

TÀI LIỆU THAM KHẢO TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

1988
 $\cap$ *Gac Ma*
14.03

**CHUYÊN ĐỀ
PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH**

**LÝ THUYẾT SỬ DỤNG ĐẠI LƯỢNG LIÊN HỢP – TRỰC CĂN THỨC
– HỆ PHƯƠNG TRÌNH TẠM THỜI (PHẦN 2)**

TRUNG ĐOÀN TRẦN NHẬT DUẬT – QUÂN ĐOÀN BỘ BINH

**CHỦ ĐẠO: SỬ DỤNG ĐẠI LƯỢNG LIÊN HỢP – TRỰC CĂN THỨC
– HỆ PHƯƠNG TRÌNH TẠM THỜI ĐỐI VỚI BÀI TOÁN CẤP BẬC HAI.**

- **XÁC ĐỊNH NGHIỆM – LIÊN HỢP HÀNG SỐ.**
- **ĐÁNH GIÁ – XỬ LÝ HỆ QUẢ SAU LIÊN HỢP.**
- **BÀI TOÁN NHIỀU CÁCH GIẢI.**

CREATED BY GIANG SƠN (FACEBOOK); GACMA1431988@GMAIL.COM (GMAIL)

THỦ ĐÔ HÀ NỘI – MÙA THU 2014

“Non sông Việt Nam có trở nên tươi đẹp hay không, dân tộc Việt Nam có bước tới đài vinh quang để sánh vai với các cường quốc năm châu được hay không, chính là nhờ một phần lớn ở công học tập của các em”

(Trích thư Chủ tịch Hồ Chí Minh).



*“Chân phải bước tới cha,
Chân trái bước tới mẹ,
Một bước chạm tiếng nói,
Hai bước tới tiếng cười...”*

(Nói với con – Y Phương).

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

LÝ THUYẾT SỬ DỤNG ĐẠI LƯỢNG LIÊN HỢP – TRỰC CĂN THỨC – HỆ TẠM THỜI (PHẦN 2)

TRUNG ĐOÀN TRẦN NHẬT DUẬT – QUÂN ĐOÀN BỘ BINH

Trong chương trình Toán học phổ thông nước ta, cụ thể là chương trình Đại số sơ cấp, phương trình và bất phương trình là một nội dung quan trọng, phổ biến trên nhiều dạng toán xuyên suốt các cấp học, cũng là bộ phận thường thấy trong các kỳ thi kiểm tra chất lượng học kỳ, thi tuyển sinh lớp 10 THPT, thi học sinh giỏi môn Toán các cấp và kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng với hình thức hết sức phong phú, đa dạng. Mặc dù đây là một đề tài quen thuộc, chính thống nhưng không vì thế mà giảm đi phần thú vị, nhiều bài toán cơ bản tăng dần đến mức khó thậm chí rất khó, với các biến đổi đẹp kết hợp nhiều kiến thức, kỹ năng vẫn làm khó nhiều bạn học sinh THCS, THPT. Ngoài phương trình đại số bậc cao, phương trình phân thức hữu tỷ thì phương trình chứa căn (còn gọi là phương trình vô tỷ) đang được đông đảo các bạn học sinh, các thầy cô giáo và các chuyên gia Toán phổ thông quan tâm sâu sắc. Chương trình Toán Đại số lớp 9 THCS bước đầu giới thiệu các phép toán với căn thức, kể từ đó căn thức xuất hiện hầu hết trong các vấn đề đại số, hình học, lượng giác và xuyên suốt chương trình Toán THPT. Sự đa dạng về hình thức của lớp bài toán căn thức đặt ra yêu cầu cấp thiết là làm thế nào để đơn giản hóa, thực tế các phương pháp giải, kỹ năng, mẹo mực đã hình thành, đi vào hệ thống. Về cơ bản để làm việc với lớp phương trình, bất phương trình vô tỷ chúng ta ưu tiên khử hoặc giảm các căn thức phức tạp của bài toán.

