

MỘT SỐ BÀI TẬP VẬN DỤNG CAO MŨ - LOGARIT

Câu 1: Cho $x, y \geq 0$, $x + y > 0$ thỏa mãn

$$2^{x^2+y^2} + 2021^{x-y} \cdot \log_2 \frac{x^2+y^2}{x+y} \leq 4^{x+y} + 2021^{x-y}.$$

Tìm tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5$.

A. 2. B. 12. C. $6 + 2\sqrt{2}$. D. $6 - 4\sqrt{2}$.

Câu 2: Tìm số giá trị nguyên của tham số thực m để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn $e^{x^2+y^2-m} + e^{x+y+xy-m} = x^2 + y^2 + x + y + xy - 2m + 2$.

A. 6. B. 9. C. 8. D. 7.

Câu 3: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2 \frac{x^2+y^2}{3xy+x^2} + x^2 + 2(y^2+1) \leq \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}} 2^{1+3xy}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x-y}{y} + \frac{2y^2}{2xy-y^2}$.

A. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{5}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 4: Cho x, y thỏa mãn $\log_2(x+y) + (x+y)^2 - 2(x+y) = 1$ (với $x \geq 2y > 0$). Tìm giá trị lớn nhất của $S = x^2 + 2xy + 10y^2$.

A. 6. B. 9. C. 8. D. 4.

Câu 5: Cho phương trình $e^x = \ln(x+a) + a$, với a là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc khoảng $(0; 19)$ để phương trình có nghiệm dương?

A. 15. B. 18. C. 17. D. 16.

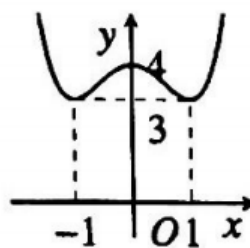
Câu 6: Cho x, y thỏa mãn $x \geq 1, y \geq 1$ và $\log_3 \frac{x+y}{4xy} = 4xy - 3(x+y) - 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 - 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ thuộc tập nào dưới đây?

A. $[5; 9)$. B. $[-5; 0)$. C. $[0; 5)$. D. $[9; +\infty)$.

Câu 7: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x, y \leq 1$ trong đó x, y không đồng thời bằng 0 hoặc 1 và $\log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P = 2x + y$.

A. 2. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. 0.

Câu 8: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021; 2021]$ để phương trình $\log \frac{f(x)}{mx^2} + x[f(x) - mx] = mx^3 - f(x)$ có hai nghiệm dương phân biệt?

- A. 2019. B. 2021. C. 2020. D. 2022.
- Câu 9:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2021; 2021)$ để phương trình $e^{x-m} = \ln x + m$ có nghiệm thực?
- A. 2019. B. 2018. C. 2020. D. 2021.
- Câu 10:** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn $1 \leq x \leq 2020$ và $x + x^2 - 9^y = 3^x$?
- A. 2020. B. 1010. C. 6. D. 7.
- Câu 11:** Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $2021^{2x^2-4x+9} - 2021^{x^2+5x+1} - (x-1)(8-x) < 0$
- A. 7. B. 8. C. 6. D. 5.
- Câu 12:** Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $5^{x^2+1} + x^2 + 2x - 1 = 25^{1-x}$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$.
- A. $P = -6$. B. $P = 2$. C. $P = 6$. D. $P = -2$.
- Câu 13:** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2(x\sqrt{x^2+3} - x^2) \leq \sqrt{x^2+3} - 2x$ là
- A. Vô số. B. 2. C. 1. D. 3.
- Câu 14:** Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log \frac{x^3+3x^2-3x-5}{x^2+1} + (x+1)^3 = x^2+6x+7$.
- A. $-2+\sqrt{3}$. B. -2 . C. 0. D. $-2-\sqrt{3}$.
- Câu 15:** Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $e^{x^2-2x+5} - e^{2x^2-5x+1} > 2x^2 - 6x - 8$ là
- A. 5. B. -5 . C. 6. D. -6 .
- Câu 16:** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 < y \leq 2020$ và $\log_3\left(\frac{2^x-1}{y}\right) = y+1-2^x$?
- A. 2021. B. 10. C. 2020. D. 11.
- Câu 17:** Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2021^{\frac{2x+y}{(x+1)^2}} = \frac{2x+y}{(x+1)^2}$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = 2y - 3x$ bằng
- A. $P_{\min} = \frac{5}{6}$. B. $P_{\min} = \frac{1}{2}$. C. $P_{\min} = \frac{3}{4}$. D. $P_{\min} = \frac{7}{8}$.
- Câu 18:** Cho hai số dương x, y thỏa mãn: $\log_2(4x + y + 2xy + 2)^{y+2} = 8 - (2x-2)(y+2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x + y$ có dạng $M = a\sqrt{b} + c$ với $a, b \in \mathbb{N}, a > 2$. Tính $S = a + b + c$
- A. $S = 7$. B. $S = 19$. C. $S = 17$. D. $S = 3$.
- Câu 19:** Cho 3 số thực a, b, c thỏa $\log_2 \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2} = a(a-4) + b(b-4) + c(c-4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a+2b+3c}{a+b+c}$ là:
- A. $\frac{12+\sqrt{30}}{3}$. B. $\frac{4+\sqrt{30}}{3}$. C. $\frac{8+\sqrt{30}}{3}$. D. $\frac{6+\sqrt{30}}{3}$.
- Câu 20:** Gọi x_0 là nghiệm thực của phương trình $x^2 \ln \frac{x\sqrt{5x^2+1}}{x^2+1} = x^2 + 1 - \sqrt{5x^4+x^2}$, biết bình phương của nghiệm x_0 có dạng $x_0^2 = \frac{a+\sqrt{b}}{c}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$), $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = a - b + 2c$.

- A. $S = 26$. B. $S = 34$. C. $S = -8$. D. $S = 0$.

Câu 21: Cho phương trình: $\log_2 \left[(x+1) \cdot (\sqrt{x^2+4} + x) \right] + \sqrt{x^2+4} = 1-2x$ có nghiệm dạng $\frac{a+c\sqrt{13}}{b}$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $a+b$ bằng

- A. 2. B. 0. C. -1. D. 1.

Câu 22: Cho phương trình $\log_2 \frac{x+1}{(x-2)^2} = 2x^2 - 9x + 8$ có 2 nghiệm $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$. Giá trị của biểu thức $2x_2 - 5x_1$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 23: Tổng các nghiệm của phương trình $\ln(x+8) + 2x + 18 = 2 \ln \frac{x+2}{x} + 4\sqrt{x+8} + \frac{8}{x^2}$ là

- A. -7. B. $-3-2\sqrt{3}$. C. $-3+2\sqrt{3}$. D. 1.

Câu 24: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2 (x\sqrt{x^2+3} - x^2) \leq \sqrt{x^2+3} - 2x$ là

- A. 2. B. 1. C. 3. D. Vô số.

Câu 25: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{(x-3)^2} \cdot \log_2 (x^2 - 6x + 11) = 4^{x^2+3} \cdot \log_2 (2x^2 + 8)$ là:

- A. -3. B. $\frac{3}{2}$. C. 4. D. -6.

Câu 26: Tổng các nghiệm phương trình: $\log_2 \frac{2x^2+2}{3x+1} = (x-1)(2-4x)$ là

- A. $\sqrt{3}$. B. 1. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 27: Cho phương trình $\frac{1}{2} \log_2 (x+2) + x + 3 = \log_2 \frac{2x+1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}$, gọi S là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của S là

- A. $S = -2$. B. $S = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$. C. $S = 2$. D. $S = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Câu 28: Cho hàm số $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x) + x^{2021} + x^{2023}$. Số nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-2021; 2021]$ của bất phương trình $f(2^x) + f(x-3) \leq 0$ là:

- A. 2021. B. 2020. C. 2022. D. 2023.

Câu 29: Biết phương trình $\log_2 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2 \log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$ có một nghiệm dạng $x = a + b\sqrt{2}$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính $2a - b$.

- A. 3. B. 4. C. 6. D. 5.

Câu 30: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y), x \leq 2022$ và thỏa mãn phương trình $\log_2 x + \log_2 (x-y) = 1 + 4 \log_4 y$

- A. 2020. B. 1010. C. 2019. D. 1011.

Câu 31: Để phương trình: $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = m$ có nghiệm, thì các giá trị cần tìm của tham số m là:

- A. $1 \leq m \leq \sqrt{2}$. B. $\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}$. C. $3 \leq m \leq 4$. D. $2\sqrt{2} \leq m \leq 3$.

Câu 32: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.

A. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{3}$. B. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3}$. C. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{9}$. D. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{9}$.

Câu 33: Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$. B. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$. C. $m \in (-\infty; 0]$. D. $m \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Câu 34: Cho x, y là các số dương thỏa mãn $\log_3 \frac{x+4y}{x+y} = 2x - y + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{3x^4y + 2xy + 2y^2}{x(x+y)^2}$.

A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{3}{2}$. C. 2. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 35: Cho bất phương trình:

$$\log_2 \left(\frac{x^2 + x}{\frac{1}{3}x^3 + 4x - m - \cos x + \sqrt{3} \sin x} \right) \leq \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - m - \cos x + \sqrt{3} \sin x \quad (1)$$

Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-10; 0)$ sao cho bất phương trình (1) thỏa mãn với mọi giá trị của x thuộc khoảng $(0;1)$.

