tiếp, ta thu được hai nghiệm $x = 1; x = 5$.

Thí dụ 10, trích lược câu 3, Đề thi tuyển sinh vào lớp 10; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Toán, chuyên Tin học); Trường THPT Chuyên Thái Bình, Tỉnh Thái Bình; Năm học 2011 – 2012.

Bài toán 10. Giải phương trình $3x^2 - 5x + 6 = 2x\sqrt{x^2 + x - 3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x^2 + x - 3 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 &3x^2 - 5x + 6 - 2x\sqrt{x^2 + x - 3} = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + x^2 + x - 3 - 2x\sqrt{x^2 + x - 3} + x^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-3)^2 + (\sqrt{x^2 + x - 3} - x)^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ \sqrt{x^2 + x - 3} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x^2 + x - 3 = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Thí dụ 11, trích lược câu 3, Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 THCS; Môn Toán; Đề thi chính thức; Phòng Giáo dục và Đào tạo Quận Phú Nhuận, Thành phố Hồ Chí Minh; Năm học 2004 – 2005.

Bài toán 11. Giải phương trình $x^2 + 7x + 14 = 2\sqrt{x+4}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -4$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 &x^2 + 7x + 14 - 2\sqrt{x+4} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + x + 4 - 2\sqrt{x+4} + 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x+3)^2 + (\sqrt{x+4} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ \sqrt{x+4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x+4=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-3
 \end{aligned}$$

Thử trực tiếp ta thấy phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x = -3$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -4$.

Nhận xét $x^2 + 7x + 14 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 &x^4 + 14x^3 + 49x^2 + 28(x^2 + 7x) + 196 = 4x + 16 \\
 &\Leftrightarrow x^4 + 14x^3 + 77x^2 + 192x + 180 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2(x^2 + 6x + 9) + 8x(x^2 + 6x + 9) + 20(x^2 + 6x + 9) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x^2 + 6x + 9)(x^2 + 8x + 20) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x+3)^2[(x+4)^2 + 4] = 0 \Leftrightarrow x = -3
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -3$.

Thí dụ 12, trích lược câu 2, Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 THCS; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Thành phố Hồ Chí Minh; Năm học 2002 – 2003.

Bài toán 12. Giải phương trình $\sqrt{7-x} + \sqrt{x-5} = x^2 - 12x + 38$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $5 \leq x \leq 7$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 &x^2 - 12x + 38 - \sqrt{7-x} - \sqrt{x-5} = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2x^2 - 24x + 76 - 2\sqrt{7-x} - 2\sqrt{x-5} = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2x^2 - 24x + 72 + 7 - x - 2\sqrt{7-x} + 1 + x + 5 - 2\sqrt{x-5} + 1 = 0
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2(x-6)^2 + (\sqrt{7-x}-1)^2 + (\sqrt{x-5}-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-6=0 \\ \sqrt{7-x}=1 \Leftrightarrow x=6 \\ \sqrt{x-5}=1 \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình có duy nhất nghiệm $x=6$.

Lời giải 2.

Điều kiện $5 \leq x \leq 7$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$(\sqrt{7-x} + \sqrt{x-5})^2 \leq (1^2 + 1^2)(7-x+x-5) = 4 \Rightarrow \sqrt{7-x} + \sqrt{x-5} \leq 2 \quad (1).$$

$$\text{Mặt khác } x^2 - 12x + 38 = (x-6)^2 + 2 \geq 2, \forall x \in \mathbb{R} \quad (2).$$

Như vậy phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (1), (2) đồng thời xảy ra đẳng thức, nghĩa là

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{7-x}}{1} = \frac{\sqrt{x-5}}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-x=x-5 \\ x=6 \end{cases} \Leftrightarrow x=6 \\ x-6=0 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=6$.

Lời giải 3.

Điều kiện $5 \leq x \leq 7$.

Ta có $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Áp dụng bất đẳng thức này ta có

$$\sqrt{7-x} = \sqrt{1 \cdot (7-x)} \leq \frac{1+7-x}{2} = \frac{8-x}{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{x-5} = \sqrt{1 \cdot (x-5)} \leq \frac{1+x-5}{2} = \frac{x-4}{2} \quad (2)$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{7-x} + \sqrt{x-5} \leq \frac{8-x+x-4}{2} = 2 \leq 2 + (x-6)^2 = x^2 - 12x + 38 \quad (3).$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi (1), (2) và (3) đồng thời xảy ra đẳng thức, tức là $\begin{cases} 7-x=x-5=1 \\ x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=6$.

Thử lại trực tiếp thấy phương trình nhận nghiệm duy nhất $x=6$.

Thí dụ 13, trích lược câu 2, Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 THCS (Đề thi chính thức); Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Hải Dương; Năm học 2009 – 2010.

Bài toán 13. Giải phương trình $x^2 - 2x = 2\sqrt{2x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2 &= 2x-1+2\sqrt{2x-1}+1 \Leftrightarrow x^2 = (\sqrt{2x-1}+1)^2 \\ \Leftrightarrow |x| &= |\sqrt{2x-1}+1| \Leftrightarrow x = \sqrt{2x-1}+1 \Leftrightarrow x-1 = \sqrt{2x-1} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-2x+1=2x-1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-4x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2+\sqrt{2} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2+\sqrt{2}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x(x-2) \geq 0 \\ x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 8x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) \geq 0 \\ x^2(x^2 - 4x + 2) + 2(x^2 - 4x + 2) = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) \geq 0 \\ (x^2 + 2)(x^2 - 4x + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) \geq 0 \\ \begin{cases} x^2 = -2 \\ x^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

So sánh với điều kiện đi đến nghiệm $x = 2 + \sqrt{2}$.

Thí dụ 14, trích lược câu 4; Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Toán, chuyên Tin); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Thái Bình, Tỉnh Thái Bình; Năm học 2007 – 2008.

Bài toán 14. Giải phương trình (x, y, z là ẩn số)

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{9-z^2} + z\sqrt{10-x^2} = 10 \quad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} y^2 \leq 1 \\ z^2 \leq 9 \\ x^2 \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ -3 \leq z \leq 3 \\ -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10} \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 10 - x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{9-z^2} - z\sqrt{10-x^2} = 0 \\ & \Leftrightarrow 20 - 2x\sqrt{1-y^2} - 2y\sqrt{9-z^2} - 2z\sqrt{10-x^2} = 0 \\ & \Leftrightarrow (x^2 - 2x\sqrt{1-y^2} + 1 - y^2) + (y^2 - 2y\sqrt{9-z^2} + 9 - z^2) + (z^2 - 2z\sqrt{10-x^2} + 10 - x^2) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x - \sqrt{1-y^2})^2 + (y - \sqrt{9-z^2})^2 + (z - \sqrt{10-x^2})^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{1-y^2} \\ y = \sqrt{9-z^2} \\ z = \sqrt{10-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \quad (1) \\ y^2 + z^2 = 9 \quad (2) \\ z^2 + x^2 = 10 \quad (3) \end{cases} \end{aligned}$$

Cộng từng vế 3 phương trình (1), (2), (3) ta có $2(x^2 + y^2 + z^2) = 20 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 10$.

$$\text{Lúc này, kết hợp tương ứng trở lại với (1), (2), (3) thu được } \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 0 \\ z^2 = 9 \end{cases}$$

Do $x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0 \Rightarrow (x, y, z) = (1; 0; 3)$. Thử lại, kết luận bộ số $(x, y, z) = (1; 0; 3)$ là nghiệm duy nhất.

Thí dụ 15, trích lược câu 1.1, Đề thi tuyển sinh vào lớp 10; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Toán, chuyên Tin học); Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Thành phố Hồ Chí Minh; Năm học 2013 – 2014.

Bài toán 15. Giải phương trình $x\sqrt{2x-2} + 9x = 5 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x\sqrt{2x-2}+10x=18 \Leftrightarrow x^2+2x\sqrt{2x-2}+2x-2=x^2-8x+16$$

$$\Leftrightarrow (x+\sqrt{2x-2})^2=(x-4)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-2}=-4 & (1) \\ \sqrt{2x-2}=4-2x & (2) \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

➤ Phương trình (1) vô nghiệm.

$$\begin{aligned} \text{➤ } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 2x-2=4x^2-16x+16 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 4x^2-18x+18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \in \left\{\frac{3}{2}; 3\right\} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{2}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x\sqrt{2x-2}=9-5x &\Leftrightarrow \begin{cases} x(9-5x) \geq 0 \\ x^2(2x-2)=25x^2-90x+81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{9}{5} \\ 2x^3-27x^2+90x-81=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{9}{5} \\ (x-9)(2x^2-9x+9)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{9}{5} \\ (x-9)(2x-3)(x-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{2}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \geq 1$.

Đặt $\sqrt{2x-2}=t, (t \geq 0)$ ta có $x = \frac{t^2+2}{2}$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} t \cdot \frac{t^2+2}{2} + 5 \cdot \frac{t^2+2}{2} &= 9 \Leftrightarrow t^3+2t+5t^2+10=18 \Leftrightarrow t^3+5t^2+2t-8=0 \\ &\Leftrightarrow (t-1)(t^2+6t+8)=0 \Leftrightarrow (t-1)(t+2)(t+4)=0 \Leftrightarrow t \in \{-4; -2; 1\} \end{aligned}$$

Loại các trường hợp $t = -2; t = -4$. Với $t = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{3}{2}$.

Thí dụ 16, trích lược câu 3, Đề thi tuyển sinh vào lớp 10; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Tin học); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Hùng Vương; Tỉnh Phú Thọ; Năm học 2010 – 2011.

Bài toán 16. Giải phương trình $2x^2-5x+1=\sqrt{2x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x^2-10x+2 &= 2\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow 4x^2-8x+4=2x+1+2\sqrt{2x+1}+1 \\ &\Leftrightarrow (2x-2)^2 = (\sqrt{2x+1}+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=\sqrt{2x+1} & (1) \\ 1-2x=\sqrt{2x+1} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned} \circ (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ 4x^2-12x+9=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ 4x^2-14x+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ 2x^2-7x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7+\sqrt{17}}{4}. \\ \circ (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ 4x^2-4x+1=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 4x^2-6x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0. \end{aligned}$$

So sánh với điều kiện ta đi đến kết luận nghiệm $S = \left\{0; \frac{7+\sqrt{17}}{4}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2x^2-5x+1 \geq 0 \\ 4x^4-20x^3+25x^2+2(2x^2-5x)+1=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+1 \geq 0 \\ 4x^4-20x^3+29x^2-12x=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-5x+1 \geq 0 \\ x(2x-3)(2x^2-7x+4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{7+\sqrt{17}}{4}\right\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta lấy nghiệm $S = \left\{0; \frac{7+\sqrt{17}}{4}\right\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với $4x^2-10x+2=2\sqrt{2x+1}$ (1).

Đặt $\sqrt{2x+1}=2y-3, \left(y \geq \frac{3}{2}\right) \Rightarrow 2x+1=4y^2-12y+9 \Leftrightarrow 4y^2-12y-2x+8=0$.

Phương trình (1) khi đó trở thành $4x^2-10x+2=2(2y-3) \Leftrightarrow 4x^2-10x-4y+8=0$. Ta thu được hệ

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 4y^2-12y-2x+8=0 \\ 4x^2-10x-4y+8=0 \end{cases} \Rightarrow 4y^2-4x^2-8y+8x=0 \\ &\Leftrightarrow (y-x)(y+x)-2(y-x)=0 \Leftrightarrow (y-x)(y+x-2)=0 \end{aligned}$$

$$\checkmark \text{ Nếu } y=x \Rightarrow \begin{cases} 4x^2-14x+8=0 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7+\sqrt{17}}{4}.$$

$$\checkmark \text{ Nếu } y+x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} 4x^2-6x=0 \\ y=2-x; x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Đối chiếu điều kiện đi đến tập hợp nghiệm $S = \left\{0; \frac{7+\sqrt{17}}{4}\right\}$.

Thí dụ 17, trích lược câu 2, Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 THCS; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Nghệ An; Năm học 2009 – 2010.

Bài toán 17. Giải phương trình $x^2 = \sqrt{x^3-x^2} + \sqrt{x^2-x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2(x-1) \geq 0 \\ x(x-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Nhận xét $x = 0$ thỏa mãn phương trình đã cho. Với $x \geq 1$, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 2x\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^2-x} \Leftrightarrow (x^2 - 2x\sqrt{x-1} + x - 1) + (x^2 - x - 2\sqrt{x^2-x} + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - \sqrt{x-1})^2 + (\sqrt{x^2-x} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{x-1} \\ \sqrt{x^2-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = 0$.

Lời giải 2.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2(x-1) \geq 0 \\ x(x-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Nhận xét $x = 0$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Với $x \geq 1$, áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, ta có

$$\sqrt{x^3 - x^2} = \sqrt{x^2(x-1)} \leq \frac{x^2 + x - 1}{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{x^2 - x} = \sqrt{1(x^2 - x)} \leq \frac{x^2 - x + 1}{2} \quad (2)$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{x^3 - x^2} + \sqrt{x^2 - x} \leq \frac{x^2 + x - 1}{2} + \frac{x^2 - x + 1}{2} = x^2.$$

Do đó phương trình đã cho có nghiệm khi (1), (2) đồng thời xảy ra đẳng thức, nghĩa là

$$\begin{cases} x^2 = x - 1 \\ 1 = x^2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = -1 \\ x^2 - x = 1 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset.$$

Vậy phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất là $x = 0$.

Thí dụ 18, trích lược câu 3, Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 THCS; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Quảng Ngãi; Năm học 2010 – 2011.

Bài toán 18. Giải phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{6-x} = \sqrt{x^2 - 8x + 24} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $2 \leq x \leq 6$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x - 2 + 6 - x + 2\sqrt{(x-2)(6-x)} &= x^2 - 8x + 24 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-2)(6-x)} = x^2 - 8x + 20 \\ &\Leftrightarrow x - 2 + 6 - x - 2\sqrt{(x-2)(6-x)} + x^2 - 8x + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x-2} - \sqrt{6-x})^2 + (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = \sqrt{6-x} \\ x-4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 \end{aligned}$$

Đổi chiều và thử trực tiếp ta thấy phương trình nhận nghiệm duy nhất $x = 4$.

Lời giải 2.

Điều kiện $2 \leq x \leq 6$.

Ta có $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0, \forall a \geq 0; b \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{ab} \leq a + b$. Áp dụng bất đẳng thức này ta có

$$\begin{aligned} (\sqrt{x-2} + \sqrt{6-x})^2 &= x-2+6-x+2\sqrt{(x-2)(6-x)} = 4+2\sqrt{(x-2)(6-x)} \\ &\leq 4+[x-2+6-x] = 8 \Rightarrow \sqrt{x-2} + \sqrt{6-x} \leq 2\sqrt{2} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Ngoài ra ta lại có } \sqrt{x^2-8x+24} = \sqrt{(x-4)^2+8} \geq 2\sqrt{2} \quad (2).$$

Phương trình ban đầu có nghiệm khi (1) và (2) đồng thời xảy ra đẳng thức, nghĩa là
$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 6 \\ x-2=6-x \Leftrightarrow x=4. \\ x-4=0 \end{cases}$$

Giá trị này thỏa mãn đề bài nên ta có tập nghiệm $S = \{4\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $2 \leq x \leq 6$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$\begin{aligned} (\sqrt{x-2} + \sqrt{6-x})^2 &\leq (1^2+1^2)(x-2+6-x) = 2.4 = 8 \\ \Rightarrow \sqrt{x-2} + \sqrt{6-x} &\leq \sqrt{8} \leq \sqrt{8+(x-4)^2} = \sqrt{x^2-8x+24} \end{aligned}$$

Do vậy phương trình đã cho có nghiệm khi các dấu đẳng thức đồng thời xảy ra, nghĩa là

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{x-2}}{1} = \frac{\sqrt{6-x}}{1} \\ x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=6-x \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Thử lại ta có nghiệm của phương trình là $S = \{4\}$.

Trích lược câu 2, Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Toán, chuyên Tin học); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Đại học Vinh; Tỉnh Nghệ An; Năm học 2004 – 2005.

Bài toán 19. Giải phương trình $x^2 + \sqrt{x+2004} = 2004 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -2004$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2 &= 2004 - \sqrt{x+2004} \\ \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} &= x + 2004 - \sqrt{x+2004} + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\sqrt{x+2004} - \frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \sqrt{x+2004} \\ -x = \sqrt{x+2004} \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x + 1 = x + 2004 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 2003 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{8013}}{2}.$
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 - x - 2004 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{8017}}{2}.$

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Thí dụ 20, trích lược câu 3, Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 THCS; Môn Toán; Đề thi chính thức; Phòng Giáo dục và Đào tạo Huyện Hoàng Hóa, Tỉnh Thanh Hóa; Năm học 2013 – 2014.

Bài toán 20. Giải phương trình $x^2 - 7x = 6\sqrt{x+5} - 30 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -5$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 - 7x - 6\sqrt{x+5} + 30 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + x + 5 - 6\sqrt{x+5} + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + (\sqrt{x+5}-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ \sqrt{x+5}=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=4$$

Thử lại trực tiếp ta nhận nghiệm $x=4$.

Thí dụ 21, trích lược câu 2, Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 THCS; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Thành phố Hồ Chí Minh; Năm học 2000 – 2001.

Bài toán 21. Giải phương trình $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} = x^2 - 8x + 18$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $3 \leq x \leq 5$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^2 - 16x + 36 = 2\sqrt{x-3} + 2\sqrt{5-x} \Leftrightarrow 2x^2 - 16x + 36 - 2\sqrt{x-3} - 2\sqrt{5-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 16x + 32 + x - 3 - 2\sqrt{x-3} + 1 + 5 - x - 2\sqrt{5-x} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-4)^2 + (\sqrt{x-3}-1)^2 + (\sqrt{5-x}-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ \sqrt{x-3}=1 \\ \sqrt{5-x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=4$$

Thử lại nghiệm trực tiếp ta có nghiệm $x=4$.

Lời giải 2.

Điều kiện $3 \leq x \leq 5$.

Ta có $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0, \forall a \geq 0; b \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b$. Áp dụng bất đẳng thức này ta có

$$\sqrt{x-3} = \sqrt{1(x-3)} \leq \frac{1+x-3}{2} = \frac{x-2}{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{5-x} = \sqrt{1(5-x)} \leq \frac{1+5-x}{2} = \frac{6-x}{2} \quad (2)$$

$$\text{Do đó } \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} \leq \frac{x-2}{2} + \frac{6-x}{2} = \frac{4}{2} = 2 \leq 2 + (x-4)^2 = x^2 - 8x + 16 \quad (3).$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi (1), (2), (3) đồng thời xảy ra đẳng thức, nghĩa là $\begin{cases} \sqrt{x-3} = \sqrt{5-x} = 1 \\ x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=4$.

Trích lược câu 2, Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Toán, chuyên Tin học); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Hạ Long, Tỉnh Quảng Ninh; Năm học 2012 – 2013.

Bài toán 22. Giải phương trình $4x^2 + 3x + 3 = 4x\sqrt{x+3} + 2\sqrt{2x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $2x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2 + 3x + 3 - 4x\sqrt{x+3} - 2\sqrt{2x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x\sqrt{x+3} + x + 3 + 2x - 1 - 2\sqrt{2x-1} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x - \sqrt{x+3})^2 + (\sqrt{2x-1} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \sqrt{x+3} \\ \sqrt{2x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - x - 3 = 0 \\ 2x - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Thử lại trực tiếp ta thu được đáp số $x = 1$.

Thí dụ 23, trích lược câu 3, Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 THCS; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Tỉnh Thừa Thiên – Huế; Năm học 2002 – 2003.

Bài toán 23. Giải phương trình $x^2 + 3x + 1 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x^2 + 12x + 4 &= 4(x + 3)\sqrt{x^2 + 1} \\ \Leftrightarrow (x^2 + 6x + 9) - 4(x + 3)\sqrt{x^2 + 1} + 4(x^2 + 1) &= x^2 - 6x + 9 \\ \Leftrightarrow (x + 3 - 2\sqrt{x^2 + 1})^2 &= (x - 3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 - 2\sqrt{x^2 + 1} = x - 3 \\ x + 3 - 2\sqrt{x^2 + 1} = 3 - x \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} = 3 \\ \sqrt{x^2 + 1} = x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 9 \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 1 = x^2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x \in \{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -2\sqrt{2}; x = 2\sqrt{2}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (x^2 + 3x + 1)(x + 3) \geq 0 \\ x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 2(x^2 + 3x) + 1 = (x^2 + 6x + 9)(x^2 + 1) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (x^2 + 3x + 1)(x + 3) \geq 0 \\ x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 9 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (x^2 + 3x + 1)(x + 3) \geq 0 \\ x^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2\sqrt{2}; x = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Đáp số $x = -2\sqrt{2}; x = 2\sqrt{2}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt{x^2 + 1} = y, (y \geq 1) \Rightarrow x^2 = y^2 - 1$, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} y^2 - 1 + 3x + 1 &= (x + 3)y \Leftrightarrow y^2 + 3x = xy + 3y \Leftrightarrow y(y - x) = 3(y - x) \\ \Leftrightarrow (y - x)(y - 3) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} = 3 \\ \sqrt{x^2 + 1} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 9 \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 1 = x^2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x \in \{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Thí dụ 24, trích lược câu 2, Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 THCS; Môn Toán; Đề thi chính thức; Sở Giáo dục và Đào tạo Thành phố Hồ Chí Minh; Năm học 2012 – 2013.

Bài toán 24. Giải phương trình $4x^2 + \frac{3}{4} = 2\sqrt{x}$ ($x \in \mathbb{R}$)

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 16x^2 + 3 &= 8\sqrt{x} \Leftrightarrow 16x^2 - 8x + 1 + 8x - 8\sqrt{x} + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (4x-1)^2 + 2(2\sqrt{x}-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-1=0 \\ 2\sqrt{x}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện đi đến nghiệm $x = \frac{1}{4}$.

Thí dụ 25, trích lược câu 3, Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 THCS; Môn Toán; Đề thi chính thức; Phòng Giáo dục và Đào tạo Quận Cầu Giấy, Thành phố Hà Nội; Năm học 2005 – 2006.

Bài toán 25. Giải phương trình $\sqrt{7-x} + \sqrt{x+1} = x^2 - 6x + 13$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $-1 \leq x \leq 7$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4\sqrt{7-x} + 4\sqrt{x+1} &= 4x^2 - 24x + 52 \Leftrightarrow 4x^2 - 24x + 36 - 4\sqrt{7-x} - 4\sqrt{x+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 24x + 36 + (7-x-4\sqrt{7-x}+4) + (x+1-4\sqrt{x+1}+4) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4(x-3)^2 + (\sqrt{7-x}-2)^2 + (\sqrt{x+1}-2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ \sqrt{7-x}=2 \\ \sqrt{x+1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 7-x=4 \\ x+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 3$.

Lời giải 2.

Điều kiện $-1 \leq x \leq 7$. Ta có $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0, \forall a \geq 0; b \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b$. Áp dụng bất đẳng thức này ta có

$$\begin{aligned} (\sqrt{7-x} + \sqrt{x+1})^2 &= 7-x+x+1+2\sqrt{(7-x)(x+1)} \\ &= 8+2\sqrt{(7-x)(x+1)} \leq 8+(7-x+x+1)=16 \Rightarrow \sqrt{7-x} + \sqrt{x+1} \leq 4 \end{aligned}$$

Mặt khác, $x^2 - 6x + 13 = x^2 - 6x + 9 + 4 = (x-3)^2 + 4 \geq 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

Như vậy phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi các dấu đẳng thức đồng thời xảy ra, tức là

$$\begin{cases} 7-x=x+1 \\ x-3=0 \\ -1 \leq x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=6 \\ x=3 \\ -1 \leq x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Thử lại nghiệm trực tiếp, đáp số $S = \{3\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $-1 \leq x \leq 7$. Ta có

$$\begin{aligned} (a-b)^2 \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq 2(a^2 + b^2) \\ &\Leftrightarrow (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \Rightarrow a+b \leq |a+b| \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)} \end{aligned}$$

Áp dụng bất thức trên ta có $\sqrt{7-x} + \sqrt{x+1} \leq \sqrt{2(7-x+x+1)} = \sqrt{16} = 4 \leq 4 + (x-3)^2 = x^2 - 6x + 13$.

Phương trình ban đầu có nghiệm khi các dấu đẳng thức xảy ra đồng thời, hay $\begin{cases} \sqrt{7-x} = \sqrt{x+1} \\ x-3=0 \\ -1 \leq x \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$

Kết luận tập hợp nghiệm $S = \{3\}$.

Thí dụ 26, trích lược câu 2, Đề thi tuyển sinh vào lớp 10; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi các môn chuyên Khoa học tự nhiên); Trường THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa; Thành phố Hồ Chí Minh; Năm học 2001 – 2002.

Bài toán 26. Giải phương trình $-x^2 + 2 = \sqrt{2-x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \leq 2$.

Đặt $\sqrt{2-x} = y, (y \geq 0) \Rightarrow y^2 + x = 2$. Phương trình đã cho trở thành $-x^2 + 2 = y$. Ta thu được hệ

$$\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ y^2 + x = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - y^2 + y - x = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) - (x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-1) = 0.$$

$$\circ \quad x = y \Leftrightarrow x = \sqrt{2-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \in \{-2; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\circ \quad x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - x = \sqrt{2-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 1 = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Đối chiếu với điều kiện đi đến đáp số $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \leq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2-x^2 \geq 0 \\ x^4 - 4x^2 + 4 = 2-x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 2 \\ x^4 - 4x^2 + x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 2 \\ x^2(x^2 - 4) + x + 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 2 \\ (x+2)(x^3 - 2x^2 + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 2 \\ (x-1)(x^2 - x - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1; x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Đối chiếu với điều kiện đi đến đáp số $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; x = 1$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \leq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2 = 2 - \sqrt{2-x} &\Leftrightarrow 4x^2 = 8 - 4\sqrt{2-x} \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 4(2-x) - 4\sqrt{2-x} + 1 \\ &\Leftrightarrow (2x-1)^2 = (2\sqrt{2-x}-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = 2\sqrt{2-x}-1 \\ 1-2x = 2\sqrt{2-x}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2-x} \\ 1-x = \sqrt{2-x} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad x = \sqrt{2-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \in \{-2; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\bullet \quad 1-x = \sqrt{2-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 1 = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Đáp số tương tự hai lời giải phía trên.

Nhận xét.

Thông qua 26 thí dụ điển hình, chắc chắn một số bạn đọc đã phát hiện và bước đầu hình dung ra phương cách thao tác đối với một lớp phương trình, bất phương trình chứa căn thức, thông qua phép phân tích hằng đẳng thức với trường hợp riêng là hằng đẳng thức bậc hai – phân tích bình phương. Nhìn chung, đây là cách làm thuần túy, cơ bản, không quá khó và mang đậm tính khéo léo, sáng tạo. Một lẽ dĩ nhiên là đại đa số bài toán dạng này đều giải được bằng cách nâng lũy thừa, hữu tỷ hóa căn thức hoặc đặt ẩn phụ quy về dạng đa thức bậc 4 với ẩn mới,

mặc dù nó cũng khá rườm rà và chưa đẹp mắt. Tuy nhiên, để giải quyết được theo phương án này, các bạn cần tham khảo Lý thuyết giải phương trình đại số bậc cao, phân thức hữu tỷ phần 2, trong đó có đề cập một số kỹ năng giải đối với dạng bậc 4 đặc biệt. Ngoài ra các bài toán trên có thể giải được bằng phép đặt ẩn phụ không hoàn toàn – tham số biến thiên, nhưng quá trình ghép ẩn số cũng tỏ ra không mấy đơn giản.

Kỹ năng biến đổi linh hoạt quy về hằng đẳng thức nhiều khi cần yếu tố may mắn mới có thể làm được, cố gắng làm tận cùng sẽ mất nhiều công sức. Để làm sáng tỏ một phần nhỏ trong chuyên mục này, thân mời các bạn đọc giả theo dõi các thí dụ tiếp theo.

Bài toán 27. Giải phương trình $x^2 = \sqrt{x+1} + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+1} = x^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x+1 = x^4 - 2x^2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \\ x(x^3 - 2x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \\ x(x+1)(x^2 - x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ -1; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $S = \left\{ -1; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -1$.

Đặt $\sqrt{x+1} = y, y \geq 0 \Rightarrow y^2 = x+1$. Phương trình trở thành $x^2 = y+1$.

Ta thu được hệ phương trình $\begin{cases} y^2 = x+1 \\ x^2 = y+1 \end{cases} \Rightarrow y^2 - x^2 = x - y \Leftrightarrow (x-y)(x+y+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x+y = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad x = y &\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \\ \blacksquare \quad x + y + 1 = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x+1} + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm kể trên, $S = \left\{ -1; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x^2 &= 4\sqrt{x+1} + 4 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 4(x+1) + 4\sqrt{x+1} + 1 \Leftrightarrow (2x+1)^2 = (2\sqrt{x+1} + 1)^2 \\ &\Leftrightarrow (x - \sqrt{x+1})(x + 1 + \sqrt{x+1}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = x+1 \\ x+1 = \sqrt{x+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện $x \geq -1$ thu được hai nghiệm như trên, $S = \left\{ -1; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$.

Nhận xét.

Bài toán 27 có tổng thể 3 lời giải, trong đó lời giải thứ nhất sử dụng biến đổi tương đương – nâng cao lũy thừa, hết sức may mắn khi hệ số 1 triệt tiêu sau khi bình phương có kéo theo điều kiện. Lời giải 2 sử dụng phép đặt ẩn phụ quy về hệ phương trình đối xứng loại 2 (Vấn đề này trình bày tại Lý thuyết sử dụng ẩn phụ căn thức phần 8). Đáng chú ý và là nội dung trọng tâm tài liệu là lời giải số 3, không khó quan sát độc giả có thể thấy xuất hiện quy trình nhân hai vế với hằng số 4 và phân tích hằng đẳng thức đẹp mắt! Câu hỏi lóe sáng là tại sao lại là hằng số 4 và căn nguyên vì đâu tạo ra sự gọn gàng cơ bản như thế?

Thông thường đối với chương trình Đại số lớp 8 THCS, như chúng ta đã biết, các hằng đẳng thức tổng (hiệu) bình phương có dạng $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ và $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Hơn nữa trong hình thức bài toán có xuất hiện căn thức bậc hai, mà không xuất hiện căn thức bậc bốn, do đó nếu găm theo hằng đẳng thức thì rõ ràng vào vị trí $2ab \vee -2ab$. Tất nhiên để tạo ra hằng đẳng thức không nhất thiết phải nhân thêm hằng số, giữ nguyên đề bài và thêm bớt hoàn toàn thực hành được, khi đó các bạn sẽ làm việc với các phân số, cũng không ít chông gai. Để tạo ra hằng đẳng thức, trước tiên các bạn thử nghiệm nhân hai vế với hằng số 2. Biến đổi theo hai hướng

$$A^2 = B^2 : \quad 2x^2 = 2\sqrt{x+1} + 2 \Leftrightarrow 2x^2 + x = x + 1 + 2\sqrt{x+1} + 1 = (\sqrt{x+1} + 1)^2 \quad (1)$$

$$A^2 + B^2 = 0 : 2x^2 - x - 4 + x + 1 - 2\sqrt{x+1} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 4 + (\sqrt{x+1} - 1)^2 = 0 \quad (2)$$

Dễ dàng nhận thấy vế phải của (1) có dạng hằng đẳng thức, nhưng vế trái không đồng bộ, thất bại. Phương trình (2) cũng không đồng bộ tương tự, tóm lại kế hoạch nhân hai vế với 2 của chúng ta bị phá sản. Điều này đặt ra vấn đề nhân thêm một hằng số chẵn lớn hơn 2, giả dụ đó là $2k (k \in \mathbb{Z})$. Lưu ý cũng có hai hướng phân tích hằng đẳng thức theo hằng số $2k$, và ưu tiên biến đổi theo căn thức.

1. Phương án 1, ở đây $a \sim \sqrt{x+1}; b \sim k$ (vai trò)

$$\begin{aligned} 2kx^2 &= 2k\sqrt{x+1} + 2k \Leftrightarrow 2kx^2 - 2k = 2k\sqrt{x+1} \\ \Leftrightarrow 2kx^2 - 2k + x + 1 + k^2 &= x + 1 + 2k\sqrt{x+1} + k^2 \\ \Leftrightarrow 2kx^2 + x + k^2 - 2k + 1 &= (\sqrt{x+1} + k)^2 \\ \Leftrightarrow 2kx^2 + x + (k-1)^2 &= (\sqrt{x+1} + k)^2 \quad (3) \end{aligned}$$

Để ý phương trình (3) có dạng $A^2 = B^2$ thì cần có $2kx^2 + x + (k-1)^2 = m(cx+d)^2$, với m không âm. Lưu ý hằng số m càng lẻ bao nhiêu thì bài toán càng phức tạp bấy nhiêu, các bạn không nên mặc định hay gán cho m lúc nào cũng phải bằng 1 (trường hợp đẹp đẽ nhất $m \leq 0$ sẽ tạo ra tổng các bình phương). Nhận thấy đối với hằng đẳng thức $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ thì a^2, b^2 đều là các số chính phương, dễ nhận thấy $(k-1)^2$ là số chính phương nên chọn k sao cho $2k$ cũng là số chính phương chẵn, thấy ngay $k=2$ nhưng nhận thấy k càng tăng lên thì đều không thể xuất hiện hằng đẳng thức, thất bại. Chuyển qua phương án 2.

2. Phương án 2, ở đây $a \sim k\sqrt{x+1}; b \sim 1$ (vai trò).

$$\begin{aligned} 2kx^2 &= 2k\sqrt{x+1} + 2k \Leftrightarrow 2kx^2 - 2k = 2k\sqrt{x+1} \\ \Leftrightarrow 2kx^2 - 2k + k^2(x+1) + 1 &= k^2(x+1) + 2k\sqrt{x+1} + 1 \\ \Leftrightarrow 2kx^2 + k^2x + k^2 - 2k + 1 &= (k\sqrt{x+1} + 1)^2 \\ \Leftrightarrow 2kx^2 + k^2x + (k-1)^2 &= (k\sqrt{x+1} + 1)^2 \quad (4) \end{aligned}$$

Trong trường hợp này thì $k=2 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = (2\sqrt{x+1} + 1)^2 \Leftrightarrow (2x+1)^2 = (2\sqrt{x+1} + 1)^2$. Và khi đó chúng ta biến đổi ngược trở lại như trên: $(2x+1)^2 = (2\sqrt{x+1} + 1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 4(x+1) + 4\sqrt{x+1} + 1 \Leftrightarrow 4x^2 = 4\sqrt{x+1} + 4$.

Bài toán 28. Giải phương trình $4\sqrt{2x-1} = x^2 - 4x - 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x - 1 + 4\sqrt{2x-1} + 4 &= x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{2x-1} + 2)^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1} = -x-1 & (1) \\ \sqrt{2x-1} = x-3 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

- Phương trình (1) vô nghiệm do điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$.
- $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 2x-1 = x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2-8x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x=4-\sqrt{6} \Leftrightarrow x=4+\sqrt{6} \\ x=4+\sqrt{6} \end{cases}$

Kết hợp điều kiện xác định ta thu được nghiệm $S = \{4+\sqrt{6}\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4\sqrt{2x-1} = x^2 - 4x - 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 2 \geq 0 \\ 16(2x-1) = x^4 - 2x^2(4x+2) + 16x^2 + 16x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 2 \geq 0 \\ x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 16x + 20 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 2 \geq 0 \\ x^2(x^2 - 8x + 10) + 2(x^2 - 8x + 10) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 2 \geq 0 \\ (x^2 + 2)(x^2 - 8x + 10) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 2 \geq 0 \\ x = 4 + \sqrt{6} \Leftrightarrow x = 4 + \sqrt{6} \\ x = 4 - \sqrt{6} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện xác định ta thu được nghiệm $S = \{4+\sqrt{6}\}$.

Nhận xét.

Bài toán này tuy đã có hệ số chặn bằng 4, tuy nhiên vẫn chưa khẳng định điều gì chắc chắn vì khai triển hằng đẳng thức có hạng tử $4ab$ có hai hướng $(a+2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2 \vee (2a+b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$.

Lưu ý biểu thức trong căn thức là nhị thức bậc nhất nên các bạn có thể xoay chuyển các hướng biến đổi như sau

1. $4\sqrt{2x-1} = x^2 - 4x - 2 \Leftrightarrow 4(2x-1) + 4\sqrt{2x-1} + 1 = x^2 + 4x - 5 \Leftrightarrow (2\sqrt{2x-1} + 1)^2 = x^2 + 4x - 5$.
2. $4\sqrt{2x-1} = x^2 - 4x - 2 \Leftrightarrow (2x-1) + 4\sqrt{2x-1} + 4 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{2x-1} + 2)^2 = (x-1)^2$.
3. $4\sqrt{2x-1} = x^2 - 4x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 - 4\sqrt{2x-1} = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 + 2x - 1 - 4\sqrt{2x-1} + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 + (\sqrt{2x-1} - 2)^2 = 0$.
4. $4\sqrt{2x-1} = x^2 - 4x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 - 4\sqrt{2x-1} = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - 12x + 1 + 4(2x-1) - 4\sqrt{2x-1} + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 1 + (2\sqrt{2x-1} - 1)^2 = 0$.

Dễ thấy các phương án 1, 3 và 4 đều thất bại. Và phương án 2 thành công. Nếu sử dụng $2k$ chúng ta cũng thu được kết quả tương tự nhưng không nhất thiết.

Bài toán 29. Giải phương trình $\sqrt{x-1} + \frac{7}{2} = 4x + \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x\sqrt{x-1} = 8x^2 - 7x + 2 &\Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x-1} + x - 1 = 9x^2 - 6x + 1 \\ &\Leftrightarrow (x + \sqrt{x-1})^2 = (3x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 2x-1 & (1) \\ \sqrt{x-1} = 1-4x & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

- Phương trình (2) vô nghiệm do $x \geq 1$.

$$\bullet \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x-1=4x^2-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4x^2-5x+2=0 \end{cases} \quad (\text{Hệ vô nghiệm}).$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét.

Bài toán số 29 này đã có hệ số chẵn 2, nên chỉ có hai hướng biến đổi như sau

$$1. \quad 2x\sqrt{x-1}=8x^2-7x+2 \Leftrightarrow x^2+2x\sqrt{x-1}+x-1=9x^2-6x+1 \Leftrightarrow (x+\sqrt{x-1})^2=(3x-1)^2.$$

$$2. \quad 8x^2-7x+2-2x\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow x^2-2x\sqrt{x-1}+x-1+7x^2-8x+3=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{x-1})^2+7x^2-8x+3=0.$$

Rõ ràng hướng biến đổi thứ hai thất bại.

Bài toán 30. Giải bất phương trình $4x^2-13x+11 \geq 2\sqrt{x-3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2-12x+9 \geq x-3+2\sqrt{x-3}+1 \Leftrightarrow (2x-3)^2 \geq (\sqrt{x-3}+1)^2 \Leftrightarrow 2x-3 \geq \sqrt{x-3}+1$$

$$\Leftrightarrow 2x-4 \geq \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 4x^2-16x+16 \geq x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 4x^2-17x+19 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$$

Bất phương trình có nghiệm $S=[3;+\infty)$.

Nhận xét.

Các hướng biến đổi

$$1. \quad 4x^2-13x+11 \geq 2\sqrt{x-3} \Leftrightarrow 4x^2-12x+9 \geq x-3+2\sqrt{x-3}+1 \Leftrightarrow (2x-3)^2 \geq (\sqrt{x-3}+1)^2.$$

$$2. \quad 4x^2-13x+11 \geq 2\sqrt{x-3} \Leftrightarrow 4x^2-13x+11-2\sqrt{x-3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-14x+13+x-3-2\sqrt{x-3}+1 \geq 0 \Leftrightarrow 4x^2-14x+13+(\sqrt{x-3}-1)^2 \geq 0$$

Phương án 2 của chúng ta thất bại hoàn toàn.

Bài toán 31. Giải bất phương trình $4\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x-1} < x+3 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x-1+2\sqrt{x-1}+1 < 2x-1-4\sqrt{2x-1}+4 \Leftrightarrow (\sqrt{x-1}+1)^2 < (\sqrt{2x-1}-2)^2$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}-1)(\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}+3) < 0 \quad (1)$$

Ta có $x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x-1} \geq 0; \sqrt{2x-1} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}-1 \geq 0$. Do đó

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+3 < \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow x+8+6\sqrt{x-1} < 2x-1 \Leftrightarrow 6\sqrt{x-1} < x-9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ 36x-36 < x^2-18x+81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ x^2-54x+117 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 27+6\sqrt{17}$$

Bất phương trình đã cho có nghiệm $S=(27+6\sqrt{17};+\infty)$.

Nhận xét.

