

Chương 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

* Định nghĩa hàm số lượng giác:

- Hàm số sin:** Quy tắc tương ứng với mỗi số thực x với một số thực $\sin x$

$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = \sin x$$

được gọi là *hàm số sin*, kí hiệu là $y = \sin x$.

- Hàm số cosin:** Quy tắc tương ứng với mỗi số thực x với một số thực $\cos x$

$$\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = \cos x$$

được gọi là *hàm số cosin*, kí hiệu là $y = \cos x$.

- Hàm số tang:** là hàm số được xác định bởi công thức $y = \frac{\sin x}{\cos x} (\cos x \neq 0)$, kí hiệu là $y = \tan x$.
- Hàm số cotang:** là hàm số được xác định bởi công thức $y = \frac{\cos x}{\sin x} (\sin x \neq 0)$, kí hiệu là $y = \cot x$.

1. Tập xác định của hàm số lượng giác

1.1. Lý thuyết

a. Định nghĩa: Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập tất cả các giá trị x để biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

b. Hàm số sin

- $y = \sin x$: Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- $y = \sin(f(x))$ xác định khi và chỉ khi $f(x)$ xác định.

c. Hàm số cosin

- $y = \cos x$: Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- $y = \cos(f(x))$ xác định khi và chỉ khi $f(x)$ xác định.

d. Hàm số tang

- $y = \tan x$: Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, (k \in \mathbb{Z})$.
- $y = \tan(f(x))$ xác định $\Leftrightarrow (f(x) \text{ xác định và } f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}))$.

e. Hàm số cotang

- $y = \cot x$: Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, (k \in \mathbb{Z})$.
- $y = \cot(f(x))$ xác định $\Leftrightarrow (f(x) \text{ xác định và } f(x) \neq k\pi (k \in \mathbb{Z}))$.

f. Chú ý: Tập xác định của một số hàm số cơ bản

- $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ có nghĩa khi và chỉ khi $g(x) \neq 0$.
- $y = \sqrt{f(x)}$ có nghĩa khi và chỉ khi $f(x) \geq 0$.
- $y = \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}$ có nghĩa khi và chỉ khi $g(x) > 0$.

1.2. Bài tập

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = 5 \sin x - \sqrt{2} \cos x$

b) $y = \frac{1}{2} \sin(2x-1) - \cos(x^2-2)$

c) $y = \sin \sqrt{2x-4}$

d) $y = \cos \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

e) $y = \sin \frac{1}{x-2} + \cos \sqrt{9-x^2}$

f) $y = \sin \left(\frac{2x}{x-1} \right)$

g) $y = \frac{1}{2 - \cos x}$

h) $y = \sqrt{3-2 \sin x}$

i) $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

$$\text{k) } y = \frac{\sin x}{\cos(x - \pi)}$$

$$\text{l) } y = \frac{\sin x - 2}{\sin 2x}$$

$$\text{m) } y = \frac{\cos(2x - 1)}{\sin x + 1}$$

Bài 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

$$\text{a) } y = \cos\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}{|x| - 1}\right)$$

$$\text{b) } y = \frac{1}{\sqrt{\sin x + 1}}$$

$$\text{c) } y = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + \sin x}{1 - \cos x}}$$

$$\text{d) } y = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\sin x \cdot \cos x}}$$

$$\text{e) } y = \sqrt{\sin x}$$

$$\text{f) } y = \sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}$$

Bài 3. Tìm tập xác định của hàm số:

$$\text{a) } y = \cot x.$$

$$\text{b) } y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{c) } y = \cot\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{d) } y = \frac{1}{\cot x}.$$

$$\text{e) } y = \tan x + \cot x.$$

$$\text{f) } y = \frac{1}{\tan x - 1}.$$

$$\text{g) } y = \tan 3x \cdot \cot 5x.$$

$$\text{h) } y = \sqrt{\frac{1 + \cot^2 x}{1 - \cos 2x}}.$$

$$\text{i) } y = \sqrt{\tan x}.$$

Đáp án:

1a. $D = \mathbb{R}$, 1b. $D = \mathbb{R}$, 1c. $D = [2; +\infty)$, 1d. $D = (-1; 1)$, 1e. $D = [-3; 3] \setminus \{2\}$, 1f. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, 1g. $D = \mathbb{R}$,

1h. $D = \mathbb{R}$, 1i. $D = \mathbb{R}$, 1k. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} (k \in \mathbb{Z})$, 1l. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}\right\} (k \in \mathbb{Z})$, 1m.

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\} (k \in \mathbb{Z}).$$

2a. $D = [0; 2] \setminus \{1\}$, 2b. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\} (k \in \mathbb{Z})$, 2c. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\} (k \in \mathbb{Z})$, 2d.

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\} (k \in \mathbb{Z}), 2e. D = [k2\pi; \pi + k2\pi] (k \in \mathbb{Z}), 2f. D = \left[-\frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{\pi}{3} + k2\pi\right] (k \in \mathbb{Z}).$$

3a. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} (k \in \mathbb{Z})$, 3b. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi\right\} (k \in \mathbb{Z})$, 3c. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi\right\} (k \in \mathbb{Z})$, 3d.

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}\right\} (k \in \mathbb{Z}), 3e. D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}\right\} (k \in \mathbb{Z}), 3f. D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + m\pi\right\} (k, m \in \mathbb{Z}), 3g.$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, m\frac{\pi}{5}\right\} (k, m \in \mathbb{Z}), 3h. D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\} (k, m \in \mathbb{Z}), 3i. D = \left[k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right] (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Chu kỳ của hàm số lượng giác

2.1. Lý thuyết

a. Định nghĩa: - Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại ít nhất một số thực $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$, ta có:

$$\text{i) } x \pm T \in D,$$

$$\text{ii) } f(x \pm T) = f(x).$$

- Số thực T thỏa mãn các điều kiện trên được gọi là chu kỳ của hàm số tuần hoàn $y = f(x)$.

- Nếu hàm số tuần hoàn $y = f(x)$ có chu kỳ nhỏ nhất T_0 ($T_0 > 0$) thì T_0 được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm số tuần hoàn $y = f(x)$.

b. Hàm số sin

- $y = \sin x$: Chu kỳ $T_0 = 2\pi$.

- $y = \sin(ax + b)$ có chu kỳ $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$.

c. Hàm số cosin

- $y = \cos x$: Chu kỳ $T_0 = 2\pi$.
- $y = \cos(ax + b)$ có chu kỳ $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$.

d. Hàm số tang

- $y = \tan x$: Chu kỳ $T_0 = \pi$.
- $y = \tan(ax + b)$ có chu kỳ $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$.

e. Hàm số cotang

- $y = \cot x$: Chu kỳ $T_0 = \pi$.
- $y = \cot(ax + b)$ có chu kỳ $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$.

f. Chú ý: Nếu hàm số $y = f_1(x)$ có chu kỳ T_1 và hàm số $y = f_2(x)$ có chu kỳ T_2 thì hàm số $y = m.f_1(x) \pm n.f_2(x)$ có chu kỳ T là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2 .

2.2. Bài tập

Bài 1. Tìm chu kỳ của các hàm số sau:

a) $y = \sin x$

b) $y = \cos 2x$

c) $y = \tan \frac{x}{3}$

d) $y = \cot(3x - 2)$

e) $y = \cos \frac{2x}{5} + 1$

f) $y = 1 - \cos\left(3x - \frac{\pi}{5}\right)$

g) $y = 2 \tan\left(-4x - \frac{\pi}{2}\right)$

h) $y = \sin^2 x$

i) $y = \sqrt{1 + \cos 2x}$

Bài 2. Tìm chu kỳ của các hàm số sau:

a) $y = \tan x + \cot x$

b) $y = \sin 2x + \cos \frac{x}{2}$

c) $y = \tan x - 2 \cot 3x + 4$

d) $y = \cot x + \cot \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{3}$

e) $y = 2 \sin x \cdot \cos 3x$

f) $y = \cos \frac{3x}{5} - \sin \frac{2x}{7}$

3. Tập giá trị của hàm số lượng giác**3.1. Lý thuyết**

a. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D . Tập $T \subset \mathbb{R}$ được gọi là tập giá trị nếu T thỏa mãn hai điều kiện:

i) Với mọi $x \in D$ kéo theo $y = f(x) \in T$,

ii) Với mỗi $y \in T$, tồn tại $x \in D$ sao cho $y = f(x)$.

b. Hàm số sin

- $y = \sin x$: Tập giá trị $T = [-1; 1]$.

c. Hàm số cosin

- $y = \cos x$: Tập giá trị $T = [-1; 1]$.

d. Hàm số tang

- $y = \tan x$: Tập giá trị $T = \mathbb{R}$.

e. Hàm số cotang

- $y = \cot x$: Tập giá trị $T = \mathbb{R}$.

f. Chú ý: Nếu hàm số $y = f(x)$ có tập giá trị $T = [a; b]$ thì giá trị lớn nhất của hàm số là b ($\max y = b$) và giá trị nhỏ nhất của hàm số là a ($\min y = a$).

3.2. Bài tập

Bài 1. Tìm tập giá trị của hàm số:

a) $y = \sin(x^3 + 3x - 4).$

b) $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

c) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

d) $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

e) $y = 4\sin x + 5$

f) $y = 4 - 3\cos 2x$

g) $y = \sin^2 x + 3$

h) $y = -3\cos^3(2x + 3) + 7$

i) $y = 2\sin x \cos x + 3$

Bài 2. Tìm tập giá trị của hàm số:

a) $y = \frac{\sin x}{\cos(x - \pi)}$

b) $y = \sqrt{\sin x}$

c) $y = \sqrt{\tan x}$

d) $y = \sqrt{2 - \cos x}$

e) $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

f) $y = \sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}$

g) $y = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin x}$

h) $y = \frac{1}{\tan x - 1}$

i) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x + 1}}$

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = \sin(x^3 + 3x - 4)$

b) $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $y = 4\sin x + 5$

d) $y = 4 - 3\cos 2x$

e) $y = \sin^2 x + 3$

f) $y = -3\cos^3(2x + 3) + 7$

g) $y = 2\sin x \cos x + 3$

h) $y = \sqrt{\sin x}$

i) $y = \sqrt{2 - \cos x}$

k) $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

l) $y = \sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}$

m) $y = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin x}.$

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = 4\sin^2 x - 4\sin x + 3$

b) $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$

c) $y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1$

d) $y = \sin x + \cos x$

e) $y = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + 3$

f) $y = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$

4. Tính chẵn, lẻ của hàm số lượng giác**4.1. Lý thuyết****a. Định nghĩa:** Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D .(1). Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số chẵn nếu:i) $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ (D là tập đối xứng),ii) $f(-x) = f(x), \forall x \in D$.(2). Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số lẻ nếu:i) $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ (D là tập đối xứng),ii) $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$.**b. Hàm số sin**

- $y = \sin x$: Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và là hàm số lẻ.

c. Hàm số cosin

- $y = \cos x$: Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và là hàm số chẵn.

d. Hàm số tang

- $y = \tan x$: Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, (k \in \mathbb{Z})$ và là hàm số lẻ.

e. Hàm số cotang

- $y = \cot x$: Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, (k \in \mathbb{Z})$ và là hàm số lẻ.

f. Chú ý: (1). Đồ thị của hàm số chẵn đối xứng qua trục tung, đồ thị của hàm số lẻ đối xứng qua tâm O .(2). Nếu D không là tập đối xứng (Tức là $\exists x \in D$ mà $-x \notin D$), thì ta kết luận hàm số $y = f(x)$ không chẵn, không lẻ.

- (3). Nếu tồn tại $x \in D$ mà $f(-x) \neq f(x)$ và $f(-x) \neq -f(x)$ thì hàm số $y = f(x)$ không chẵn, không lẻ.
- (4). Hàm số chẵn (lẻ) $\pm$ Hàm số chẵn (lẻ) = Hàm số chẵn (lẻ).
- (5). Hàm số chẵn $\cdot$ Hàm số chẵn = Hàm số lẻ $\cdot$ Hàm số lẻ = Hàm số chẵn.
- (6). Hàm số chẵn $\cdot$ Hàm số lẻ = Hàm số chẵn $\cdot$ Hàm số lẻ = Hàm số lẻ.
- (7). Hàm số chẵn $\pm$ Hàm số lẻ = Hàm số lẻ $\pm$ Hàm số chẵn = Hàm số không chẵn, không lẻ.

4.2. Bài tập

Bài 1. Xét tính chẵn – lẻ của các hàm số sau:

- | | | |
|--|------------------------|------------------------------|
| a) $y = \sin 2x$ | b) $y = 2 \cos x + 3$ | c) $y = \sin x + \cos x$ |
| d) $y = \tan x + \cot x$ | e) $y = \sin^4 x$ | f) $y = \sin x \cdot \cos x$ |
| g) $y = \frac{\cos^3 x + 1}{\sin^3 x}$ | h) $y = \tan x $ | i) $y = x \sin 2x$ |
| k) $y = \frac{\sin x}{x+1}$ | l) $y = \cot \sqrt{x}$ | m) $y = \sin(x^2 - 3)$ |

5. Tập đơn điệu của hàm số lượng giác

5.1. Lý thuyết

a. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng D và $(a; b) \subset D$.

- (1). Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên khoảng $(a; b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$ và $x_1 < x_2$, ta có $f(x_1) < f(x_2)$.
- (2). Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$ và $x_1 < x_2$, ta có $f(x_1) > f(x_2)$.

b. Hàm số sin

- $y = \sin x$: Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

c. Hàm số cosin

- $y = \cos x$: Đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

d. Hàm số tang

- $y = \tan x$: Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

e. Hàm số cotang

- $y = \cot x$: Nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

f. Chú ý:

- $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0, \forall x \in (a; b)$.
- $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0, \forall x \in (a; b)$.

5.2. Bài tập

Bài 1. Xét tính đơn điệu (đồng biến, nghịch biến) của các hàm số lượng giác trên khoảng K cho trước:

- | | |
|---|---|
| a) $y = \sin 2x, K = (0; \pi)$ | b) $y = 2 \cos x + 3, K = (0; 2\pi)$ |
| c) $y = 5 - \tan x, K = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ | d) $y = \frac{1}{2} \cot 3x, K = \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ |

e) $y = \sin^2 x - \cos^2 x, K = (0; \pi)$

f) $y = \sin x \cdot \cos x - 3, K = (0; \pi)$

g) $y = \frac{1}{\sin x - 1}, K = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

h) $y = \sqrt{3} \cos x + \sin x, K = (0; 2\pi)$

Đáp án: 1a. $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right): \text{ĐB}, x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right): \text{NB}, x \in \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right): \text{ĐB};$ 1b. $x \in (0; \pi): \text{NB}, x \in (\pi; 2\pi): \text{ĐB};$

1c. $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right): \text{NB};$ 1d. $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right): \text{NB};$ 1e. $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right): \text{ĐB}, x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right): \text{NB};$ 1f. $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right): \text{ĐB},$

$x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right): \text{NB}, x \in \left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right): \text{ĐB};$ 1g. $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right): \text{NB};$ 1h. $x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right): \text{ĐB}, x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right): \text{NB},$

$x \in \left(\frac{7\pi}{6}; 2\pi\right): \text{ĐB}.$

6. Đồ thị của hàm số lượng giác

6.1. Lý thuyết

a. **Định nghĩa:** Các bước vẽ đồ thị hàm số lượng giác:

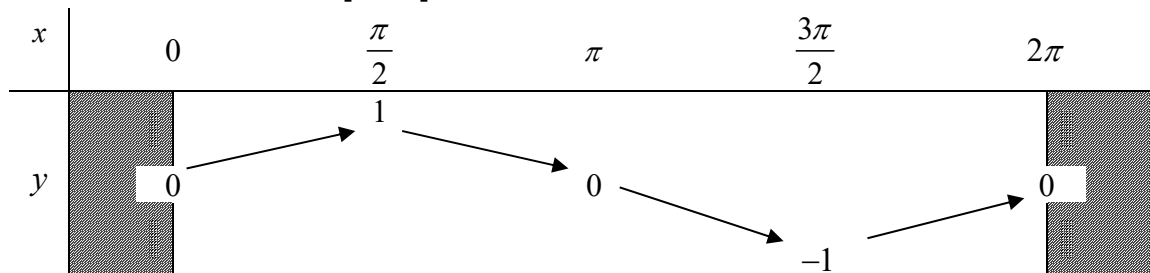
- Tìm tập xác định D của hàm số.
- Tìm tập giá trị
- Tìm chu kỳ T_0 của hàm số.
- Xác định tính chẵn, lẻ của hàm số.
- Lập bảng biến thiên của hàm số trên một đoạn có độ dài bằng chu kỳ T_0 (thường chọn $[0; T_0]$

hoặc $\left[-\frac{T_0}{2}; \frac{T_0}{2}\right]$).

