

BÀI TOÁN KHOẢNG CÁCH

Nguyễn Tất Thu - GV Trường Chuyên Lương Thê Vinh

Bài viết này sẽ trình bày cách tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Quy trình tính khoảng cách là chúng ta tìm cách chuyển về khoảng cách từ chân đường cao đến một mặt phẳng có giao tuyến với mặt đáy, hoặc khoảng cách từ một điểm nằm trong mặt phẳng đáy đến một mặt phẳng chứa đường cao của hình chóp. Với mô hình lăng trụ, ta chỉ cần tách phần cần tính để đưa về mô hình của hình chóp.

📁 Bài toán 1. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) .

Lời giải.

Để tính được khoảng từ điểm M đến mặt phẳng (α) ta có các cách sau:

① **Cách 1:** *Xác định hình chiếu vuông góc H của M lên (α) .*

Để xác định được vị trí hình chiếu H ta có một số lưu ý sau:

☑ *Chọn (β) chứa điểm M và $(\beta) \perp (\alpha)$, rồi xác định giao tuyến $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$.*

Trong (β) dựng $MH \perp \Delta \Rightarrow MH \perp (\alpha)$.

☑ *Nếu trong (α) có hai điểm A, B sao cho $MA = MB$ thì trong (α) kẻ đường trung trực d của đoạn AB , rồi trong $mp(M, d)$ dựng $MH \perp d$. Khi đó $MH \perp (\alpha)$ (h.3)
Thật vậy, Gọi I là trung điểm của AB . Do $MA = MB$ nên $\triangle MAB$ cân tại M , suy ra $MI \perp AB \subset (\alpha)$. Lại có $AB \perp d \Rightarrow AB \perp mp(M, d) \Rightarrow AB \perp MH$.*

Vậy $\begin{cases} MH \perp AB \\ MH \perp d \end{cases} \Rightarrow MH \perp (\alpha)$.

☑ *Nếu trong (α) có một điểm A và một đường thẳng d không đi qua A sao cho $MA \perp d$ thì trong (α) kẻ đường thẳng d' đi qua A và $d' \perp d$, rồi trong $mp(M, d')$ kẻ $MH \perp d' \Rightarrow MH \perp (\alpha)$ (h. 4)*

Thật vậy, do $d \perp d'$ và $d \perp MA \Rightarrow d \perp mp(M, d') \Rightarrow d \perp MH$.

Lại có $MH \perp d' \Rightarrow MH \perp mp(d, d') \equiv (\alpha)$.

☑ *Nếu trong (α) có các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n (n \geq 3)$ mà $MA_1 = MA_2 = \dots = MA_n$ hoặc các đường thẳng $MA_1, MA_2, \dots, MA_n$ tạo với (α) các góc bằng nhau thì hình chiếu của M trên (α) chính là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2 \dots A_n$.*

☑ *Nếu trong (α) có các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n (n \geq 3)$ mà các mặt phẳng $(MA_1A_2), (MA_2A_3), \dots, (MA_nA_1)$ tạo với (α) các góc bằng nhau thì hình chiếu của M là tâm đường tròn nội tiếp đa giác $A_1A_2 \dots A_n$.*

☑ Nếu tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và có đường cao OH thì

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}. \quad (*)$$

② **Cách 2:** Sử dụng công thức thể tích: Xét một hình chóp có M là đỉnh, đáy nằm trong mặt phẳng (α) . Khi đó: $d(M, (\alpha)) = \frac{3V}{S_d}$.

③ **Cách 3:** Chuyển việc tính khoảng cách từ M về tính khoảng cách từ điểm N để tính hơn bằng cách sử dụng các kết quả sau

☑ Nếu $MN \parallel (\alpha)$ thì $d(M, (\alpha)) = d(N, (\alpha))$.

☑ Nếu $MN \cap (\alpha) = \{I\}$ thì $d(M, (\alpha)) = \frac{MI}{NI} \cdot d(N, (\alpha))$.

Khi sử dụng công thức chuyển điểm ta thường tìm cách chuyển về chân đường cao, với chú ý sau

Chú ý 1.

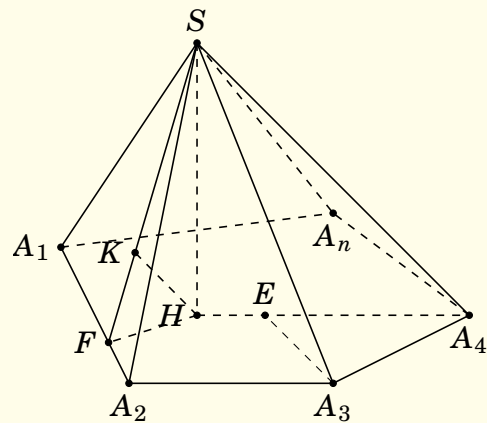
Cho hình chóp $S.A_1A_2 \cdots A_n$ có đường cao SH .

☑ Kẻ $A_iE \perp HA_j$. Khi đó

$$d(A_i, (SHA_j)) = A_iE.$$

☑ Kẻ $HF \perp A_iA_j$, $HK \perp SF$. Khi đó

$$d(H, (SA_iA_j)) = HK = \frac{HF \cdot HS}{\sqrt{HF^2 + HS^2}}.$$



④ **Cách 4:** Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ và sử dụng công thức khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng.

Ta thường gắn hệ trục khi mô hình trong bài toán có ba cạnh xuất phát từ một đỉnh và đôi một vuông góc.

□

VÍ DỤ 1 (Thi thử, Sở GD và ĐT -Lạng Sơn, 2019). Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Khoảng cách từ A đến (SBC) là

A. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải.

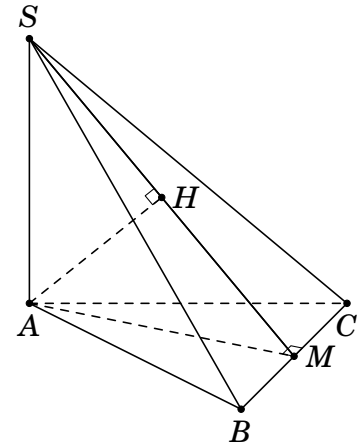
Đây là bài toán tính khoảng cách từ chân đường cao của hình chóp đến mặt bên. Ta áp dụng cách xử lý trong chú ý (1)

Gọi M là trung điểm của BC thì $AM \perp BC$, $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SM , ta có $AH \perp (SBC)$. Trong tam giác vuông SAM , ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Vậy $d(A, (SBC)) = AH = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.



Chọn đáp án **A**

□

VÍ DỤ 2 (KSCL giữa HK2 Cụm trường THPT TP Nam Định).

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD .

