

CHƯƠNG VI. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

BÀI 1. PHÉP TÍNH LŨY THỪA

Trong khoa học, người ta thường dùng lũy thừa để ghi các số, có thể rất lớn hoặc rất bé. Chẳng hạn, bảng dưới đây cho một số ví dụ về cách ghi độ dài.

Độ dài (m)	Ghi bằng lũy thừa (m)	Ghi bằng đơn vị
10000000000	10^9	1 Gm (gigamét)
1000000	10^6	1 Mm (megamét)
1000	10^3	1 km (kilômét)
0,001	10^{-3}	1 mm (milimét)
0,000001	10^{-6}	1 μ m (micrômét)
0,000000001	10^{-9}	1 nm (nanomét)

Cách ghi như vậy có tiện ích gì? Từ các lũy thừa quen thuộc ở ba dòng đầu, hãy dự đoán quy tắc viết lũy thừa ở ba dòng cuối.

Lời giải

Cách ghi như vậy giúp con số không chứa quá dài, chứa quá nhiều số 0 dẫn đến việc có thể viết thừa hoặc thiếu số 0

Quy tắc viết lũy thừa ở ba dòng cuối, số chữ số sau dấu phẩy là n thì số đó được viết là 10^{-n}

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

Cho biết dãy số (a_n) được xác định theo một quy luật nào đó và bốn số hạng đầu tiên của nó được cho như ở bảng dưới đây:

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	16	8	4	2	?	?	?

- a) Tìm quy luật của dãy số và tìm ba số hạng tiếp theo của nó.
 b) Nếu viết các số hạng của dãy số dưới dạng lũy thừa, thì bốn số hạng đầu tiên có thể viết thành $2^4; 2^3; 2^2; 2^1$. Dự đoán cách viết dưới dạng lũy thừa của ba số hạng tiếp theo của dãy số và giải thích.

Lời giải

- a) Quy luật của dãy số là kể từ số hạng thứ 2, mỗi số hạng bằng số liền trước chia cho 2

Ta có: $a_5 = 1; a_6 = \frac{1}{2}; a_7 = \frac{1}{4}$

- b) Ta có $a_5 = 2^0; a_6 = 2^{-1}; a_7 = 2^{-2}$

Do mỗi số hạng bằng số liền trước chia cho 2 nên khi viết dưới dạng lũy thừa có cơ số là 2, số mũ của mỗi số hạng kém số mũ của số hạng liền trước 1 đơn vị.

Ở cấp Trung học cơ sở, chúng ta đã biết lũy thừa với số mũ tự nhiên:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ thừa số}} \quad (n \in \mathbb{N}, n > 0, a \in \mathbb{R}), a^0 = 1 \quad (a \neq 0).$$

Phép tính lũy thừa có thể mở rộng với số mũ nguyên bất kì. Lũy thừa với số mũ nguyên âm được định nghĩa như sau:

Với số nguyên dương n , số thực $a \neq 0$, lũy thừa của a với số mũ $-n$ xác định bởi $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Chú ý:

- a) $a^0 = 1$ với mọi $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.
 b) 0^0 và 0^{-n} (với $n > 0$) không có nghĩa.

Ví dụ 1. Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) 2^{-4} b) $9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$; c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} : (\sqrt{3})^0$.

Lời giải

- a) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$
 b) $9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = 9 \cdot \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 9 \cdot \frac{1}{\frac{9}{16}} = 9 \cdot \frac{16}{9} = 16$;
 c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} : (\sqrt{3})^0 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} : 1 = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

Luyện tập 1. Tính giá trị các biểu thức sau:

- a) $(-5)^{-1}$,
 b) $2^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$;
 c) $6^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} : 2^{-2}$

Lời giải

- a) $(-5)^{-1} = \frac{1}{(-5)^1} = \frac{-1}{5}$
 b) $2^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 1 \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = \frac{1}{\frac{1}{32}} = 32$
 c) $6^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} : 2^{-2} = \frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} : \frac{1}{2^2} = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{\frac{1}{27}} : \frac{1}{4} = \frac{1}{36} \cdot 27 \cdot 4 = 3$

- a) Nếu $b > 0$ thì b có hai căn bậc hai, kí hiệu là $\sqrt{b}$ (gọi là căn bậc hai số học của b) và $-\sqrt{b}$
 b) Số 0 chỉ có duy nhất một căn bậc hai là chính nó;
 c) Nếu $b < 0$ thì b không có căn bậc hai nào;
 d) Mọi số thực b có duy nhất một căn bậc ba, kí hiệu là $\sqrt[3]{b}$.

Mở rộng kết quả này, ta có:

Cho n là số nguyên dương ($n \geq 2$), b là số thực bất kì. Khi đó:

- Nếu n là số chẵn thì:
 - $b < 0$: không tồn tại căn bậc n của b .
 - $b = 0$: có một căn bậc n của b là 0.
 - $b > 0$: có hai căn bậc n của b đối nhau, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{b}$ và giá trị âm là $-\sqrt[n]{b}$.
- Nếu n là số lẻ thì có duy nhất một căn bậc n của b , kí hiệu $\sqrt[n]{b}$.

Chú ý:

- a) Nếu n chẵn thì căn thức $\sqrt[n]{b}$ có nghĩa chỉ khi $b \geq 0$.
 b) Nếu n lẻ thì căn thức $\sqrt[n]{b}$ luôn có nghĩa với mọi số thực b .

Ví dụ 2: Tìm các căn bậc bốn của 16 ; căn bậc năm của $-4\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có $2^4 = 16$. Suy ra 16 có hai căn bậc bốn là

$$\sqrt[4]{16} = 2 \text{ và } -\sqrt[4]{16} = -2.$$

$$\text{Ta có } -4\sqrt{2} = (-\sqrt{2})^5$$

$$\text{Suy ra } \sqrt[5]{-4\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

Ta có các tính chất sau đây (với điều kiện các căn thức đều có nghĩa):



$$\begin{aligned} & \bullet \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} & \bullet \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} & \bullet (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \\ & \bullet \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ |a| & \text{khi } n \text{ chẵn} \end{cases} & \bullet \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\sqrt[4]{(3-\pi)^4}$ b) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{-4}$ c) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$

Lời giải

a) $\sqrt[4]{(3-\pi)^4} = |3-\pi| = \pi-3$ (vì $\pi > 3$);

b) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{-4} = \sqrt[5]{8 \cdot (-4)} = \sqrt[5]{-2^3 \cdot 2^2} = \sqrt[5]{-2^5} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$;

c) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}} = \sqrt[4]{(\sqrt[3]{2})^3 \cdot \sqrt[3]{2}} = \sqrt[4]{(\sqrt[3]{2})^4} = \sqrt[3]{2}$

Luyện tập 2. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$ b) $(\sqrt[5]{8})^2$ c) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$

Lời giải

$$a) \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$b) (\sqrt[6]{8})^2 = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6]{2^6} = |2| = 2$$

$$c) \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3 \cdot 27} = \sqrt[4]{3^4} = |3| = 3$$

3. Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ

HĐ 3. Cho số thực $a > 0$.

a) Hai biểu thức $\sqrt[6]{a^4}$ và $\sqrt[3]{a^2}$ có giá trị bằng nhau không? Giải thích.

b) Chỉ ra ít nhất hai biểu thức khác nhau có giá trị bằng $\sqrt[3]{a^2}$.

Lời giải

$$a) \text{Ta có: } \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{2^4}} = \sqrt[3]{2^2}$$

$$b) \text{Các biểu thức khác có giá trị bằng } \sqrt[3]{2^2} \text{ là } \sqrt[9]{2^6}; \sqrt[12]{2^8}$$

Cho số thực dương a và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$.

Luỹ thừa của a với số mũ r , kí hiệu a^r , được xác định bởi

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Ví dụ 4. Biểu thị các luỹ thừa sau đây dưới dạng căn thức:

$$a) 2^{\frac{1}{3}}$$

$$b) 5^{-\frac{2}{3}}.$$

Lời giải

$$a) 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

$$b) 5^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{25}}.$$

HĐ 3. Tính giá trị biểu thức sau:

$$a) 25^{\frac{1}{2}}$$

$$b) \left(\frac{36}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$c) 100^{1,5}$$

Lời giải

$$a) 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

$$b) \left(\frac{36}{49}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{36}{49}\right)^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{36}{49}}} = \sqrt{\frac{49}{36}} = \frac{7}{6}$$

$$c) 100^{1,5} = 100^{\frac{3}{2}} = \sqrt{100^3} = \sqrt{1000000} = 1000.$$

HD 4. Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ:

a) $\sqrt{2^3}$

b) $\sqrt[5]{\frac{1}{27}}$

c) $(\sqrt[5]{a})^4 \quad (a > 0)$

Lời giải

a) $\sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}}$

b) $\sqrt[5]{\frac{1}{27}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{5}}$

c) $(\sqrt[5]{a})^4 (a > 0) = a^{\frac{4}{5}}$

4. Lũy thừa với số mũ thực

Ta biết rằng, $\sqrt{2}$ là một số vô tỷ có thể biểu diễn dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn: $\sqrt{2} = 1,414213562 \dots$

Cũng có thể coi $\sqrt{2}$ là giới hạn của dãy số hữu tỉ (r_n) :

1,4; 1,41; 1,414; 1,4142.....

Từ đây, ta lập dãy số các lũy thừa (3^{r_n}) .

a) Bảng dưới cho biết những số hạng đầu tiên của dãy số (3^{r_n}) (làm tròn đến chữ số thập phân thứ chín).

Sử dụng máy tính cầm tay, hãy tính số hạng thứ 6 và thứ 7 của dãy số này.

n	r_n	3^{r_n}
1	1,4	4,655 536 722
2	1,41	4,706 965 002
3	1,414	4,727 695 035
4	1,4142	4,728 733 930
5	1,41421	4,728 801 466
6	1,414213	?
7	1,4142135	?

b) Nêu nhận xét về dãy số (3^{r_n}) .

Lời giải

a)

n	r_n	3^{r_n}
1	1,4	4,655536722
2	1,41	4,706965002
3	1,414	4,727695035

4	1,4142	4,728733930
5	1,41421	4,728785881
6	1,414213	4,728801466
7	1,4142134	4,728804064

b) Ta thấy dãy số (3^{r_n}) , khi $n \rightarrow +\infty$ thì $3^{r_n} \rightarrow 3^{\sqrt{2}}$

Người ta chứng minh được rằng dãy số (3^{r_n}) ở trên có giới hạn khi $n \rightarrow +\infty$. Giới hạn đó là một số thực, kí hiệu là $3^{\sqrt{2}}$ và gọi là lũy thừa với số mũ $\sqrt{2}$.

Vậy $3^{\sqrt{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{r_n}$.

Sử dụng máy tính cầm tay (làm tròn đến chữ số thập phân thứ chín), ta thấy $3^{\sqrt{2}} \approx 4,728804388$.

Một cách tổng quát, với a là số thực dương, α là số vô tỷ bất kỳ, người ta chứng minh được rằng có dãy số hữu tỉ (r_n) sao cho $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$ và dãy số (a^{r_n}) có giới hạn không phụ thuộc vào việc chọn dãy (r_n) .

Giới hạn của dãy số (a^{r_n}) được gọi là **lũy thừa** của số thực dương a với số mũ α , kí hiệu là a^α

$$a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n} \quad \text{với} \quad \alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n.$$

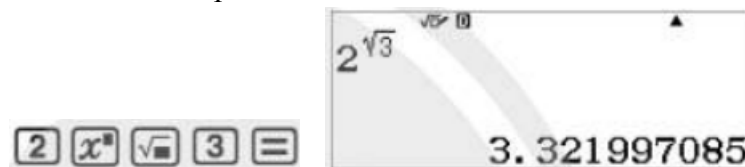
Chú ý: $1^\alpha = 1$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 5: Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các lũy thừa sau, làm tròn đến chữ số thập phân thứ

sau: $2^{\sqrt{3}}; \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}}$.

Lời giải

Ấn lần lượt các phím



Ta được $2^{\sqrt{3}} \approx 3,321997$.

Ấn lần lượt các phím



ta được: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}} \approx 2,665144$.

HD 5. Sử dụng máy tính cầm tay, tính các lũy thừa sau đây (làm tròn đến chữ số thập phân thứ sáu):

a) $1,2^{1,5}$

b) $10^{\sqrt{3}}$

c) $(0,5)^{-\frac{2}{3}}$

Lời giải

a) $1,2^{1,5} = 1,314534$

b) $10^{\sqrt{3}} = 53,957374$

c) $(0,5)^{-\frac{2}{3}} = 2,924018$

5. Tính chất của phép tính lũy thừa.

a) Sử dụng máy tính cầm tay, hoàn thành bảng sau vào vở(làm tròn kết quả đến chữ sso thập phân thứ năm)

a	α	β	$a^\alpha \cdot a^\beta$	$a^\alpha : a^\beta$	$a^{\alpha+\beta}$	$a^{\alpha-\beta}$
3	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	?	?	?	?

b) Từ kết quả ở câu a, có dự đoán gì về tính chất của phép tính lũy thừa với số mũ thực?

Lời giải

a	α	β	$a^\alpha \cdot a^\beta$	$a^\alpha : a^\beta$	$a^{\alpha+\beta}$	$a^{\alpha-\beta}$
3	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	31,70659	0,70527	31,70659	0,70527

Ta thấy: $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$

$a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}$

Phép tính lũy thừa với số mũ thực có tính chất tương tự như lũy thừa với số mũ tự nhiên.

Cho a, b là những số thực dương; α, β là những số thực bất kì. Khi đó:

$$\begin{aligned}
 & \bullet a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta} & \bullet \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta} & \bullet (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta} \\
 & \bullet (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha & \bullet \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}
 \end{aligned}$$

Ví dụ 6: Viết các biểu thức sau dưới dạng một lũy thừa ($a > 0$)

a) $\sqrt{a}\sqrt{a}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^{-3}} : \sqrt[6]{a^{-1}}$

Lời giải

$$a) \sqrt{a}\sqrt{a} = \left(a \cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 3}} = a^{\frac{1}{2}}.$$

$$b) \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^{-3}} : \sqrt[6]{a^{-1}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{-\frac{3}{4}} : a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{6}} = a^{-\frac{1}{4}}.$$

Ví dụ 7: Rút gọn biểu thức $\frac{6^{2+\sqrt{5}} \cdot 2^{1-\sqrt{5}}}{3^{3+\sqrt{5}}}$

Lời giải

$$\frac{6^{2+\sqrt{5}} \cdot 2^{1-\sqrt{5}}}{3^{3+\sqrt{5}}} = \frac{(2 \cdot 3)^{2+\sqrt{5}} \cdot 2^{1-\sqrt{5}}}{3^{3+\sqrt{5}}} = 2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{2+\sqrt{5}} \cdot 2^{1-\sqrt{5}} \cdot 3^{-3-\sqrt{5}} = 2^{2+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}} \cdot 3^{2+\sqrt{5}-3-\sqrt{5}} = 2^3 \cdot 3^{-1} = \frac{8}{3}.$$

HD 6. Viết các biểu thức sau dưới dạng một lũy thừa ($a > 0$)

$$a) a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{1}{2}} : a^{-\frac{2}{5}}$$

$$b) \sqrt{a^{\frac{1}{2}} \sqrt{a^{\frac{1}{2}}} \sqrt{a}}$$

Lời giải

$$a) a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{1}{2}} : a^{-\frac{2}{5}} = a^{\frac{3}{5} + \frac{1}{2} - (-\frac{2}{5})} = a^{\frac{3}{2}}$$

$$b) \sqrt{a^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{a}} = \sqrt{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}} = \sqrt{a^{\frac{5}{4}}} = \sqrt{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^1} = \sqrt{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{2}}} = \sqrt{a^{\frac{1+2}{2}}} = \sqrt{a^{\frac{3}{2}}} = a^{\frac{3}{4}}$$

HD 7. Rút gọn biểu thức: $(x^{\sqrt{2}} y)^{\sqrt{2}} (9y^{-\sqrt{2}})$ (Với $x, y > 0$).

Lời giải

$$(x^{\sqrt{2}} \cdot y)^{\sqrt{2}} \cdot (9y^{-\sqrt{2}}) = x^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \cdot y^{\sqrt{2}} \cdot 9 \cdot y^{-\sqrt{2}} = 9x^2 \cdot y^{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = 9x^2$$

Vận dụng 2 : Tại một vùng biển , giả sử cường độ ánh sáng I thay đổi theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot 10^{-0,3d}$, trong đó d là độ sâu (tính bằng mét) so với mặt hồ, I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ.



a) Tại độ sâu $1m$, cường độ ánh sáng gấp bao nhiêu lần I_0 ?

b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu $2m$ gấp bao nhiêu lần so với tại độ sâu $10m$? Làm tròn kết quả đến hai chữ số thập phân.

Lời giải

$$a) \text{ Tại } d = 1; \text{ ta có } I = I_0 \cdot 10^{-0,3 \cdot 1} = I_0 \cdot 10^{-0,3}.$$

Vậy cường độ ánh sáng tại độ sâu $1m$ gấp $10^{-0,3}$ lần I_0

b) Tại $d = 2$; ta có $I = I_0 \cdot 10^{-0,3,2}$.

Tại $d = 10$; ta có $I = I_0 \cdot 10^{-0,3,10}$

Cường độ ánh sáng tại độ sâu 2 m gấp $10^{-0,3,2} : 10^{-0,3,10} = 10^{-0,3,2-(-0,3,10)} = 10^{0,3,8} = 251,19$ lần so với tại độ sâu 10 m

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Rút gọn biểu thức

1. Phương pháp

- Giải bằng phương pháp tự luận (kết hợp nhiều tính chất của lũy thừa)
- Giải bằng casio (dò tìm đáp án đối với trắc nghiệm)

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $K = (\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)$ ta được:

- A. $x^2 + 1$ B. $x^2 + x + 1$ C. $x^2 - x + 1$ D. $x^2 - 1$

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Tự luận: Dựa vào hằng đẳng thức thứ ba ta có

$$K = (\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) = \left[(\sqrt{x} + 1)^2 - \sqrt{x} \right] (x - \sqrt{x} + 1)$$

$$= (x + \sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) = \left[(x+1)^2 - x \right] = x^2 + x + 1.$$

Cách 2. Casio: Biểu diễn qua 100

$$\text{Nhập } (\sqrt{X} - \sqrt[4]{X} + 1)(\sqrt{X} + \sqrt[4]{X} + 1)(X - \sqrt{X} + 1) \xrightarrow[X=100]{\text{Calc}} 10101$$

$$= 100^2 + 100 + 1 = x^2 + x + 1 \Rightarrow \boxed{B}$$

Cách 3. Casio: Thử lần lượt 4 đáp án.

$$\text{Nhập } (\sqrt{X} - \sqrt[4]{X} + 1)(\sqrt{X} + \sqrt[4]{X} + 1)(X - \sqrt{X} + 1) : X^2 + X + 1 \xrightarrow[X=1]{\text{Calc}} 3; 3 \Rightarrow \boxed{B}$$

Ví dụ 2. Cho x, y là các số thực dương. Rút gọn biểu thức $K = \left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} \right)^2 \left(1 - 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \right)^{-1}$?

- A. x B. $2x$ C. $x+1$ D. $x-1$

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Tự luận: Viết biểu thức K dưới dạng

$$K = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \left(1 - \sqrt{\frac{y}{x}} \right)^{-2} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x}} \right)^2} = x \Rightarrow \boxed{A}$$

Cách 2. Casio: Biểu diễn qua 100 và 0,01

$$\text{Nhập } K = \left(X^{\frac{1}{2}} - Y^{\frac{1}{2}} \right)^2 \left(1 - 2\sqrt{\frac{Y}{X}} + \frac{Y}{X} \right)^{-1} \xrightarrow[X=100; Y=0,01]{Calc} 100 = x \Rightarrow \boxed{A}$$

Cách 3. Casio: Thử lần lượt 4 đáp án. Đáp án đúng là đáp án A.

$$\text{Nhập } K = \left(X^{\frac{1}{2}} - Y^{\frac{1}{2}} \right)^2 \left(1 - 2\sqrt{\frac{Y}{X}} + \frac{Y}{X} \right)^{-1} : X \xrightarrow[X=1; Y=0]{Calc} 1; 1 \Rightarrow \boxed{A}$$

Ví dụ 3. Cho số thực $a > 0$ và $a \neq 1$. Hãy rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{5}{2}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{7}{12}} - a^{\frac{19}{12}} \right)}$

A. $P = 1 + a$

B. $P = 1$

C. $P = a$

D. $P = 1 - a$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = \frac{a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{5}{2}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{7}{12}} - a^{\frac{19}{12}} \right)} = \frac{a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{2}} (1 - a^2)}{a^{\frac{1}{4}} a^{\frac{7}{12}} (1 - a)} = \frac{a^{\frac{5}{6}} (1 - a^2)}{a^{\frac{5}{6}} (1 - a)} = 1 + a \Rightarrow \boxed{A}$$

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(a) = \frac{a^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt[3]{a^{-2}} - \sqrt[3]{a} \right)}{a^{\frac{1}{8}} \left(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}} \right)}$ với $a > 0, a \neq 1$. Tính giá trị $M = f(2017^{2018})$.

A. $M = 2017^{2018} + 1$.

B. 2017^{1009} .

C. $2017^{1009} + 1$.

D. $-2017^{1009} - 1$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1. Tự luận

$$\text{Ta có } f(a) = \frac{a^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt[3]{a^{-2}} - \sqrt[3]{a} \right)}{a^{\frac{1}{8}} \left(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}} \right)} = \frac{a^{\frac{2}{3}} a^{-\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{8}} a^{\frac{3}{8}} - a^{\frac{1}{8}} a^{-\frac{1}{8}}} = \frac{1 - a}{a^{\frac{1}{2}} - a} = -1 - a^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Do đó } M = f(2017^{2018}) = -1 - (2017^{2018})^{\frac{1}{2}} = -1 - 2017^{1009}.$$

Cách 2. Casio biểu diễn qua 100

$$\text{Nhập } f(X) = \frac{X^{\frac{2}{3}} \left(\sqrt[3]{X^{-2}} - \sqrt[3]{X} \right)}{X^{\frac{1}{8}} \left(\sqrt[8]{X^3} - \sqrt[8]{X^{-1}} \right)} \xrightarrow[X=100]{Cacl} -11 = -1 - \sqrt{100} = -1 - \sqrt{X}$$

$$\text{Do đó } M = f(2017^{2018}) = -1 - \sqrt{2017^{2018}} = -1 - 2017^{1009}.$$

Ví dụ 5. Cho x, y là các số thực dương và $x \neq y$. Biểu thức $A = \sqrt{(x^{2x} + y^{2x})^2 - \left(4^{\frac{1}{2x}}xy\right)^{2x}}$ bằng

- A. $y^{2x} - x^{2x}$ B. $|x^{2x} - y^{2x}|$ C. $(x - y)^{2x}$ D. $x^{2x} - y^{2x}$

Lời giải

Chọn B

$$S = \sqrt{x^{4x} + 2(xy)^{2x} + y^{4x} - 4(xy)^{2x}} = \sqrt{x^{4x} - 2(xy)^{2x} + y^{4x}}$$

$$= \sqrt{(x^{2x} - y^{2x})^2} = |x^{2x} - y^{2x}|$$

Nhận xét: Câu này là câu bẫy với những ai dùng máy tính. Thật vậy

Nhập $\sqrt{(X^{2X} + Y^{2X})^2 - \left(4^{\frac{1}{2X}}XY\right)^{2X}} - (Y^{2X} - X^{2X}) \xrightarrow[X=2; Y=3]{Calc} 0$ khoanh đáp án A là sai vì đáp án B mới

là đáp án đúng. Để không bị sai khi gặp các đáp án giống nhau mà trong 1 đáp án có dấu trị tuyệt đối thì ta nên thử với các giá trị đối nhau

$$\text{Nhập } \sqrt{(X^{2X} + Y^{2X})^2 - \left(4^{\frac{1}{2X}}XY\right)^{2X}} - |X^{2X} - Y^{2X}| \xrightarrow[\begin{matrix} X=2; Y=3 \\ X=-2; Y=-3 \end{matrix}]{Calc} 0.$$

Dạng 2. Viết biểu thức dưới dạng lũy thừa

1. Phương pháp

- Giải bằng phương pháp tự luận (kết hợp nhiều tính chất của lũy thừa)
- Giải bằng casio (dò tìm đáp án đối với trắc nghiệm)

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} : x^{\frac{11}{16}}$ ta được:

- A. $\sqrt[4]{x}$ B. $\sqrt[6]{x}$ C. $\sqrt[8]{x}$ D. $\sqrt{x}$

Lời giải

Chọn a

Cách 1. Theo nguyên tắc "Chia cộng" từ trong ra ngoài ta có

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x.x^{\frac{1}{2}}}}} = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x.x^{\frac{3}{2}}}}} = \sqrt{x\sqrt{x.x^{\frac{3}{4}}}} = \sqrt{x\sqrt{x.x^{\frac{7}{4}}}} = \sqrt{x.x^{\frac{7}{8}}} = \sqrt{x^{\frac{15}{8}}} = x^{\frac{15}{16}}$$

$$\text{Do đó } \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} : x^{\frac{11}{16}} = x^{\frac{15}{16}} : x^{\frac{11}{16}} = x^{\frac{4}{16}} = \sqrt[4]{x}.$$

Chú ý: Trong quá trình thực hành vì cùng 1 ẩn x nên ta chỉ cần nhắm theo số mũ cho nhanh.

Cách 2. Thử 4 đáp án.

$$\text{Nhập } \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} : X^{\frac{11}{16}} - \sqrt[4]{X} \xrightarrow[X=2]{Calc} 0 \Rightarrow \boxed{A}$$

$$\text{Cách 3. Nhập } \log_x \left(\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} \right) - \log_x \left(X^{\frac{11}{16}} \right) \xrightarrow[X=2]{Calc} \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{A}$$

Ví dụ 2. Biểu thức $K = \sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là:

- A. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{18}}$ B. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ C. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$ D. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}$

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Coi $X = \frac{2}{3}$. Theo nguyên tắc "Chia cộng" ta có

$$K = \sqrt[3]{X\sqrt[3]{X\sqrt{X}}} = \sqrt[3]{X\sqrt[3]{X.X^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[3]{X\sqrt[3]{X^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt[3]{X.X^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{X^{\frac{3}{2}}} = X^{\frac{1}{2}}$$

Cách 2. Thử 4 đáp án.

Nhập $\log_X \sqrt[3]{X\sqrt[3]{X\sqrt{X}}} \xrightarrow[X=2]{Calc} \frac{1}{2} \Rightarrow [B]$

Ví dụ 3. Cho $a, b > 0$ viết $a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{a}$ và $\sqrt[3]{b\sqrt{b\sqrt{b}}}$ về dạng $a^x, b^y; x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó $6x + 12y$ là

- A. 17. B. $\frac{7}{12}$. C. 14. D. $\frac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Nhập $\begin{cases} \log_A \left(A^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{A} \right) \xrightarrow[A=2]{Calc} \frac{7}{6} = x \\ \log_B \left(\sqrt[3]{B\sqrt{B\sqrt{B}}} \right) \xrightarrow[B=2]{Calc} \frac{7}{12} = y \end{cases} \Rightarrow 6x + 12y = 14.$

Dạng 3. So sánh

1. Phương pháp

- Giải bằng phương pháp tự luận (kết hợp nhiều tính chất của lũy thừa)
- Giải bằng casio: Sử dụng chức năng Ture/Fasle hoặc thay giá trị trực tiếp

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Cho $a > 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$. B. $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} > 1$. C. $a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$. D. $\frac{1}{a^{2018}} < \frac{1}{a^{2019}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\frac{1}{a^{\sqrt{5}}} = a^{-\sqrt{5}}$.

Lại có $\begin{cases} -\sqrt{3} > -\sqrt{5} \\ a > 1 \end{cases} \Rightarrow a^{-\sqrt{3}} > a^{-\sqrt{5}} \Rightarrow a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}.$

Ví dụ 2. So sánh ba số: $(0,2)^{0,3}$, $(0,7)^{3,2}$ và $\sqrt{3}^{0,2}$ ta được

A. $(0,7)^{3,2} < (0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,2}.$

B. $(0,2)^{0,3} < (0,7)^{3,2} < \sqrt{3}^{0,2}.$

C. $\sqrt{3}^{0,2} < (0,2)^{0,3} < (0,7)^{3,2}.$

D. $(0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,2} < (0,7)^{3,2}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $(0,2)^{0,3} = (0,2)^{\frac{3}{10}} = \left[(0,2)^3\right]^{\frac{1}{10}} = (0,008)^{\frac{1}{10}}.$

$(0,7)^{3,2} = (0,7)^{\frac{32}{10}} = \left[(0,7)^{32}\right]^{\frac{1}{10}}.$

$\sqrt{3}^{0,2} = (3)^{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{10}} = 3^{\frac{1}{10}}.$

Do $(0,7)^{32} < 0,008 < 3$ nên $(0,7)^{3,2} < (0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,2}.$

Ví dụ 3. Nếu $(a-2)^{\frac{1}{4}} < (a-2)^{\frac{1}{3}}$ thì khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $2 < a < 3.$

B. $a > 2.$

C. $a < 3.$

D. $a > 3.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ và $(a-2)^{\frac{1}{4}} < (a-2)^{\frac{1}{3}}$ nên $a-2 > 1 \Leftrightarrow a > 3.$

Ví dụ 4. Cho $(2m-1)^{\frac{-3}{4}} < (2m-1)^{\frac{-5}{4}}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m \geq 1.$

B. $\frac{1}{2} \leq m \leq 1.$

C. $m > 1.$

D. $\frac{1}{2} < m < 1.$

Lời giải

Chọn D

Do $\frac{-3}{4} > \frac{-5}{4}$ nên ta có: $(2m-1)^{\frac{-3}{4}} < (2m-1)^{\frac{-5}{4}} \Leftrightarrow 0 < 2m-1 < 1 \Leftrightarrow 1 < 2m < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 1.$

Ví dụ 5. Nếu $(a-2)^{\frac{1}{4}} < (a-2)^{\frac{1}{3}}$ thì khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $2 < a < 3.$

B. $a > 2.$

C. $a < 3.$

D. $a > 3.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ và $(a-2)^{\frac{1}{4}} < (a-2)^{\frac{1}{3}}$ nên $a-2 > 1 \Leftrightarrow a > 3.$

Ví dụ 6. Cho mệnh đề $A: \left(\sin \frac{\pi}{12}\right)^{2018} > \left(\sin \frac{\pi}{12}\right)^{2019}$ và mệnh đề $B: \log_{\frac{e}{2}} 2018 > \log_{\frac{e}{2}} 2019$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** A sai, B sai. **B.** A đúng, B đúng.
C. A đúng, B sai. **D.** A sai, B đúng.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\sin \frac{\pi}{12} < 1$ và $2018 < 2019$ nên $\left(\sin \frac{\pi}{12}\right)^{2018} > \left(\sin \frac{\pi}{12}\right)^{2019}$ suy ra A đúng.

Tương tự vì $\frac{e}{2} > 1$ và $2018 < 2019$ nên $\log_{\frac{e}{2}} 2018 < \log_{\frac{e}{2}} 2019$ suy ra B sai.

Ví dụ 7. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $(\sqrt{5} + 2)^{-2017} < (\sqrt{5} + 2)^{-2018}$. **B.** $(\sqrt{5} + 2)^{2018} > (\sqrt{5} + 2)^{2019}$.
C. $(\sqrt{5} - 2)^{2018} > (\sqrt{5} - 2)^{2019}$. **D.** $(\sqrt{5} - 2)^{2018} < (\sqrt{5} - 2)^{2019}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{cases} 0 < \sqrt{5} - 2 < 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5} - 2)^{2018} > (\sqrt{5} - 2)^{2019} \Rightarrow C \text{ đúng.}$$

$$\begin{cases} \sqrt{5} + 2 > 1 \\ -2017 > -2018 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5} + 2)^{-2017} > (\sqrt{5} + 2)^{-2018} \Rightarrow A \text{ sai}$$

$$\begin{cases} \sqrt{5} + 2 > 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5} + 2)^{2018} < (\sqrt{5} + 2)^{2019} \Rightarrow B \text{ sai}$$

$$\begin{cases} 0 < \sqrt{5} - 2 < 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5} - 2)^{2018} > (\sqrt{5} - 2)^{2019} \Rightarrow D \text{ sai.}$$

Ví dụ 8. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A.** $(\sqrt{2} - 1)^{2017} > (\sqrt{2} - 1)^{2018}$. **B.** $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019} < \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.
C. $(\sqrt{3} - 1)^{2018} > (\sqrt{3} - 1)^{2017}$. **D.** $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Do } \begin{cases} 2018 > 2017 \\ \sqrt{3} - 1 > 1 \end{cases} \text{ nên } (\sqrt{3} - 1)^{2018} < (\sqrt{3} - 1)^{2017}.$$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot 3^2 \cdot 12^0$;

b) $\left(\frac{1}{12}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$;

c) $(2^{-2} \cdot 5^2)^{-2} : (5 \cdot 5^{-5})$.

Lời giải

$$a) \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot 3^2 \cdot 12^0 = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} \cdot 9 \cdot 1 = \frac{1}{\frac{9}{16}} \cdot 9 = \frac{16}{9} \cdot 9 = 16$$

$$b) \left(\frac{1}{12}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\frac{1}{12}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 12 \cdot \frac{1}{\frac{4}{9}} = 12 \cdot \frac{9}{4} = 27$$

$$c) (2^{-2} \cdot 5^2)^{-2} : (5 \cdot 5^{-5}) = \left(\frac{1}{2^2} \cdot 5^2\right)^{-2} : \left(5 \cdot \frac{1}{5^5}\right) = \left(\frac{5^2}{4}\right)^{-2} : \frac{1}{5^4} = \frac{1}{\left(\frac{5^2}{4}\right)^2} \cdot 5^4 = \frac{1}{\frac{5^4}{16}} \cdot 5^4 = \frac{16}{5^4} \cdot 5^4 = 16$$

Bài 2. Viết các biểu thức sau dưới dạng một lũy thừa ($a > 0$):

a) $3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3}$;

b) $\sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a}$;

c) $\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}}{(\sqrt[5]{a})^3 \cdot a^{\frac{2}{5}}}$.

Lời giải

$$a) 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} = 3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = 3^{\frac{15}{8}}$$

$$b) \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a \cdot a \cdot a} = \sqrt{a \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{a \cdot a^{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{a^{1+\frac{3}{4}}} = \sqrt{a^{\frac{7}{4}}} = a^{\frac{7}{8}}$$

$$c) \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}}{(\sqrt[5]{a})^3 \cdot a^{\frac{2}{5}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{2}{5}}} = \frac{a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3+2}{5}}} = \frac{a^{\frac{13}{12}}}{a} = a^{\frac{13}{12}-1} = a^{\frac{1}{12}}$$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau ($a > 0, b > 0$):

a) $a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{7}{6}}$;

b) $a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{6}}$;

c) $\left(\frac{3}{2} a^{-\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{2}}\right) \left(-\frac{1}{3} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}\right)$.

Lời giải

$$a) a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{7}{6}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{7}{6}} = a^2$$

$$b) a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}} = a^{\frac{3}{4}}$$

$$c) \left(\frac{3}{2} a^{-\frac{3}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}} \right) \left(-\frac{1}{3} a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \cdot a^{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} a^{-1} b$$

Bài 4. Với một chỉ vàng, giả sử người thợ lành nghề có thể dát mỏng thành lá vàng rộng 1m^2 và dày khoảng $1,94 \cdot 10^{-7}\text{m}$. Đồng xu 5000 đồng dày $2,2 \cdot 10^{-3}\text{m}$. Cần chồng bao nhiêu lá vàng như trên để có độ dày bằng đồng xu loại 5000 đồng? Làm tròn kết quả đến chữ số hàng trăm.

Lời giải

Để có độ dày bằng đồng xu loại 5000 đồng ta cần chồng bao nhiêu lá vàng như trên là:

$$(2,2 \cdot 10^{-3}) : (1,94 \cdot 10^{-7}) \approx 11300 \text{ (lá vàng)}$$

Bài 5. Tại một xí nghiệp, công thức $P(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc máy sau thời gian t (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dụng.

a) Tính giá trị còn lại của máy sau 2 năm; sau 2 năm 3 tháng.

b) Sau 1 năm đưa vào sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng bao nhiêu phần trăm so với ban đầu ?

Lời giải

$$a) \text{ Với } t = 2 : P(2) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 314,98 \text{ (triệu đồng)}$$

2 năm 3 tháng = 2,25 năm.

$$\text{Với } t = 2,25 : P(2,25) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2,25}{3}} \approx 297,3 \text{ (triệu đồng)}$$

$$b) \text{ Với } t = 1 : P(1) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 396,85 \text{ (triệu đồng)}$$

Sau 1 năm đưa vào sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng: $396,85 : 500 \cdot 100 = 79,37\%$ so với ban đầu.

Bài 6. Biết rằng $10^\alpha = 2; 10^\beta = 5$. Tính $10^{\alpha+\beta}; 10^{\alpha-\beta}; 10^{2\alpha}; 10^{-2\alpha}; 1000^\beta; 0,01^{2\alpha}$

$$a) 16^\alpha + 16^{-\alpha};$$

$$b) (2^\alpha + 2^{-\alpha})^2.$$

Lời giải

$$10^{\alpha+\beta} = 10^\alpha \cdot 10^\beta = 2 \cdot 5 = 10$$

$$10^{\alpha-\beta} = \frac{10^\alpha}{10^\beta} = \frac{2}{5}$$

$$10^{2\alpha} = (10^\alpha)^2 = 2^2 = 4$$

$$10^{-2\alpha} = \frac{1}{10^{2\alpha}} = \frac{1}{4}$$

$$1000^\beta = (10^3)^\beta = (10^\beta)^3 = 5^3 = 125$$

$$0,01^{2\alpha} = \left(\frac{1}{100}\right)^{2\alpha} = \frac{1}{100^{2\alpha}} = \frac{1}{(10^2)^{2\alpha}} = \frac{1}{10^{4\alpha}} = \frac{1}{(10^\alpha)^4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

Bài 7. Biết rằng $4^\alpha = \frac{1}{5}$. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $16^\alpha + 16^{-\alpha}$;

b) $(2^\alpha + 2^{-\alpha})^2$.

Lời giải

$$a) 16^\alpha + 16^{-\alpha} = 16^\alpha + \frac{1}{16^\alpha} = (4^2)^\alpha + \frac{1}{(4^2)^\alpha} = (4^\alpha)^2 + \frac{1}{(4^\alpha)^2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{626}{25}$$

b)

$$\begin{aligned} (2^\alpha + 2^{-\alpha})^2 &= (2^\alpha)^2 + 2 \cdot 2^\alpha \cdot 2^{-\alpha} + (2^{-\alpha})^2 = 2^{2\alpha} + 2 + 2^{-2\alpha} = (2^2)^\alpha + 2 + (2^2)^{-\alpha} \\ &= 4^\alpha + 2 + 4^{-\alpha} = 4^\alpha + 2 + \frac{1}{4^\alpha} = \frac{1}{5} + 2 + \frac{1}{\frac{1}{5}} = \frac{36}{5} \end{aligned}$$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho a, b là các số thực dương. Rút gọn biểu thức $P = \frac{(\sqrt[4]{a^3 \cdot b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} \cdot b^6}}}$ được kết quả là

A. ab^2 .

B. a^2b .

C. ab .

D. a^2b^2 .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } P = \frac{(\sqrt[4]{a^3 \cdot b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} \cdot b^6}}} = \frac{a^3 \cdot b^2}{\sqrt[6]{(a^2 \cdot b)^6}} = a \cdot b.$$

Câu 2: Biểu thức $T = \sqrt[5]{a^3 \sqrt{a}}$ với $a > 0$. Viết biểu thức T dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là:

A. $a^{\frac{3}{5}}$.

B. $a^{\frac{2}{15}}$.

C. $a^{\frac{1}{3}}$.

D. $a^{\frac{4}{15}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $T = \sqrt[5]{a^3 \sqrt{a}} = \sqrt[5]{a \cdot a^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}} = a^{\frac{4}{15}}$.

Câu 3: Cho a là số thực dương, khác 1. Khi đó $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}}$ bằng

- A. $a^{\frac{8}{3}}$. B. $\sqrt[6]{a}$. C. $\sqrt[3]{a^2}$. D. $a^{\frac{3}{8}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{2}{3 \cdot 4}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$.

Câu 4: Cho $0 < a \neq 1$. Giá trị của biểu thức $P = \log_a \left(a \cdot \sqrt[3]{a^2} \right)$ là

- A. $\frac{4}{3}$. B. 3. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $P = \log_a \left(a \cdot \sqrt[3]{a^2} \right) = \log_a \left(a \cdot a^{\frac{2}{3}} \right) = \log_a a^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}$.

Câu 5: Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

- A. $P = \sqrt{x}$. B. $P = x^{\frac{1}{8}}$. C. $P = x^{\frac{2}{9}}$. D. $P = x^2$.

Lời giải

Chọn A

Với $x > 0$, ta có $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Câu 6: Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$.

- A. 1. B. $6^{-\sqrt{5}}$. C. 18. D. 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có $A = \frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}} = \frac{2^{3+\sqrt{5}} \cdot 3^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}} = 2^{3+\sqrt{5}-2-\sqrt{5}} \cdot 3^{3+\sqrt{5}-1-\sqrt{5}} = 2 \cdot 3^2 = 18$.

Câu 7: Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{x}$, với x là số thực dương.

- A. $P = x^{\frac{1}{12}}$. B. $P = x^{\frac{7}{12}}$. C. $P = x^{\frac{2}{3}}$. D. $P = x^{\frac{2}{7}}$.

Lời giải

Chọn B

$P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{7}{12}}$.

Câu 8: Cho $x > 0, y > 0$. Viết biểu thức $x^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[6]{x^5 \sqrt{x}}$ về dạng x^m và biểu thức $y^{\frac{4}{5}} : \sqrt[6]{y^5 \sqrt{y}}$ về dạng y^n .
Tính $m - n$.

A. $\frac{11}{6}$.

B. $-\frac{8}{5}$.

C. $-\frac{11}{6}$.

D. $\frac{8}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Với $x > 0, y > 0$, ta có

$$x^{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt[6]{x^5 \sqrt{x}} = x^{\frac{4}{5}} \cdot \left(x^5 \cdot x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{4}{5}} \cdot x^{\frac{5}{6}} \cdot x^{\frac{1}{12}} = x^{\frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{1}{12}} \Rightarrow m = \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{1}{12}.$$

$$y^{\frac{4}{5}} : \sqrt[6]{y^5 \sqrt{y}} = y^{\frac{4}{5}} : y^{\frac{5}{6} + \frac{1}{12}} = y^{\frac{4}{5} - \frac{5}{6} - \frac{1}{12}} = y^{-\frac{8}{5}}. \text{ Do đó } m - n = \frac{11}{6}.$$

Câu 9: Cho $a > 0, b > 0$ và x, y là các số thực bất kỳ. Đẳng thức nào sau đúng?

A. $(a+b)^x = a^x + b^x$.

B. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = a^x \cdot b^{-x}$.

C. $a^{x+y} = a^x + a^y$.

D. $a^x b^y = (ab)^{xy}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} = a^x \cdot b^{-x}.$$

Câu 10: Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[5]{x}$?

A. $x^{\frac{4}{7}}$.

B. $x^{\frac{3}{10}}$.

C. $x^{\frac{17}{10}}$.

D. $x^{\frac{13}{2}}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Với } x > 0 \text{ thì } P = x^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt[5]{x} = x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{5}} = x^{\frac{3}{2} + \frac{1}{5}} = x^{\frac{17}{10}}.$$

Câu 11: Cho $a > 0, b > 0$ và biểu thức $T = 2(a+b)^{-1} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$. Khi đó:

A. $T = \frac{2}{3}$.

B. $T = \frac{1}{2}$.

C. $T = 1$.

D. $T = \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Do $a > 0, b > 0$ ta có:

$$\begin{aligned} T &= 2(a+b)^{-1} \cdot (ab)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a} \right)} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{(a-b)^2}{ab}} \\ &= \frac{1}{a+b} \sqrt{4ab + a^2 - 2ab + b^2} = \frac{\sqrt{(a+b)^2}}{a+b} = 1. \end{aligned}$$

Câu 12: Cho hàm số $f(a) = \frac{a^{-\frac{1}{3}}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^4})}{a^{\frac{1}{8}}(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}})}$ với $a > 0, a \neq 1$. Tính giá trị $M = f(2017^{2016})$

- A.** $M = 2017^{1008} - 1$ **B.** $M = -2017^{1008} - 1$ **C.** $M = 2017^{2016} - 1$ **D.** $M = 1 - 2017^{2016}$

Lời giải

Chọn B

$$f(a) = \frac{a^{-\frac{1}{3}}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^4})}{a^{\frac{1}{8}}(\sqrt[8]{a^3} - \sqrt[8]{a^{-1}})} = \frac{1-a}{\sqrt{a}-1} = -1-\sqrt{a} \text{ nên } M = f(2017^{2016}) = -1-\sqrt{2017^{2016}} = -1-2017^{1008}$$

Câu 13: Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ với $a > 0$

- A.** $P = a$ **B.** $P = a^3$ **C.** $P = a^4$ **D.** $P = a^5$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } P = \frac{a^{\sqrt{3}+1} \cdot a^{2-\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}} = \frac{a^3}{a^{2-4}} = a^5$$

Câu 14: Cho hai số thực dương a, b . Rút gọn biểu thức $A = \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$ ta thu được $A = a^m \cdot b^n$. Tích của m, n là

- A.** $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{1}{21}$ **C.** $\frac{1}{9}$ **D.** $\frac{1}{18}$

Lời giải

Chọn C

$$A = \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \left(b^{\frac{1}{6}} + a^{\frac{1}{6}} \right)}{a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \Rightarrow m = \frac{1}{3}, n = \frac{1}{3} \Rightarrow m.n = \frac{1}{9}.$$

Câu 15: Cho biểu thức $\sqrt[5]{8\sqrt{2}\sqrt[3]{2}} = 2^{\frac{m}{n}}$, trong đó $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Gọi $P = m^2 + n^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $P \in (330; 340)$. **B.** $P \in (350; 360)$. **C.** $P \in (260; 370)$. **D.** $P \in (340; 350)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \sqrt[5]{8\sqrt{2}\sqrt[3]{2}} = \sqrt[5]{2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{3}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}} = 2^{\frac{11}{15}}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{11}{15} \Rightarrow \begin{cases} m = 11 \\ n = 15 \end{cases} \Rightarrow P = m^2 + n^2 = 11^2 + 15^2 = 346.$$

Câu 16: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt[3]{a^7} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a > 0$ ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$ trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m^2 - n^2 = 312$. B. $m^2 + n^2 = 543$. C. $m^2 - n^2 = -312$. D. $m^2 + n^2 = 409$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } A = \frac{\sqrt[3]{a^7} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-5}}} = \frac{a^{\frac{7}{3}} \cdot a^{\frac{11}{3}}}{a^4 \cdot a^{-\frac{5}{7}}} = \frac{a^6}{a^{\frac{23}{7}}} = a^{\frac{19}{7}}$$

Mà $A = a^{\frac{m}{n}}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản $\Rightarrow m = 19, n = 7 \Rightarrow m^2 - n^2 = 312$

Câu 17: Cho $4^x + 4^{-x} = 2$ và biểu thức $A = \frac{4 - 2^x - 2^{-x}}{1 + 2^x + 2^{-x}} = \frac{a}{b}$. Tích $a.b$ có giá trị bằng:

- A. 6. B. -10. C. -8. D. 8.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } 4^x + 4^{-x} = 2 \Leftrightarrow (2^x)^2 + (2^{-x})^2 + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} = 4 \Leftrightarrow (2^x + 2^{-x})^2 = 4 \Leftrightarrow 2^x + 2^{-x} = 2$$

$$\text{Ta có: } A = \frac{4 - 2^x - 2^{-x}}{1 + 2^x + 2^{-x}} = \frac{4 - (2^x + 2^{-x})}{1 + (2^x + 2^{-x})} = \frac{4 - 2}{1 + 2} = \frac{2}{3} = \frac{a}{b}.$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a.b = 2.3 = 6.$$

Câu 18: Cho a là số thực dương. Đơn giản biểu thức $P = \frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} \right)}$.

- A. $P = a(a+1)$. B. $P = a-1$. C. $P = a$. D. $P = a+1$.

Lời giải

Chọn C

$$P = \frac{a^{\frac{4}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{4}} \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}} \right)} = \frac{a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{-\frac{1}{4}}} = \frac{a + a^2}{a + 1} = \frac{a(a+1)}{a+1} = a.$$

Câu 19: Cho biểu thức $P = \sqrt[3]{x^4 \sqrt{x^3} \sqrt{x}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $P = x^{\frac{1}{2}}$ B. $P = x^{\frac{7}{12}}$ C. $P = x^{\frac{5}{8}}$ D. $P = x^{\frac{7}{24}}$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có : } P = \sqrt[3]{x^4 \sqrt{x^3} \sqrt{x}} = [x(x^3 \cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}]^{\frac{1}{3}} = [x(x^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{4}}]^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{7}{24}} = x^{\frac{5}{8}}$$

Câu 20: Tích $(2017)! \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \dots \left(1 + \frac{1}{2017}\right)^{2017}$ được viết dưới dạng a^b , khi đó (a, b) là cặp nào trong các cặp sau?