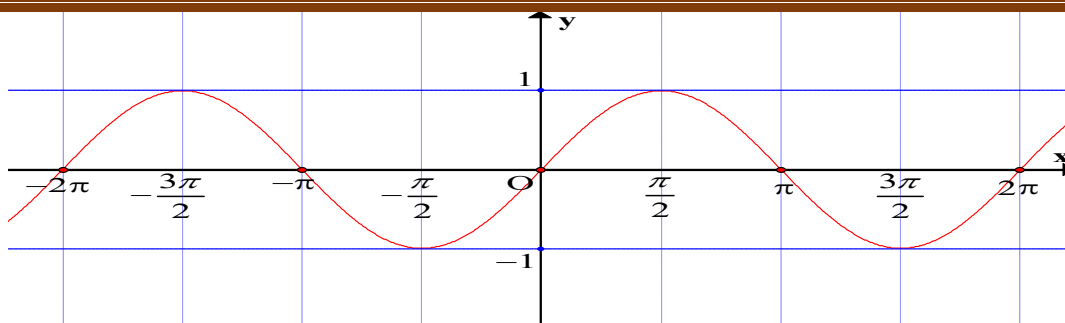
- Vẽ đồ thị trên đoạn có độ dài bằng chu kỳ đã xác định ở trên.
- Suy ra phần đồ thị còn lại qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = k.T_0.\vec{i}$ về bên trái và bên phải song song với trục hoành Ox (với $\vec{i}$ là vectơ đơn vị trên trục Ox).

b. **Hàm số** $y = \sin x$

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị $[-1; 1]$.
- Chu kỳ $T = 2\pi$.
- Bảng biến thiên trên đoạn $[0; 2\pi]$:



- Tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = 2k\pi.\vec{i}$ ta được đồ thị hàm số $y = \sin x$.
- Nhận xét: - Đồ thị là một hàm số lẻ nên nhận gốc toạ độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ và nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.
- Đồ thị:

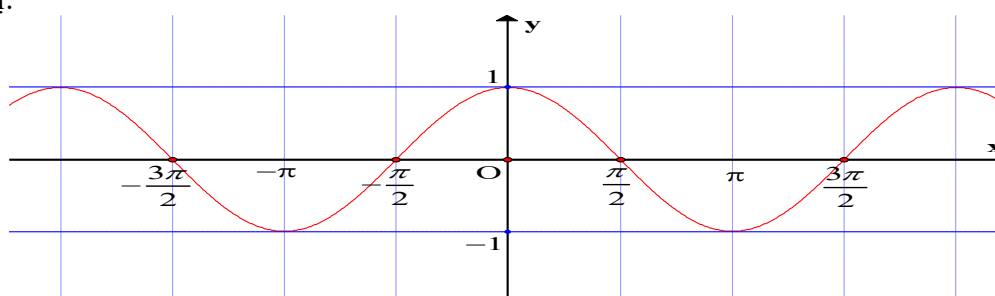


c. Hàm số $y = \cos x$

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị $[-1; 1]$.
- Chu kỳ $T = 2\pi$.
- Bảng biến thiên trên đoạn $[0; 2\pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	1	0	-1	0	1

- Tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = 2k\pi\vec{i}$ ta được đồ thị hàm số $y = \cos x$.
- Nhận xét: - Đồ thị là một hàm số chẵn nên nhận trục tung Oy làm trục đối xứng.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$ và đồng biến trên $(\pi; 2\pi)$.
- Đồ thị:



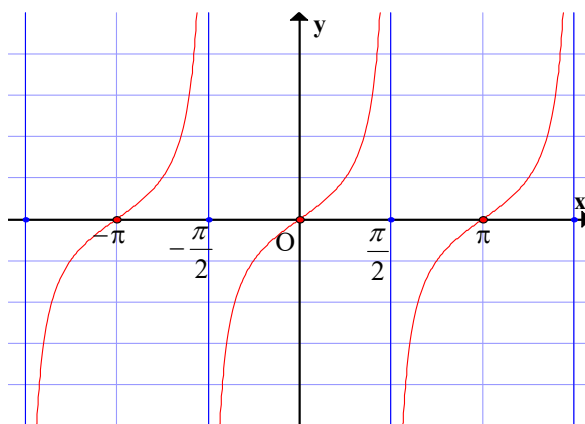
d. Hàm số $y = \tan x$

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, (k \in \mathbb{Z})$.
- Tập giá trị $\mathbb{R}$.
- Chu kỳ $T = \pi$.
- Bảng biến thiên trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$:

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
y	$-\infty$	0	$+\infty$

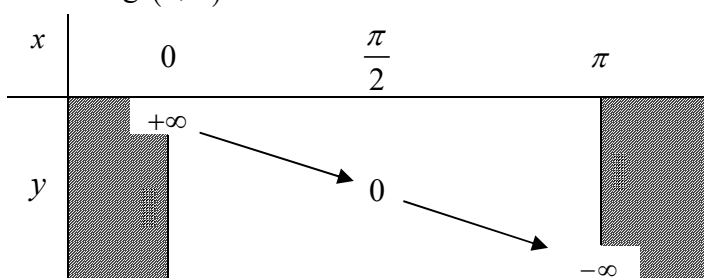
- Tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = k\pi\vec{i}$ ta được đồ thị hàm số $y = \tan x$.
- Nhận xét: - Đồ thị là một hàm số lẻ nên nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

- Đồ thị:

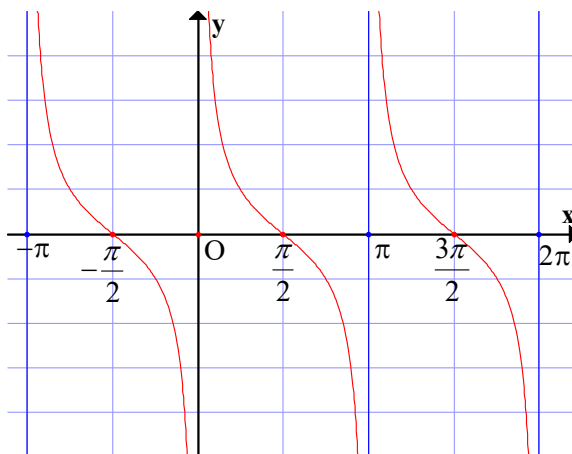


e. Hàm số $y = \cot x$

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, (k \in \mathbb{Z})$.
- Tập giá trị $\mathbb{R}$.
- Chu kỳ $T = \pi$.
- Bảng biến thiên trên khoảng $(0; \pi)$:



- Tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = k\pi\vec{i}$ ta được đồ thị hàm số $y = \cot x$.
- Nhận xét: - Đồ thị là một hàm số lẻ nên nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.
- Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
- Đồ thị:



f. Chú ý: Một số phép biến đổi đồ thị:

- Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $y = f(x) + b$ bằng các tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ lên trên trục hoành b đơn vị nếu $b > 0$ và tịnh tiến xuống phía dưới trục hoành b đơn vị nếu $b < 0$.
- Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $y = f(x + a)$ bằng các tịnh tiến đồ thị $y = f(x)$ qua bên trái của trục hoành a đơn vị nếu $a > 0$ và tịnh tiến qua bên phải trục hoành a đơn vị nếu $a < 0$.
- Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, suy ra đồ thị $y = -f(x)$ bằng cách lấy đối xứng đồ thị $y = f(x)$

Đồ thị hàm số $y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}$ được suy từ đồ thị $y = f(x)$ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị $y = f(x)$ ở phía trên trục hoành và lấy đối xứng phần đồ thị $y = f(x)$ nằm ở phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Bài 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

a) $y = -\sin x$ **b)** $y = \cos 2x$ **c)** $y = \tan x + 1$
d) $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ **e)** $y = 2|\sin x|$ **f)** $y = \tan|x|$

7.1. Tập xác định của hàm số lượng giác

A. $D = (0; +\infty)$. **B.** $D = [0; +\infty)$. **C.** $D = \mathbb{R}$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, (k \in \mathbb{Z})$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}, (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}, (k \in \mathbb{Z})$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, (k \in \mathbb{Z})$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}, (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}, (k \in \mathbb{Z})$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, (k \in \mathbb{Z}).$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2}\right\}, (k \in \mathbb{Z}).$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, (k \in \mathbb{Z}).$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right\}, (k \in \mathbb{Z}).$

A. $D = \mathbb{R}$. **B.** $D = (0; +\infty)$. **C.** $D = (1; +\infty)$. **D.** $D = [1; +\infty)$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus (-1; 1)$. **B.** $D = [-1; 1]$. **C.** $D = [1; +\infty)$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

A. $D = [-2; +\infty)$. **B.** $D = (-2; +\infty)$. **C.** $D = [-1; 1]$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $D = \mathbb{R}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Giáo viên Đặng Thị Oanh - 0949264768 *Page 9*

Bước 1. Điều kiện để hàm số có nghĩa là $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$.

Bước 2. $\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq m\pi \end{cases} (k, m \in \mathbb{Z})$.

Bước 3. $\Leftrightarrow x \neq n\frac{\pi}{2} (n \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ n\frac{\pi}{2} \right\}, (n \in \mathbb{Z})$.

Câu giải của bạn đó đã đúng chưa? Và nếu sai, thì sai bắt đầu từ bước nào?

A. Câu giải đúng. **B.** Sai từ bước 1. **C.** Sai từ bước 2. **D.** Sai từ bước 3.

Câu 10. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan x}{\sin x - 1}$ là:

- A.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}, (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, (k \in \mathbb{Z})$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}, (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \right\}, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 11. Tập xác định của hàm số $y = \tan^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$ là:

- A.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3\pi}{2} + k2\pi \right\}, (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k\pi \right\}, (k \in \mathbb{Z})$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}, (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 12. Tập xác định của hàm số $y = 3 \tan x - 2 \cot x + \frac{1}{x}$ là:

- A.** $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}, (k \in \mathbb{Z})$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \right\}, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 13. Tập xác định của hàm số $y = \cos \left(\frac{|x| - 1}{\sqrt{x+1} - 2} \right)$ là:

- A.** $D = (-1; +\infty) \setminus \{3\}$. **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
C. $D = [-1; +\infty) \setminus \{3\}$. **D.** $D = (1; +\infty)$.

Câu 14. Tập xác định của hàm số $y = \tan(2x - 1)$ là:

- A.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}, (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}, (k \in \mathbb{Z})$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}, (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \right\}, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 15. Hàm số nào sau đây có tập xác định $\mathbb{R}$?

- A.** $y = 2 \cos \sqrt{x}$. **B.** $y = \sin \frac{1}{x}$. **C.** $y = \frac{\sin 2x}{\cos x + 1}$. **D.** $y = \sqrt{\frac{\sin 2x - 3}{\cos x - 2}}$.

Câu 16. Tìm các giá trị của $x \in (-\pi; \pi)$ để hàm số $y = \sqrt{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}$ có nghĩa.

- A. $0 \leq x < \pi$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x < \pi$. C. $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \pi$. D. $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$.

Câu 17. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = \sqrt{2m+1-2\cos x}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \geq 0$. B. $m \geq 1$. C. $m \geq -\frac{1}{2}$. D. $m \geq \frac{1}{2}$.

Câu 18. Tất cả các giá trị m để hàm số $y = \sqrt{\frac{m-1}{m}} - 2\sin 4x$ xác định trên $\mathbb{R}$ là:

- A. $m \leq -1$. B. $-1 \leq m \leq 0$. C. $-1 \leq m < 0$. D. $m \leq -1$ hoặc $m > 0$.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = \frac{\sin 2x}{\sqrt{2m-3\cos x}}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

- A. $m > \frac{3}{2}$. B. $m \geq \frac{3}{2}$. C. $m < \frac{3}{2}$. D. $m \leq \frac{3}{2}$.

Câu 20. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \tan\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, (k \in \mathbb{Z})$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}, (k \in \mathbb{Z})$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, (k \in \mathbb{Z})$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}, (k \in \mathbb{Z})$.

7.2. Tính tuần hoàn của hàm số lượng giác

Câu 1. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn?

- A. $y = \cos^2 x$. B. $y = x \cos x$. C. $y = \cos x^2$. D. $y = x + \cos x$.

Câu 2. Chu kỳ của hàm số $y = \sin(2x-1)$ là:

- A. $T = \frac{\pi}{2}$. B. $T = \pi$. C. $T = 2\pi$. D. $T = 4\pi$.

Câu 3. Chu kỳ của hàm số $y = \cot\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - 3$ là:

- A. $T = -2\pi$. B. $T = \frac{\pi}{2}$. C. $T = \pi$. D. $T = 2\pi$.

Câu 4. Chu kỳ của hàm số $y = \sin^2 x$ là:

- A. $T = \pi$. B. $T = 2\pi$. C. $T = 4\pi$. D. $T = \pi^2$.

Câu 5. Chu kỳ của hàm số $y = \sin x \cdot \cos x + 3$ là:

- A. $T = \pi$. B. $T = 2\pi$. C. $T = 4\pi$. D. $T = 4\pi^2$.

Câu 6. Chu kỳ của hàm số $y = \sin x + \cos x$ là:

- A. $T = 2\pi$. B. $T = 4\pi$. C. $T = \pi$. D. $T = 3\pi$.

Câu 7. Hàm số $y = \tan 2x + \cot \frac{x}{2}$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ:

- A. $T = \frac{\pi}{2}$. B. $T = \pi$. C. $T = \frac{3\pi}{2}$. D. $T = 2\pi$.

Câu 8. Hàm số $y = 2\cos 3x + \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ:

- A. $T = \pi$. B. $T = \frac{2\pi}{3}$. C. $T = 2\pi$. D. $T = 3\pi$.

Câu 9. Hàm số $y = \cos x \cdot \cos 3x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ:

- A. $T = 2\pi$. B. $T = \frac{2\pi}{3}$. C. $T = \frac{4\pi^2}{3}$. D. $T = \pi$.

Câu 10. Hàm số $y = \cos(2x+1) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{x}{m} - 3\right)$ với $m \in \mathbb{N}^*$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 6π . Giá trị của m là:

A. $m = \frac{3}{5}$.

B. $m = 3$.

C. $m = 5$.

D. $m = 6$.

Câu 11. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \tan \frac{x}{2} + \cos \left(\frac{2x}{m} + \frac{\pi}{4} \right)$ ($m \in \mathbb{N}^*$) là hàm tuần hoàn với chu kỳ 6π . Tổng các phần tử của S bằng

A. 3.

B. 6.

C. 9.

D. Không tính được.

Câu 12. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \cot \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \sin \left(\frac{2x}{m} - \frac{\pi}{3} \right)$ ($m \in \mathbb{N}^*$) là hàm tuần hoàn với chu kỳ 6π . Tổng các phần tử của S bằng

A. 2.

B. 6.

C. 8.

D. 12.

7.3. Tập giá trị của hàm số lượng giác

Câu 1. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = \sin 2x$.

A. $T = [-2; 2]$.

B. $T = [-1; 1]$.

C. $T = \mathbb{R}$.

D. $T = (-1; 1)$.

Câu 2. Hàm số $y = 4 \cos^2 2x + 3$ có tập giá trị là:

A. $T = [3; 7]$.

B. $T = \{7\}$.

C. $T = [0; 3]$.

D. $T = [-1; 7]$.

Câu 3. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = \sqrt{5 \sin^2 x + 4}$.

A. $T = [4; 9]$.

B. $T = [2; 3]$.

C. $T = \{3\}$.

D. $T = \mathbb{R}$.

Câu 4. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 1 + 2|\sin 2x|$.

A. $T = [-1; 3]$.

B. $T = [-3; 5]$.

C. $T = [1; 3]$.

D. $T = [1; 5]$.

Câu 5. Hàm số nào sau đây có tập xác định và tập giá trị đều là $\mathbb{R}$?