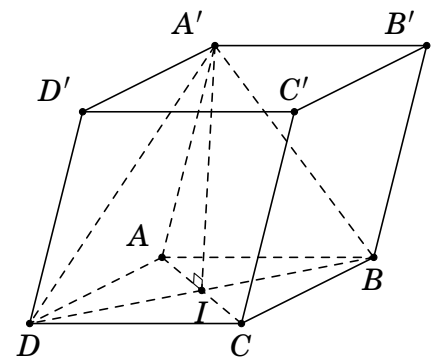
Khoảng cách từ B' đến mặt phẳng $(A'BD)$ là

A. $\frac{a}{2}$.

B. $a\sqrt{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Lời giải.

Ta thấy mặt phẳng $(A'BD)$ chứa đường cao $A'I$, nên ta gắn vào mô hình là hình chóp có một mặt bên là $(A'BD)$, nên ta xét hình chóp $A'ABD$. Khi đó ta tìm cách chuyển khoảng cách từ B' , về khoảng cách từ A . Để có được điều này ta cần tìm giao điểm J của AB' với mặt phẳng $(A'BD)$. Dễ thấy J là giao điểm của AB' và $A'B$, hơn nữa J là trung điểm của AB' . Do đó $d(B', (A'BD)) = d(A, (A'BD))$. Để tính khoảng cách từ A đến $(A'BD)$ ta chỉ cần kẻ $AH \perp BD$ thì khoảng cách đó chính là AH . Vậy ta có lời giải như sau:

Gọi I là giao điểm của AC và BD .

Dựng $AH \perp BD$.

Ta có $A'I \perp (ABCD)$ mà $AH \subset (ABCD)$ nên $A'I \perp AH$.

Từ đó ta được $AH \perp (A'BD)$.

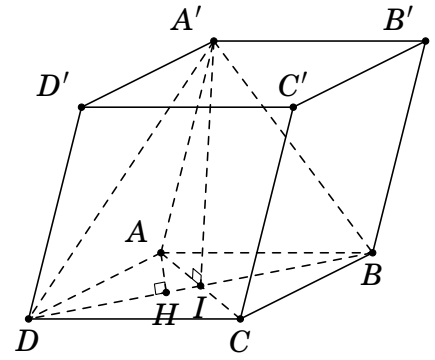
Suy ra $d(B', (A'BD)) = d(A, (A'BD)) = AH$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{AB^2 \cdot AD^2}{AB^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $d(B', (A'BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn đáp án **D**



□

VÍ DỤ 3.

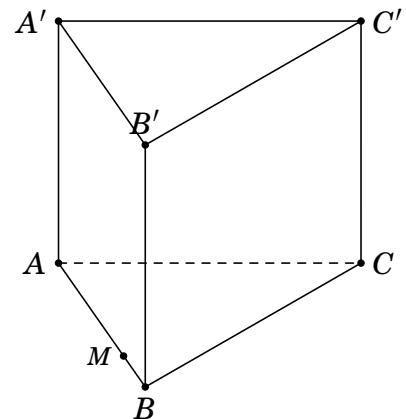
Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC vuông tại B , $BA = 2a$, $BC = a$, $AA' = a$. Trên cạnh AB lấy M sao cho $AM = 3BM$. Tính khoảng cách d từ A' đến $(B'MC)$

A. $d = \frac{a\sqrt{6}}{48}$.

B. $d = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{6}}{12}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{6}}{18}$.



Lời giải.

Vì cần tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng $(B'MC)$ nên ta dựng hình chóp có một mặt bên là $\triangle B'MC$. Hơn nữa $BA \perp BC$, BB' đôi một vuông góc, nên ta xét hình chóp $B'BMC$. Khi đó, ta chuyển khoảng cách từ A' về khoảng cách từ B và sử dụng công thức (*).

Ngoài ra, vì $BA \perp BC$, BB' đôi một vuông góc nên ta có thể gán hệ trục tọa độ $Oxyz$.

Do đó ta có thể giải bài toán trên theo một trong hai hướng sau:

Hướng 1: Vì ba đường thẳng BA , BC , BB' đôi một vuông góc, nên ta có thể gán hệ trục tọa độ $Oxyz$, sao cho $B \equiv O$, $A \in$ tia Ox , $C \in$ tia Oy và $B' \in$ tia Oz . Khi đó $B(0;0;0)$, $A(2a;0;0)$, $C(0;a;0)$, $B'(0;0;1)$, $A'(2a;0;a)$, $C'(0;a;a)$ và $M(\frac{a}{2};0;0)$. Việc còn lại là lập phương trình mặt phẳng $(B'MC)$ và sử dụng công thức tính khoảng cách.

Hướng 2:

Gọi I là giao điểm của $A'B$ với $B'M$, ta có $\frac{IA'}{IB} = \frac{A'B'}{MB} = 4$,
nên

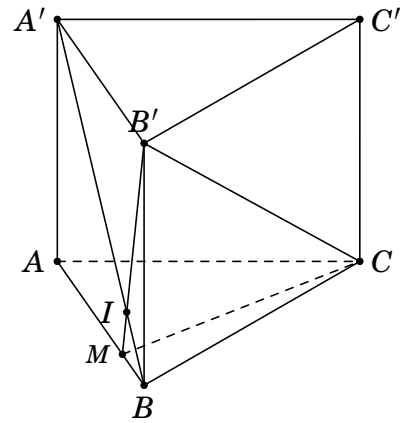
$$d(A', (B'MC)) = 4d(B, (B'MC)) = 4h.$$

Vì $B.MCB'$ là tứ diện vuông tại B , nên

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{B'B^2} = \frac{6}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Vậy $d = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Chọn đáp án **(B)**

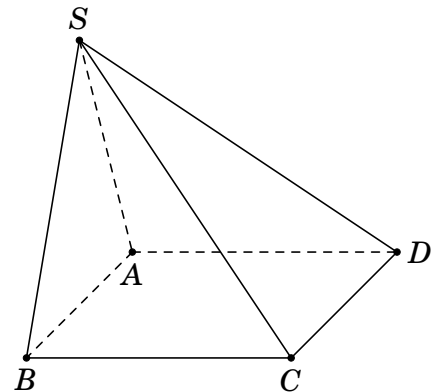


□

VÍ DỤ 4 (Đề chính thức THPTQG 2019, Mã đề 101).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{28}$.



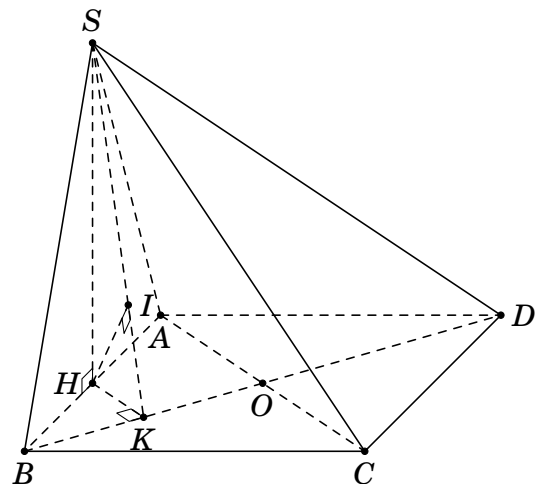
Lời giải.

Vì tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, nên đường cao của tam giác SAB là đường cao của hình chóp. Do đó, hình chiếu của S lên $(ABCD)$ là trung điểm H của cạnh AB . Ta chuyển khoảng cách từ B về khoảng cách từ H . Vì BH cắt (SAC) tại A và H là trung điểm AB , nên $d(B, (SAC)) = 2d(H, (SAC))$. Ta có lời giải sau

Gọi O là giao điểm của AC và BD .

Gọi H là trung điểm của AB . Khi đó $SH \perp (ABCD)$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (vì tam giác SAB đều có cạnh là a).

