CHƯƠNG I: VECTƠ

§1 CÁC ĐỊNH NGHĨA

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

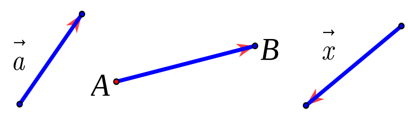
1. Định nghĩa vectơ:

✧ *Vectơ* là đoạn thẳng có hướng, nghĩa là trong hai điểm mút của đoạn thẳng đã chỉ rõ điểm nào là điểm đầu, điểm nào là điểm cuối.

✧ Vectơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B ta kí hiệu : $\overrightarrow{AB}$.

✧ Vectơ còn được kí hiệu là: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$.

✧ Vectơ – không là vectơ có điểm đầu trùng điểm cuối. Kí hiệu là $\vec{0}$.



Hình 1.1

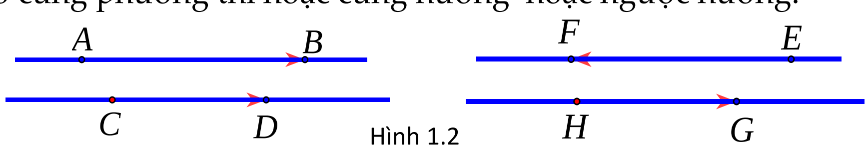
2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng.

✧ Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ gọi là *giá* của vectơ.

✧ Hai vectơ được gọi là *cùng phương* nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

✧ Hai vectơ được gọi là *cùng hướng* nếu chúng cùng phương và cùng chiều.

✧ Hai vectơ cùng phương thì hoặc cùng hướng hoặc ngược hướng.



Hình 1.2

Ví dụ: Ở hình vẽ trên trên (hình 1.2) thì hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng còn $\overrightarrow{EF}$ và $\overrightarrow{HG}$ ngược hướng.

✧ **Đặc biệt:** vectơ – không cùng hướng với mọi véc tơ.

✧ **Nhận xét:** Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Chứng minh:

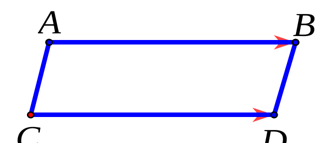
Nếu A, B, C thẳng hàng suy ra giá của $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ đều là đường thẳng đi qua ba điểm A, B, C nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Ngược lại nếu $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương khi đó đường thẳng AB và AC song song hoặc trùng nhau. Nhưng hai đường thẳng này cùng đi qua điểm A nên hai đường thẳng AB và AC trùng nhau hay ba điểm A, B, C thẳng hàng.

3. Hai vectơ bằng nhau

✧ Độ dài đoạn thẳng AB gọi là độ dài véc tơ $\overrightarrow{AB}$, kí hiệu $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$.



Hình 1.3

✧ Hai *vectơ bằng nhau* nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

Ví dụ: (hình 1.3) Cho hình bình hành $ABCD$ khi đó $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Dạng 1: Xác định một vectơ; phương, hướng của vectơ; độ dài của vectơ

1. Phương pháp giải.

✧ Xác định một vecto và xác định sự cùng phương, cùng hướng của hai vectơ theo định nghĩa

✧ Dựa vào các tình chất hình học của các hình đã cho biết để tính độ dài của một vectơ

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của tứ giác.

Lời giải:

Hai điểm phân biệt, chẳng hạn A, B ta xác định được hai vectơ khác vectơ-không là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$. Mà từ bốn đỉnh A, B, C, D của tứ giác ta có 6 cặp điểm phân biệt do đó có 12 vectơ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

a) Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

b) Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

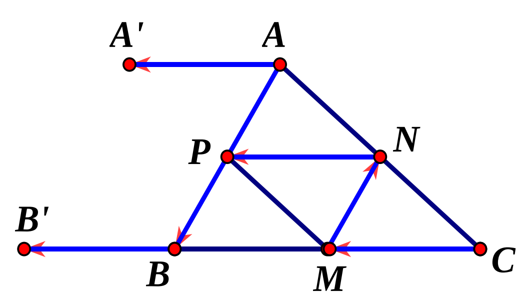
c) Vẽ các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{NP}$ mà có điểm đầu A, B.

Lời giải:

(Hình 1.4)

a) Các vectơ khác vectơ không cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ là $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{PB}$.

b) Các vectơ khác vectơ - không cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{NM}$.