- A. (2018; 2017). B. (2019; 2018). C. (2015; 2014). D. (2016; 2015).

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (2017)! \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \dots \left(1 + \frac{1}{2017}\right)^{2017} &= (2017)! \left(\frac{2}{1}\right)^1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \dots \left(\frac{2017}{2016}\right)^{2016} \left(\frac{2018}{2017}\right)^{2017} \\ &= (2017)! \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \dots \frac{1}{2016} \cdot \frac{2018^{2017}}{2017} = 2018^{2017}. \text{ Vậy } a = 2018; b = 2017. \end{aligned}$$

Câu 21: Cho $f(x) = 5^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng: $f(1) \cdot f(2) \dots f(2020) = 5^{\frac{m}{n}}$ với m, n là các số nguyên dương và phân số $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $m - n^2$

- A. $m - n^2 = 2021$. B. $m - n^2 = -1$. C. $m - n^2 = 1$. D. $m - n^2 = 2020$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f(x) = 5^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}} = 5^{\sqrt{\frac{x^2(x+1)^2 + x^2 + (x+1)^2}{x^2(x+1)^2}}} = 5^{\frac{x^2 + x + 1}{x(x+1)}} = 5^{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}.$$

$$\text{Do đó: } f(1) \cdot f(2) \dots f(2020) = 5^{\frac{m}{n}} \Leftrightarrow 5^{\sum_{x=1}^{2020} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)} = 5^{\frac{m}{n}} \Leftrightarrow \sum_{x=1}^{2020} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{m}{n}.$$

$$\Leftrightarrow 2021 - \frac{1}{2021} = \frac{4084440}{2021} = \frac{m}{n} \Rightarrow m = 4084440 = 2021^2 - 1, n = 2021.$$

$$\text{Vậy: } m - n^2 = (2021^2 - 1) - 2021^2 = -1.$$

Câu 22: Cho $m > 0$, $a = m\sqrt{m}$, $y = \frac{\sqrt[3]{m}}{a^2 \cdot \sqrt[4]{m}}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $y = \frac{1}{\sqrt[18]{a^{35}}}$. B. $y = \frac{1}{a^2}$. C. $y = \frac{1}{\sqrt[9]{a^{34}}}$. D. $y = \frac{1}{\sqrt[6]{a^{11}}}$.

Lời giải

Chọn A

$$a = m\sqrt{m} = m^{\frac{3}{2}} \Rightarrow a^{\frac{1}{18}} = m^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{18}} = m^{\frac{1}{12}}, y = \frac{\sqrt[3]{m}}{a^2 \cdot \sqrt[4]{m}} = \frac{m^{\frac{1}{3}}}{a^2 \cdot m^{\frac{1}{4}}} = \frac{m^{\frac{1}{12}}}{a^2} = \frac{a^{\frac{1}{18}}}{a^2} = \frac{1}{\sqrt[18]{a^{35}}}.$$

Câu 23: Biểu thức $C = \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}}}$ với $x > 0$ được viết dưới dạng lũy thừa số mũ hữu tỉ là

A. $x^{\frac{3}{16}}$.

B. $x^{\frac{7}{8}}$.

C. $x^{\frac{15}{16}}$.

D. $x^{\frac{31}{32}}$.

Lời giải

Chọn D

Với $x > 0$ ta có $C^2 = x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} \Leftrightarrow C^4 = x^2.x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \Leftrightarrow C^8 = x^4.x^2.x\sqrt{x\sqrt{x}}$
 $\Leftrightarrow C^{16} = x^8.x^4.x^2.x\sqrt{x} \Leftrightarrow C^{32} = x^{16}.x^8.x^4.x^2.x \Leftrightarrow C^{32} = x^{31} \Leftrightarrow C = x^{\frac{31}{32}}$.

Câu 24: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt[3]{a^5} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-2}}}$ với $a > 0$ ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$, trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m^2 - n^2 = 25$.

B. $m^2 + n^2 = 43$.

C. $3m^2 - 2n = 2$.

D. $2m^2 + n = 15$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $A = \frac{\sqrt[3]{a^5} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-2}}} = \frac{a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^4 \cdot a^{\frac{-2}{7}}} = a^{\frac{5}{3} + \frac{7}{3} - 4 + \frac{2}{7}} = a^{\frac{2}{7}} \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=7 \end{cases} \Rightarrow 2m^2 + n = 15$.

Câu 25: Cho a, b là hai số thực dương. Thu gọn biểu thức $\frac{a^{\frac{7}{6}} \cdot b^{\frac{-2}{3}}}{\sqrt[6]{ab^2}}$, kết quả nào sau đây là đúng?

A. $\sqrt[3]{\frac{a^4}{b}}$.

B. ab .

C. $\frac{b}{a}$.

D. $\frac{a}{b}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\frac{a^{\frac{7}{6}} \cdot b^{\frac{-2}{3}}}{\sqrt[6]{ab^2}} = \frac{a^{\frac{7}{6}} \cdot b^{\frac{-2}{3}}}{a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{3}}} = a^1 \cdot b^{-1} = \frac{a}{b}$.

Câu 26: Cho biểu thức $P = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3}}}}$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là đúng?

A. $P = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$.

B. $P = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$.

C. $P = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{18}}$.

D. $P = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $P = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3}}}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2} + 1}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Câu 27: Cho a là số dương khác 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a^{-2019} = a^{2019}$.

B. $a^{-2019} = -\left(\frac{1}{a}\right)^{2019}$.

C. $a^{-2019} = \left(\frac{1}{a}\right)^{2019}$.

D. $a^{-2019} = -a^{2019}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $a^{-2019} = \frac{1}{a^{2019}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{2019}$.

Câu 28: Cho a, b là các số thực dương. Rút gọn biểu thức $P = \frac{\left(\sqrt[4]{a^3 \cdot b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} \cdot b^6}}}$ được kết quả là

A. ab .

B. a^2b^2 .

C. ab^2 .

D. a^2b .

Lời giải

Chọn A

Ta có: $P = \frac{\left(\sqrt[4]{a^3 \cdot b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} \cdot b^6}}} = \frac{a^3 \cdot b^2}{\sqrt[6]{(a^2 \cdot b)^6}} = ab$.

Câu 29: Cho biểu thức $P = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P = x$

B. $P = x^{\frac{11}{6}}$

C. $P = x^{\frac{7}{6}}$

D. $P = x^{\frac{5}{6}}$

Lời giải

Chọn A

$P = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = x$

Câu 30: Cho a là số thực dương. Viết và rút gọn biểu thức $a^{\frac{3}{2018}} \cdot \sqrt[2018]{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Tìm số mũ của biểu thức rút gọn đó.

A. $\frac{2}{1009}$.

B. $\frac{1}{1009}$.

C. $\frac{3}{1009}$.

D. $\frac{3}{2018^2}$.

Lời giải

Chọn A

$a^{\frac{3}{2018}} \cdot \sqrt[2018]{a} = a^{\frac{3}{2018}} \cdot a^{\frac{1}{2018}} = a^{\frac{4}{2018}} = a^{\frac{2}{1009}}$. Vậy số mũ của biểu thức rút gọn bằng $\frac{2}{1009}$.

Câu 31: Cho số thực $a > 1$ và các số thực α, β . Kết luận nào sau đây đúng?

A. $a^\alpha > 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

B. $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

C. $\frac{1}{a^\alpha} < 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

D. $a^\alpha < 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Với $a > 1$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ta có: $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

Câu 32: Cho $\pi^\alpha > \pi^\beta$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $\alpha \cdot \beta = 1$.

B. $\alpha > \beta$.

C. $\alpha < \beta$.

D. $\alpha + \beta = 0$.

Lời giải

Chọn B

Vì $\pi \approx 3,14 > 0$ nên $\pi^\alpha > \pi^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

Câu 33: Với các số thực a, b bất kì, mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $(3^a)^b = 3^{a+b}$. B. $(3^a)^b = 3^{ab}$. C. $(3^a)^b = 3^{a-b}$. D. $(3^a)^b = 3^{a^b}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 34: Cho a, b là các số thực thỏa điều kiện $\left(\frac{3}{4}\right)^a > \left(\frac{4}{5}\right)^a$ và $b^{\frac{5}{4}} > b^{\frac{4}{3}}$. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

- A. $a > 0$ và $b > 1$. B. $a > 0$ và $0 < b < 1$.
C. $a < 0$ và $0 < b < 1$. D. $a < 0$ và $b > 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Vì } \left(\frac{3}{4}\right)^a > \left(\frac{4}{5}\right)^a \Rightarrow a < 0.$$

$$\text{Và } b^{\frac{5}{4}} > b^{\frac{4}{3}} \Rightarrow 0 < b < 1.$$

Câu 35: Cho a thuộc khoảng $\left(0; \frac{2}{e}\right)$, α và β là những số thực tùy ý. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $(a^\alpha)^b = a^{\alpha \cdot \beta}$. B. $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$. C. $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$. D. $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

Lời giải

Chọn D

$$a \in \left(0; \frac{2}{e}\right) \Rightarrow \text{Hàm số } y = a^x \text{ nghịch biến. Do đó } a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta.$$

Vậy đáp án **sai** là D.

Câu 36: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $(\sqrt{2}-1)^{2017} > (\sqrt{2}-1)^{2018}$. B. $(\sqrt{3}-1)^{2018} > (\sqrt{3}-1)^{2017}$.
C. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$. D. $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$.

Lời giải

Chọn B

$$+) \begin{cases} 0 < \sqrt{2}-1 < 1 \\ 2017 < 2018 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{2}-1)^{2017} > (\sqrt{2}-1)^{2018} \text{ nên A đúng.}$$

$$+) \begin{cases} 0 < \sqrt{3}-1 < 1 \\ 2018 > 2017 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{3}-1)^{2018} < (\sqrt{3}-1)^{2017} \text{ nên B sai.}$$

$$+) \begin{cases} 2 > 1 \\ \sqrt{2}+1 > \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow 2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}} \text{ nên C đúng.}$$

$$+) \begin{cases} 0 < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \\ 2018 > 2017 \end{cases} \Rightarrow \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018} < \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017} \text{ nên D đúng.}$$

Câu 37: Cho các số thực $a; b$ thỏa mãn $0 < a < 1 < b$. Tìm khẳng định đúng:

- A.** $\ln a > \ln b$. **B.** $(0,5)^a < (0,5)^b$. **C.** $\log_a b < 0$. **D.** $2^a > 2^b$.

Lời giải

Chọn B

Do cơ số $e \in (1; +\infty)$ và $0 < a < b$ nên ta có $\ln a < \ln b$. Đáp án A sai.

Do cơ số $0,5 \in (0; 1)$ và $0 < a < b$ nên ta có $(0,5)^a > (0,5)^b$. Đáp án B sai.

Do cơ số $a \in (0; 1)$ và $b > 1$ nên ta có $\log_a b < \log_a 1 \Leftrightarrow \log_a b < 0$. Đáp án C đúng.

Do cơ số $2 \in (1; +\infty)$ và $a < b$ nên ta có $2^a < 2^b$. Đáp án D sai.

Câu 38: Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $(\sqrt{5} + 2)^{-2017} < (\sqrt{5} + 2)^{-2018}$. **B.** $(\sqrt{5} + 2)^{2018} > (\sqrt{5} + 2)^{2019}$.
C. $(\sqrt{5} - 2)^{2018} > (\sqrt{5} - 2)^{2019}$. **D.** $(\sqrt{5} - 2)^{2018} < (\sqrt{5} - 2)^{2019}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{cases} 0 < \sqrt{5} - 2 < 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5} - 2)^{2018} > (\sqrt{5} - 2)^{2019} \Rightarrow C \text{ đúng.}$$

$$\begin{cases} \sqrt{5} + 2 > 1 \\ -2017 > -2018 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5} + 2)^{-2017} > (\sqrt{5} + 2)^{-2018} \Rightarrow A \text{ sai}$$

$$\begin{cases} \sqrt{5} + 2 > 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5} + 2)^{2018} < (\sqrt{5} + 2)^{2019} \Rightarrow B \text{ sai}$$

$$\begin{cases} 0 < \sqrt{5} - 2 < 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5} - 2)^{2018} > (\sqrt{5} - 2)^{2019} \Rightarrow D \text{ sai.}$$

Câu 39: Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A.** $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{3}} > \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$. **B.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}$. **C.** $3^{-\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$. **D.** $\left(\frac{1}{4}\right)^{-50} < (\sqrt{2})^{100}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\left(\frac{3}{7}\right) < \left(\frac{5}{8}\right) \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}. \text{ Phương án A sai.}$$

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}. \text{ Phương án B đúng.}$$

$$3 < 5 \Rightarrow 3^{-\sqrt{2}} > 5^{-\sqrt{2}} \Rightarrow 3^{-\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}. \text{ Phương án C sai.}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-50} < (\sqrt{2})^{100} \Rightarrow (2^{-2})^{-50} < (2)^{100} \Rightarrow 2^{100} < 2^{100}. \text{ Phương án D sai.}$$

Câu 40: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A.** $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$. **B.** $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019} < \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.
- C.** $(\sqrt{2} - 1)^{2017} > (\sqrt{2} - 1)^{2018}$. **D.** $(\sqrt{3} - 1)^{2018} > (\sqrt{3} - 1)^{2017}$.

Lời giải

Chọn D

A đúng vì $2 > 1$ và $\sqrt{2} + 1 > \sqrt{3}$ nên $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$.

B đúng vì $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 1$ và $2019 > 2018$ nên $\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019} < \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

C đúng vì $(\sqrt{2} - 1) < 1$ và $2017 < 2018$ nên $(\sqrt{2} - 1)^{2017} > (\sqrt{2} - 1)^{2018}$.

D sai vì $\sqrt{3} - 1 < 1$ và $2017 < 2018$ nên $(\sqrt{3} - 1)^{2018} < (\sqrt{3} - 1)^{2017}$.

Câu 41: Cho $P = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}}$ và $Q = 2\sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}\right)^3}$, với x, y là các số thực khác 0. So sánh P và Q ta có

- A.** $P < Q$. **B.** $P = Q$. **C.** $P = -Q$. **D.** $P > Q$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $x^2, y^2, \sqrt[3]{x^4 y^2}, \sqrt[3]{x^2 y^4}$ là những số thực dương.

$$\begin{aligned} Q &= 2\sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}\right)^3} = 2\sqrt{x^2 + 3\sqrt[3]{x^4 y^2} + 3\sqrt[3]{x^2 y^4} + y^2} \\ &= \sqrt{x^2 + 3\sqrt[3]{x^4 y^2} + 3\sqrt[3]{x^2 y^4} + y^2} + \sqrt{x^2 + 3\sqrt[3]{x^4 y^2} + 3\sqrt[3]{x^2 y^4} + y^2} \\ &> \sqrt{x^2 + 3\sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{3\sqrt[3]{x^2 y^4} + y^2} > \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{\sqrt[3]{x^2 y^4} + y^2} = P \end{aligned}$$

Vậy $P < Q$.

Câu 42: Tìm tập tất cả các giá trị của a để $\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2}$?

- A.** $a > 0$. **B.** $0 < a < 1$. **C.** $a > 1$. **D.** $\frac{5}{21} < a < \frac{2}{7}$.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt[7]{a^2} = \sqrt[21]{a^6}$. Ta có $\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2} \Leftrightarrow \sqrt[21]{a^5} > \sqrt[21]{a^6}$ mà $5 < 6$ vậy $0 < a < 1$.

Câu 43: Tìm khẳng định đúng.

A. $(2 - \sqrt{3})^{2016} > (2 - \sqrt{3})^{2017}$.

B. $(2 + \sqrt{3})^{2016} > (2 + \sqrt{3})^{2017}$.

C. $-(2 + \sqrt{3})^{-2016} > -(2 + \sqrt{3})^{-2017}$.

D. $(2 - \sqrt{3})^{-2016} > (2 - \sqrt{3})^{-2017}$.

Lời giải

Chọn A

Có $0 < 2 - \sqrt{3} < 1 \Rightarrow (2 - \sqrt{3})^{2016} > (2 - \sqrt{3})^{2017}$.

Câu 44: Cho $a > 1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

A. $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} > 1$

B. $\frac{1}{a^{2017}} < \frac{1}{a^{2018}}$

C. $a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$

D. $a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$

Lời giải

Chọn C

Ta có : $a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}} \Leftrightarrow \frac{1}{a^{\sqrt{3}}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}} \Leftrightarrow a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{5}}$ luôn đúng với $a > 1$.

Câu 45: Cho biết $(x - 2)^{-\frac{1}{3}} > (x - 2)^{-\frac{1}{6}}$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2 < x < 3$.

B. $0 < x < 1$.

C. $x > 2$.

D. $x > 1$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Ta có $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{6}$ nên $(x - 2)^{-\frac{1}{3}} > (x - 2)^{-\frac{1}{6}} \Leftrightarrow x - 2 < 1 \Leftrightarrow x < 3$. Vậy $2 < x < 3$.

Câu 46: Cho $U = 2.2019^{2020}$, $V = 2019^{2020}$, $W = 2018.2019^{2019}$, $X = 5.2019^{2019}$ và $Y = 2019^{2019}$. Số nào trong các số dưới đây là số bé nhất?

A. $X - Y$.

B. $U - V$.

C. $V - W$.

D. $W - X$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $X - Y = 4.2019^{2019}$.

$U - V = 2019^{2020} = 2019.2019^{2019}$.

$V - W = 2019.2019^{2019} - 2018.2019^{2019} = 2019^{2019}$.

$W - X = 2013.2019^{2019}$.

Vậy trong các số trên, số nhỏ nhất là $V - W$.

Câu 47: Tìm tất cả các số thực m sao cho $\frac{4^a}{4^a + m} + \frac{4^b}{4^b + m} = 1$ với mọi $a + b = 1$.

A. $m = \pm 2$.

B. $m = 4$.

C. $m = 2$.

D. $m = 8$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $a+b=1 \Leftrightarrow b=1-a$. Thay vào $\frac{4^a}{4^a+m} + \frac{4^b}{4^b+m} = 1$ ta được

$$\frac{4^a}{4^a+m} + \frac{4^{1-a}}{4^{1-a}+m} = 1 \Leftrightarrow \frac{4+m.4^a+4+m.4^{1-a}}{4+m.4^a+m.4^{1-a}+m^2} = 1 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2.$$

Câu 48: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2 - 6x + 1 = 0$ với $x_1 > x_2$. Tính giá trị của biểu thức $P = x_1^{2017} \cdot x_2^{2018}$

- A.** $P = 1$ **B.** $P = 3 + 2\sqrt{2}$ **C.** $P = 3 - 2\sqrt{2}$ **D.** $P = (3 - 2\sqrt{2})^{17}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $P = x_1^{2017} \cdot x_2^{2018} = (x_1 \cdot x_2)^{2017} \cdot x_2$. Theo định lý Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow P = x_2$

$$\text{Ta có } x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 + 2\sqrt{2} \\ x_2 = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow P = 3 - 2\sqrt{2}.$$

Câu 49: Rút gọn biểu thức $P = \left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{2017} \cdot \left(3-\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{2018}$.

- A.** $P = 1$. **B.** $P = \sqrt[3]{9+\sqrt{80}}$. **C.** $P = \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$. **D.**

$$P = \left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{4035}.$$

Lời giải

Chọn C

Đặt $x = \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$ ta có

$$\begin{aligned} x^3 &= 9 + \sqrt{80} + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} + 3 \cdot \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} \cdot \left(\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^2 + 9 - \sqrt{80} \\ &= 18 + 3 \cdot \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} \cdot \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} \left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right) \\ &= 18 + 3x \cdot \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} \cdot \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 18 + 3x \Rightarrow x = 3 \Rightarrow 3 - \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} = \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} \\ \text{Ta có } P &= \left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{2017} \cdot \left(3-\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{2018} = \left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{2017} \cdot \left(\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^{2018} \\ &= \left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}} \cdot \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^{2017} \cdot \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = \left(\sqrt[3]{1}\right)^{2017} \cdot \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} \end{aligned}$$

Câu 50: Tính giá trị của biểu thức $P = (7+4\sqrt{3})^{2018} \cdot (7-4\sqrt{3})^{2017}$

- A.** 1. **B.** $7 - 4\sqrt{3}$. **C.** $7 + 4\sqrt{3}$. **D.** $(7 + 4\sqrt{3})^{2017}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } P = (7+4\sqrt{3})^{2018} \cdot (7-4\sqrt{3})^{2017} = \left[(7+4\sqrt{3}) \cdot (7-4\sqrt{3})\right]^{2017} (7+4\sqrt{3}) =$$

$$= 1^{2017} (7 + 4\sqrt{3}) = 7 + 4\sqrt{3}.$$

Bài 2. PHÉP TÍNH LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM



Thang Richter được sử dụng để đo độ lớn các trận động đất. Nếu máy đo địa chấn ghi được biên độ lớn nhất của một trận động đất là $A = 10^M \mu\text{m}$ ($1\mu\text{m} = 10^{-6}\text{m}$) thì trận động đất đó có độ lớn bằng M độ Richter. Người ta chia các trận động đất thành các mức độ như sau:



Biên độ lớn nhất (μm)	Độ Richter	Mức độ	Mô tả ảnh hưởng
$\leq 10^{2,9}$	$\leq 2,9$	rất nhỏ	Không cảm nhận được
$10^3 - 10^{3,9}$	$3,0 - 3,9$	nhỏ	Cảm nhận được, không gây hại
$10^4 - 10^{4,9}$	$4,0 - 4,9$	nhẹ	Đồ đạc rung chuyển, thiệt hại nhỏ
$10^5 - 10^{5,9}$	$5,0 - 5,9$	trung bình	Gây thiệt hại với kiến trúc yếu
$10^6 - 10^{6,9}$	$6,0 - 6,9$	mạnh	Gây thiệt hại tương đối nặng đối với vùng đông dân cư
$10^7 - 10^{7,9}$	$7,0 - 7,9$	rất mạnh	Tàn phá nghiêm trọng trên diện tích lớn
$\geq 10^8$	$\geq 8,0$	cực mạnh	Tàn phá cực kì nghiêm trọng trên diện tích lớn

(Theo *Britannica*)

Đo độ lớn của động đất theo thang Richter có ý nghĩa như thế nào?

Lời giải

Theo thang Richter, độ Richter càng lớn thì động đất càng mạnh

1. Khái niệm lôgarit



Độ lớn M (theo độ Richter) của một trận động đất được xác định như



a) Tìm độ lớn theo thang Richter của các trận động đất có biên độ lớn nhất lần lượt là $10^{3,5}\mu\text{m}$; $100000\mu\text{m}$; $100 \cdot 10^{4,3}\mu\text{m}$.

b) Một trận động đất có biên độ lớn nhất $A = 65000\mu\text{m}$ thì độ lớn M của nó phải thỏa mãn hệ thức nào?

Lời giải

a) Khi $A = 10^{3,5}$ thì $M = 3,5$

Khi $A = 100000 = 10^5$ thì $M = 5$

Khi $A = 100 \cdot 10^{4,3} = 10^2 \cdot 10^{4,3} = 10^{2+4,3} = 10^{6,3}$ thì $M = 6,3$

b) Khi $A = 65000$, ta có:

$A > 10000$ hay $A > 10^4$. Suy ra $M > 4$

$A < 100000$ hay $A < 10^5$. Suy ra $M < 5$

Suy ra $4 < M < 5$

Cho hai số thực dương a, b với $a \neq 1$. Số thực α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là **lôgarit cơ số a của b** và kí hiệu là $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b.$$

Ví dụ 1. Viết các đẳng thức lũy thừa sau thành đẳng thức lôgarit:

a) $3^5 = 243$;

b) $10^{-2} = \frac{1}{100}$;

c) $(\sqrt{3})^0 = 1$.

Lời giải

a) $3^5 = 243 \Rightarrow \log_3 243 = 5$;

b) $10^{-2} = \frac{1}{100} \Rightarrow \log_{10} \frac{1}{100} = -2$;

c) $(\sqrt{3})^0 = 1 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}} 1 = 0$.

Chú ý

a) Biểu thức $\log_a b$ chỉ có nghĩa khi $a > 0, a \neq 1$ và $b > 0$.

b) Từ định nghĩa lôgarit, ta có:

- $\log_a 1 = 0$; (1)
- $\log_a a = 1$; (2)
- $\log_a a^b = b$; (3)
- $a^{\log_a b} = b$; (4)

Hai công thức (3) và (4) cho thấy phép lấy lôgarit và phép nâng lên lũy thừa là hai phép hoàn toàn ngược nhau.

Ví dụ 2. Tính

a) $\log_2 \frac{1}{4}$;

b) $9^{\log_3 5}$.

Lời giải

a) $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$

b) $9^{\log_3 5} = (3^2)^{\log_3 5} = 3^{2 \log_3 5} = (3^{\log_3 5})^2 = 5^2 = 25$.



Tính

a) $\log_3 \sqrt[3]{3}$;

b) $\log_{\frac{1}{2}} 8$;

c) $\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 4}$.

Lời giải

a) $\log_3 \sqrt[3]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}} 2^3 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{-3}} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -3$

c) $\left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 4} = (5^{-2})^{\log_5 4} = (5^{\log_5 4})^{-2} = 4^{-2} = \frac{1}{16}$

2. Tính lôgarit bằng máy tính cầm tay

Sử dụng máy tính cầm tay, ta có thể tính nhanh giá trị của các lôgarit (thường cần lấy giá trị gần đúng bằng cách làm tròn đến hàng nào đó).

Chú ý

a) Lôgarit cơ số 10 được gọi là **lôgarit thập phân**. Ta viết $\log N$ hoặc $\lg N$ thay cho $\log_{10} N$.

b) Lôgarit cơ số e còn được gọi là **lôgarit tự nhiên**. Ta viết $\ln N$ thay cho $\log_e N$.

Ví dụ 3. Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các biểu thức sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ sáu):

a) $\log_3 5$;

b) $\log 0,2$;

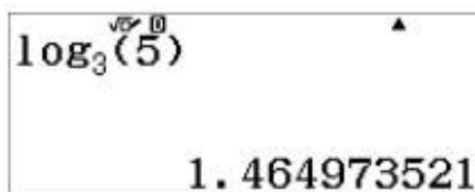
c) $\ln 10$.

Lời giải

a) Ấn lần lượt các phím



ta được kết quả $\log_3 5 \approx 1,464974$.



b) Ấn lần lượt các phím



ta được kết quả $\log 0,2 \approx -0,698970$.

$$\log(0.2) = -0.6989700043$$

c) Ấn lần lượt các phím

ta được kết quả $\ln 10 \approx 2,302585$.

$$\ln(10) = 2.302585093$$

Luyện tập 2. Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các biểu thức sau (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ sáu):

a) $\log_5 0,5$; b) $\log 25$; c) $\ln \frac{3}{2}$.

Lời giải

a) $\log_5 0,5 = -0,430676$

b) $\log 25 = 1,397940$

c) $\ln \frac{3}{2} = 0,405465$

3. Tính chất của phép tính lôgarit.

HD 2. Cho các số thực dương a, M, N với $a \neq 1$. Bạn Quân đã vẽ sơ đồ và tìm ra công thức biến đổi biểu thức $\log_a(MN)$ như sau:

$$MN = a^{\log_a M} \cdot a^{\log_a N} = a^{\log_a M + \log_a N} = a^{\log_a(MN)} \Rightarrow \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

a) Giải thích cách làm của bạn Quân.

b) Vẽ sơ đồ tương tự để tìm công thức biến đổi cho $\log_a \frac{M}{N}$ và $\log_a M^a$ ($a \in \mathbb{R}$).

Lời giải

a) Áp dụng công thức $a^{\log_a b} = b$, ta có:

$$a^{\log_a M} = M; a^{\log_a N} = N \text{ nên } MN = a^{\log_a M} \cdot a^{\log_a N} = a^{\log_a M + \log_a N}$$

Mặt khác $a^{\log_a MN} = MN$

Suy ra: $a^{\log_a M + \log_a N} = a^{\log_a MN}$

$$\Leftrightarrow \log_a M + \log_a N = \log_a MN$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{M}{N} \rightarrow \frac{a^{\log_a M}}{a^{\log_a N}} = a^{\log_a M - \log_a N} \\ \frac{M}{N} \rightarrow \frac{\log_a M}{\log_a N} \end{array} \right\} \Rightarrow \log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$$

$$\left. \begin{array}{l} M^\alpha \rightarrow (a^{\log_a M})^\alpha \rightarrow a^{\alpha \log_a M} \\ M^\alpha \rightarrow \log_a M^\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \log_a M^\alpha = \alpha \log_a M$$

Tổng kết hoạt động trên, ta nhận được các tính chất:

Cho các số thực dương a, M, N với $a \neq 1$, ta có:

- $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$
- $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
- $\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

Chú ý: Đặc biệt, a, M, N với dương, $a \neq 1$, ta có:

- $\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$;
- $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Ví dụ 4. Tính giá trị biểu thức sau:

- a) $\log_2 \frac{2}{3} + \log_2 12$; b) $\log_3 (9^2 \cdot 3^2)$; c) $\log_5 \sqrt[3]{25}$.

Lời giải

$$a) \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 12 = \log_2 \left(\frac{2}{3} \cdot 12 \right) = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3.$$

$$b) \log_3 (9^2 \cdot 3^2) = \log_3 9^2 + \log_3 3^2 = 2 \log_3 3^2 + 2 \log_3 3 = 2 \cdot 2 \cdot \log_3 3 + 2 = 4 + 2 = 6.$$

$$c) \log_5 \sqrt[3]{25} = \log_5 25^{\frac{1}{3}} = \log_5 5^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_5 5 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Ví dụ 5. Trong hóa học, nồng độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$, trong đó $[\text{H}^+]$ là nồng độ H^+ (ion hydro) tính bằng mol/L. Các dung dịch có độ pH bé hơn 7 thì gọi là acid, có pH lớn hơn 7 thì có tính kiềm, có pH bằng 7 thì trung tính.

- a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ H^+ là 0,0001 mol/L. Dung dịch này có tính acid, kiềm hay trung tính ?
- b) Dung dịch A có nồng độ H^+ gấp đôi nồng độ H^+ của dung dịch B. Độ pH của dung dịch nào lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu ? Làm tròn kết quả đến hàng nghìn.

Lời giải

$$a) \text{pH} = -\log 0,0001 = -\log 10^{-4} = 4 \log 10 = 4. \text{ Do } 4 < 7 \text{ nên dung dịch có tính acid.}$$

b) Kí hiệu pH_A , pH_B lần lượt là độ pH của hai dung dịch A và B ; $[\text{H}^+]_A$, $[\text{H}^+]_B$ lần lượt là nồng độ của hai dung dịch A và B. Ta có

$$\text{pH}_A = -\log[\text{H}^+]_A = -\log(2[\text{H}^+]_B) = -\log 2 - \log[\text{H}^+]_B = -\log 2 + \text{pH}_B.$$

$$\text{Suy ra } \text{pH}_A - \text{pH}_B = \log 2 \approx 0,301.$$

Vậy dung dịch B có độ pH lớn hơn và lớn hơn khoảng 0,301.

Luyện tập 3. Tính: a) $\log_5 4 + \log_5 \frac{1}{4}$; b) $\log_2 28 - \log_2 7$; c) $\log \sqrt{1000}$.

Lời giải

$$a) \log_5 4 + \log_5 \frac{1}{4} = \log_5 \left(4 \cdot \frac{1}{4} \right) = \log_5 1 = 0$$

$$b) \log_2 28 - \log_2 7 = \log_2 (28 : 7) = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$$

$$c) \log \sqrt{1000} = \log 1000^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 1000 = \frac{1}{2} \log 10^3 = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

Vận dụng: Độ lớn M của một trận động đất theo thang Richter được tính theo công thức $M = \log \frac{A}{A_0}$, trong đó A là biên độ lớn nhất ghi được bởi máy đo địa chấn, A_0 là biên độ chuẩn được sử dụng để hiệu chỉnh độ lệch gây ra bởi khoảng cách của máy đo địa chấn so với tâm chấn (ở $\blacktriangleright$ và $\blacksquare$ 1, $A_0 = 1 \mu m$).

a) Tính độ lớn của trận động đất có biên độ A bằng

$$i) 10^{5,1} A_0; \quad ii) 65000 A_0.$$

b) Một trận động đất tại địa điểm N có biên độ lớn nhất gấp ba lần biên độ lớn nhất của trận động đất tại địa điểm P. So sánh độ lớn của hai trận động đất.

Lời giải

a)

$$i) \text{ Khi } A = 10^{5,1} A_0. \text{ Ta có: } M = \log \frac{10^{5,1} A_0}{A_0} = \log 10^{5,1} = 5,1 \text{ (Richter)}$$

$$ii) \text{ Khi } A = 65000 A_0. \text{ Ta có: } M = \log \frac{65000 A_0}{A_0} = \log 65000 = 4,8 \text{ (Richter)}$$

b) Trận động đất tại điểm P có biên độ lớn nhất là A thì trận động đất tại N có biên độ lớn nhất là $3A$. Ta có độ lớn của hai trận động đất là:

$$M_P = \log \frac{A}{A_0}; M_N = \log \frac{3A}{A_0}$$

Độ lớn trận động đất tại N lớn hơn độ lớn trận động đất tại P là:

$$M_N - M_P = \log \frac{3A}{A_0} - \log \frac{A}{A_0} = \log \frac{\frac{3A}{A_0}}{\frac{A}{A_0}} = \log 3 = 0,5 \text{ (Richter)}$$

4. Công thức đổi cơ số

HD 3. Khi chưa có máy tính, người ta thường tính các logarit dựa trên bảng giá trị logarit thập phân đã được xây dựng sẵn. Chẳng hạn, để tính $x = \log_2 15$, người ta viết $2^x = 15$, rồi lấy logarit thập phân hai

vế, nhận được $x \log 2 = \log 15$ hay $x = \frac{\log 15}{\log 2}$.

Sử dụng cách làm này, tính $\log_a N$ theo $\log a$ và $\log N$ với $a, N > 0, a \neq 1$.

Lời giải

Ta có $x = \log_a N$ hay $a^x = N$

Lấy lôgarit thập phân 2 vế, ta được $x \log a = \log N$. Suy ra $x = \frac{\log N}{\log a}$

Suy ra $\log_a N = \frac{\log N}{\log a}$

Với cách làm như ở **HĐ 3**, ta nhận được **công thức đổi cơ số**.

$$\text{Cho các số dương } a, b, N (a \neq 1, b \neq 1), \text{ ta có } \log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

Đặc biệt, ta có:

$$\bullet \log_a N = \frac{1}{\log_N a} (N \neq 1); \quad \bullet \log_{a^\alpha} N = \frac{1}{\alpha} \log_a N (\alpha \neq 0).$$

Ví dụ 6. Tính các giá trị của biểu thức:

$$\text{a) } \log_9 27; \quad \text{b) } \log_2 3 \cdot \log_3 \frac{1}{4}.$$

Lời giải

$$\text{a) } \log_9 27 = \log_{3^2} 3^3 = \frac{3}{2} \log_3 3 = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2};$$

$$\text{b) } \log_2 3 \cdot \log_3 \frac{1}{4} = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 \frac{1}{4}}{\log_2 3} = \log_2 2^{-2} = -2 \log_2 2 = -2 \cdot 1 = -2.$$

Ví dụ 7. Đặt $\log_2 3 = a, \log_2 5 = b$. Biểu thị $\log_9 10$ theo a và b .

Lời giải

$$\log_9 10 = \frac{\log_2 10}{\log_2 9} = \frac{\log_2 (2 \cdot 5)}{\log_2 3^2} = \frac{\log_2 2 + \log_2 5}{2 \log_2 3} = \frac{1+b}{2a}.$$

HĐ 4. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$\text{a) } \log_{\frac{1}{4}} 8; \quad \text{b) } \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 8.$$

Lời giải

$$\text{a) } \log_{\frac{1}{4}} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 \frac{1}{4}} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^{-2}} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{b) } \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 8 = \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 6} = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}$$

HĐ 5. Đặt $\log_3 2 = a, \log_3 7 = b$. Biểu thị $\log_{12} 21$ theo a và b .

Lời giải

$$\log_{12} 21 = \frac{\log_3 21}{\log_3 12} = \frac{\log_3 (7 \cdot 3)}{\log_3 (2^2 \cdot 3)} = \frac{\log_3 3 + \log_3 7}{2\log_3 2 + \log_3 3} = \frac{1+b}{2a+1}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Rút gọn biểu thức

1. Phương pháp

- Sử dụng tư duy tự luận: Kết hợp nhiều tính chất và công thức
- Sử dụng Casio

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. (Trường THPT Lê Quý Đôn – Hà Nội năm 2017) Rút gọn biểu thức $A = \log_a \left(a^5 \sqrt{a^3 \sqrt{a \sqrt{a}}} \right)$ với

$a > 0, a \neq 1$ ta được kết quả nào sau đây?

A. $\frac{7}{4}$.

B. $\frac{5}{3}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Tự luận

$$\text{Ta có } A = \log_a \left(a^5 \sqrt{a^3 \sqrt{a \sqrt{a}}} \right) = \log_a \left(a^5 \sqrt{a^3 \sqrt{a \cdot a^{\frac{1}{2}}}} \right) = \log_a \left(a^5 \sqrt{a^3 \cdot a^{\frac{3}{4}}} \right) = \log_a \left(a^5 \cdot a^{\frac{3}{4}} \right) = \log_a a^{\frac{7}{4}} = \frac{7}{4}.$$

Cách 2. Casio

$$\text{Nhập } \log_x \left(x^5 \sqrt{x^3 \sqrt{x \sqrt{x}}} \right) - \frac{7}{4} \xrightarrow[\text{X=2}]{\text{Calc}} 0 \Rightarrow \boxed{A}$$

Ví dụ 2. (Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Bình Thuận năm 2017) Cho $a, b > 0$ và $a, b \neq 1$. Đặt

$\log_a b = \alpha$, tính theo α biểu thức $P = \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3$

A. $P = \frac{2-5\alpha^2}{\alpha}$

B. $P = \frac{\alpha^2-12}{2\alpha}$

C. $P = \frac{4\alpha^2-3}{2\alpha}$

D. $P = \frac{\alpha^2-3}{\alpha}$

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3 = \frac{1}{2} \log_a b - 2 \log_b a^3 \\ &= \frac{1}{2} \log_a b - 6 \log_b a = \frac{1}{2} \log_a b - \frac{6}{\log_a b} = \frac{\alpha^2-12}{2\alpha} \end{aligned}$$

Ví dụ 3. (Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Bình Thuận năm 2017) Cho $x > 0$ thỏa mãn

$\log_2 (\log_8 x) = \log_8 (\log_2 x)$. Tính $(\log_2 x)^2$

A. 3

B. $3\sqrt{3}$

C. 27

D. 9

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Đặt $t = \log_2 x$, ta có $\log_8 x = \log_{2^3} x = \frac{1}{3} \cdot \log_2 x = \frac{t}{3} \Rightarrow \log_2 \frac{t}{3} = \log_8 t \Leftrightarrow \log_2 \frac{t}{3} = \frac{1}{3} \log_2 t$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{t}{3} = \log_2 \sqrt[3]{t} \Leftrightarrow \frac{t}{3} = \sqrt[3]{t} \Leftrightarrow t = 3\sqrt[3]{t} \Rightarrow (\log_2 x)^2 = t^2 = 27 \Rightarrow \boxed{C}$$

Cách 2. Nhập $\log_2(\log_8 x) - \log_8(\log_2 x) \xrightarrow[x=2]{\text{Shift+Calc}} \text{lưu } A$

Nhập $(\log_2 x)^2 - 27 \xrightarrow[X=A]{\text{Calc}} 0 \Rightarrow \boxed{C}$

Ví dụ 4. (Trường THPT Lê Quý Đôn – Hà Nội năm 2017) Cho $\log_2 m = a$ và $A = \log_m 8m$ ($m > 0, m \neq 1$).

Khi đó mối quan hệ giữa A và a là:

- A.** $A = (3 - a)a$. **B.** $A = \frac{3 - a}{a}$. **C.** $A = \frac{3 + a}{a}$. **D.** $A = (3 + a)a$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Biến đổi $\log_m 8m$ theo $\log_2 m$

Ta có $A = \log_m 8 + \log_m m = 3 \log_m 2 + 1 = \frac{3}{a} + 1 \Leftrightarrow A = \frac{3 + a}{a} \Rightarrow \boxed{C}$

Cách 2. Từ giả thiết $\log_2 m = a$ rút ra m và thế vào

Ta có $\log_2 m = a \Leftrightarrow m = 2^a$ khi đó

$$A = \log_m 8m = \log_{2^a} (8 \cdot 2^a) = \frac{1}{a} (\log_2 2^3 + a \log_2 2) = \frac{3 + a}{a} \Rightarrow \boxed{C}$$

Cách 3. Sử dụng Casio. Không mất tính tổng quát cho $m = 2 \Rightarrow a = \log_2 2 = 1$

Nhập $\log_M(8M) - \frac{3 + A}{A} \xrightarrow[M=A=2]{\text{Calc}} 0 \Rightarrow \boxed{C}$

Ví dụ 5. (Trường Chuyên Võ Nguyên Giáp – 2017) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn

$$xy = 10^a, yz = 10^{2b}, zx = 10^{3c} \quad (a, b, c \in \mathbb{R}). \text{ Tính } P = \log x + \log y + \log z$$

- A.** $P = 3abc$ **B.** $P = a + 2b + 3c$
C. $P = 6abc$ **D.** $P = \frac{a + 2b + 3c}{2}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $xy = 10^a, yz = 10^{2b}, zx = 10^{3c} \Rightarrow (xyz)^2 = 10^{a+2b+3c}$.

Suy ra $P = \log x + \log y + \log z = \log(xyz) = \frac{1}{2} \log (xyz)^2 = \frac{1}{2} \log 10^{a+2b+3c} = \frac{a + 2b + 3c}{2}$.

Ví dụ 6. (Chuyên Hùng Vương – Gia Lai Lần 1 – 2017) Cho a, b là hai số thực dương khác 1 và thỏa mãn

$$\log_a^2 b - 8 \log_b (a \sqrt[3]{b}) = -\frac{8}{3}. \text{ Tính giá trị biểu thức } P = \log_a (a \sqrt[3]{ab}) + 2017.$$

- A.** $P = 2019$. **B.** $P = 2020$. **C.** $P = 2017$. **D.** $P = 2016$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Ta có

$$\log_a^2 b - 8 \left(\log_b a + \frac{1}{3} \log_b b \right) + \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow \log_a^2 b - \frac{8}{\log_a b} = 0 \Leftrightarrow \log_a b = 2$$

$$\text{Do đó } P = \log_a a^{\frac{4}{3}} + \log_a b^{\frac{1}{3}} + 2017 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \log_a b + 2017 = 2019 \Rightarrow \boxed{A}$$

Cách 2. Không mất tính tổng quát cho $a = 2$

$$\text{Nhập } \log_2 (X)^2 - 8 \log_X (2^{\sqrt[3]{X}}) + \frac{8}{3} \xrightarrow[X=b=2]{\text{Shift+Calc}} 4$$

$$\text{Nhập } P = \log_A (A^{\sqrt[3]{AB}}) + 2017 \xrightarrow[A=2; B=4]{\text{Calc}} 2019 \Rightarrow \boxed{B}$$

Nhận xét:

- Thông thường để giải theo kiểu trắc nghiệm ta sẽ cho a hoặc b bằng 1 số thực cụ thể và giải phương trình theo b hoặc a . Tuy nhiên trong nhiều trường hợp biểu thức phức tạp khó giải thì ta nên chọn cho a và b đồng thời các số thực, quan trọng là chọn như thế nào để thoả mãn bài toán, kinh nghiệm ở đây ta thấy để rút gọn $\log_a b$ thì $b = a^n$. Theo giả thiết nên ta kiểm tra như sau:

$$\text{Nhập } \log_A^2 B - 8 \log_B (A^{\sqrt[3]{B}}) + \frac{8}{3} \xrightarrow[A=2; B=2^2]{\text{Calc}} 0 \text{ thoả mãn}$$

$$\text{Nhập } P = \log_A (A^{\sqrt[3]{AB}}) + 2017 \xrightarrow[A=2; B=4]{\text{Calc}} 2019$$

- Ta có thể nhập như sau:

$$\log_X (Y)^2 - 8 \log_Y (X^{\sqrt[3]{Y}}) + \frac{8}{3} \xrightarrow[Y=3; X=2]{\text{Shift+Calc}} 1,732050808 \xrightarrow{\text{lưu}} A$$

$$\text{Nhập } P = \log_X (X^{\sqrt[3]{XY}}) + 2017 \xrightarrow[X=a=A; Y=3]{\text{Calc}} 2019 \Rightarrow \boxed{B}$$

Ví dụ 7. (Sở GD và ĐT Vĩnh Phúc L2 – 2017) Cho a, b là hai số thực dương, khác 1. Đặt $\log_a b = m$, tính theo m giá trị của $P = \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3$.

A. $\frac{4m^2 - 3}{2m}$

B. $\frac{m^2 - 12}{2m}$

C. $\frac{m^2 - 12}{m}$

D. $\frac{m^2 - 3}{2m}$

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Ta có $P = \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3 = \frac{1}{2} \log_a b - 6 \log_b a$

$$= \frac{1}{2} \log_a b - \frac{6}{\log_a b} = \frac{1}{2} m - \frac{6}{m} = \frac{m^2 - 12}{m}.$$

Cách 2. Ta có $\log_a b = m \Leftrightarrow b = a^m$ thay vào ta được

$$P = \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3 = \log_{a^2} a^m - \log_{\sqrt{a^m}} a^3 = \frac{m}{2} - \frac{6}{m} = \frac{m^2 - 12}{m}.$$

Cách 3. Cho $a = m = 2 \Rightarrow b = 4$

$$\text{Nhập } P = \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3 - \frac{m^2 - 12}{2m} \xrightarrow[a=m=2; b=4]{\text{Calc}} 0 \Rightarrow \boxed{B}$$

Ví dụ 8. (Sở GD và Văn Phòng năm 2017) Cho x, y, z, a, b, c thỏa mãn $\frac{\ln x}{a} = \frac{\ln y}{b} = \frac{\ln z}{c} = \ln t$ và $xy = z^2 t^2$.

Tính giá trị của $P = a + b - 2c$

A. 4

B. $\frac{1}{2}$

C. -2

D. 2

Lời giải

Chọn D

$$\text{Cách 1. } \frac{\ln x}{a} = \frac{\ln y}{b} = \frac{\ln z}{c} = \ln t \Rightarrow \begin{cases} x = t^a \\ y = t^b \\ z = t^c \\ xy = z^2 t^2 \end{cases} \Rightarrow t^a \cdot t^b = t^{2c} t^2 \Leftrightarrow a + b = 2c + 2$$

$$\Rightarrow a + b - 2c = 2.$$

Chú ý: Có thể đặt $\frac{\ln x}{a} = \frac{\ln y}{b} = \frac{\ln z}{c} = \ln t = u$

$$\text{Cách 2. } \frac{\ln x}{a} = \frac{\ln y}{b} = \frac{\ln z}{c} = \ln t \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\ln x}{\ln t} = \log_t x \\ b = \frac{\ln y}{\ln t} = \log_t y \\ c = \frac{\ln z}{\ln t} = \log_t z \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b - 2c = \log_t x + \log_t y - 2 \log_t z = \log_t \left(\frac{xy}{z^2} \right) = \log_t t^2 = 2.$$

Cách 3. Cho $a = 2; b = 3; c = 4$ thì từ $xy = z^2 t^2 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{6}}{4}$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} a = \frac{\ln x}{\ln t} \xrightarrow[x=2; t=\frac{\sqrt{6}}{4}]{Calc} A \\ b = \frac{\ln y}{\ln t} \xrightarrow[y=3; t=\frac{\sqrt{6}}{4}]{Calc} B \\ c = \frac{\ln z}{\ln t} \xrightarrow[z=2; t=\frac{\sqrt{6}}{4}]{Calc} C \end{cases} \Rightarrow P = a + b - 2c = A + B - 2C = 2.$$

Ví dụ 9. (Trung Tâm BDVH Lý Tự Trọng) Cho $\frac{\log a}{p} = \frac{\log b}{q} = \frac{\log c}{r} = \log x \neq 0; \frac{b^2}{ac} = x^y$. Tính y theo

p, q, r .