A. 9. B. 8. C. 1. D. 7.

Câu 36: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$\log_2 \frac{3x^2 + x + m}{2x^2 - 2x + 1} = 2x^2 - 10x + 5 - 2m$$
 có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 2.

A. 1. B. vô số. C. 2. D. 0.

Câu 37: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $e^{2x+y+1} - e^{3x+2y} = x + y - 1$, đồng thời thỏa mãn $\log_2^2(2x + y - 1) - (m + 4)\log_2 x + m^2 + 4 = 0$.

A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 38: Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2-2x+3}(2|x-m|+2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là

A. 3 B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 39: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời $2^x + y \leq \log_2(x - y)$ và x, y thuộc đoạn $[-2; 10]$?

A. 6. B. 7. C. 5. D. 8.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.B	3.D	4.C	5.C	6.A	7.B	8.A	9.C	10.D
11.C	12.C	13.C	14.B	15.C	16.B	17.D	18.D	19.D	20.D
21.D	22.C	23.B	24.B	25.D	26.D	27.D	28.D	29.D	30.D
31.D	33.B	32.B	33.C	34.A	35.D	36.A	37.A	38.A	

HƯỚNG DẪN GIẢI THAM KHẢO**Câu 1:** Cho $x, y \geq 0, x + y > 0$ thỏa mãn

$$2^{x^2+y^2} + 2021^{x-y} \cdot \log_2 \frac{x^2+y^2}{x+y} \leq 4^{x+y} + 2021^{x-y}.$$

Tìm tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5$.**A.** 2.**B.** 12.**C.** $6 + 2\sqrt{2}$.**D.** $6 - 4\sqrt{2}$.**Lời giải**Với mỗi cặp $(x; y)$ thỏa mãn giả thiết, ta xét hàm số $f(t) = 2^t + 2021^{x-y} \cdot \log_2 t$ với $t > 0$.Vì $f'(t) = 2^t \cdot \ln 2 + \frac{2021^{x-y}}{t \ln 2} > 0, \forall t > 0$, nên $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có: } 2^{x^2+y^2} + 2021^{x-y} \cdot \log_2 \frac{x^2+y^2}{x+y} \leq 4^{x+y} + 2021^{x-y} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2} + 2021^{x-y} \cdot \log_2 (x^2+y^2) \leq 2^{2(x+y)} + 2021^{x-y} \cdot \log_2 (2(x+y))$$

$$\Leftrightarrow f(x^2+y^2) \leq f(2(x+y)) \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 2(x+y) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2 \quad (C_1).$$

Hình tròn (C_1) có tâm $I(1;1)$, bán kính $r = \sqrt{2}$.

$$\text{Lại có: } P = x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = P+5 \quad (C_2).$$

Do $(x-3)^2 + (y-1)^2 \geq 0$ nên $P+5 \geq 0 \Leftrightarrow P \geq -5$.Nếu $P = -5$ thì $x=3, y=1$ không thỏa mãn giả thiết.Với $P > -5$ thì (C_2) là đường tròn tâm $K(3,1)$, bán kính $R = \sqrt{P+5}$.Vì $IK = 2 > r = \sqrt{2}$ nên điểm $K(3,1)$ nằm bên ngoài (C_1) .Do đó $(C_1), (C_2)$ có điểm chung khi và chỉ khi

$$|R-r| \leq IK \leq R+r \Leftrightarrow |R-\sqrt{2}| \leq 2 \leq R+\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2-\sqrt{2} \leq R \leq 2+\sqrt{2} \Leftrightarrow 2-\sqrt{2} \leq \sqrt{P+5} \leq 2+\sqrt{2} \Leftrightarrow 1-4\sqrt{2} \leq P \leq 1+4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \min P = 1-4\sqrt{2}; \max P = 1+4\sqrt{2} \Rightarrow \min P + \max P = 2.$$

Câu 2: Tìm số giá trị nguyên của tham số thực m để tồn tại các số thực x, y thỏa mãn

$$e^{x^2+y^2-m} + e^{x+y+xy-m} = x^2 + y^2 + x + y + xy - 2m + 2.$$

A. 6.**B.** 9.**C.** 8.**D.** 7.**Lời giải**Xét hàm số $f(t) = e^t - t - 1, \forall t \in \mathbb{R}$.

$$f'(t) = e^t - 1 \text{ và } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Ta thấy $f'(t)$ đổi dấu từ “-” sang “+” khi qua $t=0$ nên $f(t) \geq f(0) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Do đó: } \begin{cases} e^{x^2+y^2-m} - (x^2+y^2-m) - 1 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \\ e^{x+y+xy-m} - (x+y+xy-m) - 1 \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x^2+y^2 = m \\ x+y+xy = m \end{cases}.$$

$$\text{Hay } e^{x^2+y^2-m} + e^{x+y+xy-m} = x^2+y^2+x+y+xy-2m+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = m & (1) \\ x+y+xy = m & (2) \end{cases}$$

$$\text{Đặt } S = x+y, P = x.y, \text{ ta có: } \begin{cases} S^2 - 2P = m \\ S + P = m \end{cases} \Rightarrow S^2 - S - 3P = 0. \text{ Vì } S^2 \geq 4P \Rightarrow S \in [0; 4]$$

Lấy $(1)+2.(2)$ về theo về ta được: $S^2 + 2S = 3m \quad (3)$.

Xét hàm số $f(S) = S^2 + 2S, S \in [0; 4]$, có $f'(S) = 2S + 2 > 0, \forall S \in [0; 4]$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (3)$ có nghiệm $\Leftrightarrow f(0) \leq 3m \leq f(4) \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 8$.

Vậy, có 9 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 3: Xét các số thực dương $x; y$ thỏa mãn $\log_2 \frac{x^2 + y^2}{3xy + x^2} + x^2 + 2(y^2 + 1) \leq \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}} 2^{1+3xy}$. Tìm

giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x-y}{y} + \frac{2y^2}{2xy - y^2}$.

A. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

B. $\frac{5}{2}$.

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có $\log_2 \frac{x^2 + y^2}{3xy + x^2} + x^2 + 2(y^2 + 1) \leq \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}} 2^{1+3xy}$

$$\Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{x^2 + y^2}{3xy + x^2} \right) + x^2 + 2y^2 + 1 \leq 3xy \quad (x; y > 0)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 + y^2) - \log_2 (3xy + x^2) + x^2 + 2y^2 + 1 \leq 3xy$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2x^2 + 2y^2) + 2x^2 + 2y^2 \leq \log_2 (3xy + x^2) + 3xy + x^2 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$, nên hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó

$$(1) \Leftrightarrow f(2x^2 + 2y^2) \leq f(3xy + x^2) \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 \leq 3xy + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3xy + 2y^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} \right)^2 - 3 \frac{x}{y} + 2 \leq 0 \quad (\text{vì } y > 0) \Leftrightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 2 \quad (2).$$

$$\text{Ta thấy } P = \frac{x-y}{y} + \frac{2y^2}{2xy - y^2} = \frac{2x^2 - 3xy + 3y^2}{2xy - y^2} = \frac{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\frac{x}{y} + 3}{2\frac{x}{y} - 1}.$$

Đặt $t = \frac{x}{y}$ thì $t \in [1; 2]$ (do (2)). Khi đó

$$P = \frac{2t^2 - 3t + 3}{2t - 1} = t - 1 + \frac{2}{2t - 1} = \frac{1}{2}(2t - 1) + \frac{2}{2t - 1} - \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{2}(2t - 1) \cdot \frac{2}{2t - 1}} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } 2t - 1 = 2 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{2}.$$

Vậy $\min P = \frac{3}{2}$, đạt được khi $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$.

Câu 4: Cho x, y thỏa mãn $\log_2 (x+y) + (x+y)^2 - 2(x+y) = 1$ (với $x \geq 2y > 0$). Tìm giá trị lớn nhất của $S = x^2 + 2xy + 10y^2$.

A. 6.

B. 9.

C. 8.

D. 4.

Lời giải

Cách 1: $\log_2 (x+y) + (x+y)^2 - 2(x+y) = 1$

$$\Leftrightarrow 2\log_2(x+y) - \log_2(x+y) + (x+y)^2 - 2(x+y) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+y)^2 + (x+y)^2 - \log_2 2(x+y) - 2(x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+y)^2 + (x+y)^2 = \log_2 2(x+y) + 2(x+y) (*)$$

Đặt $f(t) = \log_2 t + t$, với $t > 0$.

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \text{ với mọi } t > 0.$$

Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$(*) \Leftrightarrow f((x+y)^2) = f(2(x+y)) \Leftrightarrow (x+y)^2 = 2(x+y) \Leftrightarrow x+y = 2 \text{ (Do } x+y > 0).$$

$$\text{Ta được } S = x^2 + 2xy + 10y^2 = x^2 + 2x(2-x) + 10(2-x)^2 = 9x^2 - 36x + 40.$$

$$\text{Do } \begin{cases} x \geq 2y > 0 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2(2-x) > 0 \Rightarrow \frac{4}{3} \leq x < 2, S' = 18x - 36 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

x	$4/3$	2
S'	—	
S	8 	

Dựa vào bảng biến thiên: $S_{\max} = S\left(\frac{4}{3}\right) = 8$ khi $x = \frac{4}{3}$ và $y = \frac{2}{3}$.