Phương pháp sử dụng biến đổi tương đương – nâng cao lũy thừa là một phương pháp cơ bản, đơn giản nhất, các bạn đã bước đầu làm quen thông qua 7 tiêu mục. Hầu hết các phương pháp khác đều ít nhiều quy về dạng cơ bản nâng lũy thừa, điều quan trọng là quá trình thu gọn bài toán. Tiếp tục dựa trên nền tảng ấy, mang tính kế thừa và phát huy thêm một bậc, phương pháp sử dụng Đại lượng liên hợp – Trục căn thức – Hệ tạm thời là một phương pháp mạnh và có nhiều ưu việt, có hiệu lực với nhiều lớp phương trình, bất phương trình. Tiếp theo phần 1, tài liệu này trân trọng giới thiệu và gửi tới toàn thể bạn đọc Lý thuyết sử dụng đại lượng liên hợp – trục căn thức – hệ tạm thời (phần 2). Nội dung chủ đạo là các ví dụ minh họa mở đầu cho các bài toán liên quan đến xác định nghiệm (trường hợp 1 nghiệm nguyên – nghiệm hữu tỷ), kỹ thuật liên hợp hằng số và xử lý, đánh giá phương trình hệ quả, tạm thời dừng chân với lớp bài toán chứa căn bậc hai.

Tài liệu nhỏ được viết theo trình tự kiến thức tăng dần, phù hợp với các bạn học sinh THCS (lớp 9) ôn thi vào lớp 10 THPT, các bạn học sinh THPT thi học sinh giỏi Toán các cấp và luyện thi vào hệ đại học, cao đẳng, cao hơn là tài liệu tham khảo dành cho các thầy cô giáo và các bạn yêu Toán khác.

I. KIẾN THỨC – KỸ NĂNG CHUẨN BỊ

1. Kỹ năng nhân, chia đa thức, phân tích đa thức thành nhân tử, biến đổi phân thức đại số và căn thức.
2. Kỹ năng biến đổi tương đương, nâng lũy thừa, sử dụng lượng liên hợp, phân tích hằng đẳng thức.
3. Nắm vững lý thuyết bất phương trình, dấu nhị thức bậc nhất, dấu tam thức bậc hai.
4. Thực hành giải phương trình, bất phương trình bậc hai, dạng đại số bậc cao, phân thức hữu tỷ.
5. Sử dụng thành thạo các ký hiệu logic trong phạm vi toán phổ thông.

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH VÀ KINH NGHIỆM THAO TÁC

Bài toán 1. Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2x+3+2\sqrt{x^2+3x}=9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x}=3-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2+3x=x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 0$.

Nhận xét $x > 1 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x+3} > 1 + \sqrt{4} = 3$ và $x < 1 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x+3} < 1 + \sqrt{4} = 3$.

Hai trường hợp trên đều vô nghiệm. Hơn nữa $x=1$ nghiệm đúng phương trình.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{x+3} = 3 &\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 + \sqrt{x+3} - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} = 0 \Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Nhận xét $\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} > 0, \forall x \geq 0$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

Bài toán 1 mở đầu là bài toán giải phương trình căn thức hết sức cơ bản, quen thuộc với học sinh lớp 9 THCS. Các bạn có thể trình bày bài toán theo ba định hướng, lời giải 1 sử dụng biến đổi tương đương thông thường, lời giải 2 sử dụng đánh giá – bất đẳng thức với chủ ý phán đoán nghiệm duy nhất $x=1$. Trọng tâm tài liệu xoay quanh lời giải 3, sử dụng đại lượng liên hợp cũng với thao tác tiền phương nhằm nghiệm $x=1$. Chú ý đẳng thức

$$a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b} \Leftrightarrow a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$$