Hình 1.4

c) Trên tia CB lấy điểm B' sao cho $BB' = NP$

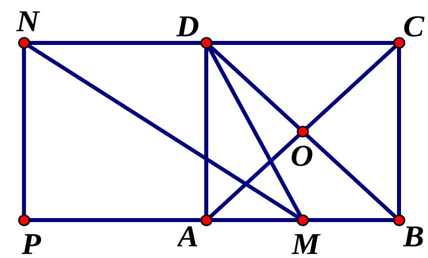
Khi đó ta có $\overrightarrow{BB'}$ là vectơ có điểm đầu là B và bằng vectơ $\overrightarrow{NP}$.

Qua A dựng đường thẳng song song với đường thẳng NP. Trên đường thẳng đó lấy điểm A' sao cho $\overrightarrow{AA'}$ cùng hướng với $\overrightarrow{NP}$ và $AA' = NP$.

Khi đó ta có $\overrightarrow{AA'}$ là vectơ có điểm đầu là A và bằng vectơ $\overrightarrow{NP}$.

Ví dụ 3: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a. Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm đối xứng với C qua D. Hãy tính độ dài của vectơ sau $\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MN}$.

Lời giải:



Hình 1.5

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông MAD ta có

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MD}\right| = MD = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Qua N kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại P.

Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và $PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$.

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông NPM ta có

$$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MN}\right| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1: Cho ngũ giác $ABCDE$. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của ngũ giác.

Lời giải:

Hai điểm phân biệt, chẳng hạn A, B ta xác định được hai vectơ khác vectơ-không là $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$. Mà từ năm đỉnh A, B, C, D, E của ngũ giác ta có 10 cặp điểm phân biệt do đó có 20 vectơ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2: Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm là O. Tìm các vectơ từ 5 điểm A, B, C, D, O

a) Bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{OB}$

b) Có độ dài bằng $\left|\overrightarrow{OB}\right|$

Lời giải:

a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}$

b) $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{OD}$

Bài 3: Cho ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng.

a) Khi nào thì hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng ?

b) Khi nào thì hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng ?

Lời giải:

a) A nằm ngoài đoạn BC.

b) A nằm trong đoạn BC.

Bài 4: Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt.

a) Nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ thì có nhận xét gì về ba điểm A, B, C.

b) Nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ thì có nhận xét gì về bốn điểm A, B, C, D.

Lời giải:

a) B là trung điểm của AC.

b) A, B, C, D thẳng hàng hoặc ABCD là hình bình hành.

Bài 5: Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O . Hãy cho biết tính đúng sai của các câu sau đây?

a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$ d) $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}$

e) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$ f) $2\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$

Lời giải:

a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Sai

e) Sai f) đúng

Bài 6: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Hãy tìm các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm O sao cho

a) Bằng với $\overrightarrow{AB}$.

b) Ngược hướng với $\overrightarrow{OC}$.

Lời giải:

a) $\overrightarrow{FO},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{ED}$ b) $\overrightarrow{CO},\overrightarrow{OF},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{DE}$

Bài 7: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O và M là trung điểm AB.Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

Lời giải:

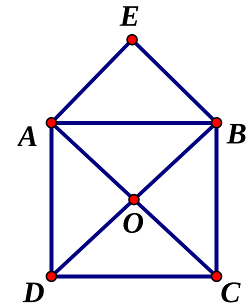
(hình 1.40) Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = a$;

$\overrightarrow{AC} = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$

$\left|\overrightarrow{OA}\right| = OA = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $\left|\overrightarrow{OM}\right| = OM = \frac{a}{2}$

Gọi E là điểm sao cho tứ giác $OBEA$ là hình bình hành khi đó nó cũng là hình vuông

Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE} \Rightarrow \left|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right| = OE = AB = a$



Hình 1.40

Bài 8: Cho tam giác ABC đều cạnh a và G là trọng tâm. Gọi I là trung điểm của AG. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{BI}$.

Lời giải:

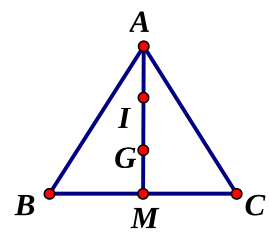
(Hình 1.41)Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = a$

Gọi M là trung điểm của BC

Ta có

$\left|\overrightarrow{AG}\right| = AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\sqrt{AB^2 - BM^2} = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - \frac{a}{4}^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\left|\overrightarrow{BI}\right| = BI = \sqrt{BM^2 + MI^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$



Hình 1.41

Dạng 2: Chứng minh hai vectơ bằng nhau.