Bài toán 31 đã có các hệ số chẵn 4 và 2, phải chăng chúng ta đã gặp may mắn? Đúng vậy, tuy nhiên hệ số 4 khá to nên xảy ra nhiều hướng biến đổi như sau

$$1. \quad 4\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x-1} < x+3 \Leftrightarrow 4\sqrt{2x-1} < x+3-2\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2x-1}-3 < x-1-2\sqrt{x-1}+1 \Leftrightarrow 4\sqrt{2x-1}-3 < (\sqrt{x-1}-1)^2.$$

$$2. \quad 4\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x-1} < x+3 \Leftrightarrow 4\sqrt{2x-1} < x+3-2\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 4(2x-1)+4\sqrt{2x-1}+1 < 9x-2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow (2\sqrt{2x-1}+1)^2 < 9x-2\sqrt{x-1}.$$

$$3. \quad 4\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x-1} < x+3 \Leftrightarrow 4\sqrt{2x-1} < x+3-2\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 2x-1+4\sqrt{2x-1}+4 < 3x+6-2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow (\sqrt{2x-1}+2)^2 < 3x+6-2\sqrt{x-1}$$

$$4. \quad 4\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x-1} < x+3 \Leftrightarrow x-1+2\sqrt{x-1}+1 < 2x-1-4\sqrt{2x-1}+4 \Leftrightarrow (\sqrt{x-1}+1)^2 < (\sqrt{2x-1}-2)^2$$

$$4\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x-1} < x+3 \Leftrightarrow 2x-1+4\sqrt{2x-1}+4+x-1+2\sqrt{x-1}+1 < 4x+6$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x-1}+2)^2 + (\sqrt{x-1}+1)^2 < 4x+6$$

$$5. \quad 4\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x-1} < x+3 \Leftrightarrow 4(2x-1)+4\sqrt{2x-1}+1+x-1+2\sqrt{x-1}+1 < 10x.$$

$$6. \quad 4\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x-1} < x+3 \Leftrightarrow x+3-4\sqrt{2x-1}-2\sqrt{x-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow -2x+2x-1-4\sqrt{2x-1}+4+x-1-2\sqrt{x-1}+1 > 0$$

$$\Leftrightarrow -2x+(\sqrt{2x-1}-2)^2+(\sqrt{x-1}-1)^2 > 0$$

$$7. \quad 4\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x-1} < x+3 \Leftrightarrow x+3-4\sqrt{2x-1}-2\sqrt{x-1} > 0$$

$$\Leftrightarrow -8x+6+4(2x-1)-4\sqrt{2x-1}+1+x-1-2\sqrt{x-1}+1 > 0$$

$$\Leftrightarrow -8x+(2\sqrt{2x-1}-1)^2+(\sqrt{x-1}-1)^2 > 0$$

Xin lưu ý thêm với các bạn độc giả, các phương án 1, 2 và 3 trên thực tế đã tạo ra sự đối lập dấu của hai căn thức, tức là $(4\sqrt{2x-1}; -2\sqrt{x-1})$. Hơn thế nữa, sự đa dạng của các biểu thức gắn với hằng số 4 (như đã nói ở trên, có xuất hiện do dự giữa hai hằng đẳng thức $(a+2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2 \vee (2a+b)^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$), song hành cùng sự duy nhất của hằng đẳng thức $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ làm chúng ta trăn trở, đi đến lựa chọn ưu tiên thêm bớt thiết lập hằng đẳng thức cho về phải như phương án 1. Rõ ràng nó kéo theo các phương án 2 và 3 đổ vỡ, khi nhìn nhận được điều này, các bạn học sinh có thể thay nhay bèn bỏ qua các phương án 2 và 3.

Đối với phương án 4 và 5 cũng tương tự, nhận thấy các biểu thức trong căn thức đều có dạng nhị thức bậc nhất, hai căn thức cùng phía nên về phải sẽ được cộng thêm một lượng x , tối thiểu phải tạo ra $4x$, điều này ngăn cản chúng ta đi đến thành công, bởi mong muốn thực sự phải là $A^2 + B^2 < m$ ($m \leq 0$)! Các phương án 6 và 7 khả năng thành công sẽ dẫn đến kết quả đẹp mắt kiểu $A^2 + B^2 + kx + m > 0$, ($k \geq 0; m \geq 0$), thế nhưng có thể có thể thấy bên phải chúng ta chỉ có hóa lực x , để tồn tại kx thì cần một lượng tối thiểu bằng tổng các biến x trong căn thức, tức là $3x$. Do đó nếu tinh tế sẽ nhận thấy các phương án 6 và 7 cũng đi đến ngõ cụt.

Bài toán số 31 ngoài lời giải trên còn tồn tại một lời giải sử dụng đại lượng liên hợp thông qua sử dụng máy tính nhằm nghiệm phương trình tương ứng và lật ngược trở lại nhờ đồng nhất thức. Tác giả xin không trình bày tại đây, mong quý bạn đọc lượng thứ.

Bài toán 32. Giải bất phương trình $3\sqrt{x+3}-4 \geq 2x+\sqrt{x+11} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -3$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$12\sqrt{x+3} \geq 8x+16+4\sqrt{x+11} \Leftrightarrow 9(x+3)-12\sqrt{x+3}+4 \leq x+11-4\sqrt{x+11}+4$$

$$\Leftrightarrow (3\sqrt{x+3}-2)^2 \leq (\sqrt{x+11}-2)^2 \Leftrightarrow (3\sqrt{x+3}+\sqrt{x+11}-4)(3\sqrt{x+3}-\sqrt{x+11}) \leq 0 \quad (1)$$

- Xét trường hợp $3\sqrt{x+3} \geq \sqrt{x+11} \Leftrightarrow 8x+16 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$.
Khi đó $3\sqrt{x+3} + \sqrt{x+11} \geq 6$. Rõ ràng (1) vô nghiệm.
- Xét trường hợp $3\sqrt{x+3} \leq \sqrt{x+11} \Leftrightarrow 8x+16 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$. Như vậy $-3 \leq x \leq -2$. Khi đó
(1) $\Leftrightarrow 3\sqrt{x+3} + \sqrt{x+11} \geq 4 \Leftrightarrow 9x+99+x+11+6\sqrt{x^2+14x+33} \geq 16$
 $\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+14x+33} \geq -5x-47$ (2)

Bất phương trình (2) nghiệm đúng với $-3 \leq x \leq -2$.

Kết luận nghiệm của bất phương trình đã cho: $-3 \leq x \leq -2$.

Nhận xét.

Bài toán số 32 này, chưa có sự xuất hiện của các hằng số chẵn gắn với căn thức, thậm chí lại độc các hằng số lẻ (3 và 1). Do đó chúng ta sẽ nhân thêm hằng số 2 thử nghiệm trước tiên. Lưu ý số 6 cũng khá khó chịu bởi sẽ do dự giữa việc thiết lập bốn hằng đẳng thức

$$(a+3b)^2 = a^2 + 6ab + 9b^2 \vee (3a+b)^2 = 9a^2 + 4ab + b^2$$

$$(3a-b)^2 = 9a^2 - 4ab + b^2 \vee (a-3b)^2 = a^2 - 6ab + 9b^2$$

Từ đây kéo theo 4 phương án, hết sức lãng phí. Tuy nhiên hằng số 2 bên kia lại cho chỉ hai lựa chọn

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \vee (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Các phương án xảy ra

$$3\sqrt{x+3} - 4 \geq 2x + \sqrt{x+11} \Leftrightarrow 6\sqrt{x+3} - 8 \geq 4x + 2\sqrt{x+11}$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x+3} - 3x + 4 \geq x + 11 + 2\sqrt{x+11} + 1 = (\sqrt{x+11} + 1)^2$$

Và

$$3\sqrt{x+3} - 4 \geq 2x + \sqrt{x+11} \Leftrightarrow 6\sqrt{x+3} - 8 \geq 4x + 2\sqrt{x+11}$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x+3} - 5x - 19 + x + 11 - 2\sqrt{x+11} + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{x+3} - 5x - 19 + (\sqrt{x+11} - 1)^2 \geq 0$$

Một điều không may đã đến bởi hai phương án trên đều đi đến thất bại. Các bạn không nên bỏ cuộc, sử dụng nhân hằng số 2k sẽ phát huy tác dụng lúc này, trường hợp cấp bách

$$3\sqrt{x+3} - 4 \geq 2x + \sqrt{x+11} \Leftrightarrow 6k\sqrt{x+3} - 8k \geq 4kx + 2k\sqrt{x+11}$$

$$\Leftrightarrow k^2(x+11) + 1 + 6k\sqrt{x+3} - 8k - 4kx \geq k^2(x+11) + 2k\sqrt{x+11} + 1$$

$$\Leftrightarrow (k^2 - 4k)x + 6k\sqrt{x+3} + 11k^2 - 8k + 1 \geq (k\sqrt{x+11} + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow (k^2 - 4k)(x+3) + 6k\sqrt{x+3} + 8k^2 + 4k + 1 \geq (k\sqrt{x+11} + 1)^2$$

Cần có về trái đồng nhất dạng $m(c\sqrt{x+3} + d)^2$, tức là

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow 9k^2 - (k^2 - 4k)(8k^2 + 4k + 1) = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

Biến đổi trả lại

$$12\sqrt{x+3} \geq 8x + 16 + 4\sqrt{x+11} \Leftrightarrow 9(x+3) - 12\sqrt{x+3} + 4 \leq x + 11 - 4\sqrt{x+11} + 4$$

$$\Leftrightarrow (3\sqrt{x+3} - 2)^2 \leq (\sqrt{x+11} - 2)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\sqrt{x+3} - 1\right)^2 \leq \left(-\frac{1}{2}\sqrt{x+11} + 1\right)^2$$

Bài toán 33. Giải bất phương trình $2\sqrt{x+3} \geq 4 - x + \sqrt{3x-2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4\sqrt{x+3} &\geq 8-2x+2\sqrt{3x-2} \Leftrightarrow x+4-4\sqrt{x+3}+4 \leq 3x-2-2\sqrt{3x-2}+1 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-2)^2 \leq (\sqrt{3x-2}-1)^2 \Leftrightarrow (\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}-3)(\sqrt{x+3}-\sqrt{3x-2}+1) \leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

- Xét trường hợp

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3}-\sqrt{3x-2}+1 &\leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}+1 \leq \sqrt{3x-2} \Leftrightarrow x+4+2\sqrt{x+3} \leq 3x-2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+3} \leq x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x+3 \leq x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2-7x+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 6 \end{aligned}$$

Khi đó $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2} \geq 7 > 3$ nên (1) nghiệm đúng.

- Xét trường hợp

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3}-\sqrt{3x-2}+1 &\geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}+1 \geq \sqrt{3x-2} \Leftrightarrow x+4+2\sqrt{x+3} \geq 3x-2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+3} \geq x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \geq 3 \\ x+3 \leq x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x \geq 3 \\ x^2-7x+6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 3 \leq x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 6 \end{aligned}$$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2} \leq 3 \Leftrightarrow 4x+1+2\sqrt{3x^2+7x-6} \leq 9 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+7x-6} \leq 4-2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} \leq x \leq 2 \\ 3x^2+7x-6 \leq 4x^2-16x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} \leq x \leq 2 \\ x^2-23x+22 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq 1.$$

Kết luận nghiệm của bất phương trình đã cho: $S = \left[\frac{2}{3}; 1\right] \cup [6; +\infty)$.

Bài toán 34. Giải bất phương trình $4x^2+7+2\sqrt{3x+1} \geq 15x$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x^2+7 &\geq 15x-2\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow 4x^2-12x+9 \geq 3x+1-2\sqrt{3x+1}+1 \Leftrightarrow (2x-3)^2 \geq (\sqrt{3x+1}-1)^2 \\ &\Leftrightarrow (2x+\sqrt{3x+1}-4)(2x-2-\sqrt{3x+1}) \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

- Xét trường hợp $2x-2 \geq \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4x^2-8x+4 \geq 3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4x^2-11x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{11+\sqrt{73}}{8}.$

Khi đó $2x+\sqrt{3x+1} > 4$ nên (1) nghiệm đúng.

- Xét trường hợp

$$2x-2 \leq \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 1 \\ 4x^2-8x+4 \leq 3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 1 \\ 4x^2-11x+3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 1 \leq x \leq \frac{11+\sqrt{73}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{11+\sqrt{73}}{8}.$$

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} \leq 4-2x \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq x \leq 2 \\ 3x+1 \leq 4x^2-16x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq x \leq 2 \\ 4x^2-19x+15 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

Kết luận tập nghiệm : $S = \left[-\frac{1}{3}; 1\right] \cup \left[\frac{11+\sqrt{73}}{8}; +\infty\right)$.

Bài toán 35. Giải phương trình $\sqrt{x^2+x+2} + \frac{1}{x} = \frac{13-7x}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $2x\sqrt{x^2+x+2} + 2 = 13x - 7x^2$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 2 - 2x\sqrt{x^2+x+2} + x^2 = 9x^2 - 12x + 4 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+x+2} - x)^2 = (3x-2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x+2} = 4x-2 & (1) \\ \sqrt{x^2+x+2} = 2-2x & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x^2 + x + 2 = 16x^2 - 16x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 15x^2 - 17x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = \frac{2}{15} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \\ \bullet \quad (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 + x + 2 = 4x^2 - 8x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 3x^2 - 9x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9-\sqrt{57}}{6}. \end{aligned}$$

So sánh với điều kiện $x \neq 0$ ta thu được nghiệm $S = \left\{\frac{9-\sqrt{57}}{6}; 1\right\}$.

Nhận xét.

Tương tự các bài toán trước chúng ta có hai phương án

$$\begin{aligned} 2x\sqrt{x^2+x+2} + 2 &= 13x - 7x^2 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 + 2x\sqrt{x^2+x+2} + x^2 = 14x - 5x^2 + 2 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+x+2} + x)^2 = 14x - 5x^2 + 2 \end{aligned}$$

Phương án 1 thất bại. Xoay chuyển

$$x^2 + x + 2 - 2x\sqrt{x^2+x+2} + x^2 = 9x^2 - 12x + 4 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+x+2} - x)^2 = (3x-2)^2.$$

Bài toán 36. Giải phương trình $\sqrt{3+x^2} = \frac{2x(2-x)}{2x-1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq \frac{1}{2}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (2x-1)\sqrt{3+x^2} - 4x + 2x^2 &= 0 \Leftrightarrow 2(2x-1)\sqrt{3+x^2} - 8x + 4x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 3 + 2(2x-1)\sqrt{3+x^2} + 4x^2 - 4x + 1 = (x^2 + 4x + 4) \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+3} + 2x-1)^2 - (x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+3} = 3-x & (1) \\ \sqrt{x^2+3} = -3x-1 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x^2 + 3 = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\bullet (2) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-1 \geq 0 \\ x^2+3=9x^2+6x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{3} \\ 8x^2+6x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

Kết hợp điều kiện thu được nghiệm duy nhất $x=1$.

Nhận xét.

Đối với bài toán này chúng ta nhân 2 thử nghiệm do không có hằng số chẵn gắn với căn thức

$$\begin{aligned} (2x-1)\sqrt{3+x^2}-4x+2x^2=0 &\Leftrightarrow 2(2x-1)\sqrt{3+x^2}-8x+4x^2=0 \\ &\Leftrightarrow x^2+3+2(2x-1)\sqrt{3+x^2}+4x^2-4x+1=(x^2+4x+4) \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+3}+2x-1)^2-(x+2)^2=0 \end{aligned}$$

Và

$$\begin{aligned} (2x-1)\sqrt{3+x^2}-4x+2x^2=0 &\Leftrightarrow 2(2x-1)\sqrt{3+x^2}-8x+4x^2=0 \\ &\Leftrightarrow 9x^2-12x+4=4x^2-4x+1-2(2x-1)\sqrt{3+x^2}+3+x^2 \\ &\Leftrightarrow (3x-2)^2=(2x-1-\sqrt{x^2+3})^2 \end{aligned}$$

Bài toán 37. Giải bất phương trình $x(x-2) \leq 2\sqrt{2x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 \leq 2x-1+2\sqrt{2x-1}+1 \Leftrightarrow x^2-(\sqrt{2x-1}+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1-\sqrt{2x-1})(x+1+\sqrt{2x-1}) \leq 0 \quad (1).$$

Nhận xét: $x \geq \frac{1}{2}$ nên $x+1+\sqrt{2x-1} > 0$. Do đó (1) $\Leftrightarrow x-1-\sqrt{2x-1} \leq 0 \Leftrightarrow x-1 \leq \sqrt{2x-1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 1 \\ x^2-2x+1 \leq 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \geq 1 \\ x^2-4x+2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 1 \leq x \leq 2+\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 2+\sqrt{2}.$$

Kết hợp điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$ ta thu được nghiệm $\frac{1}{2} \leq x \leq 2+\sqrt{2}$.

Bài toán 38. Giải phương trình $2x^2-6x-1=\sqrt{5+4x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{5}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x^2-12x-2 &= 2\sqrt{5+4x} \Leftrightarrow 4x^2-8x+4=5+4x+2\sqrt{5+4x}+1 \\ &\Leftrightarrow (2x-2)^2=(\sqrt{5+4x}+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=\sqrt{5+4x} & (1) \\ 1-2x=\sqrt{5+4x} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\bullet (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ 4x^2-12x+9=5+4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x^2-4x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2+\sqrt{3}.$$

$$\bullet \quad (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 4x + 1 = 5 + 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{2}.$$

So sánh điều kiện; kết luận tập nghiệm của phương trình là $S = \{1 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{3}\}$.

Bài toán 39. Giải bất phương trình $\sqrt[4]{4x+1} \geq x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{4}$.

• Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với $-\frac{1}{4} \leq x < 0$.

• Xét $x \geq 0$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$4x+1 \geq x^4 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 \leq 2x^2 + 4x + 2 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 \leq 2(x+1)^2 \Leftrightarrow |x^2 + 1| \leq \sqrt{2}(x+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 \leq \sqrt{2}x + \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}$$

Kết hợp $x \geq 0$ thu được $0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}$. Kết luận nghiệm của bài toán: $S = \left[-\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}\right]$.

Bài toán 40. Giải phương trình $1 + x - 2x^2 = \sqrt{4x^2 - 1} - \sqrt{2x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x = -\frac{1}{2} \vee x \geq \frac{1}{2}$.

Nhận xét $x = -\frac{1}{2}$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Xét $x \geq \frac{1}{2}$, phương trình đã cho tương đương với

$$2 + 2x - 4x^2 = 2\sqrt{4x^2 - 1} - 2\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow 4x^2 - 1 + 2\sqrt{4x^2 - 1} + 1 = 2x + 1 + 2(\sqrt{2x+1} + 1)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{4x^2 - 1} + 1)^2 = (\sqrt{2x+1} + 1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 - 1} = \sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 1 \\ 2x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Kết luận nghiệm của phương trình đã cho $S = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$.

Bài toán 41. Giải bất phương trình $x^2 - 2x - 1 \geq 2(1-x)\sqrt{x^2 + 2x - 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } x^2 + 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 + \sqrt{2} \\ x \leq -1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 - 2x - 1 - 2(1-x)\sqrt{x^2 + 2x - 1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 2(1-x)\sqrt{x^2 + 2x - 1} + x^2 - 2x - 1 \geq x^2 + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow (x - 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 1})^2 \geq (x + 1)^2 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2 + 2x - 1} - 2)(\sqrt{x^2 + 2x - 1} + 2x) \geq 0$$

- Với $\sqrt{x^2+2x-1}-2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+2x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{6}-1 \vee x \leq -\sqrt{6}-1$; Khi đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x-1} \geq -2x$ (2).
Bất phương trình (2) nghiệm đúng với $x \geq \sqrt{6}-1$.
Nếu $x \leq -\sqrt{6}-1$ thì (2) $\Leftrightarrow x^2+2x-1 \geq 4x^2 \Leftrightarrow 3x^2-2x+1 \leq 0$ (Vô nghiệm).
- Với $\sqrt{x^2+2x-1}-2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2+2x-5 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{6}-1 \leq x \leq \sqrt{6}-1$.
Kết hợp $\begin{cases} x \geq -1+\sqrt{2} \\ x \leq -1-\sqrt{2} \end{cases}$ thu được $\begin{cases} \sqrt{6}-1 \geq x \geq \sqrt{2}-1 \\ -1-\sqrt{6} \leq x \leq -1-\sqrt{2} \end{cases}$;
Lúc này (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x-1} \leq -2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2+2x-1 \leq 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 0$.

Kết luận nghiệm của bất phương trình đã cho: $S = [-\sqrt{6}-1; 0] \cup [\sqrt{6}-1; +\infty)$.

Bài toán 42. Giải bất phương trình $x^2+2 \geq \sqrt{8x-8}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2+2 &\geq 2\sqrt{2x-2} \Leftrightarrow x^2+2x+1 \leq 2x-2+2\sqrt{2x-2}+1 \Leftrightarrow (x+1)^2 \leq (\sqrt{2x-2}+1)^2 \\ &\Leftrightarrow |x+1| \leq |\sqrt{2x-2}+1| \Leftrightarrow x \leq \sqrt{2x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-2x+2 \leq 0 \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm).} \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 43. Giải phương trình $\frac{x-2\sqrt{2x}}{9-6\sqrt{1+x}}=1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x-2\sqrt{2x} &= 9-6\sqrt{1+x} \Leftrightarrow x-2\sqrt{2x}+6\sqrt{x+1}-9=0 \\ &\Leftrightarrow 2x-2\sqrt{2x}+1-(x+1-6\sqrt{x+1}+9)=0 \Leftrightarrow (\sqrt{2x}-1)^2-(\sqrt{x+1}-3)^2=0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}-4)(\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x}+\sqrt{x+1}-4=0 & (1) \\ \sqrt{2x}-\sqrt{x+1}+2=0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

- (2) $\Leftrightarrow \sqrt{2x}+2=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 2x+4+4\sqrt{2x}=x+1 \Leftrightarrow x+4\sqrt{2x}+3=0$ (Vô nghiệm do $x \geq 0$).
- (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2x}+\sqrt{x+1}=4 \Leftrightarrow 3x+1+2\sqrt{2x^2+x}=16 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+x}=15-3x$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 5 \\ 9x^2-90x+225=8x^2+4x \end{cases} \Leftrightarrow x=47-8\sqrt{31}$

Kết luận nghiệm của phương trình $S = \{47-8\sqrt{31}\}$.

Bài toán 44. Giải phương trình $x^2+3x=\sqrt{1-x}+\frac{1}{4}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2 + 12x = 4\sqrt{1-x} + 1 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x + 4 = 4(1-x) + 4\sqrt{1-x} + 1$$

$$\Leftrightarrow (2x+2)^2 = (2\sqrt{1-x}+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = 2\sqrt{1-x} & (1) \\ -3-2x = 2\sqrt{1-x} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 4x^2 + 4x + 1 = 4 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 4x^2 + 8x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{7}-2}{2} \\ \bullet \quad (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{3}{2} \\ 4x^2 + 12x + 9 = 4 - 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{3}{2} \\ 4x^2 + 16x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{4+\sqrt{11}}{2} \end{aligned}$$

Bài toán 45. Giải bất phương trình $3x^2 + 13x \geq 6x\sqrt{5-x} + 44 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 5$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x^2 + 6x\sqrt{5-x} + 9(5-x) \leq 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow (x+3\sqrt{5-x})^2 \leq (2x-1)^2 \\ &\Leftrightarrow (3x-1+3\sqrt{5-x})(1-x+3\sqrt{5-x}) \leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{5-x} = t (t \geq 0)$ thì (1) trở thành

$$(3t^2 - 3t - 14)(t-1)(t+4) \geq 0 \Leftrightarrow (3t^2 - 3t - 14)(t-1) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{77}}{6} \leq t \leq 1 \vee t \geq \frac{3+\sqrt{77}}{6}.$$

$$\text{Kết hợp } t \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ t \geq \frac{3+\sqrt{77}}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 5-x \leq 1 \\ 5-x \geq \frac{43+3\sqrt{77}}{18} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq x \leq 5 \\ x \leq \frac{47-3\sqrt{77}}{18} \end{cases}$$

Bài toán 46. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \frac{4x}{\sqrt{x+3}} = 4\sqrt{x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &x+3+4x = 4\sqrt{x(x+3)} \Leftrightarrow 5x+3 = 4\sqrt{x(x+3)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3 \geq 0 \\ 25x^2+30x+9 = 16(x^2+3x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3 \geq 0 \\ 9x^2-18x+9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3 \geq 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm $x=1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &1 + \frac{4x}{x+3} = 2\sqrt{\frac{4x}{x+3}} \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{\frac{4x}{x+3}} + \frac{4x}{x+3} = 0 \Leftrightarrow \left(1 - \sqrt{\frac{4x}{x+3}}\right)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+3} = \sqrt{4x} \Leftrightarrow x+3 = 4x \Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có đáp số $x=1$.

Bài toán 47. Giải phương trình $4\sqrt{x+3} = 1 + 4x + \frac{3}{x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-3 \leq x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x\sqrt{x+3} &= x+3+4x^2 \Leftrightarrow x+3-4x\sqrt{x+3}+4x^2=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-2x)^2=0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x+3} &= 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2-x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in \left[-\frac{3}{4}; 1\right] \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có nghiệm $x=1$.

Bài toán 48. Giải phương trình $2\sqrt{x+3} = 9x^2 - x - 4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x+3+2\sqrt{x+3}+1=9x^2 \Leftrightarrow (\sqrt{x+3}+1)^2=9x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}=3x-1 \\ \sqrt{x+3}=-3x-1 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sqrt{x+3} &= 3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x+3=9x^2-6x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^2-7x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1. \\ \bullet \quad \sqrt{x+3} &= -3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x-1 \geq 0 \\ x+3=9x^2+6x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{3} \\ 9x^2+5x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-5-\sqrt{97}}{18}. \end{aligned}$$

Đối chiếu với điều kiện ta có nghiệm $x=1; x=\frac{-5-\sqrt{97}}{18}$.

Bài toán 49. Giải phương trình $12\sqrt{x} + 2\sqrt{x-1} = 3x + 9 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x-1+2\sqrt{x-1}+1 &= 4x-12\sqrt{x}+9 \Leftrightarrow (\sqrt{x-1}+1)^2 = (2\sqrt{x}-3)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}+1=2\sqrt{x}-3 \\ \sqrt{x-1}+1=3-2\sqrt{x} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}+4=2\sqrt{x} & (1) \\ \sqrt{x-1}=2-2\sqrt{x} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x-1+16+8\sqrt{x-1}=4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 8\sqrt{x-1}=3x-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ 9x^2-154x+289=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{77+\sqrt{3328}}{9}.$$

$$\checkmark \quad (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2-2\sqrt{x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Đối chiếu điều kiện đi đến hai nghiệm $x=1; x=\frac{77+\sqrt{3328}}{9}$.

Bài toán 50. Giải phương trình $2\sqrt{5x-1} = 9x^2 - 5x$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{5}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 5x-1+2\sqrt{5x-1}+1 &= 9x^2 \Leftrightarrow (\sqrt{5x-1}+1)^2 = (3x)^2 \Leftrightarrow |\sqrt{5x-1}+1| = |3x| \\ \Leftrightarrow \sqrt{5x-1} &= 3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 1 \\ 5x-1 = 9x^2-6x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 1 \\ 9x^2-11x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

Kết luận tập nghiệm $S = \{1\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{5}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2\sqrt{5x-1}-4 &= 9x^2-5x-4 \Leftrightarrow 2(\sqrt{5x-1}-2) = 9x^2-5x-4 \\ \Leftrightarrow \frac{2(5x-5)}{\sqrt{5x-1}+2} &= (x-1)(9x+4) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{10}{\sqrt{5x-1}+2} = 9x+4 \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Dễ nhận thấy $\frac{10}{\sqrt{5x-1}+2} \leq \frac{10}{2} = 5 < \frac{29}{5} \leq 9x+4, \forall x \geq \frac{1}{5}$ nên (*) vô nghiệm. Kết luận $S = \{1\}$.

Bài toán 51. Giải phương trình $2x\sqrt{x+4} = 3x^2 + 3x - 3$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -4$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2 + 2x\sqrt{x+4} + x + 4 &= 4x^2 + 4x + 1 \Leftrightarrow (x + \sqrt{x+4})^2 = (2x+1)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x+4} = 2x+1 \\ x + \sqrt{x+4} = -2x-1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4} = x+1 & (1) \\ \sqrt{x+4} = -3x-1 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x+4 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$.
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} -3x-1 \geq 0 \\ x+4 = 9x^2 + 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{3} \\ 9x^2 + 5x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-5 - \sqrt{133}}{18}$.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x = \frac{\sqrt{13}-1}{2}; x = \frac{-5-\sqrt{133}}{18}$.

Bài toán 52. Giải phương trình $6\sqrt{2x+4} - 4\sqrt{x+1} = x+8$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x+1-4\sqrt{x+1}+4=2x+4-6\sqrt{2x+4}+9 \Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-2)^2=(\sqrt{2x+4}-3)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}-2=\sqrt{2x+4}-3 \\ \sqrt{x+1}-2=3-\sqrt{2x+4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}+1=\sqrt{2x+4} & (1) \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{2x+4}=5 & (2) \end{cases}$$

$$\triangleright (1) \Leftrightarrow x+2+2\sqrt{x+1}=2x+4 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=x+2 \Leftrightarrow (\sqrt{x+1}-1)^2=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=1 \Leftrightarrow x=0.$$

$$\triangleright (2) \Leftrightarrow 3x+5+2\sqrt{2x^2+6x+4}=25 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+6x+4}=20-3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 20 \geq 3x \\ 4(2x^2+6x+4)=9x^2-120x+400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20 \geq 3x \\ x^2-144x+384=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=72-40\sqrt{3}.$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x=0; x=72-40\sqrt{3}$.

Bài toán 53. Giải phương trình $8x^2+3x+7=6x\sqrt{x+8}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -8$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$8x^2+3x+7-6x\sqrt{x+8}=0 \Leftrightarrow 9x^2-6x\sqrt{x+8}+x+8=x^2-2x+1$$

$$\Leftrightarrow (3x-\sqrt{x+8})^2=(x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-\sqrt{x+8}=x-1 \\ 3x-\sqrt{x+8}=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=\sqrt{x+8} & (1) \\ 4x-1=\sqrt{x+8} & (2) \end{cases}$$

$$\checkmark (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -8 \\ 4x^2+4x+1=x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -8 \\ 4x^2+3x-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{7}{4}; x=1.$$

$$\checkmark (2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-1 \geq 0 \\ 16x^2-8x+1=x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ 16x^2-9x-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x=-\frac{7}{4}; x=1$.

Bài toán 54. Giải phương trình $10\sqrt{2x+2}+2\sqrt{x+3}=x+23$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{x+3}=x+23-10\sqrt{2x+2} \Leftrightarrow x+3+2\sqrt{x+3}+1=2x+2-10\sqrt{2x+2}+25$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3}+1)^2=(\sqrt{2x+2}-5)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}+6=\sqrt{2x+2} & (1) \\ \sqrt{x+3}+\sqrt{2x+2}=4 & (2) \end{cases}$$

$$\diamond (1) \Leftrightarrow x+39+12\sqrt{x+3}=2x+2 \Leftrightarrow 12\sqrt{x+3}=x-37$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 144(x+3)=x^2-74x+1369 \\ x \geq 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-218x+937=0 \\ x \geq 37 \end{cases} \Leftrightarrow x=109+24\sqrt{19}.$$

$$\diamond (2) \Leftrightarrow 3x+5+2\sqrt{2x^2+8x+6}=16 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+8x+6}=11-3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11 \geq 3x \\ 4(2x^2 + 8x + 6) = 9x^2 - 66x + 121 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11 \geq 3x \\ x^2 - 98x + 97 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1; x = 109 + 24\sqrt{19}$.

Bài toán 55. Giải phương trình $4x^2 + x + 3 = 4x\sqrt{x+3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2 - 4x\sqrt{x+3} + x + 3 = 0 \Leftrightarrow (2x - \sqrt{x+3})^2 = 0 \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in \left\{-\frac{3}{4}; 1\right\} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

Bài toán 56. Giải phương trình $2x\sqrt{x+3} = 8x^2 - x - 3$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x + 3 + 2x\sqrt{x+3} + x^2 = 9x^2 \Leftrightarrow (\sqrt{x+3} + x)^2 = (3x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 2x & (1) \\ \sqrt{x+3} = -4x & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \circ (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 1; x = -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \\ \circ (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 16x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 - \sqrt{193}}{32}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình ban đầu có các nghiệm $x = \frac{1 - \sqrt{193}}{32}; x = 1$.

Bài toán 57. Giải phương trình $x^3 + 3x^2 + 4 = 4x\sqrt{x+3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -3$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 3x^2 - 4x\sqrt{x+3} + 4 = 0 \Leftrightarrow (x\sqrt{x+3} - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x+3} = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)(x+2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Nhận xét.

Có thể nhận thấy thao tác phân tích hằng đẳng thức bậc hai khá hiệu quả đối với các bài toán chứa căn bậc hai phức tạp, ngay cả với bài toán chứa nhiều căn thức. Về cơ bản các cách giải này vẫn nằm trong phạm vi biến đổi tương đương, nâng lũy thừa; ngoài ra các bạn còn rất nhiều lựa chọn khác như đặt ẩn phụ không hoàn toàn; sử dụng đại lượng liên hợp, trục căn thức; bất đẳng thức – đánh giá hoặc đưa về hệ phương trình.

Để có được những lời giải thuần túy như thế này, ngoài kinh nghiệm quan sát – thực hành của bản thân, các bạn có thể chú ý một số nội dung sau

1. Cố gắng tạo hệ số trước các căn thức là bội của 2 (2, 4, 6, 8...) mục đích định hướng sử dụng thêm bớt, phân tích theo hằng đẳng thức $a^2 - 2ab + b^2$ hoặc $a^2 + 2ab + b^2$.
2. Các trường hợp thường gặp
 Hiệu hai bình phương $A^2 = B^2 \Leftrightarrow |A| = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases}$
 Tổng các bình phương $A^2 + B^2 + C^2 + \dots = 0 \Leftrightarrow A = B = C = \dots = 0$.
 Tổng các đại lượng không âm (Trường hợp đặc biệt): $xA + yB + zC + \dots = 0, (A; B; C; x; y; z \geq 0)$.
3. Sử dụng điều kiện xác định để lập luận giảm thiểu các trường hợp và kết luận nghiệm.

Bài toán 58. Giải phương trình $7x^2 + 7x = \sqrt{\frac{4x+9}{28}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -\frac{9}{4}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2 + x = \frac{1}{7} \sqrt{\frac{4x+9}{28}} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{7} \sqrt{\frac{1}{7} \left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}}$ (1).

Đặt $x + \frac{1}{2} = u; \sqrt{\frac{1}{7} \left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}} = v \Rightarrow v^2 = \frac{1}{7}u + \frac{1}{4};$ (1) trở thành $u^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{7}v$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} v^2 = \frac{1}{7}u + \frac{1}{4} \\ u^2 = \frac{1}{7}v + \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow v^2 - u^2 = \frac{1}{7}(u - v) \Leftrightarrow (v - u) \left(v + u + \frac{1}{7}\right) = 0.$$

- $v = u \Rightarrow u^2 - \frac{1}{7}u - \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 14x + 7 = \sqrt{28x + 63}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ 7^2(4x^2 + 4x + 1) = 7(4x + 9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ 28x^2 + 24x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-6 + 5\sqrt{2}}{14}.$
- $v + u + \frac{1}{7} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{28x + 63} = -14x - 9 \Leftrightarrow \begin{cases} -14x - 9 \geq 0 \\ 28x + 63 = 196x^2 + 252x + 81 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} -9 \geq 14x \\ 196x^2 + 224x + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-56 - \sqrt{2254}}{98}.$

Đối chiếu điều kiện, suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -\frac{9}{4}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 196x^2 + 196x &= \sqrt{28} \cdot \sqrt{4x+9} \Leftrightarrow 196x^2 + 196x = 2\sqrt{28x+63} \\ \Leftrightarrow 196x^2 + 224x + 64 &= 28x + 63 + 2\sqrt{28x+63} + 1 \\ \Leftrightarrow (14x+8)^2 &= (\sqrt{28x+63}+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 14x+7 = \sqrt{28x+63} & (1) \\ -14x-9 = \sqrt{28x+63} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \circ (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 7^2(4x^2+4x+1) = 7(4x+9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 28x^2+24x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-6+5\sqrt{2}}{14}. \\ \circ (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} -14x-9 \geq 0 \\ 28x+63 = 196x^2+252x+81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \geq 14x \\ 196x^2+224x+18=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-56-\sqrt{2254}}{98}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có hai nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Trong lời giải 2 bài toán 58, quý bạn dễ dàng nhận thấy trước khi phân tích hằng đẳng thức bài toán đã được viết lại sau khi nhân đồng bộ hai vế của phương trình với hằng số 28, việc làm này mục đích làm mất đi hình thức phức tạp của $\sqrt{28}$ phía dưới mẫu thức. Hệ quả là một mối lương duyên $196x^2+196x=2\sqrt{28x+63}$.

Chú ý rằng hằng số 2 đã xuất hiện phía trước căn thức; $196x^2=(14x)^2$ và biểu thức trong căn có dạng nhị thức bậc nhất $(28x+63)$, điều này sẽ rất thuận lợi trong quá trình phân tích hằng đẳng thức vì sẽ không làm “lung lay” hạng tử $196x^2$. Đối với bài toán này chúng ta sẽ lấy căn thức làm mốc, phân tích theo hai hướng hiệu bình phương và tổng bình phương như sau

- Phương án 1. $196x^2+224x+64=28x+63+2\sqrt{28x+63}+1 \Leftrightarrow (14x+8)^2=(\sqrt{28x+63}+1)^2$.
- Phương án 2. $196x^2+196x-2\sqrt{28x+63}=0 \Leftrightarrow 28x+63-2\sqrt{28x+63}+1+196x^2+168x-64=0$
 $\Leftrightarrow (\sqrt{28x+63}-1)^2+196x^2+168x-64=0$.

Phương án 1 thành công và chính là mấu chốt của lời giải 2 trên đây. Để ý kỹ lưỡng một chút các bạn có thể thấy phương trình của chúng ta không có số dạng tự do, biểu thức trong căn lại có dạng $(28x+63)$, phương án 2 thiên hướng $196x^2$ và $2\sqrt{28x+63}$ cùng một vế, mục tiêu dẫn tới trường hợp đặc biệt

$$A^2+B^2+C^2+\dots=0 \Leftrightarrow A=B=C=\dots=0.$$

Mặt khác $a^2 \pm 2ab + b^2$ sẽ làm gia tăng các hằng số dương, điều này tất yếu dẫn đến thêm bớt hằng số dương, phương trình quy về dạng $A^2+B^2=k, k>0$, thất bại. Lưu ý trong nhiều trường hợp $k<0$ thì phương trình vô nghiệm, và rõ ràng khi đó “vận may” đã đến!

Bài toán 59. Giải phương trình $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8(4x-1)\sqrt{x^2+1} &= 16x^2+16x+8 \Leftrightarrow (4x-1)^2-8(4x-1)\sqrt{x^2+1}+16(x^2+1)=16x^2-24x+9 \\ \Leftrightarrow (4x-1-4\sqrt{x^2+1})^2 &= (4x-3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2+1}=1 \\ \sqrt{x^2+1}=2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2=-3 \\ 2x \geq 1 \\ x^2+1=4x^2-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{4}{3}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2(4x-1)\sqrt{x^2+1} &= 4x^2+4x+2 \Leftrightarrow 2(4x-1)\sqrt{x^2+1} - (4x-1) = 4x^2+3 \\ \Leftrightarrow (4x-1)(2\sqrt{x^2+1}-1) &= 4x^2+3 \Leftrightarrow \frac{(4x-1)(4x^2+3)}{2\sqrt{x^2+1}+1} = 4x^2+3 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+1} &= 4x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 1 \\ x^2+1 = 4x^2-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 1 \\ x(3x-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{4}{3}$.

Nhận xét.

Lời giải 1 của bài toán 59 sử dụng phân tích hằng đẳng thức bậc hai sau khi nhân hai vế của phương trình ban đầu với hằng số 8. Vì sao lại là hằng số 8 mà không phải 2, 4, 6, ... ?

Dễ thấy biểu thức chứa căn có dạng $\sqrt{x^2+1}$, như vậy quá trình thêm bớt đối với hạng tử $2x^2$ sẽ trở nên bị động, lung lay. Thực tế quá trình thêm bớt trở nên phức tạp bởi các đại lượng tam thức bậc hai thay đổi không ngừng, hơn nữa dù đưa về hiệu bình phương hoặc hiệu bình phương đều dẫn đến những tình huống bất lợi, mất thời gian của chúng ta. Quan sát lời giải 1 có thể thấy nếu không nhân thêm hệ số thì vẫn thành công, nhưng bắt buộc xuất hiện phân số phức tạp, và dĩ nhiên để “chiếu tướng” được phân số này không phải là một điều dễ dàng

$$\left(x - \frac{1}{4} - \sqrt{x^2+1}\right)^2 = \left(x - \frac{3}{4}\right)^2.$$

Sau đây tác giả xin trình bày một phương án cơ bản tìm ra hằng số 8.

Để xuất hiện dạng hằng đẳng thức $a^2 \pm 2ab + b^2$, trước tiên nhân hai vế với một số hằng số chẵn $2k$, suy ra

$$2k(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2k(2x^2+2x+1) \quad (*).$$

Đến đây có hai phương án biến đổi hằng đẳng thức

- Phương án 1.

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow (4x-1)^2 + 2k(4x-1)\sqrt{x^2+1} + k^2(x^2+1) = 2k(2x^2+2x+1) + (4x-1)^2 + k^2(x^2+1) \\ &\Leftrightarrow (4x-1+k\sqrt{x^2+1})^2 = (k^2+4k+16)x^2 + (4k-8)x + k^2+2k+1 \quad (1) \end{aligned}$$

Mục đích của chúng ta đạt được nếu có $(k^2+4k+16)x^2 + (4k-8)x + k^2+2k+1 = m(ax+b)^2$.

