FB: Duong Hung

CHUYÊN ĐỀ

Lớp 12

MÔN TOÁN

Chủ đề ③

NGUYÊN HÀM_TÍCH PHÂN

ÔN TẬP THI TỐT NGHIỆP

Full 50chuyên đề

① Tóm tắt lý thuyết

② Phân dạng toán cơ bản

③ Bài tập minh họa

④ Bài tập rèn luyện

Tài liệu lưu hành nội bộ

St-bs: FB: Duong Hung - Zalo: 0774860155 - Word xinh 2021

Full Chuyên đề 12 new 2020-2021

FB: Duong Hung

CHƯƠNG ③: NGUYÊN HÀM-TÍCH PHÂN-ỨNG DỤNG

Bài ❶: NGUYÊN HÀM

☑ Dạng ①: Nguyên hàm theo định nghĩa và tính chất cơ bản

.Phương pháp:

❶. **Định nghĩa:** Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi x thuộc K.

❷. **Tính chất:**

- $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)\pm\int g(x)dx$.
- $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx, \forall k\in\mathbb{R}^* \Rightarrow \int\left[k.f(x)+l.g(x)\right]dx=k\int f(x)dx+l\int g(x)dx$.
- $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)+C$.

❸. **Bảng nguyên hàm:**

• $\int dx=x+C$ • $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\left(\alpha\neq-1\right)$ • $\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$ • $\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C$	▪ $\int kdx=kx+C$ ▪ $\int(kx+b)^{\alpha}dx=\frac{1}{k}\frac{(kx+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\left(\alpha\neq-1\right)$ ▪ $\int\frac{dx}{kx+b}=\frac{1}{k}\ln\lvert kx+b\rvert+C$ ▪ $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C$
• $\int\sin xdx=-\cos x+C$ • $\int\cos xdx=\sin x+C$ • $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\tan x+C$ • $\int\left(1+\tan^2 x\right)dx=\tan x+C$ • $\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$ • $\int\left(1+\cot^2 x\right)dx=-\cot x+C$	▪ $\int\sin(kx+b)dx=-\frac{1}{k}\cos(kx+b)+C$ ▪ $\int\cos(kx+b)dx=\frac{1}{k}\sin(kx+b)+C$ ▪ $\int\frac{1}{\cos^2(kx+b)}dx=\frac{1}{k}\tan(kx+b)+C$ ▪ $\int\frac{1}{\sin^2(kx+b)}dx=-\frac{1}{k}\cot(kx+b)+C$
• $\int e^x dx=e^x+C$ • $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C(0<a\neq1)$	▪ $\int e^{kx+b}dx=\frac{1}{k}e^{kx+b}+C$ ▪ $\int a^{kx+b}dx=\frac{1}{k}\frac{a^{kx+b}}{\ln a}+C(0<a\neq1)$

Phương pháp: Casio.

- Xét hiệu: Nhấn shift $\frac{d}{dx}(F(x))\big|_{x=x_0}-f(x)=0$
- **Calc** $x=2.5$ hay $x=3,\ldots.\frac{d}{dx}(F(x))\big|_{x=x_0}-f(x)\approx0$ là mệnh đề đúng.

A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Tất cả nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2x+3}$ là

Ⓐ. $\dfrac{1}{2}\ln\left|2x+3\right|+C$.   Ⓑ. $\dfrac{1}{2}\ln\left(2x+3\right)+C$.

Ⓒ. $\ln\left|2x+3\right|+C$.   Ⓓ. $\dfrac{1}{\ln 2}\ln\left|2x+3\right|+C$.

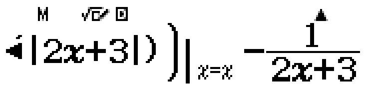
Lời giải

➲Chọn A

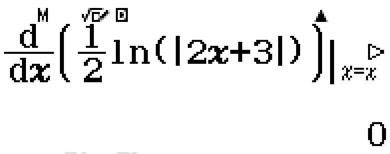
- $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{2x+3}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{1}{2x+3}\mathrm{d}\left(2x+3\right)$
$=\dfrac{1}{2}\ln\left|2x+3\right|+C$

PP nhanh trắc nghiệm

- **Casio**:



Calc: $x=2.5$



Lưu ý: Gặp ln thì có trị tuyệt đối, rất dễ chọn nhầm đáp án B

Câu 2: Câu 2: Nếu $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=4x^3+x^2+C$ thì hàm số $f\left(x\right)$ bằng

Ⓐ. $f\left(x\right)=x^4+\dfrac{x^3}{3}+Cx$.   Ⓑ. $f\left(x\right)=12x^2+2x+C$.

Ⓒ. $f\left(x\right)=12x^2+2x$.   Ⓓ. $f\left(x\right)=x^4+\dfrac{x^3}{3}$.

Lời giải

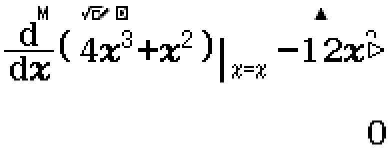
➲Chọn B

- Ta có:

$f\left(x\right)=\left(\int f\left(x\right)\mathrm{d}x\right)'=\left(4x^3+x^2+C\right)'=12x^2+2x$

PP nhanh trắc nghiệm

- Thử đạo hàm
- **Casio**



Chú ý dễ chọn nhầm câu B

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{2x-1}$ với mọi $x\neq\dfrac{1}{2}$ và $f\left(1\right)=1$. Khi đó giá trị của $f\left(5\right)$ bằng

Ⓐ. $\ln 2$.   Ⓑ. $\ln 3$.   Ⓒ. $\ln 2+1$.   Ⓓ. $\ln 3+1$.

Lời giải	PP nhanh trắc nghiệm
➲Chọn D • Ta có: $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x)+C$ nên $f(x)=\int \frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(2x-1)}{2x-1}=\frac{1}{2}\ln\lvert 2x-1\rvert+C$ •Mặt khác theo đề ra ta có: $f(1)=1$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\lvert 2.1-1\rvert+C=1 \Leftrightarrow C=1$ nên $f(x)=\frac{1}{2}\ln\lvert 2x-1\rvert+1$ •Do vậy $f(5)=\frac{1}{2}\ln\lvert 2.5-1\rvert+1=\frac{1}{2}\ln 9+1=\ln 3+1$	❶. Tư duy Casio $\int\limits_1^5 f'(x)dx = f(5)-f(1)$ $\Rightarrow f(5)=f(1)+\int\limits_1^5 f'(x)dx = 1+\int\limits_1^5 f'(x)dx$ ❷. Tổng quát: $\int\limits_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a)$ $\Rightarrow \bullet\ f(b)=f(a)+\int\limits_a^b f'(x)dx;$ $\bullet\ f(a)=f(b)-\int\limits_a^b f'(x)dx$

↳B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ. Nếu $\int f(x)dx = F(x)+C$ thì $\int f(u)du=F(u)+C$.

Ⓑ. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (k là hằng số và $k\neq 0$).

Ⓒ. Nếu $F(x)$ và $G(x)$ đều là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì $F(x)=G(x)$.

Ⓓ. $\int[f_1(x)+f_2(x)]dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx$.

Câu 2: Hàm số nào sau đây không phải là nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x-3)^4$?

Ⓐ. $F(x)=\frac{(x-3)^5}{5}+x$.　　Ⓑ. $F(x)=\frac{(x-3)^5}{5}$.

Ⓒ. $F(x)=\frac{(x-3)^5}{5}+2020$.　　Ⓓ. $F(x)=\frac{(x-3)^5}{5}-1$.

Câu 3: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ. $\int 0dx = C$ (C là hằng số).　　Ⓑ. $\int\frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$ (C là hằng số).

Ⓒ. $\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ (C là hằng số).　　Ⓓ. $\int dx = x+C$ (C là hằng số).

Câu 4: Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ là hàm số liên tục. Xét các mệnh đề sau:

(I). $k.\int f(x)dx=\frac{1}{k}\int f(x)dx$ với k là hằng số thực khác 0 bất kỳ.

(II). $\int[f(x)-g(x)]dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$.

(III). $\int[f(x).g(x)]dx=\int f(x)dx.\int g(x)dx$.

(IV). $\int f'(x)dx=f(x)+C$.

Số mệnh đề đúng là

Ⓐ. 1.　　Ⓑ. 2.　　Ⓒ. 3.　　Ⓓ. 4.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K và $F(x)$, $G(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ. $G(x)=F(x)$, $\forall x\in K.$ Ⓑ. $G(x)=f'(x)$, $\forall x\in K.$

Ⓒ. $F(x)=G(x)+C$, $\forall x\in K.$ Ⓓ. $F'(x)=f'(x)$, $\forall x\in K$.

Câu 6: Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;b)$ và C là hằng số thì $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$

Ⓑ. Mọi hàm số liên tục trên $(a;b)$ đều có nguyên hàm trên $(a;b)$.

Ⓒ. $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $(a;b)\Leftrightarrow F'(x)=f(x)$, $\forall x\in(a;b)$

Ⓓ. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)$

Câu 7: Hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$ có nguyên hàm trên:

Ⓐ. $(0;\pi)$ Ⓑ. $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ Ⓒ. $(\pi;2\pi)$ Ⓓ. $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

Câu 8: Hàm số nào sau đây không phải là nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x-3)^4$?

Ⓐ. $F(x)=\dfrac{(x-3)^5}{5}+x$ Ⓑ. $F(x)=\dfrac{(x-3)^5}{5}$

Ⓒ. $F(x)=\dfrac{(x-3)^5}{5}+2017$ Ⓓ. $F(x)=\dfrac{(x-3)^5}{5}-1$

Câu 9: Hàm số $F(x)=e^{x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số

Ⓐ. $f(x)=e^{x^3}$ Ⓑ. $f(x)=3x^2.e^{x^3}$

Ⓒ. $f(x)=\dfrac{e^{x^3}}{3x^2}$ Ⓓ. $f(x)=x^3.e^{x^3-1}$

Câu 10: Nếu $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}+e^x+C$ thì $f(x)$ bằng

Ⓐ. $f(x)=\dfrac{x^4}{3}+e^x$ Ⓑ. $f(x)=3x^2+e^x$

Ⓒ. $f(x)=\dfrac{x^4}{12}+e^x$ Ⓓ. $f(x)=x^2+e^x$

Câu 11: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+\dfrac{1}{x}$

Ⓐ. $\int f(x)dx=3x^2+\dfrac{1}{x^2}+C$. Ⓑ. $\int f(x)dx=\dfrac{x^4}{4}+\ln x+C$.

Ⓒ. $\int f(x)dx=3x^2-\dfrac{1}{x^2}+C$. Ⓓ. $\int f(x)dx=\dfrac{x^4}{4}+\ln|x|+C$.

Câu 12: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai?**

Ⓐ. $\int\cos 2x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$. Ⓑ. $\int x^e\mathrm{d}x=\dfrac{x^{e+1}}{e+1}+C$

Ⓒ. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$.
Ⓓ. $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{x+1} + C$

Câu 13: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

Ⓐ. $x^3 + \cos x + C$.
Ⓑ. $6x + \cos x + C$.
Ⓒ. $x^3 - \cos x + C$.
Ⓓ. $6x - \cos x + C$.

Câu 14: Tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ là

Ⓐ. $\frac{1}{2}\ln|2x+3| + C$.
Ⓑ. $\frac{1}{2}\ln(2x+3) + C$.
Ⓒ. $\ln|2x+3| + C$.
Ⓓ. $\frac{1}{\ln 2}\ln|2x+3| + C$.

Câu 15: Giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa công thức nào sau đây sai?

Ⓐ. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$.
Ⓑ. $\int e^x dx = e^x + C$.
Ⓒ. $\int \ln x dx = \frac{1}{x} + C$.
Ⓓ. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

Câu 16: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x} + x^2$ là

Ⓐ. $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{x^3}{3} + C$.
Ⓑ. $F(x) = e^{2x} + x^3 + C$.
Ⓒ. $F(x) = 2e^{2x} + 2x + C$.
Ⓓ. $F(x) = e^{2x} + \frac{x^3}{3} + C$.

Câu 17: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + 3x + 2$ là hàm số nào trong các hàm số sau ?

Ⓐ. $F(x) = 3x^2 + 3x + C$.
Ⓑ. $F(x) = \frac{x^4}{3} + 3x^2 + 2x + C$.
Ⓒ. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x + C$.
Ⓓ. $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 2x + C$.

Câu 18: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(3 + e^{-x})$ là

Ⓐ. $F(x) = 3e^x - \frac{1}{e^x} + C$.
Ⓑ. $F(x) = 3e^x - x + C$.
Ⓒ. $F(x) = 3e^x + e^x \ln e^x + C$.
Ⓓ. $F(x) = 3e^x + x + C$.

Câu 19: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + \cos x$ là

Ⓐ. $e^x - \sin x + C$.
Ⓑ. $\frac{1}{x+1}e^{x+1} + \sin x + C$.
Ⓒ. $xe^{x-1} - \sin x + C$.
Ⓓ. $e^x + \sin x + C$.

Câu 20: Nguyên hàm của hàm số $f\ x\ = x + 3^x$ là

Ⓐ. $F\ x\ = \frac{x^2}{2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$. Ⓑ. $F\ x\ = 1 + \frac{3^x}{\ln 3} + C$.

Ⓒ. $F\ x\ = \frac{x^2}{2} + 3^x + C$. Ⓓ. $F\ x\ = \frac{x^2}{2} + 3^x . \ln 3 + C$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.A	3.C	4.B	5.C	6.D	7.D	8.D	9.A	10.C
11.D	12.D	13.C	14.A	15.C	16.A	17.C	18.D	19.D	20.A

☑ Dạng ②: Tìm nguyên hàm của hàm số thỏa mãn điều kiện cho trước

⊗-***Phương pháp:***

Xác định $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ sao cho $F(x_0) = k$

- Tìm nguyên hàm $F(x)$.
- Thế điều kiện $F(x_0) = k$ tìm hằng số C
- Kết luận cho bài toán.

A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = \frac{1}{2x-1}$ với mọi $x \neq \frac{1}{2}$ và $f(1) = 1$. Khi đó giá trị của $f(5)$ bằng

Ⓐ. $\ln 2$. Ⓑ. $\ln 3$. Ⓒ. $\ln 2 + 1$. Ⓓ. $\ln 3 + 1$.

Lời giải

➲**Chọn** D

- Ta có: $\int f'(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$ nên

$$f(x) = \int \frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$$

Mặt khác theo đề ra ta có: $f(1) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln|2.1-1| + C = 1 \Leftrightarrow C = 1 \text{ nên } f(x) = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + 1$$

Do vậy $f(5) = \frac{1}{2}\ln|2.5-1| + 1 = \frac{1}{2}\ln 9 + 1 = \ln 3 + 1$.

PP nhanh trắc nghiệm

- **Casio**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\Rightarrow \bullet F(b) = F(a) + \int_a^b f(x)dx;$$

$$\bullet F(a) = F(b) - \int_a^b f(x)dx$$

Câu 2: Biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=2x+2^x$ thoả mãn $F\left(0\right)=0$. Ta có $F\left(x\right)$ bằng

Ⓐ. $x^2+\dfrac{2^x-1}{\ln 2}$. Ⓑ. $x^2+\dfrac{1-2^x}{\ln 2}$. Ⓒ. $1+\left(2^x-1\right)\ln 2$. Ⓓ. x^2+2^x-1.

Lời giải

➲Chọn A

- Ta có: $\int\left(2x+2^x\right)\mathrm{d}x=x^2+\dfrac{2^x}{\ln 2}+C$. Do đó .
- Theo giả thiết $F\left(0\right)=0\Leftrightarrow 0^2+\dfrac{2^0}{\ln 2}+C=0\Leftrightarrow C=-\dfrac{1}{\ln 2}$.
- Vậy $F\left(x\right)=x^2+\dfrac{2^x}{\ln 2}-\dfrac{1}{\ln 2}=x^2+\dfrac{2^x-1}{\ln 2}$.

PP nhanh trắc nghiệm

- **Casio:** Thử đáp án

Câu 3: Tìm nguyên hàm $F\ \ x$ của hàm số $f\ \ x\ =\sin\ \ \pi-2x$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

Ⓐ. $F(x)=\dfrac{-\cos(\pi-2x)}{2}+\dfrac{1}{2}$. Ⓑ. $F(x)=\dfrac{\cos(\pi-2x)}{2}+\dfrac{1}{2}$.

Ⓒ. $F(x)=\dfrac{\cos(\pi-2x)}{2}+1$. Ⓓ. $F(x)=\dfrac{\cos(\pi-2x)}{2}-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

➲Chọn B

- $F\ \ x\ =\int\sin\ \ \pi-2x\ \mathrm{d}x=\dfrac{\cos\ \ \pi-2x}{2}+\mathrm{C}$
- $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}+C=1\Leftrightarrow C=\dfrac{1}{2}$
- Vậy $F(x)=\dfrac{\cos(\pi-2x)}{2}+\dfrac{1}{2}$

PP nhanh trắc nghiệm

- **Casio:** Thử đáp án

B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=4x^3-4x+5$ thỏa mãn $F(1)=3$

Ⓐ. $F(x)=x^4-2x^2+5x-1$. Ⓑ. $F(x)=x^4-4x^2+5x+1$.

Ⓒ. $F(x)=x^4-2x^2+5x+3$. Ⓓ. $F(x)=x^4-2x^2-5x+\dfrac{1}{2}$.

Câu 2. Hàm số $f\left(x\right)=-5x^4+4x^2-6$ có một nguyên hàm $F\left(x\right)$ thỏa $F\left(3\right)=1$. Tính $F\left(-3\right)$.

Ⓐ. $F\left(-3\right)=226$. Ⓑ. $F\left(-3\right)=-225$. Ⓒ. $F\left(-3\right)=451$. Ⓓ. $F\left(-3\right)=225$.

Câu 3. Biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\sin 2x$ và $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$. Tính $P=F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Ⓐ. $P=\frac{5}{4}$. Ⓑ. $P=0$. Ⓒ. $P=\frac{1}{2}$. Ⓓ. $P=\frac{3}{4}$.

Câu 4. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=2x+\sin x+2\cos x$ thỏa mãn $F(0)=1$.

Ⓐ. $F(x)=x^2+\cos x+2\sin x-2$. Ⓑ. $F(x)=x^2-\cos x+2\sin x$.

Ⓒ. $F(x)=2+\cos x+2\sin x$. Ⓓ. $F(x)=x^2-\cos x+2\sin x+2$.

Câu 5. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin x+\frac{1}{\cos^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ⓐ. $F(x)=-\cos x+\tan x+C$. Ⓑ. $F(x)=-\cos x+\tan x-\sqrt{2}+1$.

Ⓒ. $F(x)=\cos x+\tan x+\sqrt{2}-1$. Ⓓ. $F(x)=-\cos x+\tan x+\sqrt{2}-1$.

Câu 6. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^{2x}$ thỏa $F(0)=\frac{3}{2}\cdot$ Giá trị của $F\left(\frac{1}{2}\right)$ bằng

Ⓐ. $\frac{1}{2}e+2$. Ⓑ. $\frac{1}{2}e+1$. Ⓒ. $2e+1$. Ⓓ. $\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}$

Câu 7. Kí hiệu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(x^2+1\right)^2$ và $F(1)=\frac{28}{15}\cdot$ Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ. $F(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x.$ Ⓑ. $F(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+C.$

Ⓒ. $F(x)=4x\left(x^2+1\right).$ Ⓓ. $F(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+1.$

Câu 8. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{x-1}$ và $F(2)=1.$ Tính $F(3).$

Ⓐ. $F(3)=\frac{1}{2}\cdot$ Ⓑ. $F(3)=\frac{7}{4}\cdot$ Ⓒ. $F(3)=\ln 2-1.$ Ⓓ. $F(3)=\ln 2+1.$

Câu 9. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\frac{2}{\sqrt{2x-1}}$ thỏa mãn $F(5)=7$.

Ⓐ. $F(x)=2\sqrt{2x-1}$. Ⓑ. $F(x)=2\sqrt{2x-1}+1$.

Ⓒ. $F(x)=\sqrt{2x-1}+4$. Ⓓ. $F(x)=\sqrt{2x-1}-10$.

Câu 10. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(2x-3)^2$ thỏa $F(0)=\frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $T=\log_2\left[3F(1)-2F(2)\right]$.

Ⓐ. $T=2$. Ⓑ. $T=4$. Ⓒ. $T=10$. Ⓓ. $T=-4$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.D	4.D	5.D	6.B	7.A	8.D	9.B	10.A

☑ Dạng ③: Phương pháp đổi biến số.

⊗-Định lí: Cho hàm số $u=u(x)$ có đạo hàm và liên tục trên trên K và hàm số $y=f(u)$ liên tục sao cho $f\left[u(x)\right]$ xác định trên K. Khi đó nếu hàm số $F(u)$ là một nguyên hàm của $f(u)$, tức là: $\int f\left[u(x)\right]u'(x)du=F\left[u(x)\right]+C$

⊗-Phương pháp:

Từ đó ta có hai cách đổi biến số trong việc tính nguyên hàm như sau:

- Đặt biến số: $t=u(x)$
- Suy ra: $dt=du(x)=u'(x)dx$ rồi đưa về việc tính nguyên hàm
- $I=\int f\left[u(x)\right].u'(x)dx=\int f(t)dt$ đơn giản hơn.

A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Tìm họ nguyên hàm $\int \cos^2 x\sin x\,dx$ ta được kết quả là

Ⓐ. $-\cos^2 x+C$. Ⓑ. $\frac{1}{3}\cos^3 x+C$. Ⓒ. $-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$. Ⓓ. $\frac{1}{3}\sin^3 x+C$.

Lời giải

➲Chọn C

- $\int \cos^2 x\sin x\,dx=-\int \cos^2 x\,d(\cos x)=-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$.

PP nhanh trắc nghiệm

- **Casio:** xét hiệu

Câu 2: Nguyên hàm $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ. $-\sin\frac{1}{x}+C$. Ⓑ. $\sin\frac{1}{x}+C$. Ⓒ. $-2\sin\frac{1}{x}+C$. Ⓓ. $2\sin\frac{1}{x}+C$.

Lời giải

➲Chọn A

- Ta có $\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\int \cos\frac{1}{x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\sin\frac{1}{x}+C$.

PP nhanh trắc nghiệm

- **Casio:** xét hiệu

Câu 3: Tính nguyên hàm $I=\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}}\mathrm{d}x$.

Ⓐ. $I=\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x+1)^3}+C$. Ⓑ. $I=\sqrt{\ln x+1}+C$.

Ⓒ. $I=\frac{1}{2}\sqrt{(\ln x+1)^2}+C$. Ⓓ. $I=2\sqrt{\ln x+1}+C$.

Lời giải

➲Chọn D

- $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}}dx = \int (\ln x+1)^{\frac{-1}{2}}d(\ln x+1) = 2\sqrt{\ln x+1}+C.$

↳PP nhanh trắc nghiệm

- **Casio:** xét hiệu

Câu 4: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\sin x}{1+3\cos x}$.

Ⓐ. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C$.

Ⓑ. $\int f(x)dx = \ln|1+3\cos x|+C$.

Ⓒ. $\int f(x)dx = 3\ln|1+3\cos x|+C$.

Ⓓ. $\int f(x)dx = \frac{-1}{3}\ln|1+3\cos x|+C$.

Lời giải

➲Chọn D

- Ta có:

$\int \frac{\sin x}{1+3\cos x}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{1+3\cos x}d(1+3\cos x) = -\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C$

↳PP nhanh trắc nghiệm

- **Casio:** xét hiệu

↳B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Biết $\int f(u)du = F(u)+C$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ. $\int f(2x-1)dx = 2F(2x-1)+C$.

Ⓑ. $\int f(2x-1)dx = 2F(x)-1+C$.

Ⓒ. $\int f(2x-1)dx = F(2x-1)+C$.

Ⓓ. $\int f(2x-1)dx = \frac{1}{2}F(2x-1)+C$.

Câu 2: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x(x^2+1)^9$ là

Ⓐ. $(x^2+1)^{10}+C$.

Ⓑ. $2(x^2+1)^{10}+C$.

Ⓒ. $-\frac{1}{20}(x^2+1)^{10}+C$.

Ⓓ. $\frac{1}{20}(x^2+1)^{10}+C$.

Câu 3: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{2x-1}$ là

Ⓐ. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}+C$.

Ⓑ. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C$.

Ⓒ. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$.

Ⓓ. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C$.

Câu 4: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=xe^{x^2}$ là

Ⓐ. $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

Ⓑ. $e^{x^2}+C$.

Ⓒ. $2e^{x^2}+C.2e^{x^2}+C$

Ⓓ. $(2x^2+1)e^{x^2}+C$.

Câu 5: Biết rằng hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ và thỏa mãn $F(e^2)=4$.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ. $F(x)=\frac{\ln^2 x}{2}-3.$

Ⓑ. $F(x)=\frac{\ln^2 x}{2}+3.$

Ⓒ. $F(x)=\frac{\ln^2 x}{2}-2$

Ⓓ $F(x)=\frac{\ln^2 x}{2}+2$

Câu 6: Tìm hàm số $F(x)$ biết $F(x)=\int\frac{x^3}{x^4+1}dx$ và $F(0)=1$.

Ⓐ. $F(x)=\ln(x^4+1)+1.$

Ⓑ. $F(x)=\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+\frac{3}{4}.$

Ⓒ. $F(x)=\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+1.$

Ⓓ. $F(x)=4\ln(x^4+1)+1.$

Câu 7: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{\sin x}{\cos x-3}$ là

Ⓐ. $-\ln|\cos x-3|+C$.

Ⓑ. $2\ln|\cos x-3|+C$.

Ⓒ. $-\frac{\ln|\cos x-3|}{2}+C$.

Ⓓ. $4\ln|\cos x-3|+C$.

Câu 8: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x.e^{\sin^2 x}$ là

Ⓐ. $\sin^2 x.e^{\sin^2 x-1}+C$.

Ⓑ. $\frac{e^{\sin^2 x+1}}{\sin^2 x+1}+C$.

Ⓒ. $e^{\sin^2 x}+C$.

Ⓓ. $\frac{e^{\sin^2 x-1}}{\sin^2 x-1}+C$.

Câu 9: Xét nguyên hàm $I=\int\sqrt{1-x^2}dx$ với phép đặt $x=\sin t$. Khi đó

Ⓐ. $I=\int 2|\cos t|\cos t dt$.

Ⓑ. $I=\int 2|\sin t|\cos^2 t dt$.

Ⓒ. $I=\int|\cos t|\cos t dt$.

Ⓓ. $I=\int 4|\sin t|\cos t dt$.

Câu 10: Xét nguyên hàm $I=\int\sqrt{4-x^2}dx$ với phép đặt $x=2\sin t$ với $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó

Ⓐ. $I=\int 2(1+\cos 2t)dt$.

Ⓑ. $I=\int 2(1+\cos 3t)dt$

Ⓒ. $I=\int 2(4+\cos 2t)dt$

Ⓓ. $I=\int 2(1+2\cos 2t)dt$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.D	3.D	4.A	5.D	6.C	7.A	8.C	9.C	10.A

☑ Dạng ④: Phương pháp từng phần

⊗-*Phương pháp:*

- Cho hai hàm số u và v liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$.
- Khi đó: $\int u dv = uv - \int v du$. $(*)$
- Để tính nguyên hàm $\int f(x)dx$ bằng từng phần ta làm như sau:

Bước 1. Chọn u, v sao cho $f(x)dx = udv$ (chú ý $dv = v'(x)dx$).

☞ Sau đó tính $v = \int dv$ và $du = u'.dx$.

Bước 2. Thay vào công thức $(*)$ và tính $\int v du$.