Cách 2: $\log_2(x+y) + (x+y)^2 - 2(x+y) = 1.$

Đặt $t = x+y$, giả thiết đã cho trở thành: $\log_2 t = -t^2 + 2t + 1$ (1).

Điều kiện: $t > 0$.

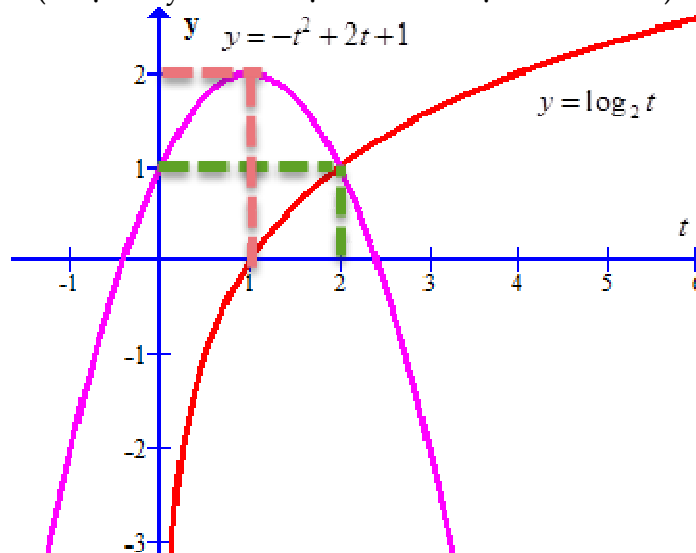
Phương trình (1) là phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = \log_2 t$ và $y = -t^2 + 2t + 1$.

Trên $(0; 1)$, ta có $-t^2 + 2t + 1 > 1 > 0 > \log_2 t$.

Trên $[1; +\infty)$, hàm số $y = \log_2 t$ đồng biến, hàm số $y = -t^2 + 2t + 1$ nghịch biến.

Mà phương trình (1) có nghiệm $t = 2$ nên $t = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

(Đoạn này có thể dựa vào đồ thị 2 hàm trên).



Từ đó $x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x$.

Ta được $S = x^2 + 2xy + 10y^2 = x^2 + 2x(2 - x) + 10(2 - x)^2 = 9x^2 - 36x + 40$.

Do $\begin{cases} x \geq 2y > 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2(2 - x) > 0 \Rightarrow \frac{4}{3} \leq x < 2, S' = 18x - 36 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

x	$\frac{4}{3}$	2
S'	—	
S		

Dựa vào bảng biến thiên: $S_{\max} = S\left(\frac{4}{3}\right) = 8$ khi $x = \frac{4}{3}$ và $y = \frac{2}{3}$.

Câu 5: Cho phương trình $e^x = \ln(x + a) + a$, với a là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc khoảng $(0; 19)$ để phương trình có nghiệm dương?

A. 15.

B. 18.

C. 17.

D. 16.

Lời giải

Từ giả thiết $e^x = \ln(x + a) + a \Leftrightarrow e^x + x = \ln(x + a) + x + a \Leftrightarrow e^x + x = e^{\ln(x + a)} + \ln(x + a)$.

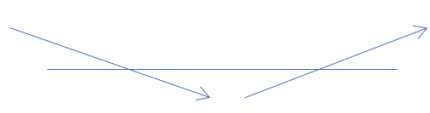
Xét hàm số đặc trưng $f(t) = e^t + t$ có $f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t$.

Suy ra $f(x) = f(\ln(x + a)) \Leftrightarrow x = \ln(x + a) \Leftrightarrow x + a = e^x \Leftrightarrow a = e^x - x$.

Đặt $g(x) = e^x - x \Rightarrow g'(x) = e^x - 1 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	—	0	+
$g(x)$	$+\infty$		$+\infty$



Để phương trình có nghiệm dương thì $a > 1$.

Do $a \in (0, 19)$ suy ra $a \in \{2; 3; \dots; 18\}$. Vậy có 17 giá trị cần tìm.

Câu 6: Cho x, y thỏa mãn $x \geq 1, y \geq 1$ và $\log_3 \frac{x+y}{4xy} = 4xy - 3(x+y) - 1$. Giá trị lớn nhất của biểu

thức $P = x^2 + y^2 - 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ thuộc tập nào dưới đây?

A. $[5; 9)$.

B. $[-5; 0)$.

C. $[0; 5)$.

D. $[9; +\infty)$.

Lời giải

Với $x \geq 1, y \geq 1$ suy ra: $\begin{cases} x + y \geq 2 \\ 4xy \geq 4 \end{cases}$.

Khi đó $\log_3 \frac{x+y}{4xy} = 4xy - 3(x+y) - 1 \Leftrightarrow \log_3(x+y) - \log_3(4xy) = 4xy - 3(x+y) - 1$

$\Leftrightarrow \log_3(x+y) + 1 + 3(x+y) = \log_3(4xy) + 4xy$

$\Leftrightarrow \log_3(3x+3y) + 3(x+y) = \log_3(4xy) + 4xy(*)$.

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $(0; +\infty)$.

Do $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0$ với $\forall t \in (0; +\infty)$ nên hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Suy ra: $(*) \Leftrightarrow f(3x+3y) = f(4xy) \Leftrightarrow 3(x+y) = 4xy$.

Ta có: $4xy \leq (x+y)^2 \Leftrightarrow 3(x+y) \leq (x+y)^2 \Rightarrow x+y \geq 3$ (1).

Mặt khác $x \geq 1, y \geq 1$ nên: $(x-1)(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow xy+1 \geq x+y \Leftrightarrow 4(xy+1) \geq 4(x+y)$

$\Leftrightarrow 3(x+y)+4 \geq 4(x+y) \Leftrightarrow x+y \leq 4$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 3 \leq x+y \leq 4$.

$$P = x^2 + y^2 - 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = (x+y)^2 - 2xy - \frac{3(x+y)}{xy} = (x+y)^2 - \frac{3}{2}(x+y) - 4.$$

Đặt $x+y=t \Rightarrow t \in [3;4]$. Hàm số $g(t) = t^2 - \frac{3}{2}t - 4$ có $g'(t) = 2t - \frac{3}{2} > 0$ với $\forall t \in [3;4]$,

suy ra $g(t) \leq g(4) = 6$.

Vậy $\max P = 6$ khi $x=1; y=3$ hoặc $x=3; y=1$.

Câu 7: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0 \leq x, y \leq 1$ trong đó x, y không đồng thời bằng 0 hoặc 1 và $\log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P với $P = 2x + y$.

A. 2..

B. 1.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 0.

Lời giải

Dựa vào điều kiện bài toán ta nhận xét: $\frac{x+y}{1-xy} > 0; 1-xy \neq 0; x+y > 0; 1-xy > 0$.

Ta có: $\log_3 \left(\frac{x+y}{1-xy} \right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0 \Leftrightarrow \log_3(x+y) - \log_3(1-xy) + xy + x + y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \log_3(x+y) + x + y = \log_3(1-xy) + 1 - xy$. Xét hàm số $g(t) = \log_3 t + t$ với $t > 0$.

Để ý, $g'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $g(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

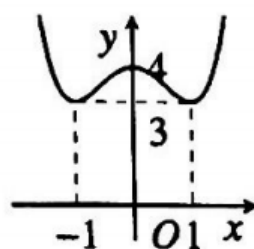
Vậy ta có $g(x+y) = g(1-xy) \Leftrightarrow x+y = 1-xy \Leftrightarrow y = \frac{1-x}{1+x}$. Suy ra $P = 2x + \frac{1-x}{1+x}$.

Xét hàm số $f(x) = 2x + \frac{1-x}{1+x}$ với $x \in [0;1]$. Ta có $f'(x) = 2 - \frac{2}{(1+x)^2}$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Ta có $f(0) = 1, f(1) = 2$. Vậy $\min_{[0;1]} f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$, hay $P_{\min} = 1$ khi $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

Câu 8: Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2021; 2021]$ để phương trình $\log \frac{f(x)}{mx^2} + x[f(x) - mx] = mx^3 - f(x)$ có hai nghiệm dương phân biệt?