A. $y = \sin \sqrt{x}$.

B. $y = \tan 2x$.

C. $y = x \cos \frac{1}{x}$.

D. $y = x + \sin x$.

Câu 6. Xét bốn mệnh đề sau:

(1): Trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = \sin x$ có tập giá trị là $[-1; 1]$.

(2): Trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, hàm số $y = \sin x$ có tập giá trị là $[0; 1]$.

(3): Trên $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$, hàm số $y = \sin x$ có tập giá trị là $\left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

(4): Trên $[0; \pi)$, hàm số $y = \sin x$ có tập giá trị là $[0; 1]$.

Số mệnh đề đúng là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị biến x để hàm số $y = 2\sqrt{\cos x} + 1$ đạt giá nhỏ nhất.

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

B. $x = k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

D. $x = \pi + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Câu 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3 - \sqrt{2 \cos x - \sqrt{3}}$ là:

A. $\max y = 5 + \sqrt{3}$.

B. $\max y = 3 + \sqrt{3}$.

C. $\max y = 3$.

D. $\max y = 1 + \sqrt{3}$.

Câu 9. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 \sin \left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{4} \right)$ bằng bao nhiêu?

A. -3.

B. -2.

C. -1.

D. 0.

Câu 10. Giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sin x - \cos x$ là:

A. $m = -\sqrt{2}; M = \sqrt{2}$.

B. $m = \sqrt{2}; M = -\sqrt{2}$.

C. $m = -2; M = 2$.

D. $m = 0; M = 2$.

Câu 11. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin^2 x + 3$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ là:

- A. 5. B. 3. C. $\frac{7}{2}$. D. $\frac{9}{2}$.

Câu 12. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2}{\cos x + 1}$ là:

- A. $\min y = 0$. B. $\min y = 1$. C. $\min y = 2$. D. Không xác định.

Câu 13. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2}{1 + \tan^2 x}$ là:

- A. $\min y = 0$. B. $\min y = 1$. C. $\min y = 2$. D. Không xác định.

Câu 14. Tập giá trị của hàm số $y = \sin x + \cos x$ là:

- A. $T = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. B. $T = [-2; 2]$. C. $T = \mathbb{R}$. D. $T = [-1; 1]$.

Câu 15. Tập giá trị của hàm số $y = \tan x + \cot x$ là:

- A. $T = \mathbb{R}$. B. $T = [-2; 2]$. C. $T = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. D. $T = \mathbb{R} \setminus (-2; 2)$.

Câu 16. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^2 x + 2\cos x + 2$ là:

- A. 0. B. 4. C. $\sqrt{5} + 2$. D. 5.

Câu 17. Hàm số $y = \left| \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \right|$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[0; \frac{3\pi}{4}\right]$ khi nào?

- A. $x = 0$. B. $x = 1$. C. $x = \frac{\pi}{4}$. D. $x = \frac{3\pi}{4}$.

Câu 18. Xét hàm số $y = |\sin x|$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

- A. Không có GTLN. B. GTNN là -1 . C. GTLN là 1. D. GTNN là 1.

Câu 19. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = |3\sin x + 4\cos x|$. Giá trị của $M + m$ là:

- A. 0. B. 1. C. 5. D. 7.

Câu 20. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\cos x + 3$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$. Giá trị của $M.m$ là:

- A. -5 . B. -3 . C. $5(\sqrt{3} + 3)$. D. 20.

Câu 21. Tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{4\cos x - 3\sin x + 4}$ là:

- A. $[0; 3]$. B. $[-1; 3]$. C. $[0; \sqrt{11}]$. D. $[-\sqrt{3}; \sqrt{11}]$.

Câu 22. Gọi T là tập giá trị của hàm số $y = 3 - 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x$. Số phần tử nguyên của T là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 23. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \tan^2 x - 2\tan x + 3$.

- A. $\min y = 2$. B. $\min y = 3$. C. $\min y = 5$. D. Không xác định được.

Câu 24. Cho hàm số $y = 2\sin^2 x - \cos 2x$. Khi đó tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng:

- A. 2. B. 3. C. 4. D. $2 + \sqrt{2}$.

Câu 25. Hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ có tập giá trị trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$ bằng:

- A. $T = [-1; 0]$. B. $T = [0; 1]$. C. $T = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right]$. D. $T = \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

- Câu 26.** Với giá trị nào sau đây của m thì hàm số $y = m\sqrt{\sin 2x}$ và hàm số $y = \cos x - 1$ có cùng tập giá trị?
- A. $m = -2$. B. $m = -1$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.
- Câu 27.** Hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị âm với mọi x thuộc khoảng nào trong các khoảng sau?
- A. $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. B. $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. C. $(0; \pi)$. D. $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
- Câu 28.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4\sin x - 5$ là:
- A. -9 . B. -8 . C. 0 . D. 9 .
- Câu 29.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 1 - 2\cos x - \cos^2 x$ là:
- A. 1 . B. 2 . C. 3 . D. 4 .
- Câu 30.** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 1 - 2\sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$.
- A. $m = -1$. B. $m = 0$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = 2$.
- Câu 31.** Hàm số $y = 5 + 4\sin 2x \cdot \cos 2x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?
- A. 3 . B. 4 . C. 5 . D. 6 .
- Câu 32.** Hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?
- A. 1 . B. 2 . C. 3 . D. 4 .
- Câu 33.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \cos x + \sqrt{2 - \cos^2 x}$ là:
- A. $\max y = 1$. B. $\max y = \frac{1}{3}$. C. $\max y = 2$. D. $\max y = \sqrt{2}$.
- Câu 34.** Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4\cos^2 x + \cos x - 1$ là:
- A. 5 . B. $\frac{43}{16}$. C. $\frac{47}{16}$. D. $\frac{81}{16}$.
- Câu 35.** Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t của năm 2018 được cho bởi một hàm số $y = 4\sin\left[\frac{\pi}{178}(t - 60)\right] + 10$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $t \geq 0$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?
- A. 28 tháng 5. B. 29 tháng 5. C. 30 tháng 5. D. 31 tháng 5.
- Câu 36.** Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$.
- Mực nước của kênh cao nhất khi:
- A. $t = 13$ (giờ). B. $t = 14$ (giờ). C. $t = 15$ (giờ). D. $t = 16$ (giờ).
- Câu 37.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x \geq 2m - 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- A. $m \leq 0$. B. $m \geq 0$. C. $m \leq 2$. D. $m \geq 2$.
- Câu 38.** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{4 - 5\sin(5x - 2)} < m + 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- A. $m > 0$. B. $m > 1$. C. $m > 2$. D. $m > 3$.
- Câu 39.** Cho hàm số $y = \sin^2 x - 4(m - 2)\cos x + 2m$ và $A = \max y + \min y$. Với $\frac{3}{2} \leq m \leq 2$ thì giá trị của A theo tham số m là:
- A. $A = 4m^2 - 16m + 25$. B. $A = 4m$.
C. $A = 4m^2 - 8m + 9$. D. $A = 4m + 1$.

7.4. Tính chẵn lẻ của hàm số lượng giác

Câu 1. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $y = \tan x$ là hàm số lẻ. B. $y = \cot x$ là hàm số lẻ.
C. $y = \sin x$ là hàm số lẻ. D. $y = \cos x$ là hàm số lẻ.

Câu 2. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = \sin 2x$. B. $y = \cos 3x$. C. $y = \tan 4x$. D. $y = \cot 5x$.

Câu 3. Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

- A. $y = \sin 3x$. B. $y = x \cdot \cos x$. C. $y = \cos x \cdot \tan 2x$. D. $y = \frac{\tan x}{\sin x}$.

Câu 4. Cho các hàm số $y = \cot 2x$, $y = \cos(x + \pi)$, $y = 1 - \sin x$, $y = \tan^{2018} x$. Số hàm số chẵn là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 5. Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$ và $g(x) = \tan 3x$, chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số lẻ.
B. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.
C. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.
D. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 6. Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

- A. $y = \sin^2 x$. B. $y = \sin x \cdot \cos x$. C. $y = \sin x \cdot \tan x$. D. $y = \sin x \cdot \cot x$.

Câu 7. Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

- A. $y = 2x + \cos x$. B. $y = \cos 3x$. C. $y = x^2 \cdot \sin(x + 3)$. D. $y = \frac{\cos^3 x}{x^3}$.

Câu 8. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số không chẵn, không lẻ?

- A. $y = \frac{\sin x + \tan x}{2 \cos^3 x}$. B. $y = \tan x - \cot x$. C. $y = \sin 2x + \cos 2x$. D. $y = \sqrt{2 - \sin^2 3x}$.

Câu 9. Có bao nhiêu hàm số lẻ trong các hàm số sau: $y = x \cdot \sin x$, $y = \frac{\cos x}{x}$, $y = \tan(x^2 - 3)$ và

$$y = \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 10. Hàm số nào sau đây có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

- A. $y = |\sin x|$. B. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. C. $y = x \cdot \sin x$. D. $y = \cot x + 1$.

Câu 11. Hàm số nào sau đây có đồ thị đối xứng qua trục Oy ?

- A. $y = |\sin x - 3|$. B. $y = x^2 \cdot \sin x$. C. $y = \frac{x^2}{\cos x}$. D. $y = x^2 + x \cdot \cos x + 2$.

Câu 12. Cho hàm số $y = m + \cos x \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)$ (với $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-1; 5)$). Tổng tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho là hàm số chẵn là:

- A. 6. B. 8. C. 10. D. 12.

Câu 13. Gọi m, n lần lượt là số các hàm số chẵn và số các hàm số lẻ trong các hàm số dưới đây:

(I). $y = 3 \sin x + x$, (II). $y = 2 \cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)$,

(III). $y = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$, (IV). $y = x \cdot \tan(x - \pi)$.

Giá trị của $m - n$ là:

- A. 2. B. 1. C. 0. D. -1.

Câu 14. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \tan x - 2(m^2 - 1)\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ là hàm số lẻ. Tổng tất cả các phần tử của S bằng:

A. 0. B. 1. C. 2. D. Không xác định được.

Câu 15. Cho hàm số $y = \begin{cases} (3a-1)\sin x + b\cos x, & \text{khi } x < 0 \\ a\sin x + (3-2b)\cos x, & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số a và b để hàm số đã cho là hàm số lẻ.

A. $\forall a, b = 0$. B. $\forall a, b = \frac{3}{2}$. C. $a = \frac{1}{2}, b = 3$. D. Không có a, b thỏa mãn.

7.5. Tính đơn điệu của hàm số lượng giác

Câu 1. Cho hàm số $y = \sin x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.
 D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Câu 2. Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(-\pi; 0)$?

- A. $y = \cos x$. B. $y = \sin x$. C. $y = \tan x$. D. $y = \cot x$.

Câu 3. Với $x \in \left(\frac{31\pi}{4}; \frac{33\pi}{4}\right)$, mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến. B. Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến.
 C. Hàm số $y = \tan x$ nghịch biến. D. Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến.

Câu 4. Cho hai hàm số $f(x) = -\sin 2x$, $g(x) = -1 + \cos 2x$. Với $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Cả hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ đều nghịch biến.
 B. Cả hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ đều đồng biến.
 C. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến, hàm số $y = g(x)$ đồng biến.
 D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến, hàm số $y = g(x)$ nghịch biến.

Câu 5. Hàm số $y = \sin 2x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. B. $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. C. $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. D. $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Câu 6. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$?

- A. $y = -\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$. B. $y = \cot\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.
 C. $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$. D. $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Câu 7. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. B. $(\pi; 2\pi)$. C. $(-\pi; \pi)$. D. $(0; \pi)$.

Câu 8. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng?

- A. $(-6\pi; -5\pi)$. **B.** $\left(\frac{19\pi}{2}; 10\pi\right)$. C. $\left(-\frac{7\pi}{2}; -3\pi\right)$. **D.** $\left(7\pi; \frac{15\pi}{2}\right)$.

Câu 9. Các khoảng đồng biến của hàm số $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là:

- A. $\left(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{2\pi}{3} + k\pi\right), (k \in \mathbb{Z})$. **B.** $\left(\frac{5\pi}{12} + k\pi; \frac{11\pi}{12} + k\pi\right), (k \in \mathbb{Z})$.
C. $\left(-\frac{\pi}{3} + k\pi; \frac{\pi}{6} + k\pi\right), (k \in \mathbb{Z})$. **D.** $\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{5\pi}{6} + k\pi\right), (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 10. Trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, hai hàm số nào sau đây cùng đồng biến?

- A. $y = \sin x$ và $y = \cos x$. **B.** $y = \sin x$ và $y = \tan x$.
 C. $y = \sin x$ và $y = \cot x$. **D.** $y = \cos x$ và $y = \cot x$.

Câu 11. Trên đoạn $[0; 2\pi]$ hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên những khoảng nào?

- A. $(0; \pi)$. **B.** $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. C. $(\pi; 2\pi)$. **D.** $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Câu 12. Với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hàm số $y = \sin x$ tăng. **B.** Hàm số $y = \cot x$ giảm.
 C. Hàm số $y = \tan x$ tăng. **D.** Hàm số $y = \cos x$ tăng.

7.6. Đồ thị của hàm số lượng giác

Câu 1. Đồ thị hàm số $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ được suy ra từ đồ thị (C) của hàm số $y = \cos x$ bằng cách:

- A. Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
B. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
 C. Tịnh tiến (C) lên trên một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
D. Tịnh tiến (C) xuống dưới một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

Câu 2. Đồ thị hàm số $y = \sin x$ được suy ra từ đồ thị (C) của hàm số $y = \cos x$ bằng cách:

- A. Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
B. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
 C. Tịnh tiến (C) lên trên một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.
D. Tịnh tiến (C) xuống dưới một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$.

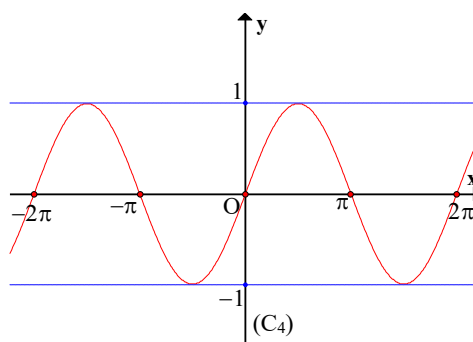
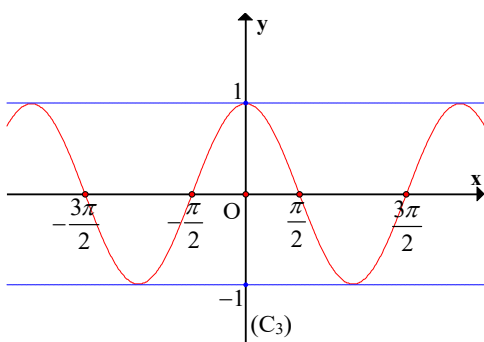
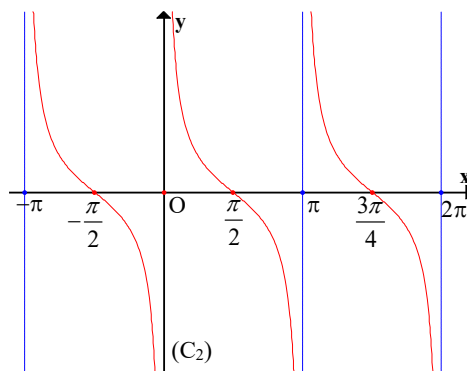
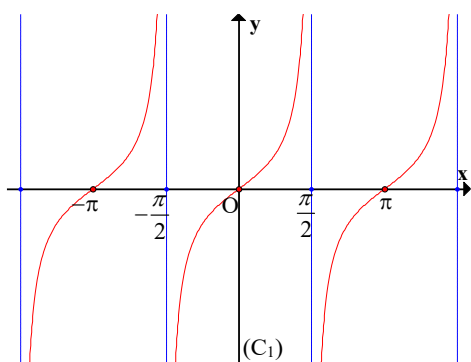
Câu 3. Đồ thị hàm số $y = \sin x$ được suy ra từ đồ thị (C) của hàm số $y = \cos x + 1$ bằng cách:

- A. Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và lên trên 1 đơn vị.
B. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và lên trên 1 đơn vị.