①.***Dạng 1.*** $I = \int P(x)\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}\mathrm{d}x$, trong đó $P(x)$ là đa thức

♦.**Đặt:** $\begin{cases} u = P(x) \\ \mathrm{d}v = \begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}\mathrm{d}x \end{cases}$.

②. ***Dạng 2.*** $I = \int P(x)e^{ax+b}\mathrm{d}x$, trong đó $P(x)$ là đa thứ

♦.**Đặt:** $\begin{cases} u = P(x) \\ \mathrm{d}v = e^{ax+b}\mathrm{d}x \end{cases}$.

③. ***Dạng 3.*** $I = \int P(x)\ln(mx+n)\mathrm{d}x$, trong đó $P(x)$ là đa thức

♦.**Đặt:** $\begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ \mathrm{d}v = P(x)\mathrm{d}x \end{cases}$.

❷. **Casio:** Xét hiệu $\frac{d}{dx}(F(X))\Big|_{x=X} - f(X)$, calc x= {-5,….,5} một cách thích hợp

Sẽ thu kết quả bằng 0 hoặc xấp xỉ 0 là đáp án đúng.

A - Bài tập minh họa:

Câu 1. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\cos 2x$ là

Ⓐ. $\frac{x\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$.

Ⓑ. $x\sin 2x - \frac{\cos 2x}{2} + C$.

Ⓒ. $x\sin 2x + \frac{\cos 2x}{2} + C$.

Ⓓ. $\frac{x\sin 2x}{2} - \frac{\cos 2x}{4} + C$.

Lời giải

➲Chọn A

- $I = \int x\cos 2x\mathrm{d}x$.

PP nhanh trắc nghiệm

- **Casio**

•Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$.

•Khi đó

$I = \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$

Calc $x=3.5$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{x\sin(2x)}{2}+\frac{\cos(}{4}\right.$

0

Chọn A

Câu 2: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\ln 2x$ là

Ⓐ. $\frac{x^2}{2}\left(\ln 2x - \frac{1}{2}\right) + C$.

Ⓑ. $x^2\ln 2x - \frac{x^2}{2} + C$.

Ⓒ. $\frac{x^2}{2}(\ln 2x - 1) + C$.

Ⓓ. $\frac{x^2}{2}\ln 2x - x^2 + C$.

Lời giải

➲**Chọn A**

• Đặt $\begin{cases} u = \ln 2x \\ dv = xdx \end{cases} \to \begin{cases} du = \frac{1}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$.

• $F(x) = \int f(x)dx = \frac{x^2}{2}.\ln 2x - \int \frac{1}{x}.\frac{x^2}{2}dx$
$= \frac{x^2}{2}\ln 2x - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{2}\left(\ln 2x - \frac{1}{2}\right) + C$.

PP nhanh trắc nghiệm

•Casio

Calc $x=1$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\left(\ln(2x)-\frac{1}{2}\right)\right)\Big|_1$

0

Chọn A

Câu 3: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.e^{2x}$.

Ⓐ. $F\;x\; = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$.

Ⓑ. $F\;x\; = 2e^{2x}\;x - 2\; + C$.

Ⓒ. $F\;x\; = 2e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$.

Ⓓ. $F\;x\; = \frac{1}{2}e^{2x}\;x - 2\; + C$.

Lời giải

➲**Chọn A**

•Ta có: $F(x) = \int x.e^{2x}dx$.

•Đặt

$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$

PP nhanh trắc nghiệm

• Casio

Calc: $x=2$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{2x}}{2}(x-1\div 2)\right)\Big|_{x=x}$

0

↳**B - Bài tập rèn luyện:**

Câu 1: Biết rằng hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\ln x$ và thỏa mãn $F(1)=3$. Giá trị của $F\left(e^2\right)$ bằng

Ⓐ. 4. Ⓑ. $-e^2+4$. Ⓒ. e^2+4. Ⓓ. $3e^2+4$.

Câu 2: Nguyên hàm của hàm $f(x)=4x(1+\ln x)$ là

Ⓐ. $2x^2\ln x+2x^2$.
Ⓑ. $2x^2\ln x+3x^2$.
Ⓒ. $2x^2\ln x+x^2+C$
Ⓓ. $2x^2\ln x+3x^2+C$.

Câu 3: Biết rằng hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x-1)e^{-x}$ và thỏa mãn $F(0)=2020$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ. $F(x)=e^{-x}+2019$.
Ⓑ. $F(x)=xe^{-x}+2020$.
Ⓒ. $F(x)=-xe^{-x}+2020$.
Ⓓ. $F(x)=-xe^{x}+2020$.

Câu 4: Biết rằng hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\cos^2\dfrac{x}{2}$ và thỏa mãn $F(0)=\dfrac{1}{2}\cdot$ Giá trị của $F(\pi)$ bằng

Ⓐ. $\dfrac{\pi^2}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot$
Ⓑ. $\dfrac{\pi^2}{4}-\dfrac{1}{2}$.
Ⓒ. $\dfrac{\pi^2}{4}+\dfrac{1}{2}\cdot$.
Ⓓ. $\dfrac{\pi^2}{4}+1$.

Câu 5: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x\sin x$ là

Ⓐ. $\int e^x\sin xdx=e^x\sin x+C$.
Ⓑ. $\int e^x\sin xdx=\dfrac{1}{2}\left(e^x\sin x+e^x\cos x\right)+C$
Ⓒ. $\int e^x\sin xdx=e^x\cos x+C$.
Ⓓ. $\int e^x\sin xdx=\dfrac{1}{2}\left(e^x\sin x-e^x\cos x\right)+C$.

Câu 6: Hàm số $f(x)=(x+1)\sin x$ có các nguyên hàm là:

Ⓐ. $F(x)=(x+1)\cos x+\sin x+C$.
Ⓑ. $F(x)=-(x+1)\cos x+\sin x+C$
Ⓒ. $F(x)=-(x+1)\cos x-\sin x+C$
Ⓓ. $F(x)=(x+1)\cos x-\sin x+C$

Câu 7: Tính $\int x\cos xdx$, ta được kết quả là:

Ⓐ. $F(x)=x\sin x+\cos x+C$
Ⓑ. $F(x)=x\sin x-\cos x+C$.
Ⓒ. $F(x)=-x\sin x+\cos x+C$.
Ⓓ. $F(x)=-x\sin x-\cos x+C$

Câu 8: Một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\left(x^2+2x\right)e^x$

Ⓐ. $F(x)=(2x+2).e^x$
Ⓑ. $F(x)=x^2e^x$.
Ⓒ. $F(x)=(x^2+x).e^x$.
Ⓓ. $F(x)=(x^2-2x).e^x$.

Câu 9: Kết quả nào sai trong các kết quả sau ?

Ⓐ. $\int xe^{3x}dx=\frac{xe^{3x}}{3}-\frac{1}{9}e^{3x}+C$ Ⓑ. $\int xe^{x}dx=xe^{x}-e^{x}+C$.

Ⓒ. $\int xe^{x}dx=\frac{x^2}{2}.e^{x}+C$. Ⓓ. $\int \frac{x}{e^x}dx=\frac{-x}{e^x}-\frac{1}{e^x}+C$.

Câu 10: Cho $f(x)=\int_0^x \ln t dt$. Đạo hàm $f'(x)$ là hàm số nào dưới đây?

Ⓐ. $\frac{1}{x}$. Ⓑ. $\ln x$. Ⓒ. $\ln^2 x$. Ⓓ. $\frac{1}{2}\ln x$.

Câu 11: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\sin x$ là

Ⓐ. $-x\cos x+\sin x+C$. Ⓑ. $x\sin x+\cos x+C$.

Ⓒ. $x\cos x+\sin x+C$. Ⓓ. $x\cos x-\sin x+C$.

Câu 12: Kết quả của $I=\int xe^x\mathrm{d}x$ là

Ⓐ. $I=\frac{x^2}{2}e^x+e^x+C$. Ⓑ. $I=e^x+xe^x+C$.

Ⓒ. $I=\frac{x^2}{2}e^x+C$. Ⓓ. $I=xe^x-e^x+C$.

Câu 13: Tính $F(x)=\int x\sin 2x dx$. Chọn kết quả ***đúng***?

Ⓐ. $F(x)=\frac{1}{4}(2x\cos 2x+\sin 2x)+C$. Ⓑ. $F(x)=-\frac{1}{4}(2x\cos 2x+\sin 2x)+C$.

Ⓒ. $F(x)=-\frac{1}{4}(2x\cos 2x-\sin 2x)+C$. Ⓓ. $F(x)=\frac{1}{4}(2x\cos 2x-\sin 2x)+C$.

Câu 14: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$ là

Ⓐ. xe^x+C. Ⓑ. $(x+2)\mathrm{e}^x+C$. Ⓒ. $(x-1)\mathrm{e}^x+C$. Ⓓ. $2xe^x+C$.

Câu 15: Họ các nguyên hàm của $f(x)=x\ln x$ là

Ⓐ. $\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{1}{4}x^2+C$. Ⓑ. $x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2+C$.

Ⓒ. $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$. Ⓓ. $x\ln x+\frac{1}{2}x+C$.

Câu 16: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\ln(x+2)$.

Ⓐ. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln(x+2)-\frac{x^2+4x}{2}+C$.

Ⓑ. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^2-4}{2}\ln(x+2)-\frac{x^2+4x}{2}+C$.

Ⓒ. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln(x+2)-\frac{x^2+4x}{4}+C$.

Ⓓ. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2-4}{2}\ln(x+2)-\dfrac{x^2-4x}{4}+C$.

Câu 17: Cho hàm số $y=\int x\sin 2x\mathrm{d}x$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

Ⓐ. $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{12}$.

Ⓑ. $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

Ⓒ. $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{12}$.

Ⓓ. $y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{24}$.

Câu 18: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$. Tính $F(x)$ biết $F(0)=1$

Ⓐ. $F(x)=(x+1)\mathrm{e}^{-x}+2$.

Ⓑ. $F(x)=-(x+1)\mathrm{e}^{-x}+1$.

Ⓒ. $F(x)=-(x+1)\mathrm{e}^{-x}+2$.

Ⓓ. $F(x)=(x+1)\mathrm{e}^{-x}+1$.

Câu 19: Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=x.\mathrm{e}^{2x}$.

Ⓐ. $F(x)=2\mathrm{e}^{2x}(x-2)+C$.

Ⓑ. $F(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}(x-2)+C$.

Ⓒ. $F(x)=2\mathrm{e}^{2x}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+C$.

Ⓓ. $F(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+C$.

Câu 20: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(5x+1)\mathrm{e}^{x}$ và $F(0)=3$. Tính $F(1)$.

Ⓐ. $F(1)=\mathrm{e}+2$.

Ⓑ. $F(1)=11\mathrm{e}-3$.

Ⓒ. $F(1)=\mathrm{e}+3$.

Ⓓ. $F(1)=\mathrm{e}+7$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.C	3.C	4.B	5.D	6.B	7.A	8.B	9.C	10.B
11.A	12.D	13.C	14.A	15.C	16.D	17.C	18.C	19.D	20.D

Full Chuyên đề 12 new 2020-2021

FB: Duong Hung

CHƯƠNG ③: NGUYÊN HÀM-TÍCH PHÂN-ỨNG DỤNG

Bài 2: TÍCH PHÂN DÙNG ĐỊNH NGHĨA, TÍNH CHẤT

☑ Dạng ①: Tích phân dùng định nghĩa

.Phương pháp:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Nhận xét: Tích phân của hàm số f từ a đến b có thể kí hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ hay $\int_a^b f(t)dt$. Tích phân đó chỉ phụ thuộc vào f và các cận a, b mà không phụ thuộc vào cách ghi biến số.

✧. Chú ý: Học thuộc bảng nguyên hàm của các hàm số cơ bản thường gặp.

A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Tính tích phân $\int_a^b dx$.

Ⓐ. $a-b$. Ⓑ. $a.b$. Ⓒ. $b-a$. Ⓓ. $a+b$.

Lời giải

Chọn C

- Ta có: $\int_a^b dx = x\Big|_a^b = b-a$

PP nhanh trắc nghiệm

-

Câu 2: Giá trị của $\int_{-1}^{0} e^{x+1}dx$ bằng

Ⓐ. $1-e$. Ⓑ. $e-1$. Ⓒ. $-e$. Ⓓ. e.

Lời giải

Chọn B

- Ta có $\int_{-1}^{0} e^{x+1}dx = e^{x+1}\Big|_{-1}^{0} = e-1$.

PP nhanh trắc nghiệm

-

Câu 3: Tích phân $I = \int_0^1 x^{2020}dx$ bằng

Ⓐ. $\frac{1}{2021}$. Ⓑ. 0. Ⓒ. $\frac{1}{2019}$. Ⓓ. 1.

Lời giải

PP nhanh trắc nghiệm

➲Chọn A

- Ta có $I=\int_0^1 x^{2020}\mathrm{d}x=\left.\dfrac{x^{2021}}{2021}\right|_0^1=\dfrac{1}{2021}$.

B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Biết $\int f(x)dx=F(x)+C$.Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

Ⓐ. $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$. Ⓑ. $\int_a^b f(x)dx=F(b).F(a)$.

Ⓒ. $\int_a^b f(x)dx=F(a)-F(b)$. Ⓓ. $\int_a^b f(x)dx=F(b)+F(a)$.

Câu 2: Trong các phép tính sau đây, phép tính nào **sai**?

Ⓐ. $\int_1^2 (x+1)\mathrm{d}x=\left.\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\right|_1^2$. Ⓑ. $\int_\pi^{2\pi}\cos x\mathrm{d}x=(\sin x)\Big|_\pi^{2\pi}$.

Ⓒ. $\int_{-3}^{-2}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=(\ln x)\Big|_{-3}^{-2}$. Ⓓ. $\int_1^3 e^x\mathrm{d}x=(e^x)\Big|_1^3$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;3]$, $f(3)=5$ và $\int_1^3 f'(x)\mathrm{d}x=6$. Khi đó $f(1)$ bằng

Ⓐ. -1. Ⓑ. 11. Ⓒ. 1. Ⓓ. 10.

Câu 4: $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}$ $(x\neq 0)$, biết rằng $F(1)=1$. Tính $F(3)$.

Ⓐ. $F(3)=3\ln 3+3$. Ⓑ. $F(3)=2\ln 3+2$. Ⓒ. $F(3)=2\ln 3+3$. Ⓓ. $F(3)=3$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(-1)=-2$ và $f(3)=2$. Tính $I=\int_{-1}^3 f'(x)dx$.

Ⓐ. $I=4$. Ⓑ. $I=3$. Ⓒ. $I=0$. Ⓓ. $I=-4$.

Câu 6: Cho các số thực a, b $(a<b)$. Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thì

Ⓐ. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f'(a)-f'(b)$. Ⓑ. $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$.

Ⓒ. $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(a)-f(b)$. Ⓓ. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f'(b)-f'(a)$.

Câu 7: **PT 1.2** Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Khi đó hiệu số $F(1)-F(2)$ bằng

Ⓐ. $\int_1^2[-f(x)]\mathrm{d}x$. Ⓑ. $\int_2^1 F(x)\mathrm{d}x$. Ⓒ. $\int_1^2[-F(x)]\mathrm{d}x$. Ⓓ. $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[a;b]$, $f(b)=5$ và $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $f(a)$ bằng

Ⓐ. -6. Ⓑ. 6. Ⓒ. -4. Ⓓ. 4.

Câu 9: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;1\right]$ và thoản mãn $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=-3$. Giá trị của biểu thức $f\left(0\right)-f\left(1\right)$

Ⓐ. -2. Ⓑ. 1. Ⓒ. 3. Ⓓ. -3.

Câu 10: Cho hàm số $y=x^3$ có một nguyên hàm là $F\left(x\right)$. Khẳng định nào sau đây là *đúng*?

Ⓐ. $F\left(2\right)-F\left(0\right)=16$. Ⓑ. $F\left(2\right)-F\left(0\right)=1$. Ⓒ. $F\left(2\right)-F\left(0\right)=8$. Ⓓ. $F\left(2\right)-F\left(0\right)=4$.

Câu 11: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $\left[1;3\right]$ thỏa mãn $f\left(1\right)=2$ và $f\left(3\right)=9$. Tính $I=\int_1^3 f'(x)\mathrm{d}x$.

Ⓐ. $I=11$. Ⓑ. $I=2$. Ⓒ. $I=7$. Ⓓ. $I=18$.

Câu 12: Tính tích phân $I=\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x+2}$.

Ⓐ. $I=-\frac{21}{100}$. Ⓑ. $I=\ln\frac{5}{2}$. Ⓒ. $I=\log\frac{5}{2}$. Ⓓ. $I=\frac{4581}{5000}$.

Câu 13: Tính tích phân $I=\int_1^2 \frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x$.

Ⓐ. $I=\ln 3-1$. Ⓑ. $I=\ln\sqrt{3}$. Ⓒ. $I=\ln 2+1$. Ⓓ. $I=\ln 2-1$.

Câu 14: Cho các số thực a,b $\left(a<b\right)$. Nếu hàm số $y=F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $y=f\left(x\right)$ thì

Ⓐ. $\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(a\right)-F\left(b\right)$. Ⓑ. $\int_a^b F\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(a\right)-f\left(b\right)$.

Ⓒ. $\int_a^b F\left(x\right)\mathrm{d}x=f\left(a\right)-f\left(b\right)$. Ⓓ. $\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(b\right)-F\left(a\right)$.

Câu 15: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$, một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ là $F\left(x\right)$ thoả mãn $F\left(1\right)=-3$ và $F\left(0\right)=1$. Giá trị $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ. -4. Ⓑ. -3. Ⓒ. -2. Ⓓ. 4.

Câu 16: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(0\right)=1$, $f'\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^3 f'\left(x\right)\mathrm{d}x=9$. Giá trị của $f\left(3\right)$ là

Ⓐ. 6. Ⓑ. 3. Ⓒ. 10. Ⓓ. 9.

Câu 17: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(0\right)=1$, $f'\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^3 f'\left(x\right)\mathrm{d}x=9$. Giá trị của $f\left(3\right)$ là

Ⓐ. 6. Ⓑ. 3. Ⓒ. 10. Ⓓ. 9.

Câu 18: Tích phân $\int_0^1 x\left(x^2+3\right)dx$ bằng

Ⓐ. 2. Ⓑ. 1. Ⓒ. $\frac{4}{7}$. Ⓓ. $\frac{7}{4}$.

Câu 19: $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$ bằng

Ⓐ. $2\ln 2$. Ⓑ. $\frac{2}{3}\ln 2$. Ⓒ. $\ln 2$. Ⓓ. $\frac{1}{3}\ln 2$.

Câu 20: Cho hai số thực $a,b\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn $\int_a^b \frac{1}{\cos^2 x}dx=10$. Giá trị của $\tan a-\tan b$ bằng

Ⓐ. 10. Ⓑ. $-\frac{1}{10}$. Ⓒ. -10. Ⓓ. $\frac{1}{10}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.A	4.C	5.A	6.B	7.A	8.D	9.C	10.D
11.C	12.B	13	14.D	15.A	16.C	17.C	18.D	19.B	20.C

☑ Dạng ②: Tích phân dùng tính chất

.Phương pháp:

Giả sử cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên K, a, b, c là ba số bất kỳ thuộc K. Khi đó ta có

①. $\int_a^a f(x)dx = 0$

②. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

③. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

④. $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

⑤. $\int_a^b kf(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$.

A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Cho biết $\int_0^2 f(x)dx=3$ và $\int_0^2 g(x)dx=-2$. Tính tích phân $I=\int_0^2\left[2x+f(x)-2g(x)\right]dx$.

Ⓐ. $I=11$. Ⓑ. $I=18$. Ⓒ. $I=5$. Ⓓ. $I=3$.

Lời giải

➲**Chọn A**

- Ta có $I=\int_0^2\left[2x+f(x)-2g(x)\right]dx$

$=\int_0^2 2x dx+\int_0^2 f(x)dx-2\int_0^2 g(x)dx=4+3-2.(-2)=11$.

PP nhanh trắc nghiệm

-

Câu 2: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=9;\int\limits_2^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$. Tính $I=\int\limits_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x$?

Ⓐ. $I=\frac{9}{4}$. Ⓑ. $I=36$. Ⓒ. $I=13$. Ⓓ. $I=5$.

Lời giải

➲Chọn C

- Ta có $\int\limits_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_2^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=9+4=13$.

PP nhanh trắc nghiệm

-

Câu 3: Cho $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-2$ và $\int\limits_1^5\left(2f\left(x\right)\right)\mathrm{d}x=6$ khi đó $\int\limits_0^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ. 1. Ⓑ. 2. Ⓒ. 4. Ⓓ. 3.

Lời giải

➲Chọn A

- $\int\limits_1^5\left(2f\left(x\right)\right)\mathrm{d}x=6\Leftrightarrow\int\limits_1^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$
- $\int\limits_0^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x=-2+3=1$

PP nhanh trắc nghiệm

-

B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Nếu $\int\limits_1^2 f\left(x\right)dx=3,\int\limits_2^5 f\left(x\right)dx=-1$ thì $\int\limits_1^5 f\left(x\right)dx$ bằng

Ⓐ. 2. Ⓑ. -2. Ⓒ. 3. Ⓓ. 4.

Câu 2: Cho $f\left(x\right),g\left(x\right)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

Ⓐ. $\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f\left(y\right)\mathrm{d}y$.

Ⓑ. $\int\limits_a^b\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_a^b g\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Ⓒ. $\int\limits_a^a f\left(x\right)\mathrm{d}x=0$.

Ⓓ. $\int\limits_a^b\left(f\left(x\right).g\left(x\right)\right)\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x.\int\limits_a^b g\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 3: Cho $f\left(x\right),g\left(x\right)$ là hai hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

Ⓐ. $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\int\limits_a^b f\left(y\right)dy$.

Ⓑ. $\int\limits_a^b\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)dx=\int\limits_a^b f\left(x\right)dx-\int\limits_a^b g\left(x\right)dx$.

Ⓒ. $\int_a^a f\left(x\right)dx=0$.

Ⓓ. $\int_a^b \left[f(x)g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx.\int_a^b g(x)dx$.

Câu 4: Cho $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 5$, khi đó $\int_0^1 \left[f(x)+2g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ. -3. Ⓑ. -8. Ⓒ. 12. Ⓓ. 1.

Câu 5: Cho $\int_0^1 \left[f(x)-2g(x)\right]\mathrm{d}x = 12$ và $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 5$, khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ. -2. Ⓑ. 12. Ⓒ. 22. Ⓓ. 2.

Câu 6: Cho $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x = -7$, khi đó $\int_{-1}^1 \left[f(x)-\frac{1}{7}g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ. -3. Ⓑ. Ⓒ. 3. Ⓓ. 1.

Câu 7: Cho $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = 50$, $\int_b^c f(x)\mathrm{d}x = 20$. Tính $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

Ⓐ. -30. Ⓑ. 0. Ⓒ. 70. Ⓓ. 30.

Câu 8: Cho $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 5$, khi đó $\int_0^1 \left[f(x)-2g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ. -3. Ⓑ. 12. Ⓒ. -8. Ⓓ. 1.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^6 f(x)dx = 7, \int_3^{10} f(x)dx = 8, \int_3^6 f(x)dx = 9$. Giá trị của $I = \int_0^{10} f(x)dx$ bằng

Ⓐ. $I = 5$. Ⓑ. $I = 6$. Ⓒ. $I = 7$. Ⓓ. $I = 8$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = -5$. Giá trị của biểu thức $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ. 8. Ⓑ. -11. Ⓒ. -8. Ⓓ. -2.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

Ⓐ. $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$. Ⓑ. $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

Ⓒ. $\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$. Ⓓ. $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[1;4]$, biết $f(4) = 3, f(1) = 1$. Tính $\int_1^4 2f'(x)\mathrm{d}x$

Ⓐ. 10. Ⓑ. 8. Ⓒ. 4. Ⓓ. 5.

Câu 13: Cho các hàm số $f(x), g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $\int_1^3 [3f(x)+2g(x)]dx = 1$; $\int_1^3 [2f(x)-g(x)]dx = -3$. Tính $\int_0^1 f(2x+1)dx$.

Ⓐ. $\frac{-5}{7}$. Ⓑ. $-\frac{10}{7}$. Ⓒ. $\frac{11}{14}$. Ⓓ. $-\frac{5}{14}$.

Câu 14: Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số liên tục bất kì trên đoạn $[a;b]$. Mệnh đề nào sau đây **đúng** ?

Ⓐ. $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.

Ⓑ. $\int_a^b (f(x)-g(x))dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.

Ⓒ. $\left|\int_a^b (f(x)-g(x))\right|dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.

Ⓓ. $\int_a^b (f(x)-g(x))dx = \left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx\right|$.

Câu 15: Biết $\int_2^5 f(x)dx = 3$, $\int_2^5 g(x)dx = 9$. Tích phân $\int_2^5 [f(x)+g(x)]dx$ bằng

Ⓐ. 10. Ⓑ. 3. Ⓒ. 6. Ⓓ. 12.

Câu 16: Cho $\int_{-1}^0 f(x)dx = 3 \int_0^3 f(x)dx = 3$. Tính tích phân $\int_{-1}^3 f(x)dx$?

Ⓐ. 6. Ⓑ. 4. Ⓒ. 2. Ⓓ. 0.

Câu 17: Cho $\int_0^1 f(x)dx = -2$ và $\int_0^1 g(x)dx = -5$. Khi đó $\int_0^1 [f(x)+3g(x)]dx$ bằng

Ⓐ. -10. Ⓑ. 12. Ⓒ. -17. Ⓓ. 1.

Câu 18: Cho $\int_{-2}^0 f(x)dx = 2, \int_0^2 f(x)dx = 2$. Tích phân $\int_{-2}^2 f(x)dx$ bằng

Ⓐ. 4. Ⓑ. 3. Ⓒ. 6. Ⓓ. 1.

Câu 19: Cho $\int_{-1}^0 f(x)dx = -1$ và $\int_0^4 f(x)dx = 3$. Khi đó, $I = \int_{-1}^4 f(x)dx$ bằng

Ⓐ. $I = -4$. Ⓑ. $I = 2$. Ⓒ. $I = 4$. Ⓓ. $I = -2$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;3]$ và $\int_0^2 f(x)dx = 1, \int_3^2 f(x)dx = 4$. Tính $I = \int_0^3 f(x)dx$.

Ⓐ. $I = 5$. Ⓑ. $I = -3$. Ⓒ. $I = 3$. Ⓓ. $I = 4$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.D	3.D	4.C	5.C	6.C	7.A	8.C	9.B	10.C
11.D	12.C	13.D	14.B	15.D	16.B	17.C	18.A	19.B	20.B

☑ Dạng ③: Tích phân sử dụng định nghĩa chứa tham số a, b, c

⊗-*Phương pháp:*

①. **Dạng 1:** • $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{adx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln\left|ax+b\right|\Big|_{\alpha}^{\beta}$

• $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{(ax+b)^k}=\frac{1}{a}\int_{\alpha}^{\beta}(ax+b)^{-k}.adx=\frac{1}{a(1-k)}.(ax+b)^{-k+1}\Big|_{\alpha}^{\beta}$

②. **Dạng 2:** $I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ $\left(a\neq 0\right)$ ($ax^2+bx+c\neq 0$ với mọi $x\in\left[\alpha;\beta\right]$), $\Delta=b^2-4ac$

• $\Delta>0$ thì $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$I=\frac{1}{a(x_1-x_2)}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{1}{x-x_1}-\frac{1}{x-x_2}\right)dx=\frac{1}{a(x_1-x_2)}\left[\ln\left|x-x_1\right|-\ln\left|x-x_2\right|\right]\Big|_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{a(x_1-x_2)}\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right|\Bigg|_{\alpha}^{\beta}$$

• $\Delta=0$ thì $\frac{1}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a(x-x_0)^2}$ $\left(x_0=\frac{-b}{2a}\right)$

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{(x-x_0)^2}=-\frac{1}{a(x-x_0)}\Big|_{\alpha}^{\beta}$$

• $\Delta<0$ thì $I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}\right)^2\right]}$

$$x+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}}\tan t\Rightarrow dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\Delta}{a^2}}\left(1+\tan^2 t\right)dt$$

③. **Dạng 3:** $I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx,$ $\left(a\neq 0\right)$.($f(x)=\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}$ liên tục trên đoạn $\left[\alpha;\beta\right]$)

- Bằng phương pháp đồng nhất hệ số, ta tìm A và B sao cho:

$$\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}=\frac{A(ax^2+bx+c)'}{ax^2+bx+c}+\frac{B}{ax^2+bx+c}=\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}+\frac{B}{ax^2+bx+c}$$

- Ta có I= $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{mx+n}{ax^2+bx+c}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx+\int_{\alpha}^{\beta}\frac{B}{ax^2+bx+c}dx$

↳Tích phân $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx=A\ln\left|ax^2+bx+c\right|\Big|_{\alpha}^{\beta}$

↳Tích phân $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ thuộc dạng 2.