Kẻ $HK \perp BD$ tại K . Khi đó K là trung điểm BO (vì H là trung điểm AB và $AO \perp BD$). Do đó $HK = \frac{1}{2}AO = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.
Suy ra $BD \perp (SHK)$.



Kẻ $HI \perp SK$ tại I . Khi đó $HI \perp BD$. Suy ra $HI \perp (SBD)$. Do đó $HI = d(H, (SBD))$.

Vì H là trung điểm AB nên $d(A, (SBD)) = 2d(H, (SBD)) = 2HI$.

Xét tam giác vuông SHK có đường cao HI nên

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{16}{2a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

Vậy khoảng cách từ A đến (SBD) là $d(A, (SBD)) = 2HI = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Chọn đáp án **(B)**

□

VÍ DỤ 5.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm SB . Tính khoảng cách d từ M đến mặt phẳng (SCD)

- A. $d = \frac{a\sqrt{3}}{12}$. B. $d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.
C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Bài toán yêu cầu tính khoảng cách từ M đến (SCD) , ta tìm cách chuyển về khoảng cách từ A (do A là chân đường cao). Để làm điều đó, trước hết ta chuyển khoảng cách từ M về khoảng cách từ B , rồi từ đó chuyển về khoảng cách từ A . Hoặc ta có thể tìm giao điểm của AM với (SCD) và chuyển trực tiếp khoảng cách từ M về khoảng cách từ A . Cụ thể ta có lời giải như sau:

Gọi E là giao điểm của AB với CD . Do $BC \parallel AD$ và $BC = \frac{1}{2}AD$, nên B là trung điểm AE . Do đó

$$d(M, (SCD)) = \frac{MS}{BS} d(B, (SCD)) = \frac{MS}{BS} \cdot \frac{BE}{AE} d(A, (SCD)) = \frac{1}{4} d(A, (SCD)).$$

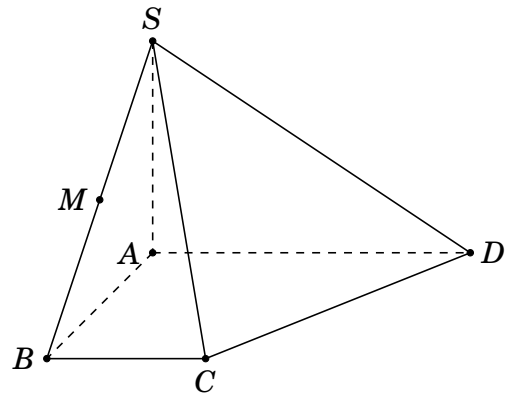
Kẻ $AI \perp SC$, ta có $AC \perp CD$ nên

$$d(A, (SCD)) = AI = \frac{AC \cdot AS}{AC^2 + SA^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $d(M, (SCD)) = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Chọn đáp án **(D)**

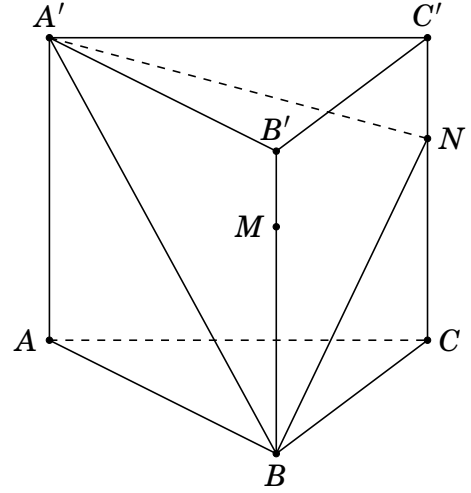
□



VÍ DỤ 6 (Đề tập huấn số 2, Sở GD và ĐT Quảng Ninh, 2019).

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 1$, $AC = 2$, $AA' = 3$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi M, N lần lượt là các điểm trên cạnh BB', CC' sao cho $BM = 3B'M$, $CN = 2C'N$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BN)$.

- A. $\frac{9\sqrt{138}}{184}$. B. $\frac{3\sqrt{138}}{46}$.
C. $\frac{9\sqrt{3}}{16\sqrt{46}}$. D. $\frac{9\sqrt{138}}{46}$.



Lời giải.

Với các dữ liệu đã cho (lăng trụ đứng, tam giác ABC không có tính chất đặc biệt như tam giác cân, đều hay vuông) nên ta có thể nghĩ đến việc tính thể tích. Trước hết ta tính được thể tích của khối lăng trụ và ta tính được tỉ số diện tích của tam giác $A'MB$ và diện tích tam giác $A'B'B$, nên ta tính được tỉ số thể tích giữa hai khối chóp $C'A'B'B$ và $NA'MB$ (cùng chiều cao). Hơn nữa ta cũng tính được thể tích khối chóp $C'A'B'B$ thông qua thể tích khối lăng trụ hoặc tính trực tiếp. Do đó, để tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BN)$ ta chỉ cần tính diện tích tam giác $A'BN$. Dựa vào các tam giác vuông ta thấy có thể tính được độ dài các cạnh của tam giác $A'BN$, do đó ta tính được diện tích tam giác này. Ta có lời giải như sau:

Ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos \widehat{BAC} = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos 120^\circ = 7.$$

Suy ra $BC = \sqrt{7}$. Thể tích khối lăng trụ

$$V = AA' \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra

$$V_{C'.A'B'B} = \frac{1}{2} V_{C'.A'B'BA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Do $S_{A'MB} = \frac{BM}{BB'} \cdot S_{A'B'B} = \frac{3}{4} S_{A'B'B}$, nên

$$V_{N.A'MB} = \frac{3}{4} V_{C'.A'B'B} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Mặt khác

$$A'B = \sqrt{A'B'^2 + B'B^2} = \sqrt{10}, \quad BN = \sqrt{BC^2 + CN^2} = \sqrt{11}, \quad A'N = \sqrt{A'C'^2 + C'N^2} = \sqrt{5}.$$

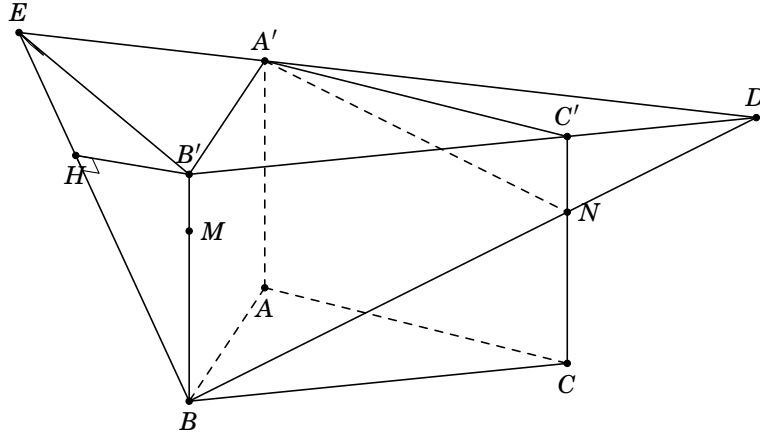
Suy ra

$$\cos \widehat{BA'N} = \frac{A'B^2 + A'N^2 - BN^2}{2A'B \cdot A'N} = \frac{\sqrt{2}}{5} \Rightarrow \sin \widehat{BA'N} = \frac{\sqrt{23}}{5}.$$

$$\text{Suy ra } S_{A'BN} = \frac{1}{2} A'B \cdot A'N \cdot \sin \widehat{BA'N} = \frac{\sqrt{46}}{2}.$$

$$\text{Do đó } d(M, (A'BN)) = \frac{3V_{M.A'BN}}{S_{A'BN}} = \frac{9\sqrt{138}}{184}.$$