Rõ ràng có thể coi đây là sự tương đương của hai phương trình

$$\begin{cases} (k^2+4k+16)x^2 + (4k-8)x + k^2+2k+1 = 0 \\ m(ax+b)^2 = 0 \end{cases}$$

Mặc định bỏ trường hợp hệ số $k^2+4k+16=0$. Sự tương đương chỉ xảy ra khi và chỉ phương trình bậc hai ẩn x , tham số k có nghiệm duy nhất (nghiệm kép), tức là biệt thức $\Delta=0$, hay

$$\Delta' = (2k-4)^2 - (k^2+4k+16)(k^2+2k+1) = 0.$$

Chọn nghiệm hữu tỷ $k=-4$.

Ngoài ra có thể để ý rằng k^2+2k+1 là số chính phương, do đó nếu $k^2+4k+16$ là số chính phương thì sẽ có “cơ may” xảy ra, dễ nhận thấy $k=-4$. Khi đó (1) trở thành

$$\begin{aligned} (4x-1)^2 - 8(4x-1)\sqrt{x^2+1} + 16(x^2+1) &= 16x^2 - 24x + 9 \\ \Leftrightarrow (4x-1-4\sqrt{x^2+1})^2 &= (4x-3)^2 \end{aligned}$$

- Phương án 2.

$$(*) \Leftrightarrow k^2(4x-1)^2 + 2k(4x-1)\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1 = 2k(2x^2 + 2x + 1) + k^2(4x-1)^2 + x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow \left[k(4x-1) + \sqrt{x^2+1} \right]^2 = (16k^2 + 4k + 1)x^2 + (4k - 8k^2)x + k^2 + 2k + 1 \quad (2)$$

Mục đích của chúng ta đạt được nếu có $(16k^2 + 4k + 1)x^2 + (4k - 8k^2)x + k^2 + 2k + 1 = m(ax+b)^2$, tức là

$$\Delta' = (2k - 4k^2)^2 - (16k^2 + 4k + 1)(k^2 + 2k + 1) = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{4}.$$

Phương án 2 rõ ràng rất khả thi về mặt lập luận, tuy nhiên nhiều bạn sẽ “ngại ngừng” khi thao tác với các con số “to lớn”, một sự lý giải có vẻ “khả quan” của một số bạn là khai triển $(k\sqrt{x^2+1})^2$ tỏ ra nhẹ nhàng

hơn so với $k^2(4x-1)^2$! Thêm nữa, phương trình (2) phức tạp hơn so với phương trình (1), nghiệm $k = -\frac{1}{4}$

“khó tìm” hơn nghiệm $k = -4$.

Lưu ý đối với $m(ax+b)^2$ nếu $m \leq 0$ thì các trường hợp sau xảy ra

- $m < 0$ thì $A^2 = m(ax+b)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ ax+b = 0 \end{cases}$
- $m = 0$ thì $A^2 = 0 \Leftrightarrow A = 0$.

Bài toán 60. Giải phương trình $(x+1)\sqrt{x^2-3x+3} = x^2-2x+3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét $x^2-2x+3 = (x-1)^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ (x^2+2x+1)(x^2-3x+3) = x^4+2x^2(3-2x)+4x^2-12x+9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^4-x^3-2x^2+3x+3 = x^4-4x^3+10x^2-12x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ 3x^3-12x^2+15x-6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ (x-1)(3x^2-9x+6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ (x-1)^2(x-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; x = 2$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1; x = 2$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$4(x+1)\sqrt{x^2-3x+3} = 4x^2-8x+12 \Leftrightarrow 4(x^2-3x+3) - 4(x+1)\sqrt{x^2-3x+3} + x^2+2x+1 = x^2-2x+1$$

$$\Leftrightarrow (x+1-2\sqrt{x^2-3x+3})^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-3x+3} = x \\ \sqrt{x^2-3x+3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3-3x = 0 \\ x^2-3x+2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \in \{1; 2\} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1; 2\}$$

Kết luận tập nghiệm $S = \{1; 2\}$.

Nhận xét.

Bài toán 59 có hệ số $k = -2$. Biến đổi

$$2k(x+1)\sqrt{x^2-3x+3} = 2k(x^2-2x+3)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + 2k(x+1)\sqrt{x^2-3x+3} + k^2(x^2-3x+3) = 2k(x^2-2x+3) + x^2 + 2x + 1 + k^2(x^2-3x+3)$$

$$\Leftrightarrow (x+1+k\sqrt{x^2-3x+3})^2 = (k^2+2k+1)x^2 + (2-4k-3k^2)x + 3k^2+6k+1$$

Cho $3k^2+6k+1=3k(k+2)+1$ chính phương, suy ra $k=-2$. Đưa về $(x+1-2\sqrt{x^2-3x+3})^2 = (x-1)^2$.

Bài toán 61. Giải phương trình $\sqrt{2x-1} = x^2-3x+1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4\sqrt{2x-1} = 4x^2-12x+4 \Leftrightarrow 4(2x-1) + 4\sqrt{2x-1} + 1 = 4x^2-4x+1$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{2x-1}+1)^2 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1} = x-1 & (1) \\ \sqrt{2x-1} = -x & (2) \end{cases}$$

$$\checkmark (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x-1 = x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-4x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2+\sqrt{2}.$$

$$\checkmark \text{ Phương trình (2) vô nghiệm vì } x \geq \frac{1}{2}.$$

Kết luận phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $x = 2+\sqrt{2}$.

Nhận xét.

Tìm hằng số k

$$2k\sqrt{2x-1} = 2k(x^2-3x+1)$$

$$\Leftrightarrow 1+2k\sqrt{2x-1}+k^2(2x-1) = 1+k^2(2x-1)+2k(x^2-3x+1)$$

$$\Leftrightarrow (1+k\sqrt{2x-1})^2 = 2kx^2 + (2k^2-6k)x + 2k-k^2+1$$

Mục tiêu $2kx^2 + (2k^2-6k)x + 2k-k^2+1 = m(ax+b)^2$, suy ra $\Delta' = (k^2-3k)^2 - 2k(2k-k^2+1) = 0 \Rightarrow k = 2$.

Bài toán 62. Giải phương trình $x^2-x-1000\sqrt{1+8000x} = 1000$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $1+8000x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2-4x-4000\sqrt{1+8000x} = 4000$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+3998x+1999^2 = 1+8000x+4000\sqrt{1+8000x}+4.1000^2$$

$$\Leftrightarrow (2x+1999)^2 = (\sqrt{1+8000x}+2000)^2 \Leftrightarrow |2x+1999| = |\sqrt{1+8000x}+2000|$$

$$\Leftrightarrow 2x+1999 = \sqrt{1+8000x}+2000 \Leftrightarrow 2x-1 = \sqrt{1+8000x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 1 \\ 4x^2-4x+1 = 1+8000x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 1 \\ 4x^2-8004x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2001$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2001$.

Bài toán 63. Giải phương trình $\sqrt{x+1} = x^2 + 4x + 5$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4\sqrt{x+1} = 4x^2 + 16x + 20 \Leftrightarrow 4(x+1) + 4\sqrt{x+1} + 1 = 4x^2 + 20x + 25$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{x+1} + 1)^2 = (2x+5)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+1} = 2x+4 \\ 2\sqrt{x+1} + 1 = -2x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = x+2 \\ \sqrt{x+1} = -x-3 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$\circ (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x+1 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 3x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset.$$

○ Phương trình (2) vô nghiệm vì $-x-3 < 0, \forall x \geq -1$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} + x + 1 - \sqrt{x+1} + \frac{1}{4} + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{5}{2} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 64. Giải phương trình $x^2 + x + 12\sqrt{x+1} = 36$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 + 2x + 1 = x + 1 - 12\sqrt{x+1} + 36 \Leftrightarrow (x+1)^2 = (\sqrt{x+1} - 6)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \sqrt{x+1} - 6 \\ x+1 = 6 - \sqrt{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+7 = \sqrt{x+1} \\ 5-x = \sqrt{x+1} \end{cases}$$

$$\text{➤ } x+7 = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ x^2 + 14x + 49 = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ x^2 + 13x + 48 = 0 \end{cases} \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\text{➤ } 5-x = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x^2 - 10x + 25 = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x^2 - 11x + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Bài toán 65. Giải phương trình $\frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2} = \sqrt{x^2 + 2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \neq -2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2} - 3 = \sqrt{x^2 + 2} - 3 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 7}{x + 2} = \frac{x^2 - 7}{\sqrt{x^2 + 2} + 3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 7 \\ \sqrt{x^2 + 2} = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 7 \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + 2 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \neq -2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2 + 12x - 4 = 4(x+2)\sqrt{x^2+2} \Leftrightarrow 4(x^2+2) - 4(x+2)\sqrt{x^2+2} + x^2 + 4x + 4 = x^2 - 8x + 16$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{x^2+2} - x - 2)^2 = (x-4)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 7 \\ \sqrt{x^2+2} = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 7 \\ x \geq 1 \\ x^2 + 2 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$$

Kết luận tập nghiệm $S = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$.

Bài toán 66. Giải phương trình $\sqrt{3x-2} = -4x^2 + 21x - 22$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4\sqrt{3x-2} = -16x^2 + 84x - 88 \Leftrightarrow 16x^2 - 72x + 81 = 4(3x-2) - 4\sqrt{3x-2} + 1$$

$$\Leftrightarrow (4x-9)^2 = (2\sqrt{3x-2}-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 = \sqrt{3x-2} & (1) \\ 5-2x = \sqrt{3x-2} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x^2 - 16x + 16 = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x^2 - 19x + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{19 + \sqrt{73}}{8}. \\ \blacksquare (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} 5 \geq 2x \\ 4x^2 - 20x + 25 = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq 5 \\ 4x^2 - 23x + 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{23 - \sqrt{97}}{8}. \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện ta có các nghiệm $x = \frac{19 + \sqrt{73}}{8}; x = \frac{23 - \sqrt{97}}{8}$.

Nhận xét.

Đối với phương trình, bất phương trình căn thức trong đó biểu thức trong căn có dạng nhị thức bậc nhất, thao tác thêm bớt, tách hạng tử tạo lập hằng đẳng thức trở nên dễ dàng hơn. Khi đó chúng ta chỉ cần tìm hệ số k chẵn sao cho hạng tử chứa x^2 có dạng chính phương. Diễn hình trong bài toán 65, nhân đồng bộ hai vế với hằng số 4 và chuyển vế xuất hiện $16x^2$, từ đây bài toán cơ bản được hoàn thiện.

Bài toán 67. Giải phương trình $1 + \sqrt{1+x} = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4 + 4\sqrt{1+x} = 4x^2 \Leftrightarrow 4(1+x) + 4\sqrt{1+x} + 1 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{1+x} + 1)^2 = (2x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1+x} = x \\ \sqrt{1+x} = -x-1 \end{cases} \quad (*)$$

$$\circ \sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

○ Phương trình (*) có nghiệm khi $-x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$. Kết hợp $x \geq -1$ thu được $x = -1$.

Đổi chiều điều kiện đi đến đáp số $x = -1; x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} = x^2 - 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} 1+x = x^4 - 2x^2 + 1 \\ x^2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 2x^2 - x = 0 \\ x^2 \geq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x(x^3 - 2x - 1) = 0 \\ x^2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)(x^2 - x - 1) = 0 \\ x^2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1; x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện đi đến đáp số $x = -1; x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bài toán 68. Giải phương trình $x^2 - 5x + 4 = 2\sqrt{x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 - 4x + 4 = x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = (\sqrt{x-1} + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = \sqrt{x-1} + 1 \\ 2-x = \sqrt{x-1} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = \sqrt{x-1} \\ 1-x = \sqrt{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad x-3 = \sqrt{x-1} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 6x + 9 = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad 1-x = \sqrt{x-1} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x \geq 1 \\ 1-x = \sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1; x = 5$.

Bài toán 69. Giải phương trình $x^2 + 2x + 20 = 4\sqrt{x-3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 + 6x + 9 = 4(x-3) + 4\sqrt{x-3} + 1 \Leftrightarrow (x+3)^2 = (2\sqrt{x-3} + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow |x+3| = |2\sqrt{x-3} + 1| \Leftrightarrow x+3 = 2\sqrt{x-3} + 1 \Leftrightarrow x+2 = 2\sqrt{x-3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 4x + 4 = 4x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 = -16 \end{cases} \quad (*)$$

Dễ thấy hệ (*) vô nghiệm. Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 70. Giải phương trình $5x^2 - 13x + 9 + 6\sqrt{x^2 - x + 1} = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2 + 4x + 1 = 9(x^2 - x + 1) + 6\sqrt{x^2 - x + 1} + 1$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^2 = (3\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 3\sqrt{x^2 - x + 1} & (1) \\ -2 - 2x = 3\sqrt{x^2 - x + 1} & (2) \end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 = 9(x^2 - x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 5x^2 - 9x + 9 = 0 \end{cases}$ (Vô nghiệm).
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} -2 - 2x \geq 0 \\ 4x^2 + 8x + 4 = 9(x^2 - x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 5x^2 - 17x + 5 = 0 \end{cases}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 71. Giải phương trình $6(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) = 8x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x + 6\sqrt{x} + 9 &= 9(x+1) + 6\sqrt{x+1} + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 3)^2 = (3\sqrt{x+1} + 1)^2 \\ \Leftrightarrow |\sqrt{x} + 3| &= |3\sqrt{x+1} + 1| \Leftrightarrow \sqrt{x} + 3 = 3\sqrt{x+1} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 = 3\sqrt{x+1} \\ \Leftrightarrow x + 4\sqrt{x} + 4 &= 9x + 9 \Leftrightarrow 4\sqrt{x} = 8x + 5 \\ \Leftrightarrow 4x - 4\sqrt{x} + 1 + 4x + 4 &= 0 \Leftrightarrow (2\sqrt{x} - 1)^2 + 4x + 4 = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Rõ ràng phương trình (*) vô nghiệm vì $(2\sqrt{x} - 1)^2 + 4x + 4 > 0, \forall x \geq 0$. Kết luận bài toán vô nghiệm.

Bài toán 72. Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{3x+4} = x + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x} + 2\sqrt{3x+4} &= 2x + 4 \Leftrightarrow x + 2\sqrt{x} + 1 = 3x + 4 - 2\sqrt{3x+4} + 1 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x} + 1)^2 &= (\sqrt{3x+4} - 1)^2 \Leftrightarrow |\sqrt{x} + 1| = |\sqrt{3x+4} - 1| \quad (1) \end{aligned}$$

Để ý rằng $\sqrt{3x+4} > 1, \forall x \geq 0$ nên

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = \sqrt{3x+4} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 = \sqrt{3x+4} \Leftrightarrow x + 4\sqrt{x} + 4 = 3x + 4 \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x(x-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x = 0; x = 4$.

Bài toán 73. Giải phương trình $3x + 4\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x+3} = 7 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x - 4 + 4\sqrt{x-1} + 4 &= x + 3 - 2\sqrt{x+3} + 1 \\ \Leftrightarrow (2\sqrt{x-1} + 1)^2 &= (\sqrt{x+3} - 1)^2 \Leftrightarrow |2\sqrt{x-1} + 1| = |\sqrt{x+3} - 1| \quad (1) \end{aligned}$$

Để thấy $\sqrt{x+3} \geq 2 > 1, \forall x \geq 1$ nên

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{x+3} - 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} + 2 = \sqrt{x+3} \\ &\Leftrightarrow 4x - 4 + 8\sqrt{x-1} + 4 = x + 3 \Leftrightarrow 3x - 3 + 8\sqrt{x-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(3\sqrt{x-1} + 8) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Bài toán 74. Giải bất phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{5x+4} \leq 2(1+x)$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 0$.

Nhận xét $4x+4 > 0, \forall x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{5x+4} > \sqrt{x}, \forall x \geq 0$. Bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \frac{5x+4-x}{\sqrt{5x+4}-\sqrt{x}} &\leq 2(1+x) \Leftrightarrow \frac{4(1+x)}{\sqrt{5x+4}-\sqrt{x}} \leq 2(1+x) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{5x+4}-\sqrt{x} \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{5x+4} \geq \sqrt{x}+2 \Leftrightarrow 5x+4 \geq x+4\sqrt{x}+4 \\ &\Leftrightarrow 4x-4\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=0 \\ \sqrt{x} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = \{0\} \cup [1; +\infty)$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x} + 2\sqrt{5x+4} &\leq 4+4x \Leftrightarrow x+2\sqrt{x}+1 \leq 5x+4-2\sqrt{5x+4}+1 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)^2 \leq (\sqrt{5x+4}-1)^2 \Leftrightarrow |\sqrt{x}+1| \leq |\sqrt{5x+4}-1| \quad (1) \end{aligned}$$

Để ý rằng $\sqrt{5x+4} > 1, \forall x \geq 0$ nên

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \leq \sqrt{5x+4}-1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 \leq \sqrt{5x+4} \Leftrightarrow x+4\sqrt{x}+4 \leq 5x+4 \\ &\Leftrightarrow 4x-4\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=0 \\ \sqrt{x} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = \{0\} \cup [1; +\infty)$.

Bài toán 75. Giải phương trình $4x^2 + 14x + 11 = 4\sqrt{6x+10}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -\frac{5}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x^2 + 20x + 25 &= 6x+10+4\sqrt{6x+10}+4 \\ &\Leftrightarrow (2x+5)^2 = (\sqrt{6x+10}+2)^2 \Leftrightarrow |2x+5| = |\sqrt{6x+10}+2| \quad (1) \end{aligned}$$

Để nhận thấy $2x+5 > 0, \forall x \geq -\frac{5}{3}$ nên

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow 2x+5 = \sqrt{6x+10}+2 \Leftrightarrow 2x+3 = \sqrt{6x+10} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ 4x^2+12x+9 = 6x+10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ 4x^2+6x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3+\sqrt{13}}{4} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm duy nhất $x = \frac{\sqrt{13}-3}{4}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -\frac{5}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 4x^2 + 14x + 11 \geq 10 \\ (4x^2 + 14x + 11)^2 = 16(6x + 10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 14x + 11 \geq 0 \\ 16x^4 + 112x^3 + 284x^2 + 212x - 39 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 14x + 11 \geq 0 \\ (4x^2 + 6x - 1)(4x^2 + 22x + 39) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{13} - 3}{4}$$

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = \frac{\sqrt{13} - 3}{4}$

Bài toán 76. Giải phương trình $x + 2\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+2} = 3$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x + 4\sqrt{x-1} + 2\sqrt{2x+2} &= 6 \Leftrightarrow 4(x-1) + 4\sqrt{x-1} + 1 = 2x + 2 - 2\sqrt{2x+2} + 1 \\ \Leftrightarrow (2\sqrt{x-1} + 1)^2 &= (\sqrt{2x+2} - 1)^2 \Leftrightarrow |2\sqrt{x-1} + 1| = |\sqrt{2x+2} - 1| \end{aligned} \quad (1)$$

Ta có $\sqrt{2x+2} - 1 > 0, \forall x \geq 1$ nên

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{2x+2} - 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} + 2 = \sqrt{2x+2} \\ &\Leftrightarrow 4x - 4 + 8\sqrt{x-1} + 4 = 2x + 2 \Leftrightarrow 8\sqrt{x-1} + 2x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(4 + \sqrt{x-1}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 77. Giải phương trình $4\sqrt{2x-1} + 4\sqrt{x+3} = 2x+5$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x - 1 + 4\sqrt{2x-1} + 4 &= 4(x+3) - 4\sqrt{x+3} + 1 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2x-1} + 2)^2 &= (2\sqrt{x+3} - 1)^2 \Leftrightarrow |\sqrt{2x-1} + 2| = |2\sqrt{x+3} - 1| \end{aligned} \quad (1)$$

Rõ ràng $2\sqrt{x+3} - 1 > 0, \forall x \geq \frac{1}{2}$. Do đó

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-1} + 2 &= 2\sqrt{x+3} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} + 3 = 2\sqrt{x+3} \\ \Leftrightarrow 2x - 1 + 6\sqrt{2x-1} + 9 &= 4x + 12 \Leftrightarrow 3\sqrt{2x-1} = x + 2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 18x - 9 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - 14x + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; x = 13 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm $x = 1; x = 13$.

Bài toán 78. Giải phương trình $80\sqrt{x} + 136 = 25x^2 + 20x + 60x\sqrt{x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
16x + 80\sqrt{x} + 100 &= 25x^2 + 60x\sqrt{x-1} + 36(x-1) \\
\Leftrightarrow (4\sqrt{x} + 10)^2 &= (5x + 6\sqrt{x-1})^2 \Leftrightarrow |4\sqrt{x} + 10| = |5x + 6\sqrt{x-1}| \\
\Leftrightarrow 4\sqrt{x} + 10 &= 5x + 6\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 4x + 4\sqrt{x} + 1 = 9(x-1) + 6\sqrt{x-1} + 1 \\
\Leftrightarrow (2\sqrt{x} + 1)^2 &= (3\sqrt{x-1} + 1)^2 \Leftrightarrow |2\sqrt{x} + 1| = |3\sqrt{x-1} + 1| \\
\Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 1 &= 3\sqrt{x-1} + 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 3\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 4x = 9x - 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{5}
\end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = \frac{9}{5}$.

Bài toán 79. Giải phương trình $9x^2 + 2x + 8 = 4\sqrt{x-2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
9x^2 + 6x + 1 &= 4(x-2) + 4\sqrt{x-2} + 1 \Leftrightarrow (3x+1)^2 = (2\sqrt{x-2} + 1)^2 \Leftrightarrow |3x+1| = |2\sqrt{x-2} + 1| \\
\Leftrightarrow 3x+1 &= 2\sqrt{x-2} + 1 \Leftrightarrow 3x = 2\sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9x^2 - 4x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-2)^2 + 8x^2 = -4 \end{cases} \quad (*)
\end{aligned}$$

Dễ thấy hệ (*) vô nghiệm nên phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 80. Giải phương trình $x^2 + 7 = x + 4\sqrt{2x^2 + x + 3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
x^2 + 2x + 1 &= 2x^2 + x + 3 + 4\sqrt{2x^2 + x + 3} + 4 \\
\Leftrightarrow (x+1)^2 &= (\sqrt{2x^2 + x + 3} + 2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{2x^2 + x + 3} & (1) \\ -x-3 = \sqrt{2x^2 + x + 3} & (2) \end{cases}
\end{aligned}$$

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 1 = 2x^2 + x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} -x-3 \geq 0 \\ x^2 + 6x + 9 = 2x^2 + x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x^2 - 5x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ x = -1; x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$

Vậy phương trình đề bài vô nghiệm.

Bài toán 81. Giải phương trình $2\sqrt{1+2x} + 4\sqrt{x} = 2x-1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
2x + 1 + 2\sqrt{2x+1} + 1 &= 4x - 4\sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{2x+1} + 1)^2 = (2\sqrt{x} - 1)^2 \\
\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+1} + 1 = 2\sqrt{x} - 1 \\ \sqrt{2x+1} + 1 = 1 - 2\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+1} + 2 = 2\sqrt{x} & (1) \\ \sqrt{2x+1} + 2\sqrt{x} = 0 & (2) \end{cases}
\end{aligned}$$

- (1) $\Leftrightarrow 2x + 5 + 4\sqrt{2x+1} = 4x \Leftrightarrow 4\sqrt{2x+1} = 2x - 5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ 16(2x+1) = 4x^2 - 20x + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 5 \\ 4x^2 - 52x + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{13+4\sqrt{10}}{2}.$$

$$\bullet (2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{13+4\sqrt{10}}{2}$.

Bài toán 82. Giải phương trình $4x^2 + 35 = 30x + 6\sqrt{2x-3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12x + 9 &= 9(2x-3) + 6\sqrt{2x-3} + 1 \\ \Leftrightarrow (2x-3)^2 &= (3\sqrt{2x-3} + 1)^2 \Leftrightarrow |2x-3| = |3\sqrt{2x-3} + 1| \\ \Leftrightarrow 2x-3 &= 3\sqrt{2x-3} + 1 \Leftrightarrow 2x-4 = 3\sqrt{2x-3} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x^2 - 16x + 16 = 18x - 27 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x^2 - 34x + 43 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{17+3\sqrt{13}}{4} \end{aligned}$$

Vậy phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x = \frac{17+3\sqrt{13}}{4}$.

Bài toán 83. Giải phương trình $25x^2 + 7x + 6\sqrt{3x-1} = 7$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 25x^2 + 10x + 1 &= 3x - 1 - 6\sqrt{3x-1} + 9 \Leftrightarrow (5x+1)^2 = (\sqrt{3x-1} - 3)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+1 = \sqrt{3x-1} - 3 \\ 5x+1 = 3 - \sqrt{3x-1} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+4 = \sqrt{3x-1} & (1) \\ 2-5x = \sqrt{3x-1} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\circ (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+4 \geq 0 \\ 25x^2 + 40x + 16 = 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \geq -4 \\ 25x^2 + 37x + 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$\circ (2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-5x \geq 0 \\ 25x^2 - 20x + 4 = 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \leq 2 \\ 25x^2 - 23x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{23-\sqrt{29}}{50}.$$

Vậy phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = \frac{23-\sqrt{29}}{50}$.

Bài toán 84. Giải bất phương trình $16x^2 - 11x \leq 4\sqrt{3x-2} + 1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$.

Với điều kiện này bất phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
 16x^2 - 8x + 1 &\leq 3x - 2 + 4\sqrt{3x - 2} + 4 \Leftrightarrow (4x - 1)^2 \leq (\sqrt{3x - 2} + 2)^2 \\
 \Leftrightarrow |4x - 1| &\leq |\sqrt{3x - 2} + 2| \Leftrightarrow 4x - 1 \leq \sqrt{3x - 2} + 2 \Leftrightarrow 4x - 3 \leq \sqrt{3x - 2} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x < 3 \\ 4x - 3 \geq 0 \\ 16x^2 - 24x + 9 \leq 3x - 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x < 3 \\ 4x \geq 3 \\ 16x^2 - 27x + 11 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x < 3 \\ \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 1
 \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S = \left[\frac{2}{3}; 1\right]$.

Bài toán 85. Giải phương trình $\frac{x^2 + 4x + 1}{2x + 1} = \sqrt{3x + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 x^2 + 4x + 1 &= (2x + 1)\sqrt{3x + 1} \Leftrightarrow 4x^2 + 16x + 4 - 4(2x + 1)\sqrt{3x + 1} = 0 \\
 \Leftrightarrow 4(3x + 1) - 4(2x + 1)\sqrt{3x + 1} + 4x^2 + 4x + 1 &= 1 \Leftrightarrow (2x + 1 - 2\sqrt{3x + 1})^2 = 1 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 - 2\sqrt{3x + 1} = 1 \\ 2x + 1 - 2\sqrt{3x + 1} = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3x + 1} & (1) \\ x + 1 = \sqrt{3x + 1} & (2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\diamond (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

$$\diamond (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x + 1 = 3x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0; x = 1.$$

Kết hợp với điều kiện ta thu được tập nghiệm $S = \left\{0; 1; \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right\}$.

Bài toán 86. Giải phương trình $10x^2 + 3x + 1 = (1 + 6x)\sqrt{x^2 + 3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 40x^2 + 12x + 4 &= 4(1 + 6x)\sqrt{x^2 + 3} \Leftrightarrow 40x^2 + 12x + 4 - 4(1 + 6x)\sqrt{x^2 + 3} = 0 \\
 \Leftrightarrow 4(x^2 + 3) - 4(1 + 6x)\sqrt{x^2 + 3} + 36x^2 + 12x + 1 &= 9 \\
 \Leftrightarrow (1 + 6x - 2\sqrt{x^2 + 3})^2 &= 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 6x - 2\sqrt{x^2 + 3} = 3 \\ 1 + 6x - 2\sqrt{x^2 + 3} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 = \sqrt{x^2 + 3} & (1) \\ 3x + 2 = \sqrt{x^2 + 3} & (2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\checkmark (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 1 \\ 9x^2 - 6x + 1 = x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 1 \\ 8x^2 - 6x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\checkmark (2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 \geq 0 \\ 9x^2 + 12x + 4 = x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq -2 \\ 8x^2 + 12x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3 - \sqrt{7}}{4}.$$

Đổi chiều điều kiện ta có nghiệm $x = 1; x = -\frac{3+\sqrt{7}}{4}$.

Bài toán 87. Giải phương trình $8x^2 + 9 + 6\sqrt{7x-1} = 55x$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{7}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$16x^2 + 8x + 1 = 9(7x-1) - 6\sqrt{7x-1} + 1 \Leftrightarrow (4x+1)^2 = (3\sqrt{7x-1}-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+1 = 3\sqrt{7x-1}-1 \\ 4x+1 = 1-3\sqrt{7x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2 = 3\sqrt{7x-1} & (1) \\ 4x+3\sqrt{7x-1} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\bullet (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2 \geq 0 \\ 16x^2+16x+4 = 63x-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \geq -2 \\ 16x^2-47x+13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{47+9\sqrt{17}}{32}; x = \frac{47-9\sqrt{17}}{32}.$$

$$\bullet \text{ Ta có } 4x+3\sqrt{7x-1} > 0, \forall x \geq \frac{1}{7} \text{ nên phương trình (2) vô nghiệm.}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x = \frac{47+9\sqrt{17}}{32}; x = \frac{47-9\sqrt{17}}{32}$.

Bài toán 88. Giải phương trình $x^2 + 8\sqrt{2x+1} = 6x+13$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x+1-8\sqrt{2x+1}+16 = x^2-4x+4 \Leftrightarrow (\sqrt{2x+1}-4)^2 = (x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+1}-4 = x-2 \\ \sqrt{2x+1}-4 = 2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+1} = x+2 & (1) \\ \sqrt{2x+1} = 6-x & (2) \end{cases}$$

$$\text{➤ } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2x+1 = x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2+2x+3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ (x+1)^2 = -2 \end{cases} \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\text{➤ } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} 6-x \geq 0 \\ 2x+1 = x^2-12x+36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x^2-14x+32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7-\sqrt{17}}{2}.$$

Đổi chiều điều kiện ta có nghiệm $x = \frac{7-\sqrt{17}}{2}$.

Bài toán 89. Giải phương trình $4x^2 + 6\sqrt{2x+5} = 30x+37$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{5}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2 = 30x+37-6\sqrt{2x+5} \Leftrightarrow 4x^2-12x+9 = 9(2x+5)-6\sqrt{2x+5}+1$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)^2 = (3\sqrt{2x+5}-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 = 3\sqrt{2x+5} & (1) \\ 3\sqrt{2x+5} = 4-2x & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \diamond (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4x^2 - 8x + 4 = 18x + 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4x^2 - 26x - 41 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{13 + 3\sqrt{37}}{4}. \\ \diamond (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 18x + 45 = 4x^2 - 16x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 4x^2 - 34x - 29 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{17 - 9\sqrt{5}}{4}. \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện thu được nghiệm $x = \frac{17 - 9\sqrt{5}}{4}; x = \frac{13 + 3\sqrt{37}}{4}$.

Bài toán 90. Giải phương trình $x^2 + 1 = 5x + 3\sqrt{4x - 3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x + 1 &= 4(4x - 3) + 12\sqrt{4x - 3} + 9 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = (2\sqrt{4x - 3} + 3)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 2\sqrt{4x - 3} + 3 \\ 1 - 2x = 2\sqrt{4x - 3} + 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = \sqrt{4x - 3} \\ \sqrt{4x - 3} + x + 1 = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$\circ (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 4x + 4 = 4x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 8x + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \in \{1; 7\} \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$$

$$\circ \text{ Dễ dàng nhận thấy } \sqrt{4x - 3} + x + 1 > 0, \forall x \geq \frac{3}{4} \text{ nên (2) vô nghiệm.}$$

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 7$.

Bài toán 91. Giải phương trình $5x^2 + 4\sqrt{x^2 - 2x + 5} = 4x + 17$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 9x^2 - 12x + 4 &= 4(x^2 - 2x + 5) - 4\sqrt{x^2 - 2x + 5} + 1 \\ \Leftrightarrow (3x - 2)^2 &= (2\sqrt{x^2 - 2x + 5} - 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 2\sqrt{x^2 - 2x + 5} \\ 3 - 3x = 2\sqrt{x^2 - 2x + 5} \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$\blacksquare (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 \geq 0 \\ 9x^2 - 6x + 1 = 4(x^2 - 2x + 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 1 \\ 5x^2 + 2x - 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + 4\sqrt{6}}{5}.$$

$$\blacksquare (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 9x^2 - 18x + 9 = 4(x^2 - 2x + 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 5x^2 - 10x - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 - 4\sqrt{5}}{5}.$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x = \frac{4\sqrt{6} - 1}{5}; x = \frac{5 - 4\sqrt{5}}{5}$.

Bài toán 92. Giải phương trình $\sqrt{2x^3 + x^2 + 1} = x^3 + 1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $2x^3 + x^2 + 1 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{2x^3+x^2+1}=2x^3+2 \Leftrightarrow x^2=2x^3+x^2+1-2\sqrt{2x^3+x^2+1}+1$$

$$\Leftrightarrow x^2=\left(\sqrt{2x^3+x^2+1}-1\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=\sqrt{2x^3+x^2+1} & (1) \\ -x+1=\sqrt{2x^3+x^2+1} & (2) \end{cases}$$

$$\diamond (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^3+x^2+1=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^3-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x(x^2-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-1; 0; 1\}.$$

$$\diamond (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2-2x+1=2x^3+x^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 2x^3+2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x(x^2+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $S = \{-1; 0; 1\}$.

Bài toán 93. Giải phương trình $x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}$.

Lời giải 1.

Đặt $\sqrt{x^2-2x+2}=t, (t \geq 1) \Rightarrow x^2=t^2+2x-2$ ta thu được

$$t^2+2x-2+x-1=(x+2)t \Leftrightarrow t^2-(x+2)t+3x-3=0$$

$$\Leftrightarrow t(t-3)-x(t-3)+t-3=0 \Leftrightarrow (t-3)(t-x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=x-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-2x+2}=3 \\ \sqrt{x^2-2x+2}=x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-7=0 \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-2x+2=x^2-2x+1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1+2\sqrt{2}; 1-2\sqrt{2}\}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Lời giải 2.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2+x-1=(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-1-3(x+2)=(x+2)(\sqrt{x^2-2x+2}-3)$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-7=\frac{(x+2)(x^2-2x-7)}{\sqrt{x^2-2x+2}+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-7=0 & (1) \\ \sqrt{(x-1)^2+1}=x-1 & (2) \end{cases}$$

Dễ thấy $\sqrt{(x-1)^2+1} > |x-1| \geq x-1$ nên (2) vô nghiệm.

Phương trình (1) có hai nghiệm $x \in \{1+2\sqrt{2}; 1-2\sqrt{2}\}$. Kết luận nghiệm $S = \{1+2\sqrt{2}; 1-2\sqrt{2}\}$.

Lời giải 3.

Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2+4x-8-4(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}=0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+4x+4)-4(x+2)\sqrt{x^2-2x+2}+4(x^2-2x+2)=x^2-8x+16$$

$$\Leftrightarrow \left(x+2-2\sqrt{x^2-2x+2}\right)^2=(x-4)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-2x+2}=3 \\ \sqrt{x^2-2x+2}=x-1 \end{cases}$$

Suy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 7 = 0 \\ x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1 + 2\sqrt{2}; 1 - 2\sqrt{2}\}.$$

Kết luận phương trình đề bài có hai nghiệm kể trên.

Lời giải 4.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x^2 + x - 1)(x + 2) \geq 0 \\ (x^2 + x - 1)^2 = (x^2 + 4x + 4)(x^2 - 2x + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + x - 1)(x + 2) \geq 0 \\ x^2 - 2x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1 + 2\sqrt{2}; 1 - 2\sqrt{2}\}.$$

So sánh với điều kiện thu được hai nghiệm như trên.

Bài toán 94. Giải phương trình $4x^2 - 5x + 2 = x\sqrt{2x^2 - 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $2x^2 \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8x^2 - 10x + 4 &= 2x\sqrt{2x^2 - 1} \Leftrightarrow 8x^2 - 10x + 4 - 2x\sqrt{2x^2 - 1} = 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 1 - 2x\sqrt{2x^2 - 1} + x^2 + 5x^2 - 10x + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2x^2 - 1} - x)^2 + 5(x - 1)^2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 1} = x \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Thử lại, kết luận nghiệm duy nhất.

Lời giải 2.

Điều kiện $2x^2 \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \begin{cases} x(4x^2 - 5x + 2) \geq 0 \\ 16x^4 - 40x^3 + 25x^2 + 4(4x^2 - 5x) + 4 = x^2(2x^2 - 1) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x(4x^2 - 5x + 2) \geq 0 \\ 14x^4 - 40x^3 + 42x^2 - 20x + 4 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x(4x^2 - 5x + 2) \geq 0 \\ 7x^4 - 20x^3 + 21x^2 - 10x + 2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x(4x^2 - 5x + 2) \geq 0 \\ (x - 1)^2(7x^2 - 6x + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 95. Giải phương trình $3x^2 + x + 2 = (x + 2)\sqrt{2x^2 + x + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Dễ thấy $3x^2 + x + 2 = 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{12} > 0, \forall x$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2 > 0 \\ (3x^2 + x + 2)^2 = (x^2 + 4x + 4)(2x^2 + x + 1) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ 9x^4 + 6x^3 + x^2 + 4(3x^2 + x) + 4 = 2x^4 + 9x^3 + 13x^2 + 8x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ 7x^4 - 3x^3 - 4x = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x(7x^3 - 3x^2 - 4) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x(x - 1)(7x^2 + 4x + 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0; x = 1 \end{aligned}$$

Thử lại, kết luận phương trình có đúng hai nghiệm $x = 0; x = 1$.

Lời giải 2.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 24x^2 + 8x + 16 &= 8(x+2)\sqrt{2x^2 + x + 1} \Leftrightarrow 24x^2 + 8x + 16 - 8(x+2)\sqrt{2x^2 + x + 1} = 0 \\ \Leftrightarrow 16(2x^2 + x + 1) - 8(x+2)\sqrt{2x^2 + x + 1} + x^2 + 4x + 4 &= 9x^2 + 12x + 4 \\ \Leftrightarrow \left(4\sqrt{2x^2 + x + 1} - x - 2\right)^2 &= (3x + 2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 + x + 1} = x + 1 \\ 2\sqrt{2x^2 + x + 1} = -x \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^2 + x + 1 = x^2 + 2x + 1 \\ x < 0 \\ 7x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0; 1\} \end{aligned}$$

Thử lại, kết luận phương trình có đúng hai nghiệm $x = 0; x = 1$.

Lời giải 3.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3x^2 + x + 2 - (x+2)(x+1) &= (x+2)(\sqrt{2x^2 + x + 1} - x - 1) \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 2x &= (x+2)(\sqrt{2x^2 + x + 1} - x - 1) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2x^2 + x + 1} + x + 1)(\sqrt{2x^2 + x + 1} - x - 1) &= \frac{(x+2)(x^2 - x)}{\sqrt{2x^2 + x + 1} + x + 1} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ \sqrt{2x^2 + x + 1} + x + 1 = \frac{x+2}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ 2\sqrt{2x^2 + x + 1} = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{0; 1\} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ 7x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0; 1\}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Lời giải 4.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2(2x^2 + x + 1) - (x+2)\sqrt{2x^2 + x + 1} - (x^2 + x) = 0.$$

Đặt $\sqrt{2x^2 + x + 1} = t, (t > 0)$ ta thu được

$$\begin{aligned} 2t^2 - (x+2)t - (x^2 + x) &= 0 \Leftrightarrow 2t(t - x - 1) + x(t - x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow (2t + x)(t - x - 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ \sqrt{2x^2 + x + 1} + x + 1 = \frac{x+2}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 0 \\ 2\sqrt{2x^2 + x + 1} = -x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{0; 1\} \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ 7x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0; 1\} \end{aligned}$$

Thử lại, kết luận phương trình có đúng hai nghiệm $x = 0; x = 1$.

Bài toán 96. Giải phương trình $x^2 + x = 4 + 2\sqrt{x+4} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -4$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 + 2x + 1 = x + 4 + 2\sqrt{x+4} + 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 = (\sqrt{x+4} + 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{x+4} & (1) \\ -x-2 = \sqrt{x+4} & (2) \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \text{➤ } (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}. \\ \text{➤ } (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x^2 + 4x + 4 = x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x(x+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}; x = -3$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -4$.

Đặt $\sqrt{x+4} = y, (y \geq 0)$, phương trình đã cho trở thành

$$x^2 + 2x = y^2 + 2y \Leftrightarrow (x-y)(x+y) + 2(x-y) = 0 \Leftrightarrow (x+y+2)(x-y) = 0.$$

Suy ra hai trường hợp

$$\begin{aligned} \bullet \quad x+y+2=0 &\Leftrightarrow -x-2=\sqrt{x+4} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x^2 + 4x + 4 = x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x(x+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3. \\ \bullet \quad x=y &\Leftrightarrow x=\sqrt{x+4} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}; x = -3$.