A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Cho biết $\int_0^1 \frac{x-1}{x+2}dx = a + b\ln\frac{3}{2}$, với a, b là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $a-2b$ bằng

Ⓐ. 6 Ⓑ. 3. Ⓒ. -5. Ⓓ. 7.

Lời giải

Chọn D

- Ta có: $\int_0^1 \frac{x-1}{x+2}dx = \int_0^1 \left(1-\frac{3}{x+2}\right)dx = \left(x-3\ln|x+2|\right)\Big|_0^1$

$=(1-3\ln 3)-(0-3\ln 2) = 1-3\ln\frac{3}{2}$.

- Suy ra $\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases}$. Vậy $a-2b=7$.

PP nhanh trắc nghiệm

Casio:

- Bước 1: Tính tích phân rồi lưu lại là A .
- Bước 2: Rút $a = \mathrm{A} - b\ln\frac{3}{2}$.
- Bước 3: Table nhập $f(x) = \mathrm{A} - x\ln\frac{3}{2}$ với Start: -9, End: 9, Step: 1 .

Được cặp số $x=-3$, $f(x)=1$ thỏa mãn. Suy ra $a=1$, $b=-3$.

Câu 2: Cho $\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{(2x+1)^2} = a + b\ln 2 + c\ln 3$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b+c$ bằng

Ⓐ. $\frac{1}{12}$. Ⓑ. $\frac{5}{12}$. Ⓒ. $-\frac{1}{3}$. Ⓓ. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

- $\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(2x+1-1)\mathrm{d}x}{(2x+1)^2} = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{(2x+1)^2}\right)\mathrm{d}(2x+1)$

$= \frac{1}{4}\left(\ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}\left(\ln 3 + \frac{1}{3} - 1\right) = \frac{1}{4}\ln 3 - \frac{1}{6}$.

- Vậy $a+b+c = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

PP nhanh trắc nghiệm

- Đặt $t = 2x+1 \Rightarrow x = \frac{t-1}{2}, dx = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$
- $I = \int_1^3 \frac{t-1}{4t^2}dt = \left(\frac{1}{4}\ln t + \frac{1}{4t}\right)\Big|_1^3 = \frac{1}{4}\ln 3 - \frac{1}{6}$
- Vậy: $a+b+c = \frac{1}{12}$

Câu 3: Cho $\int_2^3 \frac{1-5x}{9x^2-24x+16}dx = a\ln b + c$, với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $9a+11b+22c$ bằng

Ⓐ. 15. Ⓑ. -10. Ⓒ. 7. Ⓓ. 9.

Lời giải

Chọn C

PP nhanh trắc nghiệm

-

- Ta có

$$\int_2^3 \frac{1-5x}{9x^2-24x+16}\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{1-5x}{(3x-4)^2}\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{-\frac{5}{3}(3x-4)-\frac{17}{3}}{(3x-4)^2}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{5}{3}\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{3x-4} - \frac{17}{3}\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(3x-4)^2} = -\frac{5}{9}\int_2^5 \frac{\mathrm{d}(3x-4)}{3x-4} - \frac{17}{9}\int_2^5 \frac{\mathrm{d}(3x-4)}{(3x-4)^2}$$

$$= \left(-\frac{5}{9}\ln|3x-4| + \frac{17}{9}.\frac{1}{3x-4}\right)\Bigg|_2^5 = \frac{5}{9}\ln\frac{2}{11} - \frac{17}{22}$$

$$\Rightarrow a = \frac{5}{9}, b = \frac{2}{11}, c = -\frac{17}{22}$$

$$\Rightarrow 9a + 11b + 22c = 9.\frac{5}{9} + 11.\frac{2}{11} - 22.\frac{17}{22} = -10$$

B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Tìm số thực $a<0$ thỏa mãn $\int_1^a \left(x^3-6x\right)\mathrm{d}x = \frac{875}{4}$.

Ⓐ. $a=-4$. Ⓑ. $a=-5$. Ⓒ. $a=-6$. Ⓓ. $a=-3$.

Câu 2: Giá trị của tích phân $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{2x+5}$ là $\frac{1}{a}\ln\frac{b}{c}$,. Tổng $a+b+c$ bằng

Ⓐ. 18. Ⓑ. 14. Ⓒ. 16. Ⓓ. 10.

Câu 3: Giả sử $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = a + \ln(b+1)$, với a,b là các số nguyên không âm. Tính $T=a+b$?

Ⓐ. 9. Ⓑ. 2. Ⓒ. -1. Ⓓ. 1.

Câu 4: Biết $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{x+1}\mathrm{d}x = a\ln 3 + b\ln 2 + c$ $(a,b,c$ là các số nguyên). Giá trị $a+b-c$ bằng

Ⓐ. 2. Ⓑ. -4. Ⓒ. 3. Ⓓ. -1.

Câu 5: Cho biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4-\sin x)\mathrm{d}x = a\pi + b$, với a, b là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $a+b$ bằng

Ⓐ. -4. Ⓑ. 6. Ⓒ. 1. Ⓓ. 1.

Câu 6: Cho $I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^2 2x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a} + \frac{b}{c}$, với a, b, c là các số nguyên dương, $\frac{b}{c}$ tối giản. Tính $P=a+b+c$
.

Ⓐ. $P=15$. Ⓑ. $P=23$. Ⓒ. $P=24$. Ⓓ. $P=25$.

Câu 7: Cho $\int_0^1 \frac{x^2+2x}{(x+1)^3}\mathrm{d}x = a + b\ln 2$ với a, b là các số hữu tỷ. Giá trị của $16a+b$ là

Ⓐ. 17. Ⓑ. 10. Ⓒ. -8. Ⓓ. -5.

Câu 8: Cho $\int\limits_1^3 \frac{2x+1}{x^2+3x+2}dx = a\ln 2 + b\ln 3 + c\ln 5,\ (a,b,c\in\mathbb{Z})$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

Ⓐ. -1 Ⓑ. 4 Ⓒ. 1 Ⓓ. 7

Câu 9: Với a,b là các tham số thực. Giá trị tích phân $\int\limits_0^b \left(3x^2-2ax-1\right)\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ. b^3-b^2a-b. Ⓑ. b^3+b^2a+b. Ⓒ. b^3-ba^2-b. Ⓓ. $3b^2-2ab-1$.

Câu 10: Cho $I=\int_0^1 \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x = a-\ln b$ với $a,\ b$ là các số nguyên dương. Giá trị $a+b$ bằng

Ⓐ. 3. Ⓑ. 4. Ⓒ. 5. Ⓓ. 6.

Câu 11: Có bao nhiêu số thực $a\in(0;2\pi]$ sao cho $\int\limits_0^1 \cos^2(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}+\frac{1}{4a}$.

Ⓐ. 2. Ⓑ. 4. Ⓒ. 3. Ⓓ. 1.

Câu 12: Cho $\int\limits_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx = a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a+b+c$ bằng

Ⓐ. 0. Ⓑ. 2. Ⓒ. 3. Ⓓ. 1.

Câu 13: Cho $\int\limits_0^1 \frac{x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x = a+b\ln 2+c\ln 3$ với $a,\ b,\ c$ là các số hữu tỷ. Giá trị của $6a+b+c$ bằng

Ⓐ. 4. Ⓑ. -2. Ⓒ. 2. Ⓓ. 1.

Câu 14: Biết $I=\int\limits_1^3 \frac{x+2}{x}\mathrm{d}x = a+b\ln c$, với a, b, $c\in\mathbb{Z}$, $c<9$. Tính tổng $S=a+b+c$.

Ⓐ. $S=7$. Ⓑ. $S=5$. Ⓒ. $S=8$. Ⓓ. $S=6$.

Câu 15: Cho $\int\limits_1^2 \left(x^2+\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{10}{b}+\ln\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $P=a+b$?

Ⓐ. $P=1$. Ⓑ. $P=5$. Ⓒ. $P=7$. Ⓓ. $P=2$.

Câu 16: Giả sử $\int\limits_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x = a\ln 5+b\ln 3;\ a,b\in Q$. Tính $P=a^2-2b$.

Ⓐ. $P=10$. Ⓑ. $P=8$. Ⓒ. $P=3$. Ⓓ. $P=1$.

Câu 17: Cho $\int\limits_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{(x+2)^2} = a+b\ln 2+c\ln 3$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng:

Ⓐ. -2. Ⓑ. 2. Ⓒ. 1. Ⓓ. -1.

Câu 18: Cho $\int\limits_3^4 \frac{1}{x^2(x+2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{a}{b}\right|-\frac{1}{c}$, với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của $a+b-c$ bằng

Ⓐ. 7. Ⓑ. -5. Ⓒ. 14. Ⓓ. 9.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.A	3.B	4.D	5.C	6.D	7.D	8.A	9.A	10.A

11.A	12.B	13.B	14.A	15.B	16.A	17.D	18.B		

Hướng dẫn giải

Câu 1:

•Ta có $\int_1^a (x^3-6x)\,dx = \left.\left(\frac{x^4}{4}-3x^2\right)\right|_1^a = \frac{a^4}{4}-3a^2+\frac{11}{4}$.

•Từ giả thiết ta có phương trình:

$\frac{a^4}{4}-3a^2+\frac{11}{4}=\frac{875}{4} \Leftrightarrow a^4-12a^2-864=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2=36 \\ a^2=-24 \end{array}\right.$.

•Do $a<0$ nên $a=-6$.

Câu 2:

•Ta có $\int_1^2 \frac{dx}{2x+5} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{d(2x+5)}{2x+5} = \frac{1}{2}\left.\left(\ln|2x+5|\right)\right|_1^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{7}$.

•Vậy $a+b+c=2+9+7=18$.

Câu 3:

Ta có $\int_1^5 \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\ln|2x-1|\Big|_1^5 = \frac{1}{2}(\ln 9-\ln 1) = \ln 3 = \ln(2+1)$.

Vậy $a=0, b=2 \Rightarrow a+b=2$.

Câu 4:

•Ta có: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{x+1}dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(2-\frac{3}{x+1}\right)dx = \left.\left(2x-3\ln|x+1|\right)\right|_0^{\frac{1}{2}} = 1-3\ln\frac{3}{2} = -3\ln 3+3\ln 2+1$.

•Do đó: $a=-3$, $b=3$, $c=1$. Vậy $a+b-c=-1$.

Câu 5:

•Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4-\sin x)dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx = 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi-1$.

•Suy ra $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow a+b=2-1=1$.

Câu 6:

• $I=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\cos^2 2x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}}(1+\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\left.\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)\right|_0^{\frac{\pi}{8}} = \frac{\pi}{16}+\frac{1}{8}$.

$\Rightarrow a=16$, $b=1$, $c=8$.

•Vậy $P=a+b+c=16+8+1=25$.

Câu 7:

•Ta có $\int_0^1 \frac{x^2+2x}{(x+1)^3}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^3}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x - \int_0^1 (x+1)^{-3}\mathrm{d}x = \ln|x+1|\Big|_0^1 - \frac{(x+1)^{-2}}{-2}\Bigg|_0^1 = -\frac{3}{8}+\ln 2$

.

•Vậy $a=-\frac{3}{8}$; $b=1$ và $16a+b=-5$.

Câu 8:

•Ta có: $\int_1^3 \frac{2x+1}{x^2+3x+2}dx = \int_1^3 \frac{3}{x+2}dx - \int_1^3 \frac{1}{x+1}dx = 3\ln|x+2|\Big|_1^3 - \ln|x+1|\Big|_1^3 = 3\ln 5 - 3\ln 3 - \ln 2$

•Vậy: $a=-1; b=-3; c=3 \Rightarrow a+b+c=-1$.

Câu 9:

$\int_0^b (3x^2-2ax-1)\mathrm{d}x = (x^3-ax^2-x)\Big|_0^b = b^3-ab^2-b$.

Câu 10:

•Ta có: $I=\int_0^1 \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x = \int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = (x-\ln|x+1|)\Big|_0^1 = 1-\ln 2.$

•Vậy: $a=1,\ b=2 \Rightarrow a+b=3.$

Câu 11: •Ta có: $\int_0^1 \cos^2(ax)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+\cos(2ax)}{2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\cos(2ax)}{2}\mathrm{d}x$

•Mà $\int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$ và $\int_0^1 \frac{\cos(2ax)}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4a}\sin(2ax)\Big|_0^1 = \frac{1}{4a}\sin(2a)$.

$\Rightarrow \int_0^1 \cos^2(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}+\frac{1}{4a}\sin(2a)$.

•Theo đề bài ta có: $\int_0^1 \cos^2(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}+\frac{1}{4a}$.

•Nên $\sin(2a)=1 \Leftrightarrow 2a=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow a=\frac{\pi}{4}+k\pi, (k\in\mathbb{Z})$

•Do $a\in(0;2\pi] \Leftrightarrow 0<\frac{\pi}{4}+k\pi\le 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4}<k\le\frac{7}{4} \Leftrightarrow k\in\{0;1\}$.

•Với $k=0 \Rightarrow a=\frac{\pi}{4}$.

•Với $k=1 \Rightarrow a=\frac{5\pi}{4}$.

•Vậy có 2 giá trị $a\in(0;2\pi]$ thỏa mãn đề bài.

Câu 12:

• $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx=\int_1^3 \frac{x+3}{(x+1)(x+2)}dx=\int_1^3 \frac{2}{x+1}dx-\int_1^3 \frac{1}{x+2}dx$

$=\left(2\ln|x+1|-\ln|x+2|\right)\Big|_1^3=2\ln 2+\ln 3-\ln 5$

•Suy ra $a=2$, $b=1$, $c=-1$.

•Nên $a+b+c=2+1-1=2$.

Câu 13:

•Ta có $\int_0^1 \frac{x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{1}{x+2}-\frac{2}{(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x=\left(\ln|x+2|+\frac{2}{x+2}\right)\Big|_0^1=-\frac{1}{3}-\ln 2+\ln 3$.

•Suy ra $a=-\frac{1}{3}$, $b=-1$, $c=1$.

•Vậy $6a+b+c=-2$.

Câu 14: •Ta có $I=\int_1^3 \frac{x+2}{x}\mathrm{d}x=\int_1^3\left(1+\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x=(x+2\ln x)\Big|_1^3=2+2\ln 3$.

•Mà $I=a+b\ln c$, với a, b, $c\in\mathbb{Z}$, $c<9$. Suy ra $a=2$, $b=2$, $c=3$.

•Vậy $S=a+b+c=7$.

Câu 15:

•Ta có $\int_1^2\left(x^2+\frac{x}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2\left(x^2+\frac{x+1-1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2\left(x^2+1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{x^3}{3}+x-\ln|x+1|\right)\Big|_1^2=\frac{10}{3}+\ln 2-\ln 3=\frac{10}{3}+\ln\frac{2}{3}=\frac{10}{b}+\ln\frac{a}{b}$.

•Suy ra $a=2;b=3$. Vậy $a+b=5$.

Câu 16:

•Ta có $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x=\int_0^2\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{2}{x+3}\right)\mathrm{d}x=\left[-\ln|x+1|+2\ln|x+3|\right]\Big|_0^2=2\ln 5-3\ln 3$.

$\Rightarrow a=2$, $b=-3$.

•Vậy $P=a^2-2b=10$.

Câu 17: • $\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{(x+2)^2}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+2}-2\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2}=\ln|x+2|\Big|_0^1-2.\frac{-1}{x+2}\Big|_0^1=-\frac{1}{3}-\ln 2+\ln 3$.

• $\Rightarrow a=-\frac{1}{3};b=-1;c=1\Rightarrow 3a+b+c=-1$.

Câu 18: •Ta có: $\frac{1}{x^2(x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2}\Rightarrow 1\equiv Ax^2+(Bx+C)(x+2)$

•Khi đó, dùng kỹ thuật đồng nhất hệ số ta được

• $\begin{cases} A+B=0 \\ 2B+C=0 \\ 2C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{4} \\ B=-\dfrac{1}{4} \\ C=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \int\limits_3^4 \dfrac{1}{x^2(x+2)}\mathrm{d}x = \int\limits_3^4 \left(\dfrac{1}{4(x+2)} + \dfrac{-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2} \right)\mathrm{d}x$

•Khi đó ta có: $\int\limits_3^4 \left(\dfrac{1}{4(x+2)} + \dfrac{-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2} \right)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\int\limits_3^4 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+2} - \dfrac{1}{4}\int\limits_3^4 \dfrac{\mathrm{d}x}{x} + \dfrac{1}{2}\int\limits_3^4 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2} = \left(\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x+2}{x}\right| - \dfrac{1}{2x} \right)\Bigg|_3^4$

• $\Rightarrow a=9, b=10, c=24 \Rightarrow a+b-c=-5$.

Full Chuyên đề 12 new 2020-2021

FB: Duong Hung

CHƯƠNG ③: NGUYÊN HÀM-TÍCH PHÂN-ỨNG DỤNG

Bài 3: TÍCH PHÂN ĐỔI BIẾN SỐ

☑ Dạng ①: Phương pháp tích phân bằng cách đổi biến số cơ bản

.*Phương pháp:* Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$. Giả sử hàm số $u=u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $\alpha \le u(x) \le \beta$. Giả sử có thể viết $f(x)=g(u(x))u'(x), x\in[a;b]$, với g liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$. Khi đó, ta có

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(u(x))u'(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du.$$

. Để tính tích phân: $I=\int_a^b g(u(x))u'(x)dx$ ta thực hiện các bước:

① .Bước 1: Biến đổi để chọn phép đặt $t=u(x)\Rightarrow dt=u'(x)dx$

②. Bước 2. Thực hiện phép đổi cận:

- Với $x=a$ thì $t=u(a)$; $x=b$ thì $t=u(b)$. (***Ghi Nhớ :*** *đổi biến phải đổi cận*)

③. Bước 3. Đưa về dạng $I=\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$ đơn giản và dễ tính hơn.

. Dấu hiệu nhận biết và cách đặt.

	Dấu hiệu	Có thể đặt
❶.	Có căn $\sqrt{f(x)}$	$t=\sqrt{f(x)}$
❷.	Có ngoặc $(ax+b)^n$	$t=ax+b$
❸.	Có mũ $a^{f(x)}$	$t=f(x)$
❹.	Có $\frac{dx}{x}$ *và* $\ln x$	$t=\ln x$ *hoặc* biểu thức chứa $\ln x$
❺.	Có $e^x dx$	$t=e^x$ *hoặc* biểu thức chứa e^x
❻.	Có $\sin xdx$	$t=\cos x$
❼.	Có $\cos xdx$	$t=\sin xdx$
❽.	Có $\frac{dx}{\cos^2 x}$	$t=\tan x$
❾.	Có $\frac{dx}{\sin^2 x}$	$t=\cot x$
❿.	Có mẫu: $\frac{f'(x)dx}{f(x)}$	$t=$ mẫu

A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Tính tích phân $I=\int_0^1 x(1+x^2)^4dx$

Ⓐ. $I=\frac{16}{5}$ Ⓑ. $I=\frac{31}{10}$ Ⓒ. $I=\frac{1}{10}$ Ⓓ. $I=-\frac{1}{10}$

Lời giải

Chọn B

- Đặt $t=1+x^2 \Rightarrow dt=2xdx$.
- Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=1;\, x=1 \Rightarrow t=2$
- Nên $I=\int_1^2 \frac{t^4}{2}dt=\frac{31}{10}$

PP nhanh trắc nghiệm

- **Casio:**

$$\int_0^1 x(1+x^2)^4dx$$

$$\frac{31}{10}$$

Câu 2: Tính tích phân $I=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$ bằng cách đặt $u=x^2-1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ. $I=2\int_0^3 \sqrt{u}du$ Ⓑ. $I=\int_1^2 \sqrt{u}du$

Ⓒ. $I=\int_0^3 \sqrt{u}du$ Ⓓ. $I=\frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}du$

Lời giải

Chọn C

- $I=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$
- Đặt $u=x^2-1 \Rightarrow du=2xdx$.
- Đổi cận $x=1 \Rightarrow u=0;\, x=2 \Rightarrow u=3$
- Nên $I=\int_0^3 \sqrt{u}du$

PP nhanh trắc nghiệm

- **Casio:** xét hiệu bằng 0

$$\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}\,dx-\int_0^3 \sqrt{x}\,dx$$

$$0°0'0"$$

Câu 3: Tính tích phân $I=\int_0^{\pi} \cos^3 x.\sin xdx$.

Ⓐ. $I=-\frac{1}{4}\pi^4$ Ⓑ. $I=-\pi^4$ Ⓒ. $I=0$ Ⓓ. $I=-\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn C

- Ta có: $I=\int_0^{\pi} \cos^3 x.\sin xdx$.

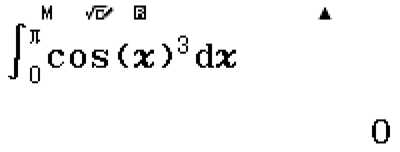
PP nhanh trắc nghiệm

✍ Sử dụng máy tính, tính tích phân hàm lượng giác phải chuyển về đơn vị radian.

•Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx\Leftrightarrow -dt=\sin xdx$

•Đổi cận: với $x=0\Rightarrow t=1$;với $x=\pi\Rightarrow t=-1$.

•Vậy $I=-\int\limits_{1}^{-1}t^3dt=\int\limits_{-1}^{1}t^3dt=\left.\frac{t^4}{4}\right|_{-1}^{1}=\frac{1^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}=0$.



B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Cho tích phân $I=\int\limits_0^1 x(1-x)^5\,\mathrm{d}x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ. $I=-\int\limits_{-1}^{0}t^5(1-t)\,\mathrm{d}t$.
Ⓑ. $I=-\int\limits_{-1}^{0}\left(t^6-t^5\right)\mathrm{d}t$.
Ⓒ. $I=\int\limits_{0}^{1}t^5(1-t)\,\mathrm{d}t$.
Ⓓ. $I=-\int\limits_{-1}^{0}\left(t^6-t^5\right)\mathrm{d}t$.

Câu 2: Cho $I=\int\limits_0^4 x\sqrt{1+2x}\,\mathrm{d}x$ và $u=\sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

Ⓐ. $I=\frac{1}{2}\left.\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right)\right|_1^3$.
Ⓑ. $I=\int\limits_1^3 u^2\left(u^2-1\right)\mathrm{d}u$.
Ⓒ. $I=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 x^2\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x$.
Ⓓ. $I=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 u^2\left(u^2-1\right)\mathrm{d}u$.

Câu 3: Tính $K=\int\limits_2^3\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

Ⓐ. $K=\ln 2$.
Ⓑ. $K=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$.
Ⓒ. $K=2\ln 2$.
Ⓓ. $K=\ln\frac{8}{3}$.

Câu 4: Tích phân $\int\limits_0^{\pi}\cos^2 x.\sin x\,dx$ bằng

Ⓐ. $-\frac{3}{2}$.
Ⓑ. $\frac{2}{3}$.
Ⓒ. $-\frac{2}{3}$.
Ⓓ. $\frac{3}{2}$.

Câu 5: Cho $I=\int\limits_1^2 2x\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$ và $u=x^2-1$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

Ⓐ. $I=\int\limits_0^3\sqrt{u}\,\mathrm{d}u$.
Ⓑ. $I=\frac{2}{3}\sqrt{27}$.
Ⓒ. $I=\int\limits_1^2\sqrt{u}\,\mathrm{d}u$.
Ⓓ. $I=\frac{2}{3}3^{\frac{3}{2}}$.

Câu 6: Cho $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cot^3 x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$ và $u=\cot x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

Ⓐ. $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}u^3\mathrm{d}u$.
Ⓑ. $I=\int\limits_0^1 u^3\mathrm{d}u$.
Ⓒ. $I=-\int\limits_0^1 u^3\mathrm{d}u$.
Ⓓ. $I=\int\limits_0^1 u\mathrm{d}u$.

Câu 7: Cho $I=\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5}\frac{\left(e^x+1\right)e^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$. Đặt $t=\sqrt{e^x-1}$. Chọn mệnh đề đúng.

Ⓐ. $I=2\int_1^4\left(t^2+2\right)dt$.
Ⓑ. $I=\int_{\ln 2}^{\ln 5}(t^2+2)dt$.
Ⓒ. $I=2\int_1^2\left(t^2+2\right)dt$.
Ⓓ. $I=\int_1^4\left(t^2+2\right)dt$.

Câu 8: Cho $I=\int_0^4 x\sqrt{1+2x}\,\mathrm{d}x$ và $u=\sqrt{2x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

Ⓐ. $I=\frac{1}{2}\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right)\Big|_1^3$.
Ⓑ. $I=\int_1^3 u^2\left(u^2-1\right)\mathrm{d}u$.
Ⓒ. $I=\frac{1}{2}\int_1^3 x^2\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x$.
Ⓓ. $I=\frac{1}{2}\int_1^3 u^2\left(u^2-1\right)\mathrm{d}u$.

Câu 9: Tính $K=\int_2^3\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x$.

Ⓐ. $K=\ln 2$.
Ⓑ. $K=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$.
Ⓒ. $K=2\ln 2$.
Ⓓ. $K=\ln\frac{8}{3}$.

Câu 10: Cho $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cot^3 x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$ và $u=\cot x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

Ⓐ. $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}u^3\mathrm{d}u$.
Ⓑ. $I=\int_0^1 u^3\mathrm{d}u$.
Ⓒ. $I=-\int_0^1 u^3\mathrm{d}u$.
Ⓓ. $I=\int_0^1 u\mathrm{d}u$.

Câu 11: Cho $I=\int_{\ln 2}^{\ln 5}\frac{\left(e^x+1\right)e^x}{\sqrt{e^x-1}}dx$. Đặt $t=\sqrt{e^x-1}$. Chọn mệnh đề đúng.

Ⓐ. $I=2\int_1^4\left(t^2+2\right)dt$.
Ⓑ. $I=\int_{\ln 2}^{\ln 5}(t^2+2)dt$.
Ⓒ. $I=2\int_1^2\left(t^2+2\right)dt$.
Ⓓ. $I=\int_1^4\left(t^2+2\right)dt$.

Câu 12: Cho $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos^2 x\mathrm{d}x$, khẳng định nào sau đây **đúng**?

Ⓐ. $\frac{1}{3}<I<\frac{1}{2}$.
Ⓑ. $0<I<\frac{1}{3}$.
Ⓒ. $\frac{1}{2}<I<\frac{2}{3}$.
Ⓓ. $\frac{2}{3}<I<1$.

