

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH CẤP THPT
HÀ TĨNH

NĂM HỌC 2015 - 2016

Môn: TOÁN; Lớp: 10

Thời gian làm bài: 180 phút
(Đề thi có 01 trang, gồm 05 câu)

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1.

a) Giải phương trình $x^3 + 4x^2 + 1 = x(x + 1)\sqrt{4x^2 + 1}$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(x - 1) = y(x - y^2) \\ x^2 + \sqrt{x + 1} = y + \sqrt{y + 1}. \end{cases}$

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm

$$m(\sqrt{x - 2} + \sqrt{6 - x}) + 2\sqrt{-x^2 + 8x - 12} = 0.$$

Câu 3.

a) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O có $AB = c, BC = a, CA = b$.

Gọi D là giao điểm của các tiếp tuyến tại B và C của (O) . Chứng minh $\frac{\sin \widehat{DAB}}{\sin \widehat{DAC}} = \frac{c}{b}$

và $AD = \frac{bc\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}{b^2 + c^2 - a^2}$.

b) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho tam giác nhọn ABC có đường cao AH ($H \in BC$) và D, E lần lượt là trung điểm của AB, AC . Gọi F là điểm đối xứng với B qua E . Giả sử $F(-3; 3)$ và đường trung trực của CH có phương trình $x - 1 = 0$. Tìm tọa độ giao điểm M của các đường thẳng HD, FA . Tìm tọa độ giao điểm N của tia CD với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ($N \neq C$), biết đường thẳng đi qua N và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HCF có phương trình $x - 2y - 1 = 0$.

Câu 4. Một vùng đất hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 25$ km, $BC = 20$ km và M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC . Một người cưỡi ngựa xuất phát từ A đi đến C bằng cách đi thẳng từ A đến một điểm X thuộc đoạn MN rồi lại đi thẳng từ X đến C . Vận tốc của ngựa khi đi trên phần $ABNM$ là 15 km/h, vận tốc của ngựa khi đi trên phần $MNCD$ là 30 km/h. Tìm vị trí của X để thời gian ngựa di chuyển từ A đến C là ít nhất?

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất của số nguyên dương n sao cho tồn tại n tam thức bậc hai khác nhau từng đôi một thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) mỗi tam thức bậc hai có hệ số của x^2 bằng 1;

ii) tổng của 2 tam thức bậc hai bất kỳ có đúng 1 nghiệm.

(Hai tam thức bậc hai là khác nhau nếu có ít nhất một hệ số tương ứng khác nhau).

HẾT

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

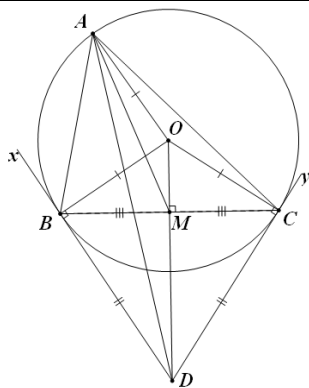
Họ và tên thí sinh:; Số báo danh:

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu	Đáp án
1.a	$x^3 + 4x^2 + 1 = x(x+1)\sqrt{4x^2+1}. \quad (1)$ Ta có $(1) \Leftrightarrow 4x^2 + 1 - x\sqrt{4x^2+1} - x^2\sqrt{4x^2+1} + x^3 = 0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{4x^2+1} - x)(\sqrt{4x^2+1} - x^2) = 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+1} = x^2 \text{ (do } \sqrt{4x^2+1} - x > x - x \geq 0; \forall x \in \mathbb{R})$ $\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 1 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 = 2 + \sqrt{5} \text{ (do } x^2 \geq 0; \forall x \in \mathbb{R})$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2 + \sqrt{5}} \\ x = -\sqrt{2 + \sqrt{5}}. \end{cases}$ Đáp số: $S = \{\sqrt{2 + \sqrt{5}}; -\sqrt{2 + \sqrt{5}}\}.$
1.b	$\begin{cases} x^2(x-1) = y(x-y^2) \\ x^2 + \sqrt{x+1} = y + \sqrt{y+1} \end{cases} \quad (1) \quad (2)$ Điều kiện: $x \geq -1; y \geq -1$. Khi đó $(1) \Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2 - x) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^2 - xy + y^2 = x. \end{cases}$ Với $y = -x$ thì (2) trở thành $x^2 + \sqrt{x+1} = -x + \sqrt{-x+1}$ $\Leftrightarrow x^2 + x + (\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}) = 0$ $\Leftrightarrow x \left[x+1 + \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}} \right] = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \left(\text{do } x+1 + \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}} > x+1 \geq 0; \forall x \geq -1 \right).$ Khi $x = 0$ thì $y = 0$. Với $x^2 - xy + y^2 = x$ ta có $x \geq 0$.