A. 2019

B. 2021.

C. 2020.

D. 2022.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số suy ra $f(x)$ có ba điểm cực trị là -1 ; 0 ; 1 . Do đó

$$f'(x) = ax(x^2 - 1) \Rightarrow f(x) = \frac{a}{4}x^4 - \frac{a}{2}x^2 + b.$$

Mặt khác, vì đồ thị hàm số $f(x)$ đi qua hai điểm $(0; 4)$, $(1; 3)$ nên

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 4 \geq 3, \forall x.$$

Điều kiện $\frac{f(x)}{mx^2} > 0$ suy ra $m > 0$.

$$\log \frac{f(x)}{mx^2} + x[f(x) - mx] = mx^3 - f(x) \Rightarrow \log f(x) + f(x) + xf(x) = \log(mx^2) + mx^2 + x(mx^2).$$

$$\Leftrightarrow \log[(x+1)f(x)] + (x+1).f(x) = \log[(x+1)mx^2] + (x+1).mx^2 \quad (*) \quad (\text{Do } x+1 > 0).$$

Xét hàm số $g(t) = \log t + t$ với $t > 0$. Ta có $g'(t) = \frac{1}{t \ln 10} + 1 > 0$ với $t > 0$.

$$\text{Từ } (*) \text{ ta có } (x+1)f(x) = (x+1)mx^2 \Leftrightarrow m = \frac{f(x)}{x^2} = \frac{x^4 - 2x^2 + 4}{x^2} = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 6.$$

Đặt $u = x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{2}$, khi đó $m = u^2 - 6, \forall u \geq 2\sqrt{2}$.

Ứng với mỗi giá trị của $u > 2\sqrt{2}$ cho ta hai giá trị dương của x nên yêu cầu bài toán đưa về điều kiện là tìm m để phương trình $m = u^2 - 6$ có đúng một nghiệm $u > 2\sqrt{2}$.

Đặt $h(u) = u^2 - 6$ với $u > 2\sqrt{2}$.

Bảng biến thiên của hàm số $h(u)$.

u	$-\infty$	0	$2\sqrt{2}$	$+\infty$
$h(u)$	$+\infty$		-6	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m > 2$ thỏa yêu cầu bài toán.

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-2021; 2021]$ nên $m \in \{3; 4; \dots; 2021\}$.

Vậy có 2019 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2021; 2021)$ để phương trình $e^{x-m} = \ln x + m$ có nghiệm thực?

A. 2019.

B. 2018.

C. 2020.

D. 2021.

Lời giải

$$\text{Ta có: } e^{x-m} = \ln x + m \Leftrightarrow e^{x-m} + x - m = \ln x + x \Leftrightarrow e^{x-m} + x - m = e^{\ln x} + \ln x \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = e^t + t, \forall t \in \mathbb{R}$ thì (1) trở thành $f(x-m) = f(\ln x)$.

Có $f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ từ đó

$$f(x-m) = f(\ln x) \Leftrightarrow x-m = \ln x \Leftrightarrow m = x - \ln x \text{ điều kiện } x > 0$$

Xét hàm số $g(x) = x - \ln x$ trên $(0; +\infty)$

Có $g'(x) = 1 - \frac{1}{x}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$	$+\infty$		1	$+\infty$

$y = m$

Để phương trình có nghiệm thực điều kiện là $m \geq 1$ mà $m \in (-2021; 2021)$ nên $1 \leq m < 2021$ suy ra có 2020 giá trị nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 10: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn $1 \leq x \leq 2020$ và $x + x^2 - 9^y = 3^x$?

A. 2020.

B. 1010.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Ta có: $x + x^2 - 9^y = 3^y \Leftrightarrow x + x^2 = 3^y + 3^{2y}$ (1).

Xét hàm: $f(t) = t + t^2$, $t > 0$.

Khi đó: $f'(t) = 1 + 2t > 0$ với mọi $t > 0 \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Vì vậy (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(3^y) \Leftrightarrow x = 3^y$.

Theo giả thiết $1 \leq x \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq 3^y \leq 2020 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \log_3 2020$.

Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow x \in \{1; 3; 9; 27; 81; 243; 729\}$.

Vậy có 7 cặp số (x, y) thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 11: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình

$$2021^{2x^2-4x+9} - 2021^{x^2+5x+1} - (x-1)(8-x) < 0$$

A. 7.

B. 8.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Từ giả thiết:

$$2021^{2x^2-4x+9} - 2021^{x^2+5x+1} - (x-1)(8-x) < 0 \Leftrightarrow 2021^{2x^2-4x+9} + x^2 - 9x + 8 < 2021^{x^2+5x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2021^{2x^2-4x+9} + 2x^2 - 4x + 9 < 2021^{x^2+5x+1} + x^2 + 5x + 1 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = 2021^t + t \Rightarrow f'(t) = 2021^t \ln 2021 + 1 > 0 \forall t \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến.

Từ (1) ta có $f(2x^2 - 4x + 9) < f(x^2 + 5x + 1) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 9 < x^2 + 5x + 1$.

$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 8.$$

Yêu cầu của bài toán: $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Vậy bất phương trình có 6 nghiệm nguyên.

Câu 12: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $5^{x^2+1} + x^2 + 2x - 1 = 25^{1-x}$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$.

A. $P = -6$.

B. $P = 2$.

C. $P = 6$.

D. $P = -2$.

Lời giải

Phương trình tương đương: $5^{x^2+1} + x^2 + 1 = 5^{2-2x} + 2 - 2x$.

Xét hàm số $f(t) = 5^t + t$ trên $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow f'(t) = 5^t \ln 5 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R}.$$

Ta có: $5^{x^2+1} + x^2 + 1 = 5^{2-2x} + 2 - 2x \Leftrightarrow f(x^2+1) = f(2-2x) \Leftrightarrow x^2+1 = 2-2x$.

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + \sqrt{2} \\ x_2 = -1 - \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 6.$$

Câu 13: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2(x\sqrt{x^2+3}-x^2) \leq \sqrt{x^2+3}-2x$ là

A. Vô số.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Điều kiện: $x\sqrt{x^2+3}-x^2 > 0 \Leftrightarrow x(\sqrt{x^2+3}-x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ (vì $\sqrt{x^2+3} > x, \forall x \in \mathbb{R}$)

$$\log_2(x\sqrt{x^2+3}-x^2) \leq \sqrt{x^2+3}-2x \Leftrightarrow \log_2 \frac{3x^2}{x\sqrt{x^2+3}+x^2} \leq \sqrt{x^2+3}-2x$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{3x}{\sqrt{x^2+3}+x} \leq \sqrt{x^2+3}-2x \Leftrightarrow \log_2 3x - \log_2(\sqrt{x^2+3}+x) \leq \sqrt{x^2+3}-2x$$

$$\Leftrightarrow 3x + \log_2 3x \leq (\sqrt{x^2+3}+x) + \log_2(\sqrt{x^2+3}+x) \Leftrightarrow f(3x) \leq f(\sqrt{x^2+3}+x) \quad (*)$$

Với $f(t) = t + \log_2 t$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Do đó bất phương trình $(*) \Leftrightarrow 3x \leq \sqrt{x^2+3}+x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} \geq 2x \Leftrightarrow x^2+3 \geq 4x^2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

So điều kiện $x > 0$ ta được $0 < x \leq 1$. Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 1$.

Vậy bất phương trình có 1 nghiệm nguyên.

Câu 14: Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình

$$\log \frac{x^3+3x^2-3x-5}{x^2+1} + (x+1)^3 = x^2+6x+7.$$

A. $-2+\sqrt{3}$.

B. -2.

C. 0.

D. $-2-\sqrt{3}$.

Lời giải

Điều kiện: $\frac{x^3+3x^2-3x-5}{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow x^3+3x^2-3x-5 > 0 \Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1-6x-6 > 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 - 6(x+1) > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2+2x-5) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1-\sqrt{6} < x < -1 \\ x > -1+\sqrt{6} \end{cases}.$$

Ta có: $\log \frac{x^3+3x^2-3x-5}{x^2+1} + (x+1)^3 = x^2+6x+7$.

$$\Leftrightarrow \log(x^3+3x^2-3x-5) - \log(x^2+1) = x^2+6x+7 - (x+1)^3.$$

$$\Leftrightarrow \log(x^3+3x^2-3x-5) + x^3+3x^2-3x-5 = \log(x^2+1) + x^2+1 \quad (*).$$

Xét hàm đặc trưng: $f(t) = \log t + t$ ($t > 0$). Ta có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 10} + 1$. Với $t > 0 \Rightarrow f'(t) > 0$.

Vậy hàm $f(t) = \log t + t$ đồng biến với $t > 0$.

Phương trình $(*) \Leftrightarrow f(x^3+3x^2-3x-5) = f(x^2+1)$

$$\Leftrightarrow x^3+3x^2-3x-5 = x^2+1. \Leftrightarrow x^3+2x^2-3x-6 = 0 \Leftrightarrow (x^3+8) + (2x^2-3x-14) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4) + (x+2)(2x-7) = 0. \Leftrightarrow (x+2)(x^2-3) = 0. \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 & (tm) \\ x = -\sqrt{3} & (tm) \\ x = \sqrt{3} & (tm) \end{cases}$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng -2.

Câu 15: Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $e^{x^2-2x+5} - e^{2x^2-5x+1} > 2x^2-6x-8$ là

- A. 5. B. -5. C. 6. D. -6.

Lời giải

Ta có: $e^{x^2-2x+5} - e^{2x^2-5x+1} > 2x^2 - 6x - 8$

$$\Leftrightarrow e^{x^2-2x+5} - e^{2x^2-5x+1} > 2(2x^2 - 5x + 1) - 2(x^2 - 2x + 5)$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2-2x+5} + 2(x^2 - 2x + 5) > e^{2x^2-5x+1} + 2(2x^2 - 5x + 1) \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = e^t + 2t \Rightarrow f'(t) = e^t + 2 > 0 \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (*) ta có $f(x^2 - 2x + 5) > f(2x^2 - 5x + 1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 > 2x^2 - 5x + 1$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 4$$

Mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0; 1; 2; 3\}$. Vậy tổng các nghiệm nguyên bằng 6.