Câu 13: Cho $I=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x+m}}$, m là số thực dương. Tìm tất cả các giá trị của m để $I\ge 1$.

Ⓐ. $0<m\le\frac{1}{4}$.
Ⓑ. $m\ge\frac{1}{4}$.
Ⓒ. $m>0$.
Ⓓ. $\frac{1}{8}\le m\le\frac{1}{4}$.

Câu 14: Cho tích phân $I=\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x$ và $x=4\sin t$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ. $I=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t$.
Ⓑ. $I=16\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 t\mathrm{d}t$.

Ⓒ. $I=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2t)\,\mathrm{d}t$. Ⓓ. $I=-16\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\mathrm{d}t$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.B	3.B	4.B	5.C	6.B	7.C	8.B	9.B	10.B
11.C	12.B	13.A	14.A						

☑ Dạng ②: Tích phân đổi biến chứa tham số a, b, c cơ bản

⊗-*Phương pháp:*

Để tính tích phân: $I=\int_a^b g(u(x))u'(x)dx$ ta thực hiện các bước:

① .Bước 1: Biến đổi để chọn phép đặt $t=u(x)\Rightarrow dt=u'(x)dx$

②. Bước 2. Thực hiện phép đổi cận:

• Với $x=a$ thì $t=u(a)$; $x=b$ thì $t=u(b)$

③. Bước 3. Đưa về dạng $I=\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$ đơn giản và dễ tính hơn.

A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Cho biết $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{a\sqrt{2}-1}{b}$ với a, b là các số tự nhiên. Giá trị của a^2-b^2 bằng

Ⓐ. -5. Ⓑ. 5. Ⓒ. 2. Ⓓ. 7.

Lời giải

➲Chọn A

• Đặt $\sqrt{x^2+1}=t\Rightarrow x^2+1=t^2\Rightarrow x\,\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$.

•Ta có $x=0\Rightarrow t=1$, $x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$.

•Khi đó: $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{2}} t^2\,\mathrm{d}t=\left.\frac{t^3}{3}\right|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\Rightarrow a=2,\ b=3$.

•Vậy $a^2-b^2=-5$.

PP nhanh trắc nghiệm

•Tính tích phân rồi lưu lại là A .

•Rút $b=\frac{a\sqrt{2}-1}{A}$.

• table $f(x)=\frac{x\sqrt{2}-1}{A}$ với Start: 0 , End: 18 , Step: 1 .

•Được cặp số $x=2$, $f(x)=3$ thỏa mãn. Suy ra $a=2, b=3$.

Câu 2: Cho $\int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

Ⓐ. -2. Ⓑ. -1. Ⓒ. 2 . Ⓓ. 1.

Lời giải

➲Chọn B

- Đặt $t=\ln x \Rightarrow \mathrm{d}t=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

- Đổi cận: $x=1 \Rightarrow t=0$; $x=\mathrm{e} \Rightarrow t=1$.

- Khi đó:

$$I=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln x}{x(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{t}{(t+2)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1\frac{t+2-2}{(t+2)^2}\mathrm{d}t=\int_0^1\left[\frac{1}{t+2}-\frac{2}{(t+2)^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\left(\ln|t+2|+2.\frac{1}{t+2}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{1}{3}-\ln 2+\ln 3.$$

- Suy ra: $a=-\frac{1}{3}$; $b=-1$; $c=1$.

- Do đó: $3a+b+c=-1$.

PP nhanh trắc nghiệm

-

Câu 3: Biết $\int_0^{\ln 6}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\sqrt{\mathrm{e}^x+3}}\mathrm{d}x=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $T=a+b+c$.

Ⓐ. $T=-1$. Ⓑ. $T=0$. Ⓒ. $T=2$. Ⓓ. $T=1$.

Lời giải

➲Chọn B

- Xét $I=\int_0^{\ln 6}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\sqrt{\mathrm{e}^x+3}}\mathrm{d}x$. Đặt $t=\sqrt{\mathrm{e}^x+3} \Rightarrow t^2=\mathrm{e}^x+3$

$\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

- Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=2$, $x=\ln 6 \Rightarrow t=3$.

- Khi đó $I=\int_2^3\frac{2t}{t+1}\mathrm{d}t=\int_2^3\left(2-\frac{2}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\left(2t-2\ln|t+1|\right)\Big|_2^3$

$=2-4\ln 2+2\ln 3$.

- Suy ra $a=2$, $b=-4$, $c=2$ nên $T=a+b+c=0$.

PP nhanh trắc nghiệm

-

B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Tính tích phân $I=\int\limits_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$ ta được kết quả $I=a\ln 3+b\ln 5$. Giá trị $S=a^2+ab+3b^2$ là

Ⓐ. 0. Ⓑ. 4. Ⓒ. 1. Ⓓ. 5.

Câu 2: Cho $I=\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x+2)^2}dx=a\ln 3+b\ln 2+\frac{c}{3}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đâu đúng.

Ⓐ. $a^2+b^2+c^2=1$. Ⓑ. $a^2+b^2+c^2=11$. Ⓒ. $a^2+b^2+c^2=9$. Ⓓ. $a^2+b^2+c^2=3$.

Câu 3: Cho $\int\limits_3^4 \frac{2x+1}{3x^2-x-2}dx=a\ln\frac{3}{2}+b\ln c$, với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của $5a+15b-11c$ bằng

Ⓐ. -12. Ⓑ. -15. Ⓒ. 14. Ⓓ. 9.

Câu 4: Biết $I=\int\limits_3^4 \frac{dx}{x^2+x}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5$, trong đó $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của $T=a+b+c$.

Ⓐ. $T=2$. Ⓑ. $T=3$. Ⓒ. $T=-1$. Ⓓ. $T=5$.

Câu 5: Giả sử tích phân $I=\int_1^5 \frac{1}{1+\sqrt{3x+1}}dx=a+b\ln 3+c\ln 5\,(a,b,c\in\mathbb{Q})$. Khi đó:

Ⓐ. $a+b+c=\frac{8}{3}$. Ⓑ. $a+b+c=\frac{4}{3}$. Ⓒ. $a+b+c=\frac{5}{3}$. Ⓓ. $a+b+c=\frac{7}{3}$.

Câu 6: Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2+3\tan x}}{1+\cos 2x}dx=a\sqrt{5}+b\sqrt{2}$, với $a,b\in\mathbb{R}$. Tính giá trị biểu thức $A=a+b$.

Ⓐ. $\frac{1}{3}$. Ⓑ. $\frac{7}{12}$. Ⓒ. $\frac{2}{3}$. Ⓓ. $\frac{4}{3}$.

Câu 7: Cho $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x+2)^2}dx=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

Ⓐ. -2. Ⓑ. -1. Ⓒ. 2. Ⓓ. 1.

Câu 8: Cho $\int\limits_1^3 \frac{\ln x}{(x+1)^2}dx=\frac{a}{b}\cdot\ln 3-c\cdot\ln 2$ với $a,\ b,\ c\in\mathbb{N}^*$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của $a+b+c$ bằng

Ⓐ. 8. Ⓑ. 7. Ⓒ. 6. Ⓓ. 9.

Câu 9: Biết $\int\limits_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1+\sqrt{e^x+3}}dx=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $T=a+b+c$.

Ⓐ. $T=-1$. Ⓑ. $T=0$. Ⓒ. $T=2$. Ⓓ. $T=1$.

Câu 10: Cho biết $\int\limits_1^e \frac{\sqrt{\ln x+3}}{x}dx=\frac{a}{3}+b\sqrt{3}$, với a,b là các số nguyên. Giá trị của biểu thức $\frac{1}{2^b}+\log_2 a$ bằng

Ⓐ. -1. Ⓑ. $\frac{7}{2}$. Ⓒ. 8. Ⓓ. 6.

Câu 11: Cho biết $\int\limits_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{a\sqrt{2}-1}{b}$ với a, b là các số tự nhiên. Giá trị của a^2-b^2 bằng

Ⓐ. -5. Ⓑ. 5. Ⓒ. 2. Ⓓ.7.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.D	3.A	4.A	5.B	6.A	7.B	8.A	9.B	10.C	11.A

☑ Dạng ③: Tích phân hàm ẩn đổi biến số cơ bản

⊗-*Phương pháp:*

♦ *Tính tích phân* $I=\int_a^b g(x)dx$ .Giả sử $g(x)$ được viết dưới dạng $f\left[u(x)\right].u'(x)$,trong đó hàm số $u(x)$ có đạo hàm trên K , hàm số y=f(u) liên tục sao cho hàm hợp $f\left[u(x)\right]$ xác định trên K và a,b là hai số thuộc K.

♦ *Khi đó* $\int_a^b f\left[u(x)\right].u'(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$

♦ *Chú ý:* Đối với biến số lấy tích phân, ta có thể chọn bất kì một chữ số thay cho x. Như vậy tích phân không phụ thuộc vào biến tức là $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(u)du=\int_a^b f(t)dt=...$

A - Bài tập minh họa:

Câu : Biết $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^9 f(x)dx=9$. Khi đó giá trị của $\int_1^4 f(3x-3)dx$ là

Ⓐ. 0. Ⓑ. 27. Ⓒ. 3. Ⓓ. 24.

Lời giải

➲Chọn C

- Đặt $u=3x-3$, suy ra $du=3dx$.
- Đổi cận: $x=1$ thì $u=0$; $x=4$ thì $u=9$.
- Ta có: $\int_1^4 f(3x-3)dx=\int_0^9 \frac{1}{3}f(u)du=\frac{1}{3}\int_0^9 f(u)du=\frac{1}{3}\int_0^9 f(x)dx=\frac{1}{3}.9=3.$.
- Vậy $\int_1^4 f(3x-3)dx=3$.

PP nhanh trắc nghiệm

- Nếu có $\int_n^m f(x)dx=M$ thì $\int_\alpha^\beta f(ax+b)dx=\frac{M}{a}$; $n=a.\alpha+b, m=a.\beta+b$
- **Áp dụng:** $\frac{9}{3}=3$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và thỏa mãn $f(x^3+2x-2)=3x-1$ với $\forall x\in R$. Tính tích phân $I=\int_1^{10} f(x)dx$

Ⓐ. $\frac{151}{4}$. Ⓑ. 27. Ⓒ. $\frac{121}{4}$. Ⓓ. $\frac{105}{6}$.

Lời giải

➲Chọn A

- Đặt $x=t^3+2t-2 \Rightarrow dx=\left(3t^2+2t\right)dt$,
- Đổi cận : $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t^3+2t=3 \Leftrightarrow t=1 \\ x=10 \Rightarrow t^3+2t=12 \Leftrightarrow t=2 \end{cases}$
- Ta có $I=\int_1^2 f(t^3+2t-2).\left(3t^2+2t\right)dt=\int_1^2 (3t-1)\left(3t^2+2t\right)dt$

$=\int_1^2\left(9t^3+3t^2-2t\right)dt \;=\left.\left(\frac{9t^4}{4}+t^3-t^2\right)\right|_1^2=\frac{151}{4}$

PP nhanh trắc nghiệm

-

Câu 3: Cho Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và thỏa mãn $\int_0^{2021} f(x)dx=2$. Tính tích phân

$I=\int_0^{\sqrt{e^{2021}-1}} \frac{x}{x^2+1}.f\left(\ln(x^2+1)\right).dx$

Ⓐ. 3. Ⓑ. 5. Ⓒ. 1. Ⓓ. -3.

Lời giải

➲Chọn C

- Đặt $t=\ln\left(x^2+1\right) \Rightarrow dt=\frac{2x}{x^2+1}dx \Rightarrow \frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}dt$,
- Đổi cận : $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\sqrt{e^{2021}-1} \Rightarrow t=2021 \end{cases}$
- Ta có $I=\frac{1}{2}\int_0^{2021} f(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^{2021} f(x)dx=\frac{1}{2}.2=1$

PP nhanh trắc nghiệm

-

B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Cho $\int_1^3 f\left(x\right)dx=4$, khi đó $\int_0^1 f\left(2x+1\right)dx$ bằng

Ⓐ. 8. Ⓑ. 2. Ⓒ. $\frac{1}{2}$. Ⓓ. $\frac{3}{2}$.

Câu 2: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2$. Tính

$I=\int_0^1\left[f\left(2x+1\right)+2x+1\right]\mathrm{d}x$.

Ⓐ. $I=11$. Ⓑ. $I=3$. Ⓒ. $I=14$. Ⓓ. $I=6$.

Câu 3: Cho $\int\limits_4^9 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 10$. Tính tích phân $J = \int\limits_0^1 f\left(5x+4\right)\mathrm{d}x$.

Ⓐ. $J = 2$. Ⓑ. $J = 10$. Ⓒ. $J = 50$. Ⓓ. $J = 4$.

Câu 4: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_2^8 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 10$. Tính $I = \frac{3}{2}\int\limits_1^3 f\left(3x-1\right)\mathrm{d}x$.

Ⓐ. 30. Ⓑ. 10. Ⓒ. 20. Ⓓ. 5.

Câu 5: Cho $f\left(x\right)$ là hàm số chẵn, liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $\int\limits_{-1}^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 8$ và $\int\limits_1^3 f\left(2x\right)\mathrm{d}x = 3$. Tính tích phân $\int\limits_{-1}^6 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Ⓐ. 14. Ⓑ. 11. Ⓒ. 5. Ⓓ. 2.

Câu 6: Cho $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x = 2018$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^2 \left[f(2x) + f(4-2x)\right]\mathrm{d}x$

Ⓐ. $I = 0$. Ⓑ. $I = 2018$. Ⓒ. $I = 4036$. Ⓓ. $I = 1009$.

Câu 7: Biết $\int\limits_1^4 f\left(x\right)dx = 5$ và $\int\limits_4^5 f\left(x\right)dx = 20$. Tính $\int\limits_1^2 f\left(4x-3\right)dx - \int\limits_0^{\ln 2} f\left(e^{2x}\right)e^{2x}dx$.

Ⓐ. $I = \frac{15}{4}$. Ⓑ. $I = 15$. Ⓒ. $I = \frac{5}{2}$. Ⓓ. $I = 25$.

Câu 8: Cho $\int\limits_0^4 f\ x\ dx = 2018$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^2 f(2x) + f(4-2x)\ dx$.

Ⓐ. $I = 0$. Ⓑ. $I = 2018$. Ⓒ. $I = 4036$. Ⓓ. $I = 1009$.

Câu 9: Giả sử hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$ thỏa mãn $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 6$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(2\sin x\right)\cos x\mathrm{d}x.$

Ⓐ. 3. Ⓑ. -3. Ⓒ. 6. Ⓓ. -6.

Câu 10: Cho $I = \int\limits_1^4 f\left(t\right)\mathrm{d}t = 9$. Tính tích phân $J = \int\limits_0^1 f\left(3x+1\right)\mathrm{d}x$.

Ⓐ. 9. Ⓑ. 27. Ⓒ. 3. Ⓓ. 1.

Câu 11: Cho $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 2019$. Giá trị của $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\cos 2x\right)\sin 2x\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ. $\frac{2019}{4}$. Ⓑ. $-\frac{2019}{2}$. Ⓒ. 4038. Ⓓ. $\frac{2019}{2}$.

Câu 12: Cho tích phân $I = \int\limits_0^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x = 32.$ Tính tích phân $J = \int\limits_0^2 f\left(2x\right)\mathrm{d}x.$

Ⓐ. $J = 32.$ Ⓑ. $J = 64.$ Ⓒ. $J = 8.$ Ⓓ. $J = 16.$

Câu 13 ho hàm số $f\ x$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $\int_0^1 2f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^2 f(x+1)\mathrm{d}x = 4$. Tính $I = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Ⓐ. $I = 5$. Ⓑ. $I = 4$. Ⓒ. $I = 6$. Ⓓ. $I = 7$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\pi^2} f(x)\mathrm{d}x = 2018$. Tính $I = \int_0^{\pi} xf(x^2)\mathrm{d}x$.

Ⓐ. $I = 1008$. Ⓑ. $I = 2019$. Ⓒ. $I = 2017$. Ⓓ. $I = 1009$.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2; \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 8$. Tính $\mathrm{I} = \int_{-1}^1 f(|2x-1|)\mathrm{d}x$

Ⓐ. $I = 6$. Ⓑ. $I = \frac{2}{3}$. Ⓒ. $I = 5$. Ⓓ. $I = \frac{3}{2}$

Câu 16: Cho $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$ Khi đó $I = \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ. 4. Ⓑ. $\frac{1}{2}$. Ⓒ. 1. Ⓓ. 2.

Câu 17: Cho $\int_3^8 f(x+1)\mathrm{d}x = 10$. Tính $J = \int_0^1 f(5x+4)\mathrm{d}x$.

Ⓐ. $J = 4$. Ⓑ. $J = 10$. Ⓒ. $J = 50$. Ⓓ. $J = 2$

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.B	3.A	4.D	5.A	6.B	7.A	8.B	9.A	10.C
11.D	12.D	13.A	14.D	15.C	16.A	17.D			

Full Chuyên đề 12 new 2020-2021

FB: Duong Hung

CHƯƠNG ③: NGUYÊN HÀM-TÍCH PHÂN-ỨNG DỤNG

Bài 5: DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

☑ Dạng ①: Phương pháp tính phân từng phần cơ bản

. Định lí:

- Nếu $u(x)$ và $v(x)$ là các hàm số có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$ thì:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left(u(x)v(x)\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$. Hay $$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

.Phương pháp chung:

- ***Bước 1:*** Viết $f(x)dx$ dưới dạng $udv = uv'dx$ bằng cách chọn một phần thích hợp của $f(x)$ làm $u(x)$ và phần còn lại $dv = v'(x)dx$
- ***Bước 2:*** Tính $du = u'dx$ và $v = \int dv = \int v'(x)dx$
- ***Bước 3:*** Tính $\int_a^b vu'(x)dx$ và $uv\Big|_a^b$

.Cách đặt u và dv trong phương pháp tích phân từng phần.

Đặt u theo thứ tự ưu tiên: ***Lô-đa-lượng-mũ***	$\int_a^b P(x)e^x dx$	$\int_a^b P(x)\ln x dx$	$\int_a^b P(x)\cos x dx$	$\int_a^b e^x \cos x dx$
u	*P(x)*	*lnx*	*P(x)*	e^x
dv	$e^x dx$	*P(x)dx*	*cosxdx*	*cosxdx*

.Chú ý: Nên chọn u là phần của $f(x)$ mà khi lấy đạo hàm thì đơn giản, chọn $dv = v'dx$ là phần của $f(x)dx$ là vi phân một hàm số đã biết hoặc có nguyên hàm dễ tìm.

☑ Dạng ①: Tích phân chứa đa thức với lượng giác hoặc mũ

①. **Loại 1:** $\int_\alpha^\beta f(x)\begin{bmatrix}\sin ax\\ \cos ax\\ e^{ax}\end{bmatrix}\mathrm{dx}$

.Phương pháp:

$$\begin{cases} \bullet u = f(x) \\ \bullet dv = \begin{bmatrix}\sin ax\\ \cos ax\\ e^{ax}\end{bmatrix}\mathrm{dx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bullet du = f'(x)dx \\ \bullet v = \int \begin{bmatrix}\sin ax\\ \cos ax\\ e^{ax}\end{bmatrix}\mathrm{dx} \end{cases}$$

A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Tính tích phân $I=\int_1^2 xe^x dx$.

Ⓐ. $I=e^2$. Ⓑ. $I=-e^2$. Ⓒ. $I=e$. Ⓓ. $I=3e^2-2e$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=e^x \end{cases}$

$I=\int_1^2 xe^x dx = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e - e^x\Big|_1^2$.

$=2e^2-e-\left(e^2-e\right)=e^2$

PP nhanh trắc nghiệm

Tính tích phân

$\int_1^2 Xe^X dx$

7.389056099

Ans→A

7.389056099

+ Kiểm tra các đáp án:

$A-e^2=0$ (đúng).

Câu 2: Tính tích phân $I=\int_0^1 (x-2)e^{2x}dx$.

Ⓐ. $I=\frac{5-3e^2}{4}$. Ⓑ. $I=\frac{5-3e^2}{4}$. Ⓒ. $I=\frac{5-3e^2}{4}$. Ⓓ. $I=\frac{5-3e^2}{4}$.

Lời giải

Chọn B

• Đặt $\begin{cases} u=x-2 \\ dv=e^{2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=\frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$ (chọn $C=0$)

$\Rightarrow I=(x-2)\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{5-3e^2}{4}$.

PP nhanh trắc nghiệm

• Tính tích phân:

$\int_0^1 (X-2)e^{2X}dx$

-4.291792074

Ans→B

-4.291792074

+Kiểm tra các đáp án:

$B-\left(\frac{5-3e^2}{4}\right)$

0

Câu 3: Tích phân $\int_0^{\pi}(3x+2)\cos^2 x\,dx$ bằng

Ⓐ. $\frac{3}{4}\pi^2-\pi$. Ⓑ. $\frac{3}{4}\pi^2+\pi$. Ⓒ. $\frac{1}{4}\pi^2+\pi$. Ⓓ. $\frac{1}{4}\pi^2-\pi$.

Lời giải

Chọn B

- Đặt $I=\int_0^{\pi}(3x+2)\cos^2 x\,dx$. Ta có:

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(3x+2)(1+\cos 2x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}(3x+2)\,dx+\int_0^{\pi}(3x+2)\cos 2x\,dx\right]=\frac{1}{2}(I_1+I_2).$$

- $I_1=\int_0^{\pi}(3x+2)\,dx=\left(\frac{3}{2}x^2+2x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{3}{2}\pi^2+2\pi$.
- $I_2=\int_0^{\pi}(3x+2)\cos 2x\,dx$. Dùng tích phân từng phần
- Đặt $\begin{cases}u=3x+2\\ dv=\cos 2x\,dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=3\,dx\\ v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{cases}$.
- Khi đó

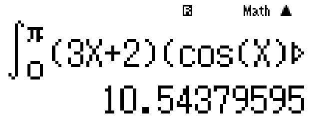
$$I_2=\frac{1}{2}(3x+2)\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\frac{3}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx$$

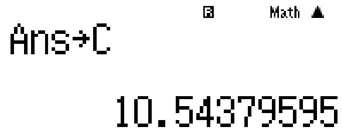
$$=0+\frac{3}{4}(\cos 2x)\Big|_0^{\pi}=0.$$

- Vậy $I=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\pi^2+2\pi\right)=\frac{3}{4}\pi^2+\pi$

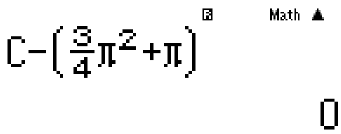
PP nhanh trắc nghiệm

- Tính tích phân:





Kiểm tra các đáp án:



B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Xét tích phân $I=\int_0^1(2x^2-4)e^{2x}dx$ Nếu đặt $u=2x^2-4,\ v'=e^{2x}$, ta được tích phân:

$I=\phi(x)\big|_0^1-\int_0^1 2xe^{2x}dx$, trong đó:

Ⓐ. $\phi(x)=(x^2-2)e^{2x}$. Ⓑ. $\phi(x)=(2x^2-4)e^{2x}$. Ⓒ. $\phi(x)=(x^2-2)e^{x}$. Ⓓ. $\phi(x)=\frac{1}{2}(2x^2-4)e^{x}$.

Câu 2: Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$

Ⓐ. $I=\frac{\pi}{2}$. Ⓑ. $I=\frac{\pi}{2}+1$. Ⓒ. $I=\frac{\pi}{3}$. Ⓓ. $I=\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}$.

Câu 3: Tính $\int_0^1 xe^x dx$

Ⓐ. e. Ⓑ. $e-1$. Ⓒ. 1. Ⓓ. $\frac{1}{2}e-1$.

Câu 4: $L=\int_0^{\pi} x\sin x dx$

Ⓐ. $L=\pi$. Ⓑ. $L=-2$. Ⓒ. $L=0$. Ⓓ. $L=-\pi$.

Câu 5: $\int_0^{\pi}(x+2)\cos 2x dx$

Ⓐ. 0. Ⓑ. $-\frac{1}{4}$. Ⓒ. $\frac{1}{4}$. Ⓓ. $\frac{1}{2}$.

Câu 6: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx$ bằng

Ⓐ. $\frac{\pi-2}{8}$. Ⓑ. $\frac{\pi-1}{4}$. Ⓒ. $3-\frac{\pi}{2}$. Ⓓ. $2-\frac{\pi}{2}$

Câu 7: Tính tích phân $I=\int_0^1 (x+1)e^{3x}dx$

Ⓐ. $I=\frac{5}{9}e^3-\frac{2}{9}$. Ⓑ. $I=\frac{2}{9}-\frac{5}{9}e^3$. Ⓒ. $I=\frac{2}{9}e^3-\frac{5}{9}$. Ⓓ. $I=\frac{5}{9}e^3+\frac{2}{9}$.

Câu 8: Tính tích phân $I=\int_0^1 xe^{1-x}dx$

Ⓐ. 1. Ⓑ. $e-2$. Ⓒ. $1-e$. Ⓓ. -1.

Câu 9: Tính tích phân $I=\int_0^1 (x+1)e^{3x}dx$

Ⓐ. $I=\frac{5}{9}e^3-\frac{2}{9}$. Ⓑ. $I=\frac{2}{9}-\frac{5}{9}e^3$. Ⓒ. $I=\frac{2}{9}e^3-\frac{5}{9}$. Ⓓ. $I=\frac{5}{9}e^3+\frac{2}{9}$.

Câu 10: Tính tích phân $I=\int_0^1 xe^{1-x}dx$

Ⓐ. 1. Ⓑ. $e-2$. Ⓒ. $1-e$. Ⓓ. -1.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.C	4.A	5.A	6.A	7.A	8.D	9.A	10.D

☑ Dạng ②: Tích phân chứa đa thức và ln

②. Loại 2: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\ln(ax+b)\,dx$

⊗-Phương pháp:

Đặt: $\begin{cases} \bullet u = \ln x \\ \bullet dv = P(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bullet du = \dfrac{1}{x}dx \\ \bullet v = \int P(x)dx = Q(x) \end{cases}$

A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Tích phân $\int_{1}^{e} x\ln x\,dx$ bằng

Ⓐ. $\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$.   Ⓑ. $\frac{e^2}{4}-1$.   Ⓒ. $\frac{e^2-1}{4}$.   Ⓓ. $\frac{1}{2}-\frac{e^2}{4}$.

Lời giải

Chọn D

$$\int_{1}^{e} x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_{1}^{e}\frac{x}{2}dx = \left(-\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Big|_1^e = \frac{e^2+1}{4}$$

PP nhanh trắc nghiệm

• **Casio:**

Câu 2: Tính tích phân $I=\int_{4}^{5}(x+1)\ln(x-3)\,dx$?

Ⓐ. $10\ln 2$.   Ⓑ. $10\ln 2+\frac{19}{4}$.   Ⓒ. $\frac{19}{4}-10\ln 2$.   Ⓓ. $10\ln 2-\frac{19}{4}$.

Lời giải

• **Chọn D**

•Đặt $\begin{cases} u=\ln(x-3) \\ dv = x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{1}{x-3}dx \\ v=\dfrac{1}{2}x^2+x \end{cases}$.

$$I=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\ln(x-3)\Big|_4^5-\int_4^5\frac{\frac{1}{2}x^2+x}{x-3}dx$$

$$=\frac{35}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_4^5\frac{x^2-9+9}{x-3}dx-\int_4^5\frac{x-3+3}{x-3}dx$$

$$=\frac{35}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}+3+9\ln 2\right)-(1+3\ln 2)$$

PP nhanh trắc nghiệm

• **Casio:**

```
∫₄⁵(X+1)ln(X-3)dx
            2.181471806
Ans→A
            2.181471806
```

• Kiểm tra các đáp án:

```
A-(10ln(2)-19/4)
                      0
```

$=10\ln 2-\dfrac{19}{4}$.