Bài toán 2. Giải phương trình $\sqrt{3x+1} + 2\sqrt{x+3} = 6 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3x+1+4x+12+4\sqrt{3x^2+10x+3} &= 36 \Leftrightarrow 4\sqrt{3x^2+10x+3} = 23-7x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 23-7x \geq 0 \\ 16(3x^2+10x+3) = 49x^2-322x+529 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{23}{7} \\ x^2-482x+481=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}\sqrt{3x+1}-2+2\sqrt{x+3}-4=0 &\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}-2+2(\sqrt{x+3}-2)=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3x-3}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{2(x-1)}{\sqrt{x+3}+2}=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{2}{\sqrt{x+3}+2}\right)=0 \quad (1)\end{aligned}$$

Ta có $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}+\frac{2}{\sqrt{x+3}+2}>0, \forall x \geq -\frac{1}{3}$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Nhận xét.

Bài toán 2 ngoài hai lời giải trên còn một lời giải sử dụng đánh giá nghiệm duy nhất tương tự lời giải 2 bài toán 1, tác giả xin không trình bày. Phương án sử dụng biến đổi tương đương trong trường hợp này hoàn toàn khả thi nhưng xem chừng cần làm việc với những con số “khủng bố”, không tỏ ra tối ưu. Trong khi đó, phương án sử dụng đại lượng liên hợp phát huy tác dụng và cho lời giải 2 ngắn gọn, nhẹ nhàng.

Bài toán 3. Giải phương trình $7\sqrt{4x-3}-4\sqrt{2-x}=3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{3}{4} \leq x \leq 2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}7\sqrt{4x-3}-7+4-4\sqrt{2-x}=0 &\Leftrightarrow 7(\sqrt{4x-3}-1)+4(1-\sqrt{2-x})=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{7(4x-4)}{\sqrt{4x-3}+1}+\frac{4(x-1)}{1+\sqrt{2-x}}=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{28}{\sqrt{4x-3}+1}+\frac{4}{1+\sqrt{2-x}}\right)=0 \quad (1)\end{aligned}$$

Để ý rằng $\frac{28}{\sqrt{4x-3}+1}+\frac{4}{1+\sqrt{2-x}}>0, \forall x \in \left[\frac{3}{4}; 2\right]$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x=1$.

Bài toán 4. Giải phương trình $17\sqrt{6x-5}-6\sqrt{17-16x}=11 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{5}{6} \leq x \leq \frac{17}{6}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}17\sqrt{6x-5}-17+6-6\sqrt{17-16x}=0 &\Leftrightarrow 17(\sqrt{6x-5}-1)+6(1-\sqrt{17-16x})=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{17(6x-6)}{\sqrt{6x-5}+1}+\frac{6(16x-16)}{1+\sqrt{17-16x}}=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{17.6}{\sqrt{6x-5}+1}+\frac{6.16}{1+\sqrt{17-16x}}\right)=0 \quad (1)\end{aligned}$$

Nhận xét $\frac{17.6}{\sqrt{6x-5}+1}+\frac{6.16}{1+\sqrt{17-16x}}>0, \forall x \in \left[\frac{5}{6}; \frac{17}{6}\right]$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x=1$.

Nhận xét.

Rõ ràng các bài toán 3 và 4 hình thức tuy gọn gàng nhưng các hệ số rất lớn, vô hình chung tạo ra chướng ngại trong thao tác tính toán của chúng ta, thậm chí rất dễ gây nhầm lẫn và nhầm lẫn, đặc biệt nếu sử dụng phương án biến đổi tương đương, nâng lũy thừa thì hoàn toàn không phải một phương cách tối ưu, rất dễ gây mất sức, cần những cơ bắp, guồng máy cấp độ phù hợp! Vì lý do này, khi tiếp cận với phương trình vô tỷ nói chung, đầu tiên các bạn có thể liên tưởng tới các bước đoán biết nghiệm và sử dụng đại lượng liên hợp hợp lý, giảm thiểu những tính toán công kênh, nhọc nhằn.