C. Tịnh tiến (C) qua trái một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và xuống dưới 1 đơn vị.

D. Tịnh tiến (C) qua phải một đoạn có độ dài là $\frac{\pi}{2}$ và xuống dưới 1 đơn vị.

Câu 4. Đồ thị của hàm số $y = \tan x$ là:



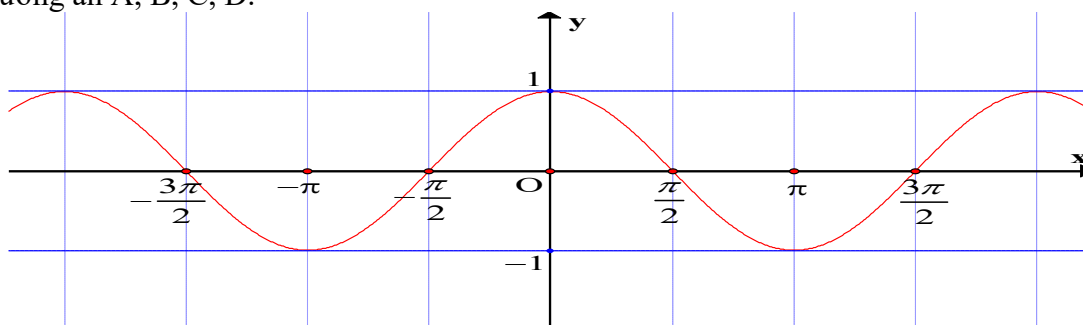
A. (C₁).

B. (C₂).

C. (C₃).

D. (C₄).

Câu 5. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

A. $y = 1 + \sin 2x$.

B. $y = \cos x$.

C. $y = -\sin x$.

D. $y = -\cos x$.

Câu 6. Điểm nào sau đây nằm trên đồ thị của hàm số $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}$?

A. $O(0; 0)$.

B. $M(0; -\sqrt{3})$.

C. $N\left(\frac{2\pi}{3}; \sqrt{3}\right)$.

D. $P\left(-\sqrt{3}; -\frac{\pi}{3}\right)$.

Câu 7. Đồ thị hàm số $y = \cos x$ nhận được từ đồ thị hàm số $y = \sin x$ qua phép tịnh tiến theo vectơ

A. $\vec{u} = \left(0; -\frac{\pi}{2}\right)$.

B. $\vec{u} = \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

C. $\vec{u} = \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

D. $\vec{u} = \left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Câu 8. Đồ thị hàm số $y = -\cot\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - 1$ nhận được từ đồ thị hàm số $y = \cot x$ qua phép tịnh tiến theo vectơ

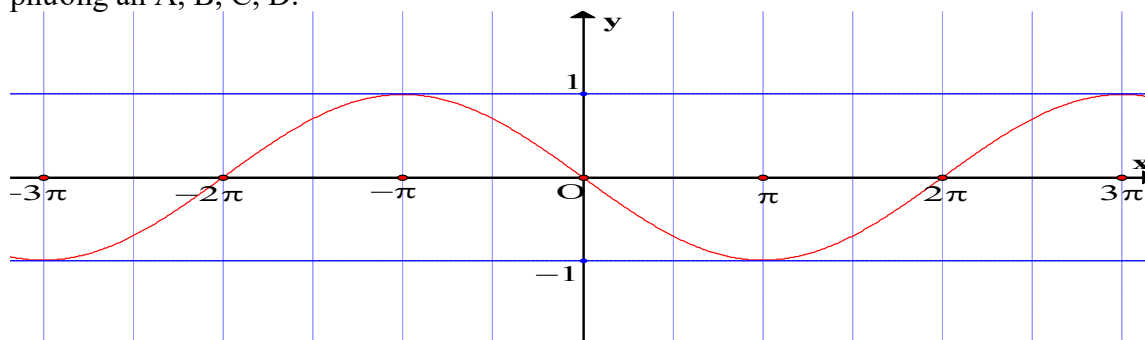
A. $\vec{u} = \left(-\frac{\pi}{3}; -1\right)$.

B. $\vec{u} = \left(-\frac{\pi}{3}; 1\right)$.

C. $\vec{u} = \left(\frac{\pi}{3}; -1\right)$.

D. $\vec{u} = \left(\frac{\pi}{3}; 1\right)$.

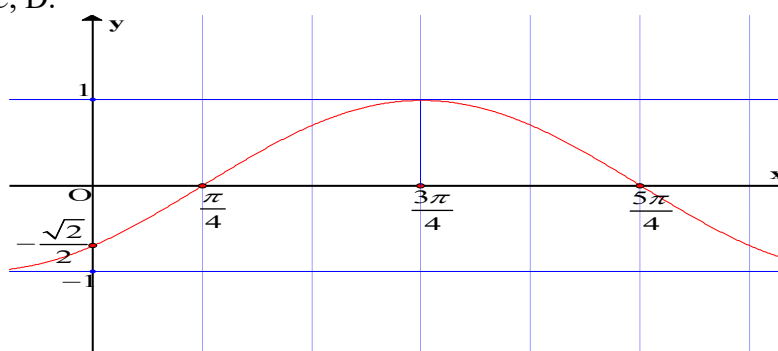
Câu 9. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.** $y = \sin\left(-\frac{x}{2}\right)$. **B.** $y = \sin\frac{x}{2}$. **C.** $y = \sin\frac{x}{4}$. **D.** $y = \cos\frac{x}{2}$.

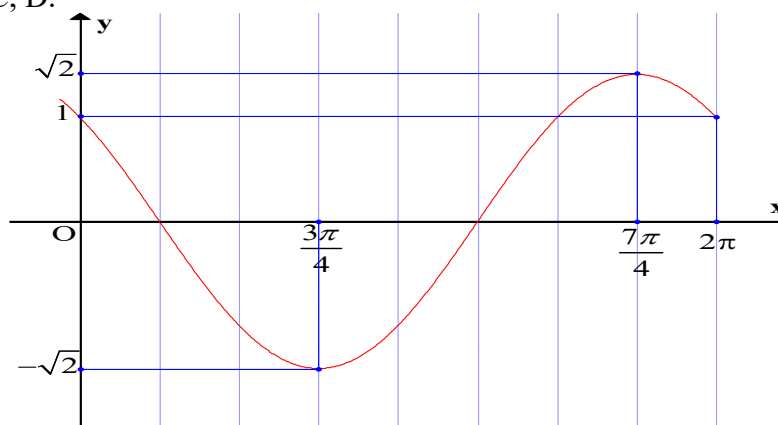
Câu 10. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.** $y = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$. **B.** $y = \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$.
C. $y = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$. **D.** $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

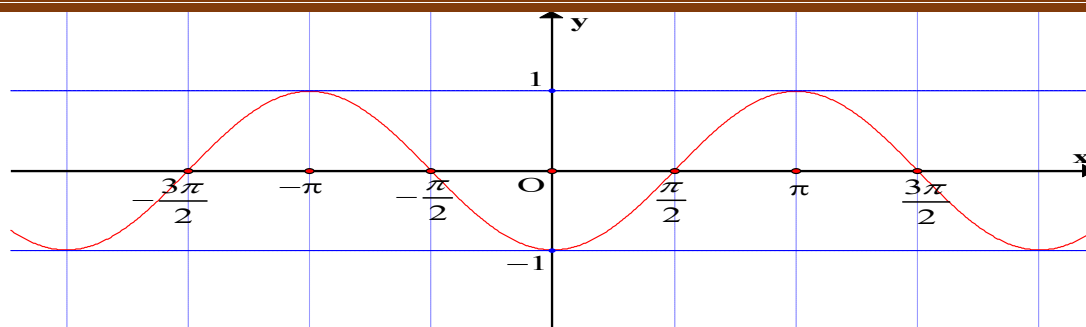
Câu 11. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.** $y = -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. **B.** $y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
C. $y = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$. **D.** $y = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

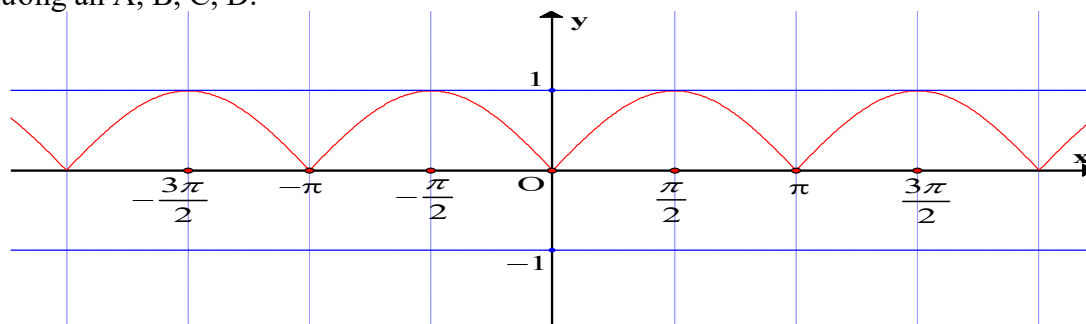
Câu 12. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \cos x$. B. $y = |\cos x|$. **C. $y = -\cos x$.** D. $y = \cos 2x$.

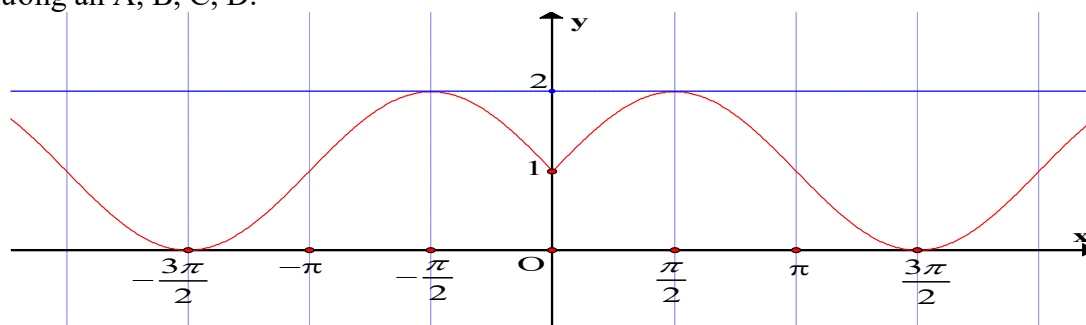
Câu 13. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \sin x$. **B. $y = |\sin x|$.** C. $y = \sin |x|$. D. $y = -\sin x$.

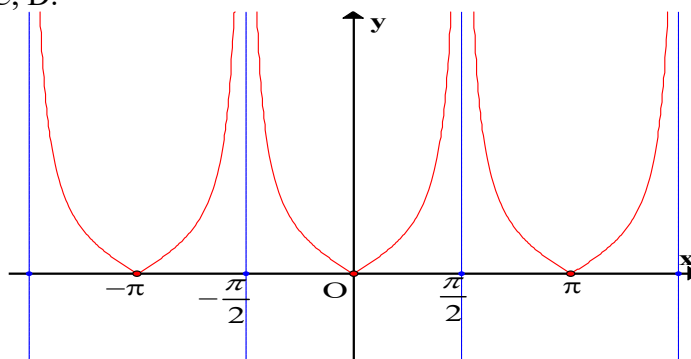
Câu 14. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = 1 + \sin |x|$.** B. $y = 1 + \sin x$. C. $y = 1 + |\sin x|$. D. $y = 1 + \cos x$.

Câu 15. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A. $y = \tan x$. B. $y = |\cot x|$. **C. $y = |\tan x|$.** D. $y = \cot x$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

1. Phương trình $\sin x = \sin a$

1.1. Lý thuyết

$$a. \sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + k2\pi \\ x = \pi - a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$b. \sin x = a (-1 \leq a \leq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$c. \sin u = -\sin v \Leftrightarrow \sin u = \sin(-v).$$

$$d. \sin u = \cos v \Leftrightarrow \sin u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right).$$

$$e. \sin u = -\cos v \Leftrightarrow \sin u = \sin\left(v - \frac{\pi}{2}\right).$$

$$f. a \sin x + b = 0 \text{ (Phương trình bậc nhất đối với hàm số sin)} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{b}{a}.$$

g. **Chú ý:** Các trường hợp đặc biệt:

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$
- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$
- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$
- $\sin x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

1.2. Bài tập

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$a) \sin x = 0$$

$$b) \sin 2x = 1$$

$$c) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$d) \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$$

$$e) \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f) \sin x = -\frac{1}{3}$$

$$g) \sin 2x = 2$$

$$h) \sin(2x - 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$i) \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

$$a) \sin x = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$b) \sin 3x = \cos x$$

$$c) \sin(x - 120^\circ) = -\cos 2x$$

$$d) \sin 3x + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0$$

$$e) \sin^2 x = 1$$

$$f) \sin x^2 = 1$$

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số sau có nghiệm:

$$a) \sin 2x = 2m$$

$$b) \sin x + 1 = -3m + 7$$

$$c) \sin x = \frac{m}{m+1}$$

$$d) m \sin 3x = 2 - m$$

$$e) m \sin(x - 3) = m^2 - m$$

$$f) \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = m^2 - 2m$$

2. Phương trình $\cos x = \cos a$

2.1. Lý thuyết

$$a. \cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + k2\pi \\ x = -a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$b. \cos x = a (-1 \leq a \leq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$c. \cos u = -\cos v \Leftrightarrow \cos u = \cos(\pi - v).$$

$$d. \cos u = \sin v \Leftrightarrow \cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right).$$

$$e. \cos u = -\sin v \Leftrightarrow \cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} + v\right).$$

$$f. a \cos x + b = 0 \text{ (Phương trình bậc nhất đối với hàm số cosin)} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{b}{a}.$$

g. **Chú ý:** Các trường hợp đặc biệt

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$
- $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$
- $\cos x = \pm 1 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

2.1. Bài tập

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$a) \cos x = 0$$

$$b) \cos 2x = 1$$

$$c) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$d) \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$$

$$e) \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f) \cos x = -\frac{1}{3}$$

$$g) \cos 2x = 2$$

$$h) \cos(2x - 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$i) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

$$a) \cos x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$b) \cos 3x = \sin x$$

$$c) \cos(x - 120^\circ) = -\cos 2x$$

$$d) \cos 3x + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0$$

$$e) |\cos x| = 1$$

$$f) \cos(x^2 - 2x) = 1$$

Bài 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số sau có nghiệm:

$$a) \cos 2x = m$$

$$b) \cos x + 1 = -2m + 7$$

$$c) \cos(x + 2) = \frac{-m}{m - 1}$$

$$d) m \cos(3x - 120^\circ) = m + 2$$

$$e) m \cos 3x = m^2 + m$$

$$f) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = m^2 + 2m$$

3. Phương trình $\tan x = \tan a$

3.1. Lý thuyết

$$a. \tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$b. \tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$c. \tan u = -\tan v \Leftrightarrow \tan u = \tan(-v).$$

$$d. \tan u = \cot v \Leftrightarrow \tan u = \tan\left(\frac{\pi}{2} - v\right).$$

$$e. \tan u = -\cot v \Leftrightarrow \tan u = \tan\left(\frac{\pi}{2} + v\right).$$

$$f. a \tan x + b = 0 \text{ (Phương trình bậc nhất đối với hàm số tang)} \Leftrightarrow \tan x = -\frac{b}{a}.$$

g. **Chú ý:** Các trường hợp đặc biệt

- $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

- $\tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

3.1. Bài tập

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\tan x = \tan 30^\circ$	b) $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	c) $\tan x = -1$
d) $\tan 2x = -\sqrt{3}$	e) $\tan\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$	f) $\tan(3-x) = 0$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\tan(2x + 45^\circ) = \tan 30^\circ$	b) $\tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -\tan 3x$	c) $\tan 2x = \cot\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
d) $\tan(2x+1) + \cot x = 0$	e) $\tan^2 x = 1$	f) $\tan(x^2 + 2x + 3) = \tan 2$

4. Phương trình $\cot x = \cot a$

4.1. Lý thuyết

- a. $\cot x = \cot a \Leftrightarrow x = a + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
- b. $\cot x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} a + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
- c. $\cot u = -\cot v \Leftrightarrow \cot u = \cot(-v)$.
- d. $\cot u = \tan v \Leftrightarrow \cot u = \cot\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$.
- e. $\cot u = -\tan v \Leftrightarrow \cot u = \cot\left(\frac{\pi}{2} + v\right)$.

f. $a \cot x + b = 0$ (Phương trình bậc nhất đối với hàm số cotang) $\Leftrightarrow \cot x = -\frac{b}{a}$.

g. **Chú ý:** Các trường hợp đặc biệt

- $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
- $\cot x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

4.1. Bài tập

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\cot x = \cot 30^\circ$	b) $\cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$	c) $\cot x = -1$
d) $\cot 2x = -\sqrt{3}$	e) $\cot\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$	f) $\cot(3-x) = 0$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\cot(2x + 45^\circ) = \cot 30^\circ$	b) $\cot\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -\cot 3x$	c) $\cot 2x = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
d) $\cot(2x+1) + \tan x = 0$	e) $ \cot x = 1$	f) $\cot x^2 = 1$

4. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Phương trình $\sin x = \sin \alpha (\alpha \in \mathbb{R})$ có các nghiệm là:

- | | |
|--|--|
| A. $\begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$ | B. $\begin{cases} x = \alpha + k\pi \\ x = -\alpha + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$ |
| C. $\begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$ | D. $\begin{cases} x = \alpha + k\pi \\ x = \pi - \alpha + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$ |

Câu 2. Phương trình $\tan x = \tan \varphi^0$ có các nghiệm là:

A. $x = \varphi + k.180^0, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \varphi + k.360^0, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -\varphi + k.180^0, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -\varphi + k.360^0, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3. Phương trình $\cos x = 0$ có các nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 4. Phương trình nào sau đây có cùng tập nghiệm với phương trình $\cos x = 0$?