Câu 3: Tính $\int\limits_1^e x^2\ln x\mathrm{d}x$

Ⓐ. $\dfrac{2e^3+1}{9}$. Ⓑ. $\dfrac{2e^3-1}{9}$. Ⓒ. $\dfrac{e^3-2}{9}$. Ⓓ. $\dfrac{e^3+2}{9}$.

Lời giải

Chọn A

$\begin{cases} u=\ln x \\ dv=x^2dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\dfrac{1}{x}dx \\ v=\dfrac{1}{3}x^3 \end{cases}$

$\Rightarrow I=\left(\dfrac{1}{3}x^3\ln x\right)\Big|_1^e-\dfrac{1}{3}\int\limits_1^e x^2dx=\dfrac{1}{3}e^3-\dfrac{1}{9}x^3\Big|_1^e$

$=\dfrac{1}{3}e^3-\dfrac{e^3-1}{9}=\dfrac{2e^3+1}{9}$

PP nhanh trắc nghiệm

- **Casio**

B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Tính tích phân $I=\int\limits_1^e (x+2)\ln xdx$

Ⓐ. $I=\dfrac{1}{2}$. Ⓑ. $I=\dfrac{e^2-2}{2}$. Ⓒ. $I=\dfrac{e^2+1}{4}$. Ⓓ. $I=\dfrac{e^2-1}{4}$.

Câu 2. Nếu đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=(2x+1)dx \end{cases}$ thì tích phân $I=\int\limits_1^e (2x+1)\ln xdx$ trở thành

Ⓐ. $I=\left(x^2+x\right)\Big|_1^e-\int\limits_1^e (x+1)dx$.

Ⓑ. $I=x^2\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e (x+1)dx$.

Ⓒ. $I=x^2\ln x\Big|_1^e+\int\limits_1^e xdx$.

Ⓓ. $I=\left(x^2+x\right)\ln x\Big|_1^e+\int\limits_1^e (x+1)dx$.

Câu 3: Tính tích phân $J=\int\limits_0^0 x\ln(x+1)dx$

Ⓐ. $J=\dfrac{4}{3}\ln 3$. Ⓑ. $J=\dfrac{5}{3}\ln 3$. Ⓒ. $J=\dfrac{2}{3}\ln 3$. Ⓓ. $J=\dfrac{3}{4}\ln 3$.

Câu 4: Tính tích phân $I=\int\limits_4^5 (x+1)\ln(x-3)\mathrm{d}x$?

Ⓐ. $10\ln 2$. Ⓑ. $10\ln 2+\dfrac{19}{4}$. Ⓒ. $\dfrac{19}{4}-10\ln 2$. Ⓓ. $10\ln 2-\dfrac{19}{4}$

Câu 5: Tích Phân $I=\int\limits_2^3 \ln(x^2-x)dx$ là

Ⓐ. $3\ln 3$.   Ⓑ. $2\ln 2$.   Ⓒ. $3\ln 3-2$.   Ⓓ. $2-3\ln 3$.

Câu 6: Tích phân $I=\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$ bằng

Ⓐ. $\frac{1}{2}(1+\ln 2)$.   Ⓑ. $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$.   Ⓒ. $\frac{1}{2}(\ln 2-1)$.   Ⓓ. $\frac{1}{4}(1+\ln 2)$.

Câu 7: Cho $a>b>-1$. Tích phân $I=\int\limits_a^b \ln(x+1)\mathrm{d}x$ bằng biểu thức nào sau đây?

Ⓐ. $I=(x+1)\ln(x+1)\Big|_a^b-a+b$.   Ⓑ. $I=(x+1)\ln(x+1)\Big|_a^b-b+a$.

Ⓒ. $I=\frac{1}{(x+1)}\Bigg|_a^b$.   Ⓓ. $I=x\ln(x+1)\Big|_a^b+\int\limits_a^b \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.D	3.C	4.D	5.C	6.A	7B

☑ Dạng ③: Tích phân chứa từng phần chứa tham số a, b, c

⊗-*Phương pháp:* **Tích phân từng phần.**

①. $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\begin{bmatrix}\sin ax\\ \cos ax\\ e^{ax}\end{bmatrix}\mathrm{d}x$ ②. $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\ln(ax+b)\mathrm{d}x$

A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Cho $I=\int\limits_1^e x\ln x\mathrm{d}x=\frac{a.e^2+b}{c}$ với a, b, $c\in\mathbb{Z}$. Tính $T=a+b+c$.

Ⓐ. 5.   Ⓑ. 3.   Ⓒ. 4.   Ⓓ. 6.

Lời giải

• **Chọn D**

• Ta có: $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=xdx\end{cases}$ nên $\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\ v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$.

$$I=\int\limits_1^e x\ln x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int\limits_1^e x\mathrm{d}x=\frac{e^2+1}{4}.$$

PP nhanh trắc nghiệm

• **Casio**

$\int_1^e x\ln(x)dx\to A$

2.097264025

+ Thử C=1,2,3,4,5,6.. giải hệ tìm a,b nguyên.

$\begin{cases}1.8472x + 0.25y = 2.0972\\ 1x + 1y = [redacted]\end{cases}$

2

$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=4 \end{cases}$.

•Vậy $T=a+b+c=6$.

B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Cho $\int_1^e x^3\ln x\mathrm{d}x=\dfrac{3e^a+1}{b}$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tổng $a+b$ bằng

Ⓐ. 20. Ⓑ. 10. Ⓒ. 17. Ⓓ. 12.

Câu 2: Biết $\int_1^2 \dfrac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{b}{c}+a\ln 2$ trong đó $a\in\mathbb{R}$; b, c là các số nguyên dương và nguyên tố cùng nhau. Tính giá trị của $2a+3b+c$.

Ⓐ. 6. Ⓑ. 5. Ⓒ. 4. Ⓓ. -6.

Câu 3: Cho tích phân $I=\int_1^2 \dfrac{\ln x}{x^2}dx=\dfrac{b}{c}+a\ln 2$ với a là số thực, b và c là các số dương, đồng thời $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P=2a+3b+c$.

Ⓐ. $P=6$. Ⓑ. $P=5$. Ⓒ. $P=-6$. Ⓓ. $P=4$.

Câu 4: Cho $\int_1^2 (x+1)e^x\mathrm{d}x=ae^2+be+c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $a+b+c$.

Ⓐ. 3. Ⓑ. 4. Ⓒ. 1. Ⓓ. 0.

Câu 5: Biết $I=\int_1^e x^2\ln x\mathrm{d}x=ae^3+b$ với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của $9(a+b)$ bằng

Ⓐ. 3. Ⓑ. 10. Ⓒ. 9. Ⓓ. 6.

Câu 6: Biết $I=\int_1^e x^2\ln x\mathrm{d}x=ae^3+b$ với a, b là các số hữu tỉ. Giá trị của $9(a+b)$ bằng

Ⓐ. 3. Ⓑ. 10. Ⓒ. 9. Ⓓ. 6.

Câu 7: Cho $I=\int_1^2 \dfrac{\ln x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\dfrac{a}{b}\ln 2-\ln c$ với $a,\ b,\ c$ là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $S=\dfrac{a+b}{c}$.

Ⓐ. $S=\dfrac{5}{3}$. Ⓑ. $S=\dfrac{8}{3}$. Ⓒ. $S=\dfrac{6}{5}$. Ⓓ. $S=\dfrac{10}{3}$.

Câu 8: Biết $\int_0^2 (2x+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=a.\mathrm{e}^4+b.\mathrm{e}^2+c$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Giá trị của $2a+3b+2c$ bằng

Ⓐ. 9. Ⓑ. 10. Ⓒ. 8. Ⓓ. 7.

Câu 9: Biết $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx = \frac{b}{c} + a\ln 2$. Giá trị của $2a+3b+c$ bằng.

Ⓐ. -6. Ⓑ. 4. Ⓒ. 5. Ⓓ. 6.

Câu 10. Cho $\int_2^5 \ln\left(x^2 - x\right)dx = a\ln 5 + b\ln 2 + c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $S = a + 2b - c$.

Ⓐ. $S = 23$. Ⓑ. $S = 20$. Ⓒ. $S = 17$. Ⓓ. $S = 11$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.C	3.D	4.C	5.A	6.A	7.B	8.B	9.B	10.A

Hướng dẫn giải

Câu 1: • Đặt $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$; $dv = x^3 dx \Rightarrow v = \frac{x^4}{4}$.

$$\Rightarrow I = \left(\ln x.\frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^e - \frac{1}{4}\int_1^e x^3 dx = \frac{e^4}{4} - \left(\frac{1}{16}x^4\right)\Big|_1^e = \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3e^4+1}{16}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 16 \end{cases} \Rightarrow a + b = 20.$$

Câu 2:

•Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$.

•Ta có $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx = \left(-\frac{1}{x}\ln x\right)\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{x}\Big|_1^2 = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}$.

•Theo đề ta có $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 2$.

•Do đó $2a + 3b + c = 4$.

Câu 3:

•Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{-1}{x} \end{cases} \Rightarrow I = \frac{-\ln x}{x}\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \left(\frac{-\ln x}{x} + \frac{-1}{x}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}$

$\Rightarrow b = 1, c = 2, a = \frac{-1}{2} \Rightarrow P = 2a + 3b + c = 4$.

Câu 4:

•Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = e^x \mathrm{d}x \end{cases}$ ta được $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x, v = e^x$.

$$\int_1^2 (x+1)e^x \mathrm{d}x = (x+1)e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x \mathrm{d}x = xe^x \Big|_1^2 = 2e^2 - e.$$

$\Rightarrow a = 2, b = -1, c = 0 \Rightarrow a+b+c = 1.$

Câu 5:

•Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = x^2 \mathrm{d}x \end{cases}$ ta có $\begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

•Suy ra $I = \dfrac{x^3 \ln x}{3}\Big|_1^e - \int_1^e \dfrac{x^2}{3}\mathrm{d}x = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{x^3}{9}\Big|_1^e = \dfrac{2}{9}.e^3 + \dfrac{1}{9}$.

•Vậy $a = \dfrac{2}{9}$, $b = \dfrac{1}{9}$ nên $9(a+b) = 3$.

Câu 6:

•Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = x^2 \mathrm{d}x \end{cases}$ ta có $\begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

•Suy ra $I = \dfrac{x^3 \ln x}{3}\Big|_1^e - \int_1^e \dfrac{x^2}{3}\mathrm{d}x = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{x^3}{9}\Big|_1^e = \dfrac{2}{9}.e^3 + \dfrac{1}{9}$.

•Vậy $a = \dfrac{2}{9}$, $b = \dfrac{1}{9}$ nên $9(a+b) = 3$.

Câu 7:

•Ta có:

$$I = \int_1^2 \frac{\ln x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = -\int_1^2 \ln x \mathrm{d}\left(\frac{1}{x+1}\right) = -\left(\frac{1}{x+1}\ln x\right)\Bigg|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{(x+1)x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\ln 2 + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{3}\ln 2 + \left(\ln|x| - \ln|x+1|\right)\Bigg|_1^2 = \frac{5}{3}\ln 2 - \ln 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \Rightarrow S = \dfrac{a+b}{c} = \dfrac{8}{3}. \\ c = 3 \end{cases}$$

Câu 8:

•Đặt: $\begin{cases} u = 2x + e^x \\ dv = e^x dx \end{cases}$ ta được $\begin{cases} du = \left(2 + e^x\right)dx \\ v = e^x \end{cases}$.

•Khi đó: $\int_0^2 \left(2x + e^x\right)e^x dx = \left(2x + e^x\right)e^x \Big|_0^2 - \int_0^2 \left(2e^x + e^{2x}\right)dx$

$= \left(2.2 + e^2\right)e^2 - \left(2.0 + e^0\right)e^0 - \left(2e^x + \frac{1}{2}e^{2x}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{1}{2}e^4 + 2e^2 + \frac{3}{2}$.

•Theo bài ra ta có $a = \frac{1}{2}$; $b = 2$; $c = \frac{3}{2}$

•Vậy: $2a + 3b + 2c = 2.\frac{1}{2} + 3.2 + 2.\frac{3}{2} = 10$.

Câu 9:

•Gọi $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$.

•Áp dụng phương pháp nguyên hàm từng phần ta có:

•Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$\Rightarrow I = -\frac{\ln x}{x}\Big|_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{x}\right).\frac{1}{x} dx = -\frac{\ln 2}{2} + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{x}\Big|_1^2 = -\frac{1}{2}\ln 2 - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$

$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}; b = 1; c = 2$.

•Vậy $2a + 3b + c = 4$.

Câu 10.

•Đặt $\begin{cases} u = \ln\left(x^2 - x\right) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x - 1}{x^2 - x} dx \\ v = x \end{cases}$.

•Khi đó $\int_2^5 \ln\left(x^2 - x\right)dx = x\ln\left(x^2 - x\right)\Big|_2^5 - \int_2^5 \frac{2x - 1}{x - 1} dx$

$= 5\ln 20 - 2\ln 2 - \int_2^5 \left(2 + \frac{1}{x - 1}\right)dx = 5\ln\left(5.2^2\right) - 2\ln 2 - \left(2x + \ln|x - 1|\right)\Big|_2^5$

$= 5\ln 5 + 8\ln 2 - \left(10 - 4 + \ln 4 - \ln 1\right) = 5\ln 5 + 6\ln 2 - 6$.

•Suy ra $a = 5$, $b = 6$, $c = -6 \Rightarrow S = a + 2b - c = 5 + 2.6 + 6 = 23$.

☑ Dạng ④: Tích phân chứa từng phần hàm ẩn

↳. *Phương pháp:* Tích phân từng phần.

❶. Viết $f(x)dx$ dưới dạng $udv = uv'dx$ bằng các hợp của $f(x)$ làm $u(x)$ và phần còn lại $dv = v'(x)dx$

❷. Tính $du = u'dx$ và $v = \int dv = \int v'(x)dx$

❸. Tính $\int\limits_a^b vu'(x)dx$ và $uv\Big|_a^b$

↳A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Cho $f(x)$ là hàm số có đạo hàm trên $[1;4]$, biết $\int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x = 20$ và $f(4) = 16$, $f(1) = 7$. Tính $I = \int\limits_1^4 xf'(x)\mathrm{d}x$.

Ⓐ. $I = 37$.　Ⓑ. $I = 47$.　Ⓒ. $I = 57$.　Ⓓ. $I = 67$.

Lời giải

➲Chọn A

- Xét $I = \int\limits_1^4 xf'(x)\mathrm{d}x$, dùng phương pháp tích phân từng phần :

$$\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$$

- Do đó: $I = xf(x)\Big|_1^4 - \int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x = 4f(4) - f(1) - \int\limits_1^4 f(x)\mathrm{d}x$

$= 4.16 - 7 - 20 = 37$

↳PP nhanh trắc nghiệm

-

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $f(0) = 2$, $\int\limits_0^2 (2x-4).f'(x)\mathrm{d}x = 4$. Tính tích phân $I = \int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ⓐ. $I = 2$.　Ⓑ. $I = -2$.　Ⓒ. $I = 6$.　Ⓓ. $I = -6$.

Lời giải

➲Chọn B

- Ta có: $\int\limits_0^2 (2x-4).f'(x)\mathrm{d}x = 4$.

- Đặt $\begin{cases} u = 2x-4 \\ \mathrm{d}v = f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\mathrm{d}x \\ v = f(x) \end{cases}$

↳PP nhanh trắc nghiệm

-

•Nên $\int_0^2 (2x-4).f'(x)dx = (2x-4).f(x)\Big|_0^2 - 2\int_0^2 f(x)dx$

$= 4.f(0) - 2I = 8 - 2I$.

• Theo giả thiết ta có: $4 = 8 - 2I \Leftrightarrow 2I = 4 \Leftrightarrow I = 2$.

B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Cho $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2) = 16$, $\int_0^1 f(2x)dx = 6$. Tính $I = \int_0^2 x.f'(x)dx$ ta được kết quả

Ⓐ. $I = 14$. Ⓑ. $I = 20$. Ⓒ. $I = 10$. Ⓓ. $I = 4$.

Câu 2: Cho $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(2) = 16$, $\int_0^1 f(2x)dx = 6$. Tính $I = \int_0^2 x.f'(x)dx$ ta được kết quả

Ⓐ. $I = 14$. Ⓑ. $I = 20$. Ⓒ. $I = 10$. Ⓓ. $I = 4$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^3 x\cdot f'(2x-4)dx = 8$; $f(2) = 2$. Tính $I = \int_{-2}^1 f(2x)dx$.

Ⓐ. $I = -5$. Ⓑ. $I = -10$. Ⓒ. $I = 5$. Ⓓ. $I = 10$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$. Biết $\int_0^1 [x.f'(1-x) - f(x)]dx = \frac{1}{2}$. Tính $f(0)$.

Ⓐ. $f(0) = -1$. Ⓑ. $f(0) = \frac{1}{2}$. Ⓒ. $f(0) = -\frac{1}{2}$. Ⓓ. $f(0) = 1$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(3) = 21$, $\int_0^3 f(x)dx = 9$. Tính tích phân $I = \int_0^1 x.f'(3x)dx$.

Ⓐ. $I = 15$. Ⓑ. $I = 12$. Ⓒ. $I = 9$. Ⓓ. $I = 6$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết rằng tích phân $I = \int_0^1 x.f'(x)dx = -\frac{a}{b}$. Tính $T = 8a - 3b$.

Ⓐ. $T = 1$. Ⓑ. $T = 0$. Ⓒ. $T = 16$. Ⓓ. $T = -16$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên tập hợp $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^2 f(3x-6)\mathrm{d}x = 3$ và $f(-3)=2$. Giá trị của $\int_{-3}^{0} x f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

Ⓐ. -3. Ⓑ. 11. Ⓒ. 6. Ⓓ. 9.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0;2]$ và $f(2)=3$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 3$.

Tính $\int_0^2 x.f'(x)\mathrm{d}x$.

Ⓐ. -3. Ⓑ. 3. Ⓒ. 0. Ⓓ. 6.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$ liên tục trên đoạn [0; 1] và $f(1)=2$. Biết $\int_0^1 f(x)dx = 1$, tính tích phân $I=\int_0^1 x.f'(x)dx$.

Ⓐ. $I=1$. Ⓑ. $I=-1$. Ⓒ. $I=3$. Ⓓ. $I=-3$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)dx = 10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $I=\int_0^1 f(x)dx$.

Ⓐ. $I=8$. Ⓑ. $I=-8$. Ⓒ. $I=4$. Ⓓ. $I=-4$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $f(2)=16$, $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 4$. Tính tích phân $I=\int_0^1 x.f'(2x)\mathrm{d}x$.

Ⓐ. $I=12$. Ⓑ. $I=7$. Ⓒ. $I=13$. Ⓓ. $I=20$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-2)=1$, $\int_1^2 f(2x-4)\mathrm{d}x = 1$.

Tính $\int_{-2}^{0} xf'(x)\mathrm{d}x$.

Ⓐ. $I=1$. Ⓑ. $I=0$. Ⓒ. $I=-4$. Ⓓ. $I=4$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f\ \ x$ thỏa mãn $f\ \ x^3+3x+1\ =3x+2,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int_1^5 x.f'\ \ x\ dx$.

Ⓐ. $\frac{5}{4}$. Ⓑ. $\frac{17}{4}$. Ⓒ. $\frac{33}{4}$. Ⓓ. -1761.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.B	3.B	4.C	5.D	6.B	7.A	8.B	9.A	10.B	11.B	12.B	13.C

Lời giải chi tiết

Câu 1:

•Ta có $\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x = 6 \Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}(2x) = 6 \Rightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 12$.

•Xét $I=\int_0^2 x.f'(x)\mathrm{d}x$

•Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$

•Khi đó $I=xf(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(2)-12=20$.

Câu 2:

•Ta có $\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=6\Rightarrow\frac{1}{2}\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}(2x)=6\Rightarrow\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=12$.

•Xét $I=\int_0^2 x.f'(x)\mathrm{d}x$

•Đặt $\begin{cases}u=x\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$

•Khi đó $I=xf(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(2)-12=20$.

Câu 3:

• Xét $J=\int_0^3 x\cdot f'(2x-4)\mathrm{d}x=8$.

•Đặt $u=x$ và $\mathrm{d}v=f'(2x-4)\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}f(2x-4)\right)$, ta được $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$ và $v=\frac{1}{2}f(2x-4)$.

$\Rightarrow J=\frac{1}{2}x.f(2x-4)\Big|_0^3-\frac{1}{2}\int_0^3 f(2x-4)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}f(2)-\frac{1}{2}\int_0^3 f(2x-4)\mathrm{d}x=3-\frac{1}{2}\int_0^2 f(2x-4)\mathrm{d}x$.

•Vì $J=8\Rightarrow 3-\frac{1}{2}\int_0^3 f(2x-4)\mathrm{d}x=8\Rightarrow\int_0^3 f(2x-4)\mathrm{d}x=-10$.

•Đặt $2t=2x-4\Rightarrow 2\mathrm{d}t=2\mathrm{d}x\Leftrightarrow\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$

•Đổi cận:

x	0	3
t	-2	1

$I_1=\int_{-2}^1 f(2t)\mathrm{d}t=\int_{-2}^1 f(2x)\mathrm{d}x=-10$.

•Vậy $I=-10$.

Câu 4: • Ta có $A=\int_0^1\left[x.f'(1-x)-f(x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 x.f'(1-x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

•Đặt $I=\int_0^1 x.f'(1-x)\mathrm{d}x$.

•Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(1-x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -f(1-x) \end{cases}$

•Khi đó $I = -f(1-x).x\Big|_0^1 + \int_0^1 f(1-x)dx = -f(0) + \int_0^1 f(x)dx$

•Do đó $A = -f(0) + \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(0) = -\frac{1}{2}$.

Câu 5:

•Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(3x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{3} f(3x) \end{cases}$.

•Suy ra $I = \frac{1}{3} x.f(3x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3} f(3x)dx = \frac{1}{3} f(3) - \frac{1}{9}\int_0^3 f(x)dx = 6$.

•Vậy $I = 6$.

Câu 6:

•Ta có : $5f(x) - 7f(1-x) = 3(x^2 - 2x)$

•Lần lượt chọn $x = 0, x = 1$, ta có hệ sau :

• $\begin{cases} 5f(0) - 7f(1) = 0 \\ 5f(1) - 7f(0) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = \frac{5}{8} \\ f(0) = \frac{7}{8} \end{cases}$

•Tính $I = \int_0^1 x.f'(x)dx$

•Đặt : $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases}$ Chọn $\begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$

• $I = x.f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{8} - J$

•Đặt $x = 1 - t \Rightarrow J = -\int_1^0 f(1-t)dt = \int_0^1 f(1-x)dx = K$. Suy ra $5J - 7K = 3\int_0^1 (x^2 - 2x)dx = -2$

•Ta có : $\begin{cases} J = K \\ 5J - 7K = -2 \end{cases} \Leftrightarrow J = K = 1$

•Vậy $I = \frac{5}{8} - 1 = \frac{-3}{8} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow T = 8a - 3b = 0$

Câu 7:

•Đặt $t=3x-6 \Rightarrow \mathrm{d}t=3\mathrm{d}x$.

•Đổi cận: $x=1 \Rightarrow t=-3$, $x=2 \Rightarrow t=0$.

•$\int\limits_1^2 f(3x-6)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\limits_{-3}^0 f(t)\mathrm{d}t=3 \Rightarrow \int\limits_{-3}^0 f(t)\mathrm{d}t=9 \Rightarrow \int\limits_{-3}^0 f(x)\mathrm{d}x=9$.

•Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$

•Khi đó $\int\limits_{-3}^0 x\,f'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_{-3}^0-\int\limits_{-3}^0 f(x)\mathrm{d}x=0.f(0)+3.f(-3)-9=-3$.

Câu 8:

• Ta có $\int\limits_0^2 x.f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 x\mathrm{d}\left(f(x)\right)=x.f(x)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(2)-3=3$.

Câu 9: Ta có: $I=\int\limits_0^1 x.f'(x)dx$

•Đặt $u=x \Rightarrow du=dx$, $dv=f'(x)dx$ chọn $v=\int f'(x)dx=f(x)$

•$\Rightarrow I=x.f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)dx=1.f(1)-0.f(0)-\int\limits_0^1 f(x)dx=2-1=1$

Chọn A

Câu 10:

• $A=\int\limits_0^1 (x+1)f'(x)dx$ Đặt $u=x+1 \Rightarrow du=dx$, $dv=f'(x)dx$ chọn $v=f(x)$

•$\Rightarrow A=(x+1).f(x)\Big|_0^1-\int\limits_0^1 f(x)dx=2f(1)-f(0)-\int\limits_0^1 f(x)dx=2-\int\limits_0^1 f(x)dx=10 \Rightarrow \int\limits_0^1 f(x)dx=-8$

Câu 11:

•Đặt $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=f'(2x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=\dfrac{f(2x)}{2} \end{cases}$.

•Khi đó: $I=\dfrac{x.f(2x)}{2}\Bigg|_0^1-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 f(2x)\mathrm{d}x=\dfrac{f(2)}{2}-\dfrac{1}{4}\int\limits_0^2 f(t)\mathrm{d}t=\dfrac{16}{2}-\dfrac{1}{4}.4=7$.

Câu 12:

•Đặt $t=2x-4 \Rightarrow \mathrm{d}t=2\mathrm{d}x$, đổi cận $x=1 \Rightarrow t=-2$, $x=2 \Rightarrow t=0$.

•$1=\int\limits_1^2 f(2x-4)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_{-2}^0 f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \int\limits_{-2}^0 f(t)\mathrm{d}t=2 \Rightarrow \int\limits_{-2}^0 f(x)\mathrm{d}x=2$.

•Đặt $u=x \Rightarrow \mathrm{d}u=\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \Rightarrow v=f(x)$.

•Vậy $\int\limits_{-2}^0 xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)\Big|_{-2}^0-\int\limits_{-2}^0 f(x)\mathrm{d}x=2f(-2)-2=2.1-2=0$.

Câu 13:

•Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=f'\ \ x\ \ dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=f\ \ x \end{cases} \Rightarrow I=xf\ \ x\ \Big|_1^5-\int\limits_1^5 f\ \ x\ \ dx$.

•Từ $f\ \ x^3+3x+1\ =3x+2 \Rightarrow \begin{cases} f\ \ 5\ =5 & x=1 \\ f\ \ 1\ =2 & x=0 \end{cases}$, suy ra $I=23-\int\limits_1^5 f\ \ x\ \ dx.$

•Đặt $t = x^3 + 3x + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = \left(3x^2 + 3\right)dx \\ f\left(t\right) = 3x + 2 \end{cases}$

•Đổi cận: Với $t = 1 \Rightarrow 1 = x^3 + 3x + 1 \Leftrightarrow x = 0$ và $t = 5 \Rightarrow x^3 + 3x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 1$.

•Khi đó $I = 23 - \int_1^5 f\left(x\right)dx = 23 - \int_0^1 \left(3x + 2\right)\left(3x^2 + 3\right)dx \overset{Casio}{=} \frac{33}{4}$

Full Chuyên đề 12 new 2020-2021

FB: Duong Hung

CHƯƠNG ③: NGUYÊN HÀM-TÍCH PHÂN-ỨNG DỤNG

Bài 5: DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

☑ Dạng ①: Ứng dụng của tích phân tính diện tích hình phẳng.

①. Hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x), \mathrm{O}x, x = a, x = b.$

• Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức $\boxed{S = \int_a^b |f(x)|dx}$ (1)

②. Phương pháp trắc nghiệm:

•Tính chất: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên K (khoảng đoạn, nửa khoảng) và a,b,c là ba số bất kỳ thuộc K. Khi đó, ta có $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

• Xác định các yếu tố cần thiết như công thức $y = f(x), Ox, x = a, x = b.$

•Sử dụng chức năng tính tích phân có sẵn trong máy tính Casio để tính.