Sau đây chúng ta tiếp tục làm việc với các bài toán chứa ba căn thức độc lập trở lên, thực tình mà nói, lớp bài toán này có muốn nâng lũy thừa cũng “lực bất tòng tâm”.

Bài toán 5. Giải phương trình $\sqrt{x} + 2\sqrt{4x+5} + 3\sqrt{x+3} = 13 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x} - 1 + 2(\sqrt{4x+5} - 3) + 3(\sqrt{x+3} - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2(4x-4)}{\sqrt{4x+5}+3} + \frac{3(x-1)}{\sqrt{x+3}+2} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{8}{\sqrt{4x+5}+3} + \frac{3}{\sqrt{x+3}+2} \right) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Rõ ràng $\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{8}{\sqrt{4x+5}+3} + \frac{3}{\sqrt{x+3}+2} > 0, \forall x \geq 0$ nên (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 0$.

Xét $x = 1$, phương trình đã cho nghiệm đúng.

Xét $x > 1 \Rightarrow \sqrt{x} + 2\sqrt{4x+5} + 3\sqrt{x+3} > 1 + 2\sqrt{9} + 3\sqrt{4} = 13$, loại.

Xét $x < 1 \Rightarrow \sqrt{x} + 2\sqrt{4x+5} + 3\sqrt{x+3} < 1 + 2\sqrt{9} + 3\sqrt{4} = 13$, loại.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Nhận xét.

Nhận thấy $x = 1$ là một nghiệm của phương trình đã cho nên ta chủ định sử dụng đại lượng liên hợp với các hằng số dương a, b, c như sau

$$\begin{aligned} & \sqrt{x} - a + 2(\sqrt{4x+5} - b) + 3(\sqrt{x+3} - c) + a + 2b + 3c = 13 \\ \Leftrightarrow & \frac{x-a^2}{\sqrt{x}+a} + \frac{2(4x+5-b^2)}{\sqrt{4x+5}+b} + \frac{3(x+3-c^2)}{\sqrt{x+3}+c} + a + 2b + 3c - 13 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{f(x)}{\sqrt{x}+a} + \frac{g(x)}{\sqrt{4x+5}+b} + \frac{h(x)}{\sqrt{x+3}+c} + a + 2b + 3c - 13 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Để } x = 1 \text{ nghiệm đúng phương trình thì } \begin{cases} f(1) = g(1) = h(1) = 0 \\ a + 2b + 3c - 13 = 0 \\ a > 0; b > 0; c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a^2 = 9 - b^2 = 4 - c^2 = 0 \\ a + 2b + 3c = 13 \\ a > 0; b > 0; c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 2 \end{cases}$$

Từ đó các bạn có phương án liên hợp như lời giải 1 phía trên.

Bài toán 6. Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{x+3} + x = 4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 0$.

Dễ thấy rằng $x = 1$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Nếu $0 \leq x < 1 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x+3} + x < 1 + \sqrt{4} + 1 = 4$, trường hợp này vô nghiệm.

Nếu $x > 1 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x+3} + x > 1 + \sqrt{4} + 1 = 4$, trường hợp này vô nghiệm.

Do đó phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x} - 1 + \sqrt{x+3} - 2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} + 1 \right) = 0 \quad (1).$$

Để thấy $\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} + 1 > 0, \forall x \geq 0$ nên (1) có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Nhận xét.

Lời giải 1 bài toán trên sử dụng phương pháp đánh giá – bất đẳng thức là ngắn gọn và đẹp mắt hơn cả. Tuy nhiên để làm được điều này, độc giả cần có cái nhìn lạc quan bằng con mắt bất đẳng thức, khả năng liên hệ và tổng hợp kiến thức ở mức độ cao, rõ ràng không thể nhanh chóng tích lũy một sớm một chiều mà hình thành dần dần, từng bước, tiệm cận. Lời giải 2 chính là nội dung trọng tâm tài liệu, sử dụng đại lượng liên hợp – trực căn thức hết sức nhẹ nhàng, cơ bản. Để thấy rằng phép liên hợp không xảy ra trực tiếp giữa các căn với nhau mà là có sự xuất hiện của hằng số vắng, để có thể thao tác được các bạn bắt buộc phải đoán nghiệm nguyên, nghiệm hữu tỷ của phương trình. Xin được phân tích sơ lược như sau