1. Phương pháp giải.

Để chứng minh hai vectơ bằng nhau ta chứng minh chúng có cùng độ dài và cùng hướng hoặc dựa vào nhận xét nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

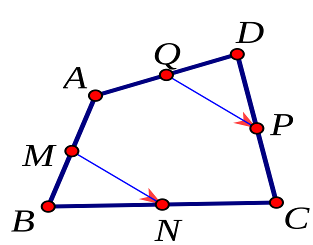
2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA. Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Lời giải:

(hình 1.6)

Do M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC suy ra $MN // AC$ và $MN = \frac{1}{2}AC$ (1).



Hình 1.6

Tương tự QP là đường trung bình của tam giác ADC suy ra $QP // AC$ và $QP = \frac{1}{2}AC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MN//QP$ và $MN = QP$ do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Vậy ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là trung điểm của BC. Dựng điểm B' sao cho $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$.

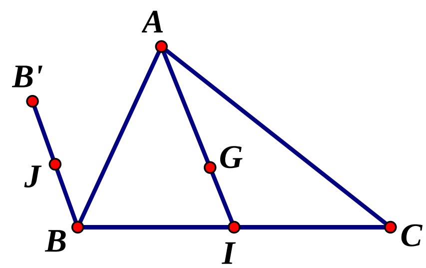
a) Chứng minh: $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

b) Gọi J là trung điểm của BB'. Chứng minh: $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

Lời giải:

(hình 1.7)

a) Vì I là trung điểm của BC nên $BI = CI$ và $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IC}$ do đó hai vectơ $\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{IC}$ bằng nhau hay $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.



Hình 1.7

b) Ta có $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$ suy ra $B'B = AG$ và $BB'//AG$.

Do đó $\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{IG}$ cùng hướng (1).

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $IG = \frac{1}{2}AG$, J là trung điểm BB' suy ra $BJ = \frac{1}{2}BB'$

Vì vậy $BJ = IG$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DC, AB; P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB. Chứng minh $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QB}$.

Lời giải:

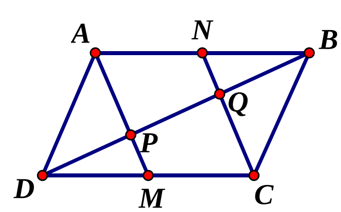
(Hình 1.43)

Ta có tứ giác $DMBN$ là hình bình hành vì $DM = NB = \frac{1}{2}AB,\ DM//NB$.

Suy ra $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{NB}$.

Xét tam giác CDQ có M là trung điểm của DC và $MP//QC$ do đó P là trung điểm của DQ. Tương tự xét tam giác ABP suy ra được Q là trung điểm của PB

Vì vậy $DP = PQ = QB$ từ đó suy ra



Hình 1.43

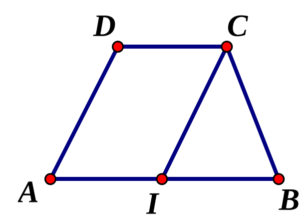
$\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QB}$

Bài 2: Cho hình thang ABCD có hai đáy là AB và CD với $AB = 2CD$. Từ C vẽ $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DA}$. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CB}$.

b) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{DC}$.

Lời giải:



Hình 1.44

(Hình 1.44)

a) Ta có $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DA}$ suy ra $AICD$ là hình bình hành

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IC}$

Ta có $DC = AI$ mà $AB = 2CD$ do đó $AI = \frac{1}{2}AB \Rightarrow I$ là trung điểm AB

Ta có $DC = IB$ và $DC // IB \Rightarrow$ tứ giác $BCDI$ là hình bình hành

Suy ra $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CB}$

b) I là trung điểm của $AB \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ và tứ giác $BCDI$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{DC}$ suy ra $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{DC}$

C. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Hãy tính số các vector (khác $\vec{0}$) mà các điểm đầu và điểm cuối được lấy từ các điểm phân biệt đã cho trong các trường hợp sau:

a) Hai điểm ;

b) Ba điểm ;

c) Bốn điểm ;

Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Liệt kê tất cả các vactor bằng nhau (khác $\vec{0}$) nhận đỉnh hoặc tâm của hình vuông làm điểm đầu và điểm cuối .