☞***Chú ý:*** *Nếu đề bài chưa cho $x = a, x = b$ (cận tích phân) thì ta cần giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 0$ để tìm cận tích phân.*

A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \cos^2 x$, trục hoành, đường thẳng $x = 0$ và $x = \pi$ là

Ⓐ. $\frac{\pi}{8}$. Ⓑ. $\frac{\pi}{6}$. Ⓒ. $\frac{\pi}{4}$. Ⓓ. $\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

➲Chọn D

• Diện tích S cần tìm:

$$S = \int_0^\pi \cos^2 x dx = \int_0^\pi \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}x\Big|_0^\pi + \frac{\sin 2x}{4}\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

PP nhanh trắc nghiệm

• Casio

Câu 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x$, trục hoành, đường thẳng $x = -2$ và $x = 4$ là.

Ⓐ. 44. Ⓑ.24. Ⓒ. 48. Ⓓ.28.

Lời giải

➲Chọn A

• Diện tích cần tìm $S=\int_{-2}^{4}\left|x^3-4x\right|dx$

•Ta có: $x^3-4x=x\left(x^2-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm2\end{array}\right.$

•Vậy $S=\int_{-2}^{0}\left|x^3-4x\right|dx+\int_{0}^{2}\left|x^3-4x\right|dx+\int_{2}^{4}\left|x^3-4x\right|dx$

$$=\left|\left(\frac{x^4}{4}-4\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-\frac{4x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{2}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-4\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{2}^{4}\right|=44$$

PP nhanh trắc nghiệm

• **Casio**

Câu 3: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$, trục hoành, hai đường thẳng $x=1$ và $x=2$ là.

Ⓐ. $\ln2$. Ⓑ. $\ln2-1$. Ⓒ. $\ln2+1$. Ⓓ. $1-\ln2$.

Lời giải

➲Chọn D

• Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x-1}{x}=0\Leftrightarrow x=1$

•Suy ra

$$S=\int_1^2\left|\frac{x-1}{x}\right|dx=\left|\int_1^2\frac{x-1}{x}dx\right|=\left|\int_1^2\left(1-\frac{1}{x}\right)\right|=\left|\left(x-\ln x\right)\Big|_1^2\right|=1-\ln2.$$

PP nhanh trắc nghiệm

• **Casio**

B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=f(x)$ liên tục, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính theo công thức:

Ⓐ. $S=\int\limits_a^b\left|f(x)\right|dx$. Ⓑ. $S=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Ⓒ. $S=\int\limits_a^0 f(x)dx+\int\limits_0^b f(x)dx$. Ⓓ. $S=\int\limits_a^0 f(x)dx-\int\limits_0^b f(x)dx$.

Câu 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-x$, $y=0$, $x=0$ và $x=2$ được tính bởi công thức:

Ⓐ. $\int\limits_0^2\left(x-x^2\right)dx$. Ⓑ. $\int\limits_1^2\left(x^2-x\right)dx-\int\limits_0^1\left(x^2-x\right)dx$.

Ⓒ. $\int\limits_0^1\left(x^2-x\right)dx+\int\limits_1^2\left(x^2-x\right)dx$. Ⓓ. $\int\limits_0^1\left(x^2-x\right)dx$.

Câu 3: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1,\ x=3$ là.

Ⓐ. $\frac{28}{9}$ Ⓑ. $\frac{28}{3}$ Ⓒ. $\frac{1}{3}$ Ⓓ. $\frac{4}{3}$

Câu 4: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x+1,$ trục hoành và hai đường thẳng $x=0$ và $x=\frac{7\pi}{6}$ là.

Ⓐ. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7\pi}{6}-1.$ Ⓑ. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7\pi}{6}+1.$ Ⓒ. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{7\pi}{3}+1.$ Ⓓ. $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{7\pi}{6}-1.$

Câu 5: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y=x\sqrt{x^2+1}$, trục Ox và đường thẳng $x=1$ là.

Ⓐ. $\frac{2\sqrt{2}+1}{3}$ Ⓑ. $\frac{3\sqrt{2}-1}{3}$ Ⓒ. $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ Ⓓ. $\frac{3-\sqrt{2}}{3}$

Câu 6: Tính diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x.\ln(3x+1)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0;\ x=1$

Ⓐ. $S=\frac{4}{9}\ln 2-\frac{1}{12}.$ Ⓑ. $S=\frac{2}{9}\ln 2-\frac{1}{12}.$ Ⓒ. $S=\frac{7}{9}\ln 2-\frac{1}{12}.$ Ⓓ. $S=\frac{8}{9}\ln 2-\frac{1}{12}.$

Câu 7: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\ln x$, trục Ox và đường thẳng $x=e$ là.

Ⓐ. 1. Ⓑ. $\frac{1}{e}-1.$ Ⓒ. $e.$ Ⓓ. 2.

Câu 8: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^x$, trục Ox, trục Oy và đường thẳng $x=2$ là.

Ⓐ. $e+4.$ Ⓑ. $e^2-e+2.$ Ⓒ. $\frac{e^2}{2}+3.$ Ⓓ. $e^2-1.$

Câu 9: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2+1$ và trục Ox

Ⓐ. $S=1.$ Ⓑ. $S=2.$ Ⓒ. $S=\frac{1}{2}.$ Ⓓ. $S=\frac{16}{15}.$

Câu 10: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=-x^3+3x^2$ và trục hoành là.

Ⓐ. $\frac{27}{4}.$ Ⓑ. $\frac{5}{6}.$ Ⓒ. $\frac{4}{9}.$ Ⓓ. $\frac{24}{7}.$

Câu 11: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=-x^2+2x$ và trục hoành là

Ⓐ. $\frac{4}{3}.$ Ⓑ. $\frac{29}{3}.$ Ⓒ. $\frac{8}{3}.$ Ⓓ. $\frac{20}{3}.$

Câu 12: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^4-1$ và trục hoành là

Ⓐ. $\frac{7}{4}.$ Ⓑ. $\frac{8}{5}.$ Ⓒ. $\frac{1}{2}.$ Ⓓ. 1.

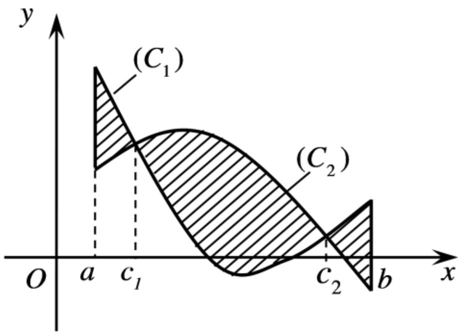
BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.B	3.B	4.B	5.C	6.D	7.A	8.A	9.D	10.A	11.A	12.B

☑ Dạng ②: Ứng dụng của tích phân tính diện tích hình phẳng.

⊗-*Phương pháp:*

•Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị: $(C_1): y = f(x), (C_2): y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được xác định bởi công thức: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.



$$(H)\begin{cases}(C_1): y = f_1(x)\\(C_2): y = f_2(x)\\x = a\\x = b\end{cases}$$

$$\boxed{S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)| dx}$$

Chú ý: Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

* Giải phương trình: $f(x) = g(x)$ tìm nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n \in (a;b)$, $(x_1 < x_2 < ... < x_n)$.

•Tính: $S = \int_a^{x_1} |f(x) - g(x)| dx + \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| dx + ... + \int_{x_n}^{b} |f(x) - g(x)| dx$

$= \left|\int_a^{x_1} (f(x) - g(x)) dx\right| + ... + \left|\int_{x_n}^{b} (f(x) - g(x)) dx\right|$.

•Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để khử dấu giá trị tuyệt đối.

A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2 - x^2$ và $y = x$.

Ⓐ. $\frac{9}{2}$. Ⓑ. 7. Ⓒ. 5. Ⓓ. $\frac{11}{2}$.

Lời giải

➲Chọn A

• Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là

$2 - x^2 = x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

• Diện tích của hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_{-2}^{1} |-x^2 - x + 2| dx = \left|\int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2) dx\right|$$

$$= \left|\left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-2}^{1}\right| = \frac{9}{2}.$$

PP nhanh trắc nghiệm

• **Casio:**

$\int_{-2}^{1} |x^2 + x - 2| dx$

$\frac{9}{2}$

Câu 2: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{\ln x}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ. $S=\pi\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln x}{x^2}dx$. Ⓑ. $S=\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln x}{x^2}dx$. Ⓒ. $S=\int\limits_{1}^{e}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)^2dx$. Ⓓ. $S=\pi\int\limits_{1}^{e}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)^2dx$

.

Lời giải

➲Chọn B

- Ta có $S=\int\limits_{1}^{e}\left|\frac{\ln x}{x^2}\right|dx$.
- Vì $\forall x\in[1;e],\ \ln x\ge 0\Rightarrow\frac{\ln x}{x^2}\ge 0\Rightarrow S=\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln x}{x^2}dx$.

PP nhanh trắc nghiệm

- **Casio**

Câu 3: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=(x+1)\ln x$, trục hoành và đường thẳng $x=e$.

Ⓐ. $S=\frac{e^2+5}{4}$. Ⓑ. $S=\frac{e^2+7}{6}$. Ⓒ. $S=\frac{e^2+3}{2}$. Ⓓ. $S=\frac{e^2+9}{8}$.

Lời giải

➲Chọn C

- Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$(x+1)\ln x=0$ (Điều kiện: $x>0$).

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\ \ln x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1\end{array}\right..$$

- Vì $x>0$ nên $x=1$.
- Ta có: $S=\int\limits_{1}^{e}\left|(x+1)\ln x\right|dx=\int\limits_{1}^{e}(x+1)\ln x dx$.
- Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=(x+1)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\ v=\frac{x^2}{2}+x\end{cases}$.

$$S=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x\Big|_1^e-\int\limits_{1}^{e}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\frac{1}{x}dx=\frac{e^2}{2}+e-\int\limits_{1}^{e}\left(\frac{x}{2}+1\right)dx$$

$$=\frac{e^2}{2}+e-\left(\frac{x^2}{4}+x\right)\Big|_1^e=\frac{e^2+5}{4}$$

PP nhanh trắc nghiệm

- **Casio**

B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=-x^2+4$ và $y=-x+2$?

Ⓐ. $\frac{5}{7}$. Ⓑ. $\frac{8}{3}$. Ⓒ. $\frac{9}{2}$. Ⓓ. 9.

Câu 2: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $(H): y=\frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

Ⓐ. $2\ln 2-1$. Ⓑ. $\ln 2+1$. Ⓒ. $\ln 2-1$. Ⓓ. $2\ln 2+1$.

Câu 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+1$ và đường thẳng $y=x+3$.

Ⓐ. $\frac{9}{2}$. Ⓑ. $\frac{13}{3}$. Ⓒ. $\frac{11}{3}$. Ⓓ. $\frac{7}{2}$.

Câu 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$; $y=6-x$ và trục hoành.

Ⓐ. $\frac{22}{3}$. Ⓑ. $\frac{16}{3}$. Ⓒ. 2. Ⓓ. $\frac{23}{3}$.

Câu 5: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^2-x$ và $y=3x$.

Ⓐ. $S=\frac{5}{3}$. Ⓑ. $S=\frac{16}{3}$. Ⓒ. $S=9$. Ⓓ. $S=\frac{32}{3}$.

Câu 6: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=x^2-2x$ và đường thẳng $(d): y=x$ bằng

Ⓐ. $\frac{17}{6}$. Ⓑ. $\frac{11}{2}$. Ⓒ. $\frac{9}{2}$. Ⓓ. $\frac{23}{6}$.

Câu 7: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=-x^2$ và đường thẳng $y=-x-2$ bằng

Ⓐ. $\frac{9}{2}$. Ⓑ. $\frac{5}{2}$. Ⓒ. $\frac{11}{2}$. Ⓓ. $\frac{1}{2}-\sqrt{2}$.

Câu 8: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$ và đường thẳng $y=2x$ là

Ⓐ. $\frac{4}{3}$. Ⓑ. $\frac{5}{3}$. Ⓒ. $\frac{3}{2}$. Ⓓ. $\frac{23}{15}$.

Câu 9: Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$.

Ⓐ. $S=\frac{937}{12}$. Ⓑ. $S=\frac{343}{12}$. Ⓒ. $S=\frac{793}{4}$. Ⓓ. $S=\frac{397}{4}$.

Câu 10: Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$, $y=0$, $x=0$ và $x=3$ quanh trục Ox là

Ⓐ. $\frac{81\pi}{35}$. Ⓑ. $\frac{81}{35}$. Ⓒ. $\frac{71\pi}{35}$. Ⓓ. $\frac{71}{35}$.

Câu 11: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=-x^2+2x+1$, $y=2x^2-4x+1$ là

Ⓐ. 8. Ⓑ. 5. Ⓒ. 4. Ⓓ. 10.

Câu 12: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y=\frac{1}{2}x^2$ và $y=6-x^2$ bằng

Ⓐ. $\int_{-2}^{2}\left(\frac{3x^2}{2}-6\right)dx$. Ⓑ. $\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{2}-6\right)dx$.

Ⓒ. $-\int_{-2}^{2}\left(\frac{3x^2}{2}-6\right)dx$. Ⓓ. $-\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{2}-6\right)dx$.

Câu 13: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y=-x^3$ và $y=x^2-2x$ là

Ⓐ. $S=\frac{9}{4}$. Ⓑ. $S=\frac{7}{3}$. Ⓒ. $S=\frac{37}{12}$. Ⓓ. $S=\frac{4}{3}$.

Câu 14: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3x; y = x$. Tính S?

Ⓐ. $S = 4$. Ⓑ. $S = 8$. Ⓒ. $S = 2$. Ⓓ. $S = 0$.

Câu 15: Hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = x(1-x)$ và $y = x^3 - x$ có diện tích bằng

Ⓐ. $\dfrac{37}{12}$. Ⓑ. $\dfrac{5}{12}$. Ⓒ. $\dfrac{8}{3}$. Ⓓ. $\dfrac{9}{4}$.

Câu 16: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x - 1$ và $y = -x^2 + 3$ là

Ⓐ. $S = 9$. Ⓑ. $S = -9$. Ⓒ. $S = 3$. Ⓓ. $S = \dfrac{9}{2}$.

Câu 17: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ và $y = x + 2$.

Ⓐ. $S = 8$. Ⓑ. $S = 4$. Ⓒ. $S = 12$. Ⓓ. $S = 16$.

Câu 18: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - 3x + 1$ và đường thẳng $y = x + 1$ được tính theo công thức nào dưới đây?

Ⓐ. $\int_0^4 (x^2 - 4x)\mathrm{d}x$. Ⓑ. $\int_0^4 (-x^2 + 4x)\mathrm{d}x$. Ⓒ. $\int_0^4 (x^2 + 4x)\mathrm{d}x$. Ⓓ. $\int_0^4 (-x^2 - 2x)\mathrm{d}x$.

Câu 19: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y^2 + x - 5 = 0, x + y - 3 = 0$.

Ⓐ. $\dfrac{19}{6}$. Ⓑ. $\dfrac{15}{2}$. Ⓒ. $\dfrac{37}{6}$. Ⓓ. $\dfrac{9}{2}$.

Câu 20: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3$, $y = 10 - x$ và trục Ox là

Ⓐ. 32. Ⓑ. 26. Ⓒ. 36. Ⓓ. 40.

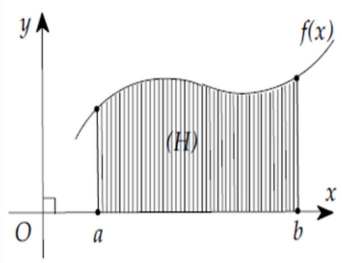
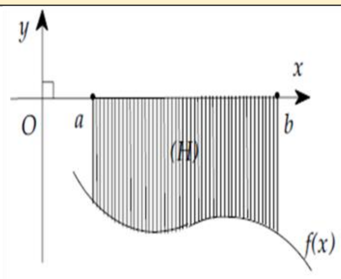
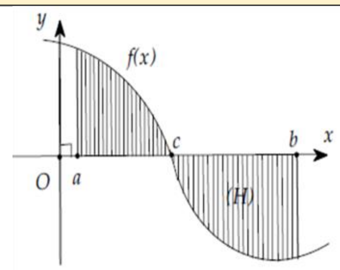
BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.A	3.A	4.A	5.D	6.C	7.A	8.A	9.A	10.A
11.C	12.C	13.C	14.B	15.A	16.A	17.A	18.B	19.D	20.C

☑ Dạng ③: Diện tích hình phẳng thông qua đồ thị

⊗ *-Phương pháp:*

Minh họa các dạng thường gặp:

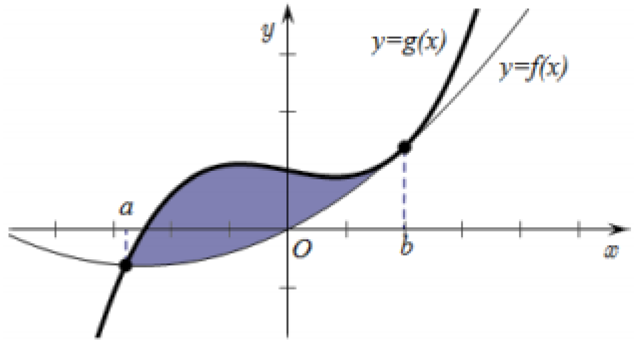
$f(x) \ge 0, \forall x \in [a;b]$	$f(x) \le 0, \forall x \in [a;b]$	$f(x)$ có hai loại dấu trên $[a;b]$
		
$S = \int_a^b f(x)dx$	$S = \int_a^b [-f(x)]dx$	$S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b [-f(x)]dx$

Ghi nhớ: • Quan sát hình phẳng mang dấu + hay -

A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đồ thị giao nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ a và b. Gọi (H) là hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hai hàm số này *(phần tô đậm ở hình vẽ)*.

Diện tích của (H) được tính theo công thức



Ⓐ. $S=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$.   Ⓑ. $S=\int_a^b [g(x)-f(x)]dx$.

Ⓒ. $S=\int_a^b [f(x)+g(x)]dx$.   Ⓓ. $S=-\int_a^b [f(x)+g(x)]dx$.

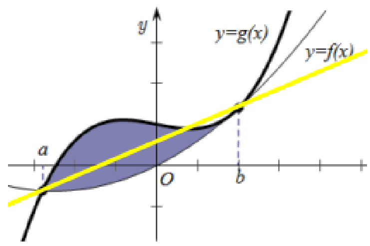
Lời giải

Chọn B

- Áp dụng công thức $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$.
- Quan sát hình vẽ ta thấy $g(x)\geq f(x)$ trên $[a,b]$
- Vậy $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx=\int_a^b (g(x)-f(x))dx$.

PP nhanh trắc nghiệm

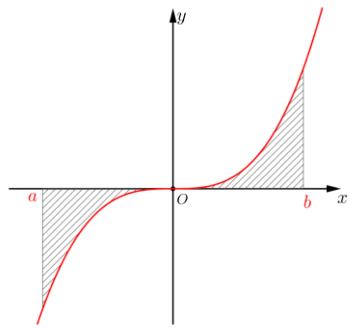
- **Quan sát nhanh** $g(x)\geq f(x)$



- $S=\int_a^b (g(x)-f(x))dx$

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y=f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ (như hình vẽ dưới đây).

Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D. Chọn công thức đúng trong các phương án A,B,C,D cho dưới đây?



Ⓐ. $S_D=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^b f(x)dx$.   Ⓑ. $S_D=-\int_a^0 f(x)dx+\int_0^b f(x)dx$

.

Ⓒ. $S_D=\int_a^0 f(x)dx-\int_0^b f(x)dx$.   Ⓓ. $S_D=\int_a^0 f(x)dx-\int_0^b f(x)dx$

Lời giải

Chọn B

-

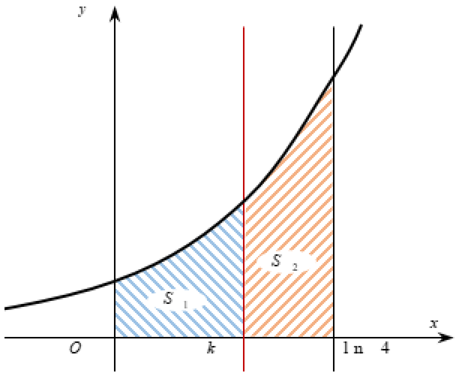
PP nhanh trắc nghiệm

- Quan sát dấu của hình phẳng

$S_D=\int_a^b |f(x)|dx=\int_a^0 |f(x)|dx+\int_0^b |f(x)|dx$

$=-\int_a^0 f(x)dx+\int_0^b f(x)dx$

Câu 3: Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k\,(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1=2S_2$.



Ⓐ. $k=\frac{2}{3}\ln 4$.   Ⓑ. $k=\ln 2$.

Ⓒ. $k=\ln\frac{8}{3}$.   Ⓓ. $k=\ln 3$.

Lời giải

➲Chọn D

• Ta có $S_1=\int_0^k e^x dx=e^k\big|_0^k=e^k-1$ và

• $S_2=\int_k^{\ln 4} e^x dx=e^x\Big|_0^{\ln 4}=4-e^k$

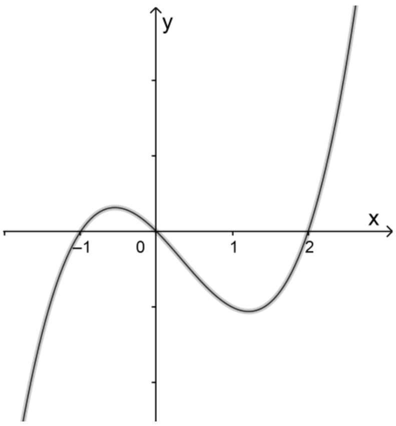
•Ta có $S_1=2S_2\Leftrightarrow e^k-1=2\left(4-e^k\right)\Leftrightarrow k=\ln 3$.

PP nhanh trắc nghiệm

• Tính Nhập vào máy $\dfrac{\int_0^A e^x dx}{\int_k^{\ln 4} e^x dx}$ và CALC với các giá trị của A lần lượt ở 4 phương án. Giá trị nào cho kết quả bằng 2 thì chọn.

B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục Ox là



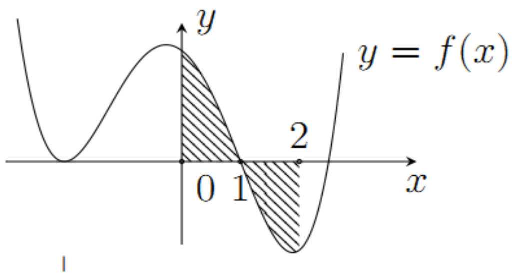
Ⓐ. $S=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$.

Ⓑ. $S=\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Ⓒ. $S=\int_{-1}^2 -f(x)\mathrm{d}x$.

Ⓓ. $S=\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $\left(C\right)$ là đường cong như hình bên dưới. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $\left(C\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$ là



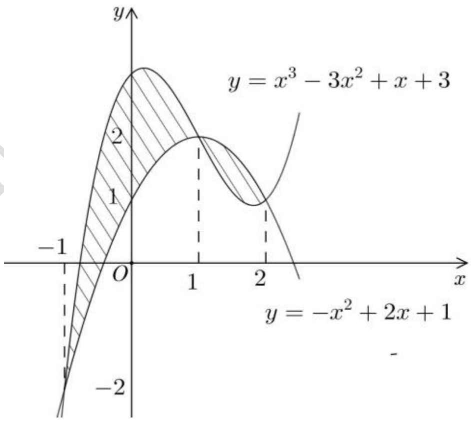
Ⓐ. $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Ⓑ. $\left|\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x\right|$.

Ⓒ. $-\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Ⓓ. $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 3: Cho đồ thị hai hàm số $y=x^3-3x^2+x+3$ và $y=-x^2+2x+1$ như hình sau
Diện tích phần hình phẳng được gạch sọc tính theo công thức nào dưới đây?



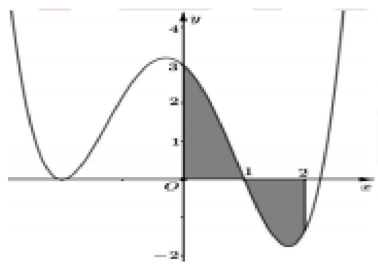
Ⓐ. $\int\limits_{-1}^1\left(x^3-2x^2-x+2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\left(-x^3+2x^2+x-2\right)\mathrm{d}x$.

Ⓑ. $\int\limits_{-1}^2\left(x^3-2x^2-x+2\right)\mathrm{d}x$.

Ⓒ. $\int\limits_{-1}^1\left(-x^3+2x^2+x-2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\left(x^3-2x^2-x+2\right)\mathrm{d}x$.

Ⓓ. $\int\limits_{-1}^2\left(-x^3+2x^2+x-2\right)\mathrm{d}x$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình bên. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=2$ là



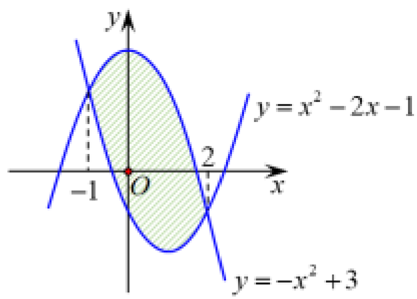
Ⓐ. $S=-\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Ⓑ. $S=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Ⓒ. $S=\left|\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Ⓓ. $S=\int\limits_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 5: Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ được tính theo công thức nào dưới đây?



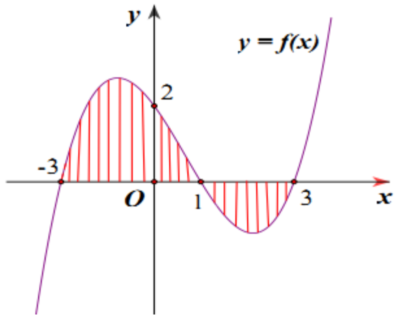
Ⓐ. $\int\limits_{-1}^2\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$.

Ⓑ. $\int\limits_{-1}^2\left(-2x+2\right)\mathrm{d}x$.

Ⓒ. $\int\limits_{-1}^2\left(2x-2\right)\mathrm{d}x$.

Ⓓ. $\int\limits_{-1}^2\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$.

Câu 6: Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ.Diện tích S của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục Ox được tính bởi công thức



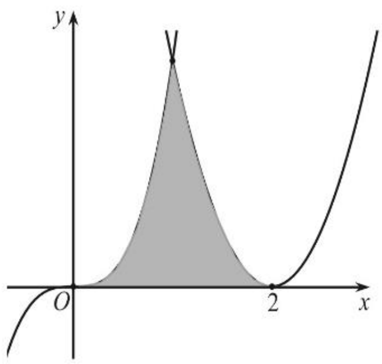
Ⓐ. $S = \left|\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Ⓑ. $S = \int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

Ⓒ. $S = \int_{-3}^{1} f(x)\mathrm{d}x - \int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

Ⓓ. $S = \int_{-3}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

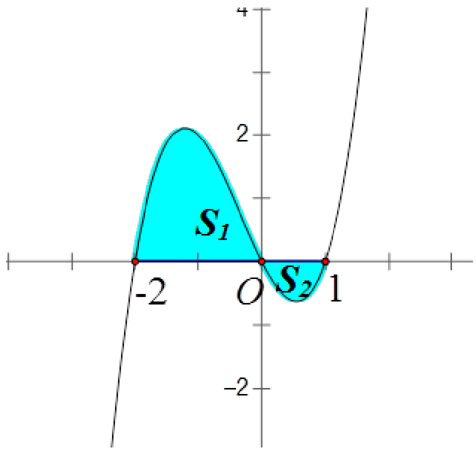
Câu 7: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = (x-2)^2$, đường cong $y = x^3$ và trục hoành bằng



Ⓐ. $\frac{11}{2}$. Ⓑ. $\frac{73}{12}$.