A. $\sin x = 1$.

B. $\sin x = -1$.

C. $\tan x = 0$.

D. $\cot x = 0$.

Câu 5. Phương trình $\cot 2x = \sqrt{3}$ có các nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 6. Phương trình $\cos^2 x = 1$ có các nghiệm là:

A. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 7. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ với $0 \leq x \leq 2\pi$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 8. Cho phương trình $(2m^2 - 5m + 2)\cos 2x = 2m - 1$. Tìm tập hợp M các giá trị của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm.

A. $M = (2; 3]$.

B. $M = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

C. $M = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

D. $M = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

Câu 9. Trên $(0; \pi)$, phương trình $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 10. Phương trình $\cot x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$

A. Có nghiệm là $\frac{\pi}{3}$.

B. Có nghiệm là $\frac{\pi}{9}$.

C. Không có nghiệm.

D. Có nghiệm là $-\frac{\pi}{3}$.

Câu 11. Phương trình $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = 0$ có các nghiệm là:

A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{k\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 12. Phương trình $\frac{\cot x - \sqrt{3}}{\sin x - \frac{1}{2}} = 0$ có các nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{7\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 13. Với giá trị nào của m thì phương trình $\sin 2x + m = m \sin 2x$ vô nghiệm?

A. $m = 1$.

B. $m > \frac{1}{2}$.

C. $m \leq \frac{1}{2}$.

D. $m = \frac{1}{2}$.

Câu 14. Phương trình nào dưới đây có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình $\cos 2x = 0$

A. $\sin 2x = 1$.

B. $\sin^2 x = 1$.

C. $\tan x = 1$.

D. $\tan^2 x = 1$.

Câu 15. Số nghiệm của phương trình $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ thuộc khoảng $(\pi; 8\pi)$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 16. Tổng các nghiệm của phương trình $2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ trên $(-\pi; \pi)$ là

- A. $\frac{2\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{4\pi}{3}$. D. $\frac{7\pi}{3}$.

Câu 17. Phương trình $\cos x - m = 0$ vô nghiệm khi

- A. $m > 1$. B. $m < -1$. C. $-1 \leq m \leq 1$. D. $m > 1$ hoặc $m < -1$.

Câu 18. Phương trình $\sin 3x = \cos x$ có các nghiệm là:

- A. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = k\frac{\pi}{2}; x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 19. Gọi X là tập nghiệm của phương trình $\cos\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \sin x$. Khi đó

- A. $290^\circ \in X$. B. $250^\circ \in X$. C. $240^\circ \in X$. D. $220^\circ \in X$.

Câu 20. Phương trình $\sin x \cdot \cos x = 0$ là:

- A. $x = k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 21. Phương trình $\tan x + \sqrt{3} = 0$ có các nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 22. Gọi T là tập nghiệm của phương trình $\tan x \cdot \cot x = 1$. Giá trị của T là:

- A. $T = \mathbb{R}$. B. $T = \mathbb{R} \setminus \{k\pi (k \in \mathbb{Z})\}$.
C. $T = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})\right\}$. D. $T = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})\right\}$.

Câu 23. Phương trình $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = -\sqrt{3}$ tương đương với phương trình:

- A. $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$. B. $\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$.
C. $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$. D. $\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3}$.

Câu 24. Phương trình $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$ có các nghiệm là:

- A. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 25. Phương trình $\tan x = \cot x$ có các nghiệm là:

- A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 26. Số vị trí điểm biểu diễn của phương trình $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ trên đường tròn lượng giác là

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 6.

Câu 27. Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số $y = \sin 3x$ và $y = \sin x$ bằng nhau?

A. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Câu 28. Gọi x_0 là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\frac{2\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

B. $x_0 \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

C. $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

D. $x_0 \in \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$.

Câu 29. Trên đoạn $[-2017; 2017]$, phương trình $(\sin x + 1)(\sin x - \sqrt{2}) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 1926.

B. 642.

C. 641.

D. 1284.

Câu 30. Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ bằng:

A. $-\frac{\pi}{6}$.

B. $-\frac{5\pi}{18}$.

C. $-\frac{\pi}{18}$.

D. $\frac{\pi}{6}$.

Câu 31. Gọi x_0 là nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cos(5x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $x_0 \in (-90^\circ; -60^\circ)$.

B. $x_0 \in (-60^\circ; -45^\circ)$.

C. $x_0 \in (-45^\circ; -30^\circ)$.

D. $x_0 \in (-30^\circ; 0^\circ)$.

Câu 32. Trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$, phương trình $\cos x = \frac{13}{14}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 33. Tổng các nghiệm của phương trình $\tan(2x - 15^\circ) = 1$ trên khoảng $(-90^\circ; 90^\circ)$ bằng:

A. 0° .

B. -30° .

C. 30° .

D. -60° .

Câu 34. Cho $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$. Hãy tính $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

B. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

C. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 35. Phương trình nào dưới đây có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình $\tan x = 1$?

A. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\cot x = 1$.

D. $\cot^2 x = 1$.

Câu 36. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos x = m + 1$ có nghiệm?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

Câu 37. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2$ có nghiệm. Tính tổng T của các phân tử trong S .

A. $T = 6$.

B. $T = 3$.

C. $T = -2$.

D. $T = -6$.

Câu 38. Cho phương trình $(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) \cos x = 0$. Kết luận nào sau đây về phương trình là đúng?

A. Có 1 nghiệm.

B. Có 2 nghiệm.

C. Vô nghiệm.

D. Có vô số nghiệm.

Câu 39. Phương trình $\cos(\sin x) = 1$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(-2\pi; 2\pi)$?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 40. Phương trình $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ có các nghiệm có dạng $x = \alpha + k\pi$; $x = \beta + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Khi đó giá trị của α, β là:

A. $-\frac{\pi^2}{9}$.

B. $-\frac{20\pi^2}{9}$.

C. $\frac{4\pi^2}{9}$.

D. $\frac{2\pi^2}{9}$.

§3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP**1. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác****1.1. Lý thuyết**

a. Định nghĩa: Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng

$$at^2 + bt + c = 0.$$

trong đó a, b, c là các hằng số ($a \neq 0$) và t là một hàm số lượng giác.

b. Mở rộng: $at^3 + bt^2 + ct + d = 0$ (Với t là một hàm số lượng giác).

d. Phương pháp giải: (Đặt ẩn biểu thức lượng giác làm ẩn phụ và đặt điều kiện cho ẩn phụ (nếu có))

- $t = \sin x, t = \cos x$: điều kiện $-1 \leq t \leq 1$.
- $t = |\sin x|, t = |\cos x|$: điều kiện $0 \leq t \leq 1$.
- $t = \sin^2 x, t = \cos^2 x$: điều kiện $0 \leq t \leq 1$.
- $t = \tan x, t = \cot x$: không có điều kiện đối với biến t .

1.2. Bài tập

Bài 1. Giải các phương trình sau:

- | | |
|--|---|
| a) $2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0$ | b) $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$ |
| c) $\tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$ | d) $4\sin^2 x - 2(\sqrt{3} + 1)\sin x + \sqrt{3} = 0$ |
| e) $4\cos^5 x \cdot \sin x - 4\sin^5 x \cdot \cos x = \sin^2 4x$ | f) $4\cos^3 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x$ |
| g) $\tan^2 x + \cot^2 x = 2$ | h) $\cot^2 2x - 4\cot 2x + 3 = 0$ |

Bài 2. Giải các phương trình sau:

- | | |
|---|---|
| a) $4\sin^2 3x + 2(\sqrt{3} + 1)\cos 3x - \sqrt{3} = 4$ | b) $\cos 2x + 9\cos x + 5 = 0$ |
| c) $4\cos^2(2 - 6x) + 16\cos^2(1 - 3x) = 13$ | d) $\frac{1}{\cos^2 x} - (1 + \sqrt{3})\tan x - 1 + \sqrt{3} = 0$ |
| e) $\frac{3}{\cos x} + \tan^2 x = 9$ | f) $9 - 13\cos x + \frac{4}{1 + \tan^2 x} = 0$ |
| g) $\frac{1}{\sin^2 x} = \cot x + 3$ | h) $\frac{1}{\cos^2 x} + 3\cot^2 x = 5$ |
| i) $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 \frac{x}{2}$ | k) $2\cos 2x + \tan x = 1$ |

Bài 3. Cho phương trình $\sin x + \frac{\sin 3x + \cos 3x}{1 + 2\sin 2x} = \frac{3 + \cos 2x}{5}$. Tìm các nghiệm của phương trình thuộc khoảng $(0; 2\pi)$.

Bài 4. Cho phương trình $\cos 5x \cdot \cos x = \cos 4x \cdot \cos 2x + 3\cos 2x + 1$. Tìm các nghiệm của phương trình thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$.

Bài 5. Giải phương trình $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{4}$.

2. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$ **2.1. Lý thuyết**

a. Định nghĩa: Phương trình bậc nhất đối với một hàm số $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình có dạng $a\sin x + b\cos x = c$.

b. Mở rộng: $a\sin u + b\cos u = c$ (Với $u = u(x)$).

c. Điều kiện có nghiệm: $a^2 + b^2 \geq c^2$.

d. Phương pháp giải: (Sử dụng công thức cộng để biến đổi phương trình về dạng cơ bản)

B1. Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, ta được: $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

B2. Đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \alpha \rightarrow \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \alpha$ (Hoặc ngược lại, tùy vào mong muốn đưa về sin hay cosin của bài toán).

B3. Phương trình trở thành: $\sin x \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

2.2. Bài tập

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$

b) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $\sqrt{3} \cos 3x + \sin 3x = \sqrt{2}$

d) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 5x$

e) $\sqrt{3} \sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = 1$

f) $(\sqrt{3}-1)\sin x + (\sqrt{3}+1)\cos x + \sqrt{3}-1 = 0$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $3 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 3$

b) $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$

c) $8 \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$

d) $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

e) $\sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 13x$

f) $(3 \cos x - 4 \sin x + 6)^2 - 9 \cos x + 12 \sin x - 16 = 0$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $3 \sin x - 2 \cos x = 2$

b) $\sqrt{3} \cos x + 4 \sin x - \sqrt{3} = 0$

c) $\cos x + 4 \sin x = -1$

d) $2 \sin x - 5 \cos x = 5$

e) $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

f) $\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x + 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{2}$

Bài 4. Tìm m để phương trình $(m+2)\sin x + m \cos x = 2$ có nghiệm.

Bài 5. Tìm m để phương trình $(2m-1)\sin x + (m-1)\cos x = m-3$ vô nghiệm.

3. Phương trình đẳng cấp bậc hai

3.1. Lý thuyết

a. Định nghĩa: Phương trình đẳng cấp bậc hai đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng $a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = 0$ (1).

b. Mở rộng: $a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = d$.

c. Phương pháp giải:

Cách 1: Dùng công thức hạ bậc $\left(\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x\right)$:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow a(1-\cos 2x) + b \sin 2x + c(1+\cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow b \sin 2x + (c-a) \cos 2x = -a-c$$

(Đây là phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$).

Cách 2:

B1. Kiểm tra $\cos x = 0$ có thỏa mãn phương trình (1) không? (Nếu $a, c \neq 0$ thì $\cos x = 0$ không thỏa mãn phương trình (1)).

B2. Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế của phương trình (1) cho $\cos^2 x$ ta được:

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0.$$

(Đây là phương trình bậc hai đối với hàm số $y = \tan x$).

d. Chú ý: $a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = d \Leftrightarrow a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

3.2. Bài tập

Bài 1. Giải các phương trình sau:

- a) $2 \sin^2 x + (1 - \sqrt{3}) \sin x \cdot \cos x + (1 - \sqrt{3}) \cos^2 x = 1$
- b) $3 \sin^2 x + 8 \sin x \cdot \cos x + (8\sqrt{3} - 9) \cos^2 x = 0$
- c) $4 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x - 2 \cos^2 x = 4$
- d) $\sin^2 x + \sin 2x - 2 \cos^2 x = \frac{1}{2}$
- e) $2 \sin^2 x + (3 + \sqrt{3}) \sin x \cdot \cos x + (\sqrt{3} - 1) \cos^2 x = -1$
- f) $5 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x + 3 \cos^2 x = 2$
- g) $3 \sin^2 x + 8 \sin x \cdot \cos x + 4 \cos^2 x = 0$
- h) $(\sqrt{2} - 1) \sin^2 x + \sin 2x + (\sqrt{2} + 1) \cos^2 x = \sqrt{2}$
- i) $(\sqrt{3} + 1) \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x + (\sqrt{3} - 1) \cos^2 x = 0$
- j) $3 \cos^4 x - 4 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x = 0$
- k) $\cos^2 x + 3 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x - 1 = 0$
- l) $2 \cos^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 0$
- m) $2 \cos^2 x - 3 \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 0$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

- a) $\sin^3 x + 2 \sin x \cdot \cos^2 x - 3 \cos^3 x = 0$
- b) $\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$
- c) $\sin^3 x - 5 \sin^2 x \cdot \cos x - 3 \sin x \cdot \cos^2 x + 3 \cos^3 x = 0$

Bài 3. Tìm m để phương trình $(m+1)\sin^2 x - \sin 2x + 2\cos^2 x = 1$ có nghiệm.**Bài 4.** Tìm m để phương trình $(3m-2)\sin^2 x - (5m-2)\sin 2x + 3(2m+1)\cos^2 x = 0$ vô nghiệm.**4. Phương trình đối xứng****4.1. Lý thuyết****a. Định nghĩa:** Phương trình đối xứng đối với $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình có dạng :

$$a(\sin x \pm \cos x) + b \sin x \cdot \cos x + c = 0 \quad (1).$$

b. Mở rộng: $a|\sin x \pm \cos x| + b \sin x \cdot \cos x + c = 0$.**c. Phương pháp giải:**

- Đặt $t = \sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right)$, điều kiện $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ ($|t| \leq \sqrt{2}$).

$$\Rightarrow t^2 = 1 \pm 2 \sin x \cdot \cos x \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \pm \frac{1}{2}(t^2 - 1).$$

- Thay vào phương trình đã cho, ta được phương trình bậc hai theo t .
- Giải phương trình này tìm t thỏa mãn $|t| \leq \sqrt{2}$. Suy ra x .

d. Chú ý:

- Với phương trình $a|\sin x \pm \cos x| + b \sin x \cdot \cos x + c = 0$.

$$\text{Đặt } t = |\sin x \pm \cos x| = \sqrt{2} \left| \cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right) \right|, \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \pm \frac{1}{2}(t^2 - 1).$$

- $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
- $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