	Ta có $\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = x \\ x^2 + \sqrt{x+1} = y + \sqrt{y+1} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 - y = xy - y^2 + x - y \\ x^2 - y + (\sqrt{x+1} - \sqrt{y+1}) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 - y = (x-y)(y+1) \\ (x-y)(y+1) + \frac{x-y}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}} = 0 \text{ (do } x \geq 0) \end{cases} \end{aligned}$
	$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 - y = (x-y)(y+1) \\ (x-y) \left[y+1 + \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}} \right] = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = y \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \left(\text{do } y+1 + \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}} > y+1 \geq 0; \forall x \geq 0; y \geq -1 \right) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 1. \end{cases} \end{aligned}$ Đáp số: $(x; y) = (0; 0); (x; y) = (1; 1)$.
2	$m(\sqrt{x-2} + \sqrt{6-x}) + 2\sqrt{-x^2 + 8x - 12}. \quad (1)$ Điều kiện $2 \leq x \leq 6$. Đặt $t = \sqrt{x-2} + \sqrt{6-x}$ thì $2\sqrt{-x^2 + 8x - 12} = t^2 - 4$ và $2 \leq t = \sqrt{x-2} + \sqrt{6-x} \leq \sqrt{2(x-2+6-x)} = 2\sqrt{2}.$ Phương trình (1) trở thành $t^2 + mt - 4 = 0$. (2) Điều kiện để phương trình (1) có nghiệm là phương trình (2) có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[2; 2\sqrt{2}]$. (*) Do phương trình (2) có $ac = 1 \cdot (-4) < 0$ và $\Delta = m^2 + 16$ nên với mọi $m \in \mathbb{R}$ phương trình (2) luôn có 2 nghiệm trái dấu t_1, t_2 là $t_1 = \frac{-m - \sqrt{m^2 + 16}}{2} < 0 < t_2 = \frac{-m + \sqrt{m^2 + 16}}{2}.$ Do vậy $\begin{aligned} (*) & \Leftrightarrow 2 \leq \frac{-m + \sqrt{m^2 + 16}}{2} \leq 2\sqrt{2} \\ & \Leftrightarrow m + 4 \leq \sqrt{m^2 + 16} \leq m + 4\sqrt{2} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 8\sqrt{2}m \geq -16 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq m \leq 0. \end{aligned}$ Vậy tập hợp tất cả các giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $S = [-\sqrt{2}; 0]$.

3.a



Áp dụng Định lý sin, ta có

$$\frac{\widehat{\sin DAB}}{\widehat{\sin DAC}} = \frac{TB \cdot \frac{\widehat{\sin DBA}}{DA}}{TC \cdot \frac{\widehat{\sin DCA}}{DA}} = \frac{\widehat{\sin DBA}}{\widehat{\sin DCA}} \text{ (do } TB = TC).$$

$$= \frac{\sin(180^\circ - \widehat{ABx})}{\sin(180^\circ - \widehat{ACy})} = \frac{\widehat{ABx}}{\widehat{ACy}} = \frac{\widehat{ACB}}{\widehat{ABC}} = \frac{c}{b}.$$

Gọi M là trung điểm của BC , ta có O, M, D thẳng hàng.

Theo Định lý cosin và công thức đường trung tuyến, ta cần chứng minh

$$AD = \frac{AM}{\cos \widehat{BAC}} \Leftrightarrow \frac{AM}{AD} = \cos \widehat{BAC}.$$

Ta có $OA^2 = OB^2 = OM.OD$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông).

Suy ra $\frac{OM}{OA} = \frac{OA}{OD}$.

Trường hợp $AB \neq AC$. Ta có $\triangle OAM \sim \triangle ODA$ (c-g-c).

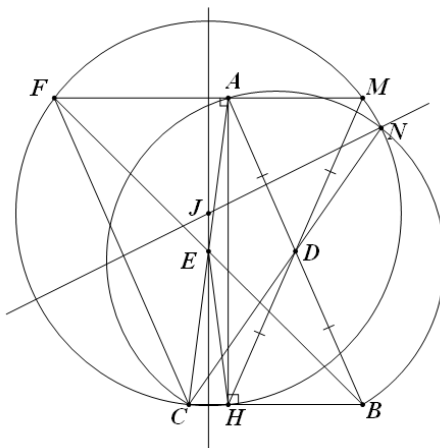
Suy ra

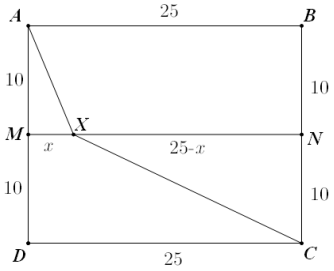
$$\frac{AM}{AD} = \frac{OM}{OA} = \frac{OM}{OB} = \cos \widehat{BOM} = \cos \frac{\widehat{BOC}}{2} = \cos \widehat{BAC}, \text{ дpcm.}$$