Ⓒ. $\frac{7}{12}$. Ⓓ. $\frac{5}{2}$.

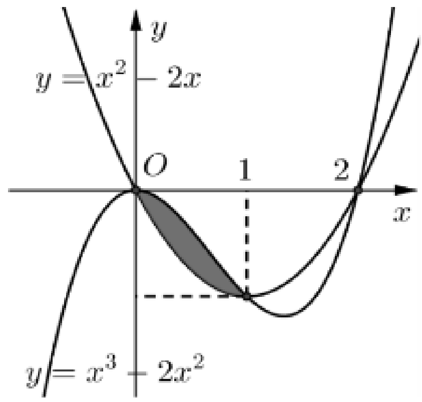
Câu 8: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành gồm hai phần, phần nằm phía trên trục hoành có diện tích $S_1 = \frac{8}{3}$ và phần nằm phía dưới trục hoành có diện tích $S_2 = \frac{5}{12}$. Tính $I = \int_{-1}^{0} f(3x+1)dx$.



Ⓐ. $I = \frac{5}{3}$. Ⓑ. $I = \frac{3}{4}$.

Ⓒ. $I = \frac{37}{36}$. Ⓓ. $I = \frac{27}{4}$.

Câu 9: Diện tích phần tô đậm trong hình bên được tính theo công thức nào trong các công thức sau?



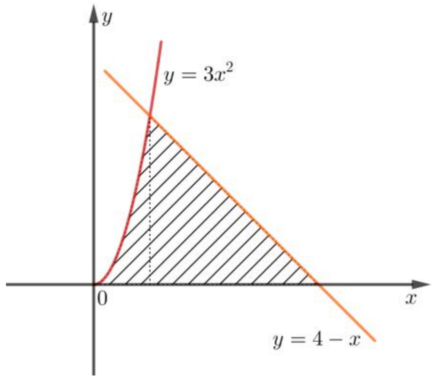
Ⓐ. $\int_{0}^{1} (-x^3 + 3x^2 - 2x)\mathrm{d}x$.

Ⓑ. $\int_{0}^{1} (x^3 - 3x^2 + 2x)\mathrm{d}x$.

Ⓒ. $\int_{0}^{2} (-x^3 + 3x^2 - 2x)\mathrm{d}x$.

Ⓓ. $\int_{0}^{2} (x^3 - 3x^2 + 2x)\mathrm{d}x$.

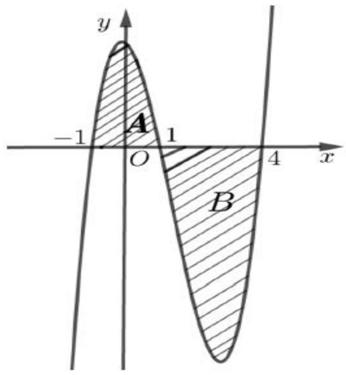
Câu 10: Gọi (H) là phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ dưới đây được giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=3x^2$, $y=4-x$ và trục hoành. Diện tích của (H) là bằng bao nhiêu?



Ⓐ. $\dfrac{11}{2}$. Ⓑ. $\dfrac{9}{2}$.

Ⓒ. $\dfrac{13}{2}$. Ⓓ. $\dfrac{7}{2}$.

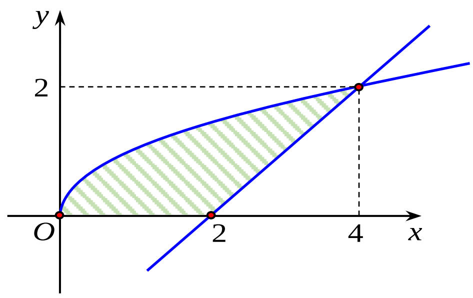
Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Biết diện tích hai phần A và B lần lượt là $\dfrac{16}{3}$ và $\dfrac{63}{4}$, tính $\int\limits_{-1}^{\frac{3}{2}} f(2x+1)\,dx$.



Ⓐ. $\dfrac{253}{12}$. Ⓑ. $\dfrac{253}{24}$.

Ⓒ. $-\dfrac{125}{24}$. Ⓓ. $-\dfrac{125}{12}$.

Câu 12: Tính diện tích S của hình phẳng (phần gạch sọc) giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $f(x)=\sqrt{x}; g(x)=x-2$ trong hình sau

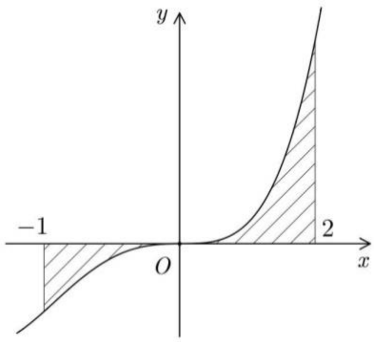


Ⓐ. $\dfrac{8}{3}$. Ⓑ. $\dfrac{12}{3}$.

Ⓒ. $\dfrac{7}{3}$. Ⓓ. $\dfrac{10}{3}$.

Câu 12: Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và 2 đường thẳng $x=-1, x=2$ trong hình vẽ bên.

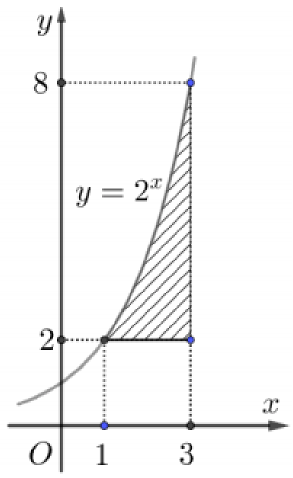
Đặt $S_1=\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,dx, S_2=\int\limits_{0}^{2} f(x)\,dx$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



Ⓐ. $S=S_1+S_2$. Ⓑ. $S=-S_1-S_2$.

Ⓒ. $S=S_1-S_2$. Ⓓ. $S=S_2-S_1$.

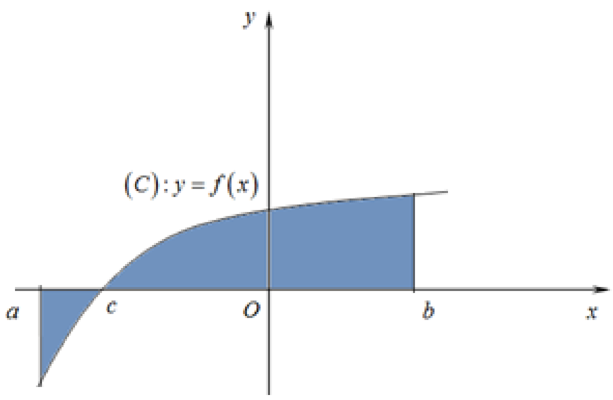
Câu 13: Diện tích hình mặt phẳng gạch sọc trong hình vẽ bên bằng



Ⓐ. $\int_1^3 2^x \mathrm{d}x$.   Ⓑ. $\int_1^3 (2-2^x)\mathrm{d}x$.

Ⓒ. $\int_1^3 (2^x-2)\mathrm{d}x$.   Ⓓ. $\int_1^3 (2^x+2)\mathrm{d}x$.

Câu 14: Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ tính theo công thức nào dưới đây ?



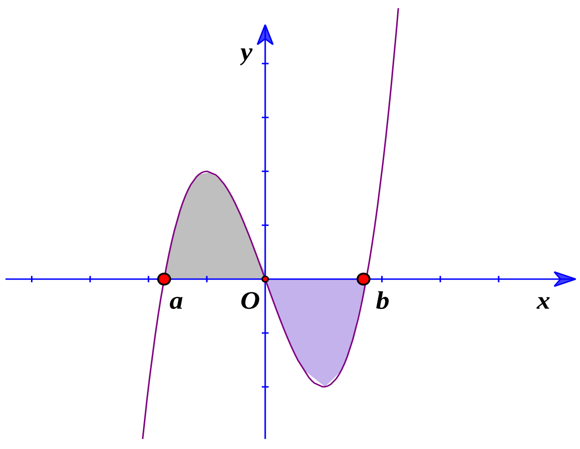
Ⓐ. $S = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Ⓑ. $S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Ⓒ. $S = -\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

Ⓓ. $S = \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Diện tích hình phẳng được tính bằng công thức nào?



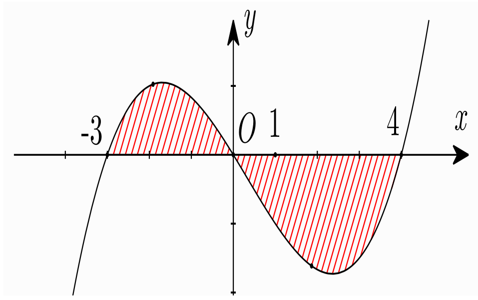
Ⓐ. $S = \int_a^0 f(x)dx - \int_0^b f(x)dx$.

Ⓑ. $S = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx$.

Ⓒ. $S = 2\int_0^b f(x)dx$.

Ⓓ. $S = \int_a^b f(x)dx$.

Câu 16: Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$. Diện tích hình phẳng là:



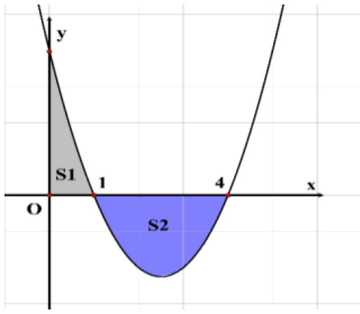
Ⓐ. $S=\int\limits_{-3}^{0}f\left(x\right)dx+\int\limits_{0}^{4}f\left(x\right)dx$.

Ⓑ. $S=\left|\int\limits_{-3}^{4}f\left(x\right)dx\right|$.

Ⓒ. $S=\int\limits_{-3}^{4}f\left(x\right)dx$.

Ⓓ. $S=\int\limits_{-3}^{0}f\left(x\right)dx-\int\limits_{0}^{4}f\left(x\right)dx$.

Câu 17: Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;\,4\right]$ như hình vẽ và có diện tích $S_1=\frac{11}{6}$, $S_2=\frac{9}{2}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{0}^{4}f\left(x\right)dx$



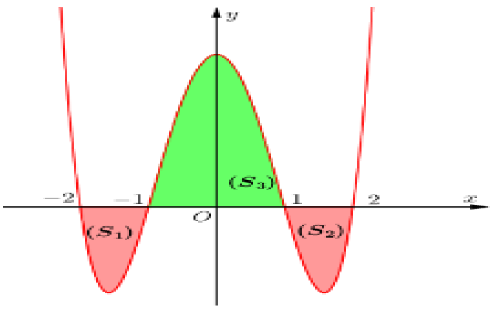
Ⓐ. $I=-\frac{8}{3}$.

Ⓑ. $I=\frac{19}{3}$.

Ⓒ. $I=\frac{8}{3}$.

Ⓓ. $I=-\frac{19}{3}$.

Câu 19: Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-2;\,2\right]$ như hình vẽ ở bên và có diện tích $S_1=S_2=\frac{22}{15}$, $S_3=\frac{76}{15}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-2}^{2}f\left(x\right)dx$



Ⓐ. $I=\frac{32}{15}$.

Ⓑ. $I=8$.

Ⓒ. $I=\frac{18}{5}$.

Ⓓ. $I=-\frac{32}{15}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.A	3.A	4.B	5.D	6.C	7.C	8.B	9.B	10.A
11.C	12.D	13.D	14.C	15.C	16.A	17.D	18.D.	19.A	

Full Chuyên đề 12 new 2020-2021

FB: Duong Hung

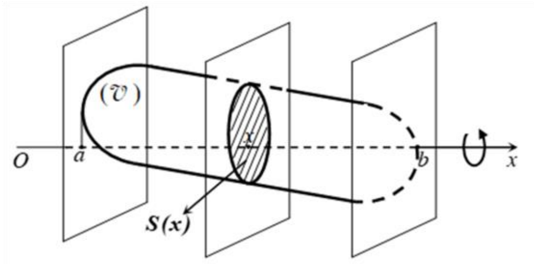
CHƯƠNG ③: NGUYÊN HÀM-TÍCH PHÂN-ỨNG DỤNG

Bài 6: THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY

☑ Dạng ①: Bài toán Thể tích vật thể:

Phương pháp:

• Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.



• Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx}$

A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1 \le x \le 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2-2}$.

Ⓐ. $V = 32 + 2\sqrt{15}$.   Ⓑ. $V = \dfrac{124\pi}{3}$.   Ⓒ. $V = \dfrac{124}{3}$.   Ⓓ. $V = (32 + 2\sqrt{15})\pi$.

Lời giải

➲Chọn C

• Diện tích thiết diện là: $S(x) = 3x.\sqrt{3x^2-2}$

• Thể tích vật thể là: $V = \int_1^3 3x.\sqrt{3x^2-2}\,dx = \dfrac{124}{3}$.

PP nhanh trắc nghiệm

• Ta nhập biểu thức $\int_1^3 3x.\sqrt{3x^2-2}\,dx$ như sau :

y3Q(s3Q(dp2R1E3=

• Màn hình hiển thị :

$\int_1^3 3x\sqrt{3x^2-2}\,dx$

41.33333333

Chọn C

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=3$. Biết rằng thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\left(0\le x\le 3\right)$ là một hình vuông cạnh là $\sqrt{9-x^2}$. Tính thể tích V của vật thể.

Ⓐ. $V=171$ Ⓑ. $V=171\pi$. Ⓒ. $V=18$. Ⓓ. $V=18\pi$.

Lời giải

➲Chọn C

• Ta có thể tích của vật thể là $V=\int\limits_0^3\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2dx$

$=\int\limits_0^3\left(9-x^2\right)dx=\left(9x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=18$.

PP nhanh trắc nghiệm

• **Casio**

M √▫ D

$\int_0^3 9-x^2\,dx$

18

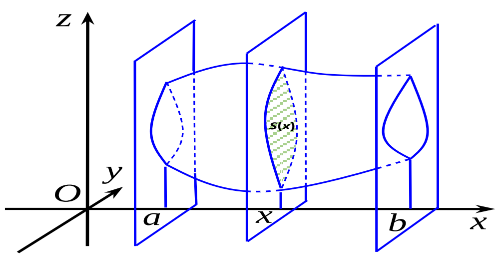
• **Chú ý:** Diện tích hình vuông

B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vật thể (H) giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Gọi $S(x)$ là thiết diện của (H) cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ là x với $a\le x\le b$. Giả sử hàm số $y=S(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó thể tích V của vật thể (H) được cho bởi công thức

Ⓐ. $V=\pi\int\limits_a^b\left[S(x)\right]^2dx$. Ⓑ. $V=\pi\int\limits_a^b S(x)dx$. Ⓒ. $V=\int\limits_a^b\left[S(x)\right]^2dx$. Ⓓ. $V=\int\limits_a^b S(x)dx$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng (P), (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x=a$, $x=b$ $(a<b)$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ x, $a\le x\le b$ cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là $S\ x$ với $y=S\ x$ là hàm số liên tục trên $[a;b]$. Thể tích V của thể tích đó được tính theo công thức



Ⓐ. $V=\int\limits_a^b S^2(x)dx$. Ⓑ. $V=\int\limits_a^b S(x)dx$.

Ⓒ. $V=\pi\int\limits_a^b S(x)dx$. Ⓓ. $V=\pi\int\limits_a^b S^2(x)dx$.

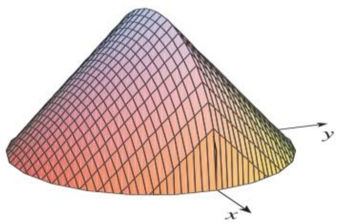
Câu 3: Cho phần vật thể Φ được giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox tại $x=0$, $x=3$. Cắt phần vật thể Φ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x $(0\le x\le 3)$ ta được thiết diện là hình chữ nhật có kích thước lần lượt là x và $\sqrt{3-x}$. Thể tích phần vật thể Φ bằng

Ⓐ. $\frac{27\pi}{4}$. Ⓑ. $\frac{12\sqrt{3}\pi}{5}$. Ⓒ. $\frac{12\sqrt{3}}{5}$. Ⓓ. $\frac{27}{4}$.

Câu 4: Cho phần vật thể (H) giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt phần vật thể (H) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le 2)$, ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể (H)

Ⓐ. $V=\frac{4}{3}$. Ⓑ. $V=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ. $V=4\sqrt{3}$. Ⓓ. $V=\sqrt{3}$.

Câu 5: Cho vật thể có mặt đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (hình vẽ). Khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(-1 \le x \le 1)$ thì được thiết diện là một tam giác đều. Tính thể tích V của vật thể đó.



Ⓐ. $V=\sqrt{3}$. Ⓑ. $V=3\sqrt{3}$. Ⓒ. $V=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ. $V=\pi$.

Câu 6: Cho phần vật thể B giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=\frac{\pi}{3}$. Cắt phần vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{3}\right)$ ta được thiết diện là một tam giác vuông có độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là $2x$ và $\cos x$. Thể tích vật thể B bằng

Ⓐ. $\frac{\sqrt{3}\pi+3}{6}$. Ⓑ. $\frac{\sqrt{3}\pi-3}{3}$. Ⓒ. $\frac{\sqrt{3}\pi-3}{6}$. Ⓓ. $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$.

Câu 7: Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le \pi)$ là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

Ⓐ. $V=3$. Ⓑ. $V=3\pi$. Ⓒ. $V=2\pi\sqrt{3}$. Ⓓ. $V=2\sqrt{3}$.

Câu 8. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt phẳng $x=0$ và $x=1$, biết thiết diện của vật thể khi cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0 \le x \le 1)$ là một hình vuông có độ dài cạnh $\sqrt{x(e^x-1)}$.

Ⓐ. $V=\frac{\pi}{2}$. Ⓑ. $V=\frac{e-1}{2}$. Ⓒ. $V=\frac{1}{2}$. Ⓓ. $V=\frac{\pi(e-1)}{2}$.

Câu 9. Cắt một vật thể V bởi hai mặt phẳng song song P, Q lần lượt vuông góc với trục Ox tại $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$. Một mặt tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm x $\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$ cắt V theo thiết diện có diện tích là $S(x)=(1+sin^2x)cosx$. Tính thể tích vật thể V giới hạn bởi hai mặt phẳng P, Q.

Ⓐ. 3,14 . Ⓑ. $\frac{8}{3}$. Ⓒ. $\frac{13\pi}{6}$. Ⓓ. $\frac{8\pi}{3}$.

Câu 10. Tính thể tích của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=-1$ và $x=1$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\left(-1\le x\le 1\right)$ là một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $\sqrt{1-x^4}$.

Ⓐ. $\frac{3}{4}$. Ⓑ. $\frac{2}{5}$. Ⓒ. 4. Ⓓ. $\frac{1}{4}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.B	3. C	4.B	5.C	6.C	7.D	8.C	9.B	10.B

Hướng dẫn giải

Lời giải

Câu 3.
Chọn C

•Ta có diện tích thiết diện là $S\left(x\right)=x\sqrt{3-x}$.

•Vậy thể tích phần vật thể Φ là: $V=\int\limits_0^3 S\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^3 x\sqrt{3-x}\,\mathrm{d}x=\frac{12\sqrt{3}}{5}$.

Câu 4.

Lời giải

Chọn B

•Diện tích thiết diện: $S_\Delta=\frac{x^2\left(2-x\right)\sqrt{3}}{4}$.

•$V_\mho=\int\limits_0^2 \frac{x^2\left(2-x\right)\sqrt{3}}{4}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\int\limits_0^2 x^2\left(2-x\right)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\int\limits_0^2 x^2\left(2-x\right)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^2=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5.

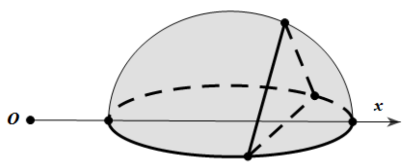
Lời giải

Chọn C

•Tại vị trí có hoành độ x $\left(-1\le x\le 1\right)$ thì tam giác thiết diện có cạnh là $2\sqrt{1-x^2}$.

•Do đó tam giác thiết diện có diện tích $S\left(x\right)=\left(2\sqrt{1-x^2}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}$

$=\sqrt{3}\left(1-x^2\right)$.



•Vậy thể tích V của vật thể là $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{3}\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 6.

Lời giải

Chọn C

•Thể tích vật thể B là $V=\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos x\mathrm{d}x = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\mathrm{d}x = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}\pi-3}{6}$.

Câu 7.

Lời giải

Chọn D

•Diện tích tam giác đều $S(x)=\dfrac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{\sin x}\right)^2}{4}=\sqrt{3}\sin x$.

•Vậy thể tích $V=\int_0^{\pi} S(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sqrt{3}\sin x\mathrm{d}x=2\sqrt{3}$.

Câu 8.

Chọn C

Lời giải

•Ta có: $V=\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\sqrt{x\left(e^x-1\right)}\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1 x\left(e^x-1\right)\mathrm{d}x$.

•Đặt: $\begin{cases} u=x \\ \mathrm{d}v=\left(e^x-1\right)\mathrm{d}x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=e^x-x\end{cases}$.

•Do đó: $V=x\left(e^x-x\right)\Big|_0^1-\int_0^1\left(e^x-x\right)\mathrm{d}x=e-1-\left(e^x-\dfrac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=e-1-e+\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$.

Câu 9.

Chọn B

Lời giải

•Ta có thể tích vật thể V cần tính là: $V=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} S(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+sin^2x\right)cosx\mathrm{d}x$.

•Đặt $t=sinx \Rightarrow \mathrm{d}t=cosx\,\mathrm{d}x$.

•Đổi cận: $x=-\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=-1;\ \ x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

•$V=\int_{-1}^{1}\left(1+t^2\right)\mathrm{d}t=\left(t+\dfrac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\dfrac{8}{3}$.

Câu 10.

Chọn B

Lời giải

•Ta có diện tích thiết diện được cho bằng: $S(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1-x^4\right)$

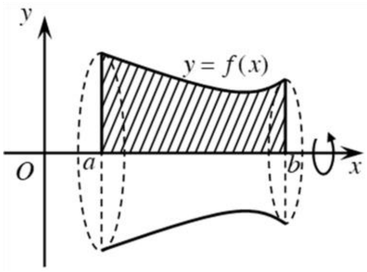
•Ta có diện tích thiết diện được cho bằng: $S(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{4}\left(1-x^4\right)$

• Thể tích vật thể cần tìm là: $V=\int_{-1}^{1}S(x).dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\left(1-x^4\right)dx=\frac{2}{5}$.

☑ Dạng ②: Bài toán Thể tích vật thể tròn xoay quanh trục Ox

↳. Phương pháp:

• Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi miền (D) giới hạn bởi $y=f(x)$; $y=0$ và $x=a,\ x=b$ khi quay quanh trục Ox.



$$\begin{cases}(C): y=f(x)\\(Ox): y=0\\x=a\\x=b\end{cases}$$

• Phương pháp giải: áp dụng công thức: $V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx$

↳A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,x=b(a<b)$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

Ⓐ. $V=\pi^2\int_a^b f^2(x)dx$. Ⓑ. $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$. Ⓒ. $V=\pi^2\int_a^b f(x)dx$. Ⓓ. $V=2\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

Lời giải

➲Chọn B

• $\forall x\in[a;b]$ ta có $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$

↳PP nhanh trắc nghiệm

• Công thức

Câu 2: Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=2\ln x, y=0, x=1, x=e$.

Ⓐ. π. Ⓑ. $e-2$. Ⓒ. $\pi(e-2)$. Ⓓ. $4\pi(e-2)$.

Lời giải

➲Chọn D

- Có $V = 4\pi\int\limits_1^e \ln^2 x\mathrm{d}x = 4\pi\mathrm{I}$
- Đặt $\begin{cases} u = \ln^2 x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\ln x\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$
- Suy ra $\mathrm{I} = x\ln^2 x\Big|_1^e - 2\int\limits_1^e \ln x\mathrm{d}x = e - 2\mathrm{I}'$
- Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v = x \end{cases}$
- Suy ra $\mathrm{I}' = x\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e \mathrm{d}x = e - e + 1 = 1$
- Suy ra $\mathrm{I} = e - 2$
- Vậy $V = 4\pi(e-2)$

↳PP nhanh trắc nghiệm

- **Casio**

$\pi\int_1^e (2\ln(x))^2\mathrm{d}x$

9.026195662

Ans→A

9.026195662

A−4π(e−2)

0

Câu 3: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = \sin x$; Ox ; $x = 0$; $x = \pi$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là

Ⓐ. $\dfrac{\pi^2}{2}$.　　Ⓑ. $\dfrac{\pi}{2}$.　　Ⓒ. π .　　Ⓓ. π^2.

Lời giải

➲Chọn A

- Thể tích khối tròn xoay là

$V = \pi\int\limits_0^\pi \sin^2 x.\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}\int\limits_0^\pi (1-\cos 2x).\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^\pi = \dfrac{\pi^2}{2}$.

↳PP nhanh trắc nghiệm

-

$\pi\int_0^\pi \sin(x)^2\mathrm{d}x$

4.934802201

$\mathrm{A} - \dfrac{\pi^2}{2}$

0

↳B - Bài tập rèn luyện:

Câu 1. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}\ln x$, trục $Ox, x = 1, x = e$. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox .

Ⓐ. $\dfrac{\pi(e^2+1)}{4}$.　　Ⓑ. $\dfrac{\pi(e-1)}{3}$.　　Ⓒ. $\dfrac{\pi(e+1)}{3}$.　　Ⓓ. $\dfrac{\pi(e^2-1)}{4}$.

Câu 2. Tính thể tích vật thể tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi $y=\sqrt{\ln x}$, trục Ox và đường thẳng $x=2$ quay xung quanh trục Ox.

Ⓐ. $2\ln 2+1$. Ⓑ. $2\pi\ln 2+\pi$. Ⓒ. $2\pi\ln 2-\pi$. Ⓓ. $2\ln 2-1$.

Câu 3. Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y=\sqrt{x^2+1}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0, x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

Ⓐ. $V=\frac{4\pi}{3}$ Ⓑ. $V=2\pi$ Ⓒ. $V=\frac{4}{3}$ Ⓓ. $V=2$

Câu 4. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

Ⓐ. $V=2\pi^2$. Ⓑ. $V=2\pi(\pi+1)$. Ⓒ. $V=2\pi$. Ⓓ. $V=2(\pi+1)$.

Câu 5. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ. $V=\pi\int_0^2 (x^2+3)^2\,dx$. Ⓑ. $V=\pi\int_0^2 (x^2+3)\,dx$.

Ⓒ. $V=\int_0^2 (x^2+3)^2\,dx$. Ⓓ. $V=\int_0^2 (x^2+3)\,dx$.

Câu 6: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2+2, y=0, x=1, x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ. $V=\pi\int_1^2 (x^2+2)^2\,\mathrm{d}x$. Ⓑ. $V=\int_1^2 (x^2+2)^2\,\mathrm{d}x$. Ⓒ. $V=\pi\int_1^2 (x^2+2)\,\mathrm{d}x$. Ⓓ. $V=\int_1^2 (x^2+2)\,\mathrm{d}x$.

Câu 7: Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x=a, x=b\,(a<b)$, xung quanh trục Ox.

Ⓐ. $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$. Ⓑ. $V=\int_a^b f^2(x)dx$. Ⓒ. $V=\pi\int_a^b f(x)dx$. Ⓓ. $V=\int_a^b |f(x)|dx$.