4.2. Bài tập**Bài 1.** Giải các phương trình sau:

a) $2 \sin 2x - 3\sqrt{3}(\sin x + \cos x) + 8 = 0$

b) $2(\sin x + \cos x) + 2 \sin 2x = 2$

c) $3(\sin x + \cos x) + 2 \sin 2x = -3$

d) $(1 - \sqrt{2})(1 + \sin x + \cos x) = \sin 2x$

e) $\sin x + \cos x - 4 \sin x \cdot \cos x - 1 = 0$

f) $(1 + \sqrt{2})(\sin x + \cos x) - \sin 2x = 1 + \sqrt{2}$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 2x - 4(\cos x - \sin x) = 4$

b) $5 \sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$

c) $(1 - \sqrt{2})(1 + \sin x - \cos x) = \sin 2x$

d) $\cos x - \sin x + 3 \sin 2x - 1 = 0$

e) $\sin 2x + \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

f) $(\sin x - \cos x)^2 - (\sqrt{2} + 1)(\sin x - \cos x) + \sqrt{2} = 0$

5. Phương trình dạng khác**Bài 1.** Giải các phương trình sau:

a) $\sin^2 x = \sin^2 3x$

b) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$

c) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$

d) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$

b) $\cos^4 x + 2 \sin^6 x = \cos 2x$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $1 + 2 \sin x \cdot \cos x = \sin x + 2 \cos x$

b) $\sin x(\sin x - \cos x) - 1 = 0$

c) $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos 2x$

d) $\sin 2x = 1 + \sqrt{2} \cos x + \cos 2x$

e) $\sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$

f) $(2 \sin x - 1)(2 \cos 2x + 2 \sin x + 1) = 3 - 4 \cos^2 x$

g) $(\sin x - \sin 2x)(\sin x + \sin 2x) = \sin^2 3x$

h) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sqrt{2}(\cos x + \cos 2x + \cos 3x)$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $2 \cos x \cdot \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$

b) $2 \sin x \cdot \cos 2x + 1 + 2 \cos 2x + \sin x = 0$

c) $3 \cos x - \cos 3x + 2 \cos^2 x = 2 \sin x \cdot \sin 2x$

d) $\cos 5x \cdot \cos x = \cos 4x \cdot \cos 2x + 3 \cos^2 x + 1$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

b) $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$

c) $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$

d) $\sin 7x + \cos^2 2x = \sin^2 2x + \sin x$

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $\sin^3 x + \cos^3 x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin 3x$

b) $1 + \sin 2x + 2 \cos 3x(\sin x + \cos x) = 2 \sin x + 2 \cos 3x + \cos 2x$

6. Bài tập trắc nghiệm**Câu 1.** Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\frac{5\pi}{6} \in S$.

B. $\frac{11\pi}{6} \in S$.

C. $\frac{13\pi}{6} \notin S$.

D. $-\frac{13\pi}{6} \notin S$.

Câu 2. Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$ trên đường tròn lượng giác là?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Câu 3. Trên đoạn $[0; 2018\pi]$, phương trình $\sqrt{3} \cot x - 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 6339.

B. 6340.

C. 2017.

D. 2018.

Câu 4. Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình $4 \cos^2 x = 1$?

A. $\cos x = \frac{1}{2}$.

B. $\sin^2 x = \frac{1}{4}$.

C. $\cot^2 x = 3$.

D. $\tan^2 x = 3$.

Câu 5. Phương trình $4\sin^2 x = 3$ có các nghiệm là:

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{4\pi}{3} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{6} \\ x \neq l\pi \end{cases}, (k, l \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} \\ x \neq l\pi \end{cases}, (k, l \in \mathbb{Z}).$

Câu 6. Phương trình nào sau đây vô nghiệm:

A. $\sin x - \cos x = \sqrt{3}$.

B. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 1$.

D. $3 \sin x + 4 \cos x = 5$.

Câu 7. Các nghiệm của phương trình $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 0$ là:

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 8. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $\sin x - \cos x = m$ có nghiệm?

A. $-2 \leq m \leq 2$.

B. $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$.

C. $m = 0$.

D. $m \geq \sqrt{2}$ hoặc $m \leq -\sqrt{2}$.

Câu 9. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $m \sin x - 3 \cos x = 5$ vô nghiệm?

A. $-4 < m < 4$.

B. $m > 8$ hoặc $m < 2$.

C. $m > 4$ hoặc $m < -4$.

D. $m > \sqrt{34}$ hoặc $m < -\sqrt{34}$.

Câu 10. Phương trình $\sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x = -1$ tương đương với phương trình nào sau đây:

A. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

B. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

C. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

D. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

Câu 11. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $5 \cos x - m \sin x = m + 1$ có nghiệm?

A. $\forall m \in \mathbb{R}$.

B. $m \leq 12$.

C. $m \geq 12$.

D. $m \leq 24$.

Câu 12. Cho phương trình $m \sin x - \sqrt{1-3m} \cos x = m - 2$. Tìm m để phương trình có nghiệm.

A. $\frac{1}{3} \leq m \leq 3$.

B. $m \leq \frac{1}{3}$.

C. $m \geq 3$.

D. Không có giá trị nào của m .

Câu 13. Phương trình $\sin^2 x - 4 \sin x \cdot \cos x + 3 \cos^2 x = 0$ có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $(\tan x - 1)(\tan x + 3) = 0$.

B. $(\tan x + 1)(\tan x + 3) = 0$.

C. $(\tan x - 1)(\tan x - 3) = 0$.

D. $(\tan x + 1)(\tan x - 3) = 0$.

Câu 14. Phương trình $\sin^2 x - 4 \sin x \cdot \cos x + 4 \cos^2 x = 5$ có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $2 \sin x - \cos x = 0$.

B. $2 \sin x + \cos x = 0$.

C. $2 \cos x - \sin x = 0$.

D. $2 \cos x + \sin x = 0$.

Câu 15. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $m \sin^2 x + \sin 2x - \cos^2 x = m - 1$ có nghiệm?

A. $\forall m \in \mathbb{R}$.

B. $m \geq -1$.

C. $m \geq 1$.

D. $m \geq 0$.

Câu 16. Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $6(\sin x - \cos x) - \sin x \cdot \cos x + 6 = 0$ trên đường tròn lượng giác là?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

- Câu 17.** Cho phương trình $3(\sin x + \cos x) + 2\sin 2x + 3 = 0$. Đặt $t = (\sin x + \cos x)$, ta được phương trình nào dưới đây?
- A. $t^2 + 3t + 2 = 0$. B. $2t^2 + 3t + 1 = 0$. C. $2t^2 - 3t - 5 = 0$. D. $t^2 - 3t - 4 = 0$.
- Câu 18.** Gọi S là tập tất cả các nghiệm của phương trình $\sqrt{x-x^2} \sin 2017x = 0$. Số phần tử của S là:
- A. 642. B. 643. C. 644. D. 645.
- Câu 19.** Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất theo $\sin x$ và $\cos x$?
- A. $\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$. B. $\sin 2x - \cos x = 0$.
C. $2\sin x + 3\cos x = 1$. D. $2\cos x + 3\sin 3x = -1$.
- Câu 20.** Trong các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm?
- A. $2\cos x - 3 = 0$. B. $3\sin 2x - \sqrt{10} = 0$.
C. $\cos^2 x - \cos x - 6 = 0$. D. $3\sin x + 4\cos x = 5$.
- Câu 21.** Phương trình $1 + \cos x + \cos^2 x + \cos 3x - \sin^2 x = 0$ tương đương với phương trình:
- A. $\cos x(\cos x + \cos 3x) = 0$. B. $\cos x(\cos x + \cos 2x) = 0$.
C. $\cos x(\cos x - \cos 2x) = 0$. D. $\cos x(\cos x - \cos 3x) = 0$.
- Câu 22.** Số nghiệm thuộc nửa khoảng $\left[\frac{\pi}{14}; \frac{69\pi}{10}\right)$ của phương trình $2\sin 3x(1 - 4\sin^2 x) = 0$ là:
- A. 34. B. 40. C. 41. D. 46.
- Câu 23.** Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $\sin x \cdot \cos x = 1 - \sin^2 x$ trên đường tròn lượng giác là?
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 24.** Phương trình $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1$ có các nghiệm là:
- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}. \\ x = -k\pi \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}. \\ x = k\pi \end{cases}$
C. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = k\frac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}. \\ x = k2\pi \end{cases}$
- Câu 25.** Phương trình $\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x \cdot \cos 2x$ tương đương với phương trình:
- A. $\sin x(2\sin x - 1) = 0$. B. $\sin x(2\sin x + 1) = 0$.
C. $\sin x(\sin x - 1) = 0$. D. $\sin x(\sin x + 1) = 0$.
- Câu 26.** Phương trình $2\sin x + \cot x = 1 + 2\sin 2x$ tương đương với phương trình:
- A. $\begin{cases} 2\sin x = -1 \\ \sin x - \cos x - 2\sin x \cos x = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 2\sin x = -1 \\ \sin x + \cos x - 2\sin x \cos x = 0 \end{cases}$
C. $\begin{cases} 2\sin x = 1 \\ \sin x + \cos x - 2\sin x \cos x = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2\sin x = 1 \\ \sin x - \cos x - 2\sin x \cos x = 0 \end{cases}$
- Câu 27.** Phương trình $\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \sqrt{3}$ tương đương với phương trình:
- A. $\tan x = \sqrt{3}$. B. $\tan 2x = \sqrt{3}$. C. $\tan 3x = \sqrt{3}$. D. $\tan 6x = \sqrt{3}$.
- Câu 28.** Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\cos 2x - \sin 2x = 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $\frac{\pi}{4} \in S$. B. $\frac{\pi}{2} \in S$. C. $\frac{3\pi}{4} \in S$. D. $\frac{5\pi}{4} \in S$.
- Câu 29.** Số nghiệm của phương trình $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sqrt{3}$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là:
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 30. Tính tổng T các nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2} + \sin^2 x$ trên khoảng $(0; 2\pi)$.

- A. $T = \frac{7\pi}{8}$. B. $T = \frac{21\pi}{8}$. C. $T = \frac{11\pi}{4}$. D. $T = \frac{3\pi}{4}$.

Câu 31. Tìm nghiệm dương nhỏ nhất x_0 của phương trình $3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x$.

- A. $x_0 = \frac{\pi}{2}$. B. $x_0 = \frac{\pi}{18}$. C. $x_0 = \frac{\pi}{24}$. D. $x_0 = \frac{\pi}{54}$.

Câu 32. Số nghiệm của phương trình $\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = 2\sin 7x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 33. Gọi x_0 là nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\sin 9x + \sqrt{3}\cos 7x = \sin 7x + \sqrt{3}\cos 9x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{12}; 0\right)$. B. $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{12}\right]$. C. $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}\right]$. D. $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]$.

Câu 34. Biến đổi phương trình $\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$ về dạng $\sin(ax+b) = \sin(cx+d)$ với b, d thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Tính $b+d$.

- A. $b+d = \frac{\pi}{12}$. B. $b+d = \frac{\pi}{4}$. C. $b+d = -\frac{\pi}{3}$. D. $b+d = \frac{\pi}{2}$.

Câu 35. Hàm số $y = \frac{2\sin 2x + \cos 2x}{\sin 2x - \cos 2x + 3}$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 36. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để phương trình

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = m \text{ vô nghiệm?}$$

- A. 18. B. 19. C. 20. D. 21.

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos x + \sin x = \sqrt{2}(m^2 + 1)$ vô nghiệm.

- A. $m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. B. $m \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
C. $m \in (-\infty; +\infty)$. D. $m \in [-1; 1]$.

Câu 38. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$ để phương trình

$$(m+1)\sin^2 x - \sin 2x + \cos 2x = 0 \text{ có nghiệm?}$$

- A. 4037. B. 4036. C. 2019. D. 2020.

Câu 39. Hỏi trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, phương trình $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 40. Cho phương trình $\cot^2 3x - 3\cot 3x + 2 = 0$. Đặt $t = \cot 3x$, ta được phương trình nào sau đây?

- A. $t^2 - 3t + 2 = 0$. B. $3t^2 - 9t + 2 = 0$. C. $t^2 - 9t + 2 = 0$. D. $t^2 - 6t + 2 = 0$.

Câu 41. Số nghiệm của phương trình $4\sin^2 2x - 2(1 + \sqrt{2})\sin 2x + \sqrt{2} = 0$ trên $(0; \pi)$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 42. Hỏi $x = \frac{7\pi}{3}$ là nghiệm của phương trình nào sau đây?

- A. $2\sin x - \sqrt{3} = 0$. B. $2\sin x + \sqrt{3} = 0$. C. $2\cos x - \sqrt{3} = 0$. D. $2\cos x + \sqrt{3} = 0$.

Câu 43. Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$ trên đường tròn lượng

giác là?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 44. Hỏi trên đoạn $[0; 2018\pi]$, phương trình $\sqrt{3}\cot x - 3 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. 6339. B. 6340. C. 2017. D. 2018.

Câu 45. Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $2\cos^2 x + 5\cos x + 3 = 0$ trên đường tròn lượng giác là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 46. Số nghiệm của phương trình $\sin^2 2x - \cos 2x + 1 = 0$ trên đoạn $[-\pi; 4\pi]$ là:

- A. 2. B. 4. C. 6. D. 8.

Câu 47. Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $2\sin^2 \frac{x}{4} - 3\cos \frac{x}{4} = 0$ trên đoạn $[0; 8\pi]$.

- A. $T = 0$. B. $T = 4\pi$. C. $T = 8\pi$. D. $T = 16\pi$.

Câu 48. Số nghiệm của phương trình $\frac{1}{\sin^2 x} - (\sqrt{3} - 1)\cot x - (\sqrt{3} + 1) = 0$ trên khoảng $(0; \pi)$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 49. Cho phương trình $\cos x + \cos \frac{x}{2} + 1 = 0$. Nếu đặt $t = \cos \frac{x}{2}$, ta được phương trình nào sau đây?

- A. $2t^2 + t = 0$. B. $-2t^2 + t + 1 = 0$. C. $2t^2 + t - 1 = 0$. D. $-2t^2 + t = 0$.

Câu 50. Cho phương trình $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{5}{2}$. Nếu đặt $t = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$, ta được phương trình nào sau đây?

- A. $2t^2 - 4t + \frac{3}{2} = 0$. B. $2t^2 + 4t + \frac{3}{2} = 0$. C. $-2t^2 - 4t + \frac{3}{2} = 0$. D. $2t^2 + 4t - \frac{3}{2} = 0$.

Câu 51. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\tan x + m\cot x = 8$ có nghiệm.

- A. $m > 16$. B. $m < 16$. C. $m \leq 16$. D. $m \geq 16$.

Câu 52. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\cos 2x - (2m + 1)\cos x + m + 1 = 0$ có nghiệm trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

- A. $-1 \leq m \leq 0$. B. $-1 \leq m < 0$. C. $-1 < m \leq 0$. D. $-1 < m < 0$.

Câu 53. Biết rằng khi $m = m_0$ thì phương trình $2\sin^2 x - (5m + 1)\sin x + 2m^2 + 2m = 0$ có đúng 5 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 3\pi\right)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $m \in \left[-3; -\frac{1}{2}\right)$. B. $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. C. $m \in \left[\frac{1}{2}; 1\right)$. D. $m \in [1; +\infty)$.

Câu 54. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $2\cos^2 3x + (3 - 2m)\cos 3x + m - 2 = 0$ có đúng 3 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$.

- A. $1 < m < 2$. B. $1 < m \leq 2$. C. $1 \leq m < 2$. D. $1 \leq m \leq 2$.

Câu 55. Giải phương trình $\sin^2 x - (\sqrt{3} + 1)\sin x \cdot \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 56. Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình

$$\sin^2 x - (\sqrt{3} + 1) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = \sqrt{3}.$$

$$\text{A. } \sin x \left(\tan x - \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right) = 0.$$

$$\text{B. } (\cos x - 1) \left(\tan x - \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \right) = 0.$$

$$\text{C. } (\cos x - 1) (\tan x - 2 - \sqrt{3}) = 0.$$

$$\text{D. } (\cos^2 x - 1) (\tan x + 2 + \sqrt{3}) = 0.$$

Câu 57. Phương trình nào dưới đây có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = 1$?

$$\text{A. } \cos x (\cot^2 x - 3) = 0.$$

$$\text{B. } (\sin x - 1) (\cot x - \sqrt{3}) = 0.$$

$$\text{C. } \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \left[\tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - 2 - \sqrt{3} \right] = 0.$$

$$\text{D. } \left[\cos^2 \left(x + \frac{\pi}{2} \right) - 1 \right] (\tan x - \sqrt{3}) = 0.$$

Câu 58. Cho phương trình $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 1 = 0$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $x = k\pi$ không là nghiệm của phương trình.