A. $y = q^2 - pr$.

B. $y = \frac{p+r}{2q}$.

C. $y = 2q - p - r$.

D. $y = 2q - pr$.

Lời giải

$$\text{Theo giả thiết ta có } \frac{\log a}{p} = \frac{\log b}{q} = \frac{\log c}{r} = \log x \Rightarrow \begin{cases} \log a = p \log x \\ \log b = q \log x \\ \log c = r \log x \end{cases}$$

$$\text{Và } \frac{b^2}{ac} = x^y \Leftrightarrow \log \frac{b^2}{ac} = \log x^y$$

$$\Rightarrow y \log x = 2 \log b - \log a - \log c = 2q \log x - p \log x - r \log x = \log x (2q - p - r)$$

$$\Rightarrow y = 2q - p - r \text{ (do } \log x \neq 0 \text{)}. \text{ Chọn đáp án C}$$

Ví dụ 10. (Chuyên Lương Văn Tụy Lần 1 – 2017) Cho $x > 0, x \neq 1$ thỏa mãn biểu thức

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \dots + \frac{1}{\log_{2017} x} = M. \text{ Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:}$$

A. $x = {}^{2017}\sqrt{\frac{2017!}{M}}$

B. $x = 2017^M$

C. $x = \frac{2017!}{M}$

D. $x^M = 2017!$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \log_a b \cdot \log_b a = 1 \Rightarrow \log_b a = \frac{1}{\log_a b} \Rightarrow M = \log_x 2 + \log_x 3 + \dots + \log_x 2017$$

$$\Rightarrow M = \log_x (2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2017) = \log_x 2017!$$

$$\Rightarrow x^M = 2017!.$$

Ví dụ 11. Cho hai số thực dương x và y thỏa mãn $\log_4 x = \log_6 y = \log_9 (x + y)$ và

$$\frac{x}{y} = \frac{-a + \sqrt{b}}{2} \text{ (} a, b \in \mathbb{Z}^+ \text{)}. \text{ Tính tỉ số } S = a + b.$$

A. $S = 6$

B. $S = 8$

C. $S = 4$

D. $S = 11$

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết $\log_4 x = \log_6 y = \log_9 (x + y)$ có hai ẩn ta đưa về 1 ẩn như sau

$$\begin{cases} \log_4 x = \log_9 (x + y) \\ \log_6 y = \log_4 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6^{\log_4 x} \\ \log_4 x = \log_9 (x + 6^{\log_4 x}) \end{cases}$$

$$\text{Nhập } \begin{cases} \log_4 (X) - \log_9 (X + 6^{\log_4 (X)}) \xrightarrow[\text{X=2}]{\text{Shift+Calc}} 5,162430201 \xrightarrow{\text{lưu}} A = x \\ 6^{\log_4 (X)} \xrightarrow[\text{X=A}]{\text{Calc}} 8,385348209 \xrightarrow{\text{lưu}} B = y \end{cases}$$

$$\text{Mod 7 nhập: } f(X) = \sqrt{X} - 2 \frac{A}{B} \text{ với } a = f(X), b = X$$

$$\text{Start} = 1; \text{End} = 9; \text{Step} = 1 \text{ và nhìn trên bảng ta được } \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow a + b = 6 \Rightarrow \boxed{A}$$

$$\text{Cách 2. Đặt } \log_4 x = \log_6 y = \log_9 (x + y) = t \Rightarrow \begin{cases} x = 4^t \\ y = 6^t \\ x + y = 9^t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = \left(\frac{2}{3}\right)^t \\ 4^t + 6^t - 9^t = 0 \xrightarrow{\text{Mod } 5+3} \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{-a+\sqrt{b}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow a+b=6 \Rightarrow \boxed{A} \end{cases}$$

Ví dụ 12. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a^{\log_3 7} = 27, b^{\log_7 11} = 49, c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$. Tính giá trị biểu thức

$$T = a^{\log_3 7} + b^{\log_7 11} + c^{\log_{11} 25}$$

A. $T = 76 + \sqrt{11}$

B. $T = 31141$

C. $T = 2017$

D. $T = 469$

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết biến đổi

$$T = a^{\log_3 7} + b^{\log_7 11} + c^{\log_{11} 25} = (a^{\log_3 7})^{\log_3 7} + (b^{\log_7 11})^{\log_7 11} + (c^{\log_{11} 25})^{\log_{11} 25}$$

$$= (27)^{\log_3 7} + (49)^{\log_7 11} + (\sqrt{11})^{\log_{11} 25}$$

Ta có
$$\begin{cases} (27)^{\log_3 7} = (3^3)^{\log_3 7} = (3^{\log_3 7})^3 = 7^3 = 343 \\ (49)^{\log_7 11} = (7^2)^{\log_7 11} = (7^{\log_7 11})^2 = 11^2 = 121 \\ (\sqrt{11})^{\log_{11} 25} = \left(11^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{11} 25} = (11^{\log_{11} 25})^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = 343 + 121 + 5 = 469.$$

Ví dụ 13. (Sở GD và ĐT Vĩnh Phúc L2 – 2017) Cho x, y, z là ba số thực khác 0 thỏa mãn $2^x = 5^y = 10^{-z}$. Giá trị của biểu thức $A = xy + yz + zx$ bằng?

A. 3

B. 0

C. 1

D. 2

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Ta có $2^x = 5^y = 10^{-z} \Leftrightarrow 2^x = 5^y = \frac{1}{10^z} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x 10^z = 1 \\ 5^y 10^z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2^x 10^z)^y = 1 \\ (5^y 10^z)^x = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{xy} 10^{yz} = 1 \\ 5^{xy} 10^{zx} = 1 \end{cases} \Rightarrow (2^{xy} 10^{yz})(5^{xy} 10^{zx}) = 10^{xy+yz+zx} = 1 \Rightarrow A = xy + yz + zx = 0 \Rightarrow \boxed{B}$$

Cách 2. Cho $x = 2 \Rightarrow 5^y = 10^{-z} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \log_5 4 \rightarrow B \\ z = -\log_{10} 4 \rightarrow C \end{cases}$

Nhập $A = XY + YM + MX \xrightarrow[X=2; Y=B; M=C]{Calc} 0 \Rightarrow \boxed{B}$

Cách 3. $2^x = 5^y = 10^{-z} = t \Rightarrow \begin{cases} x = \log_2 t \\ y = \log_5 t \\ z = -\log_{10} t \end{cases}$. Nhập $A = xy + yz + zx$

$$= \log_2 M \cdot \log_5 M + \log_5 M \cdot (-\log_{10} M) + (-\log_{10} M) \cdot \log_2 M \xrightarrow[t=M=2]{Calc} 0 \Rightarrow [B]$$

Cách 4. Ta có $2^x = 5^y = 10^{-z} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 10^{-\frac{z}{x}} \\ 5 = 10^{-\frac{z}{y}} \end{cases} \Rightarrow 2.5 = 10 = 10^{-\frac{z}{x} - \frac{z}{y}} \Leftrightarrow -\frac{z}{x} - \frac{z}{y} = 1$

$$\Leftrightarrow xy + yz + zx = 0 \Rightarrow [B]$$

Cách 5. Ta có $2^x = 5^y = 10^{-z} = t \Rightarrow \begin{cases} 2 = t^{\frac{1}{x}} \\ 5 = t^{\frac{1}{y}} \\ 10 = t^{\frac{1}{z}} \end{cases} \Rightarrow 2.5 = 10 \Leftrightarrow t^{\frac{1}{x}} \cdot t^{\frac{1}{y}} = t^{\frac{1}{z}} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

$$\Leftrightarrow xy + yz + zx = 0 \Rightarrow [B]$$

Ví dụ 14. Cho ba điểm $A(b; \log_a b)$, $B(c; 2\log_a c)$, $C(b; 3\log_a b)$ với $0 < a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$. Biết B là trọng tâm của tam giác OAC với O là gốc tọa độ. Tính $S = 2b + c$.

- A.** $S = 9$. **B.** $S = 7$. **C.** $S = 11$. **D.** $S = 5$.

Lời giải

Chọn A

Vì B là trọng tâm của tam giác OAC nên $\begin{cases} \frac{0+b+b}{3} = c \\ \frac{0+\log_a b+3\log_a b}{3} = 2\log_a c \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b+b=3c \\ 4\log_a b=6\log_a c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=3c \\ 2\log_a b=3\log_a c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b=3c \\ \log_a b^2 = \log_a c^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b=3c \\ b^2=c^3 \end{cases} \xrightarrow{c>0} \begin{cases} b=\frac{27}{8} \\ c=\frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow S=2b+c=9.$$

Dạng 2. Biểu diễn theo lôga

1. Phương pháp

- Sử dụng tư duy tự luận: Kết hợp nhiều tính chất và công thức
- Sử dụng Casio

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. (Đề minh họa 2017) Đặt $a = \log_2 3$, $b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b .

- A.** $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab}$ **B.** $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab}$
C. $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab+b}$ **D.** $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab+b}$

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Tự luận

Ta có $\log_6 45 = \log_6 9 + \log_6 5$.

$$\log_6 9 = 2\log_6 3 = \frac{2}{\log_3 6} = \frac{2}{1 + \log_3 2} = \frac{2}{1 + \frac{1}{a}} = \frac{2a}{a+1}.$$

$$\log_6 5 = \frac{1}{\log_5 6} = \frac{1}{\log_5 3 + \log_5 2} = \frac{a}{b(a+1)} \text{ vì } \log_5 2 = \frac{b}{a}.$$

$$\text{Vậy } \log_6 45 = \frac{2a}{a+1} + \frac{a}{b(a+1)} = \frac{a+2ab}{ab+b}.$$

Cách 2. Thử lần lượt 4 đáp án. Đáp án đúng là đáp án C.

Tính và lưu thành hai biến A và B. Tính $\begin{cases} \log_2 3 \rightarrow A \\ \log_5 3 \rightarrow B \end{cases}$

$$\text{Nhập } \log_6 45 - \frac{a+2ab}{ab+b} \xrightarrow[a=A; b=B]{Calc} 0 \Rightarrow \boxed{C}$$

Ví dụ 2. (Sở GD và ĐT Vũng Tàu lần 2 năm 2017) Cho $a = \log_3 2$ và $b = \log_3 5$. Tính $\log_{10} 60$ theo a và b .

A. $\frac{2a+b+1}{a+b}$. B. $\frac{2a+b-1}{a+b}$. C. $\frac{2a-b+1}{a+b}$. D. $\frac{a+b+1}{a+b}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \log_{10} 60 &= 2\log_{10} 2 + \log_{10} 3 + \log_{10} 5 = \frac{2}{1 + \log_2 5} + \frac{1}{\log_3 2 + \log_3 5} + \frac{1}{1 + \log_5 2} \\ &= \frac{2}{1 + \frac{\log_3 5}{\log_3 2}} + \frac{1}{\log_3 2 + \log_3 5} + \frac{1}{1 + \frac{\log_3 2}{\log_3 5}} = \frac{2}{1 + \frac{b}{a}} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{2a+b+1}{a+b}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. (Sở GD và ĐT Thanh Hoá năm 2017) Cho $\log_7 12 = x$, $\log_{12} 24 = y$ và $\log_{54} 168 = \frac{axy+1}{bxy+cx}$, trong

đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $S = a + 2b + 3c$.

A. $S = 4$. B. $S = 19$. C. $S = 10$. D. $S = 15$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Nhận xét về mối quan hệ giữa biểu thức và cơ số để phân tích hợp lí

Ta thấy $12 = 3 \cdot 2^2$; $24 = 3 \cdot 2^3$; $54 = 3^3 \cdot 2$; $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$ do đó ta sẽ phân tích theo số 2 và 3. Số 7 làm cơ số trung gian

$$\log_7 12 = x \Leftrightarrow \log_7 3 + 2\log_7 2 = x \quad (1)$$

$$xy = \log_7 12 \cdot \log_{12} 24 = \log_7 24 \Rightarrow \log_7 3 + 3\log_7 2 = xy \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $\log_7 2 = xy - x$, $\log_7 3 = 3x - 2xy$.

$$\text{Do đó } \log_{54} 168 = \frac{\log_7 168}{\log_7 54} = \frac{\log_7 (2^3 \cdot 3 \cdot 7)}{\log_7 (3^3 \cdot 2)} = \frac{3\log_7 2 + \log_7 3 + 1}{\log_7 2 + 3\log_7 3} = \frac{xy+1}{-5xy+8x}.$$

Do đó $a = 1, b = -5, c = 8 \Rightarrow S = 15 \Rightarrow \boxed{D}$

Cách 2: Ta có $xy = \log_7 24$ và $\log_{54} 168 = \frac{\log_7 168}{\log_7 54} = \frac{\log_7 24 + 1}{\log_7 54}$

Do đó $\log_{54} 168 = \frac{\log_7 168}{\log_7 54} = \frac{\log_7 24 + 1}{\log_7 54} = \frac{a \log_7 24 + 1}{b \log_7 24 + c \log_7 12}$. Đồng nhất hai vế ta được

$$\begin{cases} a = 1 \\ b \log_7 24 + c \log_7 12 = \log_7 54 \end{cases} \cdot \text{Để tìm } b, c \text{ ta có thể làm như sau}$$

Cách 2.1: Dùng mode7 ta có $b \log_7 24 + c \log_7 12 = \log_7 54 \Leftrightarrow b = \frac{\log_7 54 - c \log_7 12}{\log_7 24}$

Nhập $f(x) = \frac{\log_7 54 - x \log_7 12}{\log_7 24}$ ($b = f(x); c = x$); Start = -9; End = 9; Step = 1.

Ta nhìn bảng trên máy tính. Từ đó suy ra $b = -5; c = 8$

Cách 2.2: Giải hệ hai ẩn hai phương trình Mode 5 +1

$$\begin{cases} b \log_7 24 + c \log_7 12 = \log_7 54 \\ 2b + 3c = S - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ c = 8 \end{cases}$$

Dạng 3. So sánh

1. Phương pháp

- Sử dụng tư duy tự luận: Kết hợp nhiều tính chất và công thức
- Sử dụng Casio

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Nếu $a^{\frac{\sqrt{5}}{5}} > a^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ và $\log_b \frac{4}{5} < \log_b \frac{5}{6}$ thì

- A. $0 < a < 1, 0 < b < 1$ B. $0 < a < 1, b > 1$
C. $a > 1, b > 1$ D. $a > 1, 0 < b < 1$

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Vì $\begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{5} < \frac{\sqrt{3}}{3} \\ a^{\frac{\sqrt{5}}{5}} > a^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 1$ và $\begin{cases} \frac{4}{5} < \frac{5}{6} \\ \log_b \frac{4}{5} < \log_b \frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow b > 1$

Cách 2. Vì phép so sánh là dựa vào cơ số nên ta chỉ thử với cơ số lớn hơn 1 và lớn hơn 0 nhỏ hơn 1. Coi $a = X; b = Y$

Nhập $X^{\frac{\sqrt{5}}{5}} - X^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \xrightarrow[X=2>1]{Calc} < 0 \Rightarrow \boxed{C, D}$ loại

Nhập $\log_Y \frac{4}{5} - \log_Y \frac{5}{6} \xrightarrow[Y=2]{Calc} < 0 \Rightarrow \boxed{B}$

Ví dụ 2. (Trường THPT Hà Trung lần 3 năm 2017) Cho hai số thực dương a, b khác 1 thỏa mãn:

$a^{\frac{13}{7}} > a^{\frac{15}{8}}, \log_b \frac{1}{2} < \log_b \frac{2}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < 1$ và $b < 1$.

B. $a > 1$ và $b > 1$.

C. $a > 1$ và $b < 1$.

D. $a < 1$ và $b > 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Vì } \begin{cases} a^{\frac{13}{7}} > a^{\frac{15}{8}} \\ \frac{13}{7} < \frac{15}{8} \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 1 \text{ và } \begin{cases} \log_b \frac{1}{2} < \log_b \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} < \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow b > 1$$

Ví dụ 3. (Đề minh họa 2017) Cho hai số thực a và b , với $1 < a < b$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $\log_a b < 1 < \log_b a$

B. $1 < \log_a b < \log_b a$

C. $\log_b a < \log_a b < 1$

D. $\log_b a < 1 < \log_a b$

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Dựa vào giả thiết $1 < a < b$ nên ta lấy loga hai vế theo cơ số a và b ta được.

$$\text{Vì } \begin{cases} a, b > 1 \\ a < b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \log_a a < \log_a b \\ \log_b a < \log_b b = 1 \end{cases} \Rightarrow \log_b a < 1 < \log_a b$$

Cách 2. Đặc biệt hoá cho a, b là 1 số cụ thể thoả mãn $1 < a < b$

$$\text{Không mất tính tổng quát cho } a = 2 < b = 3 \Rightarrow \begin{cases} \log_2 3 = 1,584962501 > 1 \\ \log_3 2 = 0,6309297536 < 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D}$$

Ví dụ 3. (Chuyên Lam Sơn Lần 1 năm 2017) Cho $0 < x < 1$; $0 < a, b, c \neq 1$ và $\log_c x > 0 > \log_b x > \log_a x$ so sánh a, b, c ta được kết quả:

A. $a > b > c$

B. $c > a > b$

C. $c > b > a$

D. $b > a > c$

Lời giải

Chọn D

Vì $0 < x < 1 \Rightarrow \ln x < 0$. Do đó:

$$\log_c x > 0 > \log_b x > \log_a x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln c} > 0 > \frac{\ln x}{\ln b} > \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow \ln c < 0 < \ln a < \ln b$$

Mà hàm số $y = \ln x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên ta suy ra $c < a < b$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_2 16$

b) $\log_3 \frac{1}{27}$

c) $\log 1000$

d) $9^{\log_3 12}$.

Lời giải

a) $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

b) $\log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3$

c) $\log 1000 = \log 10^3 = 3$

d) $\left(3^{\log_3 12}\right)^2 = 12^2 = 144$

Bài 2. Tìm các giá trị của x để biểu thức sau có nghĩa:

a) $\log_3(1-2x)$;

b) $\log_{x+1} 5$.

Lời giải

a) Để $\log_3(1-2x)$ có nghĩa thì $1-2x > 0$ Hay $x < \frac{1}{2}$

b) Để $\log_{x+1} 5$ có nghĩa thì $x+1 > 0$ Hay $x > -1$

Bài 3. Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị các biểu thức sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ tư):

a) $\log_3 15$

b) $\log 8 - \log 3$;

c) $3 \ln 2$

Lời giải

a) $\log_3 15 = 2,4650$

b) $\log 8 - \log 3 = 0,4260$

c) $3 \ln 2 = 2,0794$

Bài 4. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_6 9 + \log_6 4$

b) $\log_5 2 - \log_5 50$

c) $\log_3 \sqrt{5} - \frac{1}{2} \log_3 15$.

Lời giải

a) $\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6 (9 \cdot 4) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$.

b) $\log_5 2 - \log_5 50 = \log_5 \frac{2}{50} = \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$

c) $\log_3 \sqrt{5} - \frac{1}{2} \log_3 15 = \log_3 \sqrt{5} - \log_3 \sqrt{15} = \log_3 \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}} = \log_3 \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \log_3 3^{-1} = -\frac{1}{2}$.

Bài 5. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_2 9 \cdot \log_3 4$

b) $\log_{25} \frac{1}{\sqrt{5}}$

c) $\log_2 3 \cdot \log_9 \sqrt{5} \cdot \log_5 4$

Lời giải

a) $\log_2 9 \cdot \log_3 4 = \log_2 3^2 \cdot \log_3 4 = 2 \log_2 3 \cdot \log_3 4 = 2 \log_2 4 = 2 \log_2 2^2 = 2 \cdot 2 = 4$.

b) $\log_{25} \frac{1}{\sqrt{5}} = \log_{5^2} 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{2} \log_5 5 = -\frac{1}{4}$.

c)

$$\begin{aligned}\log_2 3 \cdot \log_9 \sqrt{5} \cdot \log_5 4 &= \log_2 3 \cdot \log_{3^2} 5^{\frac{1}{2}} \cdot \log_5 2^2 = \log_2 3 \cdot \frac{1}{2} \log_3 5 \cdot 2 \log_5 2 \\ &= \frac{1}{2} \log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 4 = \frac{1}{2} \log_2 5 \cdot \log_5 2 = \frac{1}{2} \log_2 2 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Bài 6. Đặt $\log 2 = a, \log 3 = b$. Biểu thị các biểu thức sau theo a và b .

- a) $\log_4 9$; b) $\log_6 12$ c) $\log_5 6$.

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{a) } \log_4 9 &= \frac{\log 9}{\log 4} = \frac{\log 3^2}{\log 2^2} = \frac{2 \log 3}{2 \log 2} = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{b}{a} . \\ \text{b) } \log_6 12 &= \frac{\log 12}{\log 6} = \frac{\log (2^2 \cdot 3)}{\log (2 \cdot 3)} = \frac{\log 2^2 + \log 3}{\log 2 + \log 3} = \frac{2 \log 2 + \log 3}{\log 2 + \log 3} = \frac{2a + b}{a + b} . \\ \text{c) } \log_5 6 &= \frac{\log 6}{\log 5} = \frac{\log (2 \cdot 3)}{\log \frac{10}{2}} = \frac{\log 2 + \log 3}{\log 10 - \log 2} = \frac{a + b}{1 - a} .\end{aligned}$$

Bài 7. a) Nước cất có nồng độ H^+ là 10^{-7} mol/L . Tính độ pH của nước cất.

b) Một dung dịch có nồng độ H^+ gấp 20 lần nồng độ H^+ của nước cất. Tính độ pH của dung dịch đó.

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{a) Độ pH của nước cất là: } pH &= -\log [H^+] = -\log [10^{-7}] = 7 . \\ \text{b) Nồng độ } H^+ \text{ của dung dịch đó là: } &20 \cdot 10^{-7} \text{ mol/L} \\ \text{Độ pH của dung dịch đó là: } pH &= -\log [H^+] = -\log [20 \cdot 10^{-7}] \approx 5,7 .\end{aligned}$$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 a = x, \log_2 b = y$. Tính $P = \log_2 (a^2 b^3)$.

- A.** $P = x^2 y^3$ **B.** $P = x^2 + y^3$ **C.** $P = 6xy$ **D.** $P = 2x + 3y$

Lời giải

Chọn D

$$P = \log_2 (a^2 b^3) = \log_2 a^2 + \log_2 b^3 = 2 \log_2 a + 3 \log_2 b = 2x + 3y .$$

Câu 2: Cho $a, b > 0$ và $a, b \neq 1$, biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4$ có giá trị bằng bao nhiêu?

- A.** 18. **B.** 24. **C.** 12. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

$$P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4 = (6 \log_a b) \cdot (4 \log_b a) = 24 .$$

Câu 3: Cho b là số thực dương khác 1. Tính $P = \log_b \left(b^2 \cdot b^{\frac{1}{2}} \right)$.

A. $P = \frac{3}{2}$.

B. $P = 1$.

C. $P = \frac{5}{2}$.

D. $P = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P = \log_b \left(b^2 \cdot b^{\frac{1}{2}} \right) = \log_b b^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} \log_b b = \frac{5}{2}$.

Câu 4: Cho $a > 0, a \neq 1$. Biểu thức $a^{\log_a a^2}$ bằng

A. $2a$.

B. 2 .

C. 2^a .

D. a^2 .

Lời giải

Chọn D

Ta có $a^{\log_a a^2} = a^{2 \log_a a} = a^2$.

Câu 5: Giá trị biểu thức $A = 2^{\log_4 9 + \log_2 5}$ là:

A. $A = 8$.

B. $A = 15$.

C. $A = 405$.

D. $A = 86$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $A = 2^{\log_4 9 + \log_2 5} = 2^{\log_4 9} \cdot 2^{\log_2 5} = 2^{\log_2 3} \cdot 2^{\log_2 5} = 3 \cdot 5 = 15$.

Câu 6: Cho $a > 0, a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{\sqrt[3]{a}} \left(\frac{1}{a^3} \right)$

A. $P = -9$.

B. $P = -1$.

C. $P = 1$.

D. $P = 9$.

Lời giải

Chọn A

• **Tự luận :** $P = \log_{\sqrt[3]{a}} \left(\frac{1}{a^3} \right) = \log_{\frac{1}{a^3}} a^{-3} = -9 \log_a a = -9$

• **Trắc nghiệm :** Sử dụng máy tính, thay $a = 2$ rồi nhập biểu thức $\log_{\sqrt[3]{a}} \left(\frac{1}{a^3} \right)$ vào máy bấm = ta được kết quả $P = -9$.

Câu 7: Cho a là số thực dương khác 2. Tính $I = \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^2}{4} \right)$.

A. $I = \frac{1}{2}$.

B. $I = -\frac{1}{2}$.

C. $I = 2$.

D. $I = -2$.

Lời giải

Chọn C

$I = \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^2}{4} \right) = \log_{\frac{a}{2}} \left(\left(\frac{a}{2} \right)^2 \right) = 2 \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a}{2} \right) = 2$.

Câu 8: Cho a là số thực dương và b là số thực khác 0. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\log_3 \left(\frac{3a^3}{b^2} \right) = 1 + \frac{1}{3} \log_3 a - 2 \log_3 |b|$.

B. $\log_3 \left(\frac{3a^3}{b^2} \right) = 1 + 3 \log_3 a - 2 \log_3 b$.

C. $\log_3 \left(\frac{3a^3}{b^2} \right) = 1 + 3 \log_3 a - 2 \log_3 |b|$.

D. $\log_3 \left(\frac{3a^3}{b^2} \right) = 1 + 3 \log_3 a + 2 \log_3 b$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \log_3 \left(\frac{3a^3}{b^2} \right) &= \log_3 (3a^3) - \log_3 b^2 = \log_3 3 + \log_3 a^3 - \log_3 b^2 \\ &= \log_3 3 + \log_3 a^3 - \log_3 b^2 = 1 + 3\log_3 a - 2\log_3 |b|. \end{aligned}$$

Câu 9: Cho $\log 3 = a$. Tính $\log 9000$ theo a .

- A.** $6a$ **B.** $a^2 + 3$. **C.** $3a^2$. **D.** $2a + 3$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Cách 1: } \log 9000 = \log 9 + \log 1000 = 2\log 3 + 3 = 2a + 3.$$

$$\text{Cách 2: Gán } \log 3 = a. \text{ Tính } \log 9000 - (2a + 3) = 0.$$

Câu 10: Cho $\log_6 9 = a$. Tính $\log_3 2$ theo a

- A.** $\frac{a}{2-a}$. **B.** $\frac{a+2}{a}$. **C.** $\frac{a-2}{a}$. **D.** $\frac{2-a}{a}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \log_6 9 = 2\log_{2.3} 3 \Leftrightarrow a = \frac{2}{\log_3 2.3} \Leftrightarrow \log_3 2 + 1 = \frac{2}{a} \Leftrightarrow \log_3 2 = \frac{2-a}{a}.$$

Câu 11: Cho $a, b > 0$. Rút gọn biểu thức $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$

- A.** $2\log_a b$ **B.** 0 **C.** $\log_a b$ **D.** $4\log_a b$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \log_a b^2 + \log_{a^2} b^4 = 2\log_a b + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \log_a b = 4\log_a b.$$

Câu 12: Cho $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x$.

- A.** 6 . **B.** -6 . **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $-\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Vì a, b là các số thực lớn hơn 1 nên ta có:

$$\begin{cases} \log_a x = 2 \\ \log_b x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^2 \\ x = b^3 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 = b^3 \Leftrightarrow a = \sqrt{b^3} \Leftrightarrow a = b^{\frac{3}{2}}.$$

$$P = \log_{\frac{a}{b^2}} x = \log_{\frac{b^{\frac{3}{2}}}{b^2}} x = \log_{b^{-\frac{1}{2}}} x = -2\log_b x = -6.$$

Câu 13: Đặt $a = \log_2 3$ và $b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b .

- A.** $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab+b}$. **B.** $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab}$.

C. $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab}$. **D.** $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab+b}$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_6 45 = \frac{\log_3 (5 \cdot 3^2)}{\log_3 (2 \cdot 3)} = \frac{\log_3 5 + 2}{\log_3 2 + 1} = \frac{\frac{1}{b} + 2}{\frac{1}{a} + 1} = \frac{a+2ab}{ab+b}.$$

Câu 14: Cho 2 số thực dương a, b thỏa mãn $\sqrt{a} \neq b, a \neq 1, \log_a b = 2$. Tính $T = \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \sqrt[3]{ba}$.

A. $T = -\frac{2}{5}$. **B.** $T = \frac{2}{5}$. **C.** $T = \frac{2}{3}$. **D.** $T = -\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_a b = 2 \Rightarrow \log_b a = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} T &= \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \sqrt[3]{ba} = \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \sqrt[3]{b} + \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \sqrt[3]{a} = \frac{1}{\log_{\sqrt[3]{b}} \frac{\sqrt{a}}{b}} + \frac{1}{\log_{\sqrt[3]{a}} \frac{\sqrt{a}}{b}} \\ &= \frac{1}{\log_{\sqrt[3]{b}} \sqrt{a} - \log_{\sqrt[3]{b}} b} + \frac{1}{\log_{\sqrt[3]{a}} \sqrt{a} - \log_{\sqrt[3]{a}} b} = \frac{1}{\frac{3}{2} \log_b a - 3} + \frac{1}{\frac{3}{2} - 3 \log_a b} \\ &= \frac{1}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} - 3} + \frac{1}{\frac{3}{2} - 3 \cdot 2} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Câu 15: Với $a = \log_2 5$ và $b = \log_3 5$, giá trị của $\log_6 5$ bằng

A. $\frac{ab}{a+b}$. **B.** $\frac{a+b}{ab}$. **C.** $\frac{1}{a+b}$. **D.** $a+b$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_6 5 = \frac{1}{\log_5 6} = \frac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{ab}{a+b}$.

Câu 16: Biết $\log(xy^3) = 1$ và $\log(x^2y) = 1$, tìm $\log(xy)$?

A. $\log(xy) = \frac{5}{3}$. **B.** $\log(xy) = \frac{1}{2}$. **C.** $\log(xy) = \frac{3}{5}$. **D.** $\log(xy) = 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log(xy^3) = 1 \Leftrightarrow \log(xy) + 2\log y = 1$, $\log(x^2y) = 1 \Leftrightarrow \log(xy) + \log x = 1$

Vậy $\log x = 2\log y \Leftrightarrow x = y^2$

$$\text{Xét } \log(xy^3) = 1 \Leftrightarrow \log(y^2 y^3) = 1 \Leftrightarrow 5 \log y = 1 \Leftrightarrow y = 10^{\frac{1}{5}}$$

$$\text{Vậy } \log(xy) = \log(y^3) = \log\left(10^{\frac{3}{5}}\right) = \frac{3}{5}$$

Câu 17: Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{a^2}(a^{10}b^2) + \log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\sqrt[3]{b}}b^{-2}$ (với $0 < a \neq 1; 0 < b \neq 1$).

- A.** $P = 2$. **B.** $P = 1$. **C.** $P = \sqrt{3}$. **D.** $P = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Sử dụng các quy tắc biến đổi logarit

$$\begin{aligned} P &= \log_{a^2}(a^{10}b^2) + \log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\sqrt[3]{b}}b^{-2} \\ &= \frac{1}{2}[\log_a a^{10} + \log_a b^2] + 2[\log_a a - \log_a \sqrt{b}] + 3(-2)\log_b b \\ &= \frac{1}{2}[10 + 2\log_a b] + 2\left[1 - \frac{1}{2}\log_a b\right] - 6 = 1. \end{aligned}$$

Câu 18: Biết $\log_{27} 5 = a$, $\log_8 7 = b$, $\log_2 3 = c$ thì $\log_{12} 35$ tính theo a , b , c bằng:

- A.** $\frac{3(b+ac)}{c+2}$. **B.** $\frac{3b+2ac}{c+1}$. **C.** $\frac{3b+2ac}{c+2}$. **D.** $\frac{3(b+ac)}{c+1}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \log_{27} 5 = \frac{1}{3}\log_3 5 = a \Leftrightarrow \log_3 5 = 3a, \log_8 7 = \frac{1}{3}\log_2 7 = b \Leftrightarrow \log_2 7 = 3b.$$

$$\text{Mà } \log_{12} 35 = \frac{\log_2(7 \cdot 5)}{\log_2(3 \cdot 2^2)} = \frac{\log_2 7 + \log_2 5}{\log_2 3 + 2} = \frac{\log_2 7 + \log_2 3 \cdot \log_3 5}{\log_2 3 + 2} = \frac{3b + c \cdot 3a}{c + 2} = \frac{3(b+ac)}{c+2}.$$

Câu 19: Cho $a, b > 0$, nếu $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$ và $\log_4 a^2 + \log_8 b = 7$ thì giá trị của ab bằng

- A.** 2^9 . **B.** 8. **C.** 2^{18} . **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \log_8 a + \log_4 b^2 = 5 \\ \log_4 a^2 + \log_8 b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b = 5 \\ \log_2 a + \frac{1}{3}\log_2 b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 a = 6 \\ \log_2 b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^6 \\ b = 2^3 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } ab = 2^9.$$

Câu 20: Số nào trong các số sau lớn hơn 1

- A.** $\log_{0,5} \frac{1}{8}$. **B.** $\log_{0,2} 125$. **C.** $\log_{\frac{1}{6}} 36$. **D.** $\log_{0,5} \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\log_{0,5} \frac{1}{8} = \log_{2^{-1}} 2^{-3} = 3 > 1, \log_{0,2} 125 = \log_{5^{-1}} 5^3 = -3 < 1.$$

$$\log_{\frac{1}{6}} 36 = \log_{6^{-1}} 6^2 = -2 < 1, \log_{0,5} \frac{1}{2} = \log_{0,5} 0,5 = 1.$$

Câu 21: Cho a, b là các số thực, thỏa mãn $0 < a < 1 < b$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $\log_b a + \log_a b < 0$. **B.** $\log_b a > 1$.
C. $\log_a b > 0$. **D.** $\log_a b + \log_b a \geq 2$.

Lời giải

Chọn A

Vì $0 < a < 1 < b$ nên $\log_b a < \log_b 1 \Leftrightarrow \log_b a < 0$ và $\log_a b < \log_a 1 \Leftrightarrow \log_a b < 0$.

Suy ra : $\log_b a + \log_a b < 0$.

Câu 22: Cho các số thực a, b thỏa mãn $1 < a < b$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $\frac{1}{\log_a b} < 1 < \frac{1}{\log_b a}$. **B.** $\frac{1}{\log_b a} < 1 < \frac{1}{\log_a b}$.
C. $1 < \frac{1}{\log_a b} < \frac{1}{\log_b a}$. **D.** $\frac{1}{\log_a b} < \frac{1}{\log_b a} < 1$.

Lời giải

Chọn A

Vì $1 < a < b$ nên ta có $\log_b a < \log_b b \Leftrightarrow \log_b a < 1$ và $\log_a a < \log_a b \Leftrightarrow 1 < \log_a b$.

Do đó $\log_b a < 1 < \log_a b \Leftrightarrow \frac{1}{\log_a b} < 1 < \frac{1}{\log_b a}$.

Câu 23: Cho $0 < a < b < 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $\log_b a > \log_a b$. **B.** $\log_b a < \log_a b$. **C.** $\log_a b > 1$. **D.** $\log_a b < 0$.

Lời giải

Chọn A

Do $0 < a < 1$ nên hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Đáp án B sai, vì: Với $b < 1 \Rightarrow \log_a b > \log_a 1 \Leftrightarrow \log_a b > 0$.

Đáp án D sai, vì: Với $a < b \Rightarrow \log_a a > \log_a b \Leftrightarrow \log_a b < 1$.

Với $0 < a < b < 1$ ta có $0 < \log_a b < 1$.

Đáp án C sai, vì: Nếu $\log_b a < \log_a b \Leftrightarrow \frac{1}{\log_a b} < \log_a b \Leftrightarrow (\log_a b)^2 > 1$ (vô lý).

Đáp án A đúng, vì: Nếu $\log_b a > \log_a b \Leftrightarrow \frac{1}{\log_a b} > \log_a b \Leftrightarrow (\log_a b)^2 < 1$ (luôn đúng).

Câu 24: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.** $\log_3 5 > 0$. **B.** $\log_{2+x^2} 2016 < \log_{2+x^2} 2017$.

C. $\log_{0,3} 0,8 < 0$. **D.** $\log_3 4 > \log_4 \left(\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_{0,3} 0,8 < 0 \Leftrightarrow 0,8 > 0,3^0 \Leftrightarrow 0,8 > 1$ (sai)

Câu 25: Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\log_3 \pi = 1$. **B.** $\ln 3 < \log_3 e$. **C.** $\log_3 5 > \log_7 4$. **D.** $\log_{\frac{1}{2}} 2 > 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_3 5 > \log_3 3 \Rightarrow \log_3 5 > 1$

$\log_7 4 < \log_7 7 \Rightarrow \log_7 4 < 1$

Vậy: $\log_3 5 > \log_7 4$.

Câu 26: Cho a, b là các số thực thỏa mãn $0 < a < b < 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\log_b a < 0$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = -2$. **D.** $\log_a b > 1$.

Lời giải

Chọn B

Vì $0 < a < b < 1$ nên

$\bigcirc \log_b a > \log_b b = 1 \Rightarrow A$ sai.

$\bigcirc \Leftrightarrow x + 2y + 5z - 5 = 0 \Rightarrow \log_b a > \log_a b \Rightarrow B$ đúng, C sai.

$\bigcirc \log_a a > \log_a b \Leftrightarrow \log_a b < 1 \Rightarrow D$ sai.

Câu 27: Cho hai số thực a, b thỏa mãn điều kiện $0 < a < b < 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $1 < \log_a b < \log_b a$. **B.** $\log_a b < 1 < \log_b a$.
C. $1 < \log_b a < \log_a b$. **D.** $\log_b a < 1 < \log_a b$.

Lời giải

Chọn B

Do $0 < a < 1$ nên với $a < b$ ta có: $1 = \log_a a > \log_a b \Rightarrow \log_a b < 1$.

Tương tự do $0 < b < 1$ nên với $a < b$ ta có: $\log_b a > \log_b b = 1$.

Vậy $\log_a b < 1 < \log_b a$.

Câu 28: Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Nếu $0 < a < b$ thì $\log_{\frac{e}{2}} a < \log_{\frac{e}{2}} b$. **B.** Nếu $0 < a < b$ thì $\log a < \log b$.
C. Nếu $0 < a < b$ thì $\ln a < \ln b$. **D.** Nếu $0 < a < b$ thì $\log_{\frac{\pi}{4}} a < \log_{\frac{\pi}{4}} b$.

Lời giải

Chọn D

Nếu $0 < a < b$ thì $\log_{\frac{\pi}{4}} a > \log_{\frac{\pi}{4}} b$ do $\frac{\pi}{4} < 1$.

Câu 29: Gọi $a = 3^{\log_{0,5} 4}$; $b = 3^{\log_{0,5} 13}$, khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A.** $a < 1 < b$. **B.** $b < a < 1$. **C.** $a < b < 1$. **D.** $b < 1 < a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a = 3^{\log_{0,5} 4} < 3^{\log_{0,5} 1} = 1$, $b = 3^{\log_{0,5} 13} < 3^{\log_{0,5} 1} = 1$ (1)

Lại có $3^{\log_{0,5} 13} < 3^{\log_{0,5} 4}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow b < a < 1$

Câu 30: Giả sử x, y là các số thực dương. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.** $\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y$
- B.** $\log_2 \sqrt{xy} = \frac{1}{2}(\log_2 x + \log_2 y)$
- C.** $\log_2 \frac{x}{y} = \log_2 x - \log_2 y$
- D.** $\log_2 (x + y) = \log_2 x + \log_2 y$

Lời giải

Chọn D

Do $\log_2 x + \log_2 y = \log_2 (xy)$.

Câu 31: Cho hai số thực dương a và b , với $a \neq 1$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

- A.** $\log_{a^2} (ab) = 2 + 2 \log_a b$. **B.** $\log_{a^2} (ab) = \frac{1}{2} \log_a b$.
- C.** $\log_{a^2} (ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_a b$. **D.** $\log_{a^2} (ab) = \frac{1}{4} \log_a b$.

Lời giải

Chọn C

Với $a, b > 0$ và $a \neq 1$, ta có

$$\log_{a^2} (ab) = \frac{1}{2} \log_a (ab) = \frac{1}{2} (\log_a a + \log_a b) = \frac{1}{2} (1 + \log_a b) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_a b.$$

Câu 32: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. **B.** $\ln \frac{a}{b} = \ln b - \ln a$. **C.** $\ln(ab) = \ln a \cdot \ln b$. **D.** $\ln \frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 33: Cho các số thực dương a, b, c khác 1. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây.

- A.** $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$. **B.** $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.
- C.** $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$. **D.** $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Lời giải

Chọn B

Với các số thực dương a, b, c khác 1, ta có

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \text{ nên A đúng.}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ nên B sai và D đúng.}$$

$$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c \text{ nên C đúng.}$$

Câu 34: Giả sử ta có hệ thức $a^2 + b^2 = 7ab$ ($a, b > 0$). Hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $2 \log_2 (a+b) = \log_2 a + \log_2 b$.

B. $2 \log_2 \frac{a+b}{3} = \log_2 a + \log_2 b$.

C. $\log_2 \frac{a+b}{3} = 2(\log_2 a + \log_2 b)$.

D. $4 \log_2 \frac{a+b}{6} = \log_2 a + \log_2 b$.

Lời giải

Chọn B

$$+) 2 \log_2 (a+b) = \log_2 a + \log_2 b \Leftrightarrow \log_2 (a+b)^2 = \log_2 ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 = -ab$$

$$+) 2 \log_2 \frac{a+b}{3} = \log_2 a + \log_2 b \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 9ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 7ab.$$

Câu 35: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 14ab$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\ln \frac{a+b}{4} = \frac{\ln a + \ln b}{2}$. **B.** $2 \log_2 (a+b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b$.

C. $2 \log_4 (a+b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b$.

D. $2 \log \frac{a+b}{4} = \log a + \log b$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } a^2 + b^2 = 14ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 16ab \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{4}\right)^2 = ab$$

$$\text{Nên ta có } \ln \frac{a+b}{4} = \ln \sqrt{ab} = \frac{\ln a + \ln b}{2} \text{ vậy A đúng}$$

$$2 \log_2 (a+b) = \log_2 (a+b)^2 = \log_2 (16ab) = 4 + \log_2 a + \log_2 b \text{ vậy B đúng}$$

$$2 \log_4 (a+b) = \log_4 (a+b)^2 = \log_4 (16ab) = 2 + \log_4 a + \log_4 b \text{ vậy C sai}$$

$$2 \log \frac{a+b}{4} = \log_2 a + \log_2 b \text{ vậy D đúng}$$

Cách 2:.

$$\text{Câu này ý C sai vì } 2 \log_4 (a+b) = 4 + \log_4 a + \log_4 b \Leftrightarrow \log_4 (a+b)^2 = 4 \log_4 4 + \log_4 ab$$

$$\Leftrightarrow \log_4 (a+b)^2 = \log_4 4^4 + \log_4 ab = \log_4 64ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 64ab$$

Câu 36: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $3 \log a + 2 \log b = 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. $a^3 + b^2 = 1$.

B. $3a + 2b = 10$.

C. $a^3 b^2 = 10$.

D. $a^3 + b^2 = 10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3 \log a + 2 \log b = 1 \Leftrightarrow \log a^3 + \log b^2 = 1 \Leftrightarrow \log(a^3 b^2) = 1 \Leftrightarrow a^3 b^2 = 10$.

Câu 37: Với các số thực dương a, b bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\log_2 \frac{9a^2}{b^3} = 2 + 2 \log_2 a - 3 \log_2 b$.

B. $\ln \frac{9a^2}{b^3} = 2 \ln 3 + 2 \ln a - 3 \ln b$.

C. $\log \frac{9a^2}{b^3} = 2 \log 3 + 2 \log a - 3 \log b$.

D. $\log_3 \frac{9a^2}{b^3} = 2 + 2 \log_3 a - 3 \log_3 b$.

Lời giải

Chọn A

Nhận thấy $\log_2 \frac{9a^2}{b^3} = \log_2(9a^2) - \log_2 b^3$

$= \log_2 9 + \log_2 a^2 - \log_2 b^3 = 2 \log_2 3 + 2 \log_2 a - 3 \log_2 b$

Vậy B, C, D đúng.

Câu 38: Với các số thực dương a, b bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. **B.** $\ln \frac{a}{b} = \ln b - \ln a$. **C.** $\ln(ab) = \ln a \cdot \ln b$. **D.** $\ln \frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 39: Cho các số thực dương a, b, c khác 1. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây.

A. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

B. $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

C. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

D. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Lời giải

Chọn B

Với các số thực dương a, b, c khác 1, ta có

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ nên A đúng.

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ nên B sai và D đúng.

$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ nên C đúng.

Câu 40: Cho $P = \log_{a^4} b^2$ với $0 < a \neq 1$ và $b < 0$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $P = -2 \log_a(-b)$. **B.** $P = 2 \log_a(-b)$.

C. $P = -\frac{1}{2} \log_a(-b)$. **D.** $P = \frac{1}{2} \log_a(-b)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = \log_{a^4} b^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} \log_{|a|} |b| = \frac{1}{2} \log_a(-b)$ (Do $0 < a \neq 1$ và $b < 0$).

Câu 41: Cho $a > 0, b > 0$ và $a^2 + b^2 = 7ab$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $2(\ln a + \ln b) = \ln(7ab).$

B. $3\ln(a+b) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b).$

C. $\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b).$

D. $\ln(a+b) = \frac{3}{2}(\ln a + \ln b).$

Lời giải

Chọn C

Với $a > 0, b > 0$, ta có $a^2 + b^2 = 7ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 9ab$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = \ln(ab)$$

$$\Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \ln a + \ln b \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b).$$

Câu 42: Cho các số $a, b > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 14ab$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\log_{\sqrt{2}}(a+b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b.$

B. $\log_2(a+b)^2 = 4(\log_2 a + \log_2 b).$

C. $\log_2\left(\frac{a+b}{4}\right) = 2(\log_2 a + \log_2 b).$

D. $\log_2\left(\frac{a+b}{16}\right) = \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b).$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } a^2 + b^2 = 14ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 16ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 16ab \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{4}\right)^2 = ab.$$

$$\Rightarrow \log_2\left(\frac{a+b}{4}\right)^2 = \log_2 ab \Leftrightarrow 2\log_2(a+b) - 2\log_2 4 = \log_2 a + \log_2 b.$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}}(a+b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b.$$

Câu 43: Cho $\log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1$, với $y > 0, y > x$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $3x = 4y.$

B. $x = 3y.$

C. $x = \frac{3}{4}y.$

D. $y = \frac{3}{4}x.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow -\log_4(y-x) + \log_4 y = 1 \Leftrightarrow \log_4 y = 1 + \log_4(y-x)$$

$$\Leftrightarrow \log_4 y = \log_4 4 \cdot (y-x) \Leftrightarrow y = 4(y-x) \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}y.$$

Câu 44: Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log(a+b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b).$

B. $\log(a+b) = 1 + \log a + \log b.$

C. $\log(a+b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b).$

D. $\log(a+b) = \frac{1}{2} + \log a + \log b.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } a^2 + b^2 = 8ab \Leftrightarrow (a+b)^2 - 2ab = 8ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 10ab.$$

$$\text{Hay ta có } \log(a+b)^2 = \log 10ab \Leftrightarrow 2\log(a+b) = 1 + \log a + \log b$$

$$\Leftrightarrow \log(a+b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b).$$

Câu 45: Cho $\log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2 xy$, với $xy > 0$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A.** $x > y$. **B.** $x < y$. **C.** $x = y$. **D.** $x = y^2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2 xy \Leftrightarrow \log_2(x^2 + y^2) = \log_2 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2xy \Leftrightarrow (x-y)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow x = y.$$

Câu 46: Cho $\log_a x = 2, \log_b x = 3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x$.

- A.** $P = -6$. **B.** $P = \frac{1}{6}$. **C.** $P = -\frac{1}{6}$. **D.** $P = 6$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Cách 1: } \log_a x = 2, \log_b x = 3 \Rightarrow x = a^2 = b^3 \Rightarrow a = b^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{a}{b^2} = \frac{b^{\frac{3}{2}}}{b^2} = b^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Do đó } P = \log_{\frac{a}{b^2}} x = \log_{b^{-\frac{1}{2}}} x = -2 \log_b x = -2.3 = -6.$$

$$\text{Cách 2: } \log_a x = 2 \Rightarrow x = a^2 > 1. \log_a x = 2, \log_b x = 3 \Rightarrow \log_x a = \frac{1}{2}, \log_x b = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Khi đó } P = \log_{\frac{a}{b^2}} x = \frac{1}{\log_x \frac{a}{b^2}} = \frac{1}{\log_x a - 2 \log_x b} = \frac{1}{\frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3}} = -6.$$

Câu 47: Với các số thực $a, b > 0$ bất kì, rút gọn biểu thức $P = 2 \log_2 a - \log_{\frac{1}{2}} b^2$ ta được

- A.** $P = \log_2(2ab^2)$. **B.** $P = \log_2(ab)^2$.
C. $P = \log_2\left(\frac{a}{b}\right)^2$. **D.** $P = \log_2\left(\frac{2a}{b^2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } P = 2 \log_2 a - \log_{\frac{1}{2}} b^2 = \log_2 a^2 + \log_2 b^2 = \log_2 (ab)^2.$$

$$P = \sqrt{2014}.$$

Câu 48: Với các số thực dương a, b bất kì, đặt $M = \left(\frac{a^{10}}{\sqrt[3]{b^5}}\right)^{-0,3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $\log M = -3 \log a + \frac{1}{2} \log b$. **B.** $\log M = -3 \log a - \frac{1}{2} \log b$.