Câu 16: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $0 < y \leq 2020$ và $\log_3 \left(\frac{2^x - 1}{y} \right) = y + 1 - 2^x$?

- A. 2021. B. 10. C. 2020. D. 11.

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết ta có: } \begin{cases} y > 0 \\ \frac{2^x - 1}{y} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x > 1 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } \log_3 \left(\frac{2^x - 1}{y} \right) = y + 1 - 2^x \Leftrightarrow \log_3 (2^x - 1) + (2^x - 1) = \log_3 y + y \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $(0; +\infty)$

Khi đó $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0$. Do đó hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Phương trình (*) có dạng $f(2^x - 1) = f(y) \Leftrightarrow y = 2^x - 1$

Vì $0 < y \leq 2020$ nên $0 < 2^x - 1 \leq 2020 \Leftrightarrow 1 < 2^x \leq 2021 \Leftrightarrow 0 < x \leq \log_2 (2021)$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta có: } \begin{cases} 0 < x \leq \log_2 (2021) \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}.$$

Vậy có 10 cặp $(x; y)$ thỏa mãn.

Câu 17: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $2021^{\frac{2x+y}{(x+1)^2}} = \frac{2x+y}{(x+1)^2}$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của

biểu thức $P = 2y - 3x$ bằng

- A. $P_{\min} = \frac{5}{6}$. B. $P_{\min} = \frac{1}{2}$. C. $P_{\min} = \frac{3}{4}$. D. $P_{\min} = \frac{7}{8}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2021^{\frac{2x+y}{(x+1)^2}} = \frac{2x+y}{(x+1)^2} \Leftrightarrow 2(x^2 - y + 1) = \log_{2021} \frac{2x+y}{(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \log_{2021} (x^2 + 2x + 1) + 2(x^2 + 2x + 1) = \log_{2021} (2x + y) + 2(2x + y) \quad (*).$$

Xét hàm: $f(t) = \log_{2021} t + 2t, t > 0$. Suy ra: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2021} + 2 > 0, \forall t > 0$.

Do đó hàm $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Mà } (*) \Leftrightarrow f(x^2 + 2x + 1) = f(2x + y) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x + y \Leftrightarrow y = x^2 + 1$$

$$\text{Khi đó: } P = 2y - 3x = 2x^2 - 3x + 2 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \geq \frac{7}{8}$$

$$\text{KL: } P_{\min} = \frac{7}{8} \text{ khi } x = \frac{3}{4}.$$

Câu 18: Cho hai số dương x, y thỏa mãn: $\log_2(4x + y + 2xy + 2)^{y+2} = 8 - (2x - 2)(y + 2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2x + y$ có dạng $M = a\sqrt{b} + c$ với $a, b \in \mathbb{N}, a > 2$. Tính $S = a + b + c$

A. $S = 7$.

B. $S = 19$.

C. $S = 17$.

D. $S = 3$.

Lời giải

Với giả thiết x, y dương ta có:

$$\log_2(4x + y + 2xy + 2)^{y+2} = 8 - (2x - 2)(y + 2)$$

$$\Leftrightarrow (y + 2)\log_2[(2x + 1)(y + 2)] = 8 - (2x + 1)(y + 2) + 3(y + 2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2[(2x + 1)(y + 2)] = \frac{8}{y + 2} - (2x + 1) + 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x + 1) + \log_2(y + 2) = \frac{8}{y + 2} - (2x + 1) + \log_2 8$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x + 1) + (2x + 1) = \log_2 \frac{8}{y + 2} + \frac{8}{y + 2} \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$, ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow f(2x + 1) = f\left(\frac{8}{y + 2}\right) \Leftrightarrow 2x + 1 = \frac{8}{y + 2}$$

$$\Rightarrow P = 2x + y = (2x + 1) + (y + 2) - 3 = \frac{8}{y + 2} + (y + 2) - 3 \geq 2\sqrt{\frac{8}{y + 2} \cdot (y + 2)} - 3 = 4\sqrt{2} - 3.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \frac{8}{y + 2} = y + 2 \Leftrightarrow (y + 2)^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{2} - 2 & (n) \\ y = -2\sqrt{2} - 2 & (l) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{2} - 1}{2}.$$

$$\Rightarrow M = 4\sqrt{2} - 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow S = a + b + c = 3.$$

Câu 19: Cho 3 số thực a, b, c thỏa $\log_2 \frac{a + b + c}{a^2 + b^2 + c^2 + 2} = a(a - 4) + b(b - 4) + c(c - 4)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{a + 2b + 3c}{a + b + c}$ là:

A. $\frac{12 + \sqrt{30}}{3}$.

B. $\frac{4 + \sqrt{30}}{3}$.

C. $\frac{8 + \sqrt{30}}{3}$.

D. $\frac{6 + \sqrt{30}}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \log_2 \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+2} = a(a-4) + b(b-4) + c(c-4).$$

$$\Leftrightarrow \log_2 4(a+b+c) + 4(a+b+c) = \log_2 (a^2+b^2+c^2+2) + a^2+b^2+c^2+2 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t \quad (t > 0)$

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0 \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty)$$

$$\text{Nên } (1) \Leftrightarrow 4(a+b+c) = a^2+b^2+c^2+2$$

$$\Leftrightarrow (a-2)^2 + (b-2)^2 + (c-2)^2 = 10 \quad (S)$$

(S) là phương trình mặt cầu tâm $I(2;2;2)$, bán kính $R = \sqrt{10}$

$$P = \frac{a+2b+3c}{a+b+c} \Leftrightarrow a(P-1) + b(P-2) + c(P-3) = 0 \quad (Q)$$

Điều kiện để mặt phẳng (Q) cắt mặt cầu (S) là

$$d(I, (Q)) \leq R \Leftrightarrow \frac{|2(P-1) + 2(P-2) + 2(P-3)|}{\sqrt{(P-1)^2 + (P-2)^2 + (P-3)^2}} \leq \sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow (6P-12)^2 \leq 10(3P^2-12P+14) \Leftrightarrow 6P^2-24P+4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{6-\sqrt{30}}{3} \leq P \leq \frac{6+\sqrt{30}}{3}$$

$$\text{Vậy GTLN } P = \frac{6+\sqrt{30}}{3}.$$

Câu 20: Gọi x_0 là nghiệm thực của phương trình $x^2 \ln \frac{x\sqrt{5x^2+1}}{x^2+1} = x^2+1-\sqrt{5x^4+x^2}$, biết bình

phương của nghiệm x_0 có dạng $x_0^2 = \frac{a+\sqrt{b}}{c} \quad (a, b, c \in \mathbb{Z})$, $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = a-b+2c$.

A. $S = 26$.

B. $S = 34$.

C. $S = -8$.

D. $S = 0$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$

Chia cả hai vế của phương trình cho x^2 ta được:

$$\ln \frac{x\sqrt{5x^2+1}}{x^2+1} = 1 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{5 + \frac{1}{x^2}} \Leftrightarrow \ln \frac{\sqrt{5 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{x^2} - \sqrt{5 + \frac{1}{x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \ln \sqrt{5 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{5 + \frac{1}{x^2}} = \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) + 1 + \frac{1}{x^2} \quad (*)$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = \ln t + t \quad (t > 0)$.

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{1}{t} + 1.$$

$$\text{Với } t > 0 \Rightarrow f'(t) > 0.$$

Vậy hàm $f(t) = \ln t + t$ đồng biến và liên tục với $t > 0$.

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow \sqrt{5 + \frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow 5 + \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \Leftrightarrow \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1+\sqrt{17}}{8}(n) \\ x^2 = \frac{1-\sqrt{17}}{8}(l) \end{cases} \Leftrightarrow S = 0.$$

Câu 21: Cho phương trình: $\log_2 \left[(x+1) \cdot (\sqrt{x^2+4} + x) \right] + \sqrt{x^2+4} = 1 - 2x$ có nghiệm dạng $\frac{a+c\sqrt{13}}{b}$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $a+b$ bằng

A. 2.

B. 0.

C. -1.

D. 1.

Lời giải

Với điều kiện: $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$ Ta có:

$$\log_2 \left[(x+1) \cdot (\sqrt{x^2+4} + x) \right] + \sqrt{x^2+4} = 1 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + \log_2(\sqrt{x^2+4} + x) + \sqrt{x^2+4} = 1 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + \log_2\left(\frac{4}{\sqrt{x^2+4} - x}\right) + \sqrt{x^2+4} = 1 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + 2 - \log_2(\sqrt{x^2+4} - x) + \sqrt{x^2+4} = 1 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = \log_2(\sqrt{x^2+4} - x) + \sqrt{x^2+4} - x (*)$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_2 t + t$ với $t \in (0; +\infty)$

Có: $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0$ với $t \in (0; +\infty)$

Vậy hàm $f(t) = \ln t + t$ đồng biến và liên tục với $t > 0$.