Bài toán 97. Giải phương trình $(x+1)^2 + 1 = \sqrt{8x^2 + 4x + 5} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $8x^2 + 4x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 2 &= \sqrt{8x^2 + 4x + 5} \Leftrightarrow 4x^2 + 8x + 8 = 4\sqrt{8x^2 + 4x + 5} \\ &\Leftrightarrow 4x^2 + 8x + 8 = 4\sqrt{8x^2 + 4x + 5} \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 8x^2 + 4x + 5 - 4\sqrt{8x^2 + 4x + 5} + 4 \\ &\Leftrightarrow (2x-1)^2 = (\sqrt{8x^2 + 4x + 5} - 2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = \sqrt{8x^2 + 4x + 5} & (1) \\ 3-2x = \sqrt{8x^2 + 4x + 5} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned} \circ \quad (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ 4x^2 + 4x + 1 = 8x^2 + 4x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq -3 \\ 4x^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset. \\ \circ \quad (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 2x \\ 4x^2 - 12x + 9 = 8x^2 + 4x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 2x \\ 4x^2 + 16x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-2+\sqrt{5}; -2-\sqrt{5}\}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có hai nghiệm kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $8x^2 + 4x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Đề ý rằng $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0, \forall x$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}(x^2 + 2x + 2)^2 &= 8x^2 + 4x + 5 \Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4 = 8x^2 + 4x + 5 \\ \Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 4x - 1 &= 0 \Leftrightarrow (x^2 + 4x - 1)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2 + \sqrt{5}; -2 - \sqrt{5}\}\end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Lời giải 3.

Điều kiện $8x^2 + 4x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}x^2 + 1 &= \sqrt{8x^2 + 4x + 5} - 2x - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}(\sqrt{8x^2 + 4x + 5} + 2x + 1)(\sqrt{8x^2 + 4x + 5} - 2x - 1) &= \sqrt{8x^2 + 4x + 5} - 2x - 1 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{8x^2 + 4x + 5} - 2x - 1)\left(\frac{\sqrt{8x^2 + 4x + 5} + 2x + 1}{4} - 1\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = \sqrt{8x^2 + 4x + 5} & (1) \\ 3 - 2x = \sqrt{8x^2 + 4x + 5} & (2) \end{cases}\end{aligned}$$

Xét các trường hợp xảy ra

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 \geq 0 \\ 4x^2 + 4x + 1 = 8x^2 + 4x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq -3 \\ 4x^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 2x \\ 4x^2 - 12x + 9 = 8x^2 + 4x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 2x \\ 4x^2 + 16x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-2 + \sqrt{5}; -2 - \sqrt{5}\}.$

Kết luận phương trình đề bài có hai nghiệm kể trên.

Lời giải 4.

Điều kiện $8x^2 + 4x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}4x^2 + 8x + 8 &= 4\sqrt{8x^2 + 4x + 5} \\ \Leftrightarrow 8x^2 + 4x + 5 - 4\sqrt{8x^2 + 4x + 5} - 4x^2 + 4x + 3 &= 0 & (1)\end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{8x^2 + 4x + 5} = t, t > 0$ thì (1) trở thành

$$\begin{aligned}t^2 - 4t - 4x^2 + 4x + 3 &= 0 \Leftrightarrow t(t - 2x - 1) + 2x(t - 2x - 1) - 3(t - 2x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow (t - 2x - 1)(t + 2x - 3) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2x + 1 \\ t = 3 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = \sqrt{8x^2 + 4x + 5} & (1) \\ 3 - 2x = \sqrt{8x^2 + 4x + 5} & (2) \end{cases}\end{aligned}$$

Xét các trường hợp xảy ra

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 \geq 0 \\ 4x^2 + 4x + 1 = 8x^2 + 4x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq -3 \\ 4x^2 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 2x \\ 4x^2 - 12x + 9 = 8x^2 + 4x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \geq 2x \\ 4x^2 + 16x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-2 + \sqrt{5}; -2 - \sqrt{5}\}.$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Đối với lời giải 1, bài toán 97, để phân tích hằng đẳng thức chúng ta tìm hệ số k bình thường

$$\begin{aligned}
 x^2 + 2x + 2 &= \sqrt{8x^2 + 4x + 5} \Leftrightarrow 2kx^2 + 4kx + 4k = 2k\sqrt{8x^2 + 4x + 5} \\
 &\Leftrightarrow 2kx^2 + 4kx + 4k + k^2(8x^2 + 4x + 5) + 1 = \left(k\sqrt{8x^2 + 4x + 5} + 1\right)^2 \\
 &\Leftrightarrow (8k^2 + 2k)x^2 + (4k^2 + 4k)x + 5k^2 + 4k + 1 = \left(k\sqrt{8x^2 + 4x + 5} + 1\right)^2 \\
 k = -\frac{1}{2} &\Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{8x^2 + 4x + 5} + 1\right)^2 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = (\sqrt{8x^2 + 4x + 5} - 2)^2
 \end{aligned}$$

Bài toán 98. Giải phương trình $2\sqrt{2x-1} = 3x + 2\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 2x\sqrt{2x-1} &= 3x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{2x-1} + 2x - 1 = 4x^2 + 4x + 1 \\
 &\Leftrightarrow (x + \sqrt{2x-1})^2 = (2x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-1} = x+1 & (1) \\ \sqrt{2x-1} = -3x-1 & (2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Xét các khả năng sau xảy ra

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x-1 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 4x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 + \sqrt{2}.$
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \geq 3x \\ 2x-1 = 9x^2 + 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \geq 3x \\ 9x^2 + 4x + 2 = 0 \end{cases}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = -2 + \sqrt{2}$.

Nhận xét.

Quy trình tìm kiếm diễn ra bình thường

$$\begin{aligned}
 2kx\sqrt{2x-1} &= 3kx^2 + 2kx + 2k \\
 &\Leftrightarrow x^2 + 2kx\sqrt{2x-1} + k^2(2x-1) = 3kx^2 + 2kx + 2k + k^2(2x-1) + x^2 \\
 &\Leftrightarrow (x + k\sqrt{2x-1})^2 = (3k+1)x^2 + (2k^2 + 2k)x - k^2 + 2k \\
 k = 1 &\Rightarrow (x + \sqrt{2x-1})^2 = (2x+1)^2
 \end{aligned}$$

Bài toán 99. Giải phương trình $4x + 2 = \frac{3}{x} + \sqrt{x^2 + x + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 4x^2 + 2x - 3 &= 4x\sqrt{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow 9x^2 + 6x + 1 = x^2 + 4x\sqrt{x^2 + x + 1} + 4(x^2 + x + 1) \\
 &\Leftrightarrow (3x+1)^2 = (x + 2\sqrt{x^2 + x + 1})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 = 2\sqrt{x^2 + x + 1} & (1) \\ -4x-1 = 2\sqrt{x^2 + x + 1} & (2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Xét các trường hợp

$$\begin{aligned} \diamond (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 4x^2+4x+1=4x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset. \\ \diamond (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} -4x \geq 1 \\ 16x^2+8x+1=4x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \leq -1 \\ 12x^2+4x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1-\sqrt{10}}{6}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = \frac{-1-\sqrt{10}}{6}$.

Bài toán 100. Giải phương trình $x^2 + 5x + 24 = (5x - 3)\sqrt{x + 4}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -4$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 24x^2 + 120x + 24^2 - 24(5x - 3)\sqrt{x + 4} &= 0 \\ \Leftrightarrow 25x^2 - 30x + 9 - 24(5x - 3)\sqrt{x + 4} + 144(x + 4) &= x^2 - 6x + 9 \\ \Leftrightarrow (5x - 3 - 12\sqrt{x + 4})^2 &= (x - 3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x + 4} = x & (1) \\ x - 1 = 2\sqrt{x + 4} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned} \circ (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 9x - 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in \{-3; 12\} \end{cases} \Leftrightarrow x = 12. \\ \circ (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 1 = 4x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 6x - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 + 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x = 3 + 2\sqrt{6}; x = 12$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -4$.

Phương trình đã cho tương đương với $6(x + 4) - (5x - 3)\sqrt{x + 4} + x^2 - x = 0$

Đặt $\sqrt{x + 4} = t, (t \geq 0)$ ta thu được

$$\begin{aligned} 6t^2 - (5x - 3)t + x^2 - x &= 0 \\ \Leftrightarrow 2t(3t - x) - x(3t - x) - (3t - x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (3t - x)(2t - x - 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t \\ x + 1 = 2t \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned} \bullet x = 3t &\Leftrightarrow x = 3\sqrt{x + 4} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 9x - 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in \{-3; 12\} \end{cases} \Leftrightarrow x = 12. \\ \bullet x + 1 = 2t &\Leftrightarrow x + 1 = 2\sqrt{x + 4} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 1 = 4x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 6x - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 + 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x = 3 + 2\sqrt{6}; x = 12$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \geq -4$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x^2 + 5x + 24)(5x - 3) \geq 0 \\ (x^2 + 5x + 24)^2 = (5x - 3)(x + 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 5x + 24)(5x - 3) \geq 0 \\ x^4 - 15x^3 + 3x^2 + 351x + 540 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 5x + 24)(5x - 3) \geq 0 \\ (x - 12)(x + 3)(x^2 - 6x - 15) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 5x + 24)(5x - 3) \geq 0 \\ x \in \{-3; 12; 3 - 2\sqrt{6}; 3 + 2\sqrt{6}\} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{3 + 2\sqrt{6}; 12\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x = 3 + 2\sqrt{6}; x = 12$.

Nhận xét.

Đối với lời giải 1 của bài toán, các bạn dễ dàng tìm hằng số k

$$\begin{aligned} & 2kx^2 + 10kx + 48k = 2k(5x - 3)\sqrt{x + 4} \\ & \Leftrightarrow 2kx^2 + 10kx + 48k + (5x - 3)^2 + k^2(x + 4) = (5x - 3)^2 + k^2(x + 4) + 2k(5x - 3)\sqrt{x + 4} \\ & \Leftrightarrow (2k + 25)x^2 + (k^2 + 10k - 30)x + 4k^2 + 48k + 9 = (5x - 3 + k\sqrt{x + 4})^2 \\ & k = -12 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = (5x - 3 - 12\sqrt{x + 4})^2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = (5x - 3 - 12\sqrt{x + 4})^2 \end{aligned}$$

Bài toán 101. Giải phương trình $3x^2 + 17x - 28 = 10(2x - 1)\sqrt{x - 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 3x^2 + 17x - 28 - 10(2x - 1)\sqrt{x - 1} = 0 \\ & \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 4x^2 - 4x + 1 - 10(2x - 1)\sqrt{x - 1} + 25(x - 1) \\ & \Leftrightarrow (x + 2)^2 = (2x - 1 - 5\sqrt{x - 1})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 5\sqrt{x - 1} & (1) \\ 3x + 1 = 5\sqrt{x - 1} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} & \diamond (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 6x + 9 = 25x - 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 31x + 34 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{31 + 5\sqrt{33}}{2}. \\ & \diamond (2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ 9x^2 + 6x + 1 = 25x - 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ 9x^2 - 19x + 26 = 0 \end{cases} \text{ (Vô nghiệm)}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 102. Giải phương trình $x^2 + 6x + 4 = 4(x - 1)\sqrt{x^2 - x + 3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & x^2 + 6x + 4 - 4(x - 1)\sqrt{x^2 - x + 3} = 0 \\ & \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = x^2 - 2x + 1 - 4(x - 1)\sqrt{x^2 - x + 3} + 4(x^2 - x + 3) \\ & \Leftrightarrow (2x - 3)^2 = (x - 1 - 2\sqrt{x^2 - x + 3})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = -2\sqrt{x^2 - x + 3} & (1) \\ 3x - 4 = \sqrt{x^2 - x + 3} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 4(x^2 - x + 3) \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 = -8 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 4 \\ 9x^2 - 24x + 16 = x^2 - x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 4 \\ 8x^2 - 23x + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{23 + \sqrt{43}}{16}.$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{23 + \sqrt{43}}{16}.$

Bài toán 103. Giải phương trình $2x + 7 + 2\sqrt{x+2} + 6\sqrt{3x+1} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3x + 1 + 6\sqrt{3x+1} + 9 &= x + 1 - 2\sqrt{x+2} + 1 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{3x+1} + 3)^2 &= (\sqrt{x+2} - 1)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+1} + 3 = \sqrt{x+2} - 1 \\ \sqrt{3x+1} + 3 = 2 - \sqrt{x+2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+1} + 4 = \sqrt{x+2} & (1) \\ \sqrt{3x+1} + \sqrt{x+2} = -1 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Dễ thấy phương trình (2) vô nghiệm.

Ta có (1) $\Leftrightarrow 3x + 17 + 8\sqrt{3x+1} = x + 2 \Leftrightarrow 2x + 15 + 8\sqrt{3x+1} = 0$, vô nghiệm vì $2x + 15 + 8\sqrt{3x+1} > 0, \forall x \geq -\frac{1}{3}.$

Kết luận phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 104. Giải phương trình $2\sqrt{x+4} = x^2 + 3x - 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -4.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x + 4 + 2\sqrt{x+4} + 1 &= x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow (\sqrt{x+4} + 1)^2 = (x+2)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4} + 1 = x+2 \\ \sqrt{x+4} + 1 = -x-2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4} = x+1 & (1) \\ \sqrt{x+4} = -x-3 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = x^2 + 2x + 1 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 3 = 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}.$
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 = x^2 + 6x + 9 \\ -x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + 5 = 0 \\ x \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-5 - \sqrt{5}}{2}.$

Đổi chiều điều kiện ta thu được hai nghiệm $x = \frac{-5 - \sqrt{5}}{2}; x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}.$

Bài toán 105. Giải phương trình $(x-3)^2 = 21 - 4\sqrt{x+3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -3.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 x^2 - 6x + 9 &= 21 - 4\sqrt{x+3} \\
 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 &= 4(x+3) - 4\sqrt{x+3} + 1 \\
 \Leftrightarrow (x-1)^2 &= (2\sqrt{x+3} - 1)^2 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2\sqrt{x+3} - 1 \\ x-1 = 1 - 2\sqrt{x+3} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{x+3} \\ 2-x = 2\sqrt{x+3} \end{cases} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in \{-2; 6\} \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 4 = 4x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 - 8x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 - 2\sqrt{6}.$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x = 6; x = 4 - 2\sqrt{6}.$

Bài toán 106. Giải phương trình $3\sqrt{2x+1} = 2x^2 + 7x + 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}.$ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 6\sqrt{2x+1} &= 4x^2 + 14x + 6 \Leftrightarrow 2x+1 + 6\sqrt{2x+1} + 9 = 4x^2 + 16x + 16 \\
 \Leftrightarrow (\sqrt{2x+1} + 3)^2 &= (2x+4)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+1} + 3 = 2x+4 \\ \sqrt{2x+1} + 3 = -2x-4 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+1} = 2x+1 & (1) \\ \sqrt{2x+1} = -2x-7 & (2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 2x+1 = 4x^2 + 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 4x^2 + 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{2}; 0\right\}.$
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} -2x-7 \geq 0 \\ 2x+1 = 4x^2 + 28x + 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq -7 \\ 4x^2 + 26x + 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 107. Giải bất phương trình $\sqrt{4x+1} > 2x^2 - 6x + 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{4}.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{4x+1} &> 4x^2 - 12x + 2 \Leftrightarrow 4x+1 + 2\sqrt{4x+1} + 1 > 4x^2 - 8x + 4 \\
 \Leftrightarrow (\sqrt{4x+1} + 1)^2 &> (2x-2)^2 \Leftrightarrow (\sqrt{4x+1} + 2x-1)(\sqrt{4x+1} - 2x+3) > 0 \quad (1)
 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{4x+1} = t, t \geq 0 \Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{4}.$ Khi đó

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow \left(t + \frac{t^2-1}{2} - 1\right) \left(t - \frac{t^2-1}{2} + 3\right) > 0 \Leftrightarrow (t^2 + 2t - 3)(t^2 - 2t - 7) > 0 \\
 &\Leftrightarrow (t+1)(t-3)(t^2 - 2t - 7) > 0 \Leftrightarrow (t-3)(t^2 - 2t - 7) > 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2\sqrt{2} < t < 3 \\ t > 1 + 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq t < 3 \\ t > 1 + 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 < 9 \\ t^2 > 9 + 4\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 2 + \sqrt{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $S = \left[-\frac{1}{4}; 2\right) \cup (2 + \sqrt{2}; +\infty)$.

Bài toán 108. Giải phương trình $4x^2 - 13x + 5 = -\sqrt{3x+1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 8x^2 - 26x + 10 &= -2\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow 16x^2 - 40x + 25 = 4(3x+1) - 4\sqrt{3x+1} + 1 \\
 &\Leftrightarrow (4x-5)^2 = (2\sqrt{3x+1}-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+1} = 2x-2 & (1) \\ \sqrt{3x+1} = 3-2x & (2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Xét các trường hợp

$$\begin{aligned}
 \text{➤ } (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x+1 = 4x^2 - 8x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4x^2 - 11x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{11 + \sqrt{73}}{8} \\
 \text{➤ } (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x \geq 0 \\ 3x+1 = 4x^2 - 12x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ 4x^2 - 15x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{15 - \sqrt{97}}{8}
 \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện ta thu được hai nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Ta tìm hằng số k trực tiếp luôn: $2k(4x^2 - 13x + 5) = -2k\sqrt{3x+1}$.

Biến đổi về hằng đẳng thức

$$\begin{aligned}
 2k(4x^2 - 13x + 5) + k^2(3x+1) + 1 &= k^2(3x+1) - 2k\sqrt{3x+1} + 1 \\
 &\Leftrightarrow 8kx^2 + (3k^2 - 26k)x + k^2 + 10k + 1 = (k\sqrt{3x+1} - 1)^2
 \end{aligned}$$

Để đưa về hằng đẳng thức thì $8k$ là số chính phương, dễ thấy $k = 2 \Rightarrow 16x^2 - 40x + 25 = (2\sqrt{3x+1} - 1)^2$.

Bài toán 109. Giải phương trình $\frac{x(x+3)}{3\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}} - 1} = \frac{2}{5}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Ta có $3\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}} - 1 \geq \frac{3}{\sqrt{2}} - 1 > 0$ nên điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 5x^2 + 15x &= 6\sqrt{x^2 + \frac{1}{2}} - 2 \Leftrightarrow 5x^2 + 15x + 2 = 3\sqrt{4x^2 + 2} \\
 \Leftrightarrow 20x^2 + 60x + 8 &= 6\sqrt{4x^2 + 2} \Leftrightarrow 36x^2 + 60x + 25 = 4(4x^2 + 2) + 12\sqrt{4x^2 + 2} + 9 \\
 \Leftrightarrow (6x + 5)^2 &= (2\sqrt{4x^2 + 2} + 3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 = \sqrt{4x^2 + 2} & (1) \\ 3x + 4 + \sqrt{4x^2 + 2} = 0 & (2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned}
 \checkmark \quad (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ 9x^2 + 6x + 1 = 4x^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ 5x^2 + 6x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{14}}{5} \\
 \checkmark \quad (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4 \leq 0 \\ 9x^2 + 24x + 16 = 4x^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{4}{3} \\ 5x^2 + 24x + 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-12 - \sqrt{74}}{5}
 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $S = \left\{ \frac{-12 - \sqrt{74}}{5}; \frac{\sqrt{14} - 3}{5} \right\}$.

Nhận xét.

Đối với bài toán trên ta tiếp tục tìm hằng số k .

$$\begin{aligned}
 2k(5x^2 + 15x + 2) &= 6k\sqrt{4x^2 + 2} \\
 \Leftrightarrow 2k(5x^2 + 15x + 2) + k^2(4x^2 + 2) + 9 &= k^2(4x^2 + 2) + 6k\sqrt{4x^2 + 2} + 9 \\
 \Leftrightarrow (4k^2 + 10k)x^2 + 30kx + 2k^2 + 4k + 9 &= (k\sqrt{4x^2 + 2} + 3)^2
 \end{aligned}$$

$$\text{Để ý thấy cần có } \begin{cases} 4k^2 + 10k = m^2 \\ 2k^2 + 4k + 9 = n^2 \end{cases}$$

Không quá khó thử nghiệm thấy $k = 2 \Rightarrow m^2 = 36; n^2 = 25 \Rightarrow (6x + 5)^2 = (2\sqrt{4x^2 + 2} + 3)^2$.

Bài toán 110. Giải phương trình $x\sqrt{x+3} = x+1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 4x\sqrt{x+3} &= 4x+4 \Leftrightarrow x^2 + 4x\sqrt{x+3} + 4(x+3) = x^2 + 8x + 16 \\
 \Leftrightarrow (x + 2\sqrt{x+3})^2 &= (x+4)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 2 \\ -\sqrt{x+3} = x+2 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=4 \\ \begin{cases} -3 \leq x \leq -2 \\ x+3 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \begin{cases} -3 \leq x \leq -2 \\ x^2 + 3x - 1 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ 1; \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left\{ 1; \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -3$.

Đặt $\sqrt{x+3}=t, (t \geq 0) \Rightarrow x=t^2-3$.

Phương trình đã cho tương trở thành

$$(t^2-3)t=t^2-3+1 \Leftrightarrow t^3-t^2-3t+2=0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t^2+t-1)=0 \Leftrightarrow t \in \left\{ 2; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\}$$

Đổi chiều $t \geq 0$ ta có các trường hợp

$$\triangleright t=2 \Rightarrow x=1.$$

$$\triangleright t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-3=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 111. Giải phương trình $6\sqrt{x^2+x+1}+3=x+\frac{5}{x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$6x\sqrt{x^2+x+1}=x^2-3x+5$$

$$\Leftrightarrow 9(x^2+x+1)-6x\sqrt{x^2+x+1}+x^2=9x^2+12x+4$$

$$\Leftrightarrow (3\sqrt{x^2+x+1}-x)^2=(3x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x^2+x+1}-x=3x+2 \\ 3\sqrt{x^2+x+1}-x=-3x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x^2+x+1}=4x+2 & (1) \\ 3\sqrt{x^2+x+1}=-2x-2 & (2) \end{cases}$$

Ta thấy $6\sqrt{x^2+x+1}+3>0 \Rightarrow x+\frac{5}{x}>0 \Leftrightarrow x>0 \Rightarrow (2)$ vô nghiệm. Do đó

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \geq -2 \\ 9x^2+9x+9=16x^2+16x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 7x^2+7x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-7+\sqrt{21}}{14}.$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 112. Giải phương trình $12x^2-14x+3+12x\sqrt{x^2-3x+1}=0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2-3x+1 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4(x^2-3x+1)+12x\sqrt{x^2-3x+1}+9x^2=x^2+2x+1 \Leftrightarrow (2\sqrt{x^2-3x+1}+3x)^2=(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2-3x+1}+3x=x+1 \\ 2\sqrt{x^2-3x+1}+3x=-x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2-3x+1}=-2x+1 & (1) \\ 2\sqrt{x^2-3x+1}=-4x-1 & (1) \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

$$\bullet (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ 4(x^2-3x+1)=4x^2-4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 8x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3}{8}.$$

$$\bullet \quad (2) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \geq 4x \\ 4(x^2 - 3x + 1) = 16x^2 + 8x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{4} \\ 12x^2 + 20x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-10 - 2\sqrt{34}}{12}.$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 113. Giải phương trình $2x^2 + 3x + 2\sqrt{x^2 - 1} = 5 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $|x| \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8x^2 + 12x + 8\sqrt{x^2 - 1} = 20 &\Leftrightarrow 16(x^2 - 1) + 8x\sqrt{x^2 - 1} + x^2 = 9x^2 - 12x + 4 \\ &\Leftrightarrow (4\sqrt{x^2 - 1} + x)^2 = (3x - 2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{x^2 - 1} + x = 3x - 2 \\ 4\sqrt{x^2 - 1} + x = 2 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2 - 1} = x - 1 & (1) \\ 2\sqrt{x^2 - 1} = -2x + 1 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4 = x^2 - 2x + 1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x^2 + 2x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \\ \blacksquare \quad (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 4 = 4x^2 - 4x + 1 \\ 1 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 114. Giải phương trình $\frac{1}{2} + 2(1+x)\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{2}} = x(2x+1) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2 + x + \frac{1}{2} + 2(1+x)\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{2}} + x^2 + 2x + 1 &= 4x^2 + 4x + 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{2}} + x + 1 \right)^2 = (2x + 1)^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{2}} + x + 1 = 2x + 1 \\ \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{2}} + x + 1 = -2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{2}} = x & (1) \\ \sqrt{x^2 + x + \frac{1}{2}} = -3x - 2 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned} \blacklozenge \quad (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x + \frac{1}{2} = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset. \\ \blacklozenge \quad (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 2 \geq 0 \\ x^2 + x + \frac{1}{2} = 9x^2 + 12x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{2}{3} \\ 8x^2 + 11x + \frac{7}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 115. Giải phương trình $4(x+3)\sqrt{2x^2-x+\frac{1}{3}}+8x+\frac{28}{3}=0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4\left(2x^2-x+\frac{1}{3}\right)+4(x+3)\sqrt{2x^2-x+\frac{1}{3}}+x^2+6x+9 &= 9x^2-6x+1 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{2x^2-x+\frac{1}{3}}+x+3\right)^2 = (3x-1)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2x^2-x+\frac{1}{3}}+x+3=3x-1 \\ 2\sqrt{2x^2-x+\frac{1}{3}}+x+3=1-3x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2-x+\frac{1}{3}}=x-2 & (1) \\ \sqrt{2x^2-x+\frac{1}{3}}=-2x-1 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned} \checkmark \quad (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-x+\frac{1}{3}=x^2-4x+4 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-\frac{11}{3}=0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset. \\ \checkmark \quad (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x-1 \geq 0 \\ 2x^2-x+\frac{1}{3}=4x^2+4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{2} \\ 2x^2+5x+\frac{2}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-15-\sqrt{177}}{12}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 116. Giải phương trình $x^2+(x+2)\sqrt{x^2-\frac{17}{6}}=\frac{15}{4} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 \geq \frac{17}{6}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 6x^2+6(x+2)\sqrt{x^2-\frac{17}{6}} &= \frac{45}{2} \Leftrightarrow 9\left(x^2-\frac{17}{6}\right)+6(x+2)\sqrt{x^2-\frac{17}{6}}+x^2+4x+4=4x^2+4x+1 \\ \Leftrightarrow \left(3\sqrt{x^2-\frac{17}{6}}+x+2\right)^2 &= (2x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x^2-\frac{17}{6}}+x+2=2x+1 \\ 3\sqrt{x^2-\frac{17}{6}}+x+2=-2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x^2-\frac{17}{6}}=x-1 & (1) \\ \sqrt{x^2-\frac{17}{6}}=-x-1 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \circ \quad (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 9\left(x^2-\frac{17}{6}\right)=x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 8x^2+2x-\frac{53}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-2+2\sqrt{213}}{16}. \\ \circ \quad (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\frac{17}{6}=x^2+2x+1 \\ -x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x = -\frac{23}{12} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{23}{12} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 117. Giải phương trình $4x^2-11x+\frac{22}{3}=2(1-x)\sqrt{-x^2+x+\frac{2}{3}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-x^2 + x + \frac{2}{3} \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & -x^2 + x + \frac{2}{3} + 2(1-x)\sqrt{-x^2 + x + \frac{2}{3}} + x^2 - 2x + 1 = 4x^2 - 12x + 9 \\ & \Leftrightarrow \left(\sqrt{-x^2 + x + \frac{2}{3}} - x + 1 \right)^2 = (2x - 3)^2 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-x^2 + x + \frac{2}{3}} - x + 1 = 2x - 3 \\ \sqrt{-x^2 + x + \frac{2}{3}} - x + 1 = 3 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-x^2 + x + \frac{2}{3}} = 3x - 4 & (1) \\ \sqrt{-x^2 + x + \frac{2}{3}} = 2 - x & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \diamond (1) & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4 \geq 0 \\ -x^2 + x + \frac{2}{3} = 9x^2 - 24x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{4}{3} \\ 10x^2 - 25x + \frac{46}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset. \\ \diamond (2) & \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ -x^2 + x + \frac{2}{3} = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 2x^2 - 5x + \frac{10}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 118. Giải phương trình $2x^2 - x + 8 + 2(x-3)\sqrt{3x^2 - \frac{1}{2}x + 2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 4x^2 - 2x + 16 + 4(x-3)\sqrt{3x^2 - \frac{1}{2}x + 2} = 0 \\ & \Leftrightarrow 4\left(3x^2 - \frac{1}{2}x + 2\right) + 4(x-3)\sqrt{3x^2 - \frac{1}{2}x + 2} + x^2 - 6x + 9 = 9x^2 - 6x + 1 \\ & \Leftrightarrow \left(2\sqrt{3x^2 - \frac{1}{2}x + 2} + x - 3\right)^2 = (3x - 1)^2 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3x^2 - \frac{1}{2}x + 2} + x - 3 = 3x - 1 \\ 2\sqrt{3x^2 - \frac{1}{2}x + 2} + x - 3 = 1 - 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2 - \frac{1}{2}x + 2} = x + 1 & (1) \\ \sqrt{3x^2 - \frac{1}{2}x + 2} = 2 - 2x & (2) \end{cases} \\ \checkmark (1) & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - \frac{1}{2}x + 2 = x^2 + 2x + 1 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset. \\ \checkmark (2) & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - \frac{1}{2}x + 2 = 4x^2 - 8x + 4 \\ 2 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{15}{2}x + 2 = 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{15 - \sqrt{193}}{4}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 119. Giải phương trình $\frac{14x^2 - 24x + 1}{3x - 1} + 6\sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x + 1} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $3x \neq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 14x^2 - 24x + 1 + 6(3x - 1)\sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x + 1} &= 0 \\ \Leftrightarrow 9\left(x^2 - \frac{2}{3}x + 1\right) + 6(3x - 1)\sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x + 1} + 9x^2 - 6x + 1 &= 4x^2 + 12x + 9 \\ \Leftrightarrow \left(3\sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x + 1} + 3x - 1\right)^2 &= (2x + 3)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x + 1} + 3x - 1 = 2x + 3 \\ 3\sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x + 1} + 3x - 1 = -2x - 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x + 1} = 4 - x & (1) \\ 3\sqrt{x^2 - \frac{2}{3}x + 1} = -5x - 2 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ 9\left(x^2 - \frac{2}{3}x + 1\right) = x^2 - 8x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ 8x^2 + 2x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{-1 + \sqrt{57}}{8}; \frac{-1 - \sqrt{57}}{8}\right\}. \\ \bullet \quad (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} -5x - 2 \geq 0 \\ 9\left(x^2 - \frac{2}{3}x + 1\right) = 25x^2 + 20x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{2}{5} \\ 16x^2 + 26x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-13 - \sqrt{49}}{16}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 120. Giải phương trình $11x - 7 = 2(x + 2)\sqrt{x - 2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 4 - 2(x + 2)\sqrt{x - 2} + x - 2 &= x^2 - 6x + 9 \\ \Leftrightarrow (x + 2 - \sqrt{x - 2})^2 &= (x - 3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 - \sqrt{x - 2} = x - 3 \\ x + 2 - \sqrt{x - 2} = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x - 2} = 5 \\ \sqrt{x - 2} = 2x - 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 25 \\ x \geq 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 27 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 27 \\ x \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow x = 27 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 27$.

Bài toán 121. Giải phương trình $2(x + 2)\sqrt{2x - 1} + 6x = x^2 + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$6(x+2)\sqrt{2x-1}+18x=3x^2+6 \Leftrightarrow x^2+4x+4+6(x+2)\sqrt{2x-1}+9(2x-1)=4x^2+4x+1$$

$$\Leftrightarrow (x+2+3\sqrt{2x-1})^2=(2x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2+3\sqrt{2x-1}=2x+1 \\ x+2+3\sqrt{2x-1}=-2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{2x-1}=x-1 & (1) \\ \sqrt{2x-1}=-x-1 & (2) \end{cases}$$

Xét các trường hợp

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 18x-9=x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-21x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{21+\sqrt{401}}{2}$.
- Phương trình (2) vô nghiệm vì $-x-1 < 0, \forall x \geq \frac{1}{2}$.

Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 122. Giải phương trình $2(x-3)\sqrt{4-x}=8x^2+13x-12 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 4$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2-6x+9+2(x-3)\sqrt{4-x}+4-x=9x^2+6x+1$$

$$\Leftrightarrow (x-3+\sqrt{4-x})^2=(3x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3+\sqrt{4-x}=3x+1 \\ x-3+\sqrt{4-x}=-3x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-x}=2x+4 & (1) \\ \sqrt{4-x}=-4x+2 & (2) \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

- ❖ (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 4-x=4x^2+16x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 4x^2+17x+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-17+\sqrt{97}}{8}$.
- ❖ (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x \geq 0 \\ 4-x=16x^2-16x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ 16x^2-15x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$.

Đối chiếu điều kiện, kết luận bài toán có nghiệm hai nghiệm kể trên.

Bài toán 123. Giải phương trình $2(2x+1)\sqrt{7-x}+3x^2+5x+7=0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 7$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2+4x+1+2(2x+1)\sqrt{7-x}+7-x=x^2-2x+1 \Leftrightarrow (2x+1+\sqrt{7-x})^2=(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1+\sqrt{7-x}=x-1 \\ 2x+1+\sqrt{7-x}=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7-x}=-2-x & (1) \\ \sqrt{7-x}=-3x & (2) \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} -x-2 \geq 0 \\ 7-x=x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x^2+5x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-5-\sqrt{37}}{2}$.
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 7-x=9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 9x^2+x-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-1-\sqrt{253}}{18}$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm kể trên.

Bài toán 124. Giải phương trình $2\sqrt{8-3x}=3x-\frac{7}{x}-1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $0 \neq x \leq \frac{8}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x\sqrt{8-3x} = 3x^2 - x - 7 \Leftrightarrow 8 - 3x + 2x\sqrt{8-3x} + x^2 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{8-3x} + x)^2 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{8-3x} + x = 2x-1 \\ \sqrt{8-3x} + x = 1-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{8-3x} = x-1 & (1) \\ \sqrt{8-3x} = 1-3x & (2) \end{cases}$$

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 8-3x = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{29}}{2}.$
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x \geq 0 \\ 8-3x = 9x^2 - 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 3x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3 - \sqrt{261}}{9}.$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 125. Giải phương trình $3x^2 + 14x - 17 = 2(x-3)\sqrt{9-4x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \leq \frac{9}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$9 - 4x + 2(x-3)\sqrt{9-4x} + x^2 - 6x + 9 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{9-4x} + x - 3)^2 = (2x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{9-4x} + x - 3 = 2x+1 \\ \sqrt{9-4x} + x - 3 = -2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{9-4x} = x+4 & (1) \\ \sqrt{9-4x} = -3x-3 & (2) \end{cases}$$

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 9-4x = x^2 + 8x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x^2 + 12x + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -6 + \sqrt{29}.$
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} -3x-3 \geq 0 \\ 9-4x = 9x^2 + 18x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 9x^2 + 22x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{22}{9}.$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 126. Giải phương trình $3x^2 + 17x - 3 = 2(2-x)\sqrt{8-x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 8$. Phương trình đã cho tương đương với

$$8 - x + 2(2-x)\sqrt{8-x} + x^2 - 4x + 4 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{8-x} + 2 - x)^2 = (2x+3)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{8-x} + 2 - x = 2x+3 \\ \sqrt{8-x} + 2 - x = -2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{8-x} = 3x+1 & (1) \\ \sqrt{8-x} = -x-5 & (2) \end{cases}$$

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 8-x = 9x^2 + 6x + 1 \\ 3x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 + 7x - 7 = 0 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-7 + \sqrt{301}}{18}.$
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} -x-5 \geq 0 \\ 8-x = x^2 + 10x + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -5 \\ x^2 + 11x + 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-11 + \sqrt{53}}{2}.$

Vậy bài toán có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 127. Giải phương trình $2(2x-3)\sqrt{10-x}+3x^2-11x+18=0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 10$. Phương trình đã cho tương đương với

$$10-x+2(2x-3)\sqrt{10-x}+4x^2-12x+9=x^2-2x+1$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{10-x}+2x-3)^2=(x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{10-x}+2x-3=x-1 \\ \sqrt{10-x}+2x-3=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{10-x}=2-x & (1) \\ \sqrt{10-x}=4-3x & (2) \end{cases}$$

$$\diamond (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 10-x=x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2-3x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{33}}{2}.$$

$$\diamond (2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4-3x \geq 0 \\ 10-x=9x^2-24x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{4}{3} \\ 9x^2-23x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{23-\sqrt{565}}{18}.$$

Kết luận bài toán có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 128. Giải phương trình $2(2x-1)\sqrt{13-2x}+3x^2=-5 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \leq \frac{13}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$13-2x+2(2x-1)\sqrt{13-2x}+4x^2-4x+1=x^2-6x+9$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{13-2x}+2x-1)^2=(x-3)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{13-2x}+2x-1=x-3 \\ \sqrt{13-2x}+2x-1=-x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{13-2x}=-2-x & (1) \\ \sqrt{13-2x}=4-3x & (2) \end{cases}$$

$$\blacksquare (1) \Leftrightarrow \begin{cases} -2-x \geq 0 \\ 13-2x=x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x^2+6x-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-3-3\sqrt{2}.$$

$$\blacksquare (2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4-3x \geq 0 \\ 13-2x=9x^2-24x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{4}{3} \\ 9x^2-22x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{11-\sqrt{94}}{9}.$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm kể trên.

Bài toán 129. Giải phương trình $2(x+2)\sqrt{x+1}=x^2-3x-4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$6(x+2)\sqrt{x+1}=3x^2-9x-12 \Leftrightarrow 9x+9+6(x+2)\sqrt{x+1}+x^2+4x+4=4x^2+4x+1$$

$$\Leftrightarrow (3\sqrt{x+1}+x+2)^2=(2x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x+1}+x+2=2x+1 \\ 3\sqrt{x+1}+x+2=-2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x+1}=x-1 & (1) \\ \sqrt{x+1}=-1-3x & (2) \end{cases}$$

Xét các trường hợp

$$\begin{aligned} \circ (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 9x+9 = x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-11x-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{11+\sqrt{89}}{2}. \\ \circ (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} -1-3x \geq 0 \\ x+1 = 9x^2+6x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{3} \\ 9x^2+5x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 130. Giải phương trình $2(x+3)\sqrt{2x+\frac{1}{2}} = 3x^2-4x-\frac{17}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x + \frac{1}{2} + 2(x+3)\sqrt{2x+\frac{1}{2}} + x^2 + 6x + 9 &= 4x^2 + 4x + 1 \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+\frac{1}{2}} + x + 3\right)^2 &= (2x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+\frac{1}{2}} + x + 3 = 2x+1 \\ \sqrt{2x+\frac{1}{2}} + x + 3 = -2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+\frac{1}{2}} = x-2 & (1) \\ \sqrt{2x+\frac{1}{2}} = -3x-4 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp

$$\begin{aligned} \checkmark (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2x+\frac{1}{2} = x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x^2-24x+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{6+\sqrt{29}}{2}. \\ \checkmark (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} -3x-4 \geq 0 \\ 2x+\frac{1}{2} = 9x^2+24x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{4}{3} \\ 18x^2+44x+31=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 131. Giải phương trình $6(x-1)\sqrt{x+\frac{2}{3}} = 3x^2-19x+2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{2}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$9x+6+6(x-1)\sqrt{x+\frac{2}{3}}+x^2-2x+1=4x^2-12x+9 \Leftrightarrow \left(3\sqrt{x+\frac{2}{3}}+x-1\right)^2=(2x-3)^2$$

Biến đổi ta thu được

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x+\frac{2}{3}}+x-1=2x-3 \\ 3\sqrt{x+\frac{2}{3}}+x-1=3-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x+\frac{2}{3}}=x-2 & (1) \\ 3\sqrt{x+\frac{2}{3}}=4-3x & (2) \end{cases}$$

$$\triangleright (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 9x+6 = x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-13x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{13+\sqrt{177}}{2}.$$

$$\triangleright (2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4-3x \geq 0 \\ 9x+6=9x^2-24x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{4}{3} \\ 9x^2-33x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Đổi chiều điều kiện ta thu được hai nghiệm kể trên.

Bài toán 132. Giải phương trình $3x^2 - 18x + 5 = 4(x-1)\sqrt{3x - \frac{1}{2}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{6}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$12x - 2 + 4(x-1)\sqrt{3x - \frac{1}{2}} + x^2 - 2x + 1 = 4x^2 - 8x + 4 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{3x - \frac{1}{2}} + x - 1\right)^2 = (2x - 2)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3x - \frac{1}{2}} + x - 1 = 2x - 2 \\ 2\sqrt{3x - \frac{1}{2}} + x - 1 = 2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3x - \frac{1}{2}} = x - 1 & (1) \\ 2\sqrt{3x - \frac{1}{2}} = 3 - 3x & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \circ (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 12x-2 = x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-14x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7 + \sqrt{46}. \\ \circ (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} 3-3x \geq 0 \\ 12x-2 = 9x^2-18x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ 9x^2-30x+11=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{15-3\sqrt{14}}{9}. \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện ta thu được hai nghiệm kể trên.