Ngoài cách làm trên, ta có thể giải bài toán trên bằng cách dựng hình chóp có mặt $(A'BN)$ chứa mặt phẳng bên của hình chóp. Vì khoảng cách từ M ta có thể chuyển về khoảng cách từ B' . Do đó, ta tạo ra hình chóp có đỉnh B , đường cao BB' . Do đó, ta dựng giao điểm D của BN với $B'C'$. Khi đó ta có hình chóp $B.B'A'D$ là hình chóp cần tìm. Ta có lời giải sau:



Ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos \widehat{BAC} = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos 120^\circ = 7.$$

$$\text{Suy ra } BC = \sqrt{7}.$$

$$\text{Ta cũng có } \cos \widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{1^2 + \sqrt{7}^2 - 2^2}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}, \text{ suy ra } \cos \widehat{A'B'C'} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{Gọi } D = BN \cap B'C', \text{ suy ra } \frac{DC'}{DB'} = \frac{C'N}{BB'} = \frac{1}{3}, \text{ nên } DB' = \frac{3}{2} B'C' = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Từ đó ta có } A'D^2 = A'B'^2 + B'D^2 - 2 \cdot A'B' \cdot B'D \cos \widehat{A'B'D} = 1^2 + \left(\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{43}{4}.$$

$$\text{Suy ra } A'D = \frac{\sqrt{43}}{2}.$$

Kẻ $B'E \perp A'D$ và $B'H \perp BE$, suy ra $B'H \perp (A'BN)$. Do đó $d(B', (A'BN)) = B'H$.

$$\text{Từ } \cos \widehat{A'B'C'} = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow \sin \widehat{A'B'C'} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{Do đó } S_{A'B'D} = \frac{1}{2} \cdot A'B' \cdot B'D \cdot \sin \widehat{A'B'D} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

$$B'E = \frac{2S_{A'B'D}}{A'D} = \frac{2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{43}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}.$$

$$\frac{1}{B'H^2} = \frac{1}{B'E^2} + \frac{1}{B'B^2} = \frac{1}{\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}\right)^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{46}{27} \Rightarrow B'H = \sqrt{\frac{27}{46}}.$$

Từ $BM = 3B'M$ suy ra $d(M, (A'BN)) = \frac{3}{4}d(B', (A'BN)) = \frac{3}{4} \cdot B'H = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\frac{27}{46}} = \frac{9\sqrt{138}}{184}$.

Chọn đáp án **A**

□

Tóm lại: Để tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng ta thường chuyển về

- ☑ **Khoảng cách từ một điểm nằm trong mặt phẳng đáy đến một mặt phẳng chứa đường cao của hình chóp.**
- ☑ **Khoảng cách từ chân đường cao đến một mặt bên của hình chóp.**
- ☑ **Khoảng cách từ đỉnh của tứ diện vuông đến mặt đối diện.**

☐ Bài toán 2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b . Tính khoảng cách giữa a và b .

Lời giải.

Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau ta có thể dùng một trong các cách sau:

- ① **Cách 1:** Dựng đoạn vuông góc chung MN của a và b . Khi đó $d(a, b) = MN$.

Chú ý 2. Nếu $a \perp b$ thì ta dựng đoạn vuông góc chung của a và b như sau

- ☑ Dựng mặt phẳng (α) chứa b và vuông góc với a .
- ☑ Tìm giao điểm $O = a \cap (\alpha)$.
- ☑ Dựng $OH \perp b$.

Đoạn OH chính là đoạn vuông góc chung của a và b .

- ② **Cách 2:** Dựng mặt phẳng (α) đi qua a và song song với b , khi đó: $d(a, b) = d(a, (\alpha)) = d(M, (\alpha))$ với M là điểm bất kì thuộc (α) .
- ③ **Cách 3:** Dựng hai mặt phẳng (α) đi qua a và song song với b , (β) đi qua b và song song với a . Khi đó: $d(a, b) = d((\alpha), (\beta))$.
- ④ **Cách 4:** Sử dụng phương pháp tọa độ.

Giả sử $\vec{u}, \vec{v}$ lần lượt là VTCP của a, b và $M \in a, N \in b$. Khi đó

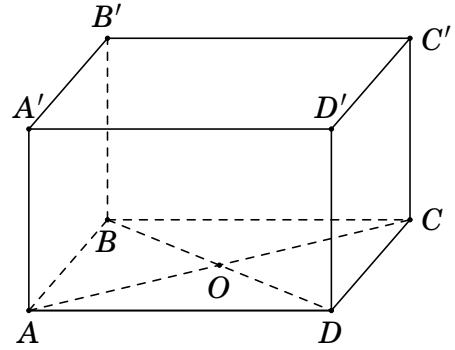
$$d(a, b) = \frac{|(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \overrightarrow{MN}|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|}.$$

□

VÍ DỤ 1 (KSCL, Sở GD và ĐT - Thanh Hóa, 2018).

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CC' và BD .

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. C. a . D. $a\sqrt{2}$.

**Lời giải.**

Đây là bài toán dễ. Ta thấy CC' nằm trong mặt phẳng $(ACC'A')$ vuông góc với BD tại trung điểm O của BD , nên ta có OC là đường vuông góc chung. Do đó

$$d[CC', BD] = OC = \frac{AC}{2} = \frac{2a}{2} = a.$$

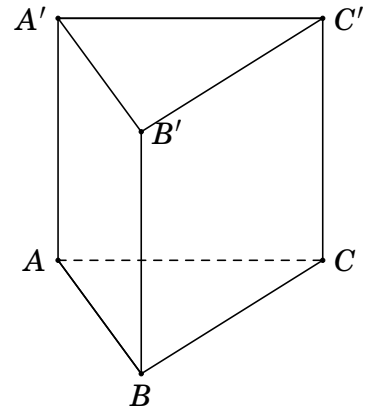
Chọn đáp án **C**

□

VÍ DỤ 2 (Thi thử lần I, Sở GD và ĐT Sơn La 2019).

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'C'$ bằng

- A. a . B. $a\sqrt{2}$. C. $2a$. D. $a\sqrt{3}$.

**Lời giải.**

Ta thấy hai đường thẳng AB và $A'C'$ nằm trong hai mặt phẳng đáy, nên khoảng cách giữa chúng bằng khoảng cách giữa hai đáy, nên ta có lời giải như sau:

Ta thấy $AB \subset (ABC)$; $A'C' \subset (A'B'C')$. Mà $(ABC) \parallel (A'B'C')$.

Nên $d(AB; A'C') = d((ABC); (A'B'C')) = AA' = a$.