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow x+1 = \sqrt{x^2+4} - x \Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt{x^2+4} \text{ với } x \geq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-2+\sqrt{13}}{3} \\ x = \frac{-2-\sqrt{13}}{3} \end{cases}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x = \frac{-2+\sqrt{13}}{3} \Rightarrow a+b=1$.

Câu 22: Cho phương trình $\log_2 \frac{x+1}{(x-2)^2} = 2x^2 - 9x + 8$ có 2 nghiệm $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$. Giá trị của biểu thức $2x_2 - 5x_1$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Điều kiện: $-1 < x \neq 2$. Khi đó phương trình

$$\log_2 \frac{x+1}{(x-2)^2} = 2x^2 - 9x + 8 \Leftrightarrow \log_2(x+1) - \log_2(x-2)^2 = 2x^2 - 9x + 8$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = \log_2(x^2 - 4x + 4) + 1 + (2x^2 - 8x + 8)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+1) + x + 1 = \log_2(2x^2 - 8x + 8) + (2x^2 - 8x + 8)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ ($t > 0$) $\Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$. Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Do đó: } f(x+1) = f(2x^2 - 8x + 8) \Leftrightarrow x+1 = 2x^2 - 8x + 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 = 1 \\ x = x_2 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } 2x_2 - 5x_1 = 2 \cdot \frac{7}{2} - 5 \cdot 1 = 2.$$

Câu 23: Tổng các nghiệm của phương trình $\ln(x+8) + 2x + 18 = 2 \ln \frac{x+2}{x} + 4\sqrt{x+8} + \frac{8}{x^2}$ là

A. -7.

B. $-3 - 2\sqrt{3}$

C. $-3 + 2\sqrt{3}$.

D. 1.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} -8 < x < -2 \\ x > 0 \end{cases}$. Ta có:

$$\begin{aligned} \ln(x+8) + 2x + 18 &= 2 \ln \frac{x+2}{x} + 4\sqrt{x+8} + \frac{8}{x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln(x+8) + x + 9 = \ln \frac{x+2}{x} + 2\sqrt{x+8} + \frac{4}{x^2} \\ \Leftrightarrow \ln \sqrt{x+8} + (\sqrt{x+8} - 1)^2 &= \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right) + \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right) - 1\right]^2 \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = \ln t + (t-1)^2, t > 0$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t} + 2(t-1) = \frac{2t^2 - 2t + 1}{t} > 0, \forall t > 0$, do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Mặt khác ta có: } \ln \sqrt{x+8} + (\sqrt{x+8} - 1)^2 = \ln \left(1 + \frac{2}{x}\right) + \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right) - 1\right]^2 \Leftrightarrow f(\sqrt{x+8}) = f\left(1 + \frac{2}{x}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+8} = 1 + \frac{2}{x} \Leftrightarrow x^3 + 7x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2(2 + \sqrt{3}) \\ x = 2(-2 + \sqrt{3}) \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta được $\begin{cases} x = 1 \\ x = -2(2 + \sqrt{3}) \end{cases}$.

Vậy tổng các nghiệm của pt đã cho là $-3 - 2\sqrt{3}$.

Câu 24: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2(x\sqrt{x^2+3} - x^2) \leq \sqrt{x^2+3} - 2x$ là

A. 2.

B. 1

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x\sqrt{x^2+3} - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(\sqrt{x^2+3} - x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$

(vì $\sqrt{x^2+3} - x > \sqrt{x^2} - x = |x| - x \geq 0$)

Ta có: $(\sqrt{x^2+3} - x)(\sqrt{x^2+3} + x) = 3$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\log_2 \frac{3x}{\sqrt{x^2+3}+x} \leq \sqrt{x^2+3}+x-3x \Leftrightarrow \log_2(3x)+3x \leq \log_2(\sqrt{x^2+3}+x)+\sqrt{x^2+3}+x (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ với $t > 0$.

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0 \Rightarrow f(t) \text{ là hàm số đồng biến trên } (0; +\infty).$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow 3x \leq \sqrt{x^2+3}+x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} \geq 2x \Leftrightarrow x^2+3 \geq 4x^2 \text{ (vì } x > 0).$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq 1. \text{ Mà } x > 0 \text{ nên } x \in (0; 1].$$

Vậy bất phương trình đã cho có 1 nghiệm nguyên.

Câu 25: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{(x-3)^2} \cdot \log_2(x^2 - 6x + 11) = 4^{x^2+3} \cdot \log_2(2x^2 + 8)$ là:

A. -3.

B. $\frac{3}{2}$.

C. 4.

D. -6.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $2^{(x-3)^2} \log_2(x^2 - 6x + 11) = 4^{x^2+3} \cdot \log_2(2x^2 + 8)$

$$\Leftrightarrow 2^{(x-3)^2} \log_2((x-3)^2 + 2) = 2^{2(x^2+3)} \cdot \log_2(2(x^2+3) + 2) (*)$$

Đặt $f(t) = 2^t \log_2(t+2)$, $t > 0$; $f'(t) = 2^t \ln 2 \cdot \log_2(t+2) + 2^t \frac{1}{(t+2) \ln 2} > 0, \forall t > 0$.

$\Rightarrow$ hàm số $f(t) = 2^t \log_2(t+2)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow f[(x-3)^2] = f[2(x^2+3)] \Leftrightarrow (x-3)^2 = 2(x^2+3) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 2x^2 + 6$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -6.$$

Câu 26: Tổng các nghiệm phương trình: $\log_2 \frac{2x^2+2}{3x+1} = (x-1)(2-4x)$ là

A. $\sqrt{3}$.

B. 1.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Điều kiện: $x > -\frac{1}{3} (*)$

Với điều kiện $(*)$, phương trình tương đương với phương trình sau:

$$\log_2(2x^2+2) - \log_2(3x+1) = -4x^2 + 6x - 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2x^2+2) + 2(2x^2+2) = \log_2(3x+1) + 2(3x+1)$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_2 t + 2t$, $\forall t > 0$ ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2 > 0, \forall t > 0$

Suy ra, hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, do đó:

$$f(2x^2+2) = f(3x+1) \Leftrightarrow 2x^2+2 = 3x+1 \Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(tm) \\ x=\frac{1}{2}(tm) \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1=1, x_2=\frac{1}{2} \Rightarrow x_1+x_2=\frac{3}{2}$.

Câu 27: Cho phương trình $\frac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3=\log_2\frac{2x+1}{x}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}$, gọi S là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của S là

- A. $S = -2$. B. $S = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$. C. $S = 2$. D. $S = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases} -2 < x < -\frac{1}{2} \\ x > 0 \end{cases}$. Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + (t-1)^2$, $t > 0$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 2(t-1) = \frac{2 \ln 2 t^2 - 2 \ln 2 t + 1}{t \cdot \ln 2} > 0$, $\forall t > 0$, do đó hàm số $f(t)$ đồng biến

trên khoảng $(0; +\infty)$.

Mặt khác ta có: $\frac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3=\log_2\frac{2x+1}{x}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{x+2} + (\sqrt{x+2}-1)^2 = \log_2 \left(2+\frac{1}{x}\right) + \left[\left(2+\frac{1}{x}\right)-1\right]^2$$

$$\Leftrightarrow f(\sqrt{x+2}) = f\left(2+\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \sqrt{x+2} = 2+\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \text{ . Kết hợp với điều kiện ta được } \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \text{ . Vậy } S = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \text{ .}$$

Câu 28: Cho hàm số $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) + x^{2021} + x^{2023}$. Số nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-2021; 2021]$ của bất phương trình $f(2^x) + f(x-3) \leq 0$ là:

- A. 2021. B. 2020. C. 2022. D. 2023.

Lời giải:

Xét hàm số $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x) + x^{2021} + x^{2023}$

- Tập xác định $D = R$

- Ta có với mọi $x \in D$:

$$f(-x) = \ln(\sqrt{(-x)^2+1}+(-x)) + (-x)^{2021} + (-x)^{2023} = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) - x^{2021} - x^{2023} = -f(x)$$

Vậy hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ suy ra: $f(x-3) = -f(3-x)$

- Mặt khác với mọi

$$x \in D: f'(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)'}{\sqrt{x^2+1}+x} + 2021 \cdot x^{2020} + 2023 \cdot x^{2022} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + 2021 \cdot x^{2020} + 2023 \cdot x^{2022} > 0$$

Nên hàm số đồng biến trên tập xác định.

Khi đó bất phương trình

$$f(2^x) + f(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow f(2^x) - f(3-x) \leq 0 \Leftrightarrow f(2^x) \leq f(3-x)$$

$$\Leftrightarrow 2^x \leq 3-x \Leftrightarrow 2^x + x - 3 \leq 0 \quad (*)$$

Xét hàm số $g(x) = 2^x + x - 3$, ta có $g(x)$ đồng biến trên R và $g(1) = 0$

nên bất phương trình $2^x + x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

Do x nguyên thuộc $[-2021; 2021]$ nên x nhận các giá trị thuộc tập $T = \{-2021, -2020, -2019, \dots, 0, 1\}$ vậy có 2023 giá trị cần tìm.

Câu 29: Biết phương trình $\log_2 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$ có một nghiệm dạng $x = a + b\sqrt{2}$

trong đó a, b là các số nguyên. Tính $2a - b$.