Câu 8: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox

Ⓐ. $V=4-2e$. Ⓑ. $V=(4-2e)\pi$. Ⓒ. $V=e^2-5$. Ⓓ. $V=(e^2-5)\pi$.

Câu 9: Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=3x-x^2, y=0$.

Ⓐ. $\frac{16}{15}$. Ⓑ. $\frac{16}{15}\pi$. Ⓒ. $\frac{81}{10}\pi$. Ⓓ. $\frac{16}{15\pi}$.

Câu 10: Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = x^3, y = 0, x = 1$.

Ⓐ. $\frac{\pi}{4}$. Ⓑ. $\frac{4\pi}{7}$. Ⓒ. $\frac{\pi}{2}$. Ⓓ. $\frac{\pi}{7}$.

Câu 11: Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $xy = 9, y = 0, x = 1, x = 3$.

Ⓐ. 54π. Ⓑ. 6π. Ⓒ. 12π. Ⓓ. 6.

Câu 12: Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = \cos(\pi x), y = 0, x = 0, x = \frac{1}{\pi}$.

Ⓐ. $\frac{\pi(\pi+2)}{8}$. Ⓑ. $\frac{\pi(\sin 2+2)}{4}$. Ⓒ. $\frac{\sin 2+2}{4}$. Ⓓ. $\frac{\pi+2}{8}$.

Câu 13: Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục hoành hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = \cos^2 x, y = 0, x = 0, x = \pi$.

Ⓐ. $\frac{\pi^2}{2}$. Ⓑ. $\frac{3\pi}{8}$. Ⓒ. $\frac{3\pi^2}{8}$. Ⓓ. $\frac{\pi}{2}$.

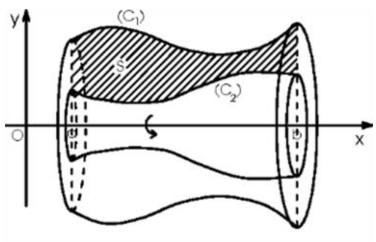
BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.C	3. A	4. B	5. A	6. A	7.A	8.D	9.C	10.D
11.A	12.B	13.C							

☑ Dạng ③: Bài toán Thể tích vật thể tròn xoay quanh trục Ox

Phương pháp:

• Tính thể tích vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi: $y = f(x)$; $y = g(x)$ quay quanh trục Ox.



• Phương pháp giải:

①. Giải phương trình: $f(x) = g(x)$ có nghiệm $x = a,\ x = b$

②. Khi đó thể tích cần tìm : $V = \pi\int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right|dx$

③. Casio:

A - Bài tập minh họa:

Câu 1: Thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x$ quay quanh trục Ox bằng

Ⓐ. $\pi\int_0^2 4x^2dx - \pi\int_0^2 x^4dx$.   Ⓑ. $\pi\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right)^2 dx$.

Ⓒ. $\pi\int_0^2 4x^2dx + \pi\int_0^2 x^4dx$.   Ⓓ. $\pi\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right)dx$.

Lời giải

➲Chọn B

- Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

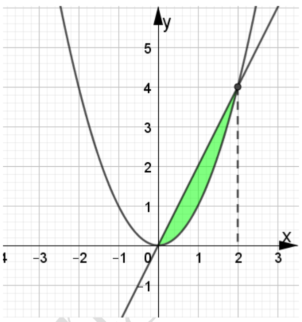
$x^2 = 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

•Thể tích của khối tròn xoay là $\pi\int_0^2 \left[(2x)^2 - \left(x^2\right)^2\right]\mathrm{d}x$

$= \pi\int_0^2 4x^2\mathrm{d}x - \pi\int_0^2 x^4\mathrm{d}x$

PP nhanh trắc nghiệm

•



Câu 2: Thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = x^2 - 2x$, $y = 4 - x^2$ khi nó quanh quanh trục hoành là:

Ⓐ. $\dfrac{421}{15}\pi$.   Ⓑ. 27π.   Ⓒ. $\dfrac{125}{3}\pi$.   Ⓓ. 30π.

Lời giải

➲Chọn B

- Xét phương trình hoành độ giao điểm:

- $x^2 - 2x = 4 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

- Do khi quay quanh trục hoành thì khối sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$, trục hoành, $x = 0; x = 2$ sẽ nằm trong khối sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4 - x^2$, trục hoành, $x = 0; x = 2$.

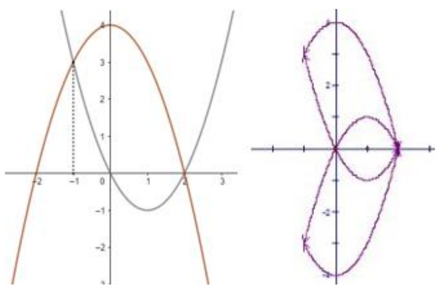
- Vậy thể tích cần tính bằng:

$V = \left(\pi\int_{-1}^0 \left(4 - x^2\right)^2 dx - \pi\int_{-1}^0 \left(x^2 - 2x\right)^2 dx\right) + \pi\int_0^2 \left(4 - x^2\right)^2 dx$

$= \dfrac{203}{15}\pi - \dfrac{38}{15}\pi + \dfrac{256}{15}\pi = \dfrac{421}{15}\pi$

PP nhanh trắc nghiệm

•

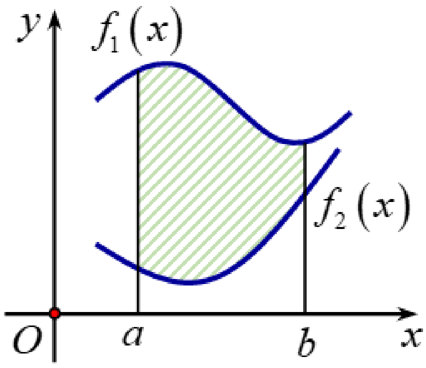


- Chú ý phần rất dễ thiếu phần

$V_1 = \pi\int_0^2 \left(4 - x^2\right)^2 dx$

B - Bài tập tham khảo rèn luyện:

Câu 1: Cho hình phẳng trong hình (phần tô đậm) quay quanh trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành được tính theo công thức nào?



Ⓐ. $V=\int_a^b\left[f_1^2(x)-f_2^2(x)\right]\mathrm{d}x$.

Ⓑ. $V=\pi\int_a^b\left[f_1^2(x)-f_2^2(x)\right]\mathrm{d}x$.

Ⓒ. $V=\pi\int_a^b\left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]\mathrm{d}x$.

Ⓓ. $V=\pi\int_a^b\left[f_1(x)-f_2(x)\right]^2\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

•Do $f_1(x)>f_2(x)\forall x\in(a;b)$ nên **Chọn B**

Câu 2: Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $d:y=2x$ quay xung quanh trục Ox.

Ⓐ. $\pi\int_0^2\left(x^2-2x\right)^2\mathrm{d}x$.

Ⓑ. $\pi\int_0^2 4x^2\mathrm{d}x-\pi\int_0^2 x^4\mathrm{d}x$.

Ⓒ. $\pi\int_0^2 4x^2\mathrm{d}x+\pi\int_0^2 x^4\mathrm{d}x$.

Ⓓ. $\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)\mathrm{d}x$.

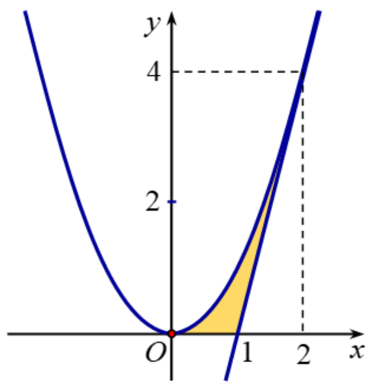
Lời giải

Chọn A

•Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

•Vậy thể tích khối tròn xoay được tính: $V=\pi\int_0^2\left(x^2-2x\right)^2\mathrm{d}x$.

Câu 3: Cho hình (H) giới hạn bởi trục hoành, đồ thị của một Parabol và một đường thẳng tiếp xúc với Parabol đó tại điểm $A(2;4)$, như hình vẽ bên. Thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi khi hình (H) quay quanh trục Ox bằng



Ⓐ. $\frac{16\pi}{15}$.

Ⓑ. $\frac{32\pi}{5}$.

Ⓒ. $\frac{2\pi}{3}$.

Ⓓ. $\frac{22\pi}{5}$.

Lời giải

Chọn A

•Parabol có đỉnh là gốc tọa độ như hình vẽ và đi qua $A(2;4)$ nên có phương trình $y=x^2$.

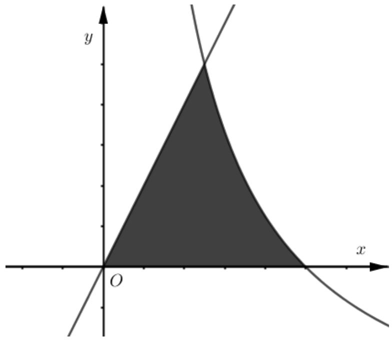
•Tiếp tuyến của Parabol đó tại $A(2;4)$ có phương trình là $y=4(x-2)+4=4x-4$.

•Suy ra thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là $V=\pi\int_0^2\left(x^2\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int_1^2(4x-4)^2\mathrm{d}x$.

$\int_0^2\left(x^2\right)^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2=\frac{32}{5}$; $\int_1^2(4x-4)^2\mathrm{d}x=16\int_1^2\left(x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x=16\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2+x\right)\right|_1^2=\frac{16}{3}$.

•Vậy $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int\limits_1^2\left(4x-4\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{32}{5}-\frac{16}{3}\right)=\frac{16\pi}{15}$.

Câu 4: Gọi (H) là hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=2x, y=\frac{1-x}{x}, y=0$ (phần tô đậm màu đen ở hình vẽ bên). Thể tích của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành bằng.



Ⓐ. $V=\pi\left(\frac{5}{3}-2\ln 2\right)$. Ⓑ. $V=\pi\left(\frac{5}{3}+2\ln 2\right)$.

Ⓒ. $V=\pi\left(2\ln 2-\frac{2}{3}\right)$. Ⓓ. $V=\pi\left(2\ln 2+\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn A

•Phương trình hoành độ giao điểm của $y=2x$ và $y=\frac{1-x}{x}$ là:

• $2x=\frac{1-x}{x}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\2x^2+x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

•Phương trình hoành độ giao điểm của $y=2x$ và $y=0$ là: $2x=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\2x^2+x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=0$.

•Phương trình hoành độ giao điểm của $y=0$ và $y=\frac{1-x}{x}$ là:

$\frac{1-x}{x}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\1-x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

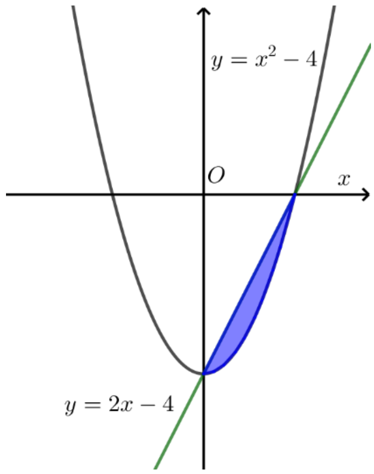
• $V=\pi\int\limits_0^{\frac{1}{2}}4x^2\mathrm{d}x+\pi\int\limits_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{1-x}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi.\frac{4x^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}+\pi\int\limits_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{1}{x}-1\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\pi+\pi\int\limits_{\frac{1}{2}}^1\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)\mathrm{d}x$

Câu 5: Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-4$, $y=2x-4$, $x=0$, $x=2$ quanh trục Ox.

Ⓐ. $\frac{32\pi}{5}$. Ⓑ. $\frac{32\pi}{7}$. Ⓒ. $\frac{32\pi}{15}$. Ⓓ. $\frac{22\pi}{5}$.

Lời giải

Chọn A



•Ta có $V_1=\pi\int\limits_0^2\left(x^2-4\right)^2\mathrm{d}x=\frac{256}{15}\pi$, $V_2=\pi\int\limits_0^2\left(2x-4\right)^2\mathrm{d}x=\frac{32}{3}\pi$.

•Vậy thể tích cần tìm $V=V_1-V_2=\frac{32\pi}{5}$.

Câu 6: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2$, $y=2x$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

Ⓐ. $\frac{32\pi}{15}$. Ⓑ. $\frac{64\pi}{15}$.

Ⓒ. $\frac{21\pi}{15}$.　　Ⓓ. $\frac{16\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn B

•Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

•Khi quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay giới hạn bởi $\begin{cases}y=x^2\\y=2x\\x=0\\x=2\end{cases}$.

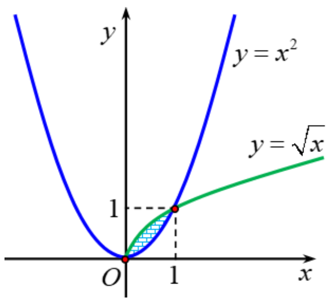
•Do đó thể tích của khối tròn xoay là: $V=\pi\int_0^2\left|\left(x^2\right)^2-(2x)^2\right|\mathrm{d}x=\frac{64\pi}{15}$.

Câu 7: Tính thể tích V của vật tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2$; $y=\sqrt{x}$ quanh trục Ox.

Ⓐ. $V=\frac{9\pi}{10}$.　　Ⓑ. $V=\frac{3\pi}{10}$.　　Ⓒ. $V=\frac{\pi}{10}$.　　Ⓓ. $V=\frac{7\pi}{10}$.

Lời giải

Chọn B



•Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=\sqrt{x}\Leftrightarrow x^4-x=0$
$\Leftrightarrow x(x-1)\left(x^2+x+1\right)=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$

Khi đó:

•Thể tích khối tròn xoay sinh bởi hình (H) là

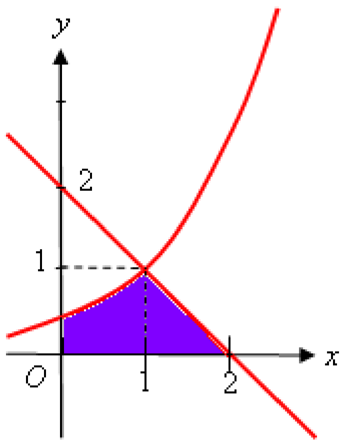
$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int_0^1\left(x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{10}$

Câu 8: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\mathrm{e}^{x-1}$, các trục tọa độ và phần đường thẳng $y=2-x$ với $x\ge1$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành.

Ⓐ. $V=\frac{1}{3}+\frac{\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}^2}$.　　Ⓑ. $V=\frac{\pi\left(5\mathrm{e}^2-3\right)}{6\mathrm{e}^2}$.　　Ⓒ. $V=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}\pi$.　　Ⓓ. $V=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{e}^2-1}{2\mathrm{e}^2}$.

Lời giải

Chọn B



•Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong $y=\mathrm{e}^{x-1}$ và đường thẳng $y=2-x$: $\mathrm{e}^{x-1}=2-x\Leftrightarrow x=1$. (Vì $y=\mathrm{e}^{x-1}$ là hàm đồng biến và $y=2-x$ là hàm nghịch biến trên tập xác định $\mathbb{R}$ nên phương trình có tối đa 1 nghiệm. Mặt khác $x=1$ thỏa mãn pt nên đó là nghiệm duy nhất của pt đó).

•Đường thẳng $y=2-x$ cắt trục hoành tại $x=2$.

$V=\pi\int_0^1\left(\mathrm{e}^{x-1}\right)^2\mathrm{d}x+\pi\int_1^2(2-x)^2\mathrm{d}x$

$=\pi\mathrm{e}^{2x-2}\Big|_0^1+\pi\left(\frac{x^3}{3}-2x+4\right)\Bigg|_1^2=\frac{\pi\left(5\mathrm{e}^2-1\right)}{6\mathrm{e}^2}$

Câu 9: Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y=x^2-4x+6$ và $y=-x^2-2x+6$.

Ⓐ. π.　　Ⓑ. $\pi-1$.　　Ⓒ. 3π.　　Ⓓ. 2π.

Lời giải

Chọn C

•Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2-4x+6=-x^2-2x+6 \Leftrightarrow 2x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

•Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị là

$$V=\pi\int_0^1\left|\left(x^2-4x-6\right)^2-\left(-x^2-2x+6\right)^2\right|\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left|-12x^3+36x^2-24x\right|\mathrm{d}x$$

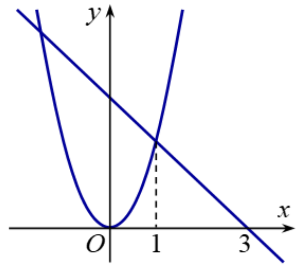
$$=\pi\left|\int_0^1\left(-12x^3+36x^2-24x\right)\mathrm{d}x\right|=\pi\left|\left(-3x^3+12x^3-12x^2\right)\Big|_0^1\right|=3\pi.$$

Câu 10: Gọi (H) là hình được giới hạn bởi nhánh parabol $y=2x^2$ (với $x\ge 0$), đường thẳng $y=-x+3$ và trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay tạo bởi hình (H) khi quay quanh trục Ox bằng

Ⓐ. $V=\dfrac{52\pi}{15}$. Ⓑ. $V=\dfrac{17\pi}{5}$. Ⓒ. $V=\dfrac{51\pi}{17}$. Ⓓ. $V=\dfrac{53\pi}{17}$.

Lời giải

Chọn A



•Phương trình hoành độ giao điểm: $2x^2=-x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

•Thể tích khối tròn xoay tạo bởi (H): $V=\pi\int_1^3(-x+3)^2\,\mathrm{d}x+\pi\int_0^1 4x^4\mathrm{d}x=\dfrac{52}{15}\pi$.

Câu 11: Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $x+y-2=0$; $y=\sqrt{x}$; $y=0$ quay quanh trục Ox bằng

Ⓐ. $\dfrac{5}{6}$. Ⓑ. $\dfrac{6\pi}{5}$. Ⓒ. $\dfrac{2\pi}{3}$. Ⓓ. $\dfrac{5\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn D

•Hình phẳng đã cho được chia làm 2 phần sau:

•Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$; $y=0$; $x=0$; $x=1$.

•Khi quay trục Ox phần 1 ta được khối tròn xoay có thể tích $V_1=\pi\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\pi.\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1=\dfrac{\pi}{2}$.

•Phần 2: Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2-x$; $y=0$; $x=1$; $x=2$.

•Khi quay trục Ox phần 2 ta được khối tròn xoay có thể tích

$$V_2=\pi\int_1^2(2-x)^2\,\mathrm{d}x=\pi.\frac{(x-2)^3}{3}\Big|_1^2=\frac{\pi}{3}.$$

•Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là $V=V_1+V_2=\dfrac{5\pi}{6}$.

Câu 12: Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=\sqrt{y}$, $y=-x+2$ và $x=0$ quay quanh trục Ox có giá trị là kết quả nào sau đây?

Ⓐ. $V=\dfrac{1}{3}\pi$. Ⓑ. $V=\dfrac{3}{2}\pi$. Ⓒ. $V=\dfrac{32}{15}\pi$. Ⓓ. $V=\dfrac{11}{6}\pi$.

Lời giải

Chọn C

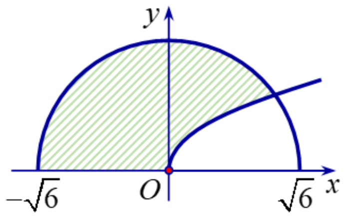
•Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $\begin{cases} x=\sqrt{y} \\ y=-x+2 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2\ (x\ge 0) \\ y=-x+2 \\ x=0 \end{cases}$

•Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2=-x+2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\ (nhaän) \\ x=-2\ (loaïi) \end{array}\right.$

•Thể tích vật tròn xoay sinh ra khi hình (H) quay quanh trục Ox là:

•$V=\pi\int_0^1\left((-x+2)^2-(x^2)^2\right)\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left(x^2-4x+4-x^4\right)\mathrm{d}x=\dfrac{32}{15}\pi$ (đvtt)

Câu 13: Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{6-x^2}$ $\left(-\sqrt{6}\le x\le\sqrt{6}\right)$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ bên). Tính thể tích V của vật thể tròn xoay sinh bởi khi quay hình phẳng D quanh trục Ox.



Ⓐ. $V=8\pi\sqrt{6}-2\pi$. Ⓑ. $V=8\pi\sqrt{6}+\dfrac{22\pi}{3}$. Ⓒ. $V=8\pi\sqrt{6}-\dfrac{22\pi}{3}$. Ⓓ. $V=4\pi\sqrt{6}+\dfrac{22\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn D

✧**Cách 1.** Cung tròn khi quay quanh Ox tạo thành một khối cầu có thể tích

$$V=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{6}\right)^3=8\pi\sqrt{6}.$$

•Thể tích nửa khối cầu là $V_1=4\pi\sqrt{6}$.

•Xét phương trình: $\sqrt{x}=\sqrt{6-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2+x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$.

•Thể tích khối tròn xoay có được khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\sqrt{x}$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{6-x^2}$, và hai đường thẳng $x=0,\ x=2$ quanh Ox là $V_2=\pi\int_0^2\left(6-x^2-x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{22\pi}{3}$.

•Vậy thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là $V=V_1+V_2=4\pi\sqrt{6}+\dfrac{22\pi}{3}$.

✧**Cách 2.** Cung tròn khi quay quanh Ox tạo thành một khối cầu có thể tích

$$V_1=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{6}\right)^3=8\pi\sqrt{6}.$$

•Xét phương trình: $\sqrt{x}=\sqrt{6-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2+x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$.

•Thể tích khối tròn xoay có được khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=\sqrt{x}$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{6-x^2}$ và đường thẳng $y=0$ quanh Ox là $V_2=\pi\int_0^2 x\mathrm{d}x+\pi\int_2^{\sqrt{6}}\left(6-x^2\right)\mathrm{d}x$

$=2\pi+\dfrac{12\sqrt{6}-28}{3}\pi=4\pi\sqrt{6}-\dfrac{22\pi}{3}$.

•Vậy thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là $V = V_1 - V_2 = 8\pi\sqrt{6} - \left(4\pi\sqrt{6} - \dfrac{22\pi}{3}\right) = 4\sqrt{6}\pi + \dfrac{22\pi}{3}$.

Câu 14: Tính thể tích vật thể tròn xoay tạo bởi phép quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$.

Ⓐ. $\dfrac{8\pi}{3}$. Ⓑ. $\dfrac{16\pi}{3}$. Ⓒ. 10π. Ⓓ. 8π.

Lời giải

Chọn B

•Ta có: $\begin{cases} 0 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 0 \\ 0 = x - 2 \Rightarrow x = 2 \\ \sqrt{x} = x - 2 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$

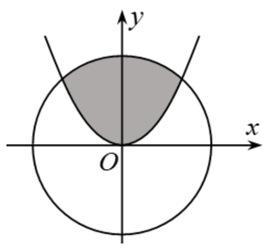
•Dựa vào hoành độ giao điểm của ba đường ta có diện tích hình phẳng gồm hai phần. Phần thứ nhất giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 0;\ x = 2$. Phần thứ hai giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ và $x = 2;\ x = 4$.

•Thể tích vật thể bằng:

$$V = \pi\int_0^2 \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x + \pi\int_2^4 \left|(x-2)^2 - \sqrt{x}^2\right| \mathrm{d}x = \pi\int_0^2 x\mathrm{d}x + \pi\int_2^4 \left(x - (x-2)^2\right)\mathrm{d}x$$

$$= \pi \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 + \pi\left.\left(\frac{x^2}{2} - \frac{(x-2)^3}{3}\right)\right|_2^4 = \frac{16\pi}{3}.$$

Câu 15: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2$ và đường tròn $x^2 + y^2 = 2$ (phần tô đậm trong hình bên). Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.



Ⓐ. $V = \dfrac{44\pi}{15}$. Ⓑ. $V = \dfrac{22\pi}{15}$.

Ⓒ. $V = \dfrac{5\pi}{3}$. Ⓓ. $V = \dfrac{\pi}{5}$.

Lời giải

Chọn A

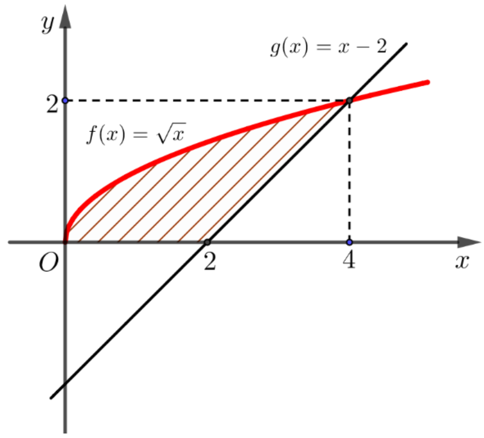
•Với $y = x^2$ thay vào phương trình đường tròn ta được $x^2 + x^4 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

•Hơn nữa $x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\sqrt{2 - x^2} \\ y = \sqrt{2 - x^2} \end{array}\right.$.

•Thể tích cần tìm chính là thể tích vật thể tròn xoay $(H_1): \begin{cases} y = \sqrt{2 - x^2} \\ x = -1 \\ x = 1 \\ Ox \end{cases}$ quay quanh Ox bỏ đi phần thể tích $(H_2): \begin{cases} y = x^2 \\ x = -1 \\ x = 1 \\ Ox \end{cases}$ quay quanh Ox.

•Do đó $V=\pi\left[\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{2-x^2}\right)^2 dx-\int_{-1}^{1}\left(x^2\right)^2 dx\right]=\frac{44\pi}{15}$.

Câu 16: Cho hình phẳng (H) (phần gạch chéo trong hình vẽ). Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình (H) quanh trục hoành.



Ⓐ. $V=8\pi$.

Ⓑ. $V=10\pi$.

Ⓒ. $V=\frac{8\pi}{3}$.

Ⓓ. $V=\frac{16\pi}{3}$.

Lời giải

Chọn D

•Gọi là hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=0$, $x=4$, $f(x)=\sqrt{x}$ và trục hoành.

(D_2) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=2$, $x=4$, $g(x)=x-2$ và trục hoành.

•Kí hiệu V_1, V_2 tương ứng là thể tích của các khối tròn xoay tạo thành khi quay (D_1), (D_2) quanh trục hoành.

•Khi đó, $V=V_1-V_2=\pi\int_0^4 f^2(x)dx-\pi\int_2^4 g^2(x)dx=\pi\int_0^4 xdx-\pi\int_2^4 (x-2)^2 dx=8\pi-\frac{8\pi}{3}=\frac{16\pi}{3}$.

Câu 17: Thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn $(C): x^2+(y-3)^2=1$ xung quanh trục hoành là

Ⓐ. $6\pi^2$.

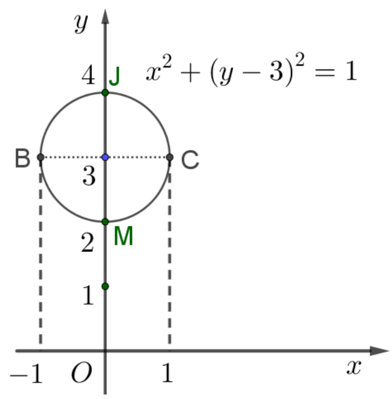
Ⓑ. $6\pi^3$.

Ⓒ. $3\pi^2$.

Ⓓ. 6π.

Lời giải

Chọn A



$(C): x^2+(y-3)^2=1 \Leftrightarrow (y-3)^2=1-x^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-3=\sqrt{1-x^2} \\ y-3=-\sqrt{1-x^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3+\sqrt{1-x^2} \\ y=3-\sqrt{1-x^2} \end{array}\right.$

•Thể tích V của khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường tròn

$(C): x^2+(y-3)^2=1$ xung quanh trục hoành là

•$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(3+\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx-\pi\int_{-1}^{1}\left(3-\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx=\pi.6\pi=6\pi^2$.