Bài toán 133. Giải phương trình $6(2x-1)\sqrt{x - \frac{4}{3}} + 3x^2 + x = 15$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{4}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$9x - 12 + 6(2x-1)\sqrt{x - \frac{4}{3}} + 4x^2 - 4x + 1 = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow \left(3\sqrt{x - \frac{4}{3}} + 2x - 1\right)^2 = (x + 2)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x - \frac{4}{3}} + 2x - 1 = x + 2 \\ 3\sqrt{x - \frac{4}{3}} + 2x - 1 = -x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x - \frac{4}{3}} = 3 - x & (1) \\ 3\sqrt{x - \frac{4}{3}} = -3x - 1 & (2) \end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned} \blacksquare (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} 9x-12 = x^2-6x+9 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-15x+21=0 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{15-\sqrt{141}}{2}. \\ \blacksquare &\text{ Vì } -3x-1 < 0, \forall x \geq \frac{4}{3} \Rightarrow (2) \text{ vô nghiệm.} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 134. Giải phương trình $8(3x-2)\sqrt{x-\frac{5}{6}}+5x^2+24x=\frac{103}{3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{5}{6}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 16\left(x-\frac{5}{6}\right)+8(3x-2)\sqrt{x-\frac{5}{6}}+9x^2-12x+4 &= 4x^2-20x+25 \\ \Leftrightarrow \left(4\sqrt{x-\frac{5}{6}}+3x-2\right)^2 &= (2x-5)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{x-\frac{5}{6}}+3x-2=2x-5 \\ 4\sqrt{x-\frac{5}{6}}+3x-2=5-2x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{x-\frac{5}{6}}=-3-x & (1) \\ 4\sqrt{x-\frac{5}{6}}=7-5x & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

- Vì $-3-x < 0, \forall x \geq \frac{5}{6} \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.
- $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 7-5x \geq 0 \\ 16x-\frac{40}{3}=25x^2-70x+49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{7}{5} \\ 75x^2-258x+187=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{129-2\sqrt{654}}{75}.$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 135. Giải phương trình $3x^2+17x+\frac{36}{7}+6(2x-5)\sqrt{5x-\frac{3}{7}}=0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{35}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 45x-\frac{27}{7}+6(2x-5)\sqrt{5x-\frac{3}{7}}+4x^2-20x+25 &= x^2+8x+16 \\ \Leftrightarrow \left(3\sqrt{5x-\frac{3}{7}}+2x-5\right)^2 &= (x+4)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{5x-\frac{3}{7}}+2x-5=x+4 \\ 3\sqrt{5x-\frac{3}{7}}+2x-5=-x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{5x-\frac{3}{7}}=9-x & (1) \\ 3\sqrt{5x-\frac{3}{7}}=1-3x & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

- $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 9 \\ 45x-\frac{27}{7}=x^2-18x+81 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 9 \\ x^2-63x+\frac{594}{7}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{441-3\sqrt{19761}}{14}.$
- $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x \geq 0 \\ 45x-\frac{27}{7}=9x^2-6x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{3} \\ 9x^2-51x+\frac{34}{7}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{357-3\sqrt{13209}}{126}.$

Kết luận bài toán có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 136. Giải phương trình $4\sqrt{x+2}-2\sqrt{2x-1}=x-6 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x+2+4\sqrt{x+2}+4 &= 2x-1+2\sqrt{2x-1}+1 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x+2}+2)^2 &= (\sqrt{2x-1}+1)^2 \Leftrightarrow |\sqrt{x+2}+2| = |\sqrt{2x-1}+1| \\ \Leftrightarrow \sqrt{x+2}+2 &= \sqrt{2x-1}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}+1 = \sqrt{2x-1} \\ \Leftrightarrow x+3+2\sqrt{x+2} &= 2x-1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+2} = x-4 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 4x+8 = x^2-8x+16 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2-12x+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=6+2\sqrt{7} \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=6+2\sqrt{7}$.

Bài toán 137. Giải phương trình $x+7+2(3\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1})=0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3x-2+6\sqrt{3x-2}+9 &= 2x-1+2\sqrt{2x-1}+1 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{3x-2}+3)^2 &= (\sqrt{2x-1}+1)^2 \Leftrightarrow |\sqrt{3x-2}+3| = |\sqrt{2x-1}+1| \\ \Leftrightarrow \sqrt{3x-2}+3 &= \sqrt{2x-1}+1 \Leftrightarrow \sqrt{3x-2}+2 = \sqrt{2x-1} \\ \Leftrightarrow 3x-2+4\sqrt{3x-2}+4 &= 2x-1 \Leftrightarrow 4\sqrt{3x-2}+x+3=0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $4\sqrt{3x-2}+x+3 > 0, \forall x \geq \frac{2}{3}$ nên (1) vô nghiệm. Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 138. Giải phương trình $x-1+\sqrt{5x-1}=2\sqrt{3x-2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x-2+2\sqrt{5x-1} &= 4\sqrt{3x-2} \Leftrightarrow 5x-1+2\sqrt{5x-1}+1 = 3x-2+4\sqrt{3x-2}+4 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{5x-1}+1)^2 &= (\sqrt{3x-2}+2)^2 \Leftrightarrow |\sqrt{5x-1}+1| = |\sqrt{3x-2}+2| \\ \Leftrightarrow \sqrt{5x-1}+1 &= \sqrt{3x-2}+2 \Leftrightarrow \sqrt{5x-1} = \sqrt{3x-2}+1 \\ \Leftrightarrow 5x-1 &= 3x-1+2\sqrt{3x-2} \Leftrightarrow x = \sqrt{3x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-3x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1; 2\} \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện ta thu được hai nghiệm $x=1; x=2$.

Bài toán 139. Giải phương trình $\sqrt{5-x} + \frac{9}{4} = (\sqrt{x}+1)^2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $0 \leq x \leq 5$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 4\sqrt{5-x}+5 &= 8\sqrt{x}+4x \Leftrightarrow 4(5-x)+4\sqrt{5-x}+1 = x+8\sqrt{x}+16 \\
 \Leftrightarrow (2\sqrt{5-x}+1)^2 &= (\sqrt{x}+4)^2 \Leftrightarrow |2\sqrt{5-x}+1| = |\sqrt{x}+4| \\
 \Leftrightarrow 2\sqrt{5-x}+1 &= \sqrt{x}+4 \Leftrightarrow 2\sqrt{5-x} = \sqrt{x}+3 \Leftrightarrow 4(5-x) = x+6\sqrt{x}+9 \\
 \Leftrightarrow 11-5x &= 6\sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(5\sqrt{x}+11) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1
 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 140. Giải phương trình $12\sqrt{2-x} = 5x-5+6\sqrt{x+3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $-3 \leq x \leq 2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 4(2-x)+12\sqrt{2-x}+9 &= x+3+6\sqrt{x+3}+9 \\
 \Leftrightarrow (2\sqrt{2-x}+3)^2 &= (\sqrt{x+3}+3)^2 \Leftrightarrow |2\sqrt{2-x}+3| = |\sqrt{x+3}+3| \\
 \Leftrightarrow 2\sqrt{2-x}+3 &= \sqrt{x+3}+3 \Leftrightarrow 2\sqrt{2-x} = \sqrt{x+3} \Leftrightarrow 8-4x = x+3 \Leftrightarrow x=1
 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 141. Giải phương trình $12\sqrt{2x-1} = 6\sqrt{4x-3}+28x-31$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{4}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 4(2x-1)+12\sqrt{2x-1}+9 &= 9(4x-3)+6\sqrt{4x-3}+1 \Leftrightarrow (2\sqrt{2x-1}+3)^2 = (3\sqrt{4x-3}+1)^2 \\
 \Leftrightarrow |2\sqrt{2x-1}+3| &= |3\sqrt{4x-3}+1| \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}+3 = 3\sqrt{4x-3}+1 \\
 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}+2 &= 3\sqrt{4x-3} \Leftrightarrow 4(2x-1)+8\sqrt{2x-1}+4 = 9(4x-3) \Leftrightarrow 8\sqrt{2x-1} = 28x-23 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 28x-23 \geq 0 \\ 64(2x-1) = 784x^2 - 1288x + 529 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{23}{28} \\ 784x^2 - 1416x + 593 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{708 + \sqrt{36352}}{784}
 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 142. Giải phương trình $10x+6\sqrt{x}+1 = 4\sqrt{4-x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $0 \leq x \leq 4$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 9x+6\sqrt{x}+1 &= 4-x+4\sqrt{4-x}+4 \Leftrightarrow (3\sqrt{x}+1)^2 = (\sqrt{4-x}+2)^2 \\
 \Leftrightarrow |3\sqrt{x}+1| &= |\sqrt{4-x}+2| \Leftrightarrow 3\sqrt{x}+1 = \sqrt{4-x}+2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = \sqrt{4-x}+1 \\
 \Leftrightarrow 9x &= 4-x+2\sqrt{4-x}+1 \Leftrightarrow 10x-3 = 2\sqrt{4-x} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 10x-3 \geq 0 \\ 100x^2 - 60x + 9 = 16-4x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{10}{3} \leq x \leq 4 \\ 100x^2 - 56x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset
 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 143. Giải phương trình $(\sqrt{x}+1)(5\sqrt{x}+7)=4\sqrt{7-x}+9 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $0 \leq x \leq 7$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 5x+12\sqrt{x} &= 4\sqrt{7-x}+2 \Leftrightarrow 4x+12\sqrt{x}+9 = 7-x+4\sqrt{7-x}+4 \\ &\Leftrightarrow (2\sqrt{x}+3)^2 = (\sqrt{7-x}+2)^2 \Leftrightarrow |2\sqrt{x}+3| = |\sqrt{7-x}+2| \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{x}+3 = \sqrt{7-x}+2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}+1 = \sqrt{7-x} \Leftrightarrow 4x+4\sqrt{x}+1 = 7-x \\ &\Leftrightarrow 4\sqrt{x} = 6-5x \Leftrightarrow \begin{cases} 6-5x \geq 0 \\ 16x = 25x^2 - 60x + 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{6}{5} \\ 25x^2 - 76x + 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{38-4\sqrt{34}}{25} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 144. Giải bất phương trình $5x+2 \leq 2(\sqrt{6-x}-6\sqrt{x}) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $0 \leq x \leq 6$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 5x+2 &\leq 2\sqrt{6-x}-12\sqrt{x} \Leftrightarrow 4x+12\sqrt{x}+9 \leq 6-x+2\sqrt{6-x}+1 \Leftrightarrow (2\sqrt{x}+3)^2 \leq (\sqrt{6-x}+1)^2 \\ &\Leftrightarrow |2\sqrt{x}+3| \leq |\sqrt{6-x}+1| \Leftrightarrow 2\sqrt{x}+3 \leq \sqrt{6-x}+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}+2 \leq \sqrt{6-x} \\ &\Leftrightarrow 4x+8\sqrt{x}+4 \leq 6-x \Leftrightarrow 8\sqrt{x} \leq 2-5x \Leftrightarrow \begin{cases} 2-5x \geq 0 \\ 64x \leq 25x^2 - 20x + 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{2}{5} \\ 25x^2 - 84x + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{2}{5} \\ x \geq \frac{42+8\sqrt{26}}{25} \vee x \leq \frac{42-8\sqrt{26}}{25} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{42-8\sqrt{26}}{25} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta thu được $0 \leq x \leq \frac{42-8\sqrt{26}}{25}$.

Bài toán 145. Giải bất phương trình $3x+2 \leq 2(\sqrt{4-x}-2\sqrt{2x+3}) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{3}{2} \leq x \leq 4$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3x+2+4\sqrt{2x+3} &\leq 2\sqrt{4-x} \Leftrightarrow 2x+3+4\sqrt{2x+3}+4 \leq 4-x+2\sqrt{4-x}+1 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{2x+3}+2)^2 \leq (\sqrt{4-x}+1)^2 \Leftrightarrow |\sqrt{2x+3}+2| \leq |\sqrt{4-x}+1| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x+3}+2 \leq \sqrt{4-x}+1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}+1 \leq \sqrt{4-x} \Leftrightarrow 2x+4+2\sqrt{2x+3} \leq 4-x \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{2x+3} \leq -3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 9x^2 - 8x - 12 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{4-2\sqrt{31}}{9} \end{aligned}$$

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{4-2\sqrt{31}}{9}$.

Bài toán 146. Giải bất phương trình $\frac{x+3}{2} \leq \sqrt{x-2} + \sqrt{2x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x+3 &\leq 2\sqrt{x-2} + 2\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow 2x+1 - 2\sqrt{2x+1} + 1 \leq x-2 + 2\sqrt{x-2} + 1 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{2x+1}-1)^2 \leq (\sqrt{x-2}+1)^2 \Leftrightarrow |\sqrt{2x+1}-1| \leq |\sqrt{x-2}+1| \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $x \geq 2 \Rightarrow \sqrt{2x+1} \geq \sqrt{5} > 1$, do đó

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}-1 \leq \sqrt{x-2}+1 \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} \leq \sqrt{x-2}+2 \Leftrightarrow 2x+1 \leq x-2+4\sqrt{x-2}+4 \\ &\Leftrightarrow x-1 \leq 4\sqrt{x-2} \Leftrightarrow x^2-2x+1 \leq 16x-32 \Leftrightarrow x^2-18x+33 \leq 0 \Leftrightarrow 9-4\sqrt{3} \leq x \leq 9+4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta thu được $9-4\sqrt{3} \leq x \leq 9+4\sqrt{3}$.

Bài toán 147. Giải bất phương trình $3(x+2) \geq 6\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{2x-3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 6x+12 &\geq 12\sqrt{2x+1} + 4\sqrt{2x-3} \Leftrightarrow 4(2x+1) - 12\sqrt{2x+1} + 9 \geq 2x-3 + 4\sqrt{2x-3} + 4 \\ &\Leftrightarrow (2\sqrt{2x+1}-3)^2 \geq (\sqrt{2x-3}+2)^2 \Leftrightarrow |2\sqrt{2x+1}-3| \geq |\sqrt{2x-3}+2| \quad (1) \end{aligned}$$

Chú ý $x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow 2\sqrt{2x+1} \geq 2\sqrt{4}-3=1 > 0$. Do đó ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2\sqrt{2x+1}-3 \geq \sqrt{2x-3}+2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x+1} \geq \sqrt{2x-3}+5 \\ &\Leftrightarrow 4(2x+1) \geq 2x-3+10\sqrt{2x-3}+25 \Leftrightarrow 3x-9 \geq 5\sqrt{2x-3} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 9x^2-54x+81 \geq 50x-75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 9x^2-104x+156 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{52+10\sqrt{13}}{9} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện đi đến nghiệm $x \geq \frac{52+10\sqrt{13}}{9}$.

Bài toán 148. Giải bất phương trình $3x-2 \geq 4\sqrt{3x-2} + 2\sqrt{6x-1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3x-2+4\sqrt{3x-2}+4 &\leq 6x-1-2\sqrt{6x-1}+1 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{3x-2}+2)^2 \leq (\sqrt{6x-1}-1)^2 \Leftrightarrow |\sqrt{3x-2}+2| \leq |\sqrt{6x-1}-1| \quad (1) \end{aligned}$$

Rõ ràng $x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{6x-1}-1 \geq \sqrt{3}-1 > 0$. Do đó

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow \sqrt{3x-2}+2 \leq \sqrt{6x-1}-1 \Leftrightarrow \sqrt{3x-2}+3 \leq \sqrt{6x-1} \\
 &\Leftrightarrow 3x-2+6\sqrt{3x-2}+9 \leq 6x-1 \Leftrightarrow 6\sqrt{3x-2} \leq 3x-8 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-8 \geq 0 \\ 36(3x-2) \leq 9x^2-48x+64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{8}{3} \\ 9x^2-156x+136 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{78+18\sqrt{15}}{9}
 \end{aligned}$$

Kết luận nghiệm bài toán là $x \geq \frac{78+18\sqrt{15}}{9}$.

Bài toán 149. Giải bất phương trình $4\sqrt{7-x}+2\sqrt{9-x} \leq 3x-19 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 7$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 28-4x+4\sqrt{7-x}+1 &\leq 9-x-2\sqrt{9-x}+1 \\
 \Leftrightarrow (2\sqrt{7-x}+1)^2 &\leq (\sqrt{9-x}-1)^2 \Leftrightarrow |2\sqrt{7-x}+1| \geq |\sqrt{9-x}-1| \quad (1)
 \end{aligned}$$

Dễ thấy $x \leq 7 \Rightarrow \sqrt{9-x} \geq \sqrt{2} > 1$ nên

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow 2\sqrt{7-x}+1 \geq \sqrt{9-x}-1 \Leftrightarrow 2\sqrt{7-x}+2 \geq \sqrt{9-x} \\
 &\Leftrightarrow 28-4x+4+8\sqrt{7-x} \geq 9-x \Leftrightarrow 8\sqrt{7-x} \geq 3x-23 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Chú ý $3x-23 < 0, \forall x \leq 7 \Rightarrow (2)$ nghiệm đúng. Vậy bài toán có nghiệm $x \leq 7$.

Bài toán 150. Giải bất phương trình $12\sqrt{6-x}+2\sqrt{7-x} \leq 5x-18 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 6$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 4(6-x)+12\sqrt{6-x}+9 &\leq 7-x-2\sqrt{7-x}+1 \\
 \Leftrightarrow (2\sqrt{6-x}+3)^2 &\leq (\sqrt{7-x}-1)^2 \Leftrightarrow |2\sqrt{6-x}+3| \leq |\sqrt{7-x}-1| \quad (1)
 \end{aligned}$$

Ta có $x \leq 6 \Rightarrow \sqrt{7-x}-1 \geq 0$ nên

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow 2\sqrt{6-x}+3 \leq \sqrt{7-x}-1 \Leftrightarrow 2\sqrt{6-x}+4 \leq \sqrt{7-x} \\
 &\Leftrightarrow 24-4x+16+16\sqrt{6-x} \leq 7-x \Leftrightarrow 16\sqrt{6-x} \leq 3x-33 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Chú ý (2) vô nghiệm vì $3x < 33, \forall x \leq 6$. Kết luận bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 151. Giải phương trình $7x-7=4\sqrt{2x-1}-2\sqrt{x+3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 x+3-2\sqrt{x+3}+1 &= 4(2x-1)-4\sqrt{2x-1}+1 \Leftrightarrow (\sqrt{x+3}-1)^2 = (2\sqrt{2x-1}-1)^2 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}-1 = 2\sqrt{2x-1}-1 \\ \sqrt{x+3}-1 = 1-2\sqrt{2x-1} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 2\sqrt{2x-1} & (1) \\ \sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1} = 2 & (2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad (1) \Leftrightarrow x+3 = 8x-4 \Leftrightarrow 7 = 7x \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad (2) &\Leftrightarrow x+3+4(2x-1)+4\sqrt{(x+3)(2x-1)}=4 \Leftrightarrow 4\sqrt{(x+3)(2x-1)}=5-9x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5-9x \geq 0 \\ 16(2x^2+5x-3)=81x^2-90x+25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{5}{9} \\ 49x^2-170x+73=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{85-8\sqrt{57}}{49}. \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện ta thu được hai nghiệm kể trên.

Bài toán 152. Giải phương trình $2x+4\sqrt{5-x}=2\sqrt{x-3}+11 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $3 \leq x \leq 5$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 5-x-4\sqrt{5-x}+4 &= x-3-2\sqrt{x-3}+1 \Leftrightarrow (\sqrt{5-x}-2)^2 = (\sqrt{x-3}-1)^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5-x}-2 = \sqrt{x-3}-1 \\ \sqrt{5-x}-2 = 1-\sqrt{x-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5-x} = \sqrt{x-3}+1 & (1) \\ \sqrt{5-x} + \sqrt{x-3} = 3 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned} \circ \quad (2) &\Leftrightarrow 2+2\sqrt{(5-x)(x-3)}=9 \Leftrightarrow x^2-8x+15=-\frac{49}{4} \Leftrightarrow x \in \emptyset. \\ \circ \quad (1) &\Leftrightarrow 5-x=x-3+2\sqrt{x-3}+1 \Leftrightarrow 7-2x=2\sqrt{x-3} \\ \circ \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} 7-2x \geq 0 \\ 4x^2-28x+49=4x-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{7}{2} \\ 4x^2-32x+61=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{8-\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 153. Giải phương trình $\frac{\sqrt{x+2}-x}{\sqrt{3x-1}+4}=\frac{2}{3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3(\sqrt{x+2}-x) &= 2(\sqrt{3x-1}+4) \Leftrightarrow 3x+2\sqrt{3x-1}-3\sqrt{x+2}+8=0 \\ &\Leftrightarrow 6x+4\sqrt{3x-1}-6\sqrt{x+2}+16=0 \Leftrightarrow 3x-1-4\sqrt{3x-1}+4=9x+18-6\sqrt{x+2}+1 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{3x-1}-2)^2 = (3\sqrt{x+2}-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x-1}=3\sqrt{x+2}+1 & (1) \\ \sqrt{3x-1}+3\sqrt{x+2}=3 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad (1) \Leftrightarrow 3x-1=9x+19+2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow \sqrt{x+2}=-3x-10 \quad (3).$$

Để thấy (3) vô nghiệm vì $-3x-10 < 0, \forall x \geq \frac{1}{3}$.

$$\blacksquare \quad \sqrt{3x-1}+3\sqrt{x+2} \geq 3\sqrt{\frac{1}{3}+2}=3\sqrt{\frac{7}{3}} > 3, \forall x \geq \frac{1}{3} \Rightarrow (2) \text{ vô nghiệm.}$$

Kết luận bài toán ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 154. Giải phương trình $5x+12\sqrt{6-x}=4\sqrt{x+5}+24 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-5 \leq x \leq 6$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 x+5-4\sqrt{x+5}+4 &= 4(6-x)-12\sqrt{6-x}+9 \\
 \Leftrightarrow (\sqrt{x+5}-2)^2 &= (2\sqrt{6-x}-3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+5}+1=2\sqrt{6-x} & (1) \\ \sqrt{x+5}+2\sqrt{6-x}=5 & (2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $(1) \Leftrightarrow x+6+2\sqrt{x+5}=24-4x \Leftrightarrow 2\sqrt{x+5}=18-5x$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 18-5x \geq 0 \\ 4x+20=25x^2-180x+18^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{18}{5} \\ 25x^2-184x+304=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{92-12\sqrt{6}}{25}.$
- $(2) \Leftrightarrow x+5+24-4x+4\sqrt{(x+5)(6-x)}=25 \Leftrightarrow 4\sqrt{-x^2+x+30}=-4+3x$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4 \geq 0 \\ 16(-x^2+x+30)=9x^2-24x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{4}{3} \\ 25x^2-40x-464=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4+4\sqrt{30}}{5}.$

Kết luận bài toán có hai nghiệm kể trên.

Nhận xét.

154 bài toán của tài liệu chủ yếu xoay quanh các bài toán sử dụng hằng đẳng thức (phân tích bình phương), đi dần từ dễ đến khó, cấp độ tăng dần theo các dạng thức

$$\begin{aligned}
 (k\sqrt{ax+b}+c)^2 &= (mx+n)^2 \\
 (k\sqrt{ax+b}+cx+d)^2 &= (mx+n)^2 \\
 (p\sqrt{ax+b}+c)^2 &= (q\sqrt{mx+n}+r)^2 \\
 (k\sqrt{ax^2+bx+c}+d)^2 &= (mx+n)^2 \\
 (k\sqrt{ax^2+bx+c}+dx+e)^2 &= (mx+n)^2
 \end{aligned}$$

Với mức độ cơ bản như trên, thao tác giải các phương trình hệ quả cũng không quá khó khăn, thuần túy sử dụng biến đổi tương đương, lưu ý kéo theo hệ phương trình trong trình bày để đạt logic lời giải. Trong một số trường hợp có thể nhận xét vô nghiệm nhanh chóng dựa vào điều kiện hoặc đánh giá đơn giản. Các dạng thức phức tạp hơn sẽ được đề cập sau

$$\begin{aligned}
 (p\sqrt{ax+b}+cx+d)^2 &= (q\sqrt{mx+n}+rx+s)^2 \\
 (k\sqrt{ax^2+bx+c}+d)^2 &= (m\sqrt{px^2+qx+r}+n)^2
 \end{aligned}$$

Trước khi chuyển sang dạng thức với căn thức chứa đa thức bậc ba, chúng ta xét một số bài toán tương tự sau

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $x^2 - 3x + 2\sqrt{x+3} = 0$.
2. $x^2 - 6x - 12 + 4\sqrt{x+3} > 0$.
3. $x^2 = 12 - 4\sqrt{x+3}$.
4. $x^2 - 10x + 4\sqrt{x+2} < 0$.
5. $x^2 - 10x + 16 + 4\sqrt{x-2} = 0$.
6. $2x^2 - 7x + 1 + 2\sqrt{2x+3} \leq 0$.
7. $(x+2)(2x+1) = 2\sqrt{2x+3} + 1$.
8. $4x^2 + 9 + 2\sqrt{3x-1} \leq 15x$.
9. $3 + x^2 = 6(x + \sqrt{5x-3})$.
10. $x^2 > 10\sqrt{3x-2} + 7x + 19$.
11. $9x(x-1) + 1 = 4\sqrt{3x-4}$.
12. $4x^2 \geq 3(x + 2\sqrt{7-x} + 5)$.
13. $\frac{1}{2}x(4x+3) = 3\sqrt{6+x} + 7$.
14. $25x^2 = 13x + 8 + 4\sqrt{3x+5}$.
15. $\frac{8x^2 + 3\sqrt{6x-1}}{1+2x} \leq \frac{7}{2}$.
16. $x^2 - 2\sqrt{3x-5} = \frac{11x+7}{4}$.
17. $9x(x-2) \leq 2(3\sqrt{6x+7} + 11)$.
18. $(x-1)^2 + \sqrt{5-x} = 4$.
19. $(x-1)(x-8) + 20 + 4\sqrt{4-3x} = 0$.
20. $4x^2 - 10x + 3 + 2\sqrt{5-2x} \geq 0$.
21. $x^2 - x + 5 = 3\sqrt{2x-7}$.
22. $\frac{1}{3}x^2 = x + 3 + \sqrt{2x+7}$.
23. $9x^2 - 24x + 35 < 4\sqrt{3x-8}$.
24. $x^2 - 42x + 26 = 6\sqrt{2(2x-1)}$.
25. $2\sqrt{11+3x} + x^2 \geq 8 + 7x$.
26. $x^2 - 19x + 42 = 6\sqrt{x-2}$.
27. $x^2 - 18x + 9 < 8\sqrt{3x-1}$.
28. $9x^2 = 4(2x + \sqrt{2x-3})$.
29. $2x^2 - 12x + 3 \geq 5\sqrt{4x-6}$.
30. $9x^2 - 47x + 18 = 2\sqrt{17x+6}$.
31. $(x-1)(x-12) + 2\sqrt{3x+4} = -8$.
32. $(x-1)(3x-1) = (\sqrt{4-3x} + 1)^2$.

$$33. 3x^2 - 13x + 7 > 2\sqrt{3x-2}.$$

$$34. \frac{x^2 - \sqrt{3x-10}}{x-1} = \frac{15}{4}.$$

$$35. 8x^2 - 27x + 23 = 2\sqrt{1-2x}.$$

$$36. \frac{6x^2 - \sqrt{2-3x}}{9x+10} = \frac{1}{6}.$$

$$37. 2x^2 - 13x + 17 = 3\sqrt{6-2x}.$$

$$38. 5x^2 + x - 7 < 2\sqrt{5x+11}.$$

$$39. (x-2)^2 = \sqrt{4x+5} + 4.$$

$$40. 3x^2 + 5 > (\sqrt{x-2} + 1)^2.$$

$$41. (x-1)(x-7) = 4\sqrt{4x-7}.$$

$$42. (x-1)^2 \leq 8 + 6\sqrt{7-4x}.$$

$$43. 2x^2 = 22x + 5 + 5\sqrt{2x(2x+5)}.$$

$$44. x^2 - 14x + 15 \geq 4\sqrt{6x-3}.$$

$$45. 9x^2 - 27x + 13 = 2\sqrt{3x+2}.$$

$$46. 9x^2 + 25x + 8 = 2\sqrt{7-x}.$$

$$47. x^2 \leq \frac{1+29x}{4} + \sqrt{17x+6}.$$

$$48. \frac{x^2 - 17x + 53}{6} = \sqrt{3x-13}.$$

$$49. x^2 - 17x + 27 > 4\sqrt{7x-6}.$$

$$50. x(2x-5) + 1 = 3\sqrt{2x-5}.$$

$$51. x^2 - 9 = 4\sqrt{9+4x}.$$

$$52. 4x^2 - 19x - 13 < 10\sqrt{7x-3}.$$

$$53. x^2 + 35x - 48 = 6\sqrt{8-5x}.$$

$$54. 4x^2 + 6\sqrt{11x-2} = 15x + 6.$$

$$55. 4x^2 \leq 8(1 + \sqrt{9x-4}) + 17x.$$

$$56. \frac{3}{2}x(3x+1) = 13x + 5\sqrt{9x+5}.$$

$$57. x(9x-20) > 8\sqrt{2x+1} + 4.$$

$$58. 49x^2 - 16x - 13 = 6\sqrt{2x+5}.$$

$$59. 3x^2 = \sqrt{5x-2} + \frac{8x}{3}.$$

$$60. x^2 \leq 17x + 33 + 12\sqrt{15x-2}.$$

$$61. x^2 + 11x - 9 = 6\sqrt{4-7x}.$$

$$62. 16x^2 = 10\sqrt{8x+3} + 27.$$

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $2\sqrt{x+3} = 2x+5+4\sqrt{3x+4}$.
2. $2\sqrt{x-3} = 3x+1+4\sqrt{4x-5}$.
3. $2\sqrt{2x-1} \leq x+4\sqrt{3x-2}+2$.
4. $x = 2\sqrt{2x-3} - 2\sqrt{x-3}$.
5. $x+2\sqrt{3x+2} \leq \sqrt{x+5}$.
6. $3x+2\sqrt{5x-4} = 4\sqrt{2x+1}+5$.
7. $5x+6\sqrt{6x-1} > 4\sqrt{x+2}-2$.
8. $x-3+\frac{1}{3}\sqrt{5x-3} = \sqrt{7-x}$.
9. $6\sqrt{8-x} \leq 8x-15+4\sqrt{7x-2}$.
10. $3(x+7)+10\sqrt{6x-17} = 4\sqrt{3x-17}$.
11. $3\sqrt{1+3x} = x+\sqrt{9+5x}$.
12. $x+6\sqrt{5x-2} \geq 4\sqrt{4x-1}-4$.
13. $7x-17+2\sqrt{6x-5} = 4\sqrt{9-x}$.
14. $8\sqrt{7-3x} = 4x+6\sqrt{x+3}-11$.
15. $3\sqrt{6-x} > 4x+2\sqrt{4x+1}-5$.
16. $\sqrt{10-3x} + \sqrt{x-2} = \frac{7}{4}(x-3)$.
17. $7x+4\sqrt{10-3x} = 5+4\sqrt{x+2}$.
18. $\sqrt{11-4x} + 2\sqrt{2x+3} < 6x+\frac{1}{2}$.
19. $2\sqrt{11-6x} \leq 2x-7+\sqrt{2x-5}$.
20. $\sqrt{2x+6} + \sqrt{12-5x} = \frac{7x+6}{4}$.
21. $4\sqrt{2x+6} - 6\sqrt{3x-1} \geq -x+2$.
22. $6\sqrt{3x-1} + 10\sqrt{x+4} = 26x-37$.
23. $\sqrt{3x-5} - \sqrt{x-3} = x-5$.
24. $12x+4\sqrt{3x-7} + 6\sqrt{3-x} \geq 31$.
25. $\sqrt{4x-1} - \sqrt{5x-2} = 8x-5$.
26. $9x+4\sqrt{6x-5} - 6\sqrt{8-3x} = 18$.
27. $3x+6\sqrt{2x-7} - 10\sqrt{8-x} \leq 31$.
28. $3x+4\sqrt{7x-5} - 3\sqrt{x+6} = 2$.
29. $6\sqrt{10x-1} + 4\sqrt{11x+1} + x = 3$.
30. $6\sqrt{7-2x} - 4\sqrt{10-x} = 2-x$.
31. $4\sqrt{10-x} + 6\sqrt{9-5x} + x + 23 \geq 0$.
32. $3\sqrt{9-x} + 6\sqrt{7x-6} = 4x+6$.
33. $6\sqrt{x+5} - 8\sqrt{2x-3} = x-1$.
34. $\sqrt{2x+1} - \sqrt{15-x} = \frac{14-3x}{6}$.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $4\sqrt{x^2 - x + 2} = 3x^2 - 3x - 5.$
2. $2\sqrt{x^2 - 3x + 2} = 8x^2 - 3x - 2.$
3. $4\sqrt{x^2 - x + 1} + 3x^2 + 2x > 4.$
4. $x(3x - 10) = 4\sqrt{x^2 - x + 2}.$
5. $2x^2 + 2x + \sqrt{3x^2 - x + 1} \geq 1.$
6. $x^2 + 4\sqrt{2x^2 - x + 2} + 10x = 8.$
7. $5x^2 - 17x + 24 = 6\sqrt{x^2 - x + 3}.$
8. $11x^2 - 20x - 7 < 4\sqrt{5x^2 - 2x - 1}.$
9. $7x^2 = x + 2\sqrt{2x(3x - 1)} + 1 + 2.$
10. $8\sqrt{x^2 - 2x + 5} = 3x^2 + 10x - 17.$
11. $6\sqrt{3x^2 - x + 1} \geq x^2 + 5x - 9.$
12. $6\sqrt{4x^2 - 2x + 1} = 5x^2 - 4x - 9.$
13. $3x^2 + 11x - 15 \leq 8\sqrt{4x^2 - x + 5}.$
14. $2x^2 - 7x + 4 + 4\sqrt{3x^2 - 5x + 1} = 0.$
15. $6\sqrt{6x^2 - 5x + 2} > 19x^2 - 5x - 10.$
16. $6\sqrt{7x^2 - x + 1} + 17x + 1 = 2x^2.$
17. $2x^2 + 43 \leq 12\sqrt{6x^2 - x + 8}.$
18. $6\sqrt{3x^2 + x + 7} = 6x^2 + 5x - 15.$
19. $4\sqrt{x^2 + x + 3} = 6x^2 + 5x - 6.$
20. $6\sqrt{4x^2 + x + 5} > 5x^2 - 7x - 13.$
21. $10\sqrt{3x^2 - x + 6} = 22x^2 + 11x - 30.$
22. $x(3x + 7) + 10\sqrt{3x^2 - x + 6} = 8.$
23. $8\sqrt{6x^2 + x + 1} \leq 3x^2 + 11x - 13.$
24. $4\sqrt{7x^2 - x + 2} = 2x^2 + 7x - 5.$
25. $10\sqrt{6x^2 - x + 3} > 19x^2 - 9x - 27.$
26. $4\sqrt{-x^2 + x + 3} = 10x^2 + 5x - 6.$
27. $4\sqrt{-3x^2 + x + 2} + 4x^2 + 5x + 2 \leq 0.$
28. $6\sqrt{-5x^2 + x + 3} + 9x^2 - 9x - 8 = 0.$
29. $4\sqrt{-7x^2 + x + 2} + 11x^2 - 5x = 7.$
30. $8\sqrt{-6x^2 + x + 3} + 15x^2 - 7x - 18 \leq 0.$
31. $4\sqrt{-3x^2 - x + 5} + 12x^2 - 11x = 5.$
32. $8\sqrt{-6x^2 + x + 7} = 15x^2 - 7x - 22.$
33. $11x^2 + 5x - 1 \geq 6\sqrt{1 + x - 10x^2}.$
34. $34x^2 + 9x - 2 = 2\sqrt{-9x^2 + x + 2}.$

$$35. \sqrt{5x(x+2)+1} = x^2 + x - 1.$$

$$36. 4x^2 - 6x - 9 < \sqrt{5x^2 + x + 3}.$$

$$37. x^2 + 6x - 2 = 2\sqrt{1+4x+8x^2}$$

$$38. (1-x)^2 + 1 = \sqrt{8x^2 - 4x + 5}.$$

$$39. 1 + \sqrt{8(1+x) + x^2} < x(x+2).$$

$$40. x(x+2) = \sqrt{x(5x+4)} + 8.$$

$$41. \sqrt{x^2 - x + 2} \geq 15x^2 + 5x - 2.$$

$$42. x^2 = x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{4 + (1+x)^2}.$$

$$43. x^2 + 3(x+1) = \sqrt{8x(x+1)} + 9.$$

$$44. 4 + \sqrt{4 + (x-3)^2} = 2x^2 + 3x.$$

$$45. 4\sqrt{3x^2 - x + 5} > 13x^2 + 9x - 5.$$

$$46. 8 + \sqrt{5x(x-2)} + 13 = (x+2)^2.$$

$$47. x^2 + 5x + 17 = \sqrt{2x^2 + 6x + 17}.$$

$$48. 2x^2 - 5x + 1 \leq 3\sqrt{3x^2 - 2x + 1}.$$

$$49. -x^2 - 3x + 2 = \sqrt{3x^2 - x + 2}.$$

$$50. 3x^2 - 5x + 3 < \sqrt{7x^2 + x + 5}.$$

$$51. x^2 + x + 3 = \sqrt{5x^2 - x + 3}.$$

$$52. 2x^2 - 3x + 1 \leq \sqrt{7x^2 - 6x + 3}.$$

$$53. \sqrt{x^2 - 5x + 2} = 3x^2 + 7x - 2.$$

$$54. \sqrt{x^2 - 9x + 3} = 3x^2 + 7x - 3.$$

$$55. 5x^2 + 2x < 3\sqrt{6x^2 - 3x + 1}.$$

$$56. 2x^2 - 3x + 2 = \sqrt{6x^2 - 5x + 2}.$$

$$57. 5x^2 + 2x + 3 > 3\sqrt{6x^2 - x + 3}.$$

$$58. x^2 = x + 4 + \sqrt{3x^2 - 5x + 6}.$$

$$59. \sqrt{3x^2 - 4x + 5} = x^2 - 6x + 1.$$

$$60. 1 + \sqrt{8 - 7x^2} \geq 2x^2 + 3x.$$

$$61. \sqrt{x^2 - 4x - 12} = x^2 + 2x.$$

$$62. 3x^2 - 2x - 6 = \sqrt{4x^2 + 5x + 6}.$$

$$63. \sqrt{x^2 + x + 3} < 3x^2 + 5x - 3.$$

$$64. 3\sqrt{3x^2 + x + 5} = 13x^2 + 11x - 5.$$

$$65. 3x^2 - 13x + 4 \geq 2\sqrt{x^2 - 3x + 1}.$$

$$66. 2\sqrt{3x^2 - 3x + 2} = 3x^2 - 15x + 8.$$

$$67. 7x^2 - 7x - 18 \leq 2\sqrt{2x^2 - x - 4}.$$

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $2x\sqrt{x+3} = 3x^2 + 3x - 2.$
2. $4x\sqrt{3x-2} = 5x^2 + 3x + 3.$
3. $4x\sqrt{6-x} = 3x^2 - 8x - 15.$
4. $\frac{2}{3}x\sqrt{7-x} < x^2 - x - 2.$
5. $5x^2 + x - 2 = 6x\sqrt{5x-1}.$
6. $\frac{8}{x} + 12\sqrt{1-x} = 5x + 15.$
7. $2 + 3x\sqrt{x+3} = 3x^2 + 2x.$
8. $16x^2 + 11x - 4 \leq 10x\sqrt{5x-3}.$
9. $12x^2 + 7x - 6 = 8x\sqrt{3-5x}.$
10. $4\sqrt{5x-2} + \frac{18}{x} = 3x + 13.$
11. $3x^2 + 9x > 19 + 4x\sqrt{6-x}.$
12. $5x^2 - 3x + 1 = 6x\sqrt{x+2}.$
13. $8x + 6\sqrt{5x+4} = 1 + \frac{5}{x}.$
14. $16x^2 - 3x + 1 = 10x\sqrt{2+3x}.$
15. $7x^2 + 3x + 3 \leq 8x\sqrt{4-3x}.$
16. $8x\sqrt{4x-1} = 9x^2 + 6x + 2.$
17. $8x\sqrt{3-5x} = 20x^2 + 23x - 2.$
18. $6x^2 + 3x - 1 \geq 4x\sqrt{2x-1}.$
19. $\frac{1}{x} + 2\sqrt{4x+3} = 6x + 2.$
20. $\frac{5}{2}x\sqrt{2x+1} = 6x^2 - x - 2.$
21. $8x^2 = x + 2 + 5x\sqrt{4x-3}.$
22. $3x^2 + 2x > 3 + 2x\sqrt{4x-11}.$
23. $3x = \frac{2}{x} + 2\sqrt{1+12x}.$
24. $7x^2 + 7x = 2 + 4x\sqrt{x+2}.$
25. $4x + \frac{7}{x} < 39 + 3\sqrt{29x-3}.$
26. $12x^2 - 5x - 15 = 5x\sqrt{2(x+3)}.$
27. $8x^2 + 3x = 1 + 3x\sqrt{8x-3}.$
28. $4x^2 = 12x - 14 + 3x\sqrt{2x-3}.$
29. $4x + 6 = 3\sqrt{2x-7} + \frac{16}{x}.$
30. $x^2 \leq x + 5 + \frac{1}{2}x\sqrt{5x-9}.$