A. 3.

D. 4.

C. 6

D. 5.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x} > \frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

$$\text{Ta có: } \log_2 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3 \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}} \right) \Leftrightarrow \log_2 (2\sqrt{x}+1) - \log_2 x = 2\log_3 (x-1) - 2\log_3 (2\sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (2\sqrt{x}+1) + 2\log_3 (2\sqrt{x}) = \log_2 x + 2\log_3 (x-1) \quad (*)$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_2 (t+1) + 2\log_3 (t)$ trên $(0; +\infty)$

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{1}{(t+1)\ln 2} + \frac{2}{t \cdot \ln 3} > 0 \text{ với mọi } t \in (0; +\infty).$$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

$$\text{Từ đó ta có } (*) \Leftrightarrow f(2\sqrt{x}) = f(x-1) \Rightarrow 2\sqrt{x} = x-1 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 - \sqrt{2} \\ \sqrt{x} = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Do $\sqrt{x} > 0$ nên $\sqrt{x} = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow a = 3, b = 2$. Suy ra $2a - b = 4$.

Câu 30: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y), x \leq 2022$ và thỏa mãn phương trình $\log_2 x + \log_2 (x-y) = 1 + 4\log_4 y$

A. 2020.

B. 1010.

C. 2019.

D. 1011.

Lời giải

$$\text{⊙ Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x - y > 0 \end{cases}.$$

$$\log_2 x + \log_2 (x-y) = 1 + 2\log_2 y \Leftrightarrow \log_2 x(x-y) = 1 + \log_2 y^2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x(x-y) = \log_2 2y^2 \Leftrightarrow x^2 - xy = 2y^2 \Leftrightarrow (x-2y)(x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = -y \end{cases}.$$

⊙ Trường hợp $x = -y$ không xảy ra.

⊙ Xét $x = 2y$, mà $x \leq 2022 \Rightarrow 2y \leq 2022 \Leftrightarrow y \leq 1011$, kết hợp điều kiện $\Rightarrow y \in \{1; 2; \dots; 1011\}$.

Vậy có 1010 giá trị của y , tương ứng với có 1011 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 31: Để phương trình: $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = m$ có nghiệm, thì các giá trị cần tìm của tham số m là:

A. $1 \leq m \leq \sqrt{2}$.

B. $\sqrt{2} \leq m \leq 2\sqrt{2}$.

C. $3 \leq m \leq 4$.

D. $2\sqrt{2} \leq m \leq 3$.

Lời giải

Phương trình tương đương $2^{\sin^2 x} + 2^{1-\sin^2 x} = m \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x} + \frac{2}{2^{\sin^2 x}} = m$

Đặt $t = 2^{\sin^2 x}$, $t \in [1; 2]$ do $0 \leq \sin^2 x \leq 1$.

Xét hàm $f(t) = t + \frac{2}{t}$, $t \in [1; 2] \Rightarrow f'(t) = 1 - \frac{2}{t^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$

Bảng biến thiên

t	1	$\sqrt{2}$	2
$f'(t)$	–	0	+
$f(t)$	3	$2\sqrt{2}$	3

Vậy phương trình $f(t) = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \leq m \leq 3$.

Câu 33. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3 \frac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.

A. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{3}$. B. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3}$. C. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{9}$. D. $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{9}$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} \frac{1-y}{x+3xy} > 0 \\ x > 0; y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < y < 1 \\ x > 0 \end{cases}$.

Ta có: $\log_3 \frac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4 \Leftrightarrow \log_3 \frac{1-y}{x+3xy} + 1 = (3xy + x) - 3(1-y)$
 $\Leftrightarrow \log_3 3(1-y) - \log_3 (x+3xy) = (3xy + x) - 3(1-y)$
 $\Leftrightarrow \log_3 3(1-y) + 3(1-y) = \log_3 (x+3xy) + (3xy + x)$ (1).

Xét hàm số $y = \log_3 a + a$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

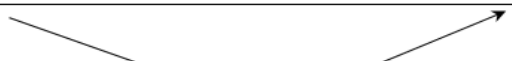
$y' = \frac{1}{a \ln 3} + 1 > 0 \Rightarrow y = \log_3 a + a$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Từ (1) $\Rightarrow 3(1-y) = x + 3xy \Leftrightarrow x = \frac{3(1-y)}{1+3y}$. Khi đó: $P = x + y = \frac{3(1-y)}{1+3y} + y$.

Xét hàm số $f(y) = \frac{3(1-y)}{1+3y} + y = \frac{4}{1+3y} + y - 1$

Ta có: $f'(y) = 1 - \frac{12}{(3y+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+2\sqrt{3}}{3} \\ x = \frac{-1-2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

BBT:

x	0	$\frac{-1+2\sqrt{3}}{3}$	1
$f'(y)$	-	0	+
$f(y)$			
		$\frac{-4+4\sqrt{3}}{3}$	

Dựa vào BBT ta thấy $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3}$, dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{-1+2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 32: Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

- A. $m \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$. B. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$. C. $m \in (-\infty; 0]$. D. $m \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$.

$$4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 + \log_2 x + m = 0 \quad (1).$$

Đặt $t = \log_2 x$, do $x \in (0;1) \Rightarrow t \in (-\infty; 0)$

Phương trình (1) trở thành $t^2 + t + m = 0 \Leftrightarrow m = -t^2 - t$ (*)

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $f(t) = -t^2 - t$ với đường thẳng $y = m$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 - t$ trên $t \in (-\infty; 0)$. Ta có: $f'(t) = -2t - 1, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	$-\infty$	$\frac{1}{4}$	0

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có nghiệm trong khoảng $(0;1)$ khi $m \leq \frac{1}{4}$.

Câu 33: Cho x, y là các số dương thỏa mãn $\log_3 \frac{x+4y}{x+y} = 2x - y + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức $P = \frac{3x^4y + 2xy + 2y^2}{x(x+y)^2}$.

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{3}{2}$. C. 2 . D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\forall x, y > 0, \text{ ta có: } \log_3 \frac{x+4y}{x+y} = 2x - y + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x+4y) - \log_3 (x+y) = -(x+4y) + 3(x+y) + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (x+4y) + (x+4y) = \log_3 3(x+y) + 3(x+y) \quad (1)$$

Xét Hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ có $f'(t) = \frac{1}{t \ln 3} + 1 > 0, \forall t \in (0, +\infty)$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0, +\infty)$

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow f(x+4y) = f[3(x+y)] \Leftrightarrow x+4y = 3(x+y) \Leftrightarrow y = 2x$

Với $y = 2x$ ta có: $P = \frac{3x^4y + 2xy + 2y^2}{x(x+y)^2} = \frac{6x^5 + 4x^2 + 8x^2}{x(3x)^2} = \frac{6x^5 + 12x^2}{9x^3} = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3x}$

Áp dụng BĐT cô si ta có: $P = \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3x} + \frac{2}{3x} \geq 3\sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} = 2$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$

Vậy, GTNN của P là 2 khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Câu 34: Cho bất phương trình:

$$\log_2 \left(\frac{x^2 + x}{\frac{1}{3}x^3 + 4x - m - \cos x + \sqrt{3} \sin x} \right) \leq \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - m - \cos x + \sqrt{3} \sin x \quad (1)$$

Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-10; 0)$ sao cho bất phương trình (1) thỏa mãn với mọi giá trị của x thuộc khoảng $(0; 1)$.

A. 9

B. 8.

C. 1.

D. 7.

Lời giải

Biến đổi bất phương trình (1) như sau:

$$\log_2 (x^2 + x) + x^2 + x \leq \log_2 \left(\frac{1}{3}x^3 + 4x - m - \cos x + \sqrt{3} \sin x \right) + \frac{1}{3}x^3 + 4x - m - \cos x + \sqrt{3} \sin x.$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_2 t + t \quad t > 0$.

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 \Rightarrow f'(x) > 0$ với $t \in (0; +\infty)$. Do đó hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có: } f(x^2 + x) \leq f\left(\frac{1}{3}x^3 + 4x - m - \cos x + \sqrt{3} \sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x \leq \frac{1}{3}x^3 + 4x - m - \cos x + \sqrt{3} \sin x \\ x^2 + x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - \cos x + \sqrt{3} \sin x \\ x^2 + x > 0 \end{cases}$$

Ta có: $x \in (0; 1) \Rightarrow (x^2 + x) > 0$.

$$\text{Xét } m \leq \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - \cos x + \sqrt{3} \sin x, \quad x \in (0; 1) \quad (*)$$

$$\text{Xét hàm số: } g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - \cos x + \sqrt{3} \sin x \quad \text{với } x \in (0; 1).$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = x^2 - 2x + 3 + \sin x + \sqrt{3} \cos x = (x-1)^2 + 2 + 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow g'(x) > 0, \quad \forall x \in (0; 1)$$

Do đó hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0; 1)$.

Suy ra bất phương trình (*) thỏa mãn với $\forall x \in (0; 1)$ khi và chỉ khi $m \leq g(0) = -1$.

Ta có $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ -10 < m \leq -1 \end{cases}$ suy ra có 9 giá trị của m .