Bài 3. Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng AB. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng ;

b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng ;

c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng ;

d) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$;

e) $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$;

f) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\left|\overrightarrow{BC}\right|$.

Bài 4. Xác định vị trí tương đối của ba điểm phân biệt A, B và C trong các trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng ;

b) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Bài 5. Có ba điểm phân biệt thẳng hàng A, B, C. Trong trường hợp nào hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng ? trong trường hợp nào hai vector đó ngược hướng ?

Bài 6. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O.

a) Tìm các vectơ khác $\vec{0}$ và cùng phương với $\overrightarrow{OA}$.

b) Tìm các vectơ bằng $\overrightarrow{AB}$.

c) Vẽ các vectơ bằng $\overrightarrow{AB}$ có các điểm đầu là B, F, C hoặc các điểm cuối là F, D, C.

Bài 7. Cho tứ giác $ABCD$. Chứng minh rằng tứ giác đó là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Bài 8. Cho tứ giác $ABCD$, chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ thì $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Bài 9. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P và Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD và DA. Chứng minh $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$ và $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NM}$.

Bài 10. Cho hình bình hành $ABCD$. Dựng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$. Chứng minh $\overrightarrow{AQ} = \vec{0}$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

§2 TỔNG VÀ HIỆU HAI VECTƠ

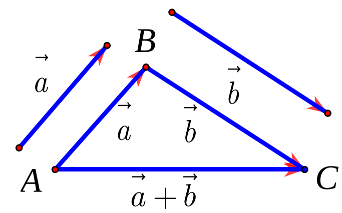
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tổng hai vectơ

a) Định nghĩa:

✧ Cho hai vectơ $\vec{a};\vec{b}$. Từ điểm A tùy ý vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ rồi từ B vẽ $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ khi đó vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a};\vec{b}$.

✧ Kí hiệu $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ (Hình 1.9)



Hình 1.9

b) Tính chất :

✧ Giao hoán : $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

✧ Kết hợp : $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

✧ Tính chất vectơ – không: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}, \forall\vec{a}$

2. Hiệu hai vectơ

a) Vectơ đối của một vectơ.

✧ *Vectơ đối* của vectơ $\vec{a}$ là vectơ ngược hướng và cùng độ dài với vectơ $\vec{a}$

✧ Kí hiệu $-\vec{a}$

Như vậy $\vec{a}+ -\vec{a} =\vec{0}, \forall\vec{a}$ và $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

b) Định nghĩa hiệu hai vectơ:

Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$. Kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+ -\vec{b}$

3. Các quy tắc:

✧ Quy tắc ba điểm : Cho A, B ,C tùy ý, ta có : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

✧ Quy tắc hình bình hành : Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

✧ Quy tắc về hiệu vectơ : Cho O , A , B tùy ý ta có : $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$

✧ *Chú ý:* Ta có thể mở rộng quy tắc ba điểm cho n điểm $A_1,A_2,...,A_n$ thì $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+...+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

Dạng 1: Xác định độ dài tổng, hiệu của các vectơ.

1. Phương pháp giải.

Để xác định độ dài tổng hiệu của các vectơ

✧ Trước tiên sử dụng định nghĩa về tổng, hiệu hai vectơ và các tính chất, quy tắc để xác định định phép toán vectơ đó.

✧ Dựa vào tính chất của hình, sử dụng định lí Pitago, hệ thức lượng trong tam giác vuông để xác định độ dài vectơ đó.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Xác định tổng của hai vec tơ $\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{NC}$; $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AN}$.

Lời giải

Vì $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AN}$ nên: $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AC}$

Vì $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ nên: $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BM}$

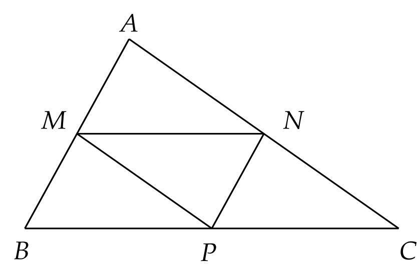
Vì $\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AM}$ nên $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}$

với E là đỉnh của hình bình hành $DAME$.

Vì tứ giác $AMCN$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Các điểm M,N và P lần lượt là trung điểm của AB,AC và BC. Xác định hiệu $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN};\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC};\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN};\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{CP}$.

Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NM}$

Vì $\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{MP}$ nên: $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PN}$

Vì $-\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{NP}$ nên: $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$

Vì $-\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PC}$ nên: $\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC}=30^0$ và $BC=a\sqrt{5}$. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

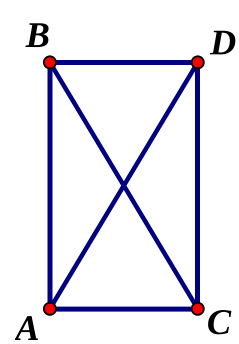
Lời giải:

(hình 1.10)

Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Mà $\sin \widehat{ABC}=\dfrac{AC}{BC}$

$\Rightarrow AC=BC.\sin \widehat{ABC}=a\sqrt{5}.\sin 30^0=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$



Hình 1.10

Do đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

Ta có $AC^2+AB^2=BC^2 \Rightarrow AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=\sqrt{5a^2-\dfrac{5a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$

Vì vậy $\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=AB=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$

Gọi D là điểm sao cho tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

Khi đó theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$

Vì tam giác ABC vuông ở A nên tứ giác $ABDC$ là hình chữ nhật suy ra $AD=BC=a\sqrt{5}$

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=AD=a\sqrt{5}$.

Ví dụ 4: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O và cạnh a. M là một điểm bất kỳ.

a) Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$, $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|$, $\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right|$

b) Chứng minh rằng $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vị trí điểm M. Tính độ dài vectơ $\vec{u}$

<u>Lời giải:</u>

(hình 1.11)

a) + Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

Suy ra $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC$.

Áp dụng định lí Pitago ta có

$AC^2=AB^2+BC^2=2a^2 \Rightarrow AC=\sqrt{2}a$

Vậy $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=a\sqrt{2}$

+ Vì O là tâm của hình vuông nên $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}$ suy ra

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BC}$

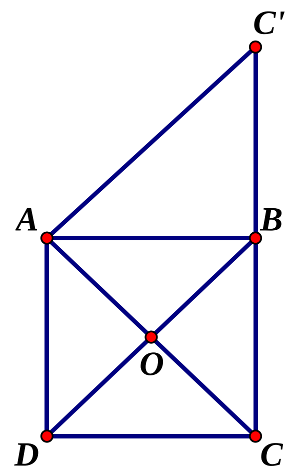
Vậy $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=a$

+ Do $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ suy ra

$\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$

Mà $\left|\overrightarrow{BD}\right|=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=a\sqrt{2}$ suy ra

$\left|\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}\right|=a\sqrt{2}$



Hình 1.11

b) Theo quy tắc phép trừ ta có

$\vec{u} = \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}$

Suy ra $\vec{u}$ không phụ thuộc vị trí điểm M.

Qua A kẻ đường thẳng song song với DB cắt BC tại C'.

Khi đó tứ giác $ADBC'$ là hình bình hành (vì có cặp cạnh đối song song) suy ra $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC'}$

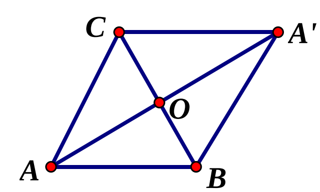
Do đó $\vec{u}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{CC'}$

Vì vậy $\left|\vec{u}\right|=\left|\overrightarrow{CC'}\right|=BC+BC'=a+a=2a$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Lời giải:



Hình 1.45

(Hình 1.45)Theo quy tắc trừ ta có

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=BC=a$

Gọi A' là đỉnh của hình bình hành $ABA'C$ và O là tâm hình nình hành đó. Khi đó ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AA'}$.

Ta có $AO=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

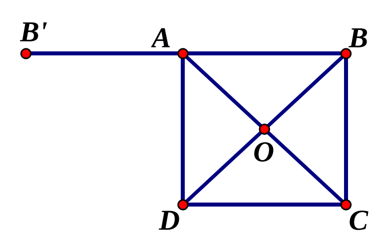
Suy ra $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=AA'=2AO=a\sqrt{3}$

Bài 2: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O và cạnh a. M là một điểm bất kỳ.

a) Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}\right|$, $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|$

b) Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$

Lời giải:



Hình 1.46

(Hình 1.46)

a) Ta có $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO} \Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AO}$

$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}\right|=AO=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AO}$ suy ra

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right|=0$

b) Áp dụng quy tắc trừ ta có

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}= \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD} =\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}$

Lấy B' là điểm đối xứng của B qua A

Khi đó $-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB'} \Rightarrow \overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{BB'}$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=\left|\overrightarrow{BB'}\right|=BB'=2a$

Bài 3: Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $BCD=60^0$. Gọi O là tâm hình thoi. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|, \left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{DC}\right|$.