B. Nếu chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ thì ta được phương trình $\tan^2 x - 3 \tan x + 2 = 0$.

C. Nếu chia hai vế của phương trình cho $\sin^2 x$ thì ta được phương trình $2 \cot^2 x + 3 \cot x + 1 = 0$.

D. Phương trình đã cho tương đương với phương trình $\cos 2x - 3 \sin 2x + 3 = 0$.

Câu 59. Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình $\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 5$ trên đường tròn lượng giác là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 60. Số nghiệm của phương trình $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = 0$ trên khoảng $(-2\pi; 2\pi)$ là:

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 8.

Câu 61. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ để phương trình

$$11 \sin^2 x + (m - 2) \sin 2x + 3 \cos^2 x = 2 \text{ có nghiệm?}$$

A. 6.

B. 15.

C. 16.

D. 21.

Câu 62. Tìm điều kiện để phương trình $a \sin^2 x + a \sin x \cos x + b \cos^2 x = 0$ với $a \neq 0$ có nghiệm.

$$\text{A. } a \geq 4b.$$

$$\text{B. } a \leq -4b.$$

$$\text{C. } \frac{4b}{a} \leq 1.$$

$$\text{D. } \left| \frac{4b}{a} \right| \leq 1.$$

Câu 63. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin x \cos x - \sin x - \cos x + m = 0$ có nghiệm?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 64. Từ phương trình $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2} \sin 2x$, ta tìm được $\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ có giá trị bằng:

A. 1.

$$\text{B. } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{C. } -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{D. } \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 65. Từ phương trình $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan x + \cot x$, ta tìm được $\cos x$ có giá trị bằng:

A. 1.

B. -1.

$$\text{C. } -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{D. } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 66. Hỏi trên đoạn $[0; 2018\pi]$, phương trình $|\sin x - \cos x| + 4 \sin 2x = 1$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 4037.

B. 4036.

C. 2018.

D. 2019.

Câu 67. Cho x thỏa mãn $2 \sin 2x - 3\sqrt{6}|\sin x + \cos x| + 8 = 0$. Tính $\sin 2x$.

$$\text{A. } \sin 2x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{B. } \sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{C. } \sin 2x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{D. } \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 68. Nếu $(1 + \sin x)(1 + \cos x) = 2$ thì $\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$ bằng bao nhiêu?

- A. 1. B. -1. C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 69. Từ phương trình $(1+\sqrt{3})(\cos x + \sin x) - 2\sin x \cos x - \sqrt{3} - 1 = 0$, nếu ta đặt $t = \sin x + \cos x$ thì giá trị của t nhận được là:

- A. $t = 1$ hoặc $t = \sqrt{2}$. B. $t = 1$ hoặc $t = \sqrt{3}$.
C. $t = 1$. D. $t = \sqrt{3}$.

Câu 70. Cho x thỏa mãn $6(\sin x - \cos x) + \sin x \cos x + 6 = 0$. Tính $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$. B. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.
C. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 71. Cho x thỏa mãn phương trình $\sin 2x + \sin x - \cos x = 1$. Tính $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ hoặc $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$. B. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ hoặc $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
C. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ hoặc $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$. D. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ hoặc $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 72. Từ phương trình $5\sin 2x - 16(\sin x - \cos x) + 16 = 0$, ta tìm được $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ có giá trị bằng:

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. 1. D. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 73. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x + 1$ lần lượt là M, m . Khi đó tổng $M + m$ bằng:

- A. $2 + \sqrt{3}$. B. -3. C. 2. D. 4.

Câu 74. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (\sin x - \cos x)^2 + 2\cos 2x + 3\sin x \cos x$ lần lượt là M, m . Khi đó tổng $M + m$ bằng:

- A. 2. B. $\sqrt{17}$. C. $-\frac{13}{4}$. D. $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Câu 75. Phương trình $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^4 4x = 2$ tương đương với phương trình nào sau đây?

- A. $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 4x = 0$. B. $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = 0$.
C. $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 5x = 0$. D. $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 5x = 0$.

Câu 76. Số nghiệm của phương trình $\cos x(4\cos^2 x - 3) - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$ trên đoạn $[0; 14]$ là:

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 77. Cho tam giác ABC , biết $\cos(B - C) = 1$. Hỏi tam giác ABC có đặc điểm gì?

- A. $\triangle ABC$ cân. B. $\triangle ABC$ đều. C. $\triangle ABC$ nhọn. D. $\triangle ABC$ vuông.

Câu 78. Cho tam giác ABC , biết $\sin(B + C) = 1$. Hỏi tam giác ABC có đặc điểm gì?

- A. $\triangle ABC$ cân. B. $\triangle ABC$ đều. C. $\triangle ABC$ nhọn. D. $\triangle ABC$ vuông.

Câu 79. Phương trình $\frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{18}$ có bao nhiêu nghiệm?

- A. Vô số nghiệm. B. 1 nghiệm. C. 2 nghiệm. D. 3 nghiệm.

Câu 80. Cho phương trình $\cos^2(x-30^0) - \sin^2(x-30^0) = \sin(x+60^0)$ và các tập số thực:

$I. x = 30^0 + k120^0$ $II. x = 60^0 + k120^0$ $III. x = 30^0 + k360^0$ $IV. x = 30^0 + k360^0$.

Chọn trả lời đúng về nghiệm của phương trình:

- A. Chỉ I. B. Chỉ II. C. I và III. D. I và IV.

Câu 81. Tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $\sin x \cdot \cos 3x - \sin x + 2 \cos 3x - 2 = 0$ là:

- A. $\frac{2\pi}{3}$. B. 2π . C. 4π . D. 0.

Câu 82. Nếu $(x; y)$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x \sin(xy) + 1 = 0$ thì số các giá trị của x là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Câu 83. Cho phương trình $\cos x \cdot \cos 7x = \cos 3x \cdot \cos 5x$. Phương trình nào dưới đây tương đương với phương trình đã cho?

- A. $\sin 4x = 0$. B. $\sin 5x = 0$. C. $\cos 3x = 0$. D. $\cos 4x = 0$.

Câu 84. Phương trình nào dưới đây tương đương phương trình $2^{n+1} \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \dots \cos 2^n x = 1$?

- A. $\sin x = 0$. B. $\sin x = \sin 2^n x$. C. $\sin x = \sin 2^{n+1} x$. D. $\sin x = \sin 2^{n+2} x$.

Câu 85. Phương trình $\sin 3x = \cos^4 x - \sin^4 x$ có tập nghiệm trùng với tập nghiệm của phương trình nào sau đây?

- A. $\cos 2x = \sin 3x$. B. $\cos 2x = -\sin 3x$. C. $\cos 2x = \sin 2x$. D. $\cos 2x = -\sin 2x$.

Câu 86. Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

- A. $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2$. B. $3 \sin x + 4 \cos x = 5$.
C. $-\sqrt{3} \sin x + \cos x = 3$. D. $\sin x = \frac{\pi}{3}$.

Câu 41. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x - \cos x + 3}$. Giá trị của $m + M$ là:

- A. $\frac{2}{7}$. B. $-\frac{2}{7}$. C. 4. D. 5.

Câu 42. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4}$ bằng:

- A. $\frac{2 + \sqrt{2}}{4}$. B. $\sqrt[4]{8}$. C. 2. D. 1.

Câu 43. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\cos x + 2 \sin x + 3}{2 \cos x - \sin x + 4}$ bằng:

- A. $\frac{2}{11}$. B. 0. C. $-\frac{1}{2}$. D. 1.

Câu 44. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x}$. Giá trị của $m.M$ bằng:

- A. -2. B. 0. C. $-\frac{8}{3}$. D. $-\frac{5}{8}$.

ĐỀ THI ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG VÀ TNPT CÁC NĂM**1. Bài tập tự luận**

Bài 1. (ĐHA, 2002) Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình

$$5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3.$$

Bài 2. (ĐHB, 2002) Giải phương trình $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$.

Bài 3. (ĐHD, 2002) Tìm x thuộc đoạn $[0; 14]$ nghiệm đúng của phương trình:

$$\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0.$$

Bài 4. (ĐHA, 2003) Giải phương trình $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x$.

Bài 5. (ĐHB, 2003) Giải phương trình $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$.

Bài 6. (ĐHD, 2003) Giải phương trình $\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$.

Bài 7. (ĐHA, 2004) Cho tam giác ABC không tù, thỏa mãn điều kiện $\cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C = 3$. Tính ba góc của tam giác ABC .

Bài 8. (ĐHB, 2004) Giải phương trình $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$.

Bài 9. (ĐHD, 2004) Giải phương trình $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$.

Bài 10. (ĐHA, 2005) Giải phương trình $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$.

Bài 11. (ĐHB, 2005) Giải phương trình $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$.

Bài 12. (ĐHD, 2005) Giải phương trình $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$.

Bài 13. (ĐHA, 2006) Giải phương trình $\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$.

Bài 14. (ĐHB, 2006) Giải phương trình $\cot x + \sin x \left(1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{2}\right) = 4$.

Bài 15. (ĐHD, 2006) Giải phương trình $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$.

Bài 16. (ĐHA, 2007) Giải phương trình $(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x$.

Bài 17. (ĐHB, 2007) Giải phương trình $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2$.

Bài 18. (ĐHD, 2007) Giải phương trình $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$.

Bài 19. (ĐHA, 2008) Giải phương trình $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$.

Bài 20. (ĐHB, 2008) Giải phương trình $\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x \cdot \cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x \cdot \cos x$.

Bài 21. (ĐHD, 2008) Giải phương trình $2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$.

Bài 22. (CĐ, 2008) Giải phương trình $\sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 2\sin 2x$.

Bài 23. (ĐHA, 2009) Giải phương trình $\frac{(1 - 2\sin x)\cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$.

Bài 24. (ĐHB, 2009) Giải phương trình $\sin x + \cos x \cdot \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$.

Bài 25. (ĐHD, 2009) Giải phương trình $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x \cdot \cos 2x - \sin x = 0$.

Bài 26.(CĐ, 2009) Giải phương trình $(1 + 2 \sin x)^2 \cos x = 1 + \sin x + \cos x$.

Bài 27.(ĐHA, 2010) Giải phương trình $\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$.

Bài 28.(ĐHB, 2010) Giải phương trình $(\sin 2x + \cos 2x) \cos x + 2 \cos 2x - \sin x = 0$.

Bài 29.(ĐHD, 2010) Giải phương trình $\sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0$.

Bài 30.(CĐ, 2010) Giải phương trình $4 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2(8 \sin x - 1) \cos x = 5$.

Bài 31.(ĐHA, 2011) Giải phương trình $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2} \sin x \cdot \sin 2x$.

Bài 32.(ĐHB, 2011) Giải phương trình $\sin 2x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x$.

Bài 33.(ĐHD, 2011) Giải phương trình $\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$.

Bài 34.(CĐ, 2011) Giải phương trình $\cos 4x + 12 \sin^2 x - 1 = 0$.

Bài 35.(ĐHA, 2012) Giải phương trình $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \cos x - 1$.

Bài 36.(ĐHB, 2012) Giải phương trình $2(\cos x + \sqrt{3} \sin x) \cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1$.

Bài 37.(ĐHD, 2012) Giải phương trình $\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 2x$.

Bài 38.(CĐ, 2012) Giải phương trình $2 \cos 2x + \sin x = \sin 3x$.

Bài 39.(ĐHA, 2013) Giải phương trình $1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Bài 40.(ĐHB, 2013) Giải phương trình $\sin 5x + 2 \cos^2 x = 1$.

Bài 41.(ĐHD, 2013) Giải phương trình $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$.

Bài 42.(CĐ, 2013) Giải phương trình $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0$.

Bài 43.(ĐHA, 2014) Giải phương trình $\sin x + 4 \cos x = 2 + \sin 2x$.

Bài 44.(ĐHB, 2014) Giải phương trình $\sqrt{2}(\sin x - 2 \cos x) = 2 - \sin 2x$.

Bài 45. (2015) Tính giá trị của biểu thức $P = (1 - 3 \cos 2\alpha)(2 + 3 \cos 2\alpha)$, biết $\sin \alpha = \frac{2}{3}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I
MỨC ĐỘ 1. NHẬN BIẾT

Câu 1. Tập xác định của hàm số $y = \frac{2018}{\sin x}$ là:

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R}.$

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y = \tan x$ là:

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là:

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y = \cos(2x - 3)$ là:

A. $D = \mathbb{R}.$

B. $D = \left(\frac{3}{2}; +\infty \right).$

C. $D = \left[\frac{3}{2}; +\infty \right).$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}.$

Câu 5. Tập xác định của hàm số $y = \sin \frac{x}{x-1}$ là:

A. $D = \mathbb{R}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$

C. $D = (1; +\infty).$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$

Câu 6. Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ là:

A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 7. Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ:

A. $\pi.$

B. $2\pi.$

C. $3\pi.$

D. $4\pi.$

Câu 8. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ:

A. $\pi.$

B. $2\pi.$

C. $3\pi.$

D. $4\pi.$

Câu 9. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ:

A. $\pi.$

B. $2\pi.$

C. $3\pi.$

D. $4\pi.$

Câu 10. Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ:

A. $\pi.$

B. $2\pi.$

C. $3\pi.$

D. $4\pi.$

Câu 11. Hàm số nào sau đây nhận trục tung (trục Oy) làm trục đối xứng?

A. $y = \sin x.$

B. $y = \cos x.$

C. $y = \tan x.$

D. $y = \cot x.$

Câu 12. Hàm số nào dưới đây là hàm số chẵn?

A. $y = \sin x.$

B. $y = \cos x.$

C. $y = \tan x.$

D. $y = \cot x.$

Câu 13. Hàm số nào dưới đây **không phải** là hàm số chẵn?

A. $y = x \cdot \sin x.$

B. $y = x \cdot \cos x.$

C. $y = x \cdot \tan x.$

D. $y = x \cdot \cot x.$

Câu 14. Hàm số nào dưới đây là hàm số không chẵn, không lẻ?

A. $y = x + \sin x.$

B. $y = x + \cos x.$

C. $y = x + \tan x.$

D. $y = x + \cot x.$

Câu 15. Hàm số nào dưới đây là hàm số lẻ?

A. $y = x^2 \sin x$. B. $y = \frac{\cos x}{x^2}$. C. $y = x^2 + \tan x$. D. $y = x^2 - \cot x$.

Câu 16. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng:

A. $(0; \pi)$. B. $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. C. $(\pi; 2\pi)$. D. $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 17. Hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng:

A. $(0; \pi)$. B. $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. C. $(\pi; 2\pi)$. D. $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 18. Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng:

A. $(0; \pi)$. B. $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. C. $(\pi; 2\pi)$. D. $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 19. Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng:

A. $(0; \pi)$. B. $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. C. $(\pi; 2\pi)$. D. $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

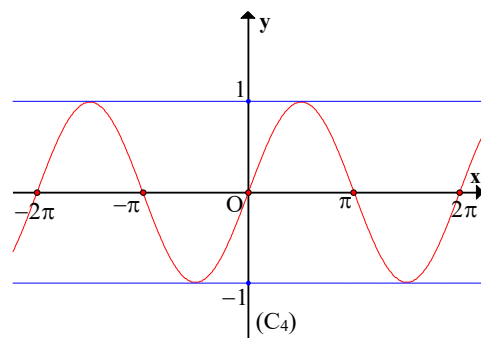
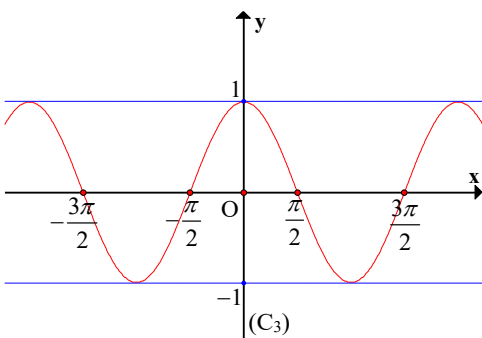
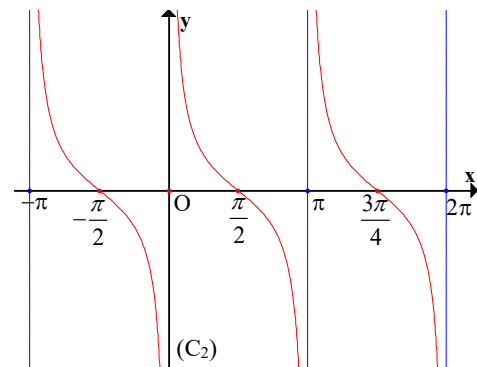
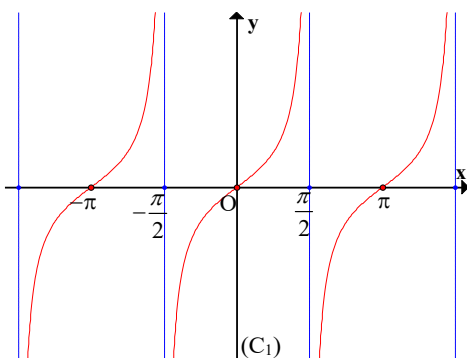
Câu 20. Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$?