$$31. 24x^2 - 4x - \frac{17}{2} = 10x\sqrt{2x + \frac{1}{2}}.$$

$$32. 16x^2 - 2x - \frac{5}{2} = 10x\sqrt{4x - \frac{3}{2}}.$$

$$33. 8x^2 + 3x - \frac{4}{3} > 6x\sqrt{3x + \frac{7}{3}}.$$

$$34. 32x^2 + 12x = \frac{5}{2} + 12x\sqrt{8x - \frac{3}{2}}.$$

$$35. 12x^2 + 8x - \frac{14}{3} = 8x\sqrt{4x - \frac{11}{3}}.$$

$$36. 5x^2 - 14x + \frac{13}{3} \leq 8x\sqrt{2x - \frac{5}{6}}.$$

$$37. 12x^2 = \frac{17}{2} + 8x\sqrt{\frac{1}{2}} + 12x.$$

$$38. 7x^2 + 7x + 1 = 4x\sqrt{x + \frac{2}{3}}.$$

$$39. 4x^2 + 2x - 7 > 6x\sqrt{\frac{4x-5}{2}}.$$

$$40. 12x^2 - \frac{17}{3}x - 17 > 5x\sqrt{\frac{2(x+3)}{3}}.$$

$$41. 8x^2 - 24x + \frac{31}{4} = 6x\sqrt{2x - \frac{3}{4}}.$$

$$42. 4x^2 - 4x - 11 \leq 2x\sqrt{5x - \frac{9}{2}}.$$

$$43. 8x^2 + 12x = \frac{57}{2} + 6x\sqrt{2x - \frac{7}{2}}.$$

$$44. 3x^2 - 7x + \frac{7}{5} = 2x\sqrt{3x - \frac{2}{5}}.$$

$$45. 21x^2 - 13x + \frac{1}{2} \geq 4x\sqrt{3x + \frac{1}{2}}.$$

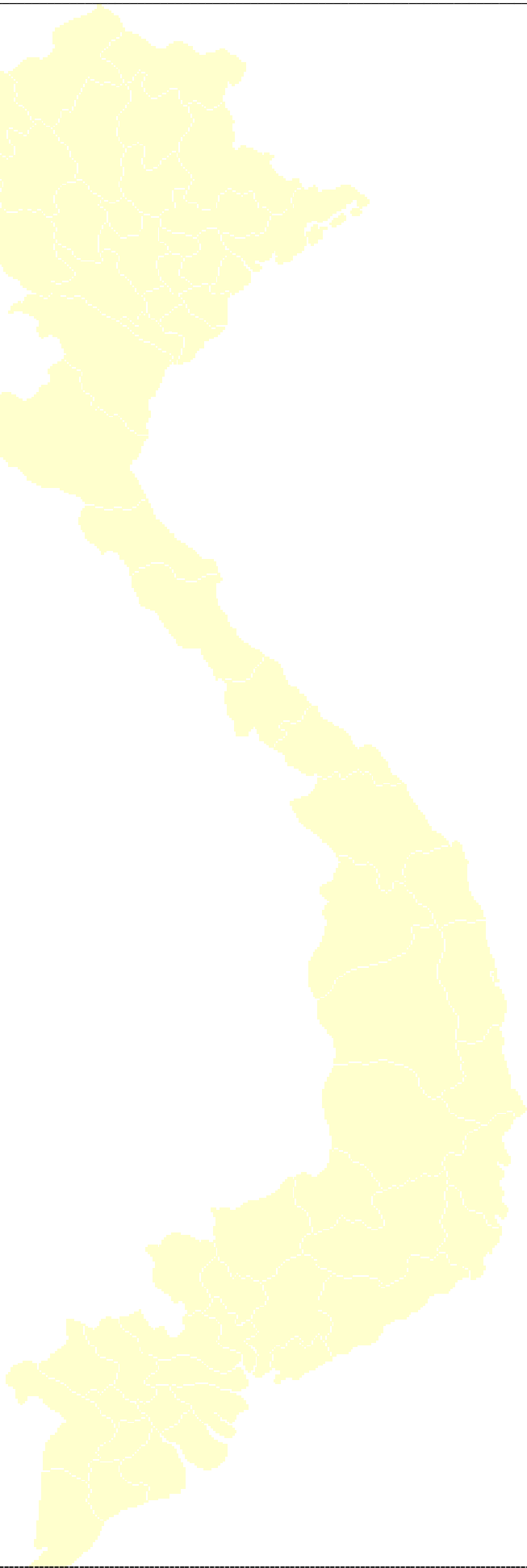
$$46. 8x^2 + 3x - \frac{12}{7} = 6x\sqrt{2x - \frac{5}{7}}.$$

$$47. 5x^2 - 11x + \frac{3}{2} = 4x\sqrt{5x - \frac{1}{2}}.$$

$$48. 9x^2 - x - \frac{5}{3} \geq 10x\sqrt{7x - \frac{2}{3}}.$$

$$49. 3x^2 - 3x - \frac{19}{2} = 4x\sqrt{3x - \frac{1}{2}}.$$

$$50. 15x^2 - 9x + \frac{5}{6} > 10x\sqrt{\frac{6x+1}{6}}.$$

- 
51. $3x^2 + x - 3 = 2(x+1)\sqrt{x+3}$.
 52. $4x^2 - 4x + 3 \geq 2(x-1)\sqrt{2x-3}$.
 53. $3x^2 - 9x - 11 = 2(x+3)\sqrt{3-x}$.
 54. $8x^2 + 4x + 3 = 2(x-1)\sqrt{4x-3}$.
 55. $5x^2 - 5x + 2 < 2(2x-1)\sqrt{3x-2}$.
 56. $5x^2 - 7x - 6 = 2(3x+1)\sqrt{2-x}$.
 57. $5x(x+1) = 4 + 2(3x-1)\sqrt{4-x}$.
 58. $2x^2 + 4 \leq (3x-1)\sqrt{x+4}$.
 59. $3x^2 + 9x + 2 = 2(2x+1)\sqrt{10-x}$.
 60. $3x^2 = 3x + 2 + 2(1+2x)\sqrt{6-x}$.
 61. $8x^2 + 7x + 1 > 2(3x+2)\sqrt{1-x}$.
 62. $8x^2 - 18x + 3 = 2(3x-2)\sqrt{3-2x}$.
 63. $8x^2 - x + 4 \leq 2(3x-1)\sqrt{12-x}$.
 64. $2x^2 - 3x - 8 > (3x-1)\sqrt{x-2}$.
 65. $21x^2 = (5x+1)(2\sqrt{1-x}-1)$.
 66. $24x^2 - 22x + 21 = 4(5x-1)\sqrt{9-x}$.
 67. $6(3x+1)\sqrt{x+1} \leq 7x^2 - 7x - 9$.
 68. $\frac{x^2 + x + 1}{5x+3} = \frac{\sqrt{4-x}}{6}$.
 69. $2\sqrt{3x+1} = 15x + 21 + \frac{8}{x}$.
 70. $2\sqrt{3x+2} > \frac{3x^2 + 11x + 6}{x-1}$.
 71. $2\sqrt{5x-3} = \frac{15x^2 - 19x - 5}{x+3}$.
 72. $2(x-2)\sqrt{4x-3} \leq 3x^2 - 12x + 8$.
 73. $2\sqrt{3x-4} = \frac{5x^2 + 7x + 4}{2x-1}$.
 74. $2(x-3)\sqrt{6x-5} \leq 3x^2 - 4x - 3$.
 75. $2(x-2)\sqrt{5-x} = 8x^2 + 17x - 5$.
 76. $2\sqrt{6-3x} = \frac{5x^2 - 5x - 3}{2x-1}$.
 77. $2\sqrt{3x-7} > \frac{15x^2 - 19x + 15}{1+x}$.
 78. $2\sqrt{4x-5} = \frac{32x^2 - 28x - 3}{2x+3}$.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

$$1. \quad 2\left(x + \frac{1}{3}\right)\sqrt{x + \frac{1}{2}} > 3x^2 + x - \frac{13}{36}.$$

$$2. \quad 2\left(x - \frac{3}{4}\right)\sqrt{x - \frac{1}{2}} = 3x^2 + \frac{5x}{2} + \frac{3}{16}.$$

$$3. \quad 2x\sqrt{x - \frac{2}{3}} \leq 8x^2 - 4x + \frac{11}{12}.$$

$$4. \quad 2\left(x - \frac{1}{6}\right)\sqrt{4x - \frac{3}{x}} = 3x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{197}{36}.$$

$$5. \quad 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\sqrt{2x + \frac{1}{2}} > 8x^2 + 13x + \frac{5}{4}.$$

$$6. \quad 3x^2 + 9x + (4x + 1)\sqrt{x - \frac{3}{4}} = \frac{19}{2}.$$

$$7. \quad 2(3x - 1)\sqrt{2x + \frac{1}{4}} + 8x^2 = \frac{11}{4}.$$

$$8. \quad (2x + 1)\sqrt{x - \frac{1}{2}} = 3x^2 - 6x + \frac{5}{4}.$$

$$9. \quad (4x + 1)\sqrt{2x - \frac{1}{2}} = 5x^2 - 12x + \frac{5}{4}.$$

$$10. \quad (2x - 1)\sqrt{3x - 1} = 3x^2 - 14x + \frac{39}{4}.$$

$$11. \quad 2\left(x + \frac{1}{3}\right)\sqrt{2x - 1} = \frac{17}{9} - \frac{20}{3}x + 3x^2.$$

$$12. \quad 2(2x - 1)\sqrt{x + \frac{2}{3}} = 5x^2 + 15x + \frac{7}{3}.$$

$$13. \quad (2x + 3)\sqrt{x + \frac{1}{2}} = 3(x + 1)^2 - 6x - \frac{19}{4}.$$

$$14. \quad 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{2x + \frac{3}{2}} > 8(x + 1)^2 + 13x + \frac{57}{4}.$$

$$15. \quad (2x + 1)\sqrt{3x + 2} = 3(x + 1)^2 - 14(x + 1) + \frac{39}{4}.$$

$$16. \quad 2(x + 1)\sqrt{x + \frac{1}{3}} \leq 8(x + 1)^2 - 4x - \frac{37}{12}.$$

$$17. \quad 3(x + 1)^2 + 9x + (4x + 5)\sqrt{x + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

$$18. \quad 32(x + 1)^2 + 12x + \frac{19}{2} = 12(x + 1)\sqrt{8x + \frac{13}{2}}.$$

$$19. \quad 2\left(x + \frac{7}{2}\right)\sqrt{x + \frac{5}{2}} > 3(x + 2)^2 + x + \frac{59}{36}.$$

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $2(x+1)\sqrt{x^2-x+1}=2x^2+11x+7.$
2. $2x^2-21x+2x\sqrt{x^2+x+3}=22.$
3. $\frac{x^2-3x+6}{x+2}+2\sqrt{9x^2-x+3}>0.$
4. $7x+3+4x\sqrt{x^2-x+4}=11x^2.$
5. $x+9-\frac{3}{x}\leq 6\sqrt{x^2-3x+1}.$
6. $3x^2-2x+1=3x\sqrt{x^2+3}.$
7. $7x\leq 6-\frac{2}{x}+2\sqrt{x^2-1}.$
8. $4x\sqrt{x^2-x+1}=11x^2+9x.$
9. $\frac{13x^2+3x+1}{\sqrt{x^2-x+2}}>8x.$
10. $\frac{7x^2-13x+1}{\sqrt{x^2+x+3}}\leq 2x.$
11. $7x+6-2x\sqrt{x^2-x+7}\leq 14x^2.$
12. $9x^2+6x\sqrt{x^2-x+3}=11(2+x).$
13. $2x\sqrt{2x^2+3}>x^2+28x+46.$
14. $\frac{2(x+1)\sqrt{x^2-6x+1}}{2x^2+7}\geq 1.$
15. $11x^2+6x\sqrt{3x^2-x+1}=9x+15.$
16. $1+\frac{1-x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{5}{6x}.$
17. $\frac{x^2+4x+2}{5x+3}=\sqrt{5x^2+6x+2}.$
18. $\frac{x^2+3x-1}{7x+2}\leq\sqrt{7x^2+17x+9}.$
19. $\frac{x^2+3x+7}{x+2}=\sqrt{x^2+2x+7}.$
20. $\frac{x^2+5x+10}{1-5x}+\sqrt{5x^2-5x}=0.$
21. $2\sqrt{2x-5}>\frac{3+(x-1)^2}{x-2}.$
22. $(x+2)(x+3)=(5x-1)\sqrt{x(5x+14)}.$
23. $3x=2+x\sqrt{2x^2+3}.$
24. $\sqrt{x+8}=\frac{3x^2+7x+8}{2(2x+1)}.$

$$25. \sqrt{4x-3} = \frac{x^2-3x+1}{x-2}.$$

$$26. 2x^2+2x+1 \geq (4x-1)\sqrt{x^2+1}.$$

$$27. \frac{4x^2+3x+1}{x-1} = \sqrt{2x^2-1}.$$

$$28. \frac{6}{x} - x + 1 < \sqrt{(x-1)(3x+5)}.$$

$$29. x - \frac{1}{x} = 2\sqrt{x^2-2x}.$$

$$30. x(x+2) = 3 + \sqrt{3-x}.$$

$$31. 4x + \frac{2}{x} \geq 3 + \sqrt{2x^2-2x-1}.$$

$$32. x+3 = \frac{1}{x} + \sqrt{x^2+2}.$$

$$33. 2x^2+x+3 > 3x\sqrt{x+3}.$$

$$34. \frac{x^2-x+1}{x+2} = \sqrt{x^2-2}.$$

$$35. \frac{1}{2}(x+2)^2 + 2 = \sqrt{7+4x}.$$

$$36. 4x + \frac{1}{x} + 3 < \sqrt{2x(1+x)}.$$

$$37. \sqrt{2(x+1)^2+1} = \frac{x(4x+5)}{x+2}.$$

$$38. \frac{x^2+4x}{1+2x} = \sqrt{2x^2+x+2}.$$

$$39. \frac{4x^2+5x-1}{x+9} \geq \sqrt{2x^2+18x+11}.$$

$$40. \frac{x^2+7x+3}{2x-3} = \sqrt{2x^2-2x-5}.$$

$$41. \frac{4x^2+19x+28}{x+3} < \sqrt{2x^2+12x+12}.$$

$$42. x + \frac{8}{x} + 1 = \sqrt{x^2+2x-7}.$$

$$43. 2x+5 + \frac{7}{x} = x\sqrt{4x^2+8x-5}.$$

$$44. x+3 + \frac{13}{x} \geq 3\sqrt{3x^2+7x-9}.$$

$$45. 4x+9 + \frac{4}{x} = 5\sqrt{10x^2+18x-1}.$$

$$46. 9x+11 + \frac{7}{x} > 4\sqrt{3(4x^2+3x-1)}.$$

$$47. x+5 = \sqrt{6x^2+11x+5} + \frac{1}{x}.$$

$$48. \frac{4x^2 + 3x + 11}{x+1} < \sqrt{2x^2 + 4x - 9}.$$

$$49. x + \frac{9}{x} + 1 = \sqrt{x(x+8)}.$$

$$50. x + 10 + \frac{36}{x} \geq 3\sqrt{3x^2 + 20x}.$$

$$51. 9x + 5 + \frac{1}{x} = \sqrt{x(3x+2)}.$$

$$52. \frac{x^2 + 5x + 1}{2x-1} = \sqrt{2x^2 + 2x - 1}.$$

$$53. x + 5 + \frac{3}{x-1} \leq \sqrt{(x-1)^2 + 1}.$$

$$54. 4x - 9 + \frac{37}{x+4} = \sqrt{2(x+1)(x+2)}.$$

$$55. 4x + 5 + \frac{3}{x+1} \geq \sqrt{2(x^2 + 4x + 2)}.$$

$$56. 4x + \frac{69}{3+x} = 17 + \sqrt{2(x-2)(x+5)}.$$

$$57. \frac{x^2 + 1}{2x-3} = \sqrt{(x-1)(2x+3)}.$$

$$58. 2x - 15 + \frac{83}{x+5} = \sqrt{2(x-1)(x+6)}.$$

$$59. 2\left(2x + \frac{5}{x}\right) < 2 + \sqrt{(x-1)(2x+9)}.$$

$$60. 2\left(2x + 3 + \frac{5}{x}\right) = \sqrt{(x-1)(2x+11)}.$$

$$61. 9x + \frac{10}{x} + 5 = 2\sqrt{3(x-1)(2x+3)}.$$

$$62. 9x + \frac{13}{x} = 18 + 9\sqrt{x^2 - 1}.$$

$$63. x + \frac{8}{x} > 2\sqrt{(x-1)(2x+7)} + 1.$$

$$64. 9x + 29 + \frac{58}{x} = 4\sqrt{(x-1)(12x+33)}.$$

$$65. x + \frac{62}{x} + 9 = 6\sqrt{(x-1)(6x+37)}.$$

$$66. x + \frac{7}{x} + 1 \leq \sqrt{(x-2)(x+3)}.$$

$$67. 2x^2 + \frac{43}{x} + 2 = 2\sqrt{2(x-3)(2x+7)}.$$

$$68. (x+1)^2 + 27 = (3+x)\sqrt{(x-2)(x+9)}.$$

$$69. (x-1)(x-2) + 18 \leq (3x+1)\sqrt{(x-2)(3x+10)}.$$

$$70. 4(x^2 - x + 12) = (x+3)\sqrt{2(x-3)(x+8)}.$$

Bài toán 155. Giải phương trình $x^3 + 2x^2 + 6x + 2 = (3x + 2)\sqrt{x^3 + 3x + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x^3 + 3x + 1 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x^3 + 8x^2 + 24x + 8 &= 4(3x + 2)\sqrt{x^3 + 3x + 1} \\ \Leftrightarrow 4(x^3 + 3x + 1) - 4(3x + 2)\sqrt{x^3 + 3x + 1} + 9x^2 + 12x + 4 &= x^2 \\ \Leftrightarrow \left(2\sqrt{x^3 + 3x + 1} - 3x - 2\right)^2 &= x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3 + 3x + 1} = 2x + 1 & (1) \\ \sqrt{x^3 + 3x + 1} = x + 1 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned} \text{➤ } (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ x^3 + 3x + 1 = 4x^2 + 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x(x^2 - 4x - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0; x = 2 + \sqrt{5}; x = 2 - \sqrt{5}. \\ \text{➤ } (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^3 + 3x + 1 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^3 - x^2 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x(x^2 - x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $S = \{2 - \sqrt{5}; 0; 2 + \sqrt{5}\}$.

Bài toán 156. Giải phương trình $2x^3 + 2x^2 + 3x + 1 = (3x + 1)\sqrt{2x^3 + x + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $2x^3 + x + 1 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8x^3 + 8x^2 + 12x + 4 &= 4(3x + 1)\sqrt{2x^3 + x + 1} \\ \Leftrightarrow 4(2x^3 + x + 1) - 4(3x + 1)\sqrt{2x^3 + x + 1} + 9x^2 + 6x + 1 &= x^2 - 2x + 1 \\ \Leftrightarrow \left(2\sqrt{2x^3 + x + 1} - 3x - 1\right)^2 &= (x - 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^3 + x + 1} = 2x & [1] \\ \sqrt{2x^3 + x + 1} = x + 1 & [2] \end{cases} \\ \text{▪ } [1] &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x - 1)(2x^2 - 2x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1; x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}. \\ \text{▪ } [2] &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^3 + x + 1 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^3 - x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x(x - 1)(2x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{2}; 0; 1\right\}. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $S = \left\{-\frac{1}{2}; 0; 1; \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right\}$.

Bài toán 157. Giải phương trình $x^3 + 6x^2 + 4x + 2 = (5x + 2)\sqrt{x^3 - x + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x^3 - x + 1 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x^3 + 24x^2 + 16x + 8 &= 4(5x + 2)\sqrt{x^3 - x + 1} \\ \Leftrightarrow 4(x^3 - x + 1) - 4(5x + 2)\sqrt{x^3 - x + 1} + 25x^2 + 20x + 4 &= x^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{x^3-x+1}-5x-2)^2 = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3-x+1} = 3x+1 & (1) \\ \sqrt{x^3-x+1} = 2x+1 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \circ (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ x^3-x+1 = 9x^2+6x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq -1 \\ x(x^2-9x-7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0; x = \frac{9+\sqrt{109}}{2}. \\ \circ (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x^3-x+1 = 4x^2+4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq -1 \\ x(x^2-4x-5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0; x=5. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có các nghiệm $x=0; x=5; x = \frac{9+\sqrt{109}}{2}$.

Bài toán 158. Giải phương trình $x(x+1)(x+2) = 1+4x\sqrt{x(x^2+3)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3+3x^2+2x &= 1+4x\sqrt{x^3+3x} \\ \Leftrightarrow x^3+3x-4x\sqrt{x^3+3x}+4x^2 &= x^2-2x+1 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x^3+3x}-2x)^2 &= (x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3+3x} = 3x-1 & (1) \\ \sqrt{x^3+3x} = x+1 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 1 \\ x^3+3x = 9x^2-6x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 1 \\ x^3-9x^2+9x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ (x-1)(x^2-8x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1; 4+\sqrt{15}\}. \\ \blacksquare (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^3+3x = x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^3-x^2+x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ (x-1)(x^2+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có

Bài toán 159. Giải phương trình $3x^3+2x^2+2x+1 = (3x+1)\sqrt{3x^3+1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $3x^3+1 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4(3x^3+2x^2+2x+1) &= 4(3x+1)\sqrt{3x^3+1} \\ \Leftrightarrow 4(3x^3+1)-4(3x+1)\sqrt{3x^3+1}+9x^2+6x+1 &= x^2-2x+1 \\ \Leftrightarrow (2\sqrt{3x^3+1}-3x-1)^2 &= (x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^3+1} = x+1 & (1) \\ \sqrt{3x^3+1} = 2x & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai khả năng sau đây

$$\begin{aligned} \checkmark (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x^3+1 = x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x^3-x^2-2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x(x-1)(3x+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{2}{3}; 0; 1\right\}. \\ \checkmark (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^3-4x^2+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-1)(3x^2-x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right\}. \end{aligned}$$

Đổi chiều với điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left\{ -\frac{2}{3}; 0; 1; \frac{1+\sqrt{13}}{6} \right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $3x^3 + 1 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $3x^3 + 1 - (3x+1)\sqrt{3x^3+1} + 2x^2 + 2x = 0$.

Đặt $\sqrt{3x^3+1} = t, (t \geq 0)$ ta thu được

$$\begin{aligned} t^2 - (3x+1)t + 2x^2 + x &= 0 \Leftrightarrow t(t-2x) - x(t-2x) - (t-2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (t-x-1)(t-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2x \\ t = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^3+1} = 2x & (1) \\ \sqrt{3x^3+1} = x+1 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai khả năng sau đây

$$\begin{aligned} \checkmark \quad (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x^3 + 1 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x^3 - x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x(x-1)(3x+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{2}{3}; 0; 1 \right\}. \\ \checkmark \quad (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^3 - 4x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-1)(3x^2 - x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ 1; \frac{1+\sqrt{13}}{6} \right\}. \end{aligned}$$

Đổi chiều với điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left\{ -\frac{2}{3}; 0; 1; \frac{1+\sqrt{13}}{6} \right\}$.

Bài toán 160. Giải phương trình $2x^3 + x^2 + 10x + 3 = (3x+5)\sqrt{x^3+3x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2(x^3+3x) - (3x+5)\sqrt{x^3+3x} + x^2 + 4x + 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow 16(x^3+3x) - 8(3x+5)\sqrt{x^3+3x} + 8(x^2+4x+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow 16(x^3+3x) - 8(3x+5)\sqrt{x^3+3x} + 9x^2 + 30x + 25 &= x^2 - 2x + 1 \\ \Leftrightarrow (4\sqrt{x^3+3x} - 3x - 5)^2 &= (x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3+3x} = x+1 & (1) \\ 2\sqrt{x^3+3x} = x+3 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \circ \quad (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^3 + 3x = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ (x^2+1)(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \\ \circ \quad (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 4x^3 + 12x = x^2 + 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 4x^3 - x^2 + 6x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ (x-1)(4x^2+3x+9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $2(x^3+3x) - (3x+5)\sqrt{x^3+3x} + x^2 + 4x + 3 = 0$.

Đặt $\sqrt{x^3+3x} = t, (t \geq 0)$ ta thu được

$$2t^2 - (3x+5)t + x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2t(t-x-1) - x(t-x-1) - 3(t-x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2t-x-3)(t-x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = x+3 \\ t = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3+3x} = x+1 & (1) \\ 2\sqrt{x^3+3x} = x+3 & (2) \end{cases}$$

Xét các khả năng

$$\begin{aligned} \text{➤ } (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^3 + 3x = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ (x^2+1)(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \\ \text{➤ } (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 4x^3 + 12x = x^2 + 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 4x^3 - x^2 + 6x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ (x-1)(4x^2 + 3x + 9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x^3 + x^2 + 10x + 3 - (x+1)(3x+5) &= (3x+5)\sqrt{x^3+3x} - (x+1)(3x+5) \\ \Leftrightarrow 2x^3 + x^2 + 10x + 3 - 3x^2 - 8x - 5 &= (3x+5)(\sqrt{x^3+3x} - x - 1) \\ \Leftrightarrow 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2 &= (3x+5)(\sqrt{x^3+3x} - x - 1) \quad (*) \end{aligned}$$

Để ý rằng $\sqrt{x^3+3x} + x + 1 > 0, \forall x \geq 0$ nên

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow 2(x^3 - x^2 + x - 1) = \frac{(3x+5)(x^3 - x^2 + x - 1)}{\sqrt{x^3+3x} + x + 1} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \\ 2\sqrt{x^3+3x} = x + 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+1)(x-1) = 0 \\ x \geq -3 \\ 4x^3 - x^2 + 6x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \geq -3 \\ (x-1)(4x^2 + 3x + 9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Nhận xét.

Lời giải 2 và 3 sử dụng theo theo thứ tự: Đặt ẩn phụ không hoàn toàn và Sử dụng đại lượng liên hợp, sẽ đề cập tại các tiêu mục tiếp theo. Lời giải 1 sử dụng phân tích hằng đẳng thức, tuy nhiên để tránh phân thức cần nhân hai vế với 8. Tuy nhiên vì biểu thức trong căn thức là đa thức bậc ba (không tạo ra hằng đẳng thức với hệ số nguyên) nên việc thêm bớt sẽ đơn giản hơn

$$\begin{aligned} 2x^3 + x^2 + 10x + 3 &= (3x+5)\sqrt{x^3+3x} \Leftrightarrow 2k(2x^3 + x^2 + 10x + 3) = 2k(3x+5)\sqrt{x^3+3x} \\ \Leftrightarrow 4k(x^3 + 3x) - 2k(3x+5)\sqrt{x^3+3x} + 2kx^2 + 8kx + 6k &= 0 \\ \Leftrightarrow 4k(x^3 + 3x) - 2k(3x+5)\sqrt{x^3+3x} + \frac{k}{4}(3x+5)^2 &= -2kx^2 - 8kx - 6k + \frac{k}{4}(3x+5)^2 \end{aligned}$$

Hay

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left[2\sqrt{k(x^3+3x)} - \frac{\sqrt{k}}{2}(3x+5) \right]^2 &= \frac{k}{4}x^2 - \frac{k}{2}x + \frac{k}{4} = \frac{k}{4}(x-1)^2 \\ k = 4 &\Rightarrow \left(4\sqrt{x^3+3x} - 3x - 5 \right)^2 = (x-1)^2 \end{aligned}$$

Rõ ràng trường hợp này chọn k là một chính phương dẫn đến kết quả thích hợp! Và dễ thấy $k = 4$ thỏa mãn.

Bài toán 161. Giải phương trình $\frac{8x^3 + 3x^2 + 22x + 31}{\sqrt{x^3 + x + 2}} = 2(5x + 11) \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải 1.

Điều kiện $x^3 + x + 2 > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8x^3 + 3x^2 + 22x + 31 - 2(5x + 11)\sqrt{x^3 + x + 2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 8(x^3 + x + 2) - 2(5x + 11)\sqrt{x^3 + x + 2} + 3x^2 + 14x + 15 &= 0 \\ \Leftrightarrow 64(x^3 + x + 2) - 16(5x + 11)\sqrt{x^3 + x + 2} + 8(3x^2 + 14x + 15) &= 0 \\ \Leftrightarrow 64(x^3 + x + 2) - 16(5x + 11)\sqrt{x^3 + x + 2} + (5x + 11)^2 &= -8(3x^2 + 14x + 15) + (5x + 11)^2 \\ \Leftrightarrow (8\sqrt{x^3 + x + 2} - 5x - 11)^2 = (x - 1)^2 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^3 + x + 2} = x + 3 & (1) \\ 4\sqrt{x^3 + x + 2} = 3x + 5 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned} \circ (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ 4x^3 + 4x + 8 = x^2 + 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ 4x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ (x - 1)(4x^2 + 3x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \\ \circ (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5 \geq 0 \\ 16x^3 + 16x + 32 = 9x^2 + 30x + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq -5 \\ 16x^3 - 9x^2 - 14x + 7 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq -5 \\ (x - 1)(16x^2 + 7x - 7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ 1; \frac{-7 + 8\sqrt{7}}{32}; \frac{-7 - 8\sqrt{7}}{32} \right\}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm, $S = \left\{ 1; \frac{-7 + 8\sqrt{7}}{32}; \frac{-7 - 8\sqrt{7}}{32} \right\}.$

Lời giải 2.

Điều kiện $x^3 + x + 2 > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $8(x^3 + x + 2) - 2(5x + 11)\sqrt{x^3 + x + 2} + 3x^2 + 4x + 15 = 0$.

Đặt $\sqrt{x^3 + x + 2} = t, (t > 0)$ ta thu được

$$\begin{aligned} 8t^2 - 2(5x + 11)t + 3x^2 + 4x + 15 &= 0 \Leftrightarrow 2t(4t - 3x - 5) - x(4t - 3x - 5) - 3(4t - 3x - 5) = 0 \\ \Leftrightarrow (4t - 3x - 5)(2t - x - 3) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = x + 3 \\ 4t = 3x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^3 + x + 2} = x + 3 & (1) \\ 4\sqrt{x^3 + x + 2} = 3x + 5 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \checkmark (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ 4x^3 + 4x + 8 = x^2 + 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ 4x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \\ (x - 1)(4x^2 + 3x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \\ \checkmark (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 5 \geq 0 \\ 16x^3 + 16x + 32 = 9x^2 + 30x + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq -5 \\ 16x^3 - 9x^2 - 14x + 7 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq -5 \\ (x - 1)(16x^2 + 7x - 7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ 1; \frac{-7 + 8\sqrt{7}}{32}; \frac{-7 - 8\sqrt{7}}{32} \right\}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm, $S = \left\{ 1; \frac{-7 + 8\sqrt{7}}{32}; \frac{-7 - 8\sqrt{7}}{32} \right\}.$

Bài toán 162. Giải phương trình $3(x^3 + x + 1) = x^2 + 4\sqrt{3x^3 + x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3x^3 + x - 4\sqrt{3x^3 + x} + 4 &= x^2 - 2x + 1 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{3x^3 + x} - 2)^2 &= (x - 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^3 + x} = x + 1 & (1) \\ \sqrt{3x^3 + x} = 3 - x & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x^3 + x = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x^3 - x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ (x - 1)(3x^2 + 2x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 3x^3 + x = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 3x^3 - x^2 + 7x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ (x - 1)(3x^2 + 2x + 9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3x^3 - x^2 + 3x + 3 &= 4\sqrt{3x^3 + x} \Leftrightarrow 3x^3 - x^2 - x - 1 = 4(\sqrt{3x^3 + x} - x - 1) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{3x^3 + x} + x + 1)(\sqrt{3x^3 + x} - x - 1) &= 4(\sqrt{3x^3 + x} - x - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^3 + x} = x + 1 & (1) \\ \sqrt{3x^3 + x} = 3 - x & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x^3 + x = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x^3 - x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ (x - 1)(3x^2 + 2x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 3x^3 + x = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 3x^3 - x^2 + 7x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ (x - 1)(3x^2 + 2x + 9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 163. Giải phương trình $\sqrt{2x^3 + x + 1} + 1 = \frac{x(2x^3 + 6x^2 + x + 3)}{2(x^3 - 3x^2 + 7x - 3)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x^3 - 3x^2 + 7x - 3 \neq 0$; $2x^3 + x + 1 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2(x^3 - 3x^2 + 7x - 3) &= \frac{(x + 3)(2x^3 + x)}{\sqrt{2x^3 + x + 1} + 1} \Leftrightarrow 2(x^3 - 3x^2 + 7x - 3) = (x + 3)(\sqrt{2x^3 + x + 1} - 1) \\ \Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 + 15x - 3 &= (x + 3)\sqrt{2x^3 + x + 1} \Leftrightarrow 8x^3 - 24x^2 + 60x - 12 = 4(x + 3)\sqrt{2x^3 + x + 1} \\ \Leftrightarrow 4(2x^3 + x + 1) - 4(x + 3)\sqrt{2x^3 + x + 1} &+ x^2 + 6x + 9 = 25x^2 - 50x + 25 \\ \Leftrightarrow (2\sqrt{2x^3 + x + 1} - x - 3)^2 &= 25(x - 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^3 + x + 1} = 3x - 1 & (1) \\ \sqrt{2x^3 + x + 1} = 4 - 2x & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

$$\diamond (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 1 \\ 2x^3 + x + 1 = 9x^2 - 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x(2x^2 - 9x + 7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{7}{2}\right\}.$$

$$\diamond (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 2x^3 + x + 1 = 4x^2 - 16x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 2x^3 - 4x^2 + 17x - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ (x-1)(2x^2 - 2x + 15) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x = 1; x = \frac{7}{2}$.

Bài toán 164. Giải phương trình $\frac{5(x^3 + x^2 + 1) + 9x}{x + 2} = 2\sqrt{5x^3 + 4x^2 + 5x + 2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $5x^3 + 4x^2 + 5x + 2; x \neq -2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 5x^3 + 5x^2 + 9x + 5 &= (2x + 4)\sqrt{5x^3 + 4x^2 + 5x + 2} \\ \Leftrightarrow 5x^3 + 4x^2 + 5x + 2 - (2x + 4)\sqrt{5x^3 + 4x^2 + 5x + 2} + x^2 + 4x + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{5x^3 + 4x^2 + 5x + 2} = t, (t \geq 0)$ ta thu được

$$\begin{aligned} t^2 - (2x + 4)t + x^2 + 4x + 3 &= 0 \Leftrightarrow t(t - x - 1) - x(t - x - 1) - 3(t - x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow (t - x - 3)(t - x - 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x + 3 \\ t = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5x^3 + 4x^2 + 5x + 2} = x + 3 & (1) \\ \sqrt{5x^3 + 4x^2 + 5x + 2} = x + 1 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp sau xảy ra

$$\begin{aligned} \bullet (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 5x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = x^2 + 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 5x^3 + 3x^2 - x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ (x-1)(5x^2 + 8x + 7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \\ \bullet (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 5x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 5x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ (x+1)^3 = -4x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x+1 = -x\sqrt[3]{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{4}} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{4}}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có hai nghiệm như trên.

Bài toán 165. Giải phương trình $2x^3 + 4x^2 + 3x - 1 = (5x - 1)\sqrt{2x^3 + x + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $2x^3 + x + 1 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x^3 + x + 1 - (5x - 1)\sqrt{2x^3 + x + 1} + 4x^2 + 2x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(2x^3 + x + 1) - 4(5x - 1)\sqrt{2x^3 + x + 1} + 25x^2 - 10x + 1 &= 9x^2 - 18x + 9 \\ \Leftrightarrow \left[2\sqrt{2x^3 + x + 1} - 5x + 1\right]^2 &= (3x - 3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^3 + x + 1} = 4x - 2 & (1) \\ \sqrt{2x^3 + x + 1} = x + 1 & (1) \end{cases} \end{aligned}$$

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x \geq 2 \\ 2x^3 + x + 1 = 16x^2 - 16x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2x^3 - 16x^2 + 17x - 3 = 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ (x-1)(2x^2 - 14x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{7+\sqrt{43}}{2}\right\}.$
- $\sqrt{4x+1} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 4x+1 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0; 2\}.$

Đổi chiều điều kiện ta thu được bốn nghiệm như trên.

Bài toán 166. Giải phương trình $\frac{x^3 + 5x^2 + 9x + 9}{x+2} = 2\sqrt{x^3 + 4x^2 + 5x + 6} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3 + 4x^2 + 5x + 6 \geq 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 + 5x + 6 - 2(x+2)\sqrt{x^3 + 4x^2 + 5x + 6} + x^2 + 4x + 3 &= 0 \\ x^3 + 4x^2 + 5x + 6 - 2(x+2)\sqrt{x^3 + 4x^2 + 5x + 6} + x^2 + 4x + 4 &= 1 \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^3 + 4x^2 + 5x + 6} - x - 2\right)^2 = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3 + 4x^2 + 5x + 6} = x + 3 & (1) \\ \sqrt{x^3 + 4x^2 + 5x + 6} = x + 1 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = x^2 + 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ (x-1)(x^2 + 4x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-3; -1; 1\}.$
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = -\sqrt[3]{4} - 1 \end{cases} \text{ (Loại).}$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 167. Giải phương trình $\frac{6x^3 + 8x + 1}{3x+2} = \sqrt{6x^3 - 2x^2 + 5x} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 6x^3 - 2x^2 + 5x \geq 0 \\ 3x+2 \neq 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 6x^3 + 8x + 1 &= (3x+2)\sqrt{6x^3 - 2x^2 + 5x} \\ \Leftrightarrow 6x^3 - 2x^2 + 5x - (3x+2)\sqrt{6x^3 - 2x^2 + 5x} + 2x^2 + 3x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{6x^3 - 2x^2 + 5x} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} t^2 - (3x+2)t + 2x^2 + 3x + 1 &= 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4(3x+2)t + 4(2x^2 + 3x + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow 4t^2 - 4(3x+2)t + 9x^2 + 12x + 4 &= x^2 \Leftrightarrow (2t - 3x - 2)^2 = x^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 4x + 2 \\ 2t = 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6x^3 - 2x^2 + 5x} = 2x + 1 & (1) \\ \sqrt{6x^3 - 2x^2 + 5x} = x + 1 & (2) \end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned} \blacksquare (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq -1 \\ 6x^3 - 2x^2 + 5x = 4x^2 + 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq -1 \\ 6x^3 - 6x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq -1 \\ (x-1)(6x^2+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \\ \blacksquare (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 6x^3 - 2x^2 + 5x = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 6x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ (x-1)^3 = -5x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x-1 = -\sqrt[3]{5x} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{1+\sqrt[3]{5}}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x = 1; x = \frac{1}{1+\sqrt[3]{5}}$.

Bài toán 168. Giải phương trình $\frac{15x^3 - x^2 - x - 1}{4x - 1} = 2\sqrt{x(5x^2 - 2x + 1)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $0 \leq x \neq \frac{1}{4}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 15x^3 - x^2 - x - 1 &= 2(4x - 1)\sqrt{5x^3 - 2x^2 + x} \\ \Leftrightarrow 3(5x^3 - 2x^2 + x) - 2(4x - 1)\sqrt{5x^3 - 2x^2 + x} + 5x^2 - 4x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{5x^3 - 2x^2 + x} = t, t \geq 0$. Phương trình trên trở thành

$$\begin{aligned} 3t^2 - 2(4x - 1)t + 5x^2 - 4x - 1 &= 0 \Leftrightarrow 9t^2 - 6(4x - 1)t + 15x^2 - 12x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow 9t^2 - 6(4x - 1)t + 16x^2 - 8x + 1 &= x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow (3t - 4x + 1)^2 = (x + 2)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = 5x + 1 \\ t = x - 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{5x^3 - 2x^2 + x} = 5x + 1 & (1) \\ \sqrt{5x^3 - 2x^2 + x} = x - 1 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned} \blacktriangleright (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 1 \geq 0 \\ 9(5x^3 - 2x^2 + x) = 25x^2 + 10x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \geq -1 \\ 45x^3 - 43x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{5} \\ (x-1)(45x^2 + 2x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \\ \blacktriangleright (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 5x^3 - 2x^2 + x = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 5x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ (x-1)^3 = -4x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x-1 = -x\sqrt[3]{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{1+\sqrt[3]{4}}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x = 1; x = \frac{1}{1+\sqrt[3]{4}}$.

Bài toán 169. Giải phương trình $\frac{8x^3 - 5x^2 + 4x + 9}{5x + 3} = 2\sqrt{1 - x^2 + x^3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 1-x^2+x^3 \geq 0 \\ 5x+3 \neq 0 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8x^3-5x^2+4x+9-2(5x+3)\sqrt{x^3-x^2+1} &= 0 \\ \Leftrightarrow 8(x^3-x^2+1)-2(5x+3)\sqrt{x^3-x^2+1}+3x^2+4x+1 &= 0 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^3-x^2+1}=t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} 8t^2-2(5x+3)t+3x^2+4x+1 &= 0 \Leftrightarrow 64t^2-16(5x+3)t+24x^2+32x+8=0 \\ \Leftrightarrow 64t^2-16(5x+3)+25x^2+30x+9 &= x^2-2x+1 \\ \Leftrightarrow (8t-5x-3)^2 &= (x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^3-x^2+1}=x+1 & (1) \\ 4\sqrt{x^3-x^2+1}=3x+1 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned} \checkmark (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 4x^3-4x^2+4=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 4x^3-5x^2-2x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ (x-1)^2(4x+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{3}{4}; 1\right\}. \\ \checkmark (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 16x^3-16x^2+16=9x^2+6x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq -1 \\ 16x^3-25x^2-6x+15=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq -1 \\ (x-1)(16x^2-9x-15)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{9+\sqrt{1041}}{32}\right\}. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được các nghiệm $x \in \left\{1; -\frac{3}{4}; \frac{9+\sqrt{1041}}{32}\right\}$.