C. $\log M = -3 \log a + 2 \log b$.

D. $\log M = 3 \log a + 2 \log b$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$M = \left(\frac{a^{10}}{\sqrt[3]{b^5}} \right)^{-0,3} = \left(\frac{a^{10}}{b^{\frac{5}{3}}} \right)^{-0,3} = \frac{a^{-3}}{b^{-0,5}}$$

$$\Rightarrow \log M = \log \left(\frac{a^{-3}}{b^{-0,5}} \right) = \log a^{-3} - \log b^{-0,5} = -3 \log a + \frac{1}{2} \log b$$

Câu 49: Cho $a, b > 0, a \neq 1, ab \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**.

A. $\log_{ab} a = \frac{1}{1 + \log_a b}$. **B.** $\log_a \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(1 + \log_a b)$.

C. $\log_{a^2} \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{4}(1 - \log_a b)$.

D. $\log_{\sqrt{a}}(ab^2) = 4(1 + \log_a b)$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_{ab} a = \frac{1}{\log_a ab} = \frac{1}{\log_a a + \log_a b} = \frac{1}{1 + \log_a b}$$

$$\log_a \sqrt{ab} = \log_a (ab)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1 + \log_a b)$$

$$\log_{a^2} \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{2} \log_a \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(\log_a a - \log_a b) = \frac{1}{4}(1 - \log_a b)$$

Câu 50: Cho các số thực dương a, x, y, a khác 1. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\log x = \frac{\log_a x}{\log_a 10}$. **B.** $\log x = \frac{\log_a x}{\log_a e}$.

C. $\log x = \frac{\log_a x}{\ln 10}$. **D.** $\log x = \frac{\log_x a}{\log a}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \log x = \frac{\log_a x}{\log_a 10}$$

Câu 51: Cho các số thực dương a, b, x thỏa mãn $\log_3 x = 4 \log_3 a + 7 \log_3 b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $x = 4a + 7b$. **B.** $x = 4a - 7b$. **C.** $x = a^4 b^7$. **D.** $x = a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{7}}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \log_3 x = 4 \log_3 a + 7 \log_3 b \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 a^4 + \log_3 b^7 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 (a^4 b^7) \Leftrightarrow x = a^4 b^7$$

Câu 52: Cho $a > 1, a \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\log_2 (\log_4 x) = \log_4 (\log_2 x) + a$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $\log_2 x = 4^a$. **B.** $\log_2 x = a + 1$. **C.** $\log_2 x = 2^{a+1}$. **D.** $\log_2 x = 4^{a+1}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow \log_4 x = \frac{1}{2}t$. Ta có: $\log_2 \left(\frac{1}{2}t \right) = \log_4 t + a \Leftrightarrow \log_2 t = 2a + 2 \Leftrightarrow t = 4^{a+1}$.

Vậy: $\log_2 x = 4^{a+1}$.

Câu 53: Cho $\log_a bc = x, \log_b ca = y$ và $\log_c ab = \frac{mx + ny + 2}{pxy - 1}$, với m, n, p là các số nguyên. Tính

$$S = m + 2n + 3p$$

- A.** $S = 6$. **B.** $S = 9$. **C.** $S = 0$. **D.** $S = 3$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} x = \log_a bc \\ y = \log_b ca \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\log_c bc}{\log_c a} \\ y = \frac{\log_c ca}{\log_c b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \log_c a - \log_c b = 1 \\ \log_c a - y \log_c b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_c a = \frac{y+1}{xy-1} \\ \log_c b = \frac{x+1}{xy-1} \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác, } \log_c ab = \log_c a + \log_c b = \frac{x+y+2}{xy-1}. \text{ Do đó } \begin{cases} m = 1 \\ n = 1 \\ p = 1 \end{cases} \Rightarrow S = m + 2n + 3p = 6.$$

Câu 54: Cho hai số thực dương a, b và $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_2 a = \frac{b}{4}, \log_a b = \frac{16}{b}$. Tính ab ?

- A.** $ab = 256$. **B.** $ab = 16$. **C.** $ab = 32$. **D.** $ab = 64$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \log_2 a \cdot \log_a b = \frac{b}{4} \cdot \frac{16}{b} \Leftrightarrow \log_2 b = 4 \Leftrightarrow b = 2^4 \Leftrightarrow b = 16$$

$$\Rightarrow \log_2 a = 4 \Leftrightarrow a = 16 \Rightarrow a \cdot b = 16^2 \Leftrightarrow ab = 256.$$

Câu 55: Cho $\log_a (bc) = 2, \log_b (ca) = 3$. Tính $S = \log_c (ab)$.

- A.** $S = \frac{7}{5}$. **B.** $S = \frac{7}{6}$. **C.** $S = \frac{5}{7}$. **D.** $S = \frac{6}{7}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } x = \log_c a, y = \log_c b.$$

$$\text{Ta có } \log_a (bc) = 2 \Leftrightarrow \log_a b + \log_a c = 2 \Leftrightarrow \frac{\log_c b}{\log_c a} + \frac{1}{\log_c a} = 2 \Rightarrow \frac{y}{x} + \frac{1}{x} = 2.$$

$$\log_b (ca) = 3 \Leftrightarrow \log_b c + \log_b a = 3 \Leftrightarrow \frac{\log_c a}{\log_c b} + \frac{1}{\log_c b} = 3 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{1}{y} = 3.$$

$$\text{Do đó ta có hệ } \begin{cases} \frac{y+1}{x} = 2 \\ \frac{x+1}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+1 = 2x \\ x+1 = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Thay vào } S = \log_c(ab) = \log_c a + \log_c b = \frac{7}{5}.$$

Câu 56: Cho các số thực dương a, b khác 1 và số thực dương x thỏa mãn $\log_a(\log_b x) = \log_b(\log_a x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\log_a x = b^{\frac{\log_b(\log_a b)}{a}}$. **B.** $\log_a x = a^{\frac{\log_b(\log_a b)}{a}}$. **C.** $\log_a x = b^{\frac{\log_a(\log_a b)}{b}}$. **D.** $\log_a x = a^{\frac{\log_a(\log_a b)}{b}}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \log_a(\log_b x) = \log_b(\log_a x) = k \Leftrightarrow \begin{cases} \log_b x = a^k \\ \log_a x = b^k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = b^{a^k} \\ x = a^{b^k} \end{cases} \Rightarrow b^{a^k} = a^{b^k} = a^k \log_a b \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^k = \log_a b \Leftrightarrow k = \log_{\frac{b}{a}}(\log_a b) \Rightarrow \log_a x = b^{\frac{\log_b(\log_a b)}{a}}$$

Câu 57: Cho $0 < a \neq 1$ tìm số tự nhiên n thỏa mãn $\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008.2017^2 \log_a 2019$

A. $n = 2016$. **B.** $n = 2019$. **C.** $n = 2017$. **D.** $n = 2020$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_a 2019 + 2^3 \log_a 2019 + 3^3 \log_a 2019 + \dots + n^3 \log_a 2019 = 1008^2.2017^2 \log_a 2019$$

$$\Leftrightarrow (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) \log_a 2019 = 1008^2.2017^2 \log_a 2019$$

$$\Leftrightarrow (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = 1008^2.2017^2 \Leftrightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 1008^2.2017^2 \Leftrightarrow n = 2016$$

Câu 58: Với a là số dương tùy ý, $\ln(5a) - \ln(3a)$ bằng:

A. $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. **B.** $\ln(2a)$. **C.** $\ln \frac{5}{3}$. **D.** $\frac{\ln 5}{\ln 3}$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \ln(5a) - \ln(3a) = \ln \frac{5a}{3a} = \ln \frac{5}{3}.$$

Câu 59: Cho ba số thực dương a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân và $a + b + c = 64$. Giá trị của biểu thức $P = 3\log_2(ab + bc + ca) - \log_2(abc)$ bằng:

A. 18 . **B.** 6 . **C.** 24 . **D.** 8

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \begin{cases} ac = b^2 \\ abc = b^3 \\ ab + bc + ca = b(a + c) + ca = b(64 - b) + b^2 = 64b \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } P = 3\log_2(64b) - \log_2 b^3 = 3\log_2 64 = 3.6 = 18.$$

Câu 60: Cho 3 số $2017 + \log_2 a$; $2018 + \log_3 a$; $2019 + \log_4 a$; theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Công sai của cấp số cộng này bằng:

- A.** 1. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Do 3 số $2017 + \log_2 a$; $2018 + \log_3 a$; $2019 + \log_4 a$; theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Suy ra $2017 + \log_2 a + 2019 + \log_4 a = 2(2018 + \log_3 a)$

$$\Leftrightarrow \log_2 a + \frac{1}{2}\log_2 a = 2\log_3 a \Leftrightarrow 3\log_2 a = 4\log_3 a \Leftrightarrow \log_2 a(3 - 4\log_3 2) = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

$$\text{Vậy công sai } d = \log_3 a - \log_2 a + 1 = 1.$$

Câu 61: cho các số thực dương a, b, c lớn hơn 1, đặt $x = \log_a b + \log_b a$, $y = \log_b c + \log_c b$ và $z = \log_c a + \log_a c$. Giá trị của biểu thức $x^2 + y^2 + z^2 - xyz$ bằng

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } xyz &= (\log_c b + \log_b c)(\log_a c + \log_c a)(\log_b a + \log_a b) \\ &= (\log_a b)^2 + (\log_a c)^2 + (\log_b c)^2 + (\log_c b)^2 + (\log_c a)^2 + (\log_b a)^2 + 2 \quad (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 &= (\log_c b + \log_b c)^2 + (\log_a c + \log_c a)^2 + (\log_b a + \log_a b)^2 \\ &= (\log_a b)^2 + (\log_a c)^2 + (\log_b c)^2 + (\log_c b)^2 + (\log_c a)^2 + (\log_b a)^2 + 6 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } x^2 + y^2 + z^2 - xyz = 4.$$

Câu 62: Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_{3^2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{3^n} x} = \frac{120}{\log_3 x}$ với $0 < x \neq 1$

- A.** $n = 15$. **B.** $n = 20$. **C.** $n = 12$. **D.** $n = 10$.

Lời giải

Chọn A

Do $0 < x \neq 1$ nên ta có:

$$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_{3^2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{3^n} x} = \log_x (3.3^2 \dots 3^n) = \log_x 3^{1+2+\dots+n} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \log_x 3$$

$$\text{Vậy ta có: } \frac{n(n+1)}{2} = 120 \Leftrightarrow n = 15$$

- Câu 63:** Với mỗi số thực dương x , khi viết x dưới dạng thập phân thì số các chữ số đứng trước dấu phẩy của x là $[\log x] + 1$. Cho biết $\log 2 = 0,30103$. Hỏi số 2^{2017} khi viết trong hệ thập phân ta được một số có bao nhiêu chữ số? (Kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).
- A. 607. B. 606. C. 609. D. 608.

Lời giải

Chọn D

Số các chữ số của 2^{2017} là

$$[\log(2^{2017})] + 1 = [2017 \times \log 2] + 1 = [2017 \times 0,30103] + 1 = [607,17751] + 1 = 608.$$

- Câu 64:** Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 10^{81}$ và $(\log_{10} x) \cdot (\log_{10} yz) + (\log_{10} y)(\log_{10} z) = 468$. Tính giá trị của biểu thức $S = \sqrt{(\log_{10} x)^2 + (\log_{10} y)^2 + (\log_{10} z)^2}$.
- A. 75. B. 936. C. 625. D. 25.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \log_{10} x \\ b = \log_{10} y \\ c = \log_{10} z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10^a \\ y = 10^b \\ z = 10^c \end{cases} \Rightarrow xyz = 10^{a+b+c}.$$

$$\text{Theo bài ta có: } \begin{cases} xyz = 10^{81} \\ (\log_{10} x) \cdot (\log_{10} yz) + (\log_{10} y)(\log_{10} z) = 468 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 81 \\ ab + ac + bc = 468 \end{cases} \quad (1).$$

$$\text{Vậy thay (1) vào ta có } S = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac)} = \sqrt{81^2 - 2 \cdot 468} = 75.$$

- Câu 65:** Cho hai số thực dương $x, y \neq 1$ thỏa mãn $\log_x y = \log_y x$ và $\log_x(x - y) = \log_y(x + y)$. Tính giá trị biểu thức $S = x^4 - x^2 + 1$.
- A. $S = 2$. B. $S = 3$. C. $S = 4$. D. $S = 5$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x, y \neq 1 \\ x > y > 0 \end{cases}. \text{ Ta có:}$$

$$\log_x y = \log_y x \Leftrightarrow \log_x y = \frac{1}{\log_x y} \Leftrightarrow (\log_x y)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x y = 1 \text{ (L)} \\ \log_x y = -1 \text{ (TM)} \end{cases} \Leftrightarrow y = x^{-1} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}.$$

$$\text{Ta có: } \log_x(x - y) = \log_y(x + y) \Leftrightarrow \log_x\left(x - \frac{1}{x}\right) = -\log_x\left(x + \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \log_x\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 1 = 0. \text{ Vậy } S = x^4 - x^2 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

- Câu 66:** Có hai cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời $\log_{225} x + \log_{64} y = 4$ và $\log_x 225 - \log_y 64 = 1$ là $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$. Giá trị biểu thức $\log_{30}(x_1 y_1 x_2 y_2)$ bằng:

A. 12.

B. 15.

C. 8.

D. 36.

Lời giải

Chọn A

Theo bài ra: $\log_x 225 - \log_y 64 = 1$. Đặt $\begin{cases} X = \log_{225} x \\ Y = \log_{64} y \end{cases}$ ta được hệ:

$$\begin{cases} X + Y = 4 \\ \frac{1}{X} - \frac{1}{Y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{X} - \frac{1}{4-X} = 1 \Leftrightarrow 4 - 2X = X(4-X) \Leftrightarrow X^2 - 6X + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 3 + \sqrt{5} \Rightarrow Y = 1 - \sqrt{5} \\ X = 3 - \sqrt{5} \Rightarrow Y = 1 + \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} X = 3 + \sqrt{5} \\ Y = 1 - \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 225^{3+\sqrt{5}} \\ y_1 = 64^{1-\sqrt{5}} \end{cases} \quad \text{Với } \begin{cases} X = 3 - \sqrt{5} \\ Y = 1 + \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 225^{3-\sqrt{5}} \\ y_2 = 64^{1+\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \log_{30}(x_1 y_1 x_2 y_2) = \log_{30}(225^6 \cdot 64^2) = 12$$

Câu 67: Tìm tập hợp tất cả các số thực m để tồn tại duy nhất cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2) = 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

A. $\{\pm 5\}$.

B. $\{\pm 7, \pm 5, \pm 1\}$.

C. $\{\pm 5, \pm 1\}$.

D. $\{\pm 1\}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Theo đề bài ta có: } \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \\ 4x + 4y - 6 + m^2 = x^2 + y^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \quad (1) \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = m^2 \quad (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) là phương trình đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-1; 2)$, bán kính $R_1 = 2$

và phương trình (2) là phương trình đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2; 2)$ và bán kính $R_2 = |m|$

Cặp số thực $(x; y)$ tồn tại duy nhất khi và chỉ khi $(C_1), (C_2)$ tiếp xúc ngoài hoặc tiếp xúc trong

$$(R_1 = R_2) \Leftrightarrow \begin{cases} I_1 I_2 = R_1 + R_2 \\ I_1 I_2 = |R_1 - R_2| \\ R_1 \neq R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = |m| + 2 \\ 3 = ||m| - 2| \\ |m| \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm 5 \end{cases}$$

Câu 68: cho các số thực dương a, b, c lớn hơn 1, đặt $x = \log_a b + \log_b a, y = \log_b c + \log_c b$ và $z = \log_c a + \log_a c$. Giá trị của biểu thức $x^2 + y^2 + z^2 - xyz$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } xyz = (\log_c b + \log_b c)(\log_a c + \log_c a)(\log_b a + \log_a b)$$

$$= (\log_a b)^2 + (\log_a c)^2 + (\log_b c)^2 + (\log_c b)^2 + (\log_c a)^2 + (\log_b a)^2 + 2 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (\log_c b + \log_b c)^2 + (\log_a c + \log_c a)^2 + (\log_b a + \log_a b)^2$$

$$= (\log_a b)^2 + (\log_a c)^2 + (\log_b c)^2 + (\log_c b)^2 + (\log_c a)^2 + (\log_b a)^2 + 6 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $x^2 + y^2 + z^2 - xyz = 4$.

Câu 69: Với mỗi số thực dương x , khi viết x dưới dạng thập phân thì số các chữ số đứng trước dấu phẩy của x là $\lceil \log x \rceil + 1$. Cho biết $\log 2 = 0,30103$. Hỏi số 2^{2017} khi viết trong hệ thập phân ta được một số có bao nhiêu chữ số? (Kí hiệu $\lceil x \rceil$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

A. 607.

B. 606.

C. 609.

D. 608.

Lời giải

Chọn D

Số các chữ số của 2^{2017} là

$$\lceil \log(2^{2017}) \rceil + 1 = \lceil 2017 \times \log 2 \rceil + 1 = \lceil 2017 \times 0,30103 \rceil + 1 = \lceil 607,17751 \rceil + 1 = 608.$$

BÀI 3. HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔGARIT**A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM**

Chuyện kể rằng, ngày xưa ở xứ Ấn Độ, người phát minh ra bàn cờ vua được nhà vua cho phép từ chọn phần thưởng là những hạt thóc đặt vào 64 ô của bàn cờ theo quy tắc như sau: 1 hạt thóc ở ô thứ nh ất, 2 hạt thóc ở ô thứ hai, 4 hạt thóc ở ô thứ ba,... Cứ như thế số hạt thóc ở ô sau gấp đôi số hạt thóc ở ô trước. Nhà vua nhanh chóng chấp nhận lời đề nghị, vì cho rằng phần thưởng như vậy thì quá dễ dàng.

Tuy nhiên, theo phần thưởng này, tổng số hạt thóc có trong 64 ô là $2^{64} - 1$, tính ra được hơn 18.10^{18} hạt thóc, hay hơn 450 tỉ tấn thóc (mỗi hạt thóc nặng khoảng 25 mg). Nhà vua không thể đủ thóc thưởng cho nhà phát minh.

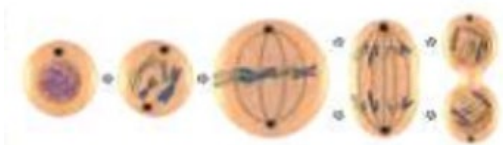
Từ tình huống trên, có nhận xét gì về giá trị của biểu thức 2^x khi x trở nên lớn?

Lời giải

Khi x trở nên lớn thì 2^x trở nên rất lớn

1. Hàm số mũ

Nguyên phân là quá trình tế bào phân chia thành hai tế bào con giống hệt nhau về mặt di truyền.

**Hình 1**

Lập bảng sau đây để tính số tế bào được tạo ra từ một tế bào ban đầu sau những lần nguyên phân.

Số lần nguyên phân	0	1	2	3	4	5	6	7
Số tế bào	1	2	4	?	?	?	?	?

a) Hoàn thành bảng trên vào vở.

b) Gọi y là số tế bào được tạo ra từ một tế bào ban đầu sau x ($x = 0, 1, 2, \dots$) lần nguyên phân.

Viết công thức biểu thị y theo x .

Lời giải

a)

Số lần nguyên phân	0	1	2	3	4	5	6	7

Số tế bào	1	2	4	8	16	32	64	128
-----------	---	---	---	---	----	----	----	-----

b) $y = 2^x$

Cho số thực dương a khác 1.

Hàm số cho tương ứng mỗi số thực x với số thực a^x được gọi là **hàm số mũ** cơ số a , kí hiệu $y = a^x$.

Nhận xét: Hàm số $y = a^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số mũ? Chỉ ra cơ số của nó.

a) $y = 3^{\frac{x}{2}}$

b) $y = x^{-4}$

c) $y = 4^{-x}$

Lời giải

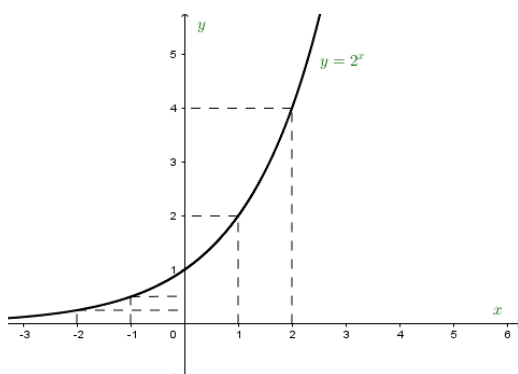
a) $y = 3^{\frac{x}{2}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = (\sqrt{3})^x$ là hàm số mũ với cơ số $\sqrt{3}$.

b) $y = x^{-4}$ không phải là hàm số mũ.

c) $y = 4^{-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ là hàm số mũ với cơ số $\frac{1}{4}$.

Đồ thị hàm số mũ

a) Xét hàm số mũ $y = 2^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.



Hình 2

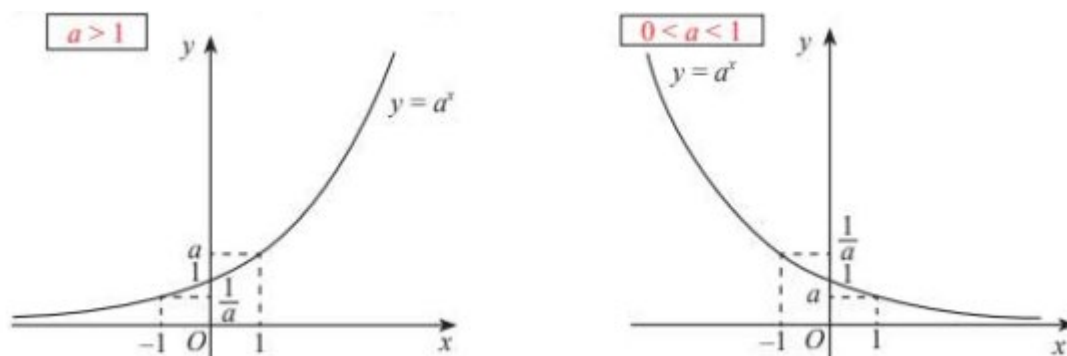
i) Hoàn thành bảng giá trị sau:

x	-2	-1	0	1	2
y	?	$\frac{1}{2}$	1	?	?

ii) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , xác định các điểm có tọa độ như bảng trên. Làm tương tự, lấy nhiều điểm $M(x; 2^x)$ với $x \in \mathbb{R}$ và nối lại ta được đồ thị hàm số $y = 2^x$ như Hình 2. Từ đồ thị này, nêu nhận xét về tính liên tục, tính đồng biến, nghịch biến, giới hạn khi $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ và tập giá trị của hàm số đã cho.

b) Lập bảng giá trị và vẽ đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Từ đó, nêu nhận xét về tính liên tục, tính đồng biến, nghịch biến, giới hạn khi $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ và tập giá trị của hàm số này.

Tổng quát, ta có đồ thị của hàm số $y = a^x$ với $a > 1$ và $0 < a < 1$ như sau:



Hình 3

Lời giải

a)

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

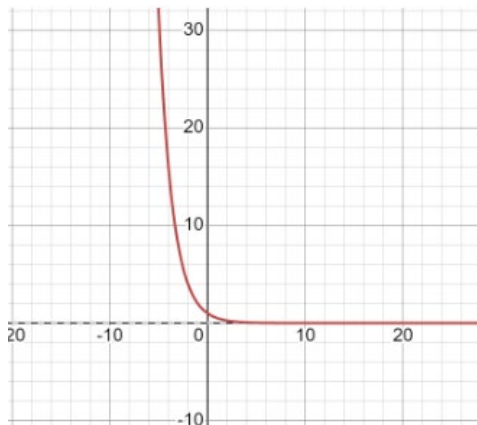
Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$
- Khi $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$
- Khi $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow 0$
- Tập giá trị của hàm số là $(0; +\infty)$

b)

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Đồ thị của hàm số trên là:



- Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$
- Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$
- Khi $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0$
- Khi $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow +\infty$

- Tập giá trị của hàm số là $(0; +\infty)$

(1) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Tập giá trị: $T = (0; +\infty)$.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

(2) Sự biến thiên:

- Nếu $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0.$$

- Nếu $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty.$$

(3) Đồ thị:

- Cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$; đi qua điểm $(1; a)$.
- Nằm phía trên trục hoành.

Ví dụ 2: Sử dụng tính chất của hàm số mũ, so sánh các cặp số sau:

- a) $1,4^2$ và $1,4^{1,8}$; b) $0,9^{-1,2}$ và $0,9^{-0,8}$; c) $\sqrt[3]{2}$ và $\sqrt[5]{4}$.

Lời giải

a) Do $1,4 > 1$ nên hàm số $y = 1,4^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $2 > 1,8$ nên $1,4^2 > 1,4^{1,8}$.

b) Do $0 < 0,9 < 1$ nên hàm số $y = 0,9^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Mà $-1,2 < -0,8$ nên $0,9^{-1,2} > 0,9^{-0,8}$.

c) Ta có: $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[5]{4} = 2^{\frac{2}{5}}$.

Do $2 > 1$ nên hàm số $y = 2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $\frac{1}{3} < \frac{2}{5}$ nên $2^{\frac{1}{3}} < 2^{\frac{2}{5}}$, suy ra $\sqrt[3]{2} < \sqrt[5]{4}$.

Ví dụ 3: Năm 2020, dân số thế giới là 7,795 tỉ người và tốc độ tăng dân số 1,05%/năm (nguồn: <https://www.worldometers.info/world-population>). Nếu tốc độ này tiếp tục duy trì ở những năm tiếp theo thì dân số thế giới sau t năm kể từ năm 2020 được tính bởi công thức:

$$P(t) = 7,795 \cdot (1 + 0,0105)^t \text{ (tỉ người)}. \quad (*)$$

Khi đó, hãy tính dân số thế giới vào năm 2025 và vào năm 2030. (Mốc thời điểm để tính dân số của mỗi năm là ngày 1 tháng 7.)

Lời giải

Năm 2025 ứng với $t = 5$ nên có dân số thế giới là:

$$P(5) = 7,795 \cdot (1 + 0,0105)^5 \approx 8,213 \text{ (tỉ người)}.$$

Năm 2030 ứng với $t = 10$ nên có dân số thế giới là:

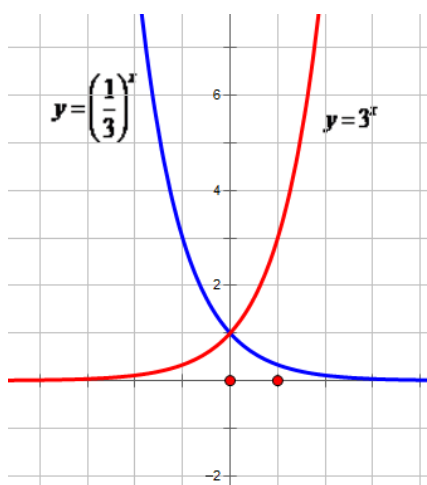
$$P(10) = 7,795 \cdot (1 + 0,0105)^{10} \approx 8,653 \text{ (tỉ người)}.$$

Chú ý: Với giả thiết tăng tốc độ dân số 1,05%/năm không đổi, công thức (*) được áp dụng để tính dân số thế giới tại thời điểm bất kì sau năm 2020. Chẳng hạn, dân số thế giới tại thời điểm ngày 1 tháng 1 năm 2022 (ứng với $t = 1,5$) là

$$P(1,5) = 7,795 \cdot (1 + 0,0105)^{1,5} \approx 7,918 \text{ (tỉ người)}.$$

HĐ 1: Trên cùng hệ trục tọa độ, vẽ đồ thị các hàm số $y = 3^x$ và $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Lời giải



HĐ 2: So sánh các cặp số sau:

a) $0,85^{0,1}$ và $0,85^{-0,1}$

b) $\pi^{-1,4}$ và $\pi^{-0,5}$

c) $\sqrt[4]{3}$ và $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

Lời giải

a) Do $0,85 < 1$ nên hàm số $y = 0,85^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Mà $0,1 > -0,1$

Suy ra $0,85^{0,1} < 0,85^{-0,1}$

Vì $\pi > 1$ nên hàm số $y = \pi^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $-1,4 < -0,5$

Suy ra $\pi^{-1,4} < \pi^{-0,5}$

c) Ta có: $\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} = 3^{-\frac{1}{3}}$

Vì $3 > 1$ nên hàm số $y = 3^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $\frac{1}{4} > \frac{-1}{3}$

Suy ra $3^{\frac{1}{4}} > \pi^{\frac{-1}{3}}$ Hay $\sqrt[4]{3} > \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$

Luyện tập 1. Khối lượng vi khuẩn của một mẻ nuôi cấy sau t giờ kể từ thời điểm ban đầu được cho bởi công

$$\text{thức } M(t) = 50.1,06^t (g)$$

(Nguồn: Sinh học lớp 10, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 101)

- Tìm khối lượng vi khuẩn tại thời điểm bắt đầu nuôi cấy (gọi là *khối lượng ban đầu*).
- Tính khối lượng vi khuẩn sau 2 giờ và sau 10 giờ (làm tròn kết quả đến hàng trăm).
- Khối lượng vi khuẩn tăng dần hay giảm đi theo thời gian? Tại sao?

Lời giải

a) Khối lượng vi khuẩn tại thời điểm bắt đầu nuôi cấy là: $M(0) = 50.1,06^0 = 50$

b) Khối lượng vi khuẩn sau 2 giờ là: $M(2) = 50.1,06^2 = 56,18$

Khối lượng vi khuẩn sau 10 giờ là: $M(10) = 50.1,06^{10} = 89,54$

c) Do $1,06 > 1$ nên hàm số $M(t)$ đồng biến

Do đó, khối lượng vi khuẩn tăng dần theo thời gian

2. Hàm số logarit

Kính lúp 3:

Cho s và t là hai đại lượng liên hệ với nhau theo công thức $s = 2^t$

- Với mỗi giá trị của t nhận trong $\mathbb{R}$, tìm được bao nhiêu giá trị tương ứng của s . Tại sao?
- Với mỗi giá trị của s thuộc $(0; +\infty)$, có bao nhiêu giá trị tương ứng của t ?
- Viết công thức biểu thị t theo s và hoàn thành bảng sau:

s	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
t	?	-2	?	0	?	2	?	?

Trong kính lúp 3, t là một hàm số của s xác định bởi công thức $t = \log_2 s$. Đây là một hàm số logarit.

Lời giải

- Với mỗi giá trị t thuộc $\mathbb{R}$, ta xác định duy nhất 1 giá trị s
- Với mỗi giá trị s thuộc $(0; +\infty)$, ta xác định duy nhất 1 giá trị t
-

s	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
t	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Định nghĩa:

Cho số thực dương a khác 1.

Hàm số cho tương ứng với mỗi số thực dương x với số thực $\log_a x$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số a , kí hiệu là $y = \log_a x$.

Nhận xét: Hàm số $y = \log_a x$ có tập xác định là $(0; +\infty)$.

Ví dụ 4: Trong các hàm số sau, hàm số nào sau đây là hàm số lôgarit? Chỉ ra cơ số của nó.

a) $y = \log_{\sqrt{2}} x$

b) $y = -\log_3 x$

c) $y = x \log_2 3$.

Lời giải

a) $y = \log_{\sqrt{2}} x$ là một hàm số lôgarit với cơ số bằng $\sqrt{2}$.

b) $y = -\log_3 x = \log_{\frac{1}{3}} x$ là hàm số lôgarit với cơ số bằng $\frac{1}{3}$.

c) $y = x \log_2 3$ không phải là hàm số lôgarit (mà là hàm bậc nhất với hệ số góc $\log_2 3$).

Đồ thị hàm số lôgarit

HD 4

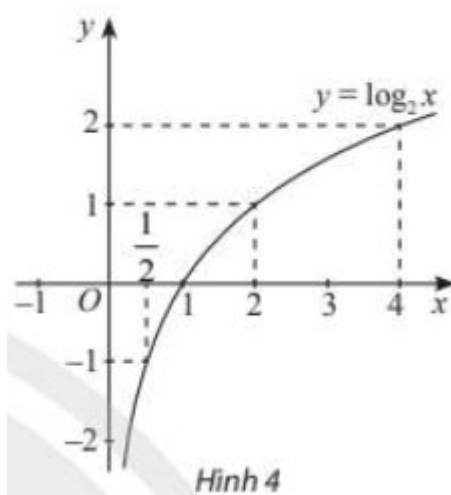
a) Xét hàm số $y = \log_2 x$ với tập xác định $D = (0; +\infty)$

i) Hoàn thành bảng giá trị sau

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	?	0	?	?

ii) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , xác định các điểm có tọa độ như bảng trên. Làm tương tự, lấy nhiều $M(x; \log_2 x)$ với $x > 0$ và nối lại được đồ thị hàm số như Hình 4. Từ đồ thị này, nêu nhận xét về tính liên tục, tính đồng biến, nghịch biến, giới hạn khi $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow 0^+$ và tập giá trị của hàm số đã cho.

b) Lập bảng giá trị và vẽ đồ thị hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Từ đó, nhận xét về tính đồng liên tục, tính đồng biến, nghịch biến, giới hạn khi $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow 0^+$ và tập giá trị của hàm số này.



Lời giải

a)

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
-----	---------------	---	---	---

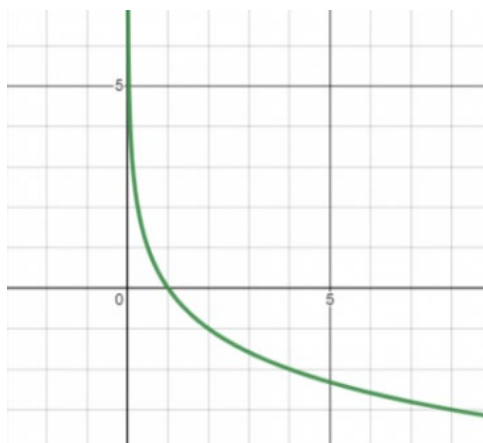
y	-1	0	1	2
---	----	---	---	---

- Hàm số liên tục trên $(0; +\infty)$ Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$
- Khi $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$.
- Khi $x \rightarrow 0^+, y \rightarrow -\infty$

b) Hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

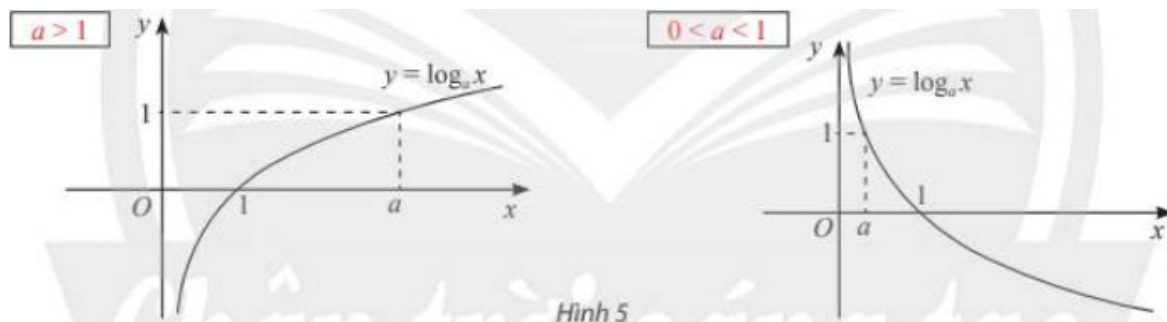
x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	1	0	-1	-2

Đồ thị hàm số:



- Hàm số liên tục trên $(0; +\infty)$
- Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$
- Khi $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow -\infty$
- Khi $x \rightarrow 0^+, y \rightarrow +\infty$

Tổng quát, ta có đồ thị hàm số $y = \log_a x$ với $a > 1$ và $0 < a < 1$ như sau:



Hình 5

(1) Tập xác định: $D = (0; +\infty)$.

Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$.

Hàm số liên tục trên $(0; +\infty)$.

(2) Sự biến thiên:

- Nếu $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ và

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty.$$

- Nếu $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$ và

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty.$$

(3) Đồ thị

- Cắt trục hoành tại điểm $(1; 0)$, đi qua điểm $(a; 1)$.
- Nằm bên phải trục tung.

Ví dụ 5. So sánh các cặp số sau:

a) $\log_3 7$ và $3\log_3 2$

b) $2\log_{0,4} 5$ và $3\log_{0,4} 3$.

Lời giải

a) $3\log_3 2 = \log_3 2^3 = \log_3 8$.

Hàm số $y = \log_3 x$ có cơ số $3 > 1$ nên đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Mà $7 < 8$ nên $\log_3 7 < \log_3 8$. Vậy $\log_3 7 < 3\log_3 2$.

b) $2\log_{0,4} 5 = \log_{0,4} 5^2 = \log_{0,4} 25$; $3\log_{0,4} 3 = \log_{0,4} 3^3 = \log_{0,4} 27$.

Hàm số $y = \log_{0,4} x$ có cơ số $0,4 < 1$ nên nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Mà $25 < 27$ nên $\log_{0,4} 25 > \log_{0,4} 27$. Vậy $2\log_{0,4} 5 > 3\log_{0,4} 3$.

Ví dụ 6. Trong âm học, mức cường độ âm được tính bởi công thức $L = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$ (dB) (dB là đơn vị

mức cường độ âm, đọc là đêxiben), trong đó I là cường độ âm tính theo W/m^2 và $I_0 = 10^{-12} \text{ W}/\text{m}^2$ là cường độ âm thanh chuẩn (cường độ âm thấp nhất mà tai người bình thường nghe được).

(Nguồn: Vật lý lớp 12, NXN Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 52, 53)

a) Mức độ cường độ âm thấp nhất mà tai người nghe được là bao nhiêu?

b) Cuộc trò chuyện có cường độ âm là $10^{-9} \text{ W}/\text{m}^2$ thì có mức cường độ âm bằng bao nhiêu?

c) Cường độ âm tại khu văn phòng nằm trong miền từ 10^{-7} W/m^2 đến $5 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$ (tức là $10^{-7} \leq I \leq 5 \cdot 10^{-6}$). Mức độ cường độ âm tại khu văn phòng này nằm trong khoảng nào? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

a) Khi $I = I_0$ thì $L = 10 \log 1 = 0 \text{ (dB)}$. Vậy mức cường độ âm thấp nhất mà tai người bình thường có thể nghe được là 0 dB.

b) Khi $I = 10^{-9} \text{ W/m}^2$ ta có, $L = 10 \log \frac{10^{-9}}{10^{-12}} = 10 \log 10^3 = 10 \cdot 3 = 30 \text{ (dB)}$.

c) Khi $I = 10^{-7} \text{ W/m}^2$ ta có, $L = 10 \log \frac{10^{-7}}{10^{-12}} = 10 \log 10^5 = 5 \cdot 10 = 50 \text{ (dB)}$.

Với $I = 5 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$ ta có, $L = 10 \log \frac{5 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} = 10 \log 5 \cdot 10^6 = 10 \cdot (6 + \log 5) \approx 67 \text{ (dB)}$.

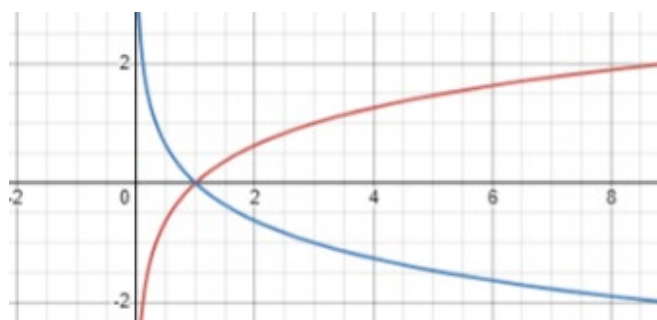
Hàm số $y = \log x$ đồng biến nên suy ra hàm số $y = 10 \log x$ cũng đồng biến.

Do đó, từ $10^{-7} \leq I \leq 5 \cdot 10^{-6}$ suy ra $50 \leq L \leq 67$.

Vậy mức cường độ âm tại khu văn phòng nằm trong khoảng từ 50 dB đến 67 dB.

HD 3: Trên cùng hệ trục tọa độ, vẽ đồ thị các hàm số $y = \log_3 x$ và $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

Lời giải



HD 4: So sánh các cặp số sau:

a) $\log_{\frac{1}{2}} 4,8$ và $\log_{\frac{1}{2}} 5,2$ b) $\log_{\sqrt{5}} 2$ và $\log_5 2\sqrt{2}$ c) $-\log_{\frac{1}{4}} 2$ và $\log_{\frac{1}{2}} 0,4$.

Lời giải

a) Vì $\frac{1}{2} < 0$ nên hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$

Mà $4,8 < 5,2$ nên $\log_{\frac{1}{2}} 4,8 > \log_{\frac{1}{2}} 5,2$

b) Ta có: $\log_{\sqrt{5}} 2 = \frac{\log 2}{\log \sqrt{5}} = \frac{\log 2}{\log 5^{\frac{1}{2}}} = \frac{\log 2}{\frac{1}{2} \cdot \log 5} = 2 \cdot \frac{\log 2}{\log 5}$

$$\log_5 2\sqrt{2} = \frac{\log 2\sqrt{2}}{\log 5} = \frac{\log \left(2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \right)}{\log 5} = \frac{\log 2^{\frac{3}{2}}}{\log 5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\log 2}{\log 5}$$

Suy ra: $\log_{\sqrt{5}} 2 > \log_5 2\sqrt{2}$

$$c) \text{ Ta có: } -\log_{\frac{1}{4}} 2 = -\frac{\log 2}{\log \frac{1}{4}} = -\frac{\log 2}{\log \frac{1}{2^2}} = -\frac{\log 2}{2 \cdot \log \frac{1}{2}} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{\log 2}{\log \frac{1}{2}} = \frac{\log 2 \cdot \frac{-1}{2}}{\log \frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{-1}{2}}$$

Vì $\frac{1}{2} < 0$ nên hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$

Mà $2^{\frac{-1}{2}} > 0,4$ nên $\log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{-1}{2}} < \log_{\frac{1}{2}} 0,4$

Hay $-\log_{\frac{1}{4}} 2 < \log_{\frac{1}{2}} 0,4$

Luyện tập 2 : Mức cường độ âm được tính theo công thức như ở Ví dụ 6.

- a) Tiếng thì thầm có cường độ âm $I = 10^{-10} \text{ W / m}^2$ thì có mức cường độ âm bằng bao nhiêu?
 b) Để nghe trong thời gian dài mà không gây hại cho tai, âm thanh phải có cường độ không vượt quá 100000 lần cường độ của tiếng thì thầm. Âm thanh không gây hại cho tai khi nghe trong thời gian dài phải ở mức cường độ âm như thế nào?

Lời giải

a) Mức cường độ âm của tiếng thì thầm là $L = 10 \log \frac{10^{-10}}{10^{-12}} = 20 \text{ (dB)}$

b) Để âm thanh không gây hại cho tai khi nghe thời gian dài thì cường độ âm là:

$$I = 100000 \cdot 10^{-10} = 10^{-5} \text{ (W / m}^2 \text{)}$$

Mức cường độ âm giới hạn đó là: $L = 10 \log \frac{10^{-5}}{10^{-12}} = 70 \text{ (dB)}$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm tập xác định, tập giá trị của hàm số

1. Phương pháp: $0 < a \neq 1$

Hàm số $y = \log_a f(x)$ xác định khi $f(x) > 0$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \log_3 (x^2 + 2x)$;

b) $y = \log_{0,2} (4 - x^2)$

Lời giải

a) Hàm số $y = \log_3 (x^2 + 2x)$ xác định khi $x^2 + 2x > 0$ hay $x < -2$ hoặc $x > 0$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$:

b) Hàm số $y = \log_{0,2} (4 - x^2)$ xác định khi $4 - x^2 > 0$ hay $-2 < x < 2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-2; 2)$.

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{3-x}$

b) $y = \frac{2}{\log_4 x - 3}$.

Lời giải

a) Hàm số $y = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{3-x}$ xác định khi $\frac{1}{3-x} > 0$ hay $x < 3$. Vậy tập xác định của hàm số là $(-\infty; 3)$.

b) Hàm số $y = \frac{2}{\log_4 x - 3}$ xác định khi $\begin{cases} x > 0 \\ \log_4 x \neq 3 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 64 \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (0; 64) \cup (64; +\infty)$.

Dạng 2. So sánh

1. Phương pháp

$\oplus a > 1: a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$

$\oplus 0 < a < 1: a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$

$\oplus a > 1: \log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y$

$\oplus 0 < a < 1: \log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Hãy so sánh mỗi số sau với 1:

a) $(0,1)^{\sqrt{2}}$;

b) $(3,5)^{0,1}$;

c) $\pi^{-2,7}$;

d) $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^{-1,2}$.

Lời giải

a) $(0,1)^{\sqrt{2}} < 1$;

b) $(3,5)^{0,1} > 1$;

c) $\pi^{-2,7} < 1$;

d) $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^{-1,2} > 1$.

Ví dụ 2: Sử dụng tính chất đồng biến, nghịch biến của hàm số mũ, hãy so sánh mỗi cặp số sau:

a) $(1,7)^3$ và 1 ;

b) $(0,3)^2$ và 1 ;

c) $(3,2)^{1,5}$ và $(3,2)^{1,6}$;

d) $(0,2)^{-3}$ và $(0,2)^{-2}$;

e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ và $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,4}$

g) 6^π và $6^{3,14}$.

Lời giải

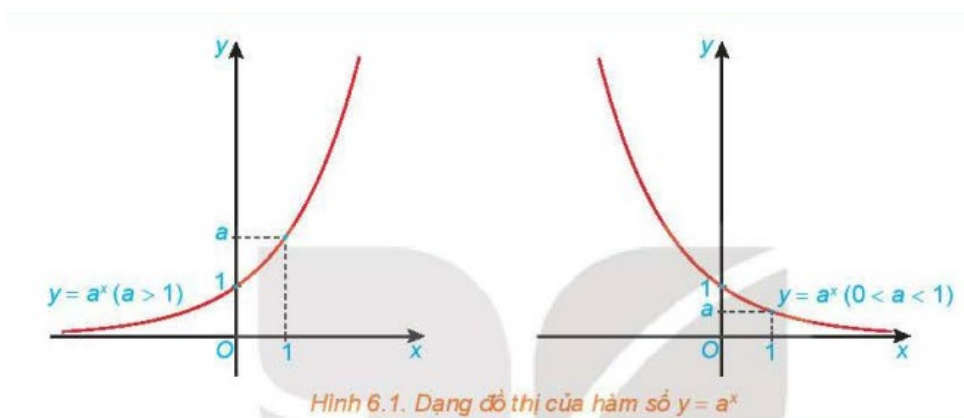
- a) $(1,7)^8 > 1$
 b) $(0,8)^2 < 1$;
 c) $(3,2)^{1,5} < (3,2)^{1,6}$;
 d) $(0,2)^{-3} > (0,2)^{-2}$;
 c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{1,4}$
 g) $6^\pi > 6^{8,14}$.

Dạng 3. Đồ thị hàm số

1. Phương pháp:

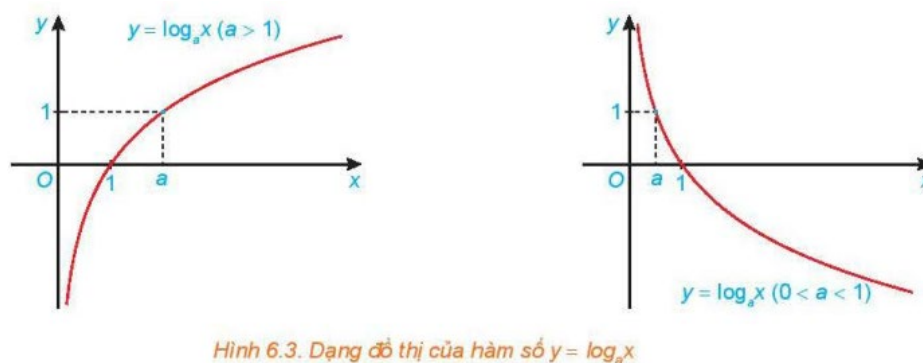
Hàm số mũ $y = a^x$.

- Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $(0; +\infty)$;
- Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 1$ và nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0 < a < 1$;
- Liên tục trên $\mathbb{R}$;
- Có đồ thị đi qua các điểm $(0;1), (1;a)$ và luôn nằm phía trên trục hoành.