Chọn đáp án **A**

□

VÍ DỤ 3 (Tập huấn, Sở GD và ĐT lần 1, 2019). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. C. a . D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta thấy $SA \perp (ABC)$ nên khoảng cách giữa SA và BC là đoạn AM , với M là hình chiếu

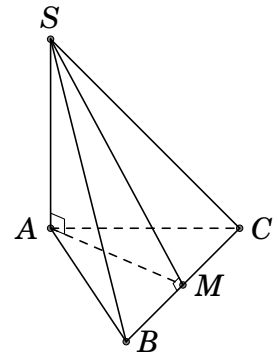
của A lên BC . Ta có lời giải sau:

Lời giải.

Gọi M là trung điểm cạnh BC , suy ra $AM \perp BC$ (1) do $\triangle ABC$ đều và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $d(SA, BC) = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



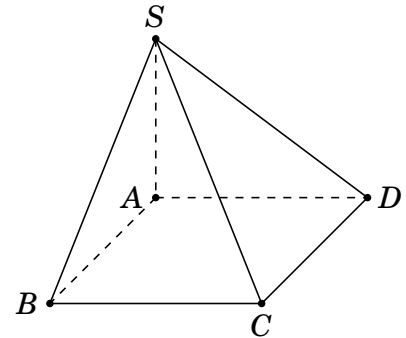
Chọn đáp án **(D)**

□

VÍ DỤ 4.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường chéo nhau SC và BD .

- A. $\frac{a}{3}$. B. $a\sqrt{6}$. C. $\frac{a}{\sqrt{6}}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Ta nhận thấy $BD \perp (SAC)$ nên khoảng cách giữa hai đường thẳng là độ dài đoạn OK , trong đó O là trung điểm BD , K là hình chiếu của O lên SC .

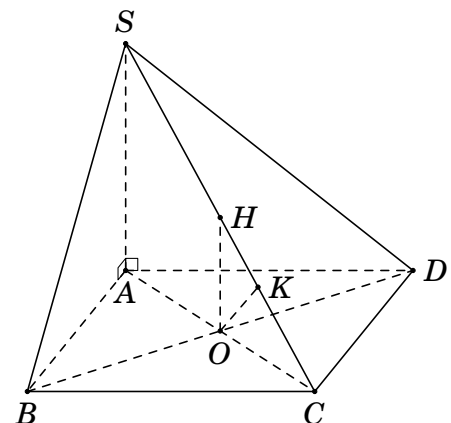
Lời giải.

Do $BD \perp AC$ và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$. Suy ra $BD \perp SC$.

Trong mặt phẳng (SAC) gọi K là hình chiếu của O lên SC . Khi đó $d(BD, SC) = OK$.

Gọi H là trung điểm của SC . Xét tam giác HOC ta có:

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{6}{a^2} \Rightarrow OK = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$



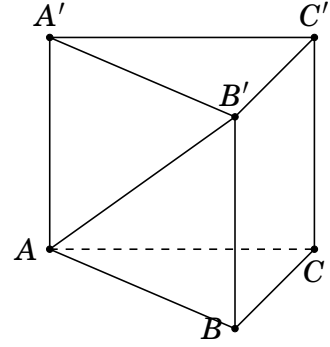
Chọn đáp án **(C)**

□

VÍ DỤ 5 (Thi thử L2, THPT Ngô Quyền-Hải Phòng, 2019).

Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, $AA' = 2a$. Khoảng cách giữa AB' và CC' bằng

- A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. B. a . C. $a\sqrt{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Ta thấy AB' nằm trong mặt phẳng $(ABB'A')$ song song với CC' . Do đó khoảng cách giữa AB' và CC' chính bằng khoảng cách từ C đến $(ABB'A')$.

Lời giải.

Do $CC' \parallel (AA'B'B)$ nên

$$d(AB', CC') = d(CC', (AA'B'B)) = d(C, (AA'B'B)).$$

Gọi H là trung điểm của AB .

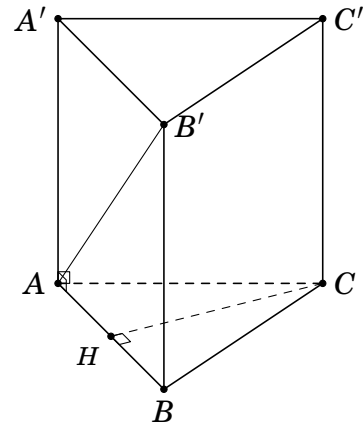
Do $\triangle ABC$ đều nên $CH \perp AB$ (1).

Mặt khác, $AA' \perp (ABC)$ nên $CH \perp AA'$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $CH \perp (AA'B'B)$.

$$\text{Vậy } d(C, (AA'B'B)) = CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Chọn đáp án **D**



□

VÍ DỤ 6 (Đề thi thử lần 4 ĐHSP Hà Nội-2019). Cho khối chóp $S.ABC$ có $(SAB) \perp (ABC)$, $(SAC) \perp (ABC)$, $SA = a$, $AB = AC = 2a$, $BC = 2a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC bằng

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. C. a . D. $a\sqrt{2}$.

Từ giả thiết ta có SA là đường cao của hình chóp. Ta dựng một mặt phẳng chứa đường này và song song với đường kia. Ta ưu tiên dựng mặt phẳng song song với đường thẳng nằm trong mặt phẳng đáy, tức là dựng mặt phẳng chứa SM và song song với AC . Do M là trung điểm của BC và cần dựng song song nên ta nghĩ đến dựng đường trung bình của tam giác ABC . Do đó, ta dựng I là trung điểm AB . Khi đó, $AC \parallel (SMI)$, nên $d(AC, SM) = d(AC, (SMI)) = d(A, (SMI))$. Đến đây ta có bài toán quen thuộc là tính khoảng cách từ chân đường cao đến mặt bên.

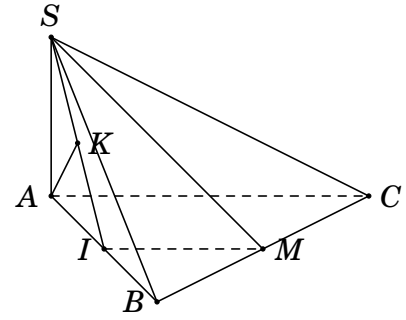
Lời giải.

Gọi I là trung điểm AB , khi đó $MI \parallel AC \Rightarrow AC \parallel (SIM)$.

Do đó $d(SM; AC) = d(AC; (SMI)) = d(A; (SMI))$.

Kẻ $AK \perp SI$. Khi đó, ta chứng minh được $AK \perp (SMI)$.

Nên $d(A; (SMI)) = AK = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (do $\triangle SAB$ vuông cân tại A có AK đường cao).



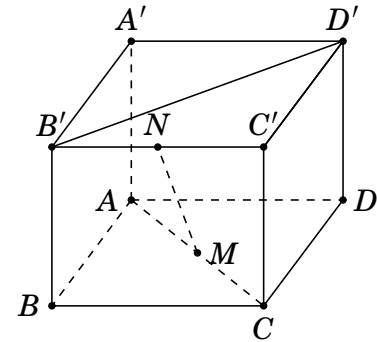
Chọn đáp án **B**

□

VÍ DỤ 7 (Thi thử, Sở GD và ĐT -Lạng Sơn, 2019).

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$ bằng

- A. $a\sqrt{5}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. C. $3a$. D. $\frac{a}{3}$.