Giả sử có một nghiệm nguyên, nghiệm hữu tỷ nào đó. Với điều kiện $x \geq 0$ ta phán đoán các nghiệm từ 0 trở lên, và nghiệm của phương trình sẽ “đẹp đẽ” khi các biểu thức trong căn thức có giá trị là số chính phương (bình phương đúng của một số nguyên), vì khi đó khai phương căn thức sẽ thu được một số nguyên. Thử trực tiếp ta thấy ngay $x = 1$ là nghiệm của phương trình ban đầu.

Như vậy ta quyết định phương án liên hợp để tạo lập nhân tử dạng $k(x-1)$, thậm chí $f(x) \cdot (x-1)$. Làm thế nào để xử lý được vấn đề này, một câu hỏi rất ý nghĩa và bản khoăn đối với các bạn học sinh bước đầu làm quen với phương trình dạng này.

Bài toán chỉ chứa căn thức bậc hai nên trước hết xin nhắc lại phép liên hợp $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b} \Leftrightarrow a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$.

Như vậy sẽ xảy ra hai phương án liên hợp, thực hiện thông qua các cách thêm bớt hạng tử sau

Phương án 1.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} + 2 + x - 1 &= 6 \\ \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} + \frac{x+3-4}{\sqrt{x+3}-2} + x-1 &= 6 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} + \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} + x-1 = 6 \\ \Leftrightarrow (x-1) \left[\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x+3}-2} + 1 \right] &= 6 \quad [*] \end{aligned}$$

Đại lượng liên hợp đã thiết lập nhân tử chung, tuy nhiên [*] là một phương trình tích “thù địch” vì về phải không hề bằng 0, gây cản trở và khó khăn hết sức cho chúng ta. Mặt khác biểu thức $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x+3}-2} + 1$ còn có dạng hiệu dưới các mẫu thức, ý tưởng đánh giá [*] cũng sẽ vụt tắt ngay trong trứng nước. Đó là chưa kể đến trường hợp nếu $x = 1$ là nghiệm thì các hiệu trong $f(x)$ cũng như toàn bộ phép biến đổi phía trên của nó vô nghĩa, do các phân thức không xác định! Rõ ràng phương án 1 đã bị phá sản hoàn toàn.

Phương án 2.

$$\begin{aligned} \sqrt{x}-1 + \sqrt{x+3}-2 + x-1 &= 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x+3-4}{\sqrt{x+3}+2} + x-1 = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} + x-1 &= 0 \Leftrightarrow (x-1) \left[\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} + 1 \right] = 0 \quad [**] \end{aligned}$$

Phương trình [**] lúc này đã trở thành phương trình tích với một vế bằng 0. Các biểu thức dưới mẫu thức cũng đã xác định, một sự yên tâm thực sự. Hơn nữa chúng ta có thể dễ dàng đánh giá biểu thức phía trong ngoặc vuông, mà không cần tư duy quá nhiều, để chặt chẽ hơn các bạn nên lồng ghép điều kiện xác định ban đầu như sau

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} + 1 > 0, \forall x \geq 0.$$

Với thủ pháp cơ bản này, hy vọng các bạn sẽ cảm thấy nhẹ nhàng với các bài toán tiếp theo.