Hàm số lôgarit $y = \log_a x$:

- Có tập xác định là $(0; +\infty)$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$;
- Đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi $a > 1$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$ khi $0 < a < 1$;
- Liên tục trên $(0; +\infty)$;
- Có đồ thị đi qua các điểm $(1;0), (a;1)$ và luôn nằm bên phải trục tung.

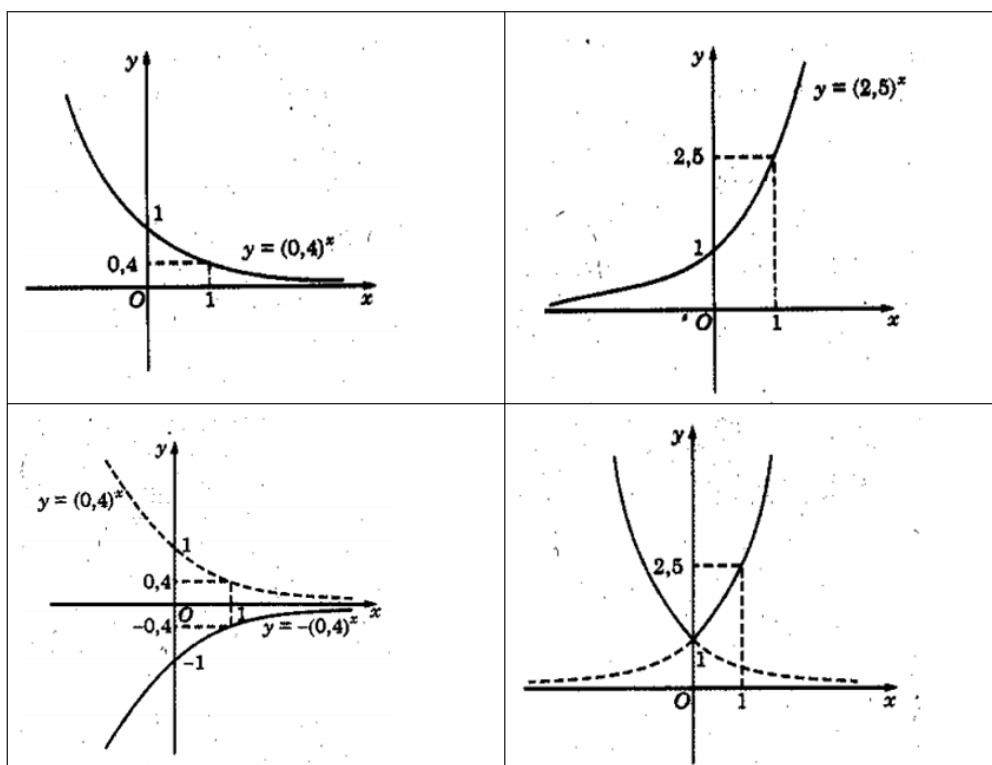


2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Vẽ đồ thị các hàm số

- a) $y = (0,4)^x$;
 b) $y = (2,5)^x$;
 c) $y = -(0,4)^x$;
 d) $y = (2,5)^{|x|}$.

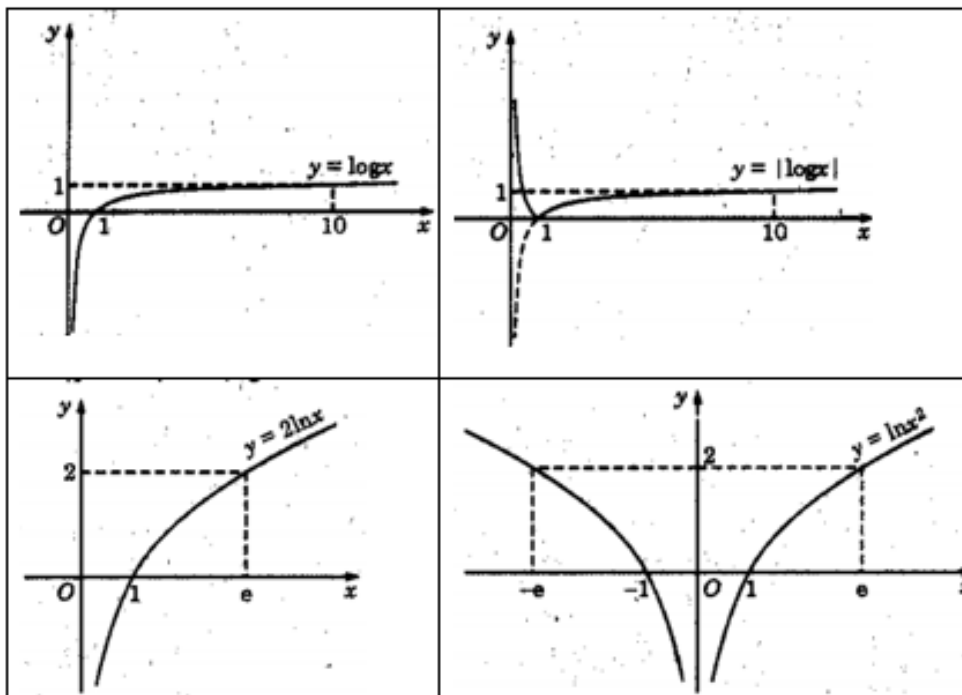
Lời giải

**Ví dụ 2:** Vẽ đồ
các
số

- a) $y = \log x$;
 b) $y = |\log x|$;
 c) $y = 2 \ln x$;
 d) $y = \ln x^2$.

Lời giải

thị
hàm



C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = 4^x$

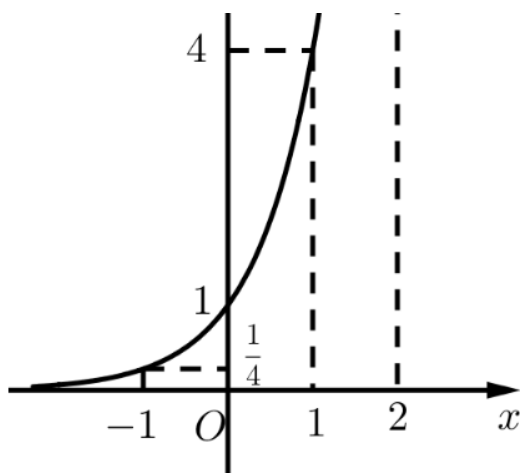
b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

Lời giải

a) Bảng giá trị:

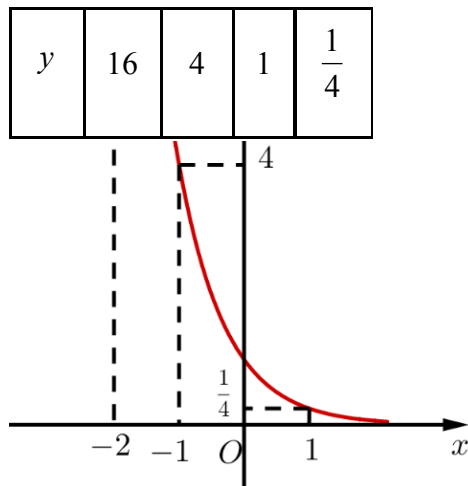
x	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	1	4	16

Đồ thị:



b) Bảng giá trị:

x	-2	-1	0	1
y	16	4	1	1/4



Bài 2. So sánh các cặp số sau:

a) $1,3^{0,7}$ và $1,3^{0,6}$

b) $0,75^{-2,3}$ và $0,75^{-2,4}$.

Lời giải

a) Do $1,3 > 1$ nên hàm số $y = 1,3^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $0,7 > 0,6$ nên $1,3^{0,7} > 1,3^{0,6}$.

b) Do $0,75 < 1$ nên hàm số $y = 0,75^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $-2,3 > -2,4$ nên $0,75^{-2,3} < 0,75^{-2,4}$.

Bài 3. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $\log_2(3-2x)$

b) $\log_3(x^2+4x)$.

Lời giải

a) $\log_2(3-2x)$ xác định khi $3-2x > 0 \Leftrightarrow 2x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$

Vậy hàm số có tập xác định $D = \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

b) $\log_3(x^2+4x)$ xác định khi $x^2+4x > 0 \Leftrightarrow x(x+4) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -4 \end{cases}$

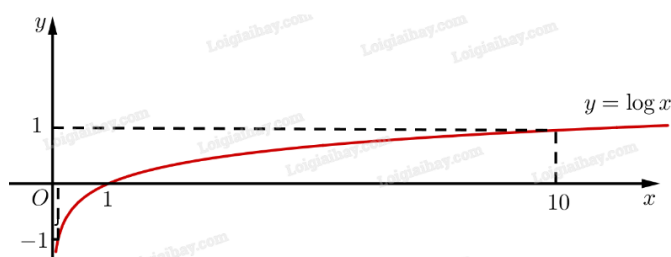
Vậy hàm số có tập xác định $D = (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

Bài 4. Vẽ đồ thị các hàm số:

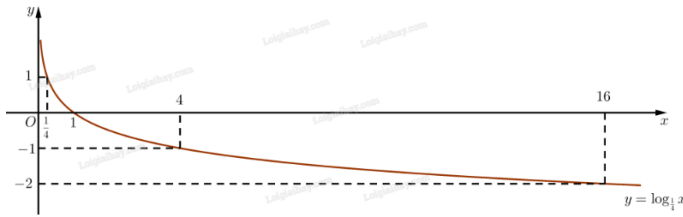
a) $y = \log x$

b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

Lời giải



b)



Bài 5. So sánh các cặp số sau:

a) $\log_{\pi} 0,8$ và $\log_{\pi} 1,2$;

b) $\log_{0,3} 2$ và $\log_{0,3} 2,1$.

Lời giải

a) Vì $\pi > 1$ nên hàm số $\log_{\pi} x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Mà $0,8 < 1,2$ nên $\log_{\pi} 0,8 < \log_{\pi} 1,2$

b) Vì $0,3 > 1$ nên hàm số $\log_{0,3} x$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$

Mà $2 < 2,1$ nên $\log_{0,3} 2 > \log_{0,3} 2,1$

Bài 6. Cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, a là hằng số ($a > 0$) và d là độ sâu tính bằng mét tính từ mặt nước biển.

(Nguồn: <https://www.britannica.com/science/seawater/Optical-properties>)

a) Có thể khẳng định rằng $0 < a < 1$ không? Giải thích.

b) Biết rằng cường độ ánh sáng tại độ sâu 1 m bằng $0,95I_0$. Tìm giá trị của a .

c) Tại độ sâu 20 m, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với I_0 ? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)

Lời giải

a) Vì cường độ ánh sáng giảm dần theo độ sâu nên hàm số $I = I_0 \cdot a^d$ nghịch biến.

Vậy $0 < a < 1$.

b) Ta có: $I = I_0 \cdot a^d \Leftrightarrow 0,95I_0 = I_0 \cdot a^1 \Leftrightarrow a = 0,95$.

c) Ta có: $I = I_0 \cdot a^d = I_0 \cdot 0,95^{20} \approx 0,36I_0$.

Vậy tại độ sâu 20 m, cường độ ánh sáng bằng 36% phần trăm so với I_0

Bài 7. Công thức $h = -19,4 \cdot \log \frac{P}{P_0}$ là mô hình đơn giản cho phép tính độ cao h so với mặt nước biển của một vị trí trong không trung (tính bằng kilômét) theo áp suất không khí P tại điểm đó và áp suất P_0 của không khí tại mặt nước biển (cùng tính bằng Pa – đơn vị áp suất, đọc là Pascal).

(Nguồn: <https://doi.org/10.1007/s40828-020-0111-6>)

a) Nếu áp suất không khí ngoài máy bay bằng $\frac{1}{2}P_0$ thì máy bay đang ở độ cao nào?

b) Áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi A bằng $\frac{4}{5}$ lần áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi B. Ngọn núi nào cao hơn và cao hơn bao nhiêu kilômét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

Lời giải

a) Độ cao của máy bay khi áp suất không khí ngoài máy bay bằng $\frac{1}{2}P_0$ là:

$$h = -19,4 \cdot \log \frac{\frac{1}{2}P_0}{P_0} = -19,4 \cdot \log \frac{1}{2} \approx 5,84 \text{ (km)}$$

b) Độ cao của ngọn núi A là: $h_A = -19,4 \cdot \log \frac{P_A}{P_0}$

Độ cao của ngọn núi B là: $h_B = -19,4 \cdot \log \frac{P_B}{P_0}$

Áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi A bằng $\frac{4}{5}$ lần áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi B nên ta có:

$$P_A = \frac{4}{5}P_B \Leftrightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{4}{5}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} h_A - h_B &= \left(-19,4 \cdot \log \frac{P_A}{P_0} \right) - \left(-19,4 \cdot \log \frac{P_B}{P_0} \right) = -19,4 \cdot \log \frac{P_A}{P_0} + 19,4 \cdot \log \frac{P_B}{P_0} \\ &= -19,4 \log \left(\frac{P_A}{P_0} : \frac{P_B}{P_0} \right) = -19,4 \log \frac{P_A}{P_B} = -19,4 \log \frac{4}{5} \approx 1,88 \text{ (km)} \end{aligned}$$

Vậy ngọn núi A cao hơn ngọn núi B 1,88km.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y = \log_2(10 - 2x)$ là

- A.** $(-\infty; 2)$ **B.** $(5; +\infty)$ **C.** $(-\infty; 10)$ **D.** $(-\infty; 5)$

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 10 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 5 \Rightarrow D = (-\infty; 5)$

Câu 2: Tập xác định của hàm số $y = \log(x^2 + 2x)$ là

- A.** $D = (-2; 0)$ **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ **C.** $D = (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ **D.** $D = \mathbb{R}$

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow x^2 + 2x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -2 \end{cases}$. Vậy $D = (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$

Câu 3: Cho $0 < a < 1$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

- A.** Tập giá trị của hàm số $y = a^x$ là $\mathbb{R}$
B. Tập xác định của hàm số $y = \log_a x$ là $\mathbb{R}$
C. Tập xác định của hàm số $y = a^x$ là $\mathbb{R}$

D. Tập giá trị của hàm số $y = \log_a x$ là $\mathbb{R}$

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = \log_a x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$

Câu 4: Tập xác định của hàm số $y = \log_2(3 - 2x - x^2)$ là

A. $D = (-1; 3)$

B. $D = (0; 1)$

C. $D = (-1; 1)$

D. $D = (-3; 1)$

Lời giải

Chọn D

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow 3 - 2x - x^2 > 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$.

Vậy $D = (-3; 1)$.

Câu 5: Hàm số $y = \log_2(4^x - 2^x + m)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì

A. $m < \frac{1}{4}$

B. $m > 0$

C. $m \geq \frac{1}{4}$

D. $m > \frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn D

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow 4^x - 2^x + m > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m > 2^x - 4^x (\forall x \in \mathbb{R})$

Đặt $t = 2^x > 0 \Rightarrow m > t - t^2 (\forall t > 0) \Leftrightarrow m > \max_{t>0} f(t) \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in [-\infty; -2] \cup [2; +\infty]$

B. $m \in [-2; 2]$

C. $m \in (-2; 2) \cup (2; +\infty)$

D. $m \in (-2; 2)$

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định với mọi

$x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta' = m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$

Câu 7: Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\left(\frac{10}{11}\right)^{2,3} > \left(\frac{12}{11}\right)^{2,3}$

B. $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2} > \left(\frac{8}{9}\right)^{-2}$

C. $(2, 5)^{-3,1} > (2, 6)^{-3,1}$

D. $(3, 1)^{7,3} < (4, 3)^{7,3}$

Lời giải

Chọn A

Dùng tính chất: $\begin{cases} a, b > 1 \\ a^x > b^x \Rightarrow a > b \\ x > 0 \end{cases}$

- Câu 8:** Nếu $(7+4\sqrt{3})^{a-1} < 7-4\sqrt{3}$ thì
- A. $a < 1$ B. $a > 1$ C. $a > 0$ D. $a < 0$

Lời giải

Chọn D

$$\text{BPT} \Leftrightarrow (7+4\sqrt{3})^{a-1} < (7+4\sqrt{3})^{-1} \Rightarrow a-1 < -1 \Leftrightarrow a < 0$$

- Câu 9:** Cho $\pi^\alpha > \pi^\beta$ với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?
- A. $\alpha > \beta$ B. $\alpha < \beta$ C. $\alpha = \beta$ D. $\alpha \leq \beta$

Lời giải

Chọn A

- Câu 10:** Cho $M = \log_{0,3} 0,07$; $N = \log_3 0,2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
- A. $0 > N > M$. B. $M > 0 > N$. C. $N > 0 > M$. D. $M > N > 0$.

Lời giải

Chọn B

$$+ \text{Ta có: } \begin{cases} 0 < 0,3 < 1 \\ 0 < 0,07 < 1 \end{cases} \Rightarrow M = \log_{0,3} 0,07 > 0$$

$$\begin{cases} 3 > 1 \\ 0 < 0,2 < 1 \end{cases} \Rightarrow N = \log_3 0,2 < 0$$

$$+ \text{Suy ra: } M > 0 > N$$

- Câu 11:** Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

- A. $(\sqrt{2}-1)^{2017} > (\sqrt{2}-1)^{2018}$. B. $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.
- C. $(\sqrt{3}-1)^{2018} > (\sqrt{3}-1)^{2017}$. D. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Do } \begin{cases} 2018 > 2017 \\ \sqrt{3}-1 > 1 \end{cases} \text{ nên } (\sqrt{3}-1)^{2018} < (\sqrt{3}-1)^{2017}.$$

- Câu 12:** Cho $0 < a \neq 1$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\frac{\alpha}{\beta}}$ B. $a^{\sqrt{a}} = (\sqrt{a})^\alpha (a > 0)$ C. $a^{\alpha^\beta} = (a^\alpha)^\beta$ D. $\sqrt{a^\alpha} = (\sqrt{a})^\alpha$

Lời giải

Chọn D

$$\sqrt{a^\alpha} = (\sqrt{a})^\alpha$$

- Câu 13:** Có kết luận gì về a nếu $(2a+1)^{-3} > (2a+1)^{-1}$ (1)

A. $a \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

B. $a \in (-\infty; -1) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right)$

C. $a \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{6}; 0\right)$

D. $a \in (-\infty; -2) \cup (-1; 0)$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $2a+1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -\frac{1}{2}$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{(2a+1)^3} > \frac{1}{2a+1} \Leftrightarrow \frac{1-(2a+1)^2}{(2a+1)^3} > 0 \Leftrightarrow \frac{a(a+1)}{(2a+1)^3} < 0$

Lập bảng xét dấu ta được: $\begin{cases} -\frac{1}{2} < a < 0 \\ a < -1 \end{cases}$.

Câu 14: Trong các bất đẳng thức sau, bất đẳng thức nào sai?

A. $\log_2 5 > \log_2 \pi$ **B.** $\log_{\sqrt{2}-1} \pi < \log_{\sqrt{2}-1} e$ **C.** $\log_{\sqrt{3}+1} \pi > \log_{\sqrt{3}+1} 7$ **D.** $\log_7 5 < 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\sqrt{3}+1 > 1$ do đó $\pi < 7 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}+1} \pi < \log_{\sqrt{3}+1} 7$.

Câu 15: Cho $0 < a < 1$, $b > 1$ và $M = \log_a 2$, $N = \log_2 b$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

A. $M > 0$ và $N > 0$. **B.** $M > 0$ và $N < 0$.
C. $M < 0$ và $N < 0$. **D.** $M < 0$ và $N > 0$.

Lời giải

Chọn D

Câu 16: Với những giá trị nào của a thì $(a-1)^{-\frac{2}{3}} > (a-1)^{-\frac{1}{3}}$?

A. $1 < a < 2$. **B.** $a > 2$. **C.** $a > 1$. **D.** $0 < a < 1$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\begin{cases} \frac{-2}{3} < \frac{-1}{3} \\ (a-1)^{-\frac{2}{3}} > (a-1)^{-\frac{1}{3}} \end{cases} \Rightarrow 0 < a-1 < 1 \Leftrightarrow 1 < a < 2$.

Câu 17: Nếu $a^{\frac{19}{5}} < a^{\frac{15}{7}}$ và $\log_b(\sqrt{2} + \sqrt{7}) > \log_b(\sqrt{2} + \sqrt{5})$ thì:

A. $a > 1, 0 < b < 1$ **B.** $0 < a < 1, b > 1$ **C.** $0 < a < 1, 0 < b < 1$ **D.** $a > 1, b > 1$

Lời giải

Chọn B

$a^{\frac{19}{5}} < a^{\frac{15}{7}}$ vì mũ không là số nguyên nên $a > 0$. Mặt khác $\frac{19}{5} > \frac{15}{7}$ nên $a < 1 \Rightarrow 0 < a < 1$

$\log_b(\sqrt{2} + \sqrt{7}) > \log_b(\sqrt{2} + \sqrt{5})$ để có nghĩa thì $1 \neq b > 0$ và $\sqrt{2} + \sqrt{7} > \sqrt{2} + \sqrt{5}$ nên $b > 1$

Câu 18: Cho các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

- A.** $\log_a b > \log_b a$ **B.** $\log_a b < \log_b a$ **C.** $\ln a > \ln b$ **D.** $\log_{\frac{1}{2}}(ab) < 0$

Lời giải

Chọn A

Cho $a = 4; b = 2$ ta có: $\log_a b = \frac{1}{2}; \log_b a = 2$ nên A sai.

Câu 19: Cho a, b là các số thực dương, thỏa mãn $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{4}{3}}$ và $\log_b \frac{1}{2} < \log_b \frac{2}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $a > 1, 0 < b < 1$ **B.** $0 < a < 1, b > 1$ **C.** $0 < a < 1, 0 < b < 1$ **D.** $a > 1, b > 1$

Lời giải

Chọn B

Ta có $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{4}{3}} \Rightarrow 0 < a < 1 \left(\text{do } \frac{3}{4} < \frac{4}{3} \right)$

Mặt khác $\log_b \frac{1}{2} < \log_b \frac{2}{3} \Rightarrow b > 1 \left(\text{do } \frac{2}{3} > \frac{1}{2} \right)$

Câu 20: Cho hai số thực a và b sao cho với $a^{-5} > a^{-4}$ và $\log_b \left(\frac{3}{4} \right) < \log_b \left(\frac{4}{5} \right)$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào là đúng?

- A.** $a > 1; b > 1$. **B.** $a > 1; 0 < b < 1$.
C. $0 < a < 1; b > 1$. **D.** $0 < a < 1; 0 < b < 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} -5 < -4 \\ a^{-5} > a^{-4} \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 1$ và $\begin{cases} \frac{3}{4} < \frac{4}{5} \\ \log_b \left(\frac{3}{4} \right) < \log_b \left(\frac{4}{5} \right) \end{cases} \Rightarrow b > 1$.

Vậy $0 < a < 1; b > 1$.

Câu 21: Cho $(\sqrt{2} - 1)^a > (\sqrt{2} - 1)^b$. Kết luận nào sau đây đúng?

- A.** $a > b$. **B.** $a < b$. **C.** $a = b$. **D.** $a \geq b$.

Lời giải

Chọn B

Do $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ nên hàm số mũ $y = (\sqrt{2} - 1)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và ta có:

$$(\sqrt{2} - 1)^a > (\sqrt{2} - 1)^b \Leftrightarrow a < b$$

Câu 22: Tìm tập tất cả các giá trị của a để $\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2}$

- A.** $0 < a < 1$ **B.** $\frac{5}{21} < a < \frac{2}{7}$ **C.** $a > 1$ **D.** $a > 0$

Lời giải

Chọn A

$$\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2} \Leftrightarrow a^{\frac{5}{21}} > a^{\frac{2}{7}} \Leftrightarrow 0 < a < 1$$

Câu 23: Cho p, q là các số thực thỏa mãn $m = \left(\frac{1}{e}\right)^{2p-q}$, $n = e^{p-2q}$, biết $m > n$. So sánh p và q

- A.** $p \geq q$ **B.** $p > q$ **C.** $p \leq q$ **D.** $p < q$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } m = \left(\frac{1}{e}\right)^{2p-q} = e^{q-2p}, n = e^{p-2q}. \text{ Vì } m > n \text{ nên } q - 2p > p - 2q \Leftrightarrow q > p.$$

Câu 24: Cho $a > 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} > 1$ **B.** $a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$ **C.** $a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$ **D.** $\frac{1}{a^{2016}} < \frac{1}{a^{2017}}$

Lời giải

Chọn B

Do $a > 1 \Rightarrow$ với $m > n$ thì $a^m > a^n$

$$\text{Do } -\sqrt{3} > -\sqrt{5} \Rightarrow a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}} = \frac{1}{a^5}$$

Câu 25: Cho $0 < a < 1$. Khẳng định nào đúng?

- A.** $a^{-\sqrt{2}} < \frac{1}{a^{\sqrt{3}}}$ **B.** $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}} > 1$ **C.** $a^{\frac{1}{3}} < \sqrt{a}$ **D.** $\frac{1}{a^{2017}} > \frac{1}{a^{2018}}$

Lời giải

Chọn A

Phương pháp: Xét hàm số có dạng $y = a^x, a > 0, a \neq 1$:

+ Nếu $0 < a < 1$ hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$

+ Nếu $a > 1$: hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$

Cách giải: Với $0 < a < 1$:

$$a^{-\sqrt{2}} < \frac{1}{a^{\sqrt{3}}} \Leftrightarrow \frac{1}{a^{\sqrt{2}}} < \frac{1}{a^{\sqrt{3}}} \Leftrightarrow a^{\sqrt{2}} > a^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 0 < a < 1 \text{ (luôn đúng). Vậy phương án A đúng.}$$

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}} > 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} > 1 \Leftrightarrow a > 1 \text{ (Loại). Vậy phương án B sai.}$$

$$a^{\frac{1}{3}} < \sqrt{a} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{3}} < a^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a > 1 \text{ (Loại)}. \text{ Vậy phương án C sai.}$$

$$\frac{1}{a^{2017}} > \frac{1}{a^{2018}} \Leftrightarrow a^{2017} < a^{2018} \Leftrightarrow a > 1 \text{ (Loại)}. \text{ Vậy phương án D sai.}$$

Câu 26: Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Khi $x > 0$ thì $\log_2 x^2 = 2 \log_2 x$.

B. Khi $0 < a < 1$ và $b < c$ thì $a^b > a^c$.

C. Với $a < b$ thì $\log_a b < \log_b a < 1$.

D. Điều kiện để $x^{\sqrt{2}}$ có nghĩa là $x > 0$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đáp án C sai vì với } a < b \Rightarrow \begin{cases} 1 < \log_a b \\ \log_b a < 1 \end{cases} \Rightarrow \log_b a < 1 < \log_a b$$

Câu 27: Cho a là số thực dương khác 1. Xét hai số thực x_1, x_2 . Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Nếu $a^{x_1} > a^{x_2}$ thì $x_1 > x_2$.

B. Nếu $a^{x_1} > a^{x_2}$ thì $x_1 < x_2$.

C. Nếu $a^{x_1} > a^{x_2}$ thì $(a-1)(x_1 - x_2) > 0$.

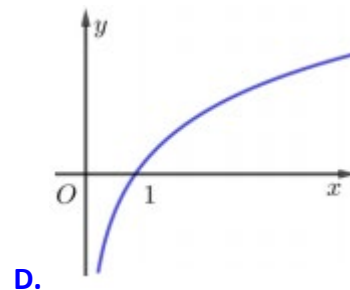
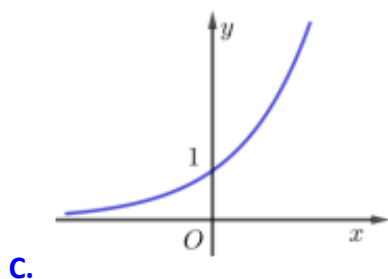
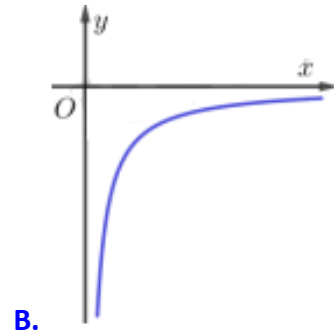
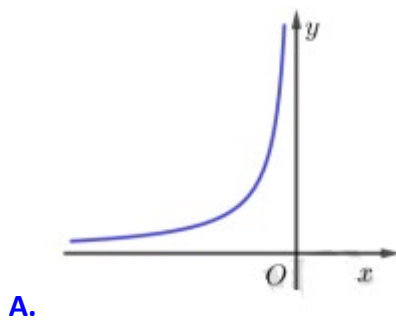
D. Nếu $a^{x_1} > a^{x_2}$ thì $(a-1)(x_1 - x_2) < 0$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{cases} a > 1: a^{x_1} > a^{x_2} \rightarrow x_1 > x_2 \\ a < 1: a^{x_1} < a^{x_2} \rightarrow x_1 < x_2 \end{cases} \rightarrow (a-1)(x_1 - x_2) > 0.$$

Câu 28: Cho a là số thực dương khác 1. Hình nào sau đây là đồ thị của hàm số mũ $y = a^x$?

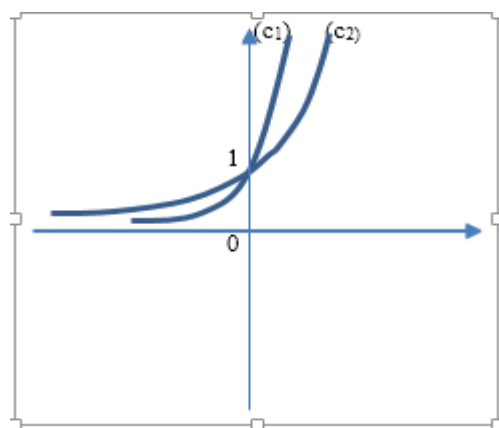


Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = a^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $(0; +\infty)$

Câu 29: Biết $(C_1), (C_2)$ ở hình bên là hai trong bốn đồ thị của các hàm số $y = (\sqrt{3})^x, y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x, y = 5^x, y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Hỏi (C_2) là đồ thị của hàm số nào sau đây?



A. $y = (\sqrt{3})^x$

B. $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$

C. $y = 5^x$

D. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Lời giải

Chọn A

- Ta thấy $(C_1), (C_2)$ đều có hướng đi lên khi x tăng $\Rightarrow (C_1), (C_2)$ đồng biến $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Mà hàm $y = a^x$ đồng biến khi $a > 1$, nghịch biến khi $0 < a < 1$. Do đó ta loại hàm $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$

và $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

- Xét khi $x > 0$ thì (C_1) ở trên $(C_2) \Rightarrow y(C_1) > y(C_2)$. Mà $5^x > (\sqrt{3})^x \Rightarrow (C_2): y = (\sqrt{3})^x$.

Câu 30: Đối xứng qua đường thẳng $y = x$ của đồ thị hàm số $y = 5^{\frac{x}{2}}$ là đồ thị nào trong các đồ thị có phương trình sau đây?

A. $y = \log_{\sqrt{5}} x$

B. $y = \log_5 x^2$

C. $y = \log_5 x$

D. $y = \frac{1}{2} \log_5 x$

Lời giải

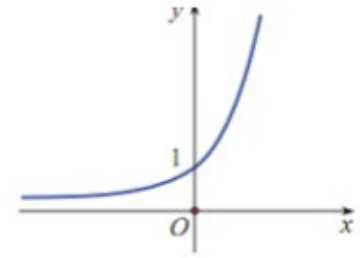
Chọn A

Ta đưa hàm số về dạng: $y = 5^{\frac{x}{2}} = (\sqrt{5})^x$.

Dựa vào lý thuyết “Hai hàm số $y = a^x, y = \log_a x$ có đồ thị đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất $y = x$ ”

Hoặc thay $x = y$ và $y = x$ ta có $x = (\sqrt{5})^y \Leftrightarrow y = \log_{\sqrt{5}} x$

Câu 31: Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



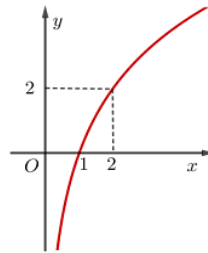
- A. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ B. $y = x^2$
C. $y = \log_2 x$ D. $y = 2^x$

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ và đồng biến trên $\mathbb{R}$
Do đó chỉ có đáp án D thỏa mãn

Câu 32: Tìm a để hàm số $\log_a x$ ($0 < a \neq 1$) có đồ thị là hình bên



- A. $a = \sqrt{2}$ B. $a = 2$ C. $a = \frac{1}{2}$ D. $a = -\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2; 2) \Rightarrow \log_a 2 = 2 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$

Câu 33: Nếu gọi (G_1) là đồ thị hàm số $y = a^x$ và (G_2) là đồ thị hàm số $y = \log_a x$ với $0 < a \neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua trục hoành.
B. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua trục tung.
C. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$
D. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = -x$

Lời giải

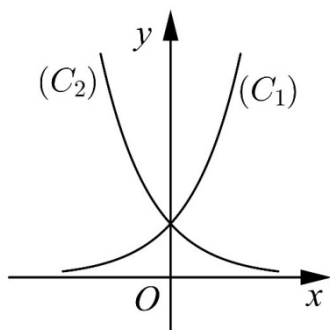
Chọn C

Mọi điểm $A(m; n) \in (G_1) \Rightarrow a^m = n \Rightarrow m = \log_a n \Rightarrow B(n; m) \in (G_2)$

Hai điểm A và B đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$

Do đó (G_1) và (G_2) đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$

Câu 34: Cho hai hàm số $y = a^x, y = b^x$ với a, b là hai số thực dương khác 1, lần lượt có đồ thị là (C_1) và (C_2) như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $0 < a < b < 1$

B. $0 < b < 1 < a$

C. $0 < a < 1 < b$

D. $0 < b < a < 1$

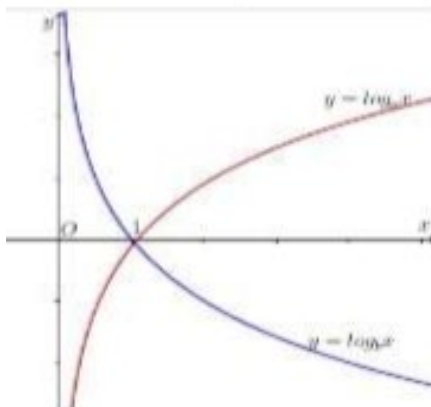
Lời giải

Chọn B

- Đồ thị hàm số (C_1) đồng biến nên $y' = a^x \ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$

- Đồ thị hàm số (C_2) nghịch biến nên $y' = b^x \ln b < 0 \Leftrightarrow 0 < b < 1$. Do đó $0 < b < 1 < a$

Câu 35: Cho hai hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ có đồ thị $(C_1), (C_2)$, được vẽ trên cùng mặt phẳng tọa độ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $0 < b < a < 1$.

B. $0 < b < 1 < a$.

C. $0 < a < b < 1$.

D. $0 < a < 1 < b$.

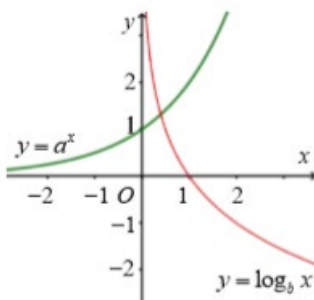
Lời giải

Chọn B

Ta thấy đồ thị hàm số $\log_b x$ nghịch biến nên $0 < b < 1$

Ta thấy đồ thị hàm số $\log_a x$ đồng biến nên $a > 1$

Câu 36: Cho $a > 0, b > 0, b \neq 1$. Đồ thị các hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ cho như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a > 1; 0 < b < 1$.

B. $1 > a > 0; b > 1$.

C. $0 < a < 1; 0 < b < 1$.

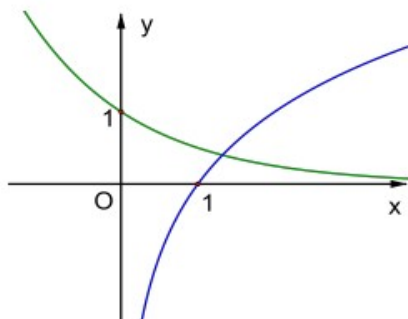
D. $a > 1; b > 1$.

Lời giải

Chọn A

Quan sát đồ thị ta thấy. Hàm số $y = a^x$ đồng biến $\Rightarrow a > 0$. Hàm số $y = \log_b x$ nghịch biến $\Rightarrow 0 < b < 1$

Câu 37: Cho đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ như hình vẽ:



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $0 < a < \frac{1}{2} < b$

B. $0 < a < 1 < b$

C. $0 < b < 1 < a$

D. $0 < a < 1, 0 < b < \frac{1}{2}$

Lời giải

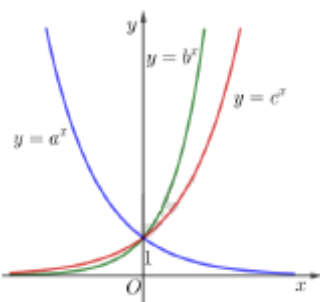
Chọn B

+ Xét hàm số $y = a^x$ đi qua $(0; 1)$ suy ra đồ thị hàm số (1) là đường nghịch biến, suy ra $0 < a < 1$.

+ Xét hàm số $y = \log_b x$ đi qua $(1; 0)$ suy ra đồ thị hàm số (2) là đường đồng biến suy ra $b > 1$.

Suy ra $0 < a < 1 < b$.

Câu 38: Cho 3 số $a, b, c > 0, a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1$. Đồ thị các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ được cho trong hình vẽ dưới.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $b < c < a$

B. $a < c < b$

C. $a < b < c$

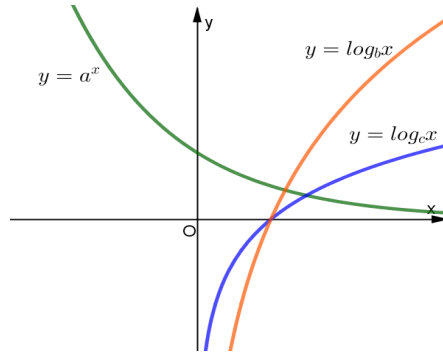
D. $c < a < b$

Lời giải

Chọn B

Ta có hàm số $y = b^x, y = c^x$ đồng biến, hàm số $y = a^x$ nghịch biến nên $a < 1, b, c > 1$. Thay $x = 10$, ta có $b^{10} > c^{10} \Rightarrow b > c$

Câu 39: Cho các hàm số $y = a^x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ có đồ thị như hình vẽ.



Chọn khẳng định đúng.

A. $c > b > a$.

B. $b > a > c$.

C. $a > b > c$.

D. $b > c > a$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = a^x$ đồ thị có dáng đi xuống từ trái sang phải nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$ do đó $0 < a < 1$ (1).

Hai hàm số $y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ đồ thị có dáng đi lên từ trái sang phải nên đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ do đó $b > 1 > a$, $c > 1 > a$ (2).

Quan sát đồ thị ta thấy với $0 < x < 1$ thì $\log_b x < \log_c x$, suy ra $c > b$.

Quan sát đồ thị ta thấy với $x > 1$ thì $\log_b x > \log_c x$, suy ra $c > b$.

Suy ra $1 < b < c$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $c > b > a$.

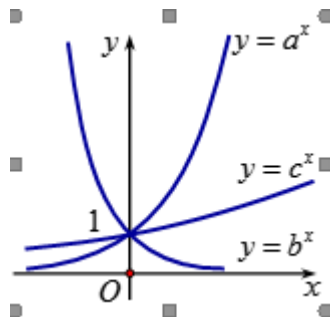
Cách khác:

Để thấy $a < 1$, $b > 1$, $c > 1$. Nên a là số nhỏ nhất.

Xét đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hai hàm số $y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ lần lượt tại các điểm $B(b; 1)$ và $C(c; 1)$

(hình vẽ). Để thấy $c > b$ vậy $c > b > a$.

Câu 40: Hình vẽ dưới đây vẽ đồ thị của 3 hàm số mũ.



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a > b > c$.

B. $a > c > 1 > b$.

C. $b > c > 1 > a$.

D. $b > a > c$.

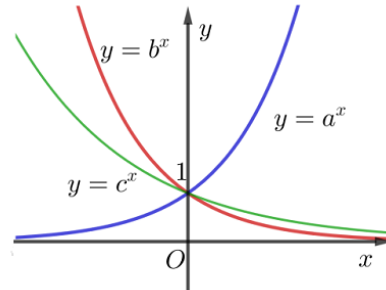
Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ở hình 5 ta thấy đồ thị của hàm số $y = b^x$ là nghịch biến nên $0 < b < 1$.

Vẽ đường thẳng $x=1$ ta có đường thẳng $x=1$ cắt đồ thị hàm số $y=a^x$ tại điểm có tung độ $y=a$ và cắt đồ thị hàm số $y=c^x$ tại điểm có tung độ là $y=c$. Khi đó điểm giao với $y=a^x$ nằm trên điểm giao với $y=c^x$ nên $a > c > 1$. Vậy $a > c > 1 > b$.

Câu 41: Trên hình 2.13, đồ thị của ba hàm số $y=a^x, y=b^x, y=c^x$ (a, b, c là ba số dương khác 1 cho trước) được vẽ trong cùng một mặt phẳng tọa độ. Dựa vào đồ thị và các tính chất của lũy thừa, hãy so sánh ba số a, b và c



A. $c > b > a$

B. $b > c > a$

C. $a > c > b$

D. $a > b > c$

Lời giải

Chọn C

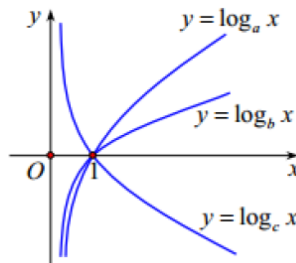
Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng: Hàm số $y=a^x$ là hàm số đồng biến; hàm số $y=b^x, y=c^x$ là hàm số nghịch biến.

Suy ra $a > 1$ và $\begin{cases} 0 < b < 1 \\ 0 < c < 1 \end{cases} \rightarrow a > \{b, c\}$. Gọi $B(-1; y_B)$ thuộc đồ thị hàm số $y=b^x \Rightarrow y_B = \frac{1}{b}$;

Và $C(-1; y_C)$ thuộc đồ thị hàm số $y=c^x \Rightarrow y_C = \frac{1}{c}$. Dựa vào đồ thị, ta có

$$y_B > y_C \Leftrightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{c} \Leftrightarrow c > b.$$

Câu 42: Cho a, b, c là ba số thực dương và khác 1. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x, y=\log_b x, y=\log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?



A. $a < b < c$

B. $c < a < b$

C. $c < b < a$

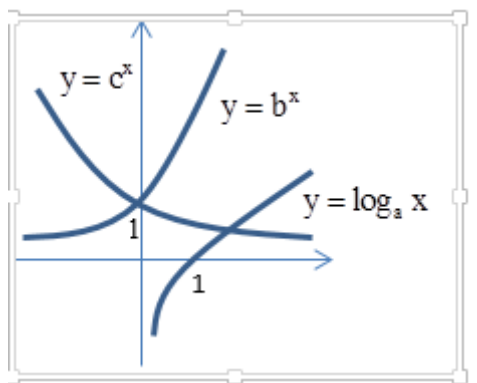
D. $b < c < a$

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=\log_c x$ nghịch biến $\Rightarrow 0 < c < 1$, các hàm $y=\log_a x, y=\log_b x$ đồng biến nên $a, b > 1$. Chọn $x=100 \Rightarrow \log_a 100 > \log_b 100 \Rightarrow a < b \Rightarrow c < a < b$.

Câu 43: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x, y = b^x, y = c^x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $b < c < a$

B. $a < b < c$

C. $c < a < b$

D. $c < b < a$

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = c^x$ là hàm nghịch biến nên $0 < c < 1$.

Hàm số $y = b^x$ là hàm đồng biến nên $b > 1$

Hàm số $y = \log_a x$ là hàm đồng biến nên $a > 1$. Lấy đối xứng đồ thị hàm $y = \log_a x$ qua đường phân giác thứ nhất của mặt phẳng tọa độ ta có đồ thị hàm số $y = b^x$ tăng nhanh hơn đồ thị hàm số $y = a^x$ nên $b > a$

BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT**A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM**

Việc tính toán tuổi của hoá thạch được thực hiện như thế nào?

**Lời giải**

Gọi x là lượng đồng vị phóng xạ carbon-14 ngay sau khi sinh vật chết y là lượng đồng vị phóng xạ

carbon-14 tại thời điểm t Ta có: $y = x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$.

Từ đó, ta tính được tuổi của hoá thạch là $t = 5730 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{y}{x}$

1. Phương trình mũ

HD 1: Số lượng cá thể vi khuẩn của một mẻ nuôi cấy tuân theo công thức $P(t) = 50 \cdot 10^{kt}$, trong đó t là thời gian tính bằng giờ kể từ thời điểm bắt đầu nuôi cấy, k là hằng số.

(Nguồn: Sinh học 10, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 101)

- Ban đầu mẻ có bao nhiêu cá thể vi khuẩn?
- Sau 1 giờ thì mẻ có 100 cá thể vi khuẩn. Tìm giá trị của k (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).
- Sau bao lâu thì số lượng cá thể vi khuẩn đạt đến 50000?

**Lời giải**

a) Số lượng vi khuẩn lúc đầu là $P_0 = 50 \cdot 10^{k \cdot 0} = 50$

b) Khi $t = 1$, ta có: $100 = 50 \cdot 10^{k \cdot 1}$

Suy ra $k = 0,3$

c) Khi $P(t) = 50000$ thì $50 \cdot 10^{0,3 \cdot t} = 50000$

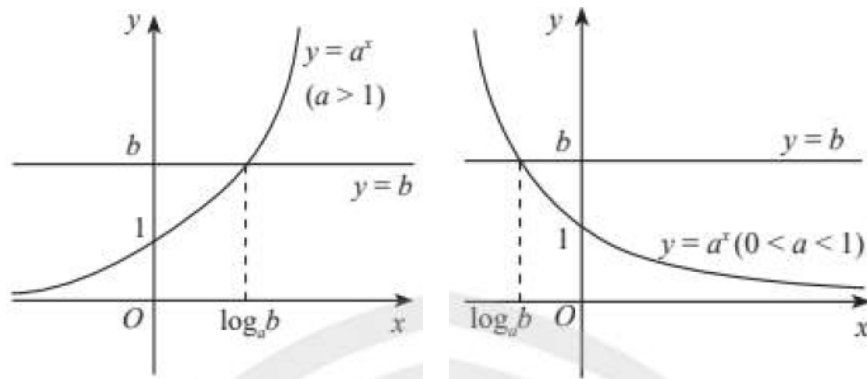
Suy ra $t = 10$

Vậy sau 10 giờ số lượng cá thể vi khuẩn đạt 50000

Phương trình dạng $a^x = b$, trong đó a và b là những số cho trước, $a > 0, a \neq 1$, được gọi là **phương trình mũ cơ bản**.

Nghiệm của phương trình mũ cơ bản

HĐ 2: Cho đồ thị của hai hàm số $y = a^x$ và $y = b$ như Hình 2a (với $a > 0$) hay Hình 2b (với $0 < a < 1$). Từ đây, hãy nhận xét về số nghiệm và công thức nghiệm của phương trình $a^x = b$ trong hai trường hợp $b > 0$ và $b \leq 0$.



Lời giải

Khi $b > 0$ phương trình $a^x = b$ có 1 nghiệm $x = \log_a b$

Khi $b \leq 0$ phương trình $a^x = b$ vô nghiệm

Cho phương trình $a^x = b (a > 0, a \neq 1)$.

Nếu $b > 0$ thì phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.

Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Chú ý: a) Nếu $b = a^\alpha$ thì ta có $a^x = a^\alpha \Leftrightarrow x = \alpha$.

b) Tổng quát hơn, $a^{u(x)} = a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$.

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

a) $2^x = \frac{1}{8}$

b) $5 \cdot 10^x = 1$;

c) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{27^x}{3}$

Lời giải

a) $2^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-3} \Leftrightarrow x = -3$.

b) $5 \cdot 10^x = 1 \Leftrightarrow 10^x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = \log \frac{1}{5} = -\log 5$.

$$c) \left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{27^x}{3} \Leftrightarrow (3^{-2})^x = \frac{(3^3)^x}{3} \Leftrightarrow 3^{-2x} = 3^{3x-1} \Leftrightarrow -2x = 3x-1 \Leftrightarrow 5x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}.$$

Ví dụ 2. Nếu khối lượng carbon-14 trong cơ thể sinh vật lúc chết là M_0 (g) thì khối lượng carbon-14 còn lại (tính theo gam) sau t năm được tính theo công thức $M(t) = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ (g), trong đó $T = 5730$ (năm) là chu kỳ bán rã của carbon-14. Nghiên cứu hóa thạch của một sinh vật, người ta xác định được khối lượng carbon-14 hiện có trong hóa thạch là 5.10^{-13} g. Nhờ biết tỉ lệ khối lượng của carbon-14 so với carbon-12 trong cơ thể sinh vật sống, người ta xác định được khối lượng carbon-14 trong cơ thể sinh vật lúc chết là $M_0 = 1,2.10^{-12}$ (g). Sinh vật này sống cách đây bao nhiêu năm? (Làm tròn đến kết quả hàng trăm.)