Lời giải:

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=2a\cos 30^0=a\sqrt{3},$

$\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{CO}\right|=a\cos 60^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Dạng 2: Chứng minh đẳng thức vectơ.

1. Phương pháp giải.

✧ Để chứng minh đẳng thức vectơ ta có các cách biến đổi: vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lương trung gian. Trong quá trình biến đổi ta cần sử dụng linh hoạt ba quy tắc tính vectơ.

✧ ***Lưu ý*:** Khi biến đổi cần phải *hướng đích* , chẳng hạn biến đổi vế phải, ta cần xem vế trái có đại lượng nào để từ đó liên tưởng đến kiến thức đã có để làm sao xuất hiện các đại lượng ở vế trái. Và ta thường biến đổi vế phức tạp về vế đơn giản hơn.

2. Các ví dụ.

Ví dụ 1: Cho năm điểm A,B,C,D,E. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$.

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$.

Lời giải:

a) Biến đổi vế trái ta có

$$VT=\ \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\ +\overrightarrow{CD}+\ \overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}$$

$$=\ \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}\ +\ \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\ +\overrightarrow{DA}$$

$$=\ \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}\ +\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}$$

$$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}=VP \text{ ĐPCM}$$

b) Đẳng thức tương đương với

$$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}\ +\ \overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}\ -\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ (đúng) ĐPCM.

Ví dụ 2: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

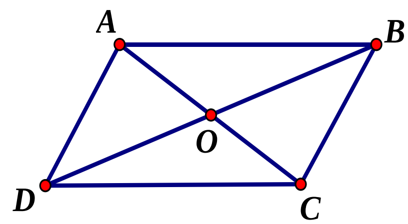
c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$

Lời giải:

(Hình 1.12)

a) Ta có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$

$=-\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\ +\overrightarrow{AC}$



Hình 1.12

Theo quy tắc hình bình hành ta có

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ suy ra

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

b) Vì ABCD là hình bình hành nên ta có: $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AO}=\vec{0}$

Tương tự: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

c) Cách 1: Vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$\Rightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}$

$=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$

Cách 2: Đẳng thức tương đương với

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ (đúng do $ABCD$ là hình bình hành)

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kì.

Lời giải:

(Hình 1.13)

a) Vì PN, MN là đường trung bình của tam giác ABC nên

$PN//BM,\ MN//BP$ suy ra tứ giác $BMNP$ là hình bình hành

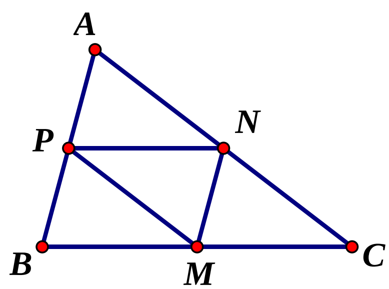
$\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{PN}$

N là trung điểm của $AC\Rightarrow\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{NA}$

Do đó theo quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\ \overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NA}\ +\overrightarrow{AP}$

$=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$



Hình 1.13

b) Vì tứ giác $APMN$ là hình bình hành nên theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AM}$, kết hợp với quy tắc trừ

$\Rightarrow \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM}$

Mà $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$ do M là trung điểm của BC.

Vậy $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$.

c) Theo quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}= \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NC}$

$= \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP} +\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}$

$= \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}$

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

3. Bài tập luyện tập.

Bài 1: Cho bốn điểm A,B,C,D. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BA}$

Lời giải:

a) Áp dụng quy tắc trừ ta có

$\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}$ (đúng)

b) Áp dụng quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC} +\overrightarrow{BD}= \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD} -\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}$ (đúng)

Bài 2: Cho các điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}$

Lời giải:

Cách 1: Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CF}-\overrightarrow{CD} =\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DF}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$ (đúng)

Cách 2: $VT=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}= \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}$

$=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DF}$

$=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}=VP$

Bài 3: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$

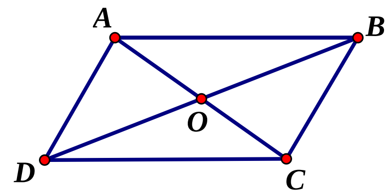
b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$

c) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MB}$

Lời giải:

a) Ta có $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}$ do đó

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$



Hình 1.47

b) Theo quy tắc hình bình hành ta có

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}$

c) Theo câu b) ta có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$

Theo quy tắc trừ ta có $\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BO}$