Trường hợp $AB = AC$. Ta có A, O, M, D thẳng hàng theo thứ tự đó nên

$$\frac{OM}{AM} = \frac{OM}{OA + OM} = \frac{OA}{OD + OA} = \frac{OB}{AD} \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{OM}{OB} = \cos \widehat{BAC}, \text{ d.pcm.}$$

3.b



4	Gọi Δ là đường thẳng chứa trung trực của CH. Do $ABCF$ là hình bình hành nên $FCHM$ là hình thang. Lại có $\widehat{HMF} = \widehat{DHB} = \widehat{DBH} = \widehat{CFM}$ nên $FCHM$ là hình thang cân. Suy ra M đối xứng với F qua Δ.
	Vì vậy tọa độ của M là nghiệm của hệ $\begin{cases} 0.(x+3) - 1.(y-3) = 0 \\ \frac{x-3}{2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3. \end{cases}$ Suy ra $M(5;3)$.
	Do $FCHM$ là hình thang cân nên nó là tứ giác nội tiếp đường tròn (S). Do $DN.DC = DA.DB = DH.DM$ nên tứ giác $MCHN$ nội tiếp. Suy ra $N \in (S)$.
	Tọa độ tâm J của (S) là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0. \end{cases}$ Suy ra $J(1;0)$. Theo giả thiết $N(2n+1;n)$ thì $n > 0$ do N, F khác phía so với Δ. Do $N \in (S)$ nên $JN = JF$ hay $\sqrt{(2n)^2 + n^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \Leftrightarrow n = \sqrt{5} \text{ (do } n > 0 \text{)}.$ Đáp số: $M(5;3); N(2\sqrt{5}+1; \sqrt{5})$.
	
	Đặt $XM = x$ (km) thì $0 \leq x \leq 25$ và $XN = 25 - x$. Thời gian đi từ A đến C của kỵ binh là (đơn vị: giờ) $T = \frac{\sqrt{x^2 + 10^2}}{15} + \frac{\sqrt{(25-x)^2 + 10^2}}{30}$ (theo Định lý Pitago và công thức $t = \frac{s}{v}$).
	Ta có $T = \frac{\sqrt{4x^2 + 20^2} + \sqrt{10^2 + (25-x)^2}}{30}$
	Trong Oxy, xét $\vec{u}(2x;20)$ và $\vec{v}(10;25-x)$, ta có $\vec{u} + \vec{v} \geq \vec{u} + \vec{v}$ nên $T \geq \frac{\sqrt{(2x+10)^2 + (20+25-x)^2}}{30}$
	$= \frac{\sqrt{5x^2 - 50x + 2125}}{30} = \frac{\sqrt{5(x-5)^2 + 2000}}{30} \geq \frac{2}{3}\sqrt{5}. \text{ (giờ).}$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x(25-x) = 200, x > 0 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$ Vậy vị trí cần tìm của điểm X là $XM = 5 \text{ km}, XN = 25 \text{ km}.$

5	Với $n = 2$ ta thấy $P_1(x) = x^2 + x, P_2(x) = x^2 - x$ thỏa mãn. Do đó $n \geq 2$. Với $n = 3$ ta thấy $P_1(x) = x^2 + 2, P_2(x) = x^2 + 4x, P_3(x) = x^2 - 4x$ thỏa mãn. Do đó $n \geq 3$.
	Giả sử tồn tại n ($n \geq 4$) tam thức bậc hai thỏa mãn yêu cầu bài toán. Khi đó tồn tại 4 tam thức bậc hai $P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x)$ trong số chúng sao cho mỗi tam thức có hệ số của x^2 bằng 1 và tổng của 2 tam thức bất kỳ trong chúng đều có đúng 1 nghiệm. Đặt $P_{ij}(x) = P_i(x) + P_j(x)$ với $1 \leq i < j \leq 4$. Giả sử nghiệm duy nhất (nghiệm kép) của $P_{12}(x), P_{23}(x), P_{34}(x), P_{14}(x)$ lần lượt là a, b, c, d. Ta có $2(x - a)^2 + 2(x - c)^2 = 2(x - b)^2 + 2(x - d)^2; \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $\begin{cases} a + c = b + d \\ a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \end{cases}$.
	Suy ra $\begin{cases} ac = bd \\ (a - c)^2 = (b - d)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac = bd \\ a - c = b - d \end{cases} \vee \begin{cases} ac = bd \\ a - c = d - b \end{cases}$ Nếu $a - c = b - d$ thì $2a = a + c + a - c = b + d + b - d = 2b$ hay $a = b$. Khi đó $P_1(x) \equiv P_3(x)$, vô lý do $P_j(x), 1 \leq j \leq 4$ đôi một phân biệt. Nếu $a - c = d - b$ thì $a = d$. Khi đó $P_2(x) \equiv P_4(x)$, vô lý. Tóm lại không tồn tại n ($n \geq 4$) tam thức bậc hai thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy giá trị lớn nhất cần tìm của n là $n = 3$.

----- **HẾT** -----