Lời giải

Gọi t là thời gian từ lúc sinh vật chết đến nay. Ta có:

$$5.10^{-13} = 1,2.10^{-12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{t}{T} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{12} \\ \Leftrightarrow t = T \log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{12} = -5730 \cdot \log_2 \frac{5}{12} \approx 7237 \approx 7200.$$

Vậy sinh vật này sống cách đây khoảng 7200 năm.



Giải các phương trình sau:

a) $3^{x+2} = \sqrt[3]{9}$

b) $2.10^{2x} = 30$

c) $4^{2x} = 8^{2x-1}$

Lời giải

a) $3^{x+2} = \sqrt[3]{9} \Leftrightarrow 3^{x+2} = 3^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x+2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{-4}{3}$

b) $2.10^{2x} = 30 \Leftrightarrow 10^{2x} = 15 \Leftrightarrow 2x = \log 15 \Leftrightarrow x = \frac{\log 15}{2}$

c) $4^{2x} = 8^{2x-1} \Leftrightarrow (2^2)^{2x} = (2^3)^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{4x} = 2^{6x-3} \Leftrightarrow 4x = 6x-3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$



Công thức tính khối lượng còn lại của một chất phóng xạ từ khối lượng ban đầu M_0 là

$$M(t) = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}, \text{ trong đó } t \text{ là thời gian tính từ thời điểm ban đầu và } T \text{ là chu kỳ bán rã của chất. Đồng}$$

vị plutonium-234 có chu kỳ bán rã là 9 giờ.

(Nguồn: <https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/element/Plutonium#section=Atomic-Mass-Half-Life-and-Decay>)

Từ khối lượng ban đầu 200 g, sau bao lâu thì khối lượng plutonium-234 còn lại là:

a) 100 g?

b) 50 g?

c) 20 g?

Lời giải

$$M(t) = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \Leftrightarrow t = T \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{M(t)}{M_0}$$

a) Khi $M(t) = 100$ thì $t = 9 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{100}{200} = 9$ (giờ)

b) Khi $M(t) = 50$ thì $t = 9 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{50}{200} = 18$ (giờ)

c) Khi $M(t) = 20$ thì $t = 9 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{20}{200} = 30$ (giờ)

2. Phương trình lôgarit



Nhắc lại rằng, độ pH của một dung dịch tính theo công thức $\text{pH} = -\log x$, trong đó x là nồng độ ion H^+ tính bằng mol/L.

Biết sữa có độ pH là 6,5. Nồng độ H^+ của sữa bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $6,5 = -\log x \Leftrightarrow x = 10^{-6,5} \Leftrightarrow x = 3,2 \cdot 10^{-7}$

Vậy nồng độ H^+ của sữa là $3,2 \cdot 10^{-7}$

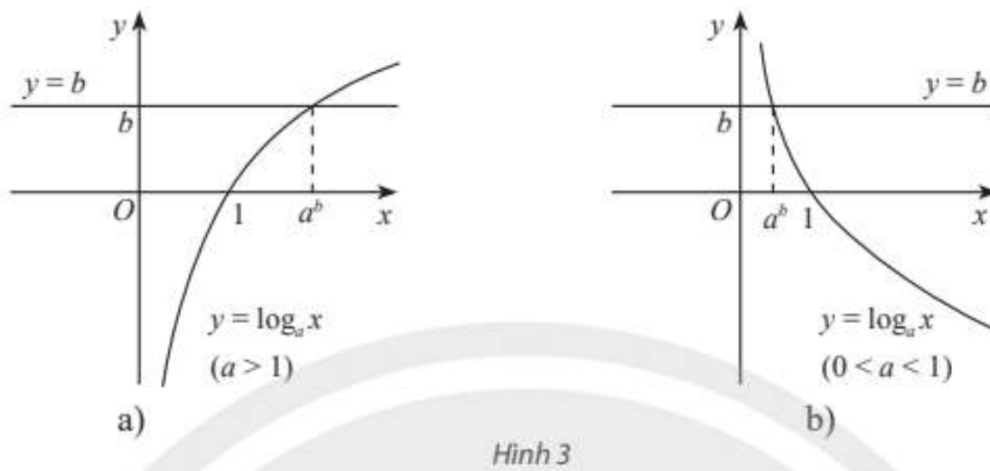


Phương trình dạng $\log_a x = b$, trong đó a, b là những số cho trước, $a > 0$, $a \neq 1$, được gọi là **phương trình lôgarit cơ bản**.

Nghiệm của phương trình lôgarit cơ bản



Cho đồ thị của hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) và $y = b$ như Hình 3a (với $a > 1$) hay Hình 3b (với $0 < a < 1$). Từ đây hãy nhận xét về số nghiệm và công thức nghiệm của phương trình $\log_a x = b$.



Lời giải

Phương trình $\log_a x = b$ có 1 nghiệm $x = a^b$



Phương trình $\log_a x = b$ ($a > 0, a \neq 1$) luôn có nghiệm duy nhất $x = a^b$.

Chú ý: Tổng quát, xét phương trình dạng

$$\log_a u(x) = \log_a v(x) \quad (a > 0, a \neq 1). \quad (1)$$

Để giải phương trình (1), trước hết cần đặt điều kiện có nghĩa: $u(x) > 0$ và $v(x) > 0$.

Khi đó, (1) được biến đổi thành phương trình

$$u(x) = v(x) \quad (2)$$

Sau khi giải phương trình (2), ta cần kiểm tra sự thỏa mãn điều kiện. Nghiệm của phương trình (1) là nghiệm của (2) thỏa mãn điều kiện.

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau:

a) $\log_3 x = -2$;

$$\text{b) } \log_2(x^2 - 3) = \log_2(2x).$$

Lời giải

a) Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_3 x = -2.$$

b) Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 3 > 0 \\ 2x > 0 \end{cases} \quad (*)$

Khi đó, phương trình đã cho trở thành

$$x^2 - 3 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 3.$$

Thay lần lượt hai giá trị này vào (*), ta thấy chỉ có $x = 3$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

Ví dụ 4. Nước chanh có độ pH là 2,4; giấm có độ pH bằng 3. Nước chanh có độ acid gấp bao nhiêu lần giấm (nghĩa là có nồng độ H^+ gấp bao nhiêu lần)? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.)

Lời giải

Kí hiệu x, y lần lượt là nồng độ H^+ trong nước chanh và giấm. Theo giả thiết, ta có

$$2,4 = -\log x \text{ và } 3 = -\log y.$$

Suy ra $x = 10^{-2,4}$ và $y = 10^{-3}$. Suy ra $\frac{x}{y} = \frac{10^{-2,4}}{10^{-3}} = 10^{0,6} \approx 3,98$.

Vậy nồng độ H^+ của nước chanh gấp 3,98 lần nồng độ H^+ của giấm.



 Giải phương trình sau:

a) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) = -2$;

b) $\log_2(x+6) = \log_2(x+1) + 1$

Lời giải

$$\text{a) } \log_{\frac{1}{2}}(x-2) = -2 \Leftrightarrow x-2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow x-2 = 4 \Leftrightarrow x = 6$$

b) $\log_2(x+6) = \log_2(x+1) + 1$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x+6) = \log_2 (x+1) + \log_2 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+6) = \log_2[2(x+1)]$$

$$\Leftrightarrow x + 6 = 2(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

3. Bất phương trình mũ



 5 Xét quần thể vi khuẩn ở 1

a) Ở những thời điểm nào thì số lượng cá thể vi khuẩn vượt quá 50 000?

b) Ở những thời điểm nào thì số lượng cá thể vi khuẩn vượt quá 50 000 nhưng chưa vượt quá 100 000 ?

Lời giải

a) Khi $P(t) = 50000$ thì $t = 10$.

Vậy tại những thời điểm $t > 10$ thì số lượng vi khuẩn vượt quá 50000

b) Khi $P(t) = 100000$ thì $t = 11$

Vậy tại những thời điểm $t < 11$ thì số lượng vi khuẩn không vượt quá 100000

Suy ra khi $10 < t < 11$ thì số lượng cá thể vi khuẩn vượt quá 50000 nhưng chưa vượt quá 100000

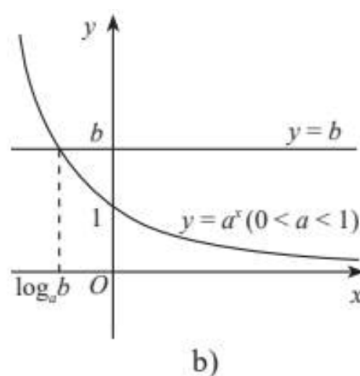
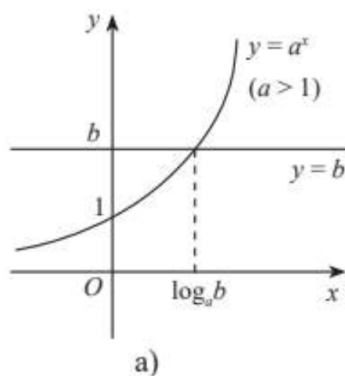
Bất phương trình mũ cơ bản là bất phương trình có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b$, $a^x < b$, $a^x \leq b$), với a, b là những số cho trước, $a > 0$, $a \neq 1$.

Xét bất phương trình

$$a^x > b \quad (3)$$

Nghiệm của (3) là hoành độ các điểm trên đồ thị hàm số $y = a^x$ nằm phía trên đường thẳng $y = b$. Từ đồ thị ở Hình 4, ta nhận được:

- Nếu $b \leq 0$ thì mọi $x \in \mathbb{R}$ đều là nghiệm của (3).
- Nếu $b > 0$ thì:
 - Với $a > 1$, nghiệm của (3) là $x > \log_a b$;
 - Với $0 < a < 1$, nghiệm của (3) là $x < \log_a b$.



Hình 4

Chú ý: a) Tương tự như trên, từ đồ thị ở Hình 4, ta nhận được kết quả về nghiệm của mỗi bất phương trình $a^x \geq b, a^x < b, a^x \leq b$ (các bất phương trình $a^x < b, a^x \leq b$ vô nghiệm nếu $b \leq 0$).

b) Nếu $a > 1$ thì $a^{u(x)} > a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) > v(x)$.

Nếu $0 < a < 1$ thì $a^{u(x)} > a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) < v(x)$.

Ví dụ 5. Giải các bất phương trình sau:

a) $10^x < 0,001$

b) $0,4^x > 2$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 2 \cdot 4^{2x}$

Lời giải

a) $10^x < 0,001 \Leftrightarrow 10^x < 10^{-3} \Leftrightarrow x < -3$ (do $10 > 1$).

b) $0,4^x > 2 \Leftrightarrow x < \log_{0,4} 2$ (do $0 < 0,4 < 1$).

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 2 \cdot 4^{2x} \Leftrightarrow (2^{-1})^x \geq 2 \cdot (2^2)^{2x} \Leftrightarrow 2^{-x} \geq 2^{1+4x} \Leftrightarrow -x \geq 1+4x$ (do $2 > 1$)

$$\Leftrightarrow 5x \leq -1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{5}.$$

Luyện tập 3. Giải các bất phương trình sau:

a) $2^x > 16$

b) $0,1^x \leq 0,001$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} \geq \left(\frac{1}{25}\right)^x$

Lời giải

a) $2^x > 16 \Leftrightarrow 2^x > 2^4 \Leftrightarrow x > 4$ (do $2 > 1$)

b) $0,1^x \leq 0,001 \Leftrightarrow 0,1^x \leq 0,1^3 \Leftrightarrow x \geq 3$ (do $0,1 < 1$)

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} > \left(\frac{1}{25}\right)^x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} > \left[\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]^x$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} > \left(\frac{1}{5}\right)^{2x} \Leftrightarrow x-2 < 2x \Leftrightarrow x > -2$ (do $\frac{1}{5} < 1$)

4. Bất phương trình lôgarit

Biết rằng máu của người bình thường có độ pH từ 7,3 đến 7,45 (nguồn: Hóa học 11_NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 15). Nồng độ H^+ trong máu nhận giá trị trong miền nào?

Lời giải

Khi pH = 7,30 thì nồng độ H^+ là $10^{-7,30} = 5 \cdot 10^{-8}$

Khi pH = 7,45 thì nồng độ H^+ là $10^{-7,45} = 3,5 \cdot 10^{-8}$

Vậy nồng độ H^+ trong máu nhận giá trị từ $3,5 \cdot 10^{-8}$ đến $5 \cdot 10^{-8}$

Bất phương trình lôgarit cơ bản là bất phương trình có dạng $\log_a x > b$ (hoặc

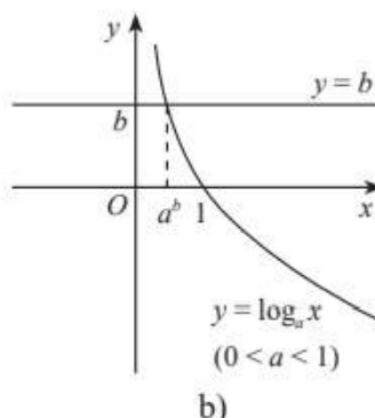
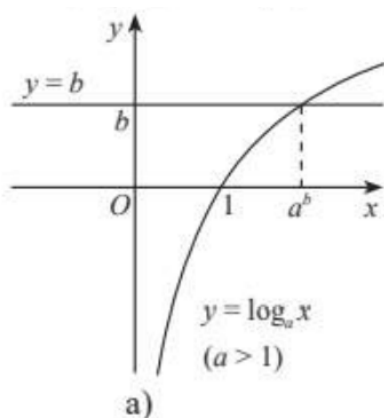
$\log_a x \geq b, \log_a x < b, \log_a x \leq b$), với a, b là các số cho trước, $a > 0, a \neq 1$.

Xét bất phương trình $\log_a x > b$ (4).

Điều kiện xác định của bất phương trình là $x > 0$.

Nghiệm của (4) là hoành độ các điểm của đồ thị hàm số $y = \log_a x$ nằm phía trên đường thẳng $y = b$. Từ đồ thị ở Hình 5, ta nhận được:

- Với $a > 1$, nghiệm của (4) là $x > a^b$.
- Với $0 < a < 1$, nghiệm của (4) là $0 < x < a^b$.



Hình 5

Chú ý: a) Tương tự như trên, từ đồ thị ở Hình 5, ta nhận được kết quả về nghiệm của mỗi bất phương trình $\log_a x \geq b, \log_a x < b, \log_a x \leq b$.

b) Nếu $a > 1$ thì $\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow u(x) > v(x) > 0$.

Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a u(x) > \log_a v(x) \Leftrightarrow 0 < u(x) < v(x)$.

Ví dụ 6. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_2(2x-1) \leq 1$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(1-x) > \log_{\frac{1}{2}}(3x+2)$

Lời giải

a) Điều kiện: $2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$.

Khi đó, do cơ số $2 > 1$ nên bất phương trình đã cho trở thành

$$2x-1 \leq 2^1 \Leftrightarrow 2x \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} 1-x > 0 \\ 3x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < 1 (*)$.

Khi đó, do cơ số $\frac{1}{2} < 1$ nên bất phương trình đã cho trở thành

$$1-x < 3x+2 \Leftrightarrow 4x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}.$$

Kết hợp với điều kiện (*), ta được nghiệm của bất phương trình là $-\frac{1}{4} < x < 1$.

Luyện tập 4. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) < 2$

b) $\log_5(x+2) \leq 1$

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

Khi đó, do $\frac{1}{3} < 1$ nên $x+1 > \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x > \frac{-8}{9}$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm của bất phương trình là $x > \frac{-8}{9}$

b) Điều kiện xác định: $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

Khi đó, do $5 > 1$ nên $x+2 \leq 5^1 \Leftrightarrow x \leq 3$

Kết hợp với điều kiện, ta có nghiệm của bất phương trình là $-2 < x \leq 3$



Nước uống đạt tiêu chuẩn có độ pH nằm trong khoảng từ 6,5 đến 8,5 (theo Quy chuẩn Việt Nam QCVN 01:2009/BYT). Nồng độ H^+ trong nước uống tiêu chuẩn phải nằm trong khoảng nào?

Lời giải

Ta có: $6,5 \leq pH \leq 8,5 \Leftrightarrow 6,5 \leq -\log x \leq 8,5 \Leftrightarrow 3,2 \cdot 10^{-9} \leq x \leq 3,2 \cdot 10^{-7}$

Vậy nồng độ H^+ trong nước uống tiêu chuẩn phải nằm trong khoảng từ $3,2 \cdot 10^{-9}$ tới $3,2 \cdot 10^{-7}$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Đưa về cùng cơ số

1. Phương pháp

$$\triangleright a^{A(x)} = a^{B(x)} \Leftrightarrow A(x) = B(x), (a > 0, a \neq 1)$$

$$\triangleright \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \text{ (hoac } g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\triangleright a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Giải các phương trình mũ sau

$$\text{a) } 3^{x^2-4x+5} = 9 \quad \text{b) } 1,5^{5x-7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \quad \text{c) } 2^{2x-1} + 4^{x+2} = 10$$

Giải

a) Đưa hai vế về cùng cơ số 3, ta được phương trình đã cho tương đương với:

$$3^{x^2-4x+5} = 3^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Giải phương trình bậc hai này được hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 3$.

b) Đưa về cùng cơ số 1,5, phương trình đã cho tương đương với:

$$1,5^{5x-7} = 1,5^{-x-1} \Leftrightarrow 5x - 7 = -x - 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

c) Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{1}{2} \cdot 4^x + 16 \cdot 4^x = 10 \Leftrightarrow \frac{33}{2} \cdot 4^x = 10 \Leftrightarrow 4^x = \frac{20}{33} \Leftrightarrow x = \log_4 \frac{20}{33}.$$

Vậy $x = \log_4 \frac{20}{33}$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

$$\text{a) } \log_3(2x+1) = \log_3 5 \quad \text{b) } \log_2(x+3) = \log_2(2x^2 - x - 1)$$

$$\text{c) } \log_5(x-1) = 2 \quad \text{d) } \log_2(x-5) + \log_2(x+2) = 3$$

Lời giải

$$\text{a) ĐK: } 2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > (-1/2)$$

$$\text{PT} \Leftrightarrow 2x+1=5 \Leftrightarrow 2x=4 \Leftrightarrow x=2 \text{ (thỏa ĐK)}$$

$$\text{b) ĐK: } x+3 > 0, 2x^2 - x - 1 > 0 \text{ ta được: } x > 1 \text{ hoặc } (-3) < x < (-1/2)$$

$$\text{Ta có: } \log_2(x+3) = \log_2(2x^2 - x - 1) \Leftrightarrow x+3 = 2x^2 - x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ (thỏa)} \text{ hoặc } x = 2 \text{ (thỏa)}$$

$$\text{c) ĐK: } x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\text{Ta có: } \log_5(x-1) = 2 \Leftrightarrow x-1 = 5^2 \Leftrightarrow x = 26 \text{ (thỏa)}$$

d) ĐK: $x-5 > 0$ và $x+2 > 0$ ta được: $x > 5$

Ta có:

$$\log_2(x-5) + \log_2(x+2) = 3 \Leftrightarrow \log_2(x-5)(x+2) = 3 \Leftrightarrow (x-5)(x+2) = 2^3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ (loại) hoặc } x = 6 \text{ (thỏa)}$$

Ví dụ 1: Giải bất phương trình mũ sau: $3^{x^2-x} \leq 3^{1-x}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 3^{x^2-x} \leq 3^{1-x} \Leftrightarrow x^2 - x \leq 1 - x \Leftrightarrow x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $[-1; 1]$

Ví dụ 3: Giải bất phương trình mũ sau: $\left(\frac{2}{5}\right)^{4x} \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{2-x}$

Lời giải

- Ta có thể biến đổi theo 1 trong 2 cách sau (thực tế thì cùng phương pháp).

Cách 1: Bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{4x} \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{4x} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 4x \geq x-2 \Leftrightarrow 3x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: } \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

Cách 2: Bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{4x} \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{-4x} \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow -4x \leq 2-x \Leftrightarrow 3x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: } \left[-\frac{2}{3}; +\infty\right)$$

Ví dụ 4: Giải bất phương trình $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \geq (\sqrt{5}-2)^{-x^2+3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{5}-2 = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = (\sqrt{5}+2)^{-1}$$

$$\text{Vậy: } (\sqrt{5}+2)^{x-1} \geq (\sqrt{5}-2)^{-x^2+3} \Leftrightarrow (\sqrt{5}+2)^{x-1} \geq (\sqrt{5}+2)^{x^2-3} \Leftrightarrow x-1 \geq x^2-3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$$

Vậy BPT có tập nghiệm $S = [-1; 2]$

Ví dụ 5: Giải bất phương trình $\log_2^2 x - 5 \log_2 x - 6 \leq 0$

Lời giải

Đặt $t = \log_2 x$, khi đó phương trình trở thành:

$$t^2 - 5t - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-6) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 6$$

Do đó ta có:

$$-1 \leq \log_2 x \leq 6 \Rightarrow \log_2 \frac{1}{2} \leq \log_2 x \leq \log_2 64 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 64$$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $S = \left[\frac{1}{2}; 64 \right]$.

Dạng 2: Phương pháp đặt ẩn phụ

1. Phương pháp

$$\alpha a^{2x} + \beta a^x + \gamma = 0. \text{ Đặt } t = a^x, (t > 0)$$

$$\alpha \log_a^2 x + \beta \log_a x + \gamma = 0. \text{ Đặt } t = \log_a x, (x > 0)$$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$

b) $9^x - 3 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x = 0$

c) $5^x + 5^{1-x} - 6 = 0$

d) $25^x - 2 \cdot 5^x - 15 = 0$

Lời giải

a) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ đặt $t = 3^x$ với $t > 0$ ta được phương trình: $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 3$ (2 nghiệm đều thỏa điều kiện $t > 0$).

với $t = 1 \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

với $t = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$

b) $9^x - 3 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x = 0$ chia 2 vế của phương trình cho 4^x ta được phương trình sau

$$\left(\frac{9}{4}\right)^x - 3\left(\frac{6}{4}\right)^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 3\left(\frac{3}{2}\right)^x + 2 = 0 \text{ đặt } t = \left(\frac{3}{2}\right)^x \text{ với } t > 0 \text{ ta được phương trình}$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = 2 \text{ (2 nghiệm đều thỏa } t > 0 \text{)}$$

với $t = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

với $t = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} 2$

c) $5^x + 5^{1-x} - 6 = 0 \Leftrightarrow 5^x + 5 \cdot 5^{-x} - 6 = 0$

Đặt $t = 5^x$ (với $t > 0$) thì $5^{-x} = 1/t$ ta được phương trình:

$$t + 5 \frac{1}{t} - 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = 5 \text{ (thỏa điều kiện } t > 0 \text{)}$$

với $t = 1 \Leftrightarrow 5^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

với $t = 5 \Leftrightarrow 5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1$

d) $25^x - 2 \cdot 5^x - 15 = 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 15 = 0$ đặt $t = 5^x$ với $t > 0$ ta được phương trình

$$t^2 - 2t - 15 = 0 \Leftrightarrow t = 5 \text{ (nhận) hoặc } t = -3 \text{ (loại)}$$

với $t = 5 \Leftrightarrow 5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $\log_3^2 x + 2 \log_3 x - 3 = 0$

b) $4 \log_9 x + \log_x 3 - 3 = 0$

Lời giải

a) ĐK: $x > 0$

Ta đặt $t = \log_3 x$ khi đó $PT \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = -3$

Với $t = 1 \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3$

Với $t = -3 \Leftrightarrow \log_3 x = -3 \Leftrightarrow x = 3^{-3} = 1/27$

b) $4\log_9 x + \log_x 3 - 3 = 0$ ĐK: $0 < x \neq 1$

PT $\Leftrightarrow 2\log_3 x + 1/\log_3 x - 3 = 0$

Ta đặt $t = \log_3 x$ khi đó PT $\Leftrightarrow 2t + 1/t - 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 1/2$

Với $t = 1 \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3$ (thỏa)

Với $t = 1/2 \Leftrightarrow \log_3 x = 1/2 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ (thỏa)

Ví dụ 3: Giải bất phương trình mũ sau: $9^x + 2.3^{x+1} - 16 \geq 0$

Lời giải

$9^x + 2.3^{x+1} - 16 \geq 0$ (*)

Ta đặt $t = 3^x$ (điều kiện $t > 0$), khi đó phương trình (*) biến đổi về dạng:

$$3^{2x} + 6.3^x - 16 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 + 6t - 16 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -8 \text{ (loại)} \\ t \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq 2$$

Với: $t \geq 2 \Leftrightarrow 3^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \log_3 2$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm $[\log_3 2; +\infty)$

Ví dụ 4: Giải bất phương trình sau: $(7 + 4\sqrt{3})^x - 3(2 - \sqrt{3})^x + 2 \leq 0$

Lời giải

Ta có: $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$ và $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$ nên đặt $t = (2 + \sqrt{3})^x$, $t > 0$ ta có bất phương trình:

$$t^2 - 3/t + 2 \leq 0 \Leftrightarrow t^3 + 2t - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t + 3) \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1 \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0$$

Vậy, bất phương trình cho có nghiệm là $x \leq 0$

Dạng 3: Logarit hóa, mũ hóa

1. Phương pháp

$$a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$$

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b \end{cases}$$

$$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < \log_a b \\ a > 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases}$$

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \cdot \log_a b \\ 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \cdot \log_a b \end{cases}$$

$$\log_a f(x) > b \Rightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > a^b \\ 0 < a < 1 \\ f(x) < a^b \end{cases}$$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Giải phương trình sau

a) $3^x = 2$ b) $2^x \cdot 3^x = 1$

Lời giải

a) $3^x = 2$ ta logarit cơ số 3 hai vế

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \log_3 3^x = \log_3 2 \Leftrightarrow x = \log_3 2$$

$$b) 2^x \cdot 3^x = 1 \Leftrightarrow (2 \cdot 3)^x = 1 \Leftrightarrow 6^x = 1 \Leftrightarrow \log_6 6^x = \log_6 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Hoặc có thể làm như sau, lấy logarit cơ số 2 của 2 vế ta được

$$\Leftrightarrow \log_2 (2^x \cdot 3^x) = \log_2 1 \Leftrightarrow \log_2 (2^x \cdot 3^x) = 0 \Leftrightarrow \log_2 2^x + \log_2 3^x = 0$$

$$\Leftrightarrow x + x \cdot \log_2 3 = 0 \Leftrightarrow x(1 + \log_2 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $\ln(x+3) = -1 + \sqrt{3}$

b) $\log_2 (5 - 2^x) = 2 - x$

Lời giải

a) ĐK: $x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$ với điều kiện này ta mũ hóa 2 vế của PT đã cho ta được PT:

$$e^{\ln(x+3)} = e^{-1+\sqrt{3}} \Leftrightarrow x+3 = e^{-1+\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = e^{-1+\sqrt{3}} - 3 \text{ (thỏa)}$$

b) $\log_2 (5 - 2^x) = 2 - x$

ĐK: $5 - 2^x > 0 \Leftrightarrow 2^x < 5$

$$\text{PT} \Leftrightarrow 2^{\log_2 (5 - 2^x)} = 2^{2-x} \Leftrightarrow 5 - 2^x = 4 \cdot 2^{-x}$$

Đặt $t = 2^x$ ($t > 0, t < 5$ do $2^x < 5$) ta được: $5 - t = (4/t) \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow t = 1 \text{ (thỏa)} \text{ hoặc } t = 4 \text{ (thỏa)}$$

Với $t = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Với $t = 4 \Leftrightarrow x = 2$

Ví dụ 3: Giải bất phương trình $2^{x^2-4} \geq 5^{x-2}$.

Lời giải

Lấy logarit cơ số 2 hai vế của bất phương trình đã cho ta có:

$$\log_2 (2^{x^2-4}) \geq \log_2 (5^{x-2}) \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq (x-2) \log_2 5 \Leftrightarrow (x-2)(x+2 - \log_2 5) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq \log_2 5 - 2 \end{cases}$$

Vậy BPT có tập nghiệm $S = (-\infty; \log_2 5 - 2] \cup [2; +\infty)$.

Ví dụ 4: Giải bất phương trình logarit sau: $\log_8 (4 - 2x) \geq 2$

Lời giải

- Điều kiện $4 - 2x > 0$ suy ra $x < 2$.

$$\log_8(4 - 2x) \geq 2 \Leftrightarrow \log_8(4 - 2x) \geq \log_8 8^2 \Leftrightarrow 4 - 2x \geq 8^2 \Leftrightarrow 4 - 2x \geq 64 \Leftrightarrow 2x \leq -60 \Leftrightarrow x \leq -30$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình logarit là: $(-\infty; -30]$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Giải các phương trình sau:

a) $5^{2x-1} = 25$;

b) $3^{x+1} = 9^{2x+1}$

c) $10^{1-2x} = 100000$

Lời giải

a) $5^{2x-1} = 25 \Leftrightarrow 5^{2x-1} = 5^2 \Leftrightarrow 2x-1 = 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

b) $3^{x+1} = 9^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{x+1} = (3^2)^{2x+1}$

$$\Leftrightarrow 3^{x+1} = 3^{4x+2} \Leftrightarrow x+1 = 4x+2 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{3}$$

c) $10^{1-2x} = 100000 \Leftrightarrow 10^{1-2x} = 10^5 \Leftrightarrow 1-2x = 5 \Leftrightarrow x = -2$

2. Giải các phương trình sau. Làm tròn kết quả đến hàng nghìn.

a) $3^{x+2} = 7$;

b) $3 \cdot 10^{2x+1} = 5$;

Lời giải

a) $3^{x+2} = 7 \Leftrightarrow x+2 = \log_3 7 \Leftrightarrow x = \log_3 7 - 2 \Leftrightarrow x \approx -0,229$

b) $3 \cdot 10^{2x+1} = 5 \Leftrightarrow 10^{2x+1} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow 2x+1 = \log \frac{5}{3}$

$$\Leftrightarrow x = \left(\log \frac{5}{3} - 1 \right) : 2 \Leftrightarrow x \approx -0,389$$

3. Giải các phương trình sau:

a) $\log_6(4x+4) = 2$;

b) $\log_3 x - \log_3(x-2) = 1$

Lời giải

a) $\log_6(4x+4) = 2 \Leftrightarrow 4x+4 = 6^2 \Leftrightarrow x = 8$

b) $\log_3 x - \log_3(x-2) = 1 \Leftrightarrow \log_3 \frac{x}{x-2} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x-2} = 3 \Leftrightarrow x = 3(x-2) \Leftrightarrow x = 3$$

4. Giải các bất phương trình sau:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq 9$;

b) $4^x > 2^{x-2}$

Lời giải

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq 9 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow 2x+1 \geq -2 \Leftrightarrow x \geq \frac{-3}{2}$ (do $\frac{1}{3} < 1$)

b) $4^x > 2^{x-2} \Leftrightarrow (2^2)^x > 2^{x-2} \Leftrightarrow 2^{2x} > 2^{x-2} \Leftrightarrow 2x > x-2 \Leftrightarrow x > -2$ (do $2 > 1$)

5. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_2(x-2) < 2$;

b) $\log(x+1) \geq \log(2x-1)$

Lời giải

a) $\log_2(x-2) < 2 \Leftrightarrow x-2 < 2^2 \Leftrightarrow x < 6$

b) $\log(x+1) \geq \log(2x-1) \Leftrightarrow x+1 \geq 2x-1 \Leftrightarrow x \leq 2$

6. Chất phóng xạ polonium-210 có chu kỳ bán rã là 138 ngày. Điều này có nghĩa là cứ sau 138 ngày, lượng polonium còn lại trong một mẫu chỉ bằng một nửa lượng ban đầu. Một mẫu 100g có khối lượng

polonium-210 còn lại sau t ngày được tính theo công thức $M(t) = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}} (g)$

(nguồn://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/element/Polonium#section=Atomc-Mass-Half-Life-anh-Decay)

a) Khối lượng polonium-210 còn lại bao nhiêu sau 2 năm?

b) Sau bao lâu thì còn lại 40g polonium-210.

Lời giải

a) Khối lượng polonium-210 còn lại sau 2 năm (730 ngày) là:

$$M(2) = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{730}{138}} = 2,56(g)$$

b) $M(t) = 40$ khi $100 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}} = 40 \Leftrightarrow t = 182,4$

Vậy sau 182,4 ngày còn lại lại 40 g polonium-210

7. Nhắc lại rằng, mức cường độ âm L được tính bằng công thức $L = \log\left(\frac{I}{I_0}\right)(dB)$, trong đó I là cường

độ của âm tính bằng W/m^2 và $I_0 = 10^{-12} W/m^2$

(Nguồn: Vật lý 12, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 52)

a) Một giáo viên đang giảng bài trong lớp học, có mức cường độ âm là $50dB$. Cường độ âm của giọng nói giáo viên bằng bao nhiêu?

b) Mức cường độ âm trong một nhà xưởng thay đổi trong khoảng từ $75dB$ đến $90dB$. Cường độ âm trong nhà xưởng này thay đổi trong khoảng nào?

Lời giải

a) Khi $L = 50$ thì $10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 50 \Leftrightarrow I = 10^{-7}$

Vậy cường độ âm của giọng nói giáo viên là 10^{-7} W/m^2

b) Khi $L = 75$ thì $10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 75 \Leftrightarrow I = 3,2 \cdot 10^{-5}$

Khi $L = 90$ thì $10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 90 \Leftrightarrow I = 10^{-3}$

Vậy cường độ âm trong nhà xưởng thay đổi từ $3,2 \cdot 10^{-5}$ đến 10^{-3}

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Phương trình $2^{2x+1} = 32$ có nghiệm là

A. $x = \frac{5}{2}$.

B. $x = 2$.

C. $x = \frac{3}{2}$.

D. $x = 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{2x+1} = 32 \Leftrightarrow 2x+1 = 5 \Leftrightarrow x = 2$.

Câu 2: Phương trình $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x-1}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = \left(\frac{1}{7}\right)^{-x+1} \Leftrightarrow x^2-2x-3 = -x+1 \Leftrightarrow x^2-x-4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Câu 3: Phương trình $\log_{\sqrt{2}} x = \log_2 (x+2)$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\log_{\sqrt{2}} x = \log_2 (x+2) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x^2 = \log_2 (x+2) \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = x+2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Câu 4: Số nghiệm của phương trình $\log_3 (x^2 + 4x) + \log_{\frac{1}{3}} (2x+3) = 0$ là

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 + 4x > 0 \\ 2x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -4 \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > 0.$$

$$\text{Phương trình đã cho } \Leftrightarrow \log_3(x^2 + 4x) = \log_3(2x + 3)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Kết hợp điều kiện ta được $x = 1$.

Câu 5: Tập nghiệm S của phương trình $\left(\frac{4}{7}\right)^x \left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1} - \frac{16}{49} = 0$ là

A. $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. **B.** $S = \{2\}$. **C.** $\left\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$. **D.** $S = \left\{-\frac{1}{2}; 2\right\}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \left(\frac{4}{7}\right)^x \left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1} - \frac{16}{49} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^{-2x+1} = \left(\frac{4}{7}\right)^2 \Leftrightarrow -2x+1=2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Câu 6: Cho phương trình $(7 + 4\sqrt{3})^{x^2+x-1} = (2 + \sqrt{3})^{x-2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** Phương trình có hai nghiệm không dương.
B. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.
C. Phương trình có hai nghiệm trái dấu.
D. Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.

Lời giải

Chọn A

Do $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$ nên phương trình ban đầu tương đương với

$$(2 + \sqrt{3})^{2(x^2+x-1)} = (2 + \sqrt{3})^{x-2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 2 = x - 2 \Leftrightarrow 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm không dương.

Câu 7: Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1) + 1 = \log_2(3x-1)$ là

A. $x = 3$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 1$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện xác định } \begin{cases} x+1 > 0 \\ 3x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{3}.$$

Khi đó phương trình trở thành

$$\log_2(2x+2) = \log_2(3x-1) \Leftrightarrow 2x+2 = 3x-1 \Leftrightarrow -x = -3 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 3$.

Câu 8: Số nghiệm thực của phương trình $3\log_3(x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3 = 3$ là

- A. 3 B. 1 C. 2 D. 0

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x > 5$

$$3\log_3(x-1) - \log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3 = 3 \Leftrightarrow 3\log_3(x-1) + 3\log_3(x-5) = 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x-1) + \log_3(x-5) = 1 \Leftrightarrow \log_3[(x-1)(x-5)] = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{7}$$

Đối chiếu điều kiện suy ra phương trình có 1 nghiệm $x = 3 + \sqrt{7}$

Câu 9: Nghiệm của phương trình $2^{x+1} \cdot 4^{x-1} \cdot \frac{1}{8^{1-x}} = 16^x$ là

- A. $x = 3$. B. $x = 1$. C. $x = 4$. D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn D

$$2^{x+1} \cdot 4^{x-1} \cdot \frac{1}{8^{1-x}} = 16^x \Leftrightarrow 2^{x+1} \cdot 2^{2(x-1)} \cdot 2^{3(x-1)} = 2^{4x}$$

$$\Leftrightarrow x+1+2(x-1)+3(x-1) = 4x \Leftrightarrow x = 2.$$

Câu 10: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x-1} \cdot 3^{x^2-2x} = 18$ bằng

- A. 1. B. -1. C. 2. D. -2.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 2^{x^2-2x-1} \cdot 3^{x^2-2x} = 18 \Leftrightarrow 6^{x^2-2x} = 36 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0.$$

Phương trình $x^2 - 2x - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lí Vi-et tổng hai nghiệm của phương trình là: $x_1 + x_2 = 2$.

Câu 11: Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0$ là $S = a + b\sqrt{2}$. Giá trị của biểu thức $Q = a.b$ bằng

- A. 0. B. 3. C. 9. D. 6.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $2 < x \neq 4$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$$2\log_3(x-2) + 2\log_3|x-4| = 0 \Leftrightarrow \log_3(x-2)|x-4| = 0 \Leftrightarrow (x-2)|x-4| = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-4)=1 \\ (x-2)(x-4)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+7=0 \\ x^2-6x+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3\pm\sqrt{2} \\ x=3 \end{cases}$$

So lại điều kiện, ta nhận hai nghiệm

$$x_1 = 3 + \sqrt{2}; x_2 = 3$$

$$\text{Ta được: } S = x_1 + x_2 = 6 + \sqrt{2} \Rightarrow a = 6; b = 1.$$

$$\text{Vậy } Q = a.b = 6.$$

Câu 12: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$. Tính $P = x_1 + x_2$.

- A. 6. B. -3. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } P = x_1 + x_2 = 2 + 4 = 6.$$

Câu 13: Tổng bình phương tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x - 3\log_3 x \cdot \log_2 3 + 2 = 0$

- A. 20 B. 18 C. 6 D. 25

Lời giải

Chọn A

$$\log_2^2 x - 3\log_3 x \cdot \log_2 3 + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 20$$

Câu 14: Phương trình $6^{2x-1} - 5 \cdot 6^{x-1} + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Khi đó tổng hai nghiệm $x_1 + x_2$ là.

- A. 5. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$6^{2x-1} - 5 \cdot 6^{x-1} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{6^{2x}}{6} - \frac{5 \cdot 6^x}{6} + 1 = 0 \Leftrightarrow 6^{2x} - 5 \cdot 6^x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6^{x_1} = 2 \\ 6^{x_2} = 3 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow 6^{x_1} \cdot 6^{x_2} = 3 \cdot 2 \Leftrightarrow 6^{x_1+x_2} = 6 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 1.$$

Câu 15: Gọi T là tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0$. Tính T .

- A. $T = 4$. B. $T = 5$. C. $T = 84$. D. $T = -4$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Phương trình } \log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 81 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } T = 3 + 81 = 84.$$

Câu 16: Phương trình $9^x - 6^x = 2^{2x+1}$ có bao nhiêu nghiệm âm?

- A. 3 B. 0 C. 1 D. 2

$$\text{Phương trình } \log_2^2 x^2 - \log_4(4x^2) - 5 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x^2 - \frac{1}{2} \log_2 x^2 - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x^2 = \frac{1+\sqrt{97}}{4} \vee \log_2 x^2 = \frac{1-\sqrt{97}}{4}. \text{ Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.}$$

Câu 20: Cho phương trình $\log_5(5^x - 1) \cdot \log_{25}(5^{x+1} - 5) = 1$. Khi đặt $t = \log_5(5^x - 1)$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $t^2 - 1 = 0$

B. $t^2 + t - 2 = 0$

C. $t^2 - 2 = 0$

D. $2t^2 + 2t - 1 = 0$

Lời giải

Chọn B

$$\log_5(5^x - 1) \cdot \log_{25}(5^{x+1} - 5) = 1 \quad (1)$$

$$\text{TXĐ: } D = (0; +\infty).$$

$$\text{Ta có } \log_{25}(5^{x+1} - 5) = \log_{5^2}(5 \cdot 5^x - 5) = \frac{1}{2}(\log_5(5^x - 1) + 1).$$

$$\text{Đặt } t = \log_5(5^x - 1) \quad (t > 0).$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành } t \cdot \frac{1}{2}(t+1) = 1 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0.$$

Câu 21: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $3^x + 3^{4-x} = 30$ bằng

A. 3.

B. 1.

C. 9.

D. 27.

Lời giải

Chọn A

$$3^x + 3^{4-x} = 30 \Leftrightarrow 3^x + \frac{81}{3^x} = 30.$$

Đặt $t = 3^x$ ($t > 0$), phương trình đã cho trở thành:

$$t + \frac{81}{t} = 30 \Leftrightarrow t^2 - 30t + 81 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 27 \Rightarrow 3^x = 27 \Leftrightarrow x = 3 \\ t = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1 \end{cases} \text{ Vậy tích tất cả các nghiệm của phương trình là } 1 \cdot 3 = 3.$$

Câu 22: Biết phương trình $2\log_2 x + 3\log_x 2 = 7$ có hai nghiệm thực $x_1 < x_2$. Tính giá trị của biểu thức $T = (x_1)^{x_2}$

A. $T = 64$.

B. $T = 32$.

C. $T = 8$.

D. $T = 16$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } 2\log_2 x + 3\log_x 2 = 7 \Leftrightarrow 2\log_2 x + \frac{3}{\log_2 x} = 7$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ điều kiện là phương trình (2) có hai nghiệm $t_1, t_2 > 0$ thỏa mãn $t_1 t_2 = 2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 2^{x_1 + x_2} = 8$ suy ra $2m = 8 \Leftrightarrow m = 4$.

Câu 26: Tìm giá trị thực của m để phương trình $\log_3^2 x - m \log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 81$.

- A.** $m = -4$ **B.** $m = 44$ **C.** $m = 81$ **D.** $m = 4$

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \log_3 x$ ta được $t^2 - mt + 2m - 7 = 0$, tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm t_1, t_2

$$t_1 + t_2 = \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = \log_3 (x_1 x_2) = \log_3 81 = 4$$

Theo vi-et suy ra $t_1 + t_2 = m \Rightarrow m = 4$

Câu 27: Số nghiệm của phương trình $(x-2)[\log_{0.5}(x^2-5x+6)+1] = 0$ là

- A.** 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

$$\text{ĐKXĐ: } x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < 2 \end{cases}.$$

Kết hợp ĐKXĐ ta có:

$$(x-2)[\log_{0.5}(x^2-5x+6)+1] = 0 \Leftrightarrow \log_{0.5}(x^2-5x+6) = -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0, 5^{-1} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Đối chiếu với ĐKXĐ ta thấy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $9 - 7 = 2$

Câu 28: Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - x + 2) = 1$ là

- A.** $\{0\}$. **B.** $\{0; 1\}$. **C.** $\{-1; 0\}$. **D.** $\{1\}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \log_2(x^2 - x + 2) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Câu 29: Nghiệm của phương trình $\log(x-1) = 2$ là

- A.** 5. **B.** 21. **C.** 101. **D.** 1025.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện của phương trình là $x > 1$.

$$\log(x-1) = 2 \Leftrightarrow x-1 = 10^2 \Leftrightarrow x = 101.$$

Vậy $x = 101$ thỏa mãn điều kiện nên phương trình đã cho có nghiệm là $x = 101$.

Câu 30: Tập nghiệm của phương trình $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$ là:

A. $\{16\}$.

B. $\{\sqrt{2}\}$.

C. $\{4\}$.

D. $\{2\sqrt{2}\}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{4} \log_2 x = 7 \Leftrightarrow \frac{7}{4} \log_2 x = 7.$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 2^4 \Leftrightarrow x = 16.$$

Câu 31: Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^2-1} = 3^{2x+3}$ bằng

A. $-3 \log_2 3$.

B. $-\log_2 54$.

C. -4 .

D. $1 - \log_2 3$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } 2^{x^2-1} = 3^{2x+3} \Leftrightarrow x^2 - 1 = (2x+3) \log_2 3 \Leftrightarrow x^2 - 2 \log_2 3 \cdot x - 1 - 3 \log_2 3 = 0.$$

Vì $ac < 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và

$$x_1 x_2 = -1 - 3 \log_2 3 = -\log_2 2 - \log_2 27 = -\log_2 54.$$

Câu 32: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^x \cdot 5^{x^2-2x} = 1$. Khi đó tổng $x_1 + x_2$ bằng

A. $2 - \log_5 2$.

B. $-2 + \log_5 2$.

C. $2 + \log_5 2$.

D. $2 - \log_2 5$.

Lời giải

$$2^x \cdot 5^{x^2-2x} = 1 \Leftrightarrow \log_5 (2^x \cdot 5^{x^2-2x}) = 0 \Leftrightarrow x \log_5 2 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(\log_5 2 + x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 - \log_5 2 \end{cases}.$$

Câu 33: Phương trình $27^{\frac{x-1}{x}} \cdot 2^x = 72$ có một nghiệm viết dưới dạng $x = -\log_a b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính tổng $S = a + b$.

A. $S = 4$.

B. $S = 5$.

C. $S = 6$.

D. $S = 8$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x \neq 0$.

$$\text{Phương trình } 27^{\frac{x-1}{x}} \cdot 2^x = 72 \Leftrightarrow 3^{3\left(\frac{x-1}{x}\right)} \cdot 2^x = 3^2 \cdot 2^3 \Leftrightarrow \frac{3^{\frac{3x-3}{x}}}{3^2} = \frac{2^3}{2^x} \Leftrightarrow 3^{\frac{3x-3}{x}-2} = 2^{3-x}$$

$$\Leftrightarrow 3^{\frac{x-3}{x}} = 2^{3-x} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x} = \log_3 2^{3-x} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x} = -(x-3) \log_3 2 \Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{1}{x} + \log_3 2 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ -\log_3 2 = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3(N) \\ x = -\log_2 3(N) \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}. \text{ Vậy tổng } S = a + b = 5.$$

Câu 34: Tính tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_4 (3 \cdot 2^x - 1) = x - 1$

A. 2 .

B. 1 .

C. 5 .

D. -6 .

Lời giải

Chọn A

$$\log_4(3 \cdot 2^x - 1) = x - 1 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x - 1 = 4^{x-1} \Leftrightarrow 4^x - 12 \cdot 2^x + 4 = 0$$

$$\text{Đặt } t = 2^x (t > 0). \text{ Phương trình trở thành: } t^2 - 12t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 6 \pm 4\sqrt{2}$$

$$\text{Với } t = 6 + 4\sqrt{2} \Rightarrow 2^x = 6 + 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \log_2(6 + 4\sqrt{2}).$$

$$\text{Với } t = 6 - 4\sqrt{2} \Rightarrow 2^x = 6 - 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \log_2(6 - 4\sqrt{2}).$$

$$\text{Tổng các nghiệm là } \log_2(6 + 4\sqrt{2}) + \log_2(6 - 4\sqrt{2}) = \log_2 4 = 2.$$

Câu 35: Phương trình $\log_2(5 - 2^x) = 2 - x$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $P = x_1 + x_2 + x_1 x_2$.

A. 11.

B. 9.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } 2^x < 5$$

$$\log_2(5 - 2^x) = 2 - x \Leftrightarrow 5 - 2^x = 2^{2-x} \Leftrightarrow 5 - 2^x = \frac{4}{2^x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 2^x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 2$$

Câu 36: Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_6(3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x) = x + 1$ bằng

A. 4

B. 1

C. 0

D. 3

Lời giải

Chọn B

$$\text{Phương trình đã cho tương đương } 3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 6^{x+1} \Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 = 0$$

$$\text{Đặt } \left(\frac{2}{3}\right)^x = t, (t > 0). \text{ Khi đó ta có phương trình } 3t^2 - 6t + 2 = 0$$

Hiển nhiên phương trình có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 dương và thỏa mãn

$$t_1 t_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow x_1 + x_2 = 1.$$

Câu 37: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $4^x - (m+3) \cdot 2^{x+1} + m+9 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt: } t = 2^x (x > 0 \Rightarrow t > 1), \text{ phương trình đã cho trở thành: } t^2 - 2(m+3)t + m+9 = 0.$$

Bài toán trở thành: Tìm các giá trị nguyên của tham số m để phương trình:

$$t^2 - 2(m+3)t + m+9 = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } t_1, t_2 \text{ thỏa mãn } 1 < t_1 < t_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 5m > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) > 0 \\ \frac{S}{2} = m+3 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 + 5m > 0 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 > 0 (*) \\ \frac{S}{2} = m+3 > 1 \end{cases}$$

Phương trình: $t^2 - 2(m+3)t + m+9 = 0$ có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 nên theo Viet ta có:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+3) \\ t_1 \cdot t_2 = m+9 \end{cases}$$

$$\text{Thay vào hệ } (*) \text{ ta được } \begin{cases} m^2 + 5m > 0 \\ -m+4 > 0 \\ m+3 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -5 \\ m > 0 \\ m < 4 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4$$

$$\text{Vì } m \in \mathbb{Z}, 0 < m < 4 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\}.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 38: Cho phương trình $4^x - 2^{x+2} + m - 2 = 0$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $0 \leq x_1 < x_2$?