Mà $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}$ suy ra $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MB}$

Bài 4: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

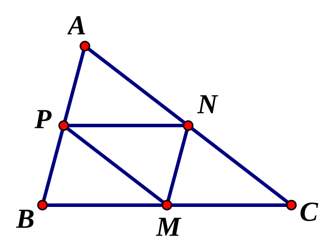
b) $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{BC}$

Lời giải:

(Hình 1.48)

a) Vì $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{PN}$ nên

$\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PN}=\vec{0}$



Hình 1.48

b) Vì $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BM}$ và kết hợp với quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành ta có

$\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{BC}$

Bài 5: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A. Chứng minh:

$\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}=\vec{0}$

Lời giải:

Theo quy tắc trừ và quy tắc hình bình hành ta có

$\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}=\ \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB'}\ +\ \overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AC}\ +\ \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD'}$

$=\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\ -\overrightarrow{AC}-\ \overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}\ +\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Bài 6: Cho ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$

Lời giải:

Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$

Vì ngũ giác đều nên vecto $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}$ cùng phương với $\overrightarrow{OF}$ nên $\vec{u}$ cùng phương với $\overrightarrow{OF}$.

Tương tự $\vec{u}$ cùng phương với $\overrightarrow{OE}$ suy ra $\vec{u}=\vec{0}$.

Bài 7: Cho hình bình hành $ABCD$. Dựng $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BC}$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AQ}=\vec{0}$.

<u>Lời giải:</u>

Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$

Mặt khác $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$ suy ra $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$.

Dạng 3: Xác định điểm thỏa mãn đẳng thức vec tơ

Ví dụ 1: Cho hai điểm phân biệt A và B. Tìm điểm M thỏa mãn một trong các điều kiện sau

a) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}$.

b) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$.

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

d) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AM}$.

Lời giải

a) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}$. Vậy mọi điểm M đều thỏa mãn

b) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow A\equiv B$

Vậy không có điểm M nào thỏa mãn

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$. Vậy M là trung điểm của đoạn thẳng AB

d) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow M\equiv A$.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC}$.

Vậy M được xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BA}$ hay M là đỉnh thứ tư trong hình bình hành $ABCM$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

a) $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$.

b) $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MC}\right|$.

Lời giải

a) Ta có: $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right| \Leftrightarrow MA=BC$

Vậy M cách điểm A một đoạn bằng BC không đổi nên tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A, bán kính $R=BC$.

b) Ta có: $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MC}\right| \Leftrightarrow MA=MC$

Vậy M cách đều hai điểm A và C nên tập hợp các điểm M là đường trung trực của đoạn AC.

Ví dụ 4: Cho hai điểm A và B. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$.

Lời giải

Vẽ hình bình hành $AMBN$

Gọi O là giao điểm hai đường chéo, ta có:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MN}\Rightarrow\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=MN=2MO$$

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}\Rightarrow\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|=AB$$

Điều kiện tương đương $2MO=AB$ hay $MO=\frac{1}{2}AB$

Tập hợp các điểm M có tính chất: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ là đường tròn đường kính AB.

C. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cho tam giác ABC. Hãy xác định các vectơ

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$; c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$; d) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}$;

e) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}$; f) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$; g) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$; h) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}$.

Bài 2. Cho bốn điểm bất kì M, N, P, Q. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MQ}$; b) $\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{MQ}$;

c) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PN}$.

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$ với tâm O. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai?

a) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$; b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$;

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$; d) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$;

e) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$; f) $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$;

g) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$; h) $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BO}$.

Bài 4. Cho ngũ giác $ABCDE$. Chứng minh $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DE}$.

Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Bài 6. Chứng minh rằng đối với tứ giác $ABCD$ bất kì ta luôn có

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$; b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$.

Bài 7. Cho năm điểm A, B, C, D và E. Hãy tính tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$.

Bài 8. Cho bốn điểm A, B, C và D. Chứng minh $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

Bài 9. Cho tam giác ABC. Bên ngoài của tam giác vẽ các hình bình hành $ABIJ$, $BCPQ$, $CARS$.

Chứng minh rằng $\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\vec{0}$.

Bài 10. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$; b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB}$;