Với mô hình đã cho là hình lập phương, ta có thể gán hệ trục tọa độ $Oxyz$ để giải bài toán. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho $A \equiv O$, $B \in$ tia Ox , $D \in$ tia Oy , $A' \in$ tia Oz . Khi đó, ta sẽ xác định được tọa độ các điểm còn lại.

Ngoài cách trên, ta có thể giải bằng cách dựng mặt phẳng chứa MN song song với $B'D'$. Do N là trung điểm $B'C'$, nên ta dựng mặt phẳng (MNP) với P là trung điểm $C'D'$. Khi đó $d(B'D', MN) = d(B'D', (MNP)) = d(O, (MNP))$ với O là trung điểm $B'D'$. Ta chọn O vì ta có $MO \perp (A'B'C'D')$. Vậy ta có thể giải bài toán theo hai cách sau:

Lời giải.

Cách 1: Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A \equiv O$, $B \in$ tia Ox , $D \in$ tia Oy , $A' \in$ tia Oz và ta chọn $a = 2$. Khi đó $B'(2; 0; 2)$, $D'(0; 2; 2)$, $M(1; 1; 0)$, $N(2; 1; 2)$. Suy ra

$$\overrightarrow{MN} = (1; 0; 2), \quad \overrightarrow{B'D'} = (-2; 2; 0), \quad \overrightarrow{B'M} = (-1; 1; -2).$$

Do đó

$$\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{B'D'} = (-4; -4; 2), \quad (\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{B'D'}) \cdot \overrightarrow{B'M} = -4.$$

Suy ra

$$d(MN, B'D') = \frac{|(\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{B'D'}) \cdot \overrightarrow{B'M}|}{|\overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{B'D'}|} = \frac{2}{3} = \frac{a}{3}.$$

Cách 2:

Gọi O, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $B'D', BC', C'D'$. Vì $B'D' \parallel NP$ nên

$$d(B'D', MN) = d(B'D', (MNP)) = d(O, (MNP)).$$

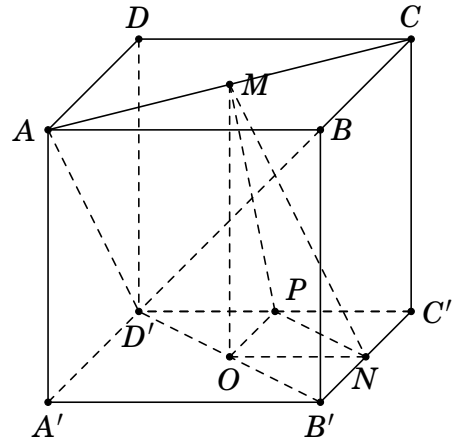
Tứ diện $O.MNP$ có OM, ON, OP đôi một vuông góc, do đó

$$\frac{1}{d(O, (MNP))^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OP^2}$$

$$\Rightarrow d(O, (MNP)) = \frac{a}{3}. \text{ Vậy } d(B'D', MN) = \frac{a}{3}.$$

Chọn đáp án **D**

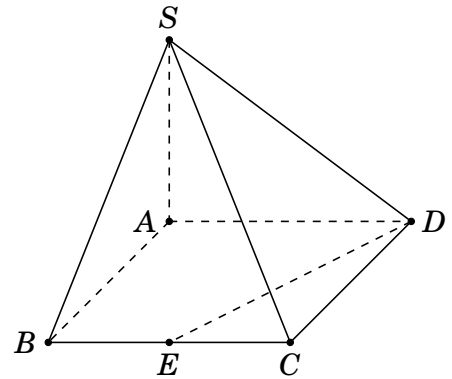
□



VÍ DỤ 8 (Hàm Rồng - Thanh Hóa, lần 2 - 2019).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy $ABCD$. Góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng 45° . Gọi E là trung điểm của BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và SC .

A. $\frac{a\sqrt{5}}{19}$. B. $\frac{a\sqrt{38}}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{38}}{19}$.



Với bài toán này, ta có thể giải theo hai cách sau:

Cách 1: Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$ và $S \in$ tia Oz . Khi đó ta sẽ tìm được tọa độ các đỉnh còn lại.

Cách 2: Ta dựng mặt phẳng chứa SC song song với DE . Để làm điều đó, ta dựng hình bình hành $DECF$. Khi đó khoảng cách cần tính chính bằng khoảng cách từ D đến (SCF) và ta chuyển về khoảng cách từ A đến (SCF) . Cách 1 bạn đọc tự làm, lời giải dưới đây là theo cách thứ hai.

Lời giải.

Dựng hình bình hành $CEDF$,

ta có: $DE \parallel CF \Rightarrow DE \parallel (SCF)$

Do đó $d(DE, SC) = d(D, (SCF))$.

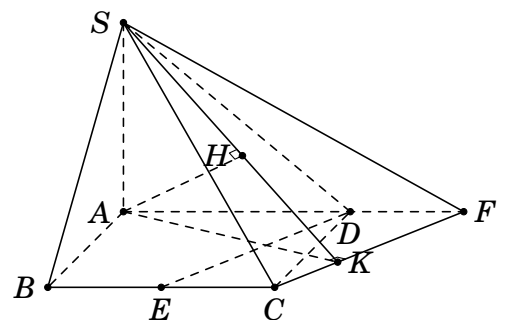
Lại có $AD \cap (SCF) = F$ nên $\frac{d(D, (SCF))}{d(A, (SCF))} = \frac{FD}{FA} = \frac{1}{3}$.

Suy ra $d(DE, SC) = \frac{1}{3}d(A, (SCF))$.

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $(SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA} = 45^\circ$.

$\Rightarrow SA = AC \tan \widehat{SCA} = a\sqrt{2}$.

Kẻ $AK \perp CF$ tại K , $AH \perp SK$ tại H .



Khi đó $d(A, (SCF)) = AH$.

Ta có

$$CF = DE = \sqrt{DC^2 + CE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2}CD \cdot AF = \frac{1}{2}AK \cdot CF.$$

$$\text{Suy ra } AK = \frac{AF \cdot CD}{CF} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Xét } \triangle SAK \text{ có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AK^2} \Rightarrow AH = \frac{3a\sqrt{38}}{19}.$$

$$\text{Vậy } d(DE, SC) = \frac{1}{3}d(A, (SCF)) = \frac{1}{3}AH = \frac{a\sqrt{38}}{19}.$$

Chọn đáp án **(D)**

□

VÍ DỤ 9 (Thi thử lần 1, THPT Văn Giang - Hưng Yên, 2019).

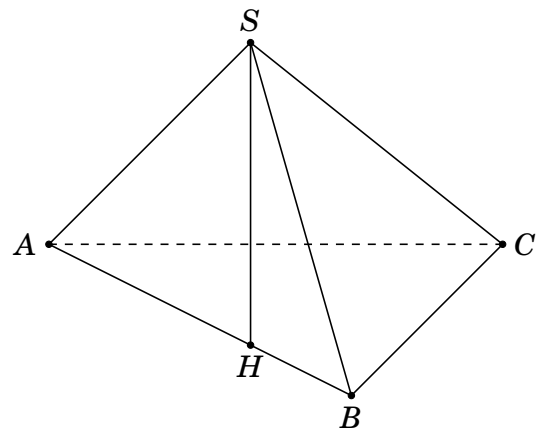
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , góc giữa SC và $mp(ABC)$ là 45° . Hình chiếu của S lên $mp(ABC)$ là điểm H thuộc AB sao cho $HA = 2HB$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC .

A. $\frac{a\sqrt{210}}{45}$.

B. $\frac{a\sqrt{210}}{20}$.

C. $\frac{a\sqrt{210}}{15}$.

D. $\frac{a\sqrt{210}}{30}$.



Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC ta dựng mặt phẳng chứa SA và song song với BC . Để làm điều đó, ta dựng hình bình hành $ABCD$. Khi đó khoảng cách cần tính chính bằng khoảng cách B đến (SAD) và ta chuyển về khoảng cách từ H .

Lời giải.

Dựng hình bình hành $ABCD$, khi đó $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $BC \parallel AD \Rightarrow BC \parallel (SAD)$.

Do đó

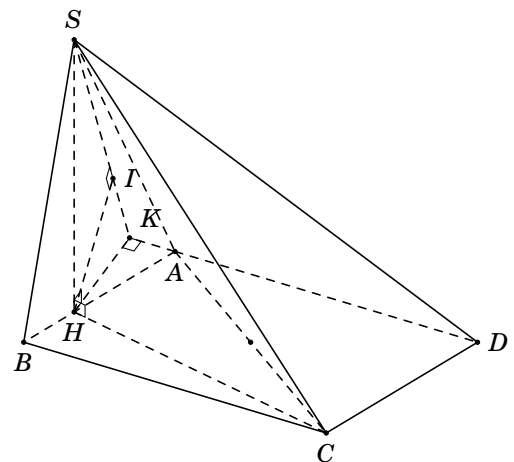
$$d(SA; BC) = d[BC; (SAD)] = d[B; (SAD)].$$

$$\text{Từ } \frac{BA}{HA} = \frac{3}{2} \Rightarrow d[B; (SAD)] = \frac{3}{2}d[H; (SAD)].$$

Ta có $SH \perp (ABC)$ nên suy ra

$$(\widehat{SC; (ABC)}) = (\widehat{SC; HC}) = \widehat{SCH}.$$

Suy ra $\widehat{SCH} = 45^\circ$.



$$HC^2 = HB^2 + BC^2 - 2HB \cdot BC \cdot \cos \widehat{HBC} = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot a \cos 60^\circ = \frac{7a^2}{9} \Rightarrow HC = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$

Tam giác SHC vuông tại H và $\widehat{SCH} = 45^\circ$ nên tam giác SHC vuông cân tại H . Từ đó ta có $SH = HC = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.

Kẻ $HK \perp AD$ tại $K \Rightarrow \widehat{HAK} = 60^\circ$. Do đó

$$HK = HA \cdot \sin \widehat{HAK} = \frac{2a}{3} \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Kẻ $HI \perp SK$ tại K , suy ra $HI \perp (SAD)$ ta có

$$d[H; (SAD)] = HI = \frac{HK \cdot HS}{\sqrt{HK^2 + HS^2}} = \frac{a\sqrt{210}}{30}.$$

$$\text{Vậy } d(SA; BC) = \frac{3}{2}d[H; (SAD)] = \frac{3}{2}HI = \frac{3}{2} \cdot \frac{a\sqrt{210}}{30} = \frac{\sqrt{210}}{20}.$$

Chọn đáp án **(B)**

□

A. BÀI TẬP

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với $(ABCD)$, $ABCD$ là hình thang vuông có đáy lớn AD gấp đôi đáy nhỏ BC , đồng thời đường cao $AB = BC = a$. Biết $SA = a\sqrt{3}$, khi đó khoảng cách từ đỉnh B đến đường thẳng SC là

- A. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$. B. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. C. $a\sqrt{10}$. D. $2a$.

Câu 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy $\triangle ABC$ đều cạnh a tâm O . Hình chiếu của C' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của $\triangle ABC$. Cạnh bên CC' tạo với mặt phẳng đáy (ABC) một góc 60° . Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng $A'B'$.

- A. $\frac{7a}{4}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. D. $\frac{7a}{2}$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , biết $SA \perp (ABC)$ và $AB = 2a$, $AC = 3a$, $SA = 4a$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC) .

- A. $d = \frac{12a\sqrt{61}}{61}$. B. $d = \frac{2a}{\sqrt{11}}$. C. $d = \frac{a\sqrt{43}}{12}$. D. $d = \frac{6a\sqrt{29}}{29}$.

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng $a > 0$. Khi đó khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (BCD) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{8}}{3}$.

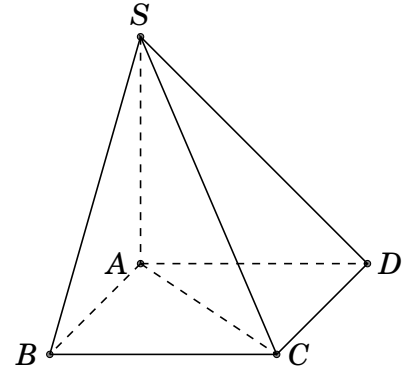
Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$ có các tam giác ABC , DBC vuông cân và nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. $AB = AC = DB = DC = 2a$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACD) .

- A. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $a\sqrt{6}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 6.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Khi đó khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) bằng

- A. $d(B, (SAC)) = a$. B. $d(B, (SAC)) = a\sqrt{2}$.
C. $d(B, (SAC)) = 2a$. D. $d(B, (SAC)) = \frac{a}{\sqrt{2}}$.



Câu 7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi M là trung điểm đoạn OA . Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SCD) .

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. D. $a\sqrt{6}$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc mặt phẳng đáy. Biết $SD = 2a\sqrt{3}$ và góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° . Tính khoảng cách h từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) .

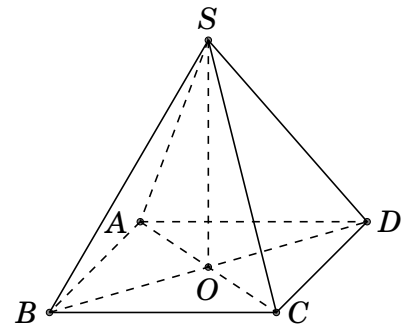
- A. $h = \frac{a\sqrt{13}}{3}$. B. $h = \frac{2a\sqrt{66}}{11}$. C. $h = \frac{2a\sqrt{13}}{3}$. D. $h = \frac{4a\sqrt{66}}{11}$.

Câu 9.

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tâm O , $SO = a$ (tham khảo hình vẽ bên).

Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD) bằng

- A. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$. B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. C. $\frac{\sqrt{6}a}{3}$. D. $\sqrt{3}a$.



Câu 10. Khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B và $AB = a$, $SA \perp (ABC)$. Góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Khi đó khoảng cách từ A đến (SBC) là

- A. $a\sqrt{3}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 11. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a . Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60° . Tính khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. a . C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $a\sqrt{2}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) .

- A. $d = \frac{2a}{\sqrt{5}}$. B. $d = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$. C. $d = \frac{a\sqrt{57}}{19}$. D. $d = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 13. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2a$, $AD = a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm cạnh AB . Tính khoảng cách h từ điểm D đến mặt phẳng $(B'MC)$.