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

$$4^x - 2^{x+2} + m - 2 = 0 \Leftrightarrow 4^x - 4 \cdot 2^x + m - 2 = 0 (1). \text{ Đặt } t = 2^x (t > 0)$$

$$(1) \Leftrightarrow t^2 - 4t + m - 2 = 0 (2)$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 \leq x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow 2^0 \leq 2^{x_1} < 2^{x_2} \Leftrightarrow 1 \leq t_1 < t_2$$

Thì phương trình (2) thỏa: $0 \leq t_1 - 1 < t_2 - 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 > 2 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 4(m-2) > 0 \\ 4 > 2 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 6 \\ m \geq 5 \end{cases}. \text{ Vậy } m = 5 \text{ thỏa yêu cầu.}$$

Câu 39: Phương trình $(1+\sqrt{2})^x + (1-2a)(\sqrt{2}-1)^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{1+\sqrt{2}} 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right).$

B. $a \in \left(-\frac{3}{2}; 0\right).$

C. $a \in \left(0; \frac{3}{2}\right).$

D. $a \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right).$

Lời giải

Chọn B

Vì $(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)=1$. Đặt $t=(1+\sqrt{2})^x (t>0) \Rightarrow (\sqrt{2}-1)^x = \frac{1}{t}$

Phương trình trở thành: $t + \frac{1-2a}{t} - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 - 2t = 0 (1)$.

Để phương trình ban đầu có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm dương t_1, t_2 .

$$\begin{cases} \Delta' = 2a + 3 > 0 \\ t_1 + t_2 = 4 > 0 \\ t_1 t_2 = 1 - 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-3}{2} < a < \frac{1}{2}.$$

Và thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{1+\sqrt{2}} 3 \Leftrightarrow (1+\sqrt{2})^{x_1-x_2} = 3 \Leftrightarrow \frac{t_1}{t_2} = 3 \Leftrightarrow t_1 = 3t_2$.

$$\begin{cases} t_1 = 3t_2 \\ t_1 + t_2 = 4 \\ t_1 t_2 = 1 - 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \\ t_1 t_2 = 1 - 2a = 1.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

Vậy với $a = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 40: Cho phương trình $4^{x+1} - (8m+5)2^x + 2m+1 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = -1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** $m \in (1;3)$. **B.** $m \in (-5;-3)$. **C.** $m \in (-3;0)$. **D.** $m \in (0;1)$.

Lời giải

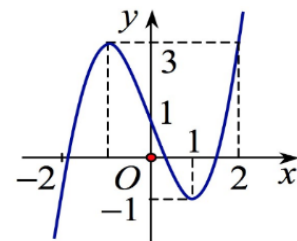
Chọn D

$$4^{x+1} - (8m+5)2^x + 2m+1 = 0 (*)$$

Đặt $t = 2^x$, điều kiện $t > 0$, phương trình (*) trở thành

$$4t^2 - (8m+5)t + 2m+1 = 0 \Leftrightarrow (4t-1)(t-2m-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{1}{4} \\ t_2 = 2m+1. \end{cases}$$



Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} 2m+1 > 0 \\ 2m+1 \neq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m \neq -\frac{3}{8} \end{cases} (**)$

Lại có $x_1 x_2 = -1 \Leftrightarrow \log_2 t_1 \cdot \log_2 t_2 = -1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{1}{4} \cdot \log_2 (2m+1) = -1 \Leftrightarrow \log_2 (2m+1) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 2m+1 = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Câu 41: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ thỏa mãn các điều kiện $\log_{x^2+y^2+2} (4x+4y-4) = 1$ và $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$. Tổng các giá trị của S bằng

- A.** 33. **B.** 24. **C.** 15. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $4x + 4y - 4 > 0$

Ta có
$$\begin{cases} \log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)=1 \\ x^2+y^2+2x-2y+2-m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x-4y+6=0 \\ x^2+y^2+2x-2y+2-m=0 \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất $(x; y)$

Với $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 6 = 0$ là phương trình đường tròn tâm $A(2; 2)$, bán kính $R_1 = \sqrt{2}$.

Với $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$ là phương trình đường tròn tâm $B(-1; 1)$, bán kính $R_2 = \sqrt{m}$ với $m > 0$.

Hai đường tròn có điểm chung duy nhất khi xảy ra các trường hợp sau:

Hai đường tròn tiếp xúc ngoài $AB = R_1 + R_2 \Leftrightarrow \sqrt{m} + \sqrt{2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = (\sqrt{10} - \sqrt{2})^2$.

Hai đường tròn tiếp xúc trong $AB = |R_1 - R_2| \Leftrightarrow \sqrt{m} - \sqrt{2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = (\sqrt{10} + \sqrt{2})^2$.

Vậy tổng các giá trị của tham số $m = (\sqrt{10} - \sqrt{2})^2 + (\sqrt{10} + \sqrt{2})^2 = 24$.

Câu 42: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x^2-4x+3|} = m^4 - m^2 + 1$ có 4 nghiệm phân biệt?

A. $0 < |m| < 1$.

B. $|m| < 1$.

C. $m > -1$.

D. $m < 0$.

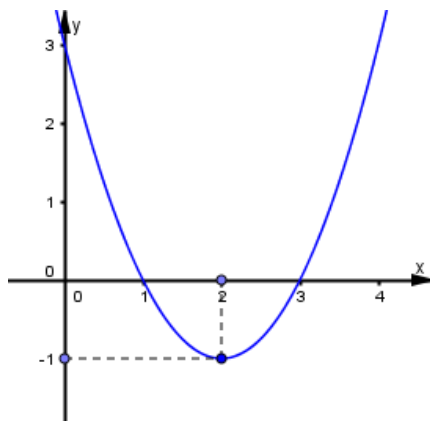
Lời giải

Chọn A

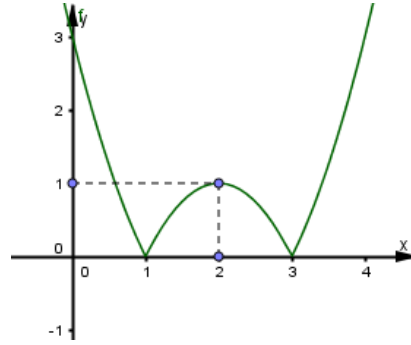
Vì $m^4 - m^2 + 1 > 0, \forall m$ nên phương trình tương đương với

$$|x^2 - 4x + 3| = \log_{\frac{1}{5}}(m^4 - m^2 + 1) \quad (1)$$

Vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y = x^2 - 4x + 3$



Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$0 < \log_{\frac{1}{5}}(m^4 - m^2 + 1) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5} < m^4 - m^2 + 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < |m| < 1.$$

Câu 43: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_4 x = \log_6 y = \log_9 (x + y)$. Giá trị của tỉ số $\frac{x}{y}$ bằng

- A. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \log_4 x = \log_6 y = \log_9 (x + y) = t \Rightarrow \begin{cases} x = 4^t \\ y = 6^t \\ x + y = 9^t \end{cases}.$$

$$\text{Mà } 4^t \cdot 9^t = (6^t)^2 \Rightarrow x(x + y) = y^2 \Leftrightarrow x^2 + xy - y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad (l) \\ \frac{x}{y} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad (t/m) \end{cases}.$$

Câu 44: Nghiệm của bất phương trình $3^{x+2} \geq \frac{1}{9}$ là

- A. $x \geq -4$. B. $x < 0$. C. $x > 0$. D. $x < 4$.

Lời giải

Chọn A

$$3^{x+2} \geq \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{x+2} \geq 3^{-2} \Leftrightarrow x+2 \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -4.$$

Câu 45: Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8$ là:

- A. $S = (-\infty; 3)$. B. $S = (1; +\infty)$.
C. $S = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. D. $S = (1; 3)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow x^2 - 4x > -3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 3.$$

Vậy $S = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Câu 46: Giải bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-4} \geq 1$ ta được tập nghiệm T . Tìm T .

A. $T = [-2; 2]$.

B. $T = [2; +\infty)$.

C. $T = (-\infty; -2]$.

D. $T = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-4} \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-2; 2]$

Vậy tập nghiệm $T = [-2; 2]$.

Câu 47: Bất phương trình $2^x > 4$ có tập nghiệm là:

A. $T = (2; +\infty)$.

B. $T = (0; 2)$.

C. $T = (-\infty; 2)$.

D. $T = \emptyset$.

Lời giải

Chọn A

$2^x > 4 \Leftrightarrow 2^x > 2^2 \Leftrightarrow x > 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $T = (2; +\infty)$.

Câu 48: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$.

A. $S = (3; 7]$.

B. $S = [3; 7]$.

C. $S = (-\infty; 7]$.

D. $S = [7; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4 \Leftrightarrow 0 < x-3 \leq 4 \Leftrightarrow 3 < x \leq 7$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (3; 7]$.

Câu 49: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2^{-x^2+3x} < 4$

A. $S = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

B. $S = (-\infty; 1)$.

C. $S = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

D. $S = (2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình tương đương với $2^{-x^2+3x} < 2^2 \Leftrightarrow -x^2 + 3x < 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 1 \end{cases}$.

Câu 50: Tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là

A. $S = (-\infty; 2)$.

B. $S = (-\infty; 1)$.

C. $S = (1; +\infty)$.

D. $S = (2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

$$5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x} \Leftrightarrow 5^{x+2} < (5)^{2x} \Leftrightarrow 2 < x.$$

Câu 51: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+4}$ là

- A.** $(0; 4)$. **B.** $(-\infty; 4)$. **C.** $(0; 16)$. **D.** $(4; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } 2^{2x} < 2^{x+4} \Leftrightarrow 2x < x+4 \Leftrightarrow x < 4.$$

Câu 52: Tập nghiệm của bất phương trình $\ln x^2 < 2 \ln(4x+4)$ là:

- A.** $\left(-\frac{4}{5}; +\infty\right)$. **B.** $(-1; +\infty) \setminus \{0\}$. **C.** $\left(-\frac{4}{5}; +\infty\right) \setminus \{0\}$. **D.** $\left(-\frac{4}{3}; +\infty\right) \setminus \{0\}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đk: } -1 < x \neq 0; \ln x^2 < 2 \ln(4x+4) \Leftrightarrow x^2 < (4x+4)^2 \Leftrightarrow 15x^2 + 32x + 16 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{4}{3} \\ x > -\frac{4}{5} \end{cases}.$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm } S = \left(-\frac{4}{5}; +\infty\right) \setminus \{0\}.$$

Câu 53: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x < \log_2(12-3x)$ là:

- A.** $(0; 6)$. **B.** $(3; +\infty)$. **C.** $(-\infty; 3)$. **D.** $(0; 3)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \log_2 x < \log_2(12-3x) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 12-3x \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 3.$$

Câu 54: Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x+5) > \log_2(x-1)$. Hỏi trong tập S có bao nhiêu phần tử là số nguyên dương bé hơn 10?

- A.** 9. **B.** 15. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x+5 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

$$\log_2(2x+5) > \log_2(x-1) \Leftrightarrow 2x+5 > x-1 \Leftrightarrow x > -6.$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình: } S = (1; +\infty).$$

Vậy trong tập S có 8 phần tử là số nguyên dương bé hơn 10.

Câu 55: Bất phương trình $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

- A.** 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x > -1$.

$$\log_4(x+7) > \log_2(x+1) \Leftrightarrow x+7 > x^2+2x+1$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-6 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 2.$$

Do điều kiện nên tập nghiệm của bất phương trình là $S = \{0, 1\}$.

Câu 56: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{e}{3}} 2x < \log_{\frac{e}{3}} (9-x)$ là

- A. $(3; +\infty)$. B. $(3; 9)$. C. $(-\infty; 3)$. D. $(0; 3)$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_{\frac{e}{3}} 2x < \log_{\frac{e}{3}} (9-x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 0 \\ 9-x > 0 \\ 2x > 9-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 9 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 9.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (3; 9)$.

Câu 57: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{4-\sqrt{3}} (9x-5) < \log_{4-\sqrt{3}} (3x+1)$ là

- A. $(1; +\infty)$. B. $\left(\frac{5}{9}; 1\right)$. C. $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$. D. $\left(-\frac{1}{3}; \frac{5}{9}\right)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 9x-5 > 0 \\ 3x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{9} \\ x > -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{5}{9}.$$

$$\text{Ta có: } \log_{4-\sqrt{3}} (9x-5) < \log_{4-\sqrt{3}} (3x+1) \Leftrightarrow 9x-5 < 3x+1 \Leftrightarrow x < 1.$$

Kết hợp với điều kiện, ta có tập nghiệm của phương trình là: $S = \left(\frac{5}{9}; 1\right)$.

Câu 58: Tập nghiệm của bất phương trình: $\log_2(x-3) + \log_2 x \geq 2$ là

- A. $(3; +\infty)$. B. $[4; +\infty)$. C. $(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$. D. $(3; 4]$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $x > 3$.

$$\log_2(x-3) + \log_2 x \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq -1 \end{cases}. \text{ Vậy tập nghiệm của bpt là } S = [4; +\infty).$$

Câu 59: Bất phương trình $2^{x^2-3x+4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

- A. 2. B. 4. C. 6. D. 3.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình tương đương với $2^{x^2-3x+4} \leq 2^{10-2x} \Leftrightarrow x^2-3x+4 \leq 10-2x \Leftrightarrow x^2-x-6 \leq 0$
 $\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$. Do $x > 0$ nên $0 < x \leq 3$.

Mà $x \in \mathbb{Z}^+$ nên $x \in \{1; 2; 3\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 60: Tập nghiệm của bất phương trình $(\sqrt[3]{5})^{x-1} < 5^{x+3}$ là:

- A.** $(-\infty; -5)$. **B.** $(-\infty; 0)$. **C.** $(-5; +\infty)$. **D.** $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(\sqrt[3]{5})^{x-1} < 5^{x+3} \Leftrightarrow 5^{\frac{x-1}{3}} < 5^{x+3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} < x+3 \Leftrightarrow x-1 < 3x+9 \Leftrightarrow x > -5$.

Câu 61: Tập nghiệm của bất phương trình $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \leq (\sqrt{5}-2)^{x-1}$ là

- A.** $S = (-\infty; 1]$. **B.** $S = [1; +\infty)$. **C.** $S = (-\infty; 1)$. **D.** $S = (1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$(\sqrt{5}+2)^{x-1} \leq (\sqrt{5}-2)^{x-1} \Leftrightarrow (\sqrt{5}+2)^{x-1} \leq (\sqrt{5}+2)^{-x+1} \Leftrightarrow x-1 \leq -x+1 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Vậy $S = (-\infty; 1]$.

Câu 62: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 3^{x+1}$ là:

- A.** $\emptyset$. **B.** $\left(-\infty; \log_2 \frac{3}{2}\right)$. **C.** $(-\infty; \log_2 3]$. **D.** $\left(\log_2 \frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: $2^x > 3^{x+1} \Leftrightarrow x > \log_2(3^{x+1}) \Leftrightarrow x > (x+1)\log_2 3 \Leftrightarrow x(1-\log_2 3) > \log_2 3$

$\Leftrightarrow x \log_2 \frac{2}{3} > \log_2 3 \Leftrightarrow x < \frac{\log_2 3}{\log_2 \frac{2}{3}} \Leftrightarrow x < \log_2 \frac{3}{2}$.

Cách 2: $2^x > 3^{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 3 \Leftrightarrow x < \log_2 \frac{3}{2}$.

Câu 63: Giải bất phương trình $3^{x^2} < 2^x$

- A.** $x \in (0; +\infty)$. **B.** $x \in (0; \log_2 3)$. **C.** $x \in (0; \log_3 2)$. **D.** $x \in (0; 1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3^{x^2} < 2^x \Leftrightarrow \log_3 3^{x^2} < \log_3 2^x \Leftrightarrow x^2 - x \log_3 2 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \log_3 2$.

Câu 64: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 3^{x+1}$ là

- A. $\emptyset$. B. $\left(-\infty; \log_2 \frac{3}{2}\right)$. C. $(-\infty; \log_2 3]$. D. $\left(\log_2 \frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: $2^x > 3^{x+1} \Leftrightarrow x > \log_2(3^{x+1}) \Leftrightarrow x > (x+1)\log_2 3 \Leftrightarrow x(1-\log_2 3) > \log_2 3$
 $\Leftrightarrow x \log_2 \frac{2}{3} > \log_2 3 \Leftrightarrow x < \frac{\log_2 3}{\log_2 \frac{2}{3}} \Leftrightarrow x < \log_2 \frac{3}{2}$.

Cách 2: $2^x > 3^{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 3 \Leftrightarrow x < \log_2 \frac{3}{2}$.

Câu 65: Cho hàm số $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 5^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x^2 + x \log_2 5 > 0$. B. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x - x^2 \log_2 5 < 0$.
 C. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x^2 - x \log_5 2 > 0$. D. $f(x) > 1 \Leftrightarrow -x \ln 2 + x^2 \ln 5 > 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x) > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 5^{x^2} > 1 \Leftrightarrow \log_2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot 5^{x^2} \right] > 0$
 $\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^x + \log_2 5^{x^2} > 0 \Leftrightarrow -x + x^2 \log_2 5 > 0$ nên phương án A sai.

Câu 66: Giải bất phương trình $\log_3(2x-1) > 3$

- A. $x > 4$. B. $x > 14$ C. $x < 2$. D. $2 < x < 14$.

Lời giải

Chọn B

$\log_3(2x-1) > 3 \Leftrightarrow 2x-1 > 3^3 \Leftrightarrow x > 14$.

Câu 67: Giải bất phương trình $\log_3(2x-1) < 2$ ta được nghiệm là

- A. $\frac{1}{2} < x < 5$. B. $x > \frac{1}{5}$. C. $x < 5$. D. $x > 5$.

Lời giải

Chọn A

$\log_3(2x-1) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ 2x-1 < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < 5 \end{cases}$.

Câu 68: Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(1-x) < 0$?

- A. $x = 0$. B. $x < 0$. C. $x > 0$. D. $-1 < x < 0$.

Lời giải

Chọn B

$$\log_{\frac{1}{2}}(1-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x > 0 \\ 1-x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0.$$

Câu 69: Các giá trị x thỏa mãn bất phương trình $\log_2(3x-1) > 3$ là:

- A. $x > 3$. B. $\frac{1}{3} < x < 3$. C. $x < 3$. D. $x > \frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \log_2(3x-1) > 3 \Leftrightarrow 3x-1 > 8 \Leftrightarrow x > 3.$$

Câu 70: Bất phương trình $\log_{0,5}(2x-1) \geq 0$ có tập nghiệm là?

- A. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ C. $(1; +\infty)$ D. $\left(\frac{1}{2}; 1\right]$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } 2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

$$\log_{0,5}(2x-1) \geq 0 \Leftrightarrow 2x-1 \leq 0,5^0 \Leftrightarrow 2x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

$$\text{So sánh với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là } S = \left(\frac{1}{2}; 1\right].$$

Câu 71: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2(9-x) \leq 3$.

- A. 7. B. 6. C. 8. D. 9.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \log_2(9-x) \leq 3 \Leftrightarrow 0 < 9-x \leq 8 \Leftrightarrow 1 \leq x < 9. \text{ Vì } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}.$$

Vậy có 8 nghiệm nguyên.

Câu 72: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) < 3$ là:

- A. $(-\infty; 10)$. B. $(1; 9)$. C. $(1; 10)$. D. $(-\infty; 9)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện: } x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$

$$\text{Ta có: } \log_2(x-1) < 3 \Rightarrow x-1 < 8 \Leftrightarrow x < 9.$$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(1; 9)$.

Câu 73: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x^2+2) \leq 3$ là:

- A. $S = (-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$. B. $S = \emptyset$.
C. $S = \mathbb{R}$. D. $P = [-5; 5]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_3(x^2 + 2) \leq 3 \Leftrightarrow x^2 + 2 \leq 27 \Leftrightarrow x^2 \leq 25 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$.

Câu 74: Số nghiệm thực nguyên của bất phương trình $\log(2x^2 - 11x + 15) \leq 1$ là

- A.** 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

ĐK: $2x^2 - 11x + 15 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2}$ hoặc $x > 3$.

$\log(2x^2 - 11x + 15) \leq 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 15 \leq 10 \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 5 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 5$.

Kết hợp điều kiện ta có: $\frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{2}$ hoặc $3 < x \leq 5$. Vậy BPT có 4 nghiệm nguyên là:
 $x \in \{1; 2; 4; 5\}$.

Câu 75: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{x-1} > 2$.

- A.** $S = (1; 1 + \sqrt{2})$. **B.** $S = (1; 9)$. **C.** $S = (1 + \sqrt{2}; +\infty)$. **D.** $S = (9; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{x-1} > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ \frac{2}{x-1} < \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x-1 < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 9 \end{cases}$.

Câu 76: Bất phương trình $\max \left\{ \log_3 x, \log_{\frac{1}{2}} x \right\} < 3$ có tập nghiệm là

- A.** $(-\infty; 27)$. **B.** $(8; 27)$. **C.** $\left(\frac{1}{8}; 27\right)$. **D.** $(27; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$.

$\max \left\{ \log_3 x, \log_{\frac{1}{2}} x \right\} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x < 3 \\ \log_{\frac{1}{2}} x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 27 \\ x > \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{8} < x < 27$.

Vậy tập nghiệm của BPT là: $\left(\frac{1}{8}; 27\right)$.

Câu 77: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2(x^2 - 1)) \leq -1$ là:

- A.** $S = [1; \sqrt{5}]$. **B.** $S = (-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty)$.
C. $S = [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$. **D.** $S = [-\sqrt{5}; -1) \cup (1; \sqrt{5}]$.

Lời giải

Chọn B

$$* \text{ ĐKXĐ: } \begin{cases} \log_2(x^2 - 1) > 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 1 > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty).$$

$$\text{Bất phương trình } \log_{\frac{1}{2}}(\log_2(x^2 - 1)) \leq -1 \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \Leftrightarrow (x^2 - 1) \geq 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq 5 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty).$$

$$* \text{ Kết hợp điều kiện ta được: } x \in (-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty).$$

Câu 78: Cho phương trình $3^{2x+10} - 6 \cdot 3^{x+4} - 2 < 0$ (1). Nếu đặt $t = 3^{x+5}$ ($t > 0$) thì (1) trở thành phương trình nào?

A. $9t^2 - 6t - 2 < 0$. **B.** $t^2 - 2t - 2 < 0$. **C.** $t^2 - 18t - 2 < 0$. **D.** $9t^2 - 2t - 2 < 0$.

Lời giải.

Chọn B

$$3^{2x+10} - 6 \cdot 3^{x+4} - 2 < 0 \Leftrightarrow 3^{2(x+5)} - 2 \cdot 3^{x+5} - 2 < 0$$

Vậy khi đặt $t = 3^{x+5}$ ($t > 0$) thì (1) trở thành phương trình $t^2 - 2t - 2 < 0$.

Câu 79: Cho phương trình $25^{x+1} - 26 \cdot 5^x + 1 > 0$. Đặt $t = 5^x$, $t > 0$ thì phương trình trở thành

A. $t^2 - 26t + 1 > 0$. **B.** $25t^2 - 26t > 0$. **C.** $25t^2 - 26t + 1 > 0$. **D.** $t^2 - 26t > 0$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } 25^{x+1} - 26 \cdot 5^x + 1 > 0 \Leftrightarrow 25 \cdot 5^{2x} - 26 \cdot 5^x + 1 > 0.$$

Vậy nếu đặt $t = 5^x$, $t > 0$ thì phương trình trên trở thành $25t^2 - 26t + 1 > 0$.

Câu 80: Xét bất phương trình $5^{2x} - 3 \cdot 5^{x+2} + 32 < 0$. Nếu đặt $t = 5^x$ thì bất phương trình trở thành bất phương trình nào sau đây?

A. $t^2 - 3t + 32 < 0$. **B.** $t^2 - 16t + 32 < 0$. **C.** $t^2 - 6t + 32 < 0$. **D.** $t^2 - 75t + 32 < 0$.

Lời giải

Chọn D

$$5^{2x} - 3 \cdot 5^{x+2} + 32 < 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 3 \cdot 5^2 \cdot 5^x + 32 < 0 \Leftrightarrow 5^{2x} - 75 \cdot 5^x + 32 < 0.$$

Nếu đặt $t = 5^x > 0$ thì bất phương trình trở thành bất phương trình $t^2 - 75t + 32 < 0$.

Câu 81: Cho phương trình $4^{x^2-2x} + 2^{x^2-2x+3} - 3 \geq 0$. Khi đặt $t = 2^{x^2-2x}$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $t^2 + 8t - 3 \geq 0$. **B.** $2t^2 - 3 \geq 0$. **C.** $t^2 + 2t - 3 \geq 0$. **D.** $4t - 3 \geq 0$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình } 4^{x^2-2x} + 2^{x^2-2x+3} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \left(2^{x^2-2x}\right)^2 + 2^3 \cdot 2^{x^2-2x} - 3 \geq 0.$$

Kho đó, đặt $t = 2^{x^2-2x}$, ta được phương trình $t^2 + 8t - 3 \geq 0$.

Câu 82: Khi đặt $t = \log_5 x$ thì bất phương trình $\log_5^2(5x) - 3\log_{\sqrt{5}} x - 5 \leq 0$ trở thành bất phương trình nào sau đây?

- A.** $t^2 - 6t - 4 \leq 0$. **B.** $t^2 - 6t - 5 \leq 0$. **C.** $t^2 - 4t - 4 \leq 0$. **D.** $t^2 - 3t - 5 \leq 0$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_5^2(5x) - 3\log_{\sqrt{5}} x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow (\log_5 x + 1)^2 - 6\log_5 x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow \log_5^2 x - 4\log_5 x - 4 \leq 0.$$

Với $t = \log_5 x$ bất phương trình trở thành: $t^2 - 4t - 4 \leq 0$.

Câu 83: Bất phương trình $\log^2 x - 2019 \log x + 2018 \leq 0$ có tập nghiệm là

- A.** $S = [10; 10^{2018}]$. **B.** $S = [10; 10^{2018})$. **C.** $S = [1; 2018]$. **D.** $S = (10; 10^{2018})$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có $\log^2 x - 2019 \log x + 2018 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq \log x \leq 2018 \Leftrightarrow 10 \leq x \leq 10^{2018}$.

Kết hợp với điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = [10; 10^{2018}]$.

Câu 84: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2^2 x - 8 \log_2 \sqrt{x} + 3 < 0$

- A.** 5. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$.

$$\log_2^2 x - 8 \log_2 \sqrt{x} + 3 < 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 8 \log_2 x^{\frac{1}{2}} + 3 < 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 4 \log_2 x + 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < \log_2 x < 3 \Leftrightarrow 2 < x < 8. \text{ So với điều kiện ta được } 2 < x < 8.$$

Câu 85: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2^2 x - 5 \log_2 x + 4 \geq 0$

- A.** $S = (-\infty; 2] \cup [16; +\infty)$. **B.** $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$.
C. $S = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$. **D.** $S = [2; 16]$.

Lời giải

Chọn B

ĐK: $x > 0$

Đặt $t = \log_2 x$, $t \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình tương đương $t^2 - 5t + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ t \geq 4 \end{cases}$.

- $\log_2 x \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x \leq 2$.
- $\log_2 x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 16$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S = (0; 2] \cup [16; +\infty)$.

Câu 86: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $3^x + 9 \cdot 3^{-x} < 10$ là

- A.** Vô số. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 3^x$ ($t > 0$), bất phương trình có dạng $t + \frac{9}{t} < 10 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 9 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 9$.

Khi đó $1 < 3^x < 9 \Leftrightarrow 0 < x < 2$. Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $x = 1$.

Câu 87: Tập nghiệm của bất phương trình $16^x - 5 \cdot 4^x + 4 \geq 0$ là:

A. $T = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

B. $T = (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

C. $T = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

D. $T = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 4^x$, $t > 0$.

$$16^x - 5 \cdot 4^x + 4 \geq 0 \text{ trở thành } t^2 - 5t + 4 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 4 \\ t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 4 \\ 0 < t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x \geq 4 \\ 0 < 4^x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 0 \end{cases}.$$

Vậy $T = (-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.

Câu 88: Biết $S = [a; b]$ là tập nghiệm của bất phương trình $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 \leq 0$. Tìm $T = b - a$.

A. $T = \frac{8}{3}$.

B. $T = 1$.

C. $T = \frac{10}{3}$.

D. $T = 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } 3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (3^x)^2 - 10 \cdot 3^x + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq 3^x \leq 3 \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{3} \leq x \leq \log_3 3$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1. \text{ Khi đó bất phương trình có tập nghiệm là } S = [-1; 1], \text{ do vậy } T = 1 - (-1) = 2.$$

Câu 89: Nghiệm của bất phương trình $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{1+\sqrt{x}} + 5^{\sqrt{x}}$ là.

A. $0 \leq x \leq 1$.

B. $0 < x < 1$.

C. $0 < x \leq 1$.

D. $0 \leq x < 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{1+\sqrt{x}} + 5^{\sqrt{x}}$.

$$\Rightarrow (5^{\sqrt{x}})^2 - 6 \cdot 5^{\sqrt{x}} + 5 < 0 \Rightarrow \begin{cases} 5^{\sqrt{x}} < 5 \\ 5^{\sqrt{x}} > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

Câu 90: Bất phương trình $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x < 0$ có nghiệm là:

A. $1 < x < 2$.

B. $\frac{9}{16} < x < \frac{3}{4}$.

C. $x < 1$ hoặc $x > 2$.

D. Vô nghiệm.

Lời giải

Chọn A

$$64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x < 0 \Leftrightarrow 27 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 84 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x + 64 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

Câu 91: Tìm tất cả giá trị của m để bất phương trình $9^x - 2(m+1)3^x - 3 - 2m > 0$ nghiệm đúng với mọi số thực x .

- A. $m \in (-5 - 2\sqrt{3}; -5 + 2\sqrt{3})$.
 B. $m < -\frac{3}{2}$.
 C. $m \leq -\frac{3}{2}$.
 D. $m \neq 2$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 3^x$, $t > 0$. Khi đó, bất phương trình trở thành:

$$t^2 - 2(m+1)t - 3 - 2m > 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-3-2m) > 0 \Leftrightarrow t-3-2m > 0 \Leftrightarrow t > 3+2m \quad (1) \quad (\text{Do } t > 0).$$

Để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì (1) phải nghiệm đúng với mọi $t \in (0; +\infty)$.

$$\text{Điều này tương đương với } 3+2m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{2}.$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $m \leq -\frac{3}{2}$.

Câu 92: Cho Hàm số $f(x) = \frac{3^{x-2}}{7^{x^2-4}}$. Hỏi mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $f(x) > 1 \Leftrightarrow (x-2)\log 3 - (x^2-4)\log 7 > 0$.
 B. $f(x) > 1 \Leftrightarrow (x-2)\log_{0,3} 3 - (x^2-4)\log_{0,3} 7 > 0$.
 C. $f(x) > 1 \Leftrightarrow (x-2)\ln 3 - (x^2-4)\ln 7 > 0$.
 D. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x-2 - (x^2-4)\log_3 7 > 0$.

Lời giải

Chọn B

$$f(x) > 1 \Leftrightarrow \frac{3^{x-2}}{7^{x^2-4}} > 1 \Leftrightarrow \log_{0,3} \frac{3^{x-2}}{7^{x^2-4}} < \log_{0,3} 1 \Leftrightarrow (x-2)\log_{0,3} 3 - (x^2-4)\log_{0,3} 7 < 0.$$

Câu 93: Biết tập nghiệm của bất phương trình $3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \geq \frac{1}{3^x}$ là một đoạn $[a; b]$ ta có $a+b$ bằng:

- A. $a+b=11$.
 B. $a+b=9$.
 C. $a+b=12$.
 D. $a+b=10$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } x^2 + 5x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq -6$$

$$\text{Ta có: } 3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \geq \frac{1}{3^x} \Leftrightarrow 3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}} \geq 3^{-x} \Leftrightarrow 2-\sqrt{x^2+5x-6} \geq -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x-6} \leq x+2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x - 6 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \\ x^2 + 5x - 6 \leq x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -6 \vee x \geq 1 \\ x \geq -2 \\ x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; 10]$$

Vậy $a+b=11$

Câu 94: Cho bất phương trình $25^x + 15^x - 2 \cdot 9^x \leq m \cdot 3^x (5^x - 3^x)$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[0; 1]$ là

- A.** $m \leq \frac{11}{2}$. **B.** $m > \frac{11}{2}$. **C.** $m < \frac{11}{3}$. **D.** $m \geq \frac{11}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Chia hai vế của bất phương trình cho 3^{2x} ($3^x > 0$), ta được $\left(\frac{5}{3}\right)^{2x} + (1-m)\left(\frac{5}{3}\right)^x + m - 2 \leq 0$

Đặt $\left(\frac{5}{3}\right)^x = t$.

Với $x \in [0; 1] \Rightarrow t \in \left[1; \frac{5}{3}\right]$, ta có bất phương trình bậc hai $t^2 + (1-m)t + m - 2 \leq 0$

Bài toán trở thành tìm m để bất phương trình: $t^2 + (1-m)t + m - 2 \leq 0, \forall t \in \left[1; \frac{5}{3}\right]$

$$t^2 + (1-m)t + m - 2 \leq 0, \forall t \in \left[1; \frac{5}{3}\right] \Leftrightarrow (t-1)(t+2-m) \leq 0, \forall t \in \left[1; \frac{5}{3}\right] (*)$$

Vì $t-1 \geq 0, \forall t \in \left[1; \frac{5}{3}\right]$, nên $(*) \Leftrightarrow t+2-m \leq 0, \forall t \in \left[1; \frac{5}{3}\right] \Leftrightarrow \frac{5}{3} + 2 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{11}{3}$

Câu 95: Giả sử phương trình $\log_2^2 x - (m+2)\log_2 x + 2m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 6$. Giá trị của biểu thức $|x_1 - x_2|$ là

- A.** 3. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \log_2 x$.

Khi đó phương trình đã cho có dạng: $t^2 - (m+2)t + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=2^m \end{cases}$

Do $x_1 + x_2 = 6 \Leftrightarrow 4 + 2^m = 6 \Leftrightarrow m = 1$. Vậy $|x_1 - x_2| = |4 - 2^1| = 2$.

Câu 96: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[0; 2019]$ của tham số m để phương trình $4^x - (m+2018)2^x + (2019+3m) = 0$ có hai nghiệm trái dấu?

- A.** 2016 **B.** 2019. **C.** 2013 **D.** 2018.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4^x + (m-1)2^x + (4+3m) = 0$ (1).

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 + (m-1)t + 4 + 3m = 0$ (2)

Phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa

$$0 < t_1 < 1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(1) < 0 \\ af(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 2013$$

Vì $m \in \mathbb{Z}, m \in [0; 2019]$ suy ra $m \in \{0; 1; 2; \dots; 2012\}$

Câu 97: Giả sử phương trình $\log_2^2(2x) - 3\log_2 x - 2 = 0$ có một nghiệm dạng $x = 2^{\frac{a+\sqrt{b}}{c}}$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ và $b < 20$. Tính tổng $a + b + c^2$.

A. 10.

B. 11.

C. 18.

D. 27.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x > 0$.

Ta có:

$$\begin{aligned} \log_2^2(2x) - 3\log_2 x - 2 = 0 &\Leftrightarrow (1 + \log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \log_2^2 x - \log_2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \log_2 x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ x = 2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy: $a = 1; b = 5; c = 2 \Rightarrow a + b + c^2 = 10$.

Câu 98: Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\log^2|\cos x| - m\log \cos^2 x - m^2 + 4 = 0$ vô nghiệm.

A. $m \in (\sqrt{2}; 2)$.

B. $m \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

C. $m \in (-\sqrt{2}; 2)$.

D. $m \in (-2; \sqrt{2})$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log^2|\cos x| - m\log \cos^2 x - m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \log^2|\cos x| - 2m\log|\cos x| - m^2 + 4 = 0$

Đặt $\log|\cos x| = t$. Điều kiện: $t \leq 0$

Khi đó phương trình trở thành: $t^2 - 2mt - m^2 + 4 = 0, t \leq 0$.

Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình vô nghiệm hoặc có các nghiệm đều dương. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \begin{cases} \Delta' < 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1, t_2 > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \cdot (-m^2 + 4) < 0 \\ m^2 - 1 \cdot (-m^2 + 4) \geq 0 \\ \frac{2m}{1} > 0 \\ \frac{-m^2 + 4}{1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - 4 < 0 \\ 2m^2 - 4 \geq 0 \\ 2m > 0 \\ -m^2 + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \\ m \geq \sqrt{2} \\ -2 < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < 2 \end{aligned}$$

Câu 99: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m \cdot 4^{x-1} + 5m^2 - 44 = 0$ có hai nghiệm đối nhau. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$16^x - m.4^{x-1} + 5m^2 - 44 = 0 \Leftrightarrow (4^x)^2 - \frac{m}{4}.4^x + 5m^2 - 44 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(4^x)^2 - m.4^x + 20m^2 - 176 = 0, (1).$$

Đặt $t = 4^x$ điều kiện $t > 0$ từ (1) ta có $4t^2 - m.t + 20m^2 - 176 = 0, (*)$.

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm đối nhau $x_1; x_2$ thì $x_1 + x_2 = 0$ khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm dương $t_1; t_2$ thỏa mãn $t_1.t_2 = 1$. Nhưng vì phương trình (*) có

$$\frac{c}{a} = -\frac{176}{4} = -44 < 0 \text{ nên không có giá trị nào của } m \text{ thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$$

Câu 100: Cho phương trình $9^x - 2(2m+1)3^x + 3(4m-1) = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 12$. Giá trị của m thuộc khoảng

- A.** $(9; +\infty)$. **B.** $(3; 9)$. **C.** $(-2; 0)$. **D.** $(1; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 3^x, t > 0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 2(2m+1)t + 3(4m-1) = 0$

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 8m + 4 > 0 \\ 2(2m+1) > 0 \\ 3(4m-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > -\frac{1}{2} \\ m > \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm là $t = 4m - 1$ và $t = 3$.

Với $t = 4m - 1$ thì $3^{x_1} = 4m - 1 \Leftrightarrow x_1 = \log_3(4m - 1)$.

Với $t = 3$ thì $3^{x_2} = 3 \Leftrightarrow x_2 = 1$.

Ta có $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 12 \Leftrightarrow x_1 = 2 \Leftrightarrow \log_3(4m - 1) = 2 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m = \frac{5}{2}$ nên m thuộc khoảng $(1; 3)$.

Câu 101: Cho phương trình $(m-5).3^x + (2m-2).2^x.\sqrt{3^x} + (1-m).4^x = 0$, tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tính $S = a + b$.

- A.** $S = 4$. **B.** $S = 5$. **C.** $S = 6$. **D.** $S = 8$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(m-5).3^x + (2m-2).2^x.\sqrt{3^x} + (1-m).4^x = 0 (1)$

$$\Leftrightarrow (m-5) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x + (2m-2) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x + 1 - m = 0. \text{ Đặt } t = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x, \text{ điều kiện } t > 0.$$

Khi đó phương trình trở thành: $(m-5)t^2 + (2m-2)t + 1 - m = 0, (2).$

Do đó để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm dương

$$\text{phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 5 \\ m > 3 \\ m < 1 \\ 1 < m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 5 \Leftrightarrow m \in (3; 5).$$

Vậy $a = 3, b = 5$ nên $a + b = 8$.

Câu 102: Cho phương trình $\log_3^2 x - 4\log_3 x + m - 3 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ thỏa mãn $x_2 - 81x_1 < 0$.

- A.** 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình: $\log_3^2 x - 4\log_3 x + m - 3 = 0$ (1). Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_3 x$ phương trình (1) trở thành: $t^2 - 4t + m - 3 = 0$ (2).

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m + 3 > 0 \Leftrightarrow m < 7 \text{ (i)}.$$

Gọi $x_1 < x_2$ là 2 nghiệm của phương trình (1) thì phương trình (2) có 2 nghiệm tương ứng là $t_1 = \log_3 x_1; t_2 = \log_3 x_2$. Vì $x_1 < x_2$ nên $t_1 < t_2$.

$$\text{Mặt khác, } x_2 - 81x_1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x_2 < 81x_1 \Leftrightarrow \log_3 x_2 < 4 + \log_3 x_1$$

$$\Leftrightarrow t_2 < 4 + t_1 \Leftrightarrow 0 < t_2 - t_1 < 4 \Leftrightarrow (t_2 - t_1)^2 < 16 \Leftrightarrow (t_2 + t_1)^2 - 4t_1 t_2 < 16.$$

$$\Leftrightarrow 4^2 - 4(m-3) < 16 \Leftrightarrow m > 3 \text{ (ii)}.$$

Từ (i) và (ii) suy ra $3 < m < 7$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 3 số nguyên thỏa mãn.

Câu 103: Phương trình $(2 + \sqrt{3})^x + (1 - 2a) \cdot (2 - \sqrt{3})^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$. Khi đó a thuộc khoảng

- A.** $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **D.** $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } (2 + \sqrt{3})^x = t, t > 0 \text{ khi đó } (2 - \sqrt{3})^x = \frac{1}{t}.$$

Nhận xét: Với cách đặt đó thì $(2+\sqrt{3})^{x_1} = t_1$, $(2+\sqrt{3})^{x_2} = t_2$ nên từ $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$, ta có $(2+\sqrt{3})^{x_1-x_2} = 3$ hay $\frac{t_1}{t_2} = 3 \Leftrightarrow t_1 = 3t_2$.

Vậy bài toán đã cho tương đương với bài toán tìm a để phương trình $t + (1-2a) \cdot \frac{1}{t} - 4 = 0$ (*) có hai nghiệm dương t_1, t_2 thỏa mãn nghiệm này gấp 3 lần nghiệm kia.

Ta thấy: (*) $\Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 - 2a = 0$.

Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt khi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - (1-2a) > 0 \\ 1 - 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{-3}{2} \\ a < \frac{1}{2} \end{cases} (**).$

Cách 1: Nhận xét rằng phương trình ẩn t có tổng hai nghiệm bằng 4 mà nghiệm này gấp 3 nghiệm kia nên phương trình phải có 1 nghiệm bằng 1 và 1 nghiệm bằng 3, từ đó $1 - 2a = 3 \Leftrightarrow a = -1$.

Cách 2: Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} t_1 + t_2 = 4 \\ t_1 t_2 = 1 - 2a \end{cases}$.

Phương trình (*) có nghiệm này gấp 3 lần nghiệm kia khi

$$\begin{cases} t_1 = 3t_2 \\ t_2 = 3t_1 \end{cases} \Leftrightarrow (t_1 - 3t_2) \cdot (t_2 - 3t_1) = 0 \Leftrightarrow -3(t_1^2 + t_2^2) + 10t_1 t_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3(t_1 + t_2)^2 + 6t_1 t_2 + 10t_1 t_2 = 0 \Leftrightarrow -48 + 16(1 - 2a) = 0 \Leftrightarrow a = -1 \text{ thỏa mãn điều kiện (**).}$$

Giá trị này của a thuộc đáp án D

Cách 3. Dựa vào điều kiện có 2 nghiệm dương loại đáp án A, suy luận nếu a thuộc đáp án B, C thì cũng thuộc đáp án D

Câu 104: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $m \cdot 3^{x^2-3x+2} + 3^{4-x^2} = 3^{6-3x} + m$ (1) có đúng 3 nghiệm phân biệt.

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $3^{4-x^2} = v > 0$, $3^{6-3x} = u > 0$ phương trình trở thành $m \frac{u}{v} + v = u + m \Leftrightarrow m \left(\frac{u-v}{v} \right) = (u-v)$

$$\Leftrightarrow (u-v)(m-v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = u \\ v = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{6-3x} = 3^{4-x^2} & (I) \\ 3^{4-x^2} = m & (II) \end{cases}$$

$$\text{Giải (I): } 3^{6-3x} = 3^{4-x^2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình (II) xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Phương trình (II) có 2 nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm $x = 1$ và một nghiệm $x \neq 2$. Với $x = 1$ ta có $m = 3^{4-1^2} = 27$. Khi đó $3^{4-x^2} = 27 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \neq 2 \end{cases}$.

Vậy $m = 27$ là một giá trị cần tìm.

Trường hợp 2: Phương trình (II) có 2 nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm $x = 2$ và một nghiệm $x \neq 1$. Với $x = 2$ ta có $m = 3^{4-2^2} = 1$. Khi đó $3^{4-x^2} = 1 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \neq 1 \end{cases}$.

Vậy $m = 1$ là một giá trị cần tìm.

Trường hợp 3: Phương trình (II) có đúng 1 nghiệm x khác 1;2

Từ $3^{4-x^2} = m \Leftrightarrow x^2 = 4 - \log_3 m \geq 0$ để có một nghiệm thì nghiệm đó là $x = 0 \Rightarrow 4 - \log_3 m = 0 \Leftrightarrow m = 81$, đồng thời $x = 0$ thỏa mãn khác 1;2 nên $m = 81$ là một giá trị cần tìm.

Vậy có ba giá trị $m = 1$; $m = 27$; $m = 81$ thỏa mãn bài toán.

Câu 105: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để **không** tồn tại bộ số thực (x, y) nào thỏa mãn đồng thời các hệ thức $x^2 + (y-2)^2 \leq 9$ và $\log_{x^2+y^2+1}(2mx+2y+m-2) \geq 1$. Số phần tử của S là:

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

Miền biểu diễn $x^2 + (y-2)^2 \leq 9$ là hình tròn (C) có tâm $I(0,2)$ và bán kính $R = 3$

$$\log_{x^2+y^2+1}(2mx+2y+m-2) \geq 1 \Leftrightarrow 2mx+2y+m-2 \geq x^2+y^2+1$$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2 + (y-1)^2 \leq m^2 + m - 2.$$

Miền biểu diễn $(x-m)^2 + (y-1)^2 \leq m^2 + m - 2$ là hình tròn (C') có tâm $I'(m,1)$ và bán kính $R' = \sqrt{m^2 + m - 2}$

Để tồn tại bộ số thực (x, y) thỏa mãn bài toán thì:

$$\begin{cases} m^2 + m - 2 < 0 \\ II' > R + R' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 1 \\ \sqrt{m^2 + 1} > 3 + \sqrt{m^2 + m - 2} \text{ (VN)} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-1; 0\}.$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

A. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Rút gọn biểu thức $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}} \cdot (\sqrt{3})^5$, ta được

- A. $\sqrt{3}$. B. $3\sqrt{3}$. C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. 9.

Lời giải

Chọn D

$$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}} (\sqrt{3})^5 = [(3)^{-1}]^{2 \cdot \frac{1}{4}} \cdot \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^5 = 3^{-\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{5}{2}} = 3^2 = 9$$

Câu 2: Nếu $2^a = 9$ thì $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{a}{8}}$ có giá trị bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. 3. C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{a}{8}} = (2^{-4})^{\frac{a}{8}} = 2^{-\frac{a}{2}} = (2^a)^{-\frac{1}{2}} = 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Câu 3: Nếu $a^{\frac{1}{2}} = b$ ($a > 0, a \neq 1$) thì

- A. $\log_{\frac{1}{2}} a = b$. B. $2 \log_a b = 1$. C. $\log_a \frac{1}{2} = b$. D. $\log_{\frac{1}{2}} b = a$.

Lời giải

Chọn B

Câu 4: Nếu $x = \log_3 a + \log_9 4$ thì 3^x có giá trị bằng

- A. 6. B. 8. C. 16. D. 64.

Lời giải

Chọn A

$$3^x = 3^{\log_3 4 + \log_9 4} = 3^{\log_3 4} \cdot 3^{\log_9 4} = 4 + \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_9 4} = 4 + \left(9^{\log_9 4}\right)^{\frac{1}{2}} = 4 + 4^{\frac{1}{2}} = 4 + 2 = 6$$

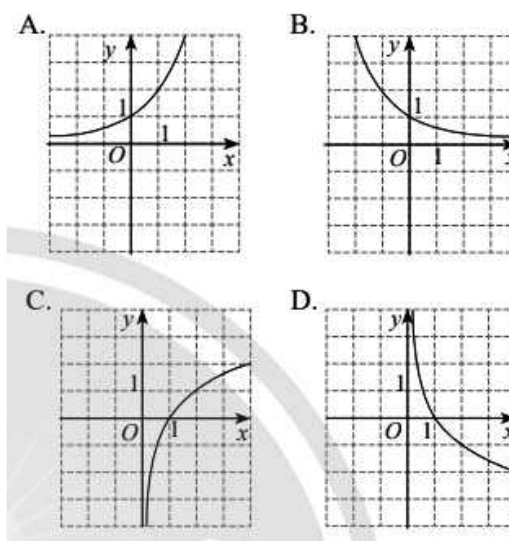
Câu 5: Cho α, β là hai số thực với $\alpha < \beta$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A. $(0, 3)^\alpha < (0, 3)^\beta$. B. $\pi^\alpha \geq \pi^\beta$. C. $(\sqrt{2})^\alpha < (\sqrt{2})^\beta$. D. $\left(\frac{1}{2}\right)^\beta > \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha$.