Bài toán 170. Tìm tất cả các nghiệm không âm của phương trình $\frac{3x^3+5}{(x+1)^2} = \sqrt{x^3-2x+5} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3-2x+5 \geq 0; x \neq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$3x^3+5-(x^2+2x+1)\sqrt{x^3-2x+5}=0 \Leftrightarrow x^3-2x+5-(x^2+2x+1)\sqrt{x^3-2x+5}+2x^3+2x=0.$$

Đặt $\sqrt{x^3-2x+5}=t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} t^2-(x^2+2x+1)t+2x^3+2x &= 0 \Leftrightarrow 4t^2-4(x^2+2x+1)t+8x^3+8x=0 \\ \Leftrightarrow 4t^2-4(x^2+2x+1)t+(x^2+2x+1)^2 &= (x^2+2x+1)^2-8x^3-8x \\ \Leftrightarrow (x^2+2x+1-2t)^2 &= x^4-4x^3+6x^2-4x+1=(x^2-2x+1)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t=2x \\ t=x^2+1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3-2x+5}=2x & (1) \\ \sqrt{x^3-2x+5}=x^2+1 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp

$$\blacktriangleright (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^3-4x^2-2x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-1)(x^2-3x-5)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{3+\sqrt{29}}{2}\right\}.$$

$$\triangleright (2) \Leftrightarrow x^3 - 2x + 5 = x^4 + 2x^2 + 1 \Leftrightarrow x^4 - x^3 + 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3 + 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^3 + 2x = -4 \end{cases}$$

Do $x > 0$ nên ta chỉ nhận các nghiệm $x=1; x = \frac{3+\sqrt{29}}{2}$.

Bài toán 171. Giải bất phương trình $2x^3 - 3x^2 - 8x + 4 > (5x+2)\sqrt{x^3+4} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\sqrt[3]{4}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 16x^3 - 24x^2 - 64x + 32 &> 8(5x+2)\sqrt{x^3+4} \\ \Leftrightarrow 16(x^3+4) - 8(5x+2)\sqrt{x^3+4} + 25x^2 + 20x + 4 &> 49x^2 - 84x + 36 \\ \Leftrightarrow (4\sqrt{x^3+4} - 5x - 2)^2 &> (7x+6)^2 \Leftrightarrow (2\sqrt{x^3+4} + x + 2)(\sqrt{x^3+4} - 3x - 2) > 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $x \geq -\sqrt[3]{4} \Rightarrow 2\sqrt{x^3+4} + x + 2 \geq 2 - \sqrt[3]{4} > 0$ nên

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow \sqrt{x^3+4} > 3x+2 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2 < 0 \\ 3x+2 \geq 0 \\ x^3+4 > 9x^2+12x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < -2 \\ 3x \geq -2 \\ x^3-9x^2-12x > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x < -2 \\ 3x \geq -2 \\ x(x^2-9x-12) > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x < -2 \\ -\frac{2}{3} \leq x < 0 \vee x > \frac{9+\sqrt{129}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > \frac{9+\sqrt{129}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm $S = [-\sqrt[3]{4}; 0) \cup \left(\frac{9+\sqrt{129}}{2}; +\infty\right)$.

Bài toán 172. Giải phương trình $2x^3 + 2x^2 + 5x + 4 = (5x+4)\sqrt{x^3+1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 16x^3 + 16x^2 + 40x + 32 &= 8(5x+4)\sqrt{x^3+1} \\ \Leftrightarrow 16(x^3+1) - 8(5x+4)\sqrt{x^3+1} + 25x^2 + 40x + 16 &= 9x^2 \\ \Leftrightarrow (4\sqrt{x^3+1} - 5x - 4)^2 &= (3x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3+1} = 2x+1 & (1) \\ 2\sqrt{x^3+1} = x+2 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned} \triangleright (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x^3+1 = 4x^2+4x+1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq -1 \\ x^3-4x^2-4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x(x^2-4x-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0; 2+2\sqrt{2}\}. \\ \triangleright (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 4x^3+4 = x^2+4x+4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x(4x^2-x-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{1+\sqrt{65}}{8}; \frac{1-\sqrt{65}}{8}\right\}. \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được 5 nghiệm kể trên, $x \in \left\{0; \frac{1+\sqrt{65}}{8}; \frac{1-\sqrt{65}}{8}; 0; 2+2\sqrt{2}\right\}$.

Bài toán 173. Giải bất phương trình $2x^3 - 9x^2 - 11x - 2 \leq (x-2)\sqrt{2x^3 - 3x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(2x+1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8x^3 - 36x^2 - 44x - 8 &\leq 4(x-2)\sqrt{2x^3 - 3x^2 + 1} \\ \Leftrightarrow 4(2x^3 - 3x^2 + 1) - 4(x-2)\sqrt{2x^3 - 3x^2 + 1} + x^2 - 4x + 4 &\leq 25x^2 + 40x + 16 \\ \Leftrightarrow \left(2\sqrt{2x^3 - 3x^2 + 1} - x + 2\right)^2 &\leq (5x+4)^2 \\ \Leftrightarrow \left(2\sqrt{2x^3 - 3x^2 + 1} + 2x + 3\right)\left(\sqrt{2x^3 - 3x^2 + 1} - 3x - 1\right) &\leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow 2\sqrt{2x^3 - 3x^2 + 1} + 2x + 3 \geq -1 + 3 = 2 > 0$. Do đó

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 1} \leq 3x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 2x^3 - 3x^2 + 1 \leq 9x^2 + 6x + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ 2x^3 - 12x^2 - 6x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x(x^2 - 6x - 3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ban đầu thu được nghiệm $0 \leq x \leq 3 + 2\sqrt{3}$.

Bài toán 174. Tìm nghiệm không âm của phương trình

$$\frac{7x^4 + 2x^2 + 3x + 3}{2x + 3} = \sqrt{7x^4 + x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -\frac{3}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 7x^4 + 2x^2 + 3x + 3 &= (2x+3)\sqrt{7x^4 + x^2 + 1} \\ \Leftrightarrow 7x^4 + x^2 + 1 - (2x+3)\sqrt{7x^4 + x^2 + 1} + x^2 + 3x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{7x^4 + x^2 + 1} = t, t > 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} t^2 - (2x+3)t + x^2 + 3x + 2 &= 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4(2x+3)t + 4x^2 + 12x + 8 = 0 \\ \Leftrightarrow 4t^2 - 4(2x+3)t + 4x^2 + 12x + 9 &= 1 \Leftrightarrow (2t - 2x - 3)^2 = 1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = x+1 \\ t = x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7x^4 + x^2 + 1} = x+1 & (1) \\ \sqrt{7x^4 + x^2 + 1} = x+2 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\circ \quad (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 7x^4 + x^2 + 1 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 7x^4 - 4x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ (x-1)(7x^3 + 7x^2 + 7x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\circ (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 7x^4 + x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 7x^4 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{0; \sqrt[3]{\frac{2}{7}}\right\}.$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm, $S = \left\{0; 1; \sqrt[3]{\frac{2}{7}}\right\}$.

Bài toán 175. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $11x^4 + 2x^2 + 5x + 10 = (2x + 5)\sqrt{11x^4 + x^2 + 4} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện x thực. Phương trình tương đương với $11x^4 + x^2 + 4 - (2x + 5)\sqrt{11x^4 + x^2 + 4} + x^2 + 5x + 6 = 0$.

Đặt $\sqrt{11x^4 + x^2 + 4} = t$ ta thu được

$$t^2 - (2x + 5)t + x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4(2x + 5)t + 4x^2 + 20x + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 - 4(2x + 5)t + 4x^2 + 20x + 25 = 1$$

$$\Leftrightarrow (2t - 2x - 5)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x + 3 \\ t = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{11x^4 + x^2 + 4} = x + 3 \\ \sqrt{11x^4 + x^2 + 4} = x + 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$\blacksquare (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3; x \in \mathbb{Z} \\ 11x^4 + x^2 + 4 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3; x \in \mathbb{Z} \\ x(11x^3 - 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\blacksquare (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2; x \in \mathbb{Z} \\ 11x^4 + x^2 + 4 = x^2 + 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2; x \in \mathbb{Z} \\ 11x^4 - 6x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2; x \in \mathbb{Z} \\ (x - 1)(11x^3 + 11x^2 + 11x + 5) = 0 \end{cases}$$

Ta thấy $11x^3 + 11x^2 + 11x + 5 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x = -\frac{5}{11} \notin \mathbb{Z}$ nên trường hợp này vô nghiệm nguyên.

Kết luận bài toán có hai nghiệm nguyên $x = 0; x = 2$.

Nhận xét.

Như các bạn đã biết, việc xây dựng đề bài theo phương pháp phân tích hiệu bình phương là khá đơn giản khi đa thức trong căn có bậc không vượt quá 2.

$$(k\sqrt{ax+b}+c)^2=(mx+n)^2$$

$$(k\sqrt{ax+b}+cx+d)^2=(mx+n)^2$$

$$(p\sqrt{ax+b}+c)^2=(q\sqrt{mx+n}+r)^2$$

$$(k\sqrt{ax^2+bx+c}+d)^2=(mx+n)^2$$

$$(k\sqrt{ax^2+bx+c}+dx+e)^2=(mx+n)^2$$

Từ bài toán 155 trở đi, đến bài toán 175 này, khi đa thức trong căn thức có bậc ba hoặc dạng phân thức, sau khi bình phương các hệ quả, nếu không có sự bố trí may mắn, đa phần chúng ta đều thu được phương trình bậc ba và cao hơn nữa, trong khi đó việc giải phương trình bậc ba tổng quát là nội dung nằm ngoài sách giáo khoa và mọi thứ lúc này trở nên khó khăn. Sau đây tác giả xin được bật mí một số bước xây dựng đề bài nghiệm đẹp để mà tác giả thường dùng.

- Phương trình dạng thức $(\sqrt{f(x)}+ax+b)^2=(mx+n)^2$ trong đó $\deg f(x)=3$.

Sau khi sử dụng hằng đẳng thức số 3 $A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm B$ ta thu được
$$\begin{cases} \sqrt{f(x)} = g(x) \\ \sqrt{f(x)} = h(x) \end{cases}$$

Để găm được nghiệm đẹp cho các phương trình hệ quả này ngay từ đầu và từ hai hệ quả quy về phương trình hiệu bình phương là công việc không hề đơn giản. Để đảm bảo chính xác các bạn nên đi ngược từ dưới lên trên.

Găm nghiệm đẹp cho từng phương trình tùy theo ý mình, ví dụ chọn lựa $\sqrt{f(x)} \equiv \sqrt{x^3 + 3x^2 + 5}$ với ý đồ căn thức sẽ nguyên khi $x = 1(x^3 + 3x^2 + 5 = 9)$. Khi đó bên ngoài căn thức có giá trị 3 khi $x = 1$. Thế thì thử nghiệm với các nhị thức như $g(x), h(x) \in \{x+2; 3x; 4x-1; 5x-2; 4-x; \dots\}$, $g(x) \neq h(x)$.

Chọn đại khái $g(x) = 3x; h(x) = 4-x$. Thế nhưng làm thế nào đưa về $(\sqrt{f(x)} + ax + b)^2 = (mx + n)^2$. Các bạn đừng lo, thông thường bài toán sử dụng phân tích bình phương luôn giải được bằng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn, để giảm thiểu tính toán nên sử dụng định lý Viète đảo, nghĩa là lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $3x; 4-x$.

Ta được
$$\begin{cases} 3x + 4 - x = 2x + 4 \\ 3x(4-x) = -3x^2 + 12x \end{cases} \text{ nên suy ra phương trình}$$

$$\begin{aligned} f(x) - (2x+4)\sqrt{f(x)} + 12 - 3x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 5 - (2x+4)\sqrt{x^3 + 3x^2 + 5} + 12 - 3x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 + 17 &= (2x+4)\sqrt{x^3 + 3x^2 + 5} \end{aligned}$$

- Trường hợp $\deg f(x) = 4$ các bạn cần cẩn thận hơn vì phương trình bậc 4 xây dựng nghiệm đẹp khả quan nhưng không triệt để vì phương trình bậc ba chưa chắc đã giải được trọn vẹn.

Bài toán 176. Giải phương trình $3x^3 - 4x^2\sqrt{x + \frac{3}{x}} + 3x^2 - x + 3 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3x^2 - 4x\sqrt{x + \frac{3}{x}} + \frac{3}{x} + 3x &= 1 \Leftrightarrow x + \frac{3}{x} - 4x\sqrt{x + \frac{3}{x}} + 4x^2 = x^2 - 2x + 1 \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{x + \frac{3}{x}} - 2x\right)^2 &= (x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x + \frac{3}{x}} = x+1 & (1) \\ \sqrt{x + \frac{3}{x}} = 3x-1 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp

- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x + \frac{3}{x} = 9x^2 - 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^3 - 7x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ (x-1)(9x^2 + 2x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$
- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x + \frac{3}{x} = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^3 + x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ (x-1)(x^2 + 2x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Lời giải 2.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x + \frac{3}{x} - 4x\sqrt{x + \frac{3}{x}} + 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{3}{x} - 4x\sqrt{x + \frac{3}{x}} + (x+1)(3x-1) = 0.$$

Đặt $\sqrt{x + \frac{3}{x}} = t$ ta thu được

$$t^2 - 4xt + 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (t - x - 1)(t - 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x + \frac{3}{x}} = x + 1 & (1) \\ \sqrt{x + \frac{3}{x}} = 3x - 1 & (2) \end{cases}$$

Xét các trường hợp

$$\begin{aligned} \bullet \quad (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x + \frac{3}{x} = 9x^2 - 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^3 - 7x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ (x-1)(9x^2 + 2x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \\ \bullet \quad (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x + \frac{3}{x} = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^3 + x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ (x-1)(x^2 + 2x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 177. Giải phương trình $4x^3 + 4x^2 - 2x + 1 = (5x^2 - x)\sqrt{3x + \frac{1}{x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2 + 5x - 2 + \frac{1}{x} = (5x - 1)\sqrt{3x + \frac{1}{x}} \Leftrightarrow 3x + \frac{1}{x} - (5x - 1)\sqrt{3x + \frac{1}{x}} + 4x^2 + 2x - 2 = 0.$$

Đặt $\sqrt{3x + \frac{1}{x}} = t$ ta thu được

$$t^2 - (5x - 1)t + 4x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow (t - x - 1)(t - 4x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x + \frac{1}{x}} = x + 1 & [1] \\ \sqrt{3x + \frac{1}{x}} = 4x - 2 & [2] \end{cases}$$

Xét hai khả năng tương ứng

$$\begin{aligned} \bullet \quad [2] &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x + \frac{1}{x} = 16x^2 - 16x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 16x^3 - 19x^2 + 4x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ (x-1)(16x^2 - 3x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \\ \bullet \quad [1] &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x + \frac{1}{x} = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ (x-1)(x^2 + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Lời giải 2.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2 + 5x - 2 + \frac{1}{x} = (5x-1)\sqrt{3x+\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 3x+\frac{1}{x} - (5x-1)\sqrt{3x+\frac{1}{x}} + 4x^2 + 2x - 2 = 0.$$

Đặt $\sqrt{3x+\frac{1}{x}} = t$ ta thu được

$$t^2 - (5x-1)t + 4x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4(5x-1)t + 16x^2 + 8x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 - 4(5x-1)t + 25x^2 - 10x + 1 = 9x^2 - 18x + 9$$

$$\Leftrightarrow (2x-5x+1)^2 = (3x-3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+\frac{1}{x}} = x+1 & [1] \\ \sqrt{3x+\frac{1}{x}} = 4x-2 & [2] \end{cases}$$

Xét hai khả năng tương ứng

$$\begin{aligned} \blacksquare [2] &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 3x+\frac{1}{x} = 16x^2 - 16x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 16x^3 - 19x^2 + 4x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ (x-1)(16x^2 - 3x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \\ \blacksquare [1] &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x+\frac{1}{x} = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ (x-1)(x^2 + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 178. Giải phương trình $4x^3 + 2x^2 + 2 = 4x^2\sqrt{x^2 + \frac{2}{x} + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x^2 + \frac{2}{x} + 1 \geq 0; x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2 + \frac{2}{x} + 2x = 4x\sqrt{x^2 + \frac{2}{x} + 1} \Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{x} + 1 - 4x\sqrt{x^2 + \frac{2}{x} + 1} + 3x^2 + 2x - 1 = 0.$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x^2 + \frac{2}{x} + 1} = t \text{ ta thu được } t^2 - 4xt + 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow (t-x-1)(t-3x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + \frac{2}{x} + 1} = x+1 & [1] \\ \sqrt{x^2 + \frac{2}{x} + 1} = 3x-1 & [2] \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \diamond [1] &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + \frac{2}{x} + 1 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; 1]. \\ \diamond [2] &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x^2 + \frac{2}{x} + 1 = 9x^2 - 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x^2 + \frac{2}{x} = 8x^2 - 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ \frac{2}{x} = 8x^2 - 6x \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 8x^3 - 6x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ (x-1)(4x^2 + x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x^2 + \frac{2}{x} + 1 \geq 0; x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 + \frac{2}{x} + 2x = 4x\sqrt{x^2 + \frac{2}{x} + 1} \Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{x} + 1 - 4x\sqrt{x^2 + \frac{2}{x} + 1} + 3x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Đặt $\sqrt{x^2 + \frac{2}{x} + 1} = t$ ta thu được

$$t^2 - 4xt + 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4xt + 4x^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow (t - 2x)^2 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x + 1 \\ t = 3x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + \frac{2}{x} + 1} = x + 1 & [1] \\ \sqrt{x^2 + \frac{2}{x} + 1} = 3x - 1 & [2] \end{cases}$$

$$\diamond [1] \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + \frac{2}{x} + 1 = x^2 + 2x + 1 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; 1].$$

$$\diamond [2] \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x^2 + \frac{2}{x} + 1 = 9x^2 - 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x^2 + \frac{2}{x} = 9x^2 - 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ \frac{2}{x} = 8x^2 - 6x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 8x^3 - 6x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ (x-1)(4x^2 + x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 179. Giải phương trình $-2x^3 - 4x^2 + x + 5 - (x - x^2)\sqrt{x + \frac{5}{x} + 4} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương

$$-2x^2 - 4x + 1 + \frac{5}{x} - (1 - x)\sqrt{x + \frac{5}{x} + 3} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{5}{x} + 3 - (1 - x)\sqrt{x + \frac{5}{x} + 3} - 2x^2 - 5x - 2 = 0.$$

Đặt $\sqrt{x + \frac{5}{x} + 3} = t, t > 0$ thu được

$$t^2 + (x - 1)t - 2x^2 - 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 + 4(x - 1)t - 8x^2 - 20x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 + 4(x - 1)t + x^2 - 2x + 1 = 9x^2 + 18x + 9 \Leftrightarrow (2t + x - 1)^2 = (3x + 3)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x + 2 \\ t + 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

Ta thấy $t + 2x + 1 > 0, \forall t > 0, \forall x > 0$ nên xét trường hợp còn lại

$$t = x + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{5}{x} + 3} = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x + \frac{5}{x} + 3 = x^2 + 4x + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^3 + 3x^2 + x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ (x-1)(x^2 + 4x + 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 180. Giải phương trình $2x^3 + 5x^2 + 10x + 11 = (2x^2 + 5x)\sqrt{x^2 + \frac{11}{x} + 4}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x^2 + \frac{11}{x} + 4 \geq 0; x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^2 + \frac{11}{x} + 5x + 10 = (2x + 5)\sqrt{x^2 + \frac{11}{x} + 4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{11}{x} + 4 - (2x + 5)\sqrt{x^2 + \frac{11}{x} + 4} + x^2 + 5x + 6 = 0$$

Đặt $\sqrt{x^2 + \frac{11}{x} + 4} = t$ phương trình trên trở thành

$$t^2 - (2x + 5)t + x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4(2x + 5)t + 4x^2 + 20x + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 - 4(2x + 5)t + 4x^2 + 20x + 25 = 1$$

$$\Leftrightarrow (2t - 2x - 5)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x + 3 \\ t = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + \frac{11}{x} + 4} = x + 3 & (1) \\ \sqrt{x^2 + \frac{11}{x} + 4} = x + 2 & (2) \end{cases}$$

$$\text{➤ } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 + \frac{11}{x} + 4 = x^2 + 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 6x^2 + 5x - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{1; -\frac{11}{6}\right\}.$$

$$\text{➤ } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + \frac{11}{x} + 4 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 4x^2 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\sqrt{11}}{2}; -\frac{\sqrt{11}}{2}\right\}.$$

Kết luận phương trình đã cho có 4 nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Các bạn hoàn toàn có thể sử dụng ẩn phụ không hoàn toàn để xử lý bài toán trên

Biến đổi về $x^2 + \frac{11}{x} + 4 - (2x + 5)\sqrt{x^2 + \frac{11}{x} + 4} + (x + 3)(x + 2) = 0$ và đặt $\sqrt{x^2 + \frac{11}{x} + 4} = t$.

$$t^2 - (2x + 5)t + (x + 3)(x + 2) = 0.$$

Biệt thức $\Delta = (2x + 5)^2 - 4(x^2 + 5x + 6) = 1$ nên ta có phân tích nhân tử

$$(t-x-3)(t-x-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+\frac{11}{x}}+4=x+3 & (1) \\ \sqrt{x^2+\frac{1}{x}}+4=x+2 & (2) \end{cases}$$

Bài toán 181. Giải phương trình $\frac{8x^3+2x^2+x+4}{x^2+x}=\sqrt{4x^2+\frac{4}{x}+1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $4x^2+\frac{4}{x}+1 \geq 0; x \neq 0; x \neq -1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8x^3+2x^2+x+4 &= (4x^2+x)\sqrt{4x^2+\frac{4}{x}+1} \\ \Leftrightarrow 8x^2+2x+\frac{4}{x}+1 &= (4x+1)\sqrt{4x^2+\frac{4}{x}+1} \\ \Leftrightarrow 4x^2+\frac{4}{x}+1-(4x+1)\sqrt{4x^2+\frac{4}{x}+1}+4x^2+2x &= 0 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{4x^2+\frac{4}{x}+1}=t$ ta thu được

$$\begin{aligned} t^2-(4x+1)t+4x^2+2x &= 0 \Leftrightarrow 4t^2-4(4x+1)t+16x^2+8x=0 \\ \Leftrightarrow 4t^2-4(4x+1)t+16x^2+8x+1 &= 1 \Leftrightarrow (t-4x-1)^2=1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t=2x+1 \\ t=2x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x^2+\frac{4}{x}+1}=2x+1 & (1) \\ \sqrt{4x^2+\frac{4}{x}+1}=2x & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 4x^2+\frac{4}{x}+1=4x^2+4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \in \{-1;1\} \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

$$\checkmark \quad (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2+\frac{4}{x}+1=4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 182. Giải phương trình $2x^3+5x^2+2x+6=(2x^2+3x)\sqrt{x^2+2x+\frac{6}{x}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2+2x+\frac{6}{x} \geq 0; x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^2 + 5x + \frac{6}{x} + 2 = (2x+3)\sqrt{x^2 + 2x + \frac{6}{x}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + \frac{6}{x} - (2x+3)\sqrt{x^2 + 2x + \frac{6}{x}} + x^2 + 3x + 2 = 0$$

Đặt $\sqrt{x^2 + 2x + \frac{6}{x}} = t$ ta thu được

$$t^2 - (2x+3)t + x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4(2x+3)t + 4x^2 + 12x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 - 4(2x+3)t + 4x^2 + 12x + 9 = 1 \Leftrightarrow (2t - 2x - 3)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = x+1 \\ t = x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + \frac{6}{x}} = x+1 & (1) \\ \sqrt{x^2 + 2x + \frac{6}{x}} = x+2 & (2) \end{cases}$$

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x + \frac{6}{x} = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \frac{6}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 2x + \frac{6}{x} = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Kết luận hệ có hai nghiệm $x = 1; x = 6$.

Bài toán 183. Giải phương trình $8x^3 + 11x^2 + 3x + 17 = 4x(x+1)\sqrt{4x^2 + 4x + \frac{17}{x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $4x^2 + 4x + \frac{17}{x} \geq 0; x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$8x^2 + 11x + \frac{17}{x} + 3 = (4x+4)\sqrt{4x^2 + 4x + \frac{17}{x}}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + \frac{17}{x} - (4x+4)\sqrt{4x^2 + 4x + \frac{17}{x}} + 4x^2 + 8x + 3 = 0$$

Đặt $\sqrt{4x^2 + 4x + \frac{17}{x}} = t$ ta thu được

$$t^2 - (4x+4)t + 4x^2 + 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4(x+1)t + 4(x+1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (t - 2x - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2x+1 \\ t = 2x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x^2 + 4x + \frac{17}{x}} = 2x+1 & (1) \\ \sqrt{4x^2 + 4x + \frac{17}{x}} = 2x+3 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 4x^2 + 4x + \frac{17}{x} = 4x^2 + 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ \frac{17}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 17.$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ 4x^2 + 4x + \frac{17}{x} = 4x^2 + 12x + 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ 8x^2 + 9x - 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x \in \left\{1; -\frac{17}{8}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 17; x = 1$.

Bài toán 184. Giải phương trình $\frac{2x^3 + 7x^2 + 21x + 6}{2x + 7} = x\sqrt{x^2 + \frac{6}{x} + 9}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x^2 + \frac{6}{x} + 9 \geq 0; x \neq 0$. Phương trình tương đương với

$$2x^2 + \frac{6}{x} + 7x + 21 = (2x + 7)\sqrt{x^2 + \frac{6}{x} + 9} \Leftrightarrow x^2 + \frac{6}{x} + 9 - (2x + 7)\sqrt{x^2 + \frac{6}{x} + 9} + x^2 + 7x + 12 = 0.$$

Đặt $\sqrt{x^2 + \frac{6}{x} + 9} = t$ ta thu được

$$t^2 - (2x + 7)t + x^2 + 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4(2x + 7)t + 4x^2 + 28x + 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 - 4(2x + 7)t + 4x^2 + 28x + 49 = 1 \Leftrightarrow (2t - 2x - 7)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = x + 3 \\ t = x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + \frac{6}{x} + 9} = x + 3 & (1) \\ \sqrt{x^2 + \frac{6}{x} + 9} = x + 4 & (2) \end{cases}$$

$$\checkmark (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 + \frac{6}{x} + 9 = x^2 + 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}.$$

$$\checkmark (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x^2 + \frac{6}{x} + 9 = x^2 + 8x + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ 8x^2 + 7x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{-7 - \sqrt{97}}{16}; \frac{-7 + \sqrt{97}}{16}\right\}.$$

Kết luận phương trình đã cho có bốn nghiệm.

Nhận xét.

➤ Phương trình chứa phân thức trong dấu căn dưới dạng $\sqrt{ax + \frac{b}{x} + c}$ với hiệu bình phương dạng

$$\left(\sqrt{ax + \frac{b}{x} + c} + mx + n\right)^2 = (px + q)^2$$

Một điều chắc chắn rằng nâng lũy thừa các hệ quả chắc chắn sẽ xuất hiện phương trình bậc ba. Thực hiện tương tự thủ thuật với đa thức bậc ba trong căn sẽ thu được những phương trình khá thú vị.

➤ Phương trình chứa phân thức trong dấu căn dưới dạng $\sqrt{ax^2 + \frac{b}{x} + c}$ với hiệu bình phương dạng

$$\left(\sqrt{ax^2 + \frac{b}{x} + c} + mx + n\right)^2 = (px + q)^2.$$

➤ Nếu muốn phương trình này có hai hệ quả mà không cần bỏ trí nghiệm đẹp quá nhọc lòng, các bạn có thể đẳng thẳng bắt buộc một phương trình quy về dạng bậc hai tối đa bằng cách sử dụng định lý Viète đảo với

$$\begin{cases} \sqrt{ax^2 + \frac{b}{x} + c} = x\sqrt{a} + n_1 \\ \sqrt{ax^2 + \frac{b}{x} + c} = m_2x + n_2 \end{cases}$$

Bài toán 185. Giải phương trình $2x^2 + \frac{2}{x} + \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} = \left(2x + \frac{4}{3}\right)\sqrt{x^2 + \frac{2}{x} + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x^2 + \frac{2}{x} + 1 \geq 0; x \neq 0$. Phương trình tương đương với

$$x^2 + \frac{2}{x} + 1 - \left(2x + \frac{4}{3}\right)\sqrt{x^2 + \frac{2}{x} + 1} + x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0.$$

Đặt $\sqrt{x^2 + \frac{2}{x} + 1} = t$ ta được

$$\begin{aligned} t^2 - \left(2x + \frac{4}{3}\right)t + x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} &= 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 2(3x + 2)t + 3x^2 + 4x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow 9t^2 - 6(3x + 2)t + 9x^2 + 12x + 3 &= 0 \Leftrightarrow 9t^2 - 6(3x + 2)t + 9x^2 + 12x + 4 = 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (3t - 3x - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x + 1 \\ t = x + \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + \frac{2}{x} + 1} = x + 1 & (1) \\ \sqrt{x^2 + \frac{2}{x} + 1} = x + \frac{1}{3} & (2) \end{cases}$$

$$\diamond (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + \frac{2}{x} + 1 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}.$$

$$\diamond (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x^2 + \frac{2}{x} + 1 = x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ 3x^2 - 4x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2 + \sqrt{31}}{3}.$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 186. Giải phương trình $\frac{8x^3 + 1}{x} + \frac{8x + 1}{3} = 4\left(x + \frac{1}{3}\right)\sqrt{4x^2 + \frac{1}{x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $4x^2 + \frac{1}{x} \geq 0; x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} 8x^2 + \frac{1}{x} + \frac{8x}{3} + \frac{1}{3} &= 4\left(x + \frac{1}{3}\right)\sqrt{4x^2 + \frac{1}{x}} \\ \Leftrightarrow 4x^2 + \frac{1}{x} - \left(4x + \frac{4}{3}\right)\sqrt{4x^2 + \frac{1}{x}} + 4x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{1}{3} &= 0 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{4x^2 + \frac{1}{x}} = t$ ta thu được

$$\begin{aligned}
 t^2 - \left(4x + \frac{4}{3}\right)t + 4x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{1}{3} &= 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 4(3x+1)t + 12x^2 + 8x + 1 = 0 \\
 \Leftrightarrow 9t^2 - 12(3x+1)t + 36x^2 + 24x + 3 &= 0 \Leftrightarrow 9t^2 - 12(3x+1)t + 4(3x+1)^2 = 1 \\
 \Leftrightarrow [3t - 2(3x+1)]^2 &= 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2x+1 \\ t = 2x + \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x}} = 2x+1 & (1) \\ \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x}} = 2x + \frac{1}{3} & (2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\diamond (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 4x^2 + \frac{1}{x} = 4x^2 + 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 4x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{8}.$$

$$\diamond (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{6} \\ 4x^2 + \frac{1}{x} = 4x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{6} \\ 12x^2 + x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{433}}{24}.$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 187. Giải phương trình $4x^3 + 10x^2 + 3x + 14 = 4(x^2 + x)\sqrt{x^2 + \frac{14}{x} + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x^2 + \frac{14}{x} + 1 \geq 0; x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
 4x^2 + 10x + \frac{14}{x} + 3 &= (4x+4)\sqrt{x^2 + \frac{14}{x} + 1} \\
 \Leftrightarrow x^2 + \frac{14}{x} + 1 - 4(x+1)\sqrt{x^2 + \frac{14}{x} + 1} + 3x^2 + 10x + 3 &= 0
 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2 + \frac{14}{x} + 1} = t$ ta thu được

$$\begin{aligned}
 t^2 - 4(x+1)t + 3x^2 + 10x + 3 &= 0 \Leftrightarrow t^2 - 4(x+1)t + 4(x^2 + 2x + 1) = x^2 - 2x + 1 \\
 \Leftrightarrow t^2 - 4(x+1)t + 4(x+1)^2 &= (x-1)^2 \Leftrightarrow (t-2x-2)^2 = (x-1)^2 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x+3 \\ t = 3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + \frac{14}{x} + 1} = x+3 & (1) \\ \sqrt{x^2 + \frac{14}{x} + 1} = 3x+1 & (2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\circ (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x^2 + \frac{14}{x} + 1 = 9x^2 + 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 8x^3 + 6x^2 - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ (x-1)(8x^2 + 14x + 14) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\circ (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 + \frac{14}{x} + 1 = x^2 + 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 6x^2 + 8x - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{1; -\frac{7}{3}\right\}.$$

Kết luận phương trình có tập nghiệm $S = \left\{1; -\frac{7}{3}\right\}$.

Bài toán 188. Giải phương trình $6x^3 + 2 = (x-1)^2 + x(5x-1)\sqrt{x+\frac{1}{x}+2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} 6x^3 - x^2 + 2x + 1 &= x(5x-1)\sqrt{x+\frac{1}{x}+2} \Leftrightarrow 6x^2 - x + \frac{1}{x} + 2 = (5x-1)\sqrt{x+\frac{1}{x}+2} \\ \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} + 2 - (5x-1)\sqrt{x+\frac{1}{x}+2} + 6x^2 - 2x &= 0 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x+\frac{1}{x}+2} = t$ ta được

$$\begin{aligned} t^2 - (5x-1)t + 6x^2 - 2x &= 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4(5x-1)t + 24x^2 - 8x = 0 \\ \Leftrightarrow 4t^2 - 4(5x-1)t + 25x^2 - 10x + 1 &= x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (2t-5x+1)^2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2x \\ t = 3x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+\frac{1}{x}+2} = 2x & (1) \\ \sqrt{x+\frac{1}{x}+2} = 3x-1 & (2) \end{cases}$$

Xét các trường hợp

$$\begin{aligned} \blacksquare (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x + \frac{1}{x} + 2 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-1)(4x^2 + 3x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \\ \blacksquare (2) &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x + \frac{1}{x} + 2 = 9x^2 - 6x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ 9x^3 - 7x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ (x-1)(9x^2 + 2x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 189. Giải phương trình $\frac{2x^3+5}{x} + \frac{10x+19}{8} = \frac{8x+5}{4} \cdot \sqrt{x^2+\frac{5}{x}+2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 + \frac{5}{x} + 2 \geq 0; x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x^2 + \frac{5}{x} + \frac{5}{4}x + \frac{19}{8} &= \left(2x + \frac{5}{4}\right)\sqrt{x^2 + \frac{5}{x} + 2} \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{5}{x} + 2 - \left(2x + \frac{5}{4}\right)\sqrt{x^2 + \frac{5}{x} + 2} + x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{3}{8} &= 0 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2 + \frac{5}{x} + 2} = t$ ta thu được

$$t^2 - \left(2x + \frac{5}{4}\right)t + x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{3}{8} = 0 \Leftrightarrow 8t^2 - 2(8x+5)t + 8x^2 + 10x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 64t^2 - 16(8x+5)t + 64x^2 + 80x + 24 = 0 \Leftrightarrow 64t^2 - 16(8x+5)t + 64x^2 + 80x + 25 = 1$$

$$\Leftrightarrow (8t - 8x - 5)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 2x + 1 \\ 4t = 4x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}} = 2x + 1 & (1) \\ 4\sqrt{x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}} = 4x + 3 & (2) \end{cases}$$

$$\diamond (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 4\left(x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}\right) = 4x^2 + 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ \frac{20}{x} + 7 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 4x^2 - 7x - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7 + 3\sqrt{41}}{4}.$$

$$\diamond (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{4} \\ 16\left(x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}\right) = 16x^2 + 24x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{4} \\ \frac{80}{x} + 23 = 24x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 24x^2 - 23x - 80 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{23 + \sqrt{8209}}{48}.$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 190. Giải phương trình $\frac{2x^3 + 1}{x} + \frac{x-1}{30} = \frac{60x+1}{30} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $-1 \leq x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương

$$2x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{30}x - \frac{1}{30} = 0 = \left(2x + \frac{1}{30}\right) \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x} - \left(2x + \frac{1}{30}\right) \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} + x^2 + \frac{1}{30}x - \frac{1}{30} = 0$$

Đặt $\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} = t$ ta được

$$t^2 - \left(2x + \frac{1}{30}\right)t + x^2 + \frac{1}{30}x - \frac{1}{30} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2\left(x + \frac{1}{60}\right)t + \left(x + \frac{1}{60}\right)^2 = \frac{121}{3600}$$

$$\Leftrightarrow \left(t - x - \frac{1}{60}\right)^2 = \left(\frac{11}{60}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x + \frac{1}{5} \\ t = x - \frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} = 5x + 1 & (1) \\ 6\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}} = 6x - 1 & (2) \end{cases}$$

Xét hai khả năng xảy ra gồm

$$\checkmark (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 25\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = 25x^2 + 10x + 1 \\ x \geq -\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x^2 + x - 25 = 0 \\ x \geq -\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{1001}}{20}.$$

$$\checkmark \quad (2) \Leftrightarrow \begin{cases} 36\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = 36x^2 - 12x + 1 \\ x \geq -\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 - x + 36 = 0 \\ x \geq -\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 191. Giải phương trình $\frac{18x^3+1}{x} + \frac{3x+11}{6} = \left(6x + \frac{1}{6}\right)\sqrt{9x^2 + \frac{1}{x} + 2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $9x^2 + \frac{1}{x} + 2 \geq 0; x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$18x^2 + \frac{1}{x} + \frac{11}{2}x + \frac{11}{6} = \left(6x + \frac{1}{6}\right)\sqrt{9x^2 + \frac{1}{x} + 2} \Leftrightarrow 9x^2 + \frac{1}{x} + 2 - \left(6x + \frac{1}{6}\right)\sqrt{9x^2 + \frac{1}{x} + 2} + 9x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} = 0.$$

Đặt $\sqrt{9x^2 + \frac{1}{x} + 2} = t$ ta được

$$t^2 - \left(6x + \frac{1}{6}\right)t + 9x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6\left(x + \frac{1}{36}\right)t + 9\left(x + \frac{1}{36}\right)^2 = \frac{25}{144}$$

$$\Leftrightarrow \left(t - x - \frac{1}{36}\right)^2 = \left(\frac{5}{12}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3x + \frac{1}{2} \\ t = 3x - \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{9x^2 + \frac{1}{x} + 2} = 6x + 1 & (1) \\ 3\sqrt{9x^2 + \frac{1}{x} + 2} = 9x - 1 & (2) \end{cases}$$

$$\diamond (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{6} \\ 4\left(9x^2 + \frac{1}{x} + 2\right) = 36x^2 + 12x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{6} \\ 12x^2 - 7x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7 + \sqrt{241}}{24}.$$

$$\diamond (2) \Leftrightarrow \begin{cases} 9x \geq 1 \\ 9\left(9x^2 + \frac{1}{x} + 2\right) = 81x^2 - 18x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x \geq 1 \\ 18x^2 + 17x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Thử lại ta thu được nghiệm duy nhất, tập nghiệm $S = \left\{\frac{7 + \sqrt{241}}{24}\right\}.$

Bài toán 192. Trích lược câu 2.a, Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9 THCS; Môn Toán; Đề thi chính thức; Thành phố Hà Nội; Năm học 2013 – 2014.

Giải phương trình $x^2 - 2x - 2\sqrt{2x+1} - 2 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương

$$x^2 = 2x + 1 + 2\sqrt{2x+1} + 1 \Leftrightarrow x^2 = \left(\sqrt{2x+1} + 1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2x+1} + 1 \\ -x = \sqrt{2x+1} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \sqrt{2x+1} & (1) \\ -x - 1 = \sqrt{2x+1} & (2) \end{cases}$$

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 1 = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \in \{0; 4\} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} -x - 1 \geq 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$

Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất.

Bài toán 193. Trích lược câu 3.a; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Toán); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Hùng Vương, Tỉnh Phú Thọ; Năm học 2015 – 2016.

Giải phương trình $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 + 2(x-1)\sqrt{x-1} + x - 1 &= 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 2(x-1)\sqrt{x-1} + x - 1 = 4 \\ \Leftrightarrow (x-1 + \sqrt{x-1})^2 &= 4 \Leftrightarrow |x-1 + \sqrt{x-1}| = 2 \Leftrightarrow x-1 + \sqrt{x-1} = 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-1} &= 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-1 = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \in \{2; 5\} \end{cases} \Leftrightarrow x = 5 \end{aligned}$$

Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất.

Bài toán 194. Trích lược câu 2.1; Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT; Môn Toán (Dành cho các thí sinh dự thi chuyên Toán, chuyên Tin học); Đề thi chính thức; Trường THPT Chuyên Nguyễn Trãi; Tỉnh Hải Dương; Năm học 2014 – 2015.