- A. $h = \frac{a}{\sqrt{21}}$. B. $h = \frac{a\sqrt{21}}{14}$. C. $h = \frac{3a\sqrt{21}}{7}$. D. $h = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

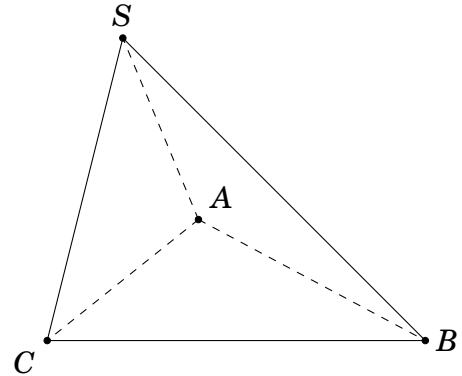
Câu 14. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = a, AB = 3a$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. B. a . C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 15.

Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B có $AB = BC = a$, tam giác SAC đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

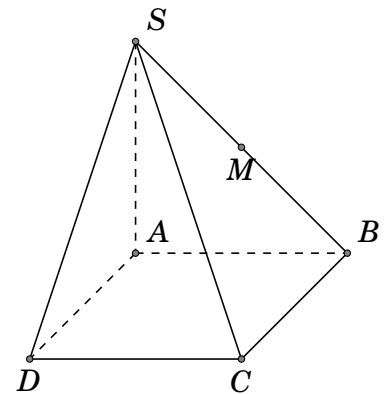
- A. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. B. $2a$. C. $\frac{a\sqrt{42}}{7}$. D. $\frac{a\sqrt{42}}{14}$.



Câu 16.

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = a, AD = a\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi M là trung điểm của cạnh SB (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ điểm M tới mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{3a}{2}$. C. $2a\sqrt{3}$. D. $a\sqrt{3}$.



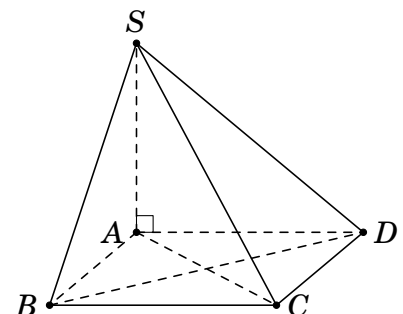
Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) là $a\sqrt{6}$. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) .

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. C. $2\sqrt{6}a$. D. $a\sqrt{6}$.

Câu 18.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, đường chéo $AC = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD .

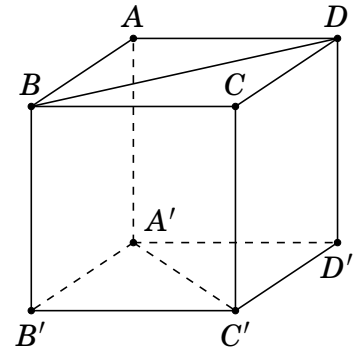
- A. $a\sqrt{2}$. B. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. D. $a\sqrt{3}$.



Câu 19.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và $A'C'$ bằng

- A. $\sqrt{3}a$. B. a . C. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. D. $\sqrt{2}a$.



Câu 20. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD .

- A. $d(AB, CD) = \frac{3a}{2}$. B. $d(AB, CD) = a$. C. $d(AB, CD) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $d(AB, CD) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

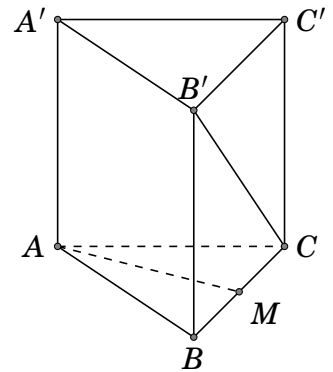
Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm của AC , H là hình chiếu của I trên SC . Kí hiệu $d(a, b)$ là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $d(BI, SC) = IH$. B. $d(AB, SC) = BH$. C. $d(SB, AC) = AB$. D. $d(SA, BC) = AB$.

Câu 22.

Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

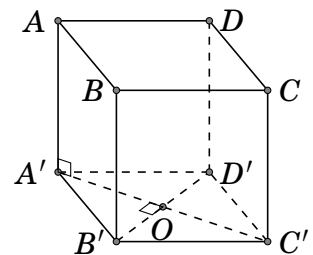
- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. C. a . D. $a\sqrt{2}$.



Câu 23.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a như hình bên. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và $B'D'$.

- A. a . B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $a\sqrt{2}$.



Câu 24. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BB' bằng

- A. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{\sqrt{5}a}{3}$. C. $\frac{a}{\sqrt{5}}$. D. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Câu 25. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 4, biết $SA = 3$. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng SB và AD là

- A. $\frac{4}{5}$. B. $\frac{12}{5}$. C. $\frac{6}{5}$. D. 4.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = a, BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

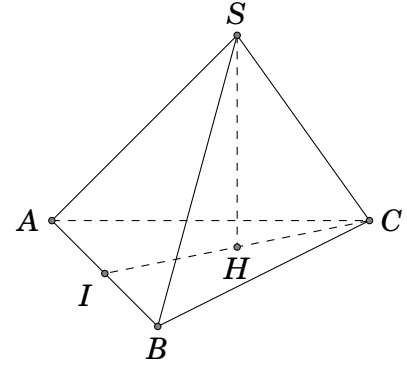
Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = AC = a$. Biết tam giác SAB có $\widehat{ABS} = 60^\circ$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a .

- A. $d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$. B. $d = 3\sqrt{3}$. C. $d = 2a\sqrt{3}$. D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 37.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Gọi I là trung điểm của AB . Biết hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của CI , góc giữa SA và mặt đáy bằng 60° (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CI bằng

- A. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. B. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{21}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{42}}{8}$.



Câu 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB .

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. C. $2a$. D. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều, góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ nằm trong hình vuông $ABCD$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC .

- A. $\frac{5a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{2a\sqrt{15}}{3}$.

Câu 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Dựng mặt phẳng (P) cách đều năm điểm A, B, C, D và S . Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng (P) như vậy?

- A. 4 mặt phẳng. B. 5 mặt phẳng. C. 1 mặt phẳng. D. 2 mặt phẳng.

Câu 41. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^\circ$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC .

- A. $\frac{6a}{7}$. B. $\frac{2a}{7}$. C. $\frac{2a}{\sqrt{57}}$. D. $\frac{6a}{\sqrt{57}}$.

Câu 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SA = 2\sqrt{2}a$, $AB = a$, $BC = 2a$. Khoảng cách giữa BD và SC bằng

- A. $\frac{2\sqrt{7}a}{7}$. B. $\frac{\sqrt{7}a}{7}$. C. $\sqrt{7}a$. D. $\frac{\sqrt{6}a}{5}$.

Câu 43. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng $(AD'B')$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$. D. a .

ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. A	4. B	5. A	6. D	7. C	8. B	9. B	10. D
11. C	12. B	13. D	14. B	15. C	16. B	17. D	18. A	19. C	20. D
21. D	22. B	23. B	24. D	25. B	26. C	27. A	28. D	29. B	30. C
31. D	32. C	33. C	34. D	35. D	36. A	37. C	38. B	39. B	40. B
41. A	42. A	43. A	44. B	45. A	46. B	47. C	48. A	49. B	50. D