Lời giải

Chọn C

Câu 6: Hình nào vẽ đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$?



Lời giải

Chọn D

Câu 7: Phương trình $0,1^{2x-1} = 100$ có nghiệm là

A. $-\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $1\frac{1}{2}$.

D. $2\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$0,1^{2x-1} = 100 \Leftrightarrow 2x-1 = \log_{0,1} 100 \Leftrightarrow 2x-1 = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Câu 8: Tập nghiệm của bất phương trình $0,5^{3x-1} > 0,25$

A. $(-\infty; 1)$.

B. $(1; +\infty)$.

C. $(0; 1)$.

D. $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn A

$$0,5^{3x-1} > 0,25 \Leftrightarrow 0,5^{3x-1} > 0,5^2 \Leftrightarrow 3x-1 < 2 \Leftrightarrow x < 1$$

Câu 9: Nếu $\log x = 2\log 5 - \log 2$ thì

A. $x = 8$.

B. $x = 23$.

C. $x = 12,5$.

D. $x = 5$.

Lời giải

Chọn C

$$\log x = 2\log 5 - \log 2 = \log 5^2 - \log 2 = \log 25 - \log 2 = \log \frac{25}{2} = \log 12,5$$

$$\text{Suy ra } x = 12,5$$

Câu 10: Số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $\log_{0,1}(1-2x) > -1$ là

A. $x = 0$.

B. $x = 1$.

C. $x = -5$.

D. $x = -4$.

Lời giải

Chọn D

$$\log_{0,1}(1-2x) > -1 \Leftrightarrow 1-2x < 0,1^{-1} \Leftrightarrow 1-2x < 10 \Leftrightarrow x < 4,5$$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 11: Biết $4^\alpha + 4^{-\alpha} = 5$. Tính giá trị biểu thức :

1. $2^\alpha + 2^{-\alpha}$

2. $4^{2\alpha} + 4^{-2\alpha}$

Lời giải

a) $4^\alpha + 4^{-\alpha} = 5$

$$\Leftrightarrow (2^\alpha)^2 + 2 \cdot 2^\alpha \cdot 2^{-\alpha} + (2^{-\alpha})^2 = 5 + 2$$

$$\Leftrightarrow (2^\alpha + 2^{-\alpha})^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow 2^\alpha + 2^{-\alpha} = \sqrt{7}$$

b) $4^{2\alpha} + 4^{-2\alpha} = (4^\alpha)^2 + 2 \cdot 4^\alpha \cdot 4^{-\alpha} + (4^{-\alpha})^2 - 2 = (4^\alpha + 4^{-\alpha})^2 - 2 = 5^2 - 2 = 23$

Câu 12: Tính giá trị của biểu thức :

1. $\log_2 72 - \frac{1}{2}(\log_2 3 + \log_2 27)$;

2. $5^{\log_2 40 - \log_2 5}$;

3. $3^{2+\log_9 2}$.

Lời giải

a) $\log_2 72 - \frac{1}{2}(\log_2 3 + \log_2 27)$

$$= \log_2 72 - \frac{1}{2} \cdot \log_2 (3 \cdot 27) = \log_2 72 - \frac{1}{2} \cdot \log_2 81 = \log_2 72 - \log_2 81^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log_2 72 - \log_2 9 = \log_2 \frac{72}{9} = \log_2 8 = 3$$

b) $5^{\log_2 40 - \log_2 5} = 5^{\log_2 \frac{40}{5}} = 5^{\log_2 8} = 5^3 = 125$

c) $3^{2+\log_9 2} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_9 81 + \log_9 2} = 9^{\frac{1}{2} \cdot \log_9 (81 \cdot 2)} = 9^{\frac{1}{2} \cdot \log_9 162} = 9^{\log_9 162^{\frac{1}{2}}} = 162^{\frac{1}{2}} = 9\sqrt{2}$

Câu 13: Biết rằng $5^x = 3$ và $3^y = 5$. Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của xy .

Lời giải

$$5^x = 3. \text{ Suy ra } x = \log_5 3$$

$$3^y = 5. \text{ Suy ra } y = \log_3 5$$

$$\text{Ta có } x \cdot y = \log_3 5 \cdot \log_5 3 = \frac{\log 5}{\log 3} \cdot \frac{\log 3}{\log 5} = 1$$

Câu 14: Viết công thức biểu thị y theo x , biết $2\log_2 y = 2 + \frac{1}{2}\log_2 x$.

Lời giải

$$2\log_2 y = 2 + \frac{1}{2}\log_2 x \Leftrightarrow \log_2 y^2 = \log_2 4 + \log_2 x^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 y^2 = \log_2 \left(4 \cdot x^{\frac{1}{2}} \right) \Leftrightarrow y^2 = 4 \cdot \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \sqrt{4\sqrt{x}}$$

Câu 15: Giải các phương trình sau :

$$1. \left(\frac{1}{4} \right)^{x-2} = \sqrt{8} ;$$

$$2. 9^{2x-1} = 81 \cdot 27^x ;$$

$$3. 2\log_5 (x-2) = \log_5 9 ;$$

$$4. \log_2 (3x+1) = 2 - \log_2 (x-1).$$

Lời giải

$$a) \left(\frac{1}{4} \right)^{x-2} = \sqrt{8} \Leftrightarrow (2^{-2})^{x-2} = (2^3)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2^{-2x+4} = 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow -2x+4 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$b) 9^{2x-1} = 81 \cdot 27^x \Leftrightarrow (3^2)^{2x-1} = 3^4 \cdot (3^3)^x$$

$$\Leftrightarrow 3^{4x-2} = 3^{4+3x} \Leftrightarrow 4x-2 = 4+3x \Leftrightarrow x = 6$$

$$c) 2\log_5 (x-2) = \log_5 9 \Leftrightarrow \log_5 (x-2)^2 = \log_5 9 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow x-2 = 3 (\text{và } x-2 > 0) \Leftrightarrow x = 5$$

d) Điều kiện xác định: $3x+1 > 0; x-1 > 0$. Hay $x > 1$

$$\log_2 (3x+1) = 2 - \log_2 (x-1) \Leftrightarrow \log_2 (3x+1) + \log_2 (x-1) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 [(3x+1)(x-1)] = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 2^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ x = -1 \end{cases}$$

Câu 16: Giải các bất phương trình :

$$1. \left(\frac{1}{9} \right)^{x+1} > \frac{1}{81} ;$$

$$2. (\sqrt[4]{3})^x \leq 27 \cdot 3^x ;$$

$$3. \log_2 (x+1) \leq \log (2-4x).$$

Lời giải

$$a) \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} > \frac{1}{81} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^2 \Leftrightarrow x+1 < 2 \left(\text{Do } \frac{1}{9} < 1 \right) \Leftrightarrow x < 1$$

$$b) (\sqrt[4]{3})^x \leq 27 \cdot 3^x \Leftrightarrow \left(3^{\frac{1}{4}}\right)^x \leq 3^3 \cdot 3^x$$

$$\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{4}x} \leq 3^{3+x} \Leftrightarrow \frac{1}{4}x \leq 3+x \text{ (do } 3 > 1) \Leftrightarrow x \geq -4$$

$$c) x+1 > 0; 2-4x > 0 \text{ Hay } -1 < x < \frac{1}{2}$$

$$\log_2(x+1) \leq \log_2(2-4x)$$

$$\Leftrightarrow x+1 \leq 2-4x$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{5}$$

Kết hợp với điều kiện, nghiệm của bất phương trình là: $-1 < x \leq \frac{1}{5}$

Câu 17: Thực hiện một mẻ nuôi cấy vi khuẩn với 1000 vi khuẩn ban đầu, nhà sinh học phát hiện số lượng vi khuẩn tăng thêm 25% sau mỗi hai ngày

1. Công thức $P(t) = P_0 \cdot a^t$ cho phép tính số lượng vi khuẩn của mẻ nuôi cấy sau t ngày kể từ thời điểm ban đầu. Xác định các tham số P_0 và a ($a > 0$). Làm tròn a đến hàng phần trăm.
2. Sau 5 ngày thì số lượng vi khuẩn bằng bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng trăm.
3. Sau bao nhiêu ngày thì số lượng vi khuẩn vượt gấp đôi số lượng ban đầu? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) Ban đầu có 1000 vi khuẩn nên $P_0 = 1000$.

Sau 2 ngày, số lượng vi khuẩn là: $P = 125\%P_0 = 125\% \cdot 1000 = 1250$

Ta có: $P(2) = P_0 \cdot a^2 \Leftrightarrow 1250 = 1000 \cdot a^2 \Leftrightarrow a^2 = 1,25 \Leftrightarrow a \approx 1,12$

b) Số lượng vi khuẩn sau 5 ngày là: $P(5) = P_0 \cdot a^5 = 1000 \cdot 1,12^5 \approx 1800$ (vi khuẩn).

c) Với $P(t) = 2P_0$ ta có:

$$P(t) = P_0 \cdot a^t \Leftrightarrow 2P_0 = P_0 \cdot 1,12^t \Leftrightarrow 1,12^t = 2 \Leftrightarrow t = \log_{1,12} 2 \approx 6,1 \text{ (ngày)}$$

Vậy sau 6,1 ngày thì số lượng vi khuẩn vượt gấp đôi số lượng ban đầu.

Câu 18: Nhắc lại rằng, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $pH = -\log[H^+]$, trong đó $[H^+]$ là nồng độ H^+ của dung dịch đó tính bằng mol/L. Nồng độ H^+ trong dung dịch cho biết độ acid của dung dịch đó.

- Dung dịch acid A có độ pH bằng 1,9 ; dung dịch B có độ pH bằng 2,5. Dung dịch nào có độ acid cao hơn và cao hơn bao nhiêu lần
- Nước cất có nồng độ H^+ là 10^{-7} mol/L . Nước chảy từ một vòi nước có độ pH từ 6,5 đến 6,7 thì có độ acid cao hay thấp hơn nước cất.

Lời giải

$$a) pH_A = 1,9 \Leftrightarrow -\log[H^+] = 1,9 \Leftrightarrow \log[H^+] = -1,9 \Leftrightarrow H^+ = 10^{-1,9}$$

Vậy độ acid của dung dịch A là $10^{-1,9} \text{ mol/L}$.

$$pH_B = 2,5 \Leftrightarrow -\log[H^+] = 2,5 \Leftrightarrow \log[H^+] = -2,5 \Leftrightarrow H^+ = 10^{-2,5}$$

Vậy độ acid của dung dịch B là $10^{-2,5} \text{ mol/L}$.

$$\text{Ta có: } \frac{10^{-1,9}}{10^{-2,5}} \approx 3,98$$

Vậy độ acid của dung dịch A cao hơn độ acid của dung dịch B 3,98 lần.

b) Ta có:

$$6,5 < pH < 6,7 \Leftrightarrow 6,5 < -\log[H^+] < 6,7 \Leftrightarrow -6,5 > \log[H^+] > -6,7 \Leftrightarrow 10^{-6,5} > H^+ > 10^{-6,7}$$

Vậy nước chảy từ vòi nước có độ acid từ $10^{-6,7} \text{ mol/L}$ đến $10^{-6,5} \text{ mol/L}$.

Vậy nước đó có độ acid cao hơn nước cất.

BÀI TẬP TỔNG ÔN

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$.

- A.** $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **B.** $[-1; 1]$.
C. $D = (-1; 1)$. **D.** $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện: } \frac{x+1}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 1).$$

Câu 2: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_{125}(x^2 - 75x - 2499)^3 = \log_5|-x^2 + 75x + 2501|$.

- A.** -75. **B.** 75. **C.** 125. **D.** -125.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \log_{125} (x^2 - 75x - 2499)^3 &= \log_5 |-x^2 + 75x + 2501| \\ \Leftrightarrow \log_5 (x^2 - 75x - 2499) &= \log_5 |-x^2 + 75x + 2501| \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 75x - 2499 = |-x^2 + 75x + 2501| \\ x^2 - 75x - 2499 > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 75x - 2499 > 0 \\ -x^2 + 75x + 2501 = x^2 - 75x - 2499 \\ -x^2 + 75x + 2501 = -x^2 + 75x + 2499 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 75x - 2499 > 0 \\ 2x^2 - 150x - 5000 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -25 \\ x_2 = 100 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 75. \end{aligned}$$

Câu 3: Cho phương trình $\ln^2(x^2) - 3\ln x - 1 = 0 (x > 0) (*)$. Đặt $t = \ln x$, phương trình (*) trở thành phương trình nào sau đây?

- A.** $2t^2 + 3t - 1 = 0$. **B.** $4t^2 + 3t - 1 = 0$. **C.** $4t^2 - 3t - 1 = 0$. **D.** $2t^2 - 3t - 1 = 0$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \ln^2(x^2) - 3\ln x - 1 = 0 &\Leftrightarrow [\ln(x^2)]^2 - 3\ln x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow (2\ln x)^2 - 3\ln x - 1 = 0 &\Leftrightarrow 4(\ln x)^2 - 3\ln x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Do đó, đặt $t = \ln x$ phương trình (*) trở thành: $4t^2 - 3t - 1 = 0$.

Câu 4: Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $\ln a > \ln b \Leftrightarrow b > a$. **B.** $\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b > 0$.
C. $\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$. **D.** $\ln a > \ln b \Leftrightarrow b > a > 0$.

Lời giải

Chọn B

Phương án A sai vì $e > 1$ và chưa đủ điều kiện.

Phương án C sai vì chưa đủ điều kiện.

Phương án D sai vì cơ số $e > 1$.

Câu 5: Biết P là tích tất cả các nghiệm của phương trình $4^{x^2-2020} + 2^{x^2-2019} - 3 = 0$, tính P .

- A.** $P = 0$. **B.** $P = -1$. **C.** $P = -2020$. **D.** $P = 2020$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } 2^{2(x^2-2020)} + 2 \cdot 2^{x^2-2020} - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \left(2^{x^2-2020}\right)^2 + 2 \cdot 2^{x^2-2020} - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^{x^2-2020} = 1 \\ 2^{x^2-2020} = -3 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2020 = 0.$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{2020}.$$

$$\text{Do đó } P = \sqrt{2020} \cdot (-\sqrt{2020}) = -2020.$$

Câu 6: Biết $P = \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{2}}}}_{2019 \text{ căn bậc hai}} = 2^{\frac{m}{n}}$ ($m \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Tính $S = m + n$.

- A. 2000. B. $S = 2^{2020} + 1$. C. $S = 2^{2018} + 1$. D. $S = 2^{2019} + 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2^1}}; \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt{2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2^2}}; \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{1}{2^3}}; \dots$$

$$\text{Do đó } \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{2}}}}_{2019 \text{ căn bậc hai}} = 2^{\frac{1}{2^{2019}}}$$

$$\text{Vậy } S = 2^{2019} + 1.$$

Câu 7: Cho $a > 0; a \neq 1$ và $b \neq 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\log_a b^4 = \frac{1}{4} \log_a |b|$. B. $\log_a b^4 = 4 \log_a b$.
C. $\log_a b^4 = \frac{1}{4} \log_a b$. D. $\log_a b^4 = 4 \log_a |b|$.

Lời giải

Chọn D

Theo công thức logarit, ta có đáp án là D

Câu 8: Phương trình $\log_3 x + \log_3 (4 - x) = 1$ có tập nghiệm là

- A. $S = \{1; 3\}$. B. $S = \{1\}$. C. $S = \{3\}$. D. $S = \emptyset$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $0 < x < 4$

$$\text{Phương trình tương đương } \log_3 (x(4 - x)) = 1 \Leftrightarrow -x^2 + 4x = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} (TM)$$

Vậy chọn A

Câu 9: Cho $a > 0, a \neq 1, P = (2 \ln a + \log_a e)^2 + \ln^2 a - \log_a^2 e$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $P = 3 \ln^2 a - 4$. B. $P = 3 \ln^2 a + 4$. C. $P = 5 \ln^2 a - 4$. D. $P = 5 \ln^2 a + 4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\ln a \cdot \log_a e = \log_e a \cdot \log_a e = \log_e e = 1$, nên ta có:

$$\begin{aligned} P &= (2 \ln a + \log_a e)^2 + \ln^2 a - \log_a^2 e \\ &= 4 \ln^2 a + 4 \ln a \cdot \log_a e + \log_a^2 e + \ln^2 a - \log_a^2 e \\ &= 5 \ln^2 a + 4 \end{aligned}$$

Câu 10: Cho $a > 0, a \neq 1, b > 0, \alpha \neq 0, \beta \neq 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $\log_{a^\alpha}(b^\beta) = \frac{\beta}{\alpha} \log_a b$ **B.** $\log_{a^\alpha}(b^\beta) = \frac{\alpha}{\beta} \log_a b$
C. $\log_{a^\alpha}(b^\beta) = \alpha\beta \log_a b$ **D.** $\log_{a^\alpha}(b^\beta) = \frac{1}{\alpha\beta} \log_a b$

Lời giải

Chọn A

Câu 11: Có tất cả mấy giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x^2-2x|} = m^2 + m + 1$ có đúng 4 nghiệm phân biệt?

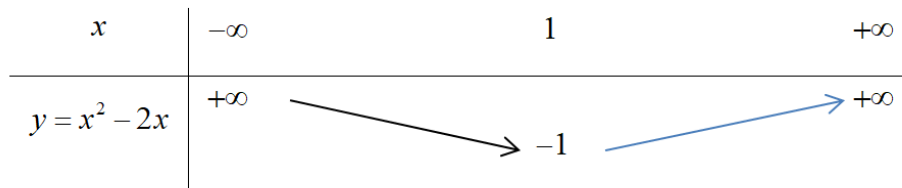
- A.** 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{|x^2-2x|} = m^2 + m + 1 \quad (1)$$

Xét $f(x) = x^2 - 2x$



Đặt $x^2 - 2x = t$

Theo BBT phương trình $x^2 - 2x = t$ có hai nghiệm phân biệt khi $t > -1$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{|x^2-2x|} = m^2 + m + 1 \Leftrightarrow |x^2 - 2x| = \log_{\frac{1}{3}}(m^2 + m + 1) \Leftrightarrow |t| = \log_{\frac{1}{3}}(m^2 + m + 1) \quad (2)$$

(1) Có đúng 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt $t > -1$

$$\Leftrightarrow 0 < \log_{\frac{1}{3}}(m^2 + m + 1) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < m^2 + m + 1 < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m + \frac{2}{3} > 0 (\forall m) \\ m^2 + m < 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -1 < m < 0$. Do $m \in \mathbb{Z}$ nên không có số nguyên m nào thỏa đề.

- Câu 12:** Cho $a = \log_2 3; b = \log_3 5; c = \log_7 2$. Biết $\log_{63} 140 = \frac{m.abc + n.c + 1}{2ac + 1} (m \in \mathbb{N}^*; n \in \mathbb{N}^*)$. Tính $S = m - n$.
- A. $S = 3$. B. $S = -3$. C. $S = -1$. D. $S = 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_{63} 140 = \frac{\log_2 140}{\log_2 63} = \frac{\log_2 (2^2 \cdot 5 \cdot 7)}{\log_2 (3^2 \cdot 7)} = \frac{2 + \log_2 5 + \log_2 7}{2 \log_2 3 + \log_2 7} = \frac{2 + \log_3 5 \cdot \log_2 3 + \log_2 7}{2 \log_2 3 + \log_2 7}$$

$$= \frac{2 + ab + \frac{1}{c}}{2a + \frac{1}{c}} = \frac{abc + 2c + 1}{2ac + 1}. \text{ Suy ra } m = 1; n = 2, S = m - n = -1.$$

- Câu 13:** Phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x} = 2^{x+2}$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?
- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Lời giải

Chọn C

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x} = 2^{x+2} \Leftrightarrow (2^{-1})^{1-2x} = 2^{x+2} \Leftrightarrow 2^{2x-1} = 2^{x+2} \Leftrightarrow 2x-1 = x+2 \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

- Câu 14:** Cho $a \in \mathbb{R}, a > 0, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(a^\alpha)^\beta = (a^\beta)^\alpha$. B. $a^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}$. C. $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha+\beta}$. D. $(a^\alpha)^\beta = a^{\beta-\alpha}$.

Lời giải

Chọn A

- Câu 15:** Cho $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sqrt[n]{a^{2n}} = 1$. B. $\sqrt[n]{a^{2n}} = |a|$.
C. $\sqrt[n]{a^{2n}} = a$. D. $\sqrt[n]{a^{2n}} = -a$.

Lời giải

Chọn B

Theo tính chất của căn bậc n .

- Câu 16:** Cho $a \in \mathbb{R}, a > 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a^{\frac{m}{n}} = a^{m-n}$. B. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. C. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^n}$. D. $a^{\frac{m}{n}} = \frac{a^m}{a^n}$.

Lời giải

Chọn B

Theo tính chất của lũy thừa với số mũ hữu tỷ.

Câu 17: Cho biểu thức $P = \frac{x^{\frac{5}{4}}y + xy^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}$ ($x > 0, y > 0$). Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $P = xy$. B. $P = x + y$. C. $P = 1$. D. $P = 2xy$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = \frac{x^{\frac{5}{4}}y + xy^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}} = \frac{xy \cdot \left(x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}\right)}{\frac{1}{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}}} = xy$$

Vậy $P = xy$.

Câu 18: Cho hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$). Khẳng định nào sau đây đúng ?

- A. $y' = \frac{1}{x \ln a}$ ($x > 0$). B. $y' = \frac{1}{x}$ ($x > 0$). C. $y' = \frac{\ln a}{x}$ ($x > 0$). D. $y' = \log_a x$ ($x > 0$).

Lời giải

Chọn A

Câu 19: Cho $\log_{25} 7 = a, \log_2 5 = b$. Tính $P = \log_{\sqrt{5}} \frac{245}{32}$ theo a, b .

- A. $P = 4a - \frac{10}{b} + 2$. B. $P = 8a - \frac{10}{b} + 2$. C. $P = 8a - 10b + 2$. D. $P = 2a - \frac{5}{2b} + 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \log_{\sqrt{5}} \frac{245}{32} = \log_{5^{\frac{1}{2}}} \frac{245}{32} = 2 \log_5 \frac{245}{32} \\ &= 2(\log_5 245 - \log_5 32) \\ &= 2(\log_5 5 \cdot 7^2 - \log_5 2^5) \\ &= 2(1 + 2 \log_5 7 - 5 \log_5 2). \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác, do } a = \log_{25} 7 = \log_{5^2} 7 = \frac{1}{2} \log_5 7 \Rightarrow \log_5 7 = 2a.$$

$$\log_2 5 = b \Rightarrow \log_5 2 = \frac{1}{\log_2 5} = \frac{1}{b}.$$

$$\text{Suy ra } P = 2 \left(1 + 2 \cdot 2a - 5 \cdot \frac{1}{b} \right) = 2 \left(1 + 4a - \frac{5}{b} \right) = 2 + 8a - \frac{10}{b}.$$

Câu 20: Cho $a > 0, a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\log_a a^a = a$. B. $\log_a 1 = 0$. C. $\log_a a = 1$. D. $a^{\log_a a} = 1$.

Lời giải

Chọn D

$\forall a > 0, a \neq 1$ ta có $\log_a a = 1$. Do đó $a^{\log_a a} = a^1 = a$.

Câu 21: Cho phương trình $\log_2(2^x + 1) \cdot \log_4\left(2^{x-1} + \frac{1}{2}\right) = 1$. Khi đặt $t = \log_2(2^x + 1)$, ta được phương trình nào dưới đây.

- A.** $t^2 + t - 2 = 0$. **B.** $2t^2 + 2t - 1 = 0$. **C.** $t^2 - t - 2 = 0$. **D.** $2t^2 - 2t - 1 = 0$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \log_2(2^x + 1) \cdot \log_4\left(2^{x-1} + \frac{1}{2}\right) &= 1 \Leftrightarrow \log_2(2^x + 1) \cdot \log_4\left(\frac{2^x}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1 \\ \Leftrightarrow \log_2(2^x + 1) \cdot \log_4\left[\frac{1}{2} \cdot (2^x + 1)\right] &= 1 \Leftrightarrow \log_2(2^x + 1) \cdot \left[\log_4 \frac{1}{2} + \log_4(2^x + 1)\right] = 1 \\ \Leftrightarrow \log_2(2^x + 1) \cdot \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2(2^x + 1)\right] &= 1 \Leftrightarrow t \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} t\right) = 1 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \end{aligned}$$

Câu 22: Cho số dương x , viết biểu thức $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ.

- A.** $x^{\frac{15}{18}}$. **B.** $x^{\frac{3}{16}}$. **C.** $x^{\frac{15}{16}}$. **D.** $x^{\frac{7}{18}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x \cdot x^{\frac{1}{2}}}}} = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}} = \sqrt{x\sqrt{x \cdot x^{\frac{3}{4}}}} = \sqrt{x\sqrt{x^{\frac{7}{4}}}} = \sqrt{x \cdot x^{\frac{7}{8}}} = \sqrt{x^{\frac{15}{8}}} = x^{\frac{15}{16}}$$

Nhận xét: $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} = x^{\frac{2^4-1}{2^4}} = x^{\frac{15}{16}}$

Câu 23: Cho hai số dương a, b thỏa mãn: $\log_2 a + \log_2 b = \log_2(a + b)$. Khi đó:

- A.** $a + b = ab$. **B.** $a + b = 2ab$. **C.** $a + b = a^2 b^2$. **D.** $2(a + b) = ab$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_2 a + \log_2 b = \log_2(a + b) \Leftrightarrow \log_2(ab) = \log_2(a + b) \Leftrightarrow ab = a + b$

Câu 24: Tập xác định của hàm số $y = (3x - 6)^{-3}$ là

- A.** $D = (2; +\infty)$. **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $D = (0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định $3x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \Rightarrow \text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $9^x - m \cdot 3^{x+1} + 6m + 3 = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$.

- A.** $m = 4$ **B.** $m = 1$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 3$.

Bài giải

Chọn A

$$9^x - m \cdot 3^{x+1} + 6m + 3 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 - 3m \cdot 3^x + 6m + 3 = 0$$

Để phương trình có 2 nghiệm thì:

$$\Delta = (-3m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (6m + 3) = 9m^2 - 24m - 12 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{4-2\sqrt{7}}{3} \\ m \geq \frac{4+2\sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có:

$$3^{x_1} \cdot 3^{x_2} = 3^{x_1+x_2} = 3^3 = 27 = 6m + 3 \Rightarrow m = 4 \text{ (chọn)}$$

Câu 26: Cho bất phương trình $\left(\frac{1}{25}\right)^{x^2+2} > 125^{2x}$ có tập nghiệm là:

A. $S = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$

B. $S = (-\infty; 2) \cup (-1; +\infty)$

C. $S = (-2; -1)$

D. $S = (1; 2)$

Bài giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{25}\right)^{x^2+2} > 125^x &\Leftrightarrow \frac{1}{25^{x^2+2}} > 125^{2x} \Leftrightarrow 1 > 25^{x^2+2} \cdot 125^{2x} \Leftrightarrow 1 > (5^2)^{x^2+2} \cdot (5^3)^{2x} \\ &\Leftrightarrow 1 > 5^{2x^2+6x+4} \Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < -1. \end{aligned}$$

Câu 27: Bất phương trình $x^{1+\log_3 x} > 81x$ có tập nghiệm là

A. $S = \left(0; \frac{1}{9}\right) \cup (9; +\infty)$.

B. $S = \left(\frac{1}{9}; 9\right)$.

C. $S = \left(0; \frac{1}{9}\right)$.

D. $S = (9; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $x^{1+\log_3 x} > 81x$. Điều kiện $x > 0$

Lấy lôgarit cơ số 3 hai vế của bất phương trình ta được

$$x^{1+\log_3 x} > 81x \Leftrightarrow (1 + \log_3 x) \cdot \log_3 x > \log_3 81 + \log_3 x$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x > 2 \\ \log_3 x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 9 \\ x < \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp điều kiện } x > 0 \text{ ta có bất phương trình } x^{1+\log_3 x} > 81x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 9 \\ 0 < x < \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của bất phương trình trên là } S = \left(0; \frac{1}{9}\right) \cup (9; +\infty)$$

Câu 28: Đạo hàm của hàm số $y = 4^x + 6^x$ bằng

A. $4^x \cdot \ln 4 + 6^x \cdot \ln 6$.

B. $4^x + 6^x$.

C. $4^x \cdot \log 4 + 6^x \cdot \log 6$.

D. $x(4^{x-1} + 6^{x-1})$.

Lời giải

Chọn A

$$y = 4^x + 6^x \Rightarrow y' = (4^x)' + (6^x)' = 4^x \cdot \ln 4 + 6^x \cdot \ln 6.$$

Câu 29: Tập xác định của hàm số $y = (2^x - 8)^{-2}$ là:

A. $D = [3; +\infty)$.

B. $D = (3; +\infty)$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

D. $D = \mathbb{R}$.

Lời giải:

Chọn C

Vì $-2 \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow 2^x - 8 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3 \Rightarrow$ Tập xác định của hàm số $y = (2^x - 8)^{-2}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Câu 30: Tính chất nào của hàm số $y = x^{-3}$ đúng trên nửa khoảng $(0; +\infty)$?

A. Hàm số luôn nghịch biến.

B. Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $(0; 0)$.

C. Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $(0; 1)$.

D. Hàm số luôn đồng biến.

Lời giải:

Chọn A

$$\text{Ta có: } y = x^{-3} \Rightarrow y' = -3x^{-2} = \frac{-3}{x^2} < 0 \text{ với } \forall x > 0.$$

Hàm số luôn nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Câu 31: Phương trình $\log_3(x^2 - 1) = \log_3(x - 1) + 1$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x > 1$

Với điều kiện trên ta có

$$\log_3(x^2 - 1) = \log_3(x - 1) + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 - 1) = \log_3(x - 1) + \log_3 3 \Leftrightarrow \log_3(x^2 - 1) = \log_3[3 \cdot (x - 1)]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 3 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 (L) \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có một nghiệm.

Câu 32: Đạo hàm của hàm số: $y = (x^2 - 2x + 2)e^x$ bằng:

A. $-x^2 \cdot e^x$.

B. $(2x - 2)e^x$.

C. $(x^2 - 2)e^x$.

D. $x^2 e^x$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } y' = (x^2 - 2x + 2)'e^x + (x^2 - 2x + 2)(e^x)' = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x.$$

$$= (2x - 2 + x^2 - 2x + 2)e^x = x^2 e^x$$

Câu 33: Nếu $a^{\frac{\sqrt{3}}{3}} > a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ và $\log_b \frac{3}{4} < \log_b \frac{4}{5}$ thì:

- A.** $a > 1$ và $b > 1$. **B.** $0 < a < 1$ và $b > 1$.
C. $0 < a < 1$ và $0 < b < 1$. **D.** $a > 1$ và $0 < b < 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} a^{\frac{\sqrt{3}}{3}} > a^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < 1; \begin{cases} \log_b \frac{3}{4} < \log_b \frac{4}{5} \\ \frac{3}{4} < \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow b > 1$$

Câu 34: Tìm tất cả các giá trị thực của m để biểu thức $A = \log_5(1 - 2m)$ có nghĩa.

- A.** $m \geq \frac{1}{2}$. **B.** $m > \frac{1}{2}$. **C.** $m \leq \frac{1}{2}$. **D.** $m < \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{ĐKXĐ: } 1 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}.$$

Câu 35: Đạo hàm của hàm số $y = \log_2(x^2 + x + 1)$ bằng

- A.** $\frac{1}{(x^2 + x + 1)\ln 2}$. **B.** $\frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$. **C.** $\frac{\ln 2}{x^2 + x + 1}$. **D.** $\frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1) \cdot \ln 2}$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = \frac{(x^2 + x + 1)'}{(x^2 + x + 1)\ln 2} = \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)\ln 2}.$$

Câu 36: Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^2} (a > 0)$.

- A.** $a^{\frac{2}{3}}$. **B.** $a^{-\frac{2}{3}}$. **C.** $a^{\frac{10}{3}}$. **D.** $a^{\frac{10}{3}}$.

Lời giải

Chọn B

$$P = a^{\frac{4}{3} - 2} = a^{-\frac{2}{3}}.$$

Câu 37: Tính đạo hàm của hàm số $y = (4x - 3)^4$.

- A.** $y' = 16(4x - 3)^4$. **B.** $y' = 4(4x - 3)^3$. **C.** $y' = 4(4x - 3)^4$. **D.** $y' = 16(4x - 3)^3$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = 4 \cdot (4x-3)'(4x-3)^3 = 4 \cdot 4 \cdot (4x-3)^3 = 16(4x-3)^3.$$

Câu 38: Cho các mệnh đề sau:

I. Với $x_1, x_2 > 0$, ta có: $5 \log x_1 - 5 \log x_2 = 5(\log x_1 - \log x_2) = 5 \log \frac{x_2}{x_1}$.

II. Với $x_1, x_2, x_3 > 0, 0 < a \neq 1$, ta có: $\log_a (x_1 + x_2 + x_3) = \log_a x_1 \cdot \log_a x_2 \cdot \log_a x_3$.

III. $\log_{(2^2 \cdot 3)} 12 = \frac{1}{12} \log_6 12 = \frac{1}{2}(1 + \log_6 2)$.

IV. Cho các số dương a, b , với $a \neq 1$, ta có: $\log_{a^2} (ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_a b$.

Số mệnh đề sai là bao nhiêu?

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn B

Mệnh đề I, II và III sai

Câu 39: Cho $a > 0, a \neq 1$. Đơn giản biểu thức $B = \log_a (a^2 \cdot \sqrt[4]{a^3})$.

- A. $a^{\frac{10}{3}}$. B. $a^{\frac{11}{4}}$. C. $\frac{11}{4}$. D. $\frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$B = \log_a (a^2 \cdot \sqrt[4]{a^3}) = \log_a a^{\frac{11}{4}} = \frac{11}{4}.$$

Câu 40: Hàm số $y = \frac{\sqrt{5-x}}{\log_2 (x-2)}$ có tập xác định D . Khi đó:

- A. $D = (2; 5)$. B. $D = [2; 5]$ C. $D = (2; 5]$. D. $D = (2; 5] \setminus \{3\}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x-2 > 0 \\ x-2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x > 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Vậy tập xác định $D = (2; 5] \setminus \{3\}$.

Câu 41: Tìm tập nghiệm của phương trình $2^{9x^2-17x+10} = 2^{7-5x}$.

- A. $\left\{-1; -\frac{1}{3}\right\}$. B. $\left\{1; \frac{1}{3}\right\}$. C. $\{-1; 3\}$. D. $\{-3; 1\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{9x^2-17x+10} = 2^{7-5x} \Leftrightarrow 9x^2 - 17x + 10 = 7 - 5x \Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{1; \frac{1}{3}\right\}$.

Câu 42: Cho phương trình $4^x - 4.2^x + 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1 < x_2$. Tính giá trị của biểu thức $3x_1 + 2x_2$.

A. $3\log_2 3$.

B. $2\log_2 3$.

C. $3\log_3 2$.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$). Phương trình đã cho trở thành:

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (TM)} \\ t = 3 \text{ (TM)} \end{cases}$$

Với $t = 1$. Ta có $2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Với $t = 3$. Ta có $2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$.

Do phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1 < x_2$ nên ta chọn $x_1 = 0$ và $x_2 = \log_2 3$.

Vậy $3x_1 + 2x_2 = 2\log_2 3$.

Câu 43: Bất phương trình $\log_4^2(3^x - 1) - 2\log_4(3^x - 1) + \frac{3}{4} \geq 0$ có tập nghiệm là:

A. $S = (0; 1] \cup [2; +\infty)$.

B. $S = (0; 1) \cup (2; +\infty)$.

C. $S = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

D. $S = (2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

ĐK: $3^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Đặt $t = \log_4(3^x - 1)$.

Ta có bất phương trình: $t^2 - 2t + \frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq \frac{1}{2} \\ t \geq \frac{3}{2} \end{cases}$

Với $t \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \log_4(3^x - 1) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < 3^x - 1 \leq 2 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$.

Với $t \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \log_4(3^x - 1) \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3^x - 1 \geq 8 \Leftrightarrow x \geq 2$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S = (0; 1] \cup [2; +\infty)$.

Câu 44: Đạo hàm của hàm số $y = \ln(1 - \sqrt{x-1})$ bằng:

A. $\frac{1}{2\sqrt{x-1}-2\sqrt{(x-1)^2}}$.

B. $\frac{1}{2\sqrt{x-1}+2\sqrt{(x-1)^2}}$.

C. $\frac{-1}{2\sqrt{x-1}+2\sqrt{(x-1)^2}}$.

D. $\frac{-1}{2\sqrt{x-1}-2\sqrt{(x-1)^2}}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số: $D = [1; 2)$.

Ta có: $y' = \left(\ln(1 - \sqrt{x-1}) \right)' = \frac{-(\sqrt{x-1})'}{1 - \sqrt{x-1}} = \frac{-1}{2\sqrt{x-1}(1 - \sqrt{x-1})} = \frac{-1}{2\sqrt{x-1} - 2\sqrt{(x-1)^2}}$.

Câu 45: Một người gửi 88 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn một quý với lãi suất 1,68% (mỗi quý). Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó có được 100 triệu đồng cả vốn lẫn lãi từ số vốn ban đầu? (giả sử rằng lãi suất không đổi).

A. 2 năm.

B. 1,5 năm.

C. 8 năm.

D. 3 năm.

Lời giải

Chọn A

Gọi M là vốn và lãi sau n kỳ hạn.

A là số vốn ban đầu.

r là lãi suất (theo quý).

Ta có: $M = A(1+r)^n$

$\Leftrightarrow 100000000 = 88000000(1+1,68\%)^n \Leftrightarrow (1+0,0168)^n = \frac{25}{22} \Leftrightarrow n \approx 8$

Vậy : Sau 8 quý (tức là sau 2 năm) người đó sẽ có được 100 triệu đồng cả vốn lẫn lãi.

B. TỰ LUẬN

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

Lời giải

Ta có: $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 4^x - 2m \cdot 2^x + 2m^2 - 5 = 0$.

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$, ta được phương trình: $t^2 - 2mt + 2m^2 - 5 = 0$ (1).

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 5 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} < m < \sqrt{5} \\ m < -\frac{\sqrt{10}}{2} \\ m > \frac{\sqrt{10}}{2} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{2} < m < \sqrt{5}.$$

Vậy $m = 2$ là giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Câu 2: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3m - 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

Lời giải

Phương trình $4^x - m \cdot 2^{x+1} + 3m - 3 = 0 \Leftrightarrow 4^x - 2m \cdot 2^x + 3m - 3 = 0$.

Đặt $t = 2^x$, ($t > 0$) ta có phương trình $t^2 - 2mt + 3m - 3 = 0$ (2).

Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2

$$\begin{aligned} \text{thỏa mãn } 0 < t_1 < 1 < t_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 3 > 0 \\ 3m - 3 > 0 \\ m > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 3m - 3 - 2m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (1; 2). \end{aligned}$$

Câu 3: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_6 x = \log_9 y = \log_4 (2x + 2y)$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$?

Lời giải

$$\text{Giả sử } \log_6 x = \log_9 y = \log_4 (2x + 2y) = t. \text{ Ta có: } \begin{cases} x = 6^t & (1) \\ y = 9^t & (2) \\ 2x + 2y = 4^t & (3) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \frac{x}{y} = \frac{6^t}{9^t} = \left(\frac{2}{3}\right)^t > 0.$$

Lấy (1), (2) thay vào (3) ta có

$$2 \cdot 6^t + 2 \cdot 9^t = 4^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2t} - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^t = 1 + \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \text{ (thỏa)} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^t = 1 - \sqrt{3} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Câu 4: Biết rằng a là số thực dương sao cho bất đẳng thức $3^x + a^x \geq 6^x + 9^x$ đúng với mọi số thực x . Mệnh đề nào sau đây đúng?

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} 3^x + a^x &\geq 6^x + 9^x \\ \Leftrightarrow a^x - 18^x &\geq 6^x + 9^x - 3^x - 18^x \\ \Leftrightarrow a^x - 18^x &\geq 3^x (2^x - 1) - 9^x (2^x - 1) \\ \Leftrightarrow a^x - 18^x &\geq -3^x (2^x - 1)(3^x - 1) \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Ta thấy } (2^x - 1)(3^x - 1) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -3^x (2^x - 1)(3^x - 1) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, (*) đúng với mọi số thực x

$$\Leftrightarrow a^x - 18^x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{18}\right)^x \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{18} = 1 \Leftrightarrow a = 18 \in (16; 18].$$

Câu 5: Tìm m để phương trình $9^x - 2(2m+1).3^x + 3(4m-1) = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = 12$

Lời giải

Đặt $t = 3^x$ ($t > 0$) thì phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2(2m+1)t + 3(4m-1) = 0$ (1).

$$(1) \text{ có hai nghiệm dương phân biệt khi } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+1)^2 - 3(4m-1) > 0 \\ 2m+1 > 0 \\ 4m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{4} \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} t = 4m-1 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{x_1} = 4m-1 \\ 3^{x_2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \log_3(4m-1) \\ x_2 = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } (x_1 + 2)(x_2 + 2) = 12 \Leftrightarrow \log_3(4m-1) = 2 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2} \text{ (thỏa điều kiện).}$$

Câu 6: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{\log_2 \frac{x}{2}}{\log_2 x} - \frac{\log_2 x^2}{\log_2 x - 1} \leq 1$.

Lời giải

$$\frac{\log_2 \frac{x}{2}}{\log_2 x} - \frac{\log_2 x^2}{\log_2 x - 1} \leq 1 \quad (1). \text{ ĐK: } \begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 0 \\ \log_2 x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \neq 2.$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\log_2 x - 1}{\log_2 x} - \frac{2 \log_2 x}{\log_2 x - 1} \leq 1.$$

Đặt $t = \log_2 x$.

$$\text{Bất phương trình trở thành: } \frac{t-1}{t} - \frac{2t}{t-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-2t^2 - t + 1}{t(t-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1 \\ 0 < t \leq \frac{1}{2} \\ t \leq -1 \end{cases}.$$

- $t > 1 \Leftrightarrow \log_2 x > 1 \Leftrightarrow x > 2$.
- $0 < t \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \log_2 x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 < x \leq \sqrt{2}$.
- $t \leq -1 \Leftrightarrow \log_2 x \leq -1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$.

Kết hợp với điều kiện, bất phương trình (1) có tập nghiệm $S = \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup (1; \sqrt{2}] \cup (2; +\infty)$.

Câu 7: Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 72$.

Lời giải

$$\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2m - 7 = 0 \quad (1)$$

Điều kiện: $x > 0$

Đặt $t = \log_3 x \Leftrightarrow x = 3^t$ thì phương trình tương đương $t^2 - 3t + 2m - 7 = 0$

(1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có 2 nghiệm phân biệt.

Giả sử (2) có 2 nghiệm $t_1 = \log_3 x_1, t_2 = \log_3 x_2$ khi đó $x_1 x_2 = 3^{(t_1+t_2)} = 27$.

$$\text{Suy ra } (x_1 + 3)(x_2 + 3) = 72 \Leftrightarrow x_1 x_2 + 3(x_1 + x_2) = 63 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 12$$

Vậy x_1, x_2 là 2 nghiệm phương trình $x^2 - 12x + 27 = 0 \Leftrightarrow x = 9 \vee x = 3$

$$x = 9 \text{ suy ra } \log_3^2 9 - 3\log_3 9 + 2m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2}.$$

$$x = 3 \text{ suy ra } \log_3^2 3 - 3\log_3 3 + 2m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9}{2}.$$

$$\text{Vậy } m = \frac{9}{2}.$$

Câu 8: Tìm các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$ có hai nghiệm phân biệt

Lời giải.

$$\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x-1)^2 = mx-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - (m+2)x + 9 = 0 \end{cases}.$$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm thực lớn hơn 1 thì điều kiện sau thỏa mãn.

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 1 < x_1 < x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m - 32 > 0 \\ (x_1 - 1) + (x_2 - 1) > 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -8 \\ m > 4 \\ m > 0 \\ 8 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m < 8$$

$$\text{Vì } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{5, 6, 7\}.$$

Câu 9: Phương trình $\log_2^2 x - (m^2 - 3m)\log_2 x + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 16$.

Lời giải

$$\log_2^2 x - (m^2 - 3m)\log_2 x + 3 = 0 \quad (1).$$

Điều kiện $x > 0$.

Đặt $\log_2 x = t$. Ta được phương trình $t^2 - (m^2 - 3m)t + 3 = 0$ (2).

Ta có: $x_1 x_2 = 16 \Leftrightarrow \log_2 (x_1 x_2) = 4 \Leftrightarrow \log_2 x_1 + \log_2 x_2 = 4$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 16$ khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 + t_2 = 4$.

Vậy suy ra $m^2 - 3m = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -1 \end{cases}$.

Thử lại thấy thỏa mãn.

Câu 10: Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_2 \frac{3x-1}{x+1} \right) \leq 0$

Lời giải

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_2 \frac{3x-1}{x+1} \right) \leq 0 \Leftrightarrow \log_2 \frac{3x-1}{x+1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x < -1 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-1; +\infty) \cup [3; +\infty)$.

Câu 11: Tìm m để phương trình $\log(x^2 + mx) = \log(x + m - 1)$ có nghiệm duy nhất

Lời giải

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = x^2 + mx = x + m - 1 \\ x + m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = x^2 - (1-m)x + 1-m = 0(1) \\ x > 1-m \end{cases}.$$

PT đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi xảy ra 1 trong 2 TH sau:

TH1: PT (1) có nghiệm kép $x > 1 - m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \frac{1-m}{2} > 1-m \\ 1-m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-m)^2 - 4(1-m) = 0 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \Leftrightarrow m \in \emptyset \end{cases}$$

TH2: PT (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 < 1 - m = x_2$

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{S}{2} > 1-m \\ g(1-m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ \frac{1-m}{2} > 1-m \\ (1-m)^2 - (1-m)(1-m) + 1-m = 0 \end{cases} \quad \text{:Không có } m \text{ thỏa mãn.}$$

TH3: Phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 < 1 - m < x_2$

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \Delta > 0 \\ [x_1 - (1-m)][x_2 - (1-m)] < 0 \end{cases} (*) \text{ trong đó } \begin{cases} x_1 + x_2 = 1-m \\ x_1 x_2 = 1-m \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } (*) \text{ thành } \begin{cases} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ x_1 x_2 - (1-m)(x_1 + x_2) + (1-m)^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ 1-m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

KL: $m > 1$.

Câu 12: Giải phương trình $\log_{49} x^2 + \frac{1}{2} \log_7 (x-1)^2 = \log_7 (\log_{\sqrt{3}} 3)$

Lời giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

$$\log_{49} x^2 + \frac{1}{2} \log_7 (x-1)^2 = \log_7 (\log_{\sqrt{3}} 3) \Leftrightarrow \log_7 |x| + \log_7 |x-1| = \log_7 2$$

$$\Leftrightarrow \log_7 |x(x-1)| = \log_7 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) = 2 \\ x(x-1) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x^2 - x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Câu 13: Tìm m để phương trình $\log_3^2 x - 3 \log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 72$.

Lời giải

$$\text{Ta có } (x_1 + 3)(x_2 + 3) = 72 \Rightarrow x_1 x_2 + 3(x_1 + x_2) = 63.$$

$$\text{Xét } \log_3^2 x - 3 \log_3 x + 2m - 7 = 0, \text{ đặt } t = \log_3 x, \text{ PT trở thành } t^2 - 3t + 2m - 7 = 0 \quad (1).$$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow 9 - 4(2m - 7) > 0 \Leftrightarrow -8m + 37 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{37}{8}.$$

Khi đó, giả sử (1) có hai nghiệm t_1, t_2 , tương ứng PT đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 .

$$\text{Theo Vi-et ta có } \begin{cases} t_1 + t_2 = 3 \\ t_1 t_2 = 2m - 7 \end{cases}.$$

$$\text{Nên } \begin{cases} \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = 3 \Rightarrow x_1 x_2 = 27 \\ \log_3 x_1 \cdot \log_3 x_2 = 2m - 7 (*) \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với giả thiết ta có } \begin{cases} x_1 x_2 = 27 \\ x_1 + x_2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 3 \end{cases}. \text{ Thay vào } (*) \text{ ta được } m = \frac{9}{2} \text{ (TM).}$$