Giải phương trình $x^2 - 20x + 24 + 8\sqrt{3(x-1)} = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 16 &= 4(3x-3) - 8\sqrt{3x-3} + 4 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 4(\sqrt{3x-3}-1)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 = 2(\sqrt{3x-3}-1) \\ 4-x = 2(\sqrt{3x-3}-1) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = 2\sqrt{3x-3} & (1) \\ 6-x = 2\sqrt{3x-3} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

- (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 4x + 4 = 12x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 16x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 8 + 4\sqrt{3}.$
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x^2 - 12x + 36 = 12x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x^2 - 24x + 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 12 - 4\sqrt{6}.$

Đối chiếu điều kiện ta thu được 2 nghiệm, $S = \{8 + 4\sqrt{3}; 12 - 4\sqrt{6}\}.$

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập số thực

1. $\frac{x^3 + 2x^2 + 6x + 2}{2 + 3x} \geq \sqrt{x^3 + 3x + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$
2. $\frac{2x^2(x+1)}{3x+1} + 1 = (3x+1)\sqrt{2x^3 + x + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$
3. $\frac{x^3 + 6x + 2}{3x + 2} \leq \sqrt{1 + 3x + x^3} \quad (x \in \mathbb{R}).$
4. $\frac{x^3 + 4x^2 + 8x + 2}{2 + 5x} = \sqrt{1 + 3x + x^3} \quad (x \in \mathbb{R}).$
5. $\frac{x^3 + 5x^2 + 6x + 1}{3x + 1} > 2\sqrt{1 + x^3} \quad (x \in \mathbb{R}).$
6. $\frac{4x^3 + 7x^2 + 8x + 1}{4x + 1} = 2\sqrt{4x^3 + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$
7. $\frac{x^3 + 3x^2 + 14x}{4x + 2} = \sqrt{x(x^2 + 8)} \quad (x \in \mathbb{R}).$
8. $\frac{x^3 + 3x^2 + 5x - 1}{4x} \geq \sqrt{x(x^2 + 3)} \quad (x \in \mathbb{R}).$
9. $\frac{x^3 + 4x^2 + 15x - 2}{1 + 5x} = \sqrt{x(x^2 + 8)} \quad (x \in \mathbb{R}).$
10. $x^2 + 5x + 13 = \frac{1}{x} + 6\sqrt{x^3 + 5x + 3} \quad (x \in \mathbb{R}).$
11. $\frac{7x^3 + 3x^2 + 7x + 1}{4x + 2} > \sqrt{7x^3 + x + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$
12. $\frac{x^3 + 9x^2 + 7x + 2}{6x + 2} < \sqrt{x^3 + 3x^2 + x + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$
13. $x^3 + 5x^2 + 4x + 2 = (3x + 2)\sqrt{x^3 + 3x^2 + x + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$
14. $x^3 + 14x^2 + 10x - 7 = (8x - 2)\sqrt{x^3 + 7x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$
15. $x^3 + 10x^2 + 6x + 1 = (4x + 2)\sqrt{x^3 + 7x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$
16. $\frac{7x^3 + 4x^2 + 11x + 10}{x + 1} \leq 4\sqrt{7x^3 + x^2 + x + 7} \quad (x \in \mathbb{R}).$
17. $2x^2 + \frac{11}{6}x + \frac{7}{6} = \left(2x + \frac{5}{6}\right)\sqrt{x^2 + x + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$
18. $\frac{6x^3 + 2x^2 + 6x + 4}{x + 1} = 3\sqrt{6x^3 + x + 2} \quad (x \in \mathbb{R}).$
19. $\frac{x^3 + 9x^2 + 16x + 10}{4x + 5} < \sqrt{x^3 + 6x^2 + 5x + 4} \quad (x \in \mathbb{R}).$
20. $\frac{x^3 + 4x^2 + 7x + 8}{x + 4} < \sqrt{x^3 + 6x^2 + 5x + 4} \quad (x \in \mathbb{R}).$
21. $\frac{x^3 + x^2 + 16x + 18}{x + 2} \geq 3\sqrt{x^3 - x^2 + 7x + 9} \quad (x \in \mathbb{R}).$

$$22. \frac{x^3 + 2x^2 + 17x + 12}{4} = (x+1)\sqrt{x^3 - x^2 + 7x + 9} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$23. \frac{x^3 + 10x^2 + 13x + 4}{5x + 2} \leq \sqrt{x^3 + 6x^2 + 5x + 4} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$24. 2x^3 + 5x^2 + 12x + 1 = \left(2x^2 + 5x\right)\sqrt{x^2 + \frac{1}{x} + 6} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$25. 2x^3 + 3x^2 + 8x + 1 = \left(2x^2 + 3x\right)\sqrt{x^2 + \frac{1}{x} + 6} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$26. 4x^3 - 3x^2 + 41x + 64 = (4x + 26)\sqrt{x^3 - x^2 + 7x + 9} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$27. \frac{x^3 + x^2 + 15x + 15}{5 + 3x} > \sqrt{x^3 - x^2 + 7x + 9} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$28. 2x^3 - 5x^2 + 12x + 1 > (2x^2 - 5x)\sqrt{x^2 + \frac{1}{x} + 6} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$29. \frac{x^3 + 7x^2 + 19x + 9}{6x + 3} \leq \sqrt{x^3 - x^2 + 7x + 9} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$30. \frac{8x^3 - 2x^2 + x + 1}{4x^2 - x} = \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x} + 3} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$31. \frac{8x^3 - 6x^2 + 5x + 1}{4x^2 - 3x} \geq \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x} + 3} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$32. 8x^3 + x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = \left(4x^2 + \frac{x}{2}\right)\sqrt{4x^2 + \frac{1}{x} + 3} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$33. 2x^3 + 6x^2 + 5x + 5 = 3\left(x^2 + x\right)\sqrt{x + \frac{5}{x} + 3} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$34. 4x^3 + 8x^2 + x + 5 = \left(5x^2 + x\right)\sqrt{x + \frac{5}{x} + 3} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$35. 2x^3 - 12x^2 + 23x + 5 = \left(9x - 3x^2\right)\sqrt{x + \frac{5}{x} + 3} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$36. 18x^3 - 3x^2 + x + 2 = \left(6x^2 - x\right)\sqrt{9x^2 + \frac{2}{x} + 3} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$37. 18x^3 + 12x^2 + x + 3 = \left(6x^2 + 4x\right)\sqrt{9x^2 + \frac{2}{x} + 3} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$38. 32x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = \left(8x^2 - x\right)\sqrt{16x^2 + \frac{1}{x} + 4} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$39. 50x^3 - 5x^2 + x + 2 = \left(10x^2 - x\right)\sqrt{25x^2 + \frac{2}{x} + 3} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$40. 18x^3 - 9x^2 + 3x + 2 = \left(6x^2 - 3x\right)\sqrt{9x^2 + \frac{2}{x} + 3} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$41. 32x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = \left(8x^2 - x\right)\sqrt{16x^2 + \frac{1}{x} + 4} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Bài toán 195. Giải phương trình $4\sqrt{2(x+1)} + 1 = 2x^2 + 7x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình tương đương với

$$\begin{aligned} x+1+4\sqrt{2(x+1)}+8 &= 2(x^2+4x+4) \Leftrightarrow (\sqrt{x+1}+2\sqrt{2})^2 = 2(x+2)^2 \\ \Leftrightarrow |\sqrt{x+1}+2\sqrt{2}| &= |\sqrt{2}(x+2)| \Leftrightarrow \sqrt{x+1}+2\sqrt{2} = \sqrt{2}x+2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x+1} &= x\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2-x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in \left\{1; -\frac{1}{2}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 196. Giải phương trình $\left(1+\frac{2}{x}\right)\sqrt{2x-1} = x^2+x-2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (x+2)\sqrt{2x-1} &= x^3+x^2-2x \Leftrightarrow (x+2)\sqrt{2x-1} = (x+2)(x^2-x) \\ \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} &= x^2-x \Leftrightarrow 2x-1+2\sqrt{2x-1}+1 = 2x^2 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2x-1}+1)^2 &= 2x^2 \Leftrightarrow |\sqrt{2x-1}+1| = |x\sqrt{2}| \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = x\sqrt{2}-1 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{2} \geq 1 \\ 2x-1 = 2x^2-2\sqrt{2}x+1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{2} \geq 1 \\ x^2-(\sqrt{2}+1)x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta đi đến nghiệm duy nhất $x = \frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

Bài toán 197. Giải phương trình $2\sqrt{3x-1} = x + \frac{3}{x} + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x\sqrt{3x-1} &= x^2+x+3 \Leftrightarrow 3x-1+2x\sqrt{3x-1}+x^2 = 2(x^2+2x+1) \\ \Leftrightarrow (\sqrt{3x-1}+x)^2 &= 2(x+1)^2 \Leftrightarrow |\sqrt{3x-1}+x| = |(x+1)\sqrt{2}| \\ \Leftrightarrow \sqrt{3x-1}+x &= (x+1)\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{3x-1} = (\sqrt{2}-1)x + \sqrt{2} \quad (1) \end{aligned}$$

Ta thấy $(\sqrt{2}-1)x + \sqrt{2} > 0, \forall x \geq \frac{1}{3}$ nên

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 3x-1 = (3-2\sqrt{2})x^2 + 2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)x + 2 \Leftrightarrow (3-2\sqrt{2})x^2 + [1-2\sqrt{2}]x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{2\sqrt{2}-1+\sqrt{20\sqrt{2}-27}}{2(3-2\sqrt{2})}, \frac{2\sqrt{2}-1-\sqrt{20\sqrt{2}-27}}{2(3-2\sqrt{2})} \right\}. \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện ta thu được $S = \left\{ \frac{2\sqrt{2}-1+\sqrt{20\sqrt{2}-27}}{2(3-2\sqrt{2})}; \frac{2\sqrt{2}-1+\sqrt{20\sqrt{2}-27}}{2(3-2\sqrt{2})} \right\}$.

Bài toán 198. Giải phương trình $2x\sqrt{3x-2} = 6x^2 - 3x + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$. Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} 6x^2 - 3x + 2 - 2x\sqrt{3x-2} &= 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x\sqrt{3x-2} + 3x - 2) + 5x^2 - 6x + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow (x - \sqrt{3x-2})^2 + 5\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 &= -\frac{11}{5} \quad (1) \end{aligned}$$

Phương trình (1) vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$. Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} 3x - 2 + 2x\sqrt{3x-2} + x^2 &= 7x^2 \Leftrightarrow (\sqrt{3x-2} + x)^2 = 7x^2 \\ \Leftrightarrow |\sqrt{3x-2} + x| &= |x\sqrt{7}| \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} + x = x\sqrt{7} \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} = (\sqrt{7}-1)x \quad (*) \end{aligned}$$

Với điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$ ta có $(*) \Leftrightarrow (8-2\sqrt{7})x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 199. Giải phương trình $2(x+1)\sqrt{5x-2} = 4x^2 - 7x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{5}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 + 2(x+1)\sqrt{5x-2} + 5x - 2 &= 5x^2 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{5x-2} + x + 1)^2 &= 5x^2 \Leftrightarrow |\sqrt{5x-2} + x + 1| = |x\sqrt{5}| \\ \Leftrightarrow \sqrt{5x-2} + x + 1 &= x\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5x-2} = (\sqrt{5}-1)x - 1 \quad (1) \end{aligned}$$

Khi $(\sqrt{5}-1)x - 1 \geq 0$ ta có

$$(1) \Leftrightarrow 5x - 2 = (6 - 2\sqrt{5})x^2 - 2(\sqrt{5}-1)x + 1 \Leftrightarrow (6 - 2\sqrt{5})x^2 - (2\sqrt{5}+3)x + 3 = 0$$

$$\Delta = 36\sqrt{5} - 43 \Rightarrow x \in \left\{ \frac{2\sqrt{5}+3+\sqrt{36\sqrt{5}-43}}{2(6-2\sqrt{5})}; \frac{2\sqrt{5}+3-\sqrt{36\sqrt{5}-43}}{2(6-2\sqrt{5})} \right\}$$

Đổi chiều $(\sqrt{5}-1)x - 1 \geq 0 \Rightarrow S = \left\{ \frac{2\sqrt{5}+3+\sqrt{36\sqrt{5}-43}}{2(6-2\sqrt{5})} \right\}$.

Bài toán 200. Giải phương trình $x\sqrt{4x-1} = (x+2)^2 + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0, 25$. Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} x\sqrt{4x-1} &= x^2 + 4x + 7 \Leftrightarrow 2x\sqrt{4x-1} = 2x^2 + 8x + 14 \\ &\Leftrightarrow 4x - 2 + 2x\sqrt{4x-1} + x^2 = 3(x^2 + 4x + 4) \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{4x-1} + x)^2 = 3(x+2)^2 \Leftrightarrow |\sqrt{4x-1} + x| = |(x+2)\sqrt{3}| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{4x-1} + x = (x+2)\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{4x-1} = (\sqrt{3}-1)x + 2\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow 4x - 1 = (4 - 2\sqrt{3})x^2 + 4\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)x + 12 \\ &\Leftrightarrow (4 - 2\sqrt{3})x^2 + 4(2 - \sqrt{3})x + 13 = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Phương trình (*) vô nghiệm nên phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 201. Giải bất phương trình $2\sqrt{2(2x+1)} + 1 \geq 2x(x+1) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$. Bất phương trình tương đương

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2(2x+1)} &\geq 2x^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow 2x + 1 + 2 + 2\sqrt{2(2x+1)} \geq 2(x^2 + 2x + 1) \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{2x+1} + \sqrt{2})^2 \geq 2(x+1)^2 \Leftrightarrow |\sqrt{2x+1} + \sqrt{2}| \geq |\sqrt{2}(x+1)| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} + 1 \geq \sqrt{2}x + \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2x+1} \geq \sqrt{2}x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \geq 0 \\ 2x^2 - 2x - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện ta được nghiệm $S = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$.

Bài toán 202. Giải phương trình $2\sqrt{x^2+1} = 2x^2 + 6x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện x thực. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2 + 1 + 2\sqrt{x^2+1} + 1 &= 3(x^2 + 2x + 1) \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1} + 1)^2 = 3(x+1)^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} + 1 = \sqrt{3}(x+1) \\ \sqrt{x^2+1} + 1 = -\sqrt{3}(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} = \sqrt{3}x + \sqrt{3} - 1 & (1) \\ \sqrt{x^2+1} = -\sqrt{3}x - \sqrt{3} - 1 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai khả năng

➤ Với $\sqrt{3}x + \sqrt{3} - 1 \geq 0$ thì

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + 1 = 3x^2 + 2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)x + 4 - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x^2 + 2(3-\sqrt{3})x + 3 - 2\sqrt{3} = 0$$

$$\Delta = 6 - 2\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}-3+\sqrt{6-2\sqrt{3}}}{2}; x = \frac{\sqrt{3}-3-\sqrt{6-2\sqrt{3}}}{2}$$

$$\text{So sánh với } \sqrt{3}x + \sqrt{3} - 1 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}-3+\sqrt{6-2\sqrt{3}}}{2}.$$

➤ Với $-\sqrt{3}x - \sqrt{3} - 1 \geq 0$ thì

$$(2) \Leftrightarrow x^2 + 1 = 3x^2 + 2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)x + 4 + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x^2 + 2(3 + \sqrt{3})x + 3 + 2\sqrt{3} = 0$$

$$\Delta = 6 + 2\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{3} - 3 + \sqrt{6 + 2\sqrt{3}}}{2}; x = \frac{-\sqrt{3} - 3 - \sqrt{6 + 2\sqrt{3}}}{2}$$

$$\text{So sánh với } -\sqrt{3}x - \sqrt{3} - 1 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{-\sqrt{3} - 3 - \sqrt{6 + 2\sqrt{3}}}{2}.$$

Vậy bài toán có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 203. Giải phương trình $2\sqrt{6x-1} = 13x - 6 + \frac{1}{x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{6}$. Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} 2x\sqrt{6x-1} &= 13x^2 - 6x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{6x-1} + 6x - 1 = 14x^2 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{6x-1} + x)^2 &= 14x^2 \Leftrightarrow |\sqrt{6x-1} + x| = |x\sqrt{14}| \Leftrightarrow \sqrt{6x-1} = (\sqrt{14} - 1)x \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Với } x \geq \frac{1}{6} \text{ ta được } (1) \Leftrightarrow (15 - 2\sqrt{14})x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{2\sqrt{14} - 6}}{15 - 2\sqrt{14}}; x = \frac{3 - \sqrt{2\sqrt{14} - 6}}{15 - 2\sqrt{14}}.$$

$$\text{Đổi chiếu điều kiện đi đến } x = \frac{3 + \sqrt{2\sqrt{14} - 6}}{15 - 2\sqrt{14}}; x = \frac{3 - \sqrt{2\sqrt{14} - 6}}{15 - 2\sqrt{14}}.$$

Bài toán 204. Giải phương trình $2\sqrt{6(7x-2)} = 54x^2 + 29x + 2$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{7}$. Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} 7x - 2 + 2\sqrt{6(7x-2)} + 6 &= 6(9x^2 + 6x + 1) \Leftrightarrow (\sqrt{7x-2} + \sqrt{6})^2 = 6(3x+1)^2 \\ \Leftrightarrow |\sqrt{7x-2} + \sqrt{6}| &= |(3x+1)\sqrt{6}| \Leftrightarrow \sqrt{7x-2} + \sqrt{6} = (3x+1)\sqrt{6} \\ \Leftrightarrow \sqrt{7x-2} &= 3x\sqrt{6} \Leftrightarrow 54x^2 - 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset \end{aligned}$$

Kết luận phương trình vô nghiệm.

Bài toán 205. Giải phương trình $x^2 + (2\sqrt{6} - 24)x + 18 = 12\sqrt{4x-3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2 + 2\sqrt{6}x + 6 &= 6(4x - 3 + 2\sqrt{4x-3} + 1) \Leftrightarrow (x + \sqrt{6})^2 = 6(\sqrt{4x-3} + 1)^2 \\ \Leftrightarrow |x + \sqrt{6}| &= \sqrt{6}|\sqrt{4x-3} + 1| \Leftrightarrow x + \sqrt{6} = \sqrt{6(4x-3)} + \sqrt{6} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 24x + 18 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow x \in \{12 + 3\sqrt{14}; 12 - 3\sqrt{14}\} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Nhận xét.

10 bài toán từ 195 đến 205, vẫn xoay quanh motif phân tích hiệu bình phương nhưng mọi thứ đã không còn bằng phẳng nữa, hình thức đề bài có kết cấu

$$[f(x)]^2 = k[g^2(x)], k > 0 \quad (*).$$

Những trường hợp này k là số không chính phương, chính vì yếu tố này nên trong quá trình biến đổi, mặc dù thu được (*) nhưng người ta vẫn cảm thấy ngỡ ngàng, cảm thấy khó xử vì thấy hình thức bên ngoài nó xấu xí quá, cái cảm giác ấy cứ tồn tại mãi khiến người ta không dám dẫn thân, không dám nghĩ – dám làm. Trên đời này chúng ta thường đề cao, ca ngợi và mê hoặc bởi cái đẹp, bởi thanh sắc bề ngoài, bởi tiền tài, danh vọng, hay những vật chất xa xỉ tầm thường, âu cũng vì những bản năng trong con người trời dặt, hay những toan tính cá nhân chi phối.

Trong kho tàng ca dao – dân ca, tục ngữ Việt Nam ta có câu “Tốt gỗ hơn tốt nước sơn”, ngoài ra trong điển tích lịch sử Trung Hoa còn có Chung Vô Diễm – một trong Ngũ xú Trung Hoa, đó là minh chứng xác đáng cho nét đẹp bên trong, thuần phác và khó kiếm tìm. Chung Vô Diễm là người đàn bà nổi tiếng trong lịch sử, sinh ra trán cao, mắt sâu, bụng dài, chân thô, mũi hếch, xương cổ lòi ra, cổ to, tóc thưa, bụng phệ, lưng gù, da đen đúa, ...chưa kể trong tên bà có nghĩa là không đẹp. Do dung mạo xấu xí, đến 40 tuổi vẫn chưa chọn được người chồng vừa ý. Tác giả cũng đã từng được chiêm ngưỡng phiên bản xấu xí này khi xem lại vở cải lương Chung Vô Diễm (Dạ Xoa Hoàng Hậu) với diễn xuất của dàn diễn viên Kim Tử Long – Tài Linh – Chí Linh – Thanh Thanh Tâm – Thoại Mỹ – Thanh Tòng, tập niên 1990. Khi thưởng ngoạn những vở sân khấu cải lương dân tộc này, chắc hẳn ai cũng biết bà là vương hậu của Tề Tuyên Vương Điền Tịch Cương nước Điền Tề, chính nhờ sự can gián của bà mà Tề Tuyên Vương từ bỏ yến nhạc, phá Tiệm đài, trừ gian thần nịnh bợ, chuyên tâm chính sự, chỉnh trang võ bị, kho dựn đầy đủ, thiên hạ cường thịnh. Thế mới biết nét đẹp ẩn khuất rất dễ bị nhầm lẫn với cái xấu xí, thường xuyên bị đánh đồng, để nhận ra và trân trọng nó cần may mắn và phúc phận không hề nhỏ.

Bài toán 206. Giải phương trình $2\sqrt{x^2+1} = \frac{3x^2}{x-1} + 2 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2(x-1)\sqrt{x^2+1} &= 3x^2 + 2x - 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 + 2(x-1)\sqrt{x^2+1} + x^2 - 2x + 1 = 5x^2 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1} + x - 1)^2 &= 5x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} + x - 1 = x\sqrt{5} \\ \sqrt{x^2+1} + x - 1 = -x\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} = x(\sqrt{5}-1) + 1 & (1) \\ \sqrt{x^2+1} = 1 - x(\sqrt{5}+1) & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

❖ Với $x(\sqrt{5}-1) + 1 \geq 0$ ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x^2 + 1 = (6 - 2\sqrt{5})x^2 + 2x(\sqrt{5}-1) + 1 \\ &\Leftrightarrow (6 - 2\sqrt{5})x^2 + x(2\sqrt{5}-3) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{3-2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}}\right\} \end{aligned}$$

Đổi chiếu điều kiện $x(\sqrt{5}-1) + 1 \geq 0 \Rightarrow x = 0$.

❖ Với $1 - x(\sqrt{5}+1) \geq 0$ ta có

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow x^2 + 1 = (6 + 2\sqrt{5})x^2 - 2x(\sqrt{5}+1) + 1 \\ &\Leftrightarrow (6 + 2\sqrt{5})x^2 - (2\sqrt{5}+3)x = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{3+2\sqrt{5}}{6+2\sqrt{5}}\right\} \end{aligned}$$

Đổi chiếu điều kiện $1 - x(\sqrt{5}+1) \geq 0 \Rightarrow x = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \neq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^2+1}-2 &= \frac{3x^2}{x-1} \Leftrightarrow 2(\sqrt{x^2+1}-1) = \frac{3x^2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{3x^2}{x-1} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2x-2=3(\sqrt{x^2+1}+1) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 3\sqrt{x^2+1}=2x-5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x \geq \frac{5}{2} \\ 9x^2+9=4x^2-20x+25 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x \geq \frac{5}{2} \\ 5x^2+20x-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow x=0 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 207. Giải phương trình $2\sqrt{x^2+x+2}=x^2-x-3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện x thực. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2+x+2+2\sqrt{x^2+x+2}+1 &= 2x^2 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+x+2}+1)^2 = 2x^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x+2}+1 = -\sqrt{2}x \\ \sqrt{x^2+x+2}+1 = \sqrt{2}x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x+2} = -\sqrt{2}x-1 & (1) \\ \sqrt{x^2+x+2} = \sqrt{2}x-1 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

➤ Với $\sqrt{2}x+1 \leq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x^2+x+2=2x^2+2\sqrt{2}x+1 \Leftrightarrow x^2+(2\sqrt{2}-1)x-1=0$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1-2\sqrt{2}+\sqrt{13-4\sqrt{2}}}{2}; \frac{1-2\sqrt{2}-\sqrt{13-4\sqrt{2}}}{2} \right\}.$$

$$\text{Đổi chiều } \sqrt{2}x+1 \leq 0 \Rightarrow x = \frac{1-2\sqrt{2}-\sqrt{13-4\sqrt{2}}}{2}.$$

➤ Với $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ thì (2) $\Leftrightarrow x^2+x+2=2x^2-2\sqrt{2}x+1 \Leftrightarrow x^2-(2\sqrt{2}+1)x-1=0$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1+2\sqrt{2}+\sqrt{13+4\sqrt{2}}}{2}; \frac{1+2\sqrt{2}-\sqrt{13+4\sqrt{2}}}{2} \right\}.$$

$$\text{Đổi chiều } x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{1+2\sqrt{2}+\sqrt{13+4\sqrt{2}}}{2}.$$

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm.

Bài toán 208. Giải phương trình $2x^2-x-4+2\sqrt{3x^2+x+3}=0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện x thực. Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} 3x^2+x+3-2\sqrt{3x^2+x+3}+1 &= 5x^2 \Leftrightarrow (\sqrt{3x^2+x+3}-1)^2 = 5x^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2+x+3}-1 = x\sqrt{5} \\ \sqrt{3x^2+x+3}-1 = -x\sqrt{5} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^2+x+3} = x\sqrt{5}+1 & (1) \\ \sqrt{3x^2+x+3} = 1-x\sqrt{5} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

- Với $x\sqrt{5}+1 \geq 0$ ta có

$$3x^2 + x + 3 = 5x^2 + 2x\sqrt{5} + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + (2\sqrt{5} - 1)x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x \in \left\{ \frac{1 - 2\sqrt{5} + \sqrt{37 - 4\sqrt{5}}}{4}; \frac{1 - 2\sqrt{5} + \sqrt{37 - 4\sqrt{5}}}{4} \right\}$$

Đổi chiều $x\sqrt{5}+1 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{1 - 2\sqrt{5} + \sqrt{37 - 4\sqrt{5}}}{4}$.

- Với $1 - x\sqrt{5} \geq 0$ ta có

$$3x^2 + x + 3 = 5x^2 - 2x\sqrt{5} + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - (2\sqrt{5} + 1)x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x \in \left\{ \frac{1 + 2\sqrt{5} - \sqrt{37 + 4\sqrt{5}}}{4}; \frac{1 + 2\sqrt{5} - \sqrt{37 + 4\sqrt{5}}}{4} \right\}$$

Đổi chiều $1 - x\sqrt{5} \geq 0 \Rightarrow x = \frac{1 + 2\sqrt{5} - \sqrt{37 + 4\sqrt{5}}}{4}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 209. Giải phương trình $4\sqrt{5-x} = 3x + 29 + \frac{23}{x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $0 \neq x \leq 5$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4x\sqrt{5-x} = 3x^2 + 29x + 23 \Leftrightarrow 5 - x + 4x\sqrt{5-x} + 4x^2 = 7(x^2 + 4x + 4)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{5-x} + 2x)^2 = 7(x+2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5-x} + 2x = \sqrt{7}(x+2) \\ \sqrt{5-x} + 2x = -\sqrt{7}(x+2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5-x} = (\sqrt{7} - 2)x + 2\sqrt{7} & (1) \\ \sqrt{5-x} = (-\sqrt{7} - 2)x - 2\sqrt{7} & (2) \end{cases}$$

- ✓ Với $(\sqrt{7} - 2)x + 2\sqrt{7} \geq 0$ thì

$$(1) \Leftrightarrow 5 - x = (11 - 2\sqrt{7})x^2 + 4\sqrt{7}(\sqrt{7} - 2)x + 28$$

$$\Leftrightarrow (11 - 2\sqrt{7})x^2 + (29 - 8\sqrt{7})x + 23 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

- ✓ Với $(-\sqrt{7} - 2)x - 2\sqrt{7} \geq 0$ thì

$$(2) \Leftrightarrow 5 - x = (11 + 2\sqrt{7})x^2 + 4\sqrt{7}(\sqrt{7} + 2)x + 28$$

$$\Leftrightarrow (11 + 2\sqrt{7})x^2 + (29 + 8\sqrt{7})x + 23 = 0$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-(29 + 8\sqrt{7}) + \sqrt{277 + 280\sqrt{7}}}{2(11 + 2\sqrt{7})}; \frac{-(29 + 8\sqrt{7}) - \sqrt{277 + 280\sqrt{7}}}{2(11 + 2\sqrt{7})} \right\}$$

Đổi chiều điều kiện ta có $(-\sqrt{7} - 2)x - 2\sqrt{7} \geq 0 \Rightarrow x = \frac{-(29 + 8\sqrt{7}) - \sqrt{277 + 280\sqrt{7}}}{2(11 + 2\sqrt{7})}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{-(29+8\sqrt{7})-\sqrt{277+280\sqrt{7}}}{2(11+2\sqrt{7})}$.

Bài toán 210. Giải phương trình $6x^3 + 2\sqrt{3(6x^3 + x^2)} = 2x^2 + 6x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{6}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 6x^3 + x^2 + 2\sqrt{3(6x^3 + x^2)} + 3 &= 3(x^2 + 2x + 1) \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{6x^3 + x^2} + \sqrt{3}\right)^2 &= 3(x+1)^2 \Leftrightarrow \left|\sqrt{6x^3 + x^2} + \sqrt{3}\right| = |x+1|\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow \sqrt{6x^3 + x^2} + \sqrt{3} &= x\sqrt{3} + \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{6x^3 + x^2} = x\sqrt{3} \Leftrightarrow 6x^3 + x^2 = 3x^2 \\ \Leftrightarrow 6x^3 - 2x^2 &= 0 \Leftrightarrow 3x^2(2x-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm kể trên.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $2x\sqrt{3x-4} = 4(1+x^2) - 3x.$

2. $2\sqrt{3x-4} - \frac{6}{x} = 7x+5.$

3. $2\sqrt{3x-4} = 2x+3 + \frac{7}{x}.$

4. $6x^2+1 = 2x\sqrt{5x-1} + 5x.$

5. $5x^2+7(x+1) = 2x\sqrt{5x-1}.$

6. $\sqrt{7x-2} = \frac{x^2-17x+7}{6}.$

7. $6\sqrt{7x-2} = x^2-15x+12.$

8. $2\sqrt{x+6} = \frac{2x^2-15x+5}{1+x}.$

9. $2(1+x)\sqrt{x+6} = 4x^2-13x-2.$

10. $x^2+4x+4x\sqrt{5x+3} = 3.$

11. $x^2+4x\sqrt{5x+3} = 19.$

12. $\frac{4}{5x^2+13x+19} = \frac{1}{\sqrt{7x-3}}.$

13. $4\sqrt{7x-3} = 6x^2+5x+5.$

14. $2(x-1) = \frac{23x^2-21x+2}{\sqrt{3-x}}.$

15. $\frac{1}{\sqrt{3-x}} = \frac{2(x-1)}{4x^2+23x+16}.$

16. $2(2x-1)\sqrt{8-x} = x^2+25x+11.$

17. $2\sqrt{6-3x} = 5x+27 + \frac{18}{x}.$

18. $2x = \frac{6x^2+45x+57}{\sqrt{6-3x}}.$

19. $4(x+1)\sqrt{1+x^2} = x^2+4x+1.$

20. $4x\sqrt{x^2+2} = 6x^2+14x+5.$

21. $8x^2+15x+4 = 6\sqrt{x-5}.$

22. $\frac{7x^2-30x+25}{4} - \sqrt{2x-1} = 0.$

23. $6x^2-27x+17 = 6\sqrt{3x-2}.$

24. $\frac{1}{x} = \frac{2\sqrt{6-x}}{4x^2-9x-1}.$

25. $\frac{2\sqrt{7-3x}}{2x^2-7x+4} + \frac{1}{1-x} = 0.$

26. $\frac{2}{x} + 4\sqrt{8-5x} = 2x+17.$

$$27. 2x\sqrt{x^2+x+3}=3x^2+9x+2.$$

$$28. 4\sqrt{2x^2-x+1}+11=\frac{5}{x}.$$

$$29. 6x=\frac{x^2-24x+13}{\sqrt{2x^2-1}}.$$

$$30. 6\sqrt{3x-1}+\frac{3x^2+15x-5}{x}=0.$$

$$31. \sqrt{x^2-2x+3}+\frac{5x^2+6x-2}{4x}=0.$$

$$32. 4x\sqrt{7x^2-2}+2x^2+18x-11=0.$$

$$33. (x-1)\sqrt{7x^2-x+3}=\frac{x^2+21x+5}{2}.$$

$$34. \frac{7x^2+12x+7}{6}=(x+1)\sqrt{1+x^2}.$$

$$35. \frac{4}{5}\sqrt{2x^2-1}=\frac{4x+3}{x+1}.$$

$$36. \frac{2x^2+9x+4}{x+1}=2\sqrt{3x^2+x+1}.$$

$$37. \frac{6x^2+32x+50}{2(x+2)}=\sqrt{2-x^2}.$$

$$38. \frac{5x^2+26x+41}{2(x+2)}=\sqrt{2-x^2}.$$

$$39. \frac{3x^2+25x+26}{2\sqrt{3x^2+x+1}}-x-1=0.$$

$$40. 2\sqrt{5+x-x^2}+\frac{x(6x+13)}{1-x}=0.$$

$$41. 2(x-1)=\frac{7x^2+29x+22}{\sqrt{5+x-x^2}}.$$

$$42. 4(x+1)\sqrt{x^2+3x+4}=3x^2+5x.$$

$$43. 4(x+1)=\frac{x^2+13x+16}{\sqrt{x^2+3x+4}}.$$

$$44. 12x^2-34x+8=4x\sqrt{9+x^2}.$$

$$45. 4x-8-\frac{13}{x}+4\sqrt{2x^2+3}=0.$$

$$46. \frac{1}{\sqrt{x^2+7x+9}}=\frac{4x}{2x^2+21x+19}.$$

$$47. 4\sqrt{x^2+7x+9}=x+5-\frac{3}{x}.$$

Lời kết.

Tác giả chúc các bạn học sinh, các thầy cô giáo và toàn thể các bạn đọc giả sức khỏe, vui vẻ, bình tĩnh, tự tin, bứt phá, đánh bật đề thi, đạt kết quả cao trong các kỳ thi tương lai và các hoạt động khoa học, hoạt động nhân ái sắp tới, chúc các em học sinh lớp 12 THPT đạt điểm tối đa môn Toán trong kỳ thi THPT Quốc gia năm 2016 và hơn thế nữa.

...

Tôi còn nhớ đã đọc trong một tài liệu, tại Đại hội Châu ngoan Bắc Hồ Thành phố Hồ Chí Minh, năm 1977, có một vị đại biểu trong Đoàn chủ tịch đã từng nói

“Thành phố soi thấy tương lai rất sáng của mình trên vầng trán các cháu”

Đó là câu nói nổi tiếng của Nguyễn Bí thư Thành ủy Thành phố Hồ Chí Minh, Cố Thủ tướng Chính phủ Nước Cộng hòa Xã hội Chủ nghĩa Việt Nam, đồng chí Sáu Dân – Võ Văn Kiệt, một người chiến sĩ cộng sản trung kiên, chịu nhiều đau thương mất mát, luôn đau đáu canh cánh bên mình nỗi lo cho nhân dân, cho đất nước, cho thành phố Hồ Chí Minh đến tận khi mất. Đất nước mình còn đau thương lắm, sự đau thương xuất phát ngay từ chính đồng bào mình, không biết có bạn đọc nào hiểu điều tác giả mong muốn và muốn nhắn nhủ !

Facebook Giang Sơn – Việt Nam Tổ Quốc
Thủ đô Hà Nội, ngày 17 tháng 02 năm 2015.

-----HẾT-----

III. MỘT SỐ TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 8.*
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
2. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 9.*
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
3. *Nâng cao và phát triển toán 8, tập 1 – tập 2.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
4. *Nâng cao và phát triển toán 9, tập 1 – tập 2.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
5. *Toán nâng cao Đại số 10.*
Nguyễn Huy Đoan; NXB Giáo dục Việt Nam; 1999.
6. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Đại số 10.*
Nguyễn Huy Đoan; Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2006.
7. *Tài liệu chuyên toán: Đại số 10 – Bài tập Đại số 10.*
Đoàn Quỳnh – Doãn Minh Cường – Trần Nam Dũng – Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2010.
8. *Một số chuyên đề Đại số bồi dưỡng học sinh giỏi THPT.*
Nguyễn Văn Mậu – Nguyễn Văn Tiến và một số tác giả; NXB Giáo dục Việt Nam; 2009.
9. *Tuyển tập các bài toán hay và khó Đại số 9.*
Nguyễn Đức Tấn – Đặng Đức Trọng – Nguyễn Cao Huynh – Vũ Minh Nghĩa – Bùi Ruy Tân – Lương Anh Văn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
10. *Một số phương pháp chọn lọc giải các bài toán sơ cấp, tập 1 – tập 3.*
Phan Đức Chính – Phạm Văn Điều – Đỗ Văn Hà – Phạm Văn Hạp – Phạm Văn Hùng – Phạm Đăng Long – Nguyễn Văn Mậu – Đỗ Thanh Sơn – Lê Đình Thịnh; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 1997.
11. *Bài giảng chuyên sâu Toán THPT: Giải toán Đại số 10.*
Lê Hồng Đức – Nhóm Cụ Môn; NXB Hà Nội; 2011.
12. *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình.*
Nguyễn Văn Mậu; NXB Giáo dục Việt Nam; 1994.
13. *Toán bồi dưỡng học sinh phổ thông trung học – quyển 1; Đại số.*
Hàn Liên Hải – Phan Huy Khải – Đào Ngọc Nam – Nguyễn Đạo Phương – Lê Tất Tôn – Đặng Quan Viễn; NXB Hà Nội; 1991.
14. *Phương trình và hệ phương trình không mẫu mực.*
Nguyễn Đức Tấn – Phan Ngọc Thảo; NXB Giáo dục Việt Nam; 1996.
15. *Chuyên đề bồi dưỡng Toán cấp ba; Đại số.*
Nguyễn Sinh Nguyên; NXB Đà Nẵng; 1997.
16. *Giải toán Đại số sơ cấp (Dùng cho học sinh 12 chuyên, luyện thi đại học).*
Trần Thành Minh – Vũ Thiện Căn – Võ Anh Dũng; NXB Giáo dục Việt Nam; 1995.
17. *Những dạng toán điển hình trong các kỳ thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng; Tập 1;2;3;4.*
Bùi Quang Trường; NXB Hà Nội; 2002.
18. *Ôn luyện thi môn Toán THPT theo chủ đề; Tập một: Đại số và lượng giác.*
Cung Thế Anh; NXB Giáo dục Việt Nam; 2011.
19. *Phương pháp giải toán trọng tâm.*
Phan Huy Khải; NXB Đại học Sư phạm; 2011.
20. *Các bài giảng luyện thi môn Toán; Tập 2.*
Đức Chính – Vũ Dương Thụy – Đào Tam – Lê Thống Nhất; NXB Giáo dục Việt Nam; 1993.
21. *500 Bài toán chọn lọc Đại số - Hình học 10.*
Lê Hoàng Phò; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 2012.
22. *Tam thức bậc hai và ứng dụng.*

- Lê Sĩ Đồng – Lê Minh Tâm; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.
23. **Chuyên đề Bất đẳng thức và ứng dụng trong đại số.**
Nguyễn Đức Tấn; NXB Giáo dục Việt nam; 2003.
24. **23 Chuyên đề giải 1001 bài toán sơ cấp ; Quyển 1.**
Nguyễn Văn Vĩnh – Nguyễn Đức Đồng
và một số đồng nghiệp (NKTH); NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
25. **Phương pháp giải toán bất đẳng thức và cực trị.**
Nguyễn Văn Dũng – Võ Quốc Bá Cẩn – Trần Quốc Anh; NXB ĐHQG Hà Nội; 2011.
26. **Các bài giảng về bất đẳng thức Cauchy.**
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2008.
27. **Cẩm nang luyện thi Đại học Ứng dụng hàm số Giải toán Đại số và Giải tích.**
Huỳnh Nguyễn Luân Lưu – Nguyễn Thị Duy An; NXB ĐHQG Hà Nội ;2014.
28. **Tư duy logic tìm tòi lời giải Hệ phương trình.**
Mai Xuân Vinh – Phạm Kim Chung – Phạm Chí Tuấn
– Đào Văn Chung – Dương Văn Sơn ; NXB ĐHQG Hà Nội; 2015.
29. **Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Trung học cơ sở, Đại số.**
Nguyễn Thị Thanh Thủy – Phạm Minh Phương
– Trần Văn Tấn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2014.
30. **9 Chuyên đề Đại số Trung học cơ sở.**
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2014.
31. **Hệ phương trình và phương trình chứa căn thức.**
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2006.
32. **Tam thức bậc hai và ứng dụng.**
Lê Sĩ Đồng – Lê Minh Tâm; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.
33. **Chuyên đề Bất đẳng thức và ứng dụng trong Đại số.**
Nguyễn Đức Tấn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.
34. **Ôn thi vào lớp 10 THPT Chuyên; Môn Toán.**
Doãn Minh Cường – Trịnh Hoài Dương
– Trần Văn Khải – Đỗ Thanh Sơn ; NXB Giáo dục Việt Nam ; 2013.
35. **Tài liệu chuyên toán THCS; Toán 9; Tập 1: Đại số.**
Vũ Hữu Bình – Phạm Thị Bạch Ngọc – Đàm Văn Nhi ; NXB Giáo dục Việt Nam ; 2012.
36. **Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT Chuyên trực thuộc đại học và THPT Chuyên các tỉnh thành.**
37. **Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT hệ đại trà các địa phương trên toàn quốc.**
38. **Đề thi học sinh giỏi môn toán khối 8 đến khối 12 các cấp.**
39. **Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán (chính thức – dự bị) qua các thời kỳ.**
40. **Đề thi Olympic 30 tháng 4 Toán học khối 10, khối 11 các tỉnh miền Trung và Nam bộ (1995 – 2013).**
41. **Các tạp chí toán học:** Tạp chí Toán học và tuổi trẻ; Tạp chí Toán tuổi thơ 2 THCS; Tạp chí Kvant...
42. **Các diễn đàn toán học:** Boxmath.vn; Math.net.vn; Mathscope.org; Onluyentoan.vn; Diendantoanhoc.net;
Math.net.vn; K2pi.net; Mathlink.ro;...
43. **Một số trang mạng học tập thông qua facebook; twiter;...**



**THÂN THỂ TẠI NGỤC TRUNG
TÌNH THẦN TẠI NGỤC NGOẠI
DỤC THÀNH ĐẠI SỰ NGHIỆP
TÌNH THẦN CẢNH YẾU ĐẠI**