Câu 35: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$\log_2 \frac{3x^2 + x + m}{2x^2 - 2x + 1} = 2x^2 - 10x + 5 - 2m \quad \text{có hai nghiệm phân biệt lớn hơn } 2.$$

A. 1.

B. vô số.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

+) Điều kiện: $3x^2 + x + m > 0$.

Ta có

$$\log_2 \frac{3x^2 + x + m}{2x^2 - 2x + 1} = 2x^2 - 10x + 5 - 2m \Leftrightarrow \log_2 \frac{3x^2 + x + m}{2x^2 - 2x + 1} - 1 = 2x^2 - 10x + 4 - 2m$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{3x^2 + x + m}{4x^2 - 4x + 2} = 2x^2 - 10x + 4 - 2m$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{3x^2 + x + m}{4x^2 - 4x + 2} = 2 \left[(4x^2 - 4x + 2) - (3x^2 + x + m) \right]$$

$$\Leftrightarrow \log_2 (3x^2 + x + m) - \log_2 (4x^2 - 4x + 2) = 2 \left[(4x^2 - 4x + 2) - (3x^2 + x + m) \right]$$

$$\Leftrightarrow 2(3x^2 + x + m) + \log_2 (3x^2 + x + m) = 2(4x^2 - 4x + 2) + \log_2 (4x^2 - 4x + 2) \quad (1)$$

+) Xét hàm số: $f(t) = 2t + \log_2 t$ xác định trên $(0; +\infty)$

$$f'(t) = 2 + \frac{1}{t \ln 2} > 0, \forall t \in (0; +\infty). \text{ Do đó hàm số } f(t) \text{ đồng biến trên } (0; +\infty).$$

Lại có điều kiện $3x^2 + x + m > 0$ và $4x^2 - 4x + 2 > 0 \forall x$

Do đó, (1)

$$\Leftrightarrow f(3x^2 + x + m) = f(4x^2 - 4x + 2) \Leftrightarrow 3x^2 + 3x + m = 4x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow m = x^2 - 5x + 2 \quad (2).$$

+) Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 2 khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 2.

Xét hàm số: $g(x) = x^2 - 5x + 2$ trên $(2; +\infty)$, có $g'(x) = 2x - 5$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

Bảng biến thiên:

x	2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	-4	$-\frac{17}{4}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 2 khi và chỉ khi $\frac{-17}{4} < m < -4$.

Mà m nguyên nên $m \in \emptyset$. Vậy không có giá trị m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 36: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x; y)$ thỏa mãn $e^{2x+y+1} - e^{3x+2y} = x + y - 1$, đồng thời thỏa mãn $\log_2^2(2x + y - 1) - (m + 4)\log_2 x + m^2 + 4 = 0$.

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

$$\text{Ta có } e^{2x+y+1} - e^{3x+2y} = x + y - 1 \Leftrightarrow e^{2x+y+1} + 2x + y + 1 = e^{3x+2y} + 3x + 2y.$$

Xét hàm số $f(t) = e^t + t$. Ta có $f'(t) = e^t + 1 > 0, \forall t$.

$$\text{Khi đó ta có } f(2x + y + 1) = f(3x + 2y) \Leftrightarrow 2x + y + 1 = 3x + 2y \Leftrightarrow y = 1 - x.$$

$$\text{Do đó ta có } \log_2^2(2x + y - 1) - (m + 4)\log_2 x + m^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - (m + 4)\log_2 x + m^2 + 4 = 0.$$

$$\text{Ta có } \Delta = (m + 4)^2 - 4(m^2 + 4) = -3m^2 + 8m$$

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 8m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{8}{3} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \{0; 1; 2\}$$

Câu 37: Tổng tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2-2x+3}(2|x-m|+2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là

A. 3

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

$$\text{Phương trình tương đương } 3^{x^2-2x+3-(2|x-m|+2)} = \frac{\ln(2|x-m|+2)}{\ln(x^2-2x+3)}.$$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-2x+3} \cdot \ln(x^2-2x+3) = 3^{2|x-m|+2} \cdot \ln(2|x-m|+2) (*).$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 3^t \cdot \ln t, t \geq 2$ là hàm số đồng biến nên từ phương trình (*) suy ra

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 2|x - m| + 2 \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2x - 2|x - m| + 1 = 0.$$

$$\text{Có } g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 2m + 2 & \text{khi } x \geq m \\ x^2 - 2m + 1 & \text{khi } x \leq m \end{cases} \Rightarrow g'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{khi } x \geq m \\ 2x & \text{khi } x \leq m \end{cases}.$$

$$\text{Và } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{khi } x \geq m \\ x = 0 & \text{khi } x \leq m \end{cases}$$

Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m \leq 0$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	m	0	2	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$		$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$					$+\infty$

Phương trình chỉ có tối đa 2 nghiệm nên không có m thỏa mãn.

Trường hợp 2: $m \geq 2$ tương tự ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	m	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	+	+
$g(x)$					

Phương trình chỉ có tối đa 2 nghiệm nên không có m thỏa mãn.

Trường hợp 3: $0 < m < 2$, bảng biến thiên $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	m	2	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$-2m+1$	$(m-1)^2$	$2m-3$	$+\infty$

Phương trình có 3 nghiệm khi

$$\begin{cases} (m-1)^2 = 0 \\ -2m+1 = 0 > 2m-3 \\ -2m+1 < 0 = 2m-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{1}{2} \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy tổng các giá trị của m là 3.

Cách 2:

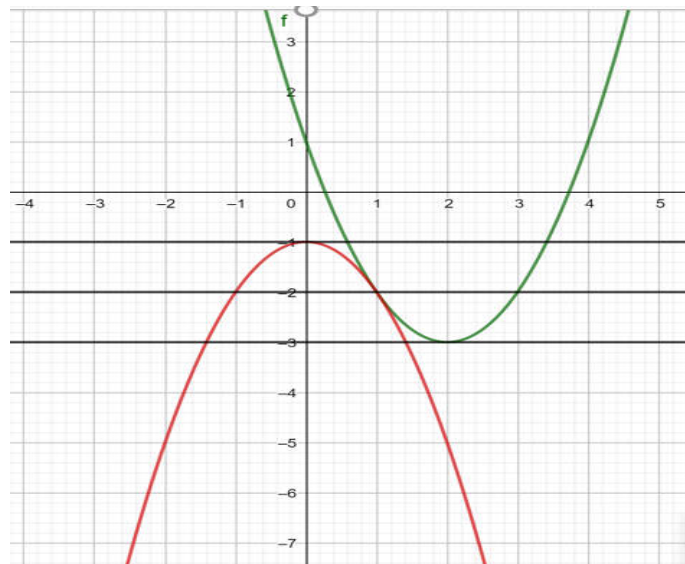
Phương trình tương đương $3^{x^2-2x+3-(2|x-m|+2)} = \frac{\ln(2|x-m|+2)}{\ln(x^2-2x+3)}$.

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-2x+3} \cdot \ln(x^2-2x+3) = 3^{2|x-m|+2} \cdot \ln(2|x-m|+2) (*).$$

Xét hàm $f(t) = 3^t \cdot \ln t, t \geq 2$ là hàm số đồng biến nên từ phương trình (*) suy ra $\Leftrightarrow x^2-2x+3 = 2|x-m|+2 \Leftrightarrow x^2-2x-2|x-m|+1 = 0. (1)$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1 = 2|x-m| \Leftrightarrow \begin{cases} -2m = x^2-4x+1 \\ -2m = -x^2-1 \end{cases}$$

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đường thẳng $y = -2m$ và 2 đồ thị $y = x^2-4x+1$ và $y = -x^2-1$



Từ đồ thị suy ra có $m = \frac{3}{2}, m = 1, m = \frac{1}{2}$ thì phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy có 3 giá trị m thì phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 38: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời $2^x + y \leq \log_2(x-y)$ và x, y thuộc đoạn $[-2; 10]$?

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 8.

Lời giải

$$2^x + y \leq \log_2(x - y) \Leftrightarrow 2^x + x \leq \log_2(x - y) + x - y \Leftrightarrow 2^x + x \leq \log_2(x - y) + 2^{\log_2(x - y)} (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t$ có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó:

$$(*) \Leftrightarrow x \leq \log_2(x - y) \Leftrightarrow 2^x \leq x - y \Leftrightarrow y \leq x - 2^x (**)$$

Xét hàm số $g(x) = x - 2^x$ trên đoạn $[-2; 10]$.

Ta có: $g'(x) = 1 - 2^x \ln 2$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \log_2(\log_2 e)$$

x	-2	$\log_2(\log_2 e)$	10
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\frac{9}{4}$	$\log_2\left(\frac{\log_2 e}{e}\right)$	-1014

Kết hợp (**) và BBT ta có: $-2 \leq y \leq \log_2\left(\frac{\log_2 e}{e}\right)$.

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y = -2$ hoặc $y = -1$.

Với $y = -2$ ta có: $g(x) \geq -2$. Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-1; 0; 1; 2\}$. Trường hợp này có 4 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Với $y = -1$ ta có: $g(x) \geq -1$. Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{0; 1\}$. Trường hợp này có 2 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn.

Vậy có tất cả 6 cặp số $(x; y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

-----HẾT-----