A. $y = \sin x$. B. $y = \cos x$. C. $y = \tan x$. D. $y = \cot x$.

Câu 21. Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$?

A. $y = \sin x$. B. $y = \cos x$. C. $y = \tan x$. D. $y = \cot x$.

Câu 22. Xét các đồ thị hàm số sau:



Hỏi trong các đồ thị hàm số trên, đồ thị nào biểu diễn hàm số $y = \sin x$?

A. (C_1) . B. (C_2) . C. (C_3) . D. (C_4) .

Câu 23. Phương trình $\sin x = \sin a$ có các nghiệm là:

A. $\begin{cases} x = a + k2\pi \\ x = \pi - a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$ B. $\begin{cases} x = a + k2\pi \\ x = -a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $\begin{cases} x = a + k\pi \\ x = \pi - a + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

D. $\begin{cases} x = a + k\pi \\ x = -a + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 24. Phương trình $\cos x = \cos a$ có các nghiệm là:

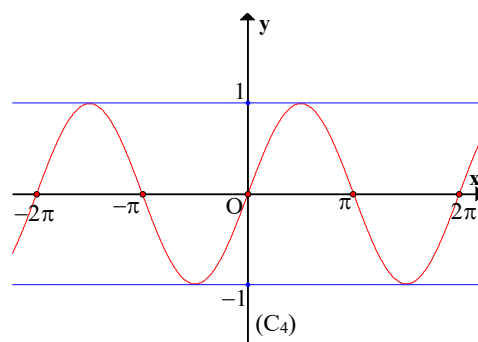
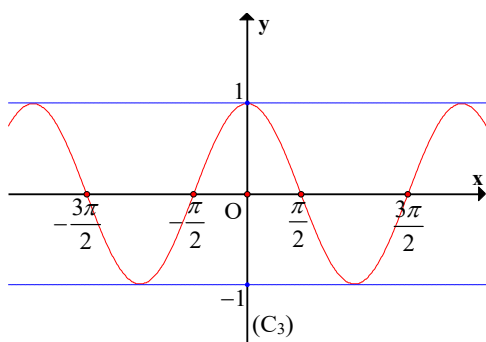
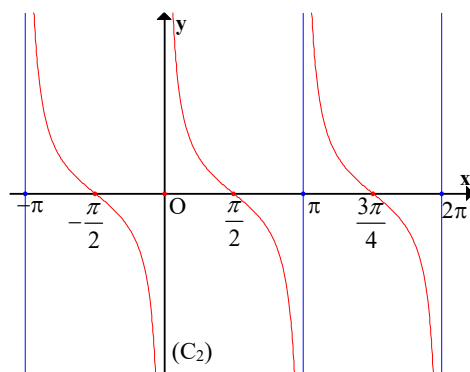
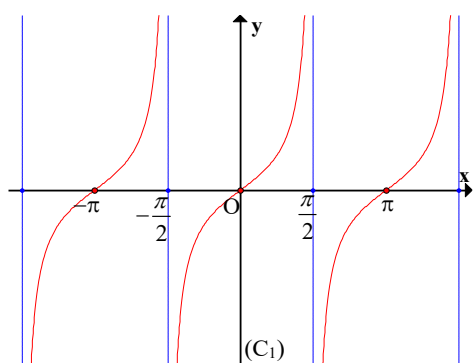
A. $\begin{cases} x = a + k2\pi \\ x = \pi - a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

B. $\begin{cases} x = a + k2\pi \\ x = -a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $\begin{cases} x = a + k\pi \\ x = \pi - a + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

D. $\begin{cases} x = a + k\pi \\ x = -a + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 25. Xét các đồ thị hàm số sau:



Hỏi trong các đồ thị hàm số trên, đồ thị nào biểu diễn hàm số $y = \cos x$?

A. (C₁).

B. (C₂).

C. (C₃).

D. (C₄).

Câu 26. Phương trình $\sin x = \sin \alpha^0$ có các nghiệm là:

A. $\begin{cases} x = \alpha^0 + k360^0 \\ x = 180^0 - \alpha^0 + k360^0 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

B. $\begin{cases} x = \alpha^0 + k360^0 \\ x = -\alpha^0 + k360^0 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $\begin{cases} x = \alpha^0 + k180^0 \\ x = 180^0 - \alpha^0 + k180^0 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

D. $\begin{cases} x = \alpha^0 + k180^0 \\ x = 180^0 - \alpha^0 + k180^0 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 27. Phương trình $\cos x = \cos \alpha^0$ có các nghiệm là:

A. $\begin{cases} x = \alpha^0 + k360^0 \\ x = 180^0 - \alpha^0 + k360^0 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

B. $\begin{cases} x = \alpha^0 + k360^0 \\ x = -\alpha^0 + k360^0 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $\begin{cases} x = \alpha^0 + k180^0 \\ x = 180^0 - \alpha^0 + k180^0 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

D. $\begin{cases} x = \alpha^0 + k180^0 \\ x = 180^0 - \alpha^0 + k180^0 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 28. Phương trình $\tan x = \tan a$ có các nghiệm là:

A. $x = a + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $x = -a + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $x = -a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 29. Phương trình $\cot x = \cot a$ có các nghiệm là:

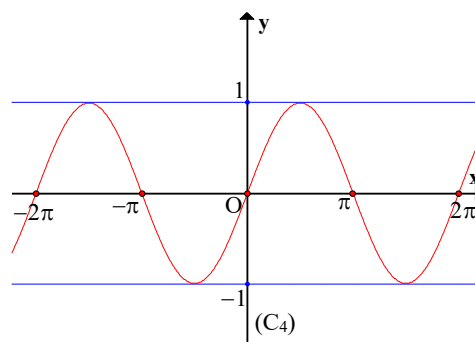
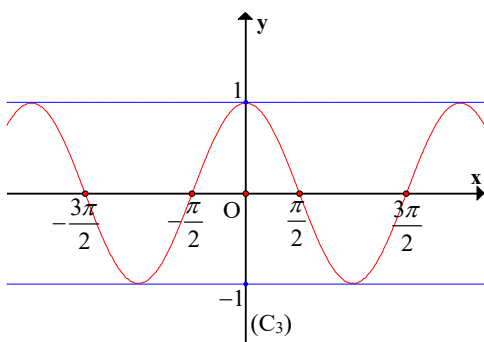
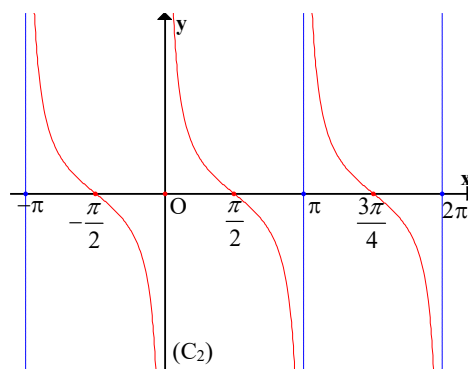
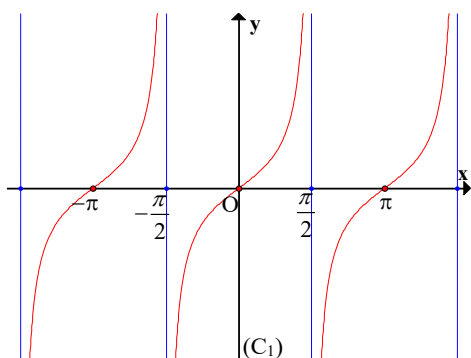
A. $x = a + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -a + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 30. Xét các đồ thị hàm số sau:



Hỏi trong các đồ thị hàm số trên, đồ thị nào biểu diễn hàm số $y = \cot x$?

A. (C₁).

B. (C₂).

C. (C₃).

D. (C₄).

Câu 31. Phương trình $\tan x = \tan \varphi^0$ có các nghiệm là:

A. $x = \varphi^0 + k180^0, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \varphi^0 + k360^0, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \varphi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 32. Phương trình $\cot x = \cot \varphi^0$ có các nghiệm là:

A. $x = \varphi^0 + k180^0, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \varphi^0 + k360^0, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \varphi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 33. Phương trình $\sin x = 1$ có các nghiệm là:

A. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 34. Phương trình $\sin x = -1$ có các nghiệm là:

A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 35. Phương trình $\sin x = 0$ có các nghiệm là:

A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 36. Phương trình $\cos x = 1$ có các nghiệm là:

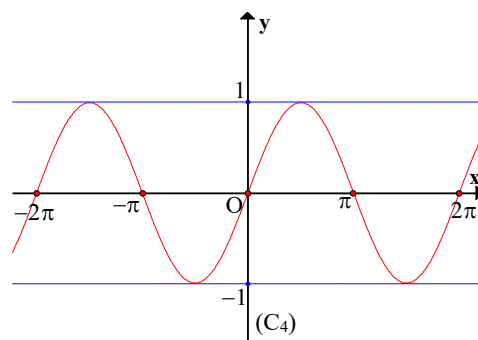
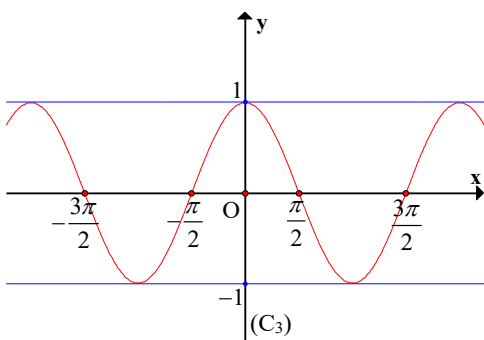
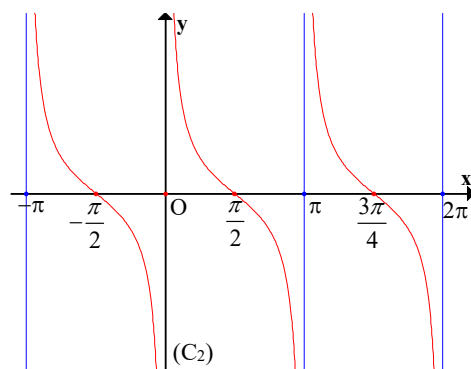
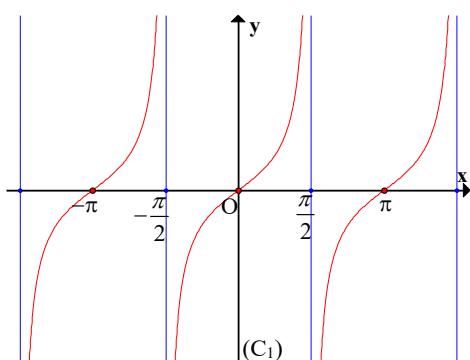
A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 37. Xét các đồ thị hàm số sau:



Hỏi trong các đồ thị hàm số trên, đồ thị nào biểu diễn hàm số $y = \tan x$?

A. (C₁).

B. (C₂).

C. (C₃).

D. (C₄).

Câu 38. Phương trình $\cos x = 0$ có các nghiệm là:

A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 39. Phương trình $\cos x = -1$ có các nghiệm là:

A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 40. Điều kiện của tham số m để phương trình $\sin x = m$ có nghiệm là:

A. $m > 1$ hoặc $m < -1.$

B. $-1 \leq m \leq 1.$

C. $m \geq 1$ hoặc $m \leq -1.$

D. $-1 < m < 1.$

Câu 41. Điều kiện của tham số m để phương trình $\sin x = m$ vô nghiệm là:

A. $m > 1$ hoặc $m < -1.$

B. $-1 \leq m \leq 1.$

C. $m \geq 1$ hoặc $m \leq -1.$

D. $-1 < m < 1.$

Câu 42. Điều kiện của các hệ số a, b, c để phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm là:

A. $a^2 + b^2 > c^2.$

B. $a^2 + b^2 \geq c^2.$

C. $a^2 + b^2 < c^2.$

D. $a^2 + b^2 \leq c^2.$

Câu 43. Điều kiện của các hệ số a, b, c để phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ vô nghiệm là:

A. $a^2 + b^2 > c^2.$

B. $a^2 + b^2 \geq c^2.$

C. $a^2 + b^2 < c^2.$

D. $a^2 + b^2 \leq c^2.$

Câu 44. Phương trình $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$ tương đương với phương trình:

A. $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$

B. $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2}.$

C. $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1.$

D. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$

Câu 45. Phương trình nào sau đây có nghiệm?

A. $2 \sin x - 3 \cos x = 1.$

B. $\sin 2x = 2.$

C. $\sin x + 3 \cos x = 4$

D. $\cos x + 3 = 0$.

MỨC ĐỘ 2. THÔNG HIỂU

Câu 46. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\sin x - 1} + \cos\left(\frac{x-1}{x}\right)$ là:

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

C. $D = [1; +\infty)$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 47. Hàm số $y = \tan x + \cot x$ xác định khi và chỉ khi:

A. $\sin x \neq 0$.

B. $\cos x \neq 0$.

C. $\sin 2x \neq 0$.

D. $\cos 2x \neq 0$.

Câu 48. Hàm số $y = \sqrt{2 + 2 \sin x} + \frac{1}{\tan x - 1}$ xác định khi và chỉ khi:

A. $2 + 2 \sin x \geq 0$.

B. $\tan x \neq 1$.

C. $\cos x \neq 0$.

D. $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq 1 \end{cases}$.

Câu 49. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 \sin x - 2$. Giá trị của $M + m$ là:

A. -4 .

B. 0 .

C. -5 .

D. 1 .

Câu 50. Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình lượng giác $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ trên đường tròn lượng giác là:

A. 1 .

B. 2 .

C. 3 .

D. 4 .

Câu 51. Số nghiệm của phương trình $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 4x\right) = 0$ trên nửa khoảng $[0; 2\pi)$ là:

A. 2 .

B. 4 .

C. 6 .

D. 8 .

Câu 52. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = 5 - \cos 3x$. Khi đó, $M^2 + M - 2$ bằng:

A. 40 .

B. 18 .

C. 28 .

D. 38 .

Câu 53. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 5 - \cos 3x$. Khi đó, $m^2 + m + 1$ bằng:

A. 21 .

B. 43 .

C. 31 .

D. 41 .

Câu 54. Tổng nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ bằng:

A. $-\frac{2\pi}{3}$.

B. $-\frac{\pi}{3}$.

C. $-\frac{3\pi}{4}$.

D. $-\frac{\pi}{4}$.

Câu 55. Gọi x_0, x_1 lần lượt là nghiệm âm lớn nhất và nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$. Giá trị của $x_0 + x_1$ là:

A. $-\frac{\pi}{6}$.

B. 0 .

C. $\frac{\pi}{6}$.

D. $-\frac{\pi}{3}$.

Câu 56. Hàm số $y = \sqrt{\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3}{1 - \cos x}}$ có tập xác định là:

A. $\begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3 > 0 \\ 1 - \cos x > 0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 3 > 0 \\ 1 + \cos x > 0 \end{cases}$.

C. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \neq -3$.

D. $\cos x \neq 1$.

Câu 57. Hàm số nào sau đây tuần hoàn với chu kỳ $T = 3\pi$?

A. $y = 2 \cos 2x$.

B. $y = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$.

C. $y = \sin\left(\frac{2x}{3}\right)$.

D. $y = 2 \sin 3x$.

Câu 58. Hàm số $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 3$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

B. $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

C. $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

D. $\left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$.

Câu 59. Nghiệm $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ là của phương trình:

A. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

B. $2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$.

C. $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$.

D. $\cos(\quad)$