Bài toán 7. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + 3\sqrt{3x+7} + \sqrt{2x+5} = 5 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{7}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+3} - 1 + 3\sqrt{3x+7} - 3 + \sqrt{2x+5} - 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x+3}+1} + \frac{3(3x+6)}{\sqrt{3x+7}+1} + \frac{2x+4}{\sqrt{2x+5}+1} = 0 \\ & \Leftrightarrow (x+2) \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+1} + \frac{9}{\sqrt{3x+7}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x+5}+1} \right) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $\frac{1}{\sqrt{x+3}+1} + \frac{9}{\sqrt{3x+7}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x+5}+1} > 0, \forall x \geq -\frac{7}{3}$ nên $(1) \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-2$.

Bài toán 8. Giải phương trình $17\sqrt{x+5} - 6\sqrt{5-x} + \sqrt{2x+1} = 48 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{1}{2} \leq x \leq 5$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 17\sqrt{x+5} - 17.3 + 6 - 6\sqrt{5-x} + \sqrt{2x+1} - 3 = 0 \\ & \Leftrightarrow 17(\sqrt{x+5} - 3) + 6(1 - \sqrt{5-x}) + \sqrt{2x+1} - 3 = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{17(x-4)}{\sqrt{x+5}+3} + \frac{6(x-4)}{1+\sqrt{5-x}} + \frac{2x-8}{\sqrt{2x+1}+3} = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-4) \left(\frac{17}{\sqrt{x+5}+3} + \frac{6}{1+\sqrt{5-x}} + \frac{2}{\sqrt{2x+1}+3} \right) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $\frac{17}{\sqrt{x+5}+3} + \frac{6}{1+\sqrt{5-x}} + \frac{2}{\sqrt{2x+1}+3} > 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}; 5\right]$ nên $(1) \Leftrightarrow x-4=0 \Leftrightarrow x=4$.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=4$.

Bài toán 9. Giải bất phương trình $3\sqrt{2x+1} - 5\sqrt{7-4x} + \sqrt{6x+7} > 5 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{4}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{2x+1} - 6 + 5 - 5\sqrt{7-4x} + \sqrt{6x+7} - 4 > 0 \\ & \Leftrightarrow 3(\sqrt{2x+1} - 2) + 5(1 - \sqrt{7-4x}) + \sqrt{6x+7} - 4 > 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{3(2x-3)}{\sqrt{2x+1}+2} + \frac{5(4x-6)}{1+\sqrt{7-4x}} + \frac{6x-9}{\sqrt{6x+7}+4} > 0 \\ & \Leftrightarrow (2x-3) \left(\frac{3}{\sqrt{2x+1}+2} + \frac{10}{1+\sqrt{7-4x}} + \frac{3}{\sqrt{6x+7}+4} \right) > 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $\frac{3}{\sqrt{2x+1}+2} + \frac{10}{1+\sqrt{7-4x}} + \frac{3}{\sqrt{6x+7}+4} > 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right]$ nên $(1) \Leftrightarrow 2x-3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$.

Kết luận bất phương trình có nghiệm $S = \left(\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right]$.

Bài toán 10. Giải phương trình $\sqrt{x-5} + 2\sqrt{x+3} + 3\sqrt{2x-3} + 7\sqrt{2x+4} = 44 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 5$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-5} - 1 + 2\sqrt{x+3} - 6 + 3\sqrt{2x-3} - 9 + 7\sqrt{2x+4} - 28 = 0 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{x-5} - 1 + 2(\sqrt{x+3} - 3) + 7(\sqrt{2x+4} - 4) = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{x-6}{\sqrt{x-5}+1} + \frac{2(x-6)}{\sqrt{x+3}+3} + \frac{7(2x-12)}{\sqrt{2x+4}+4} = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-6) \left(\frac{1}{\sqrt{x-5}+1} + \frac{2}{\sqrt{x+3}+3} + \frac{14}{\sqrt{2x+4}+4} \right) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $\frac{1}{\sqrt{x-5}+1} + \frac{2}{\sqrt{x+3}+3} + \frac{14}{\sqrt{2x+4}+4} > 0, \forall x \geq 5$ nên $(1) \Leftrightarrow x-6=0 \Leftrightarrow x=6$.

So sánh với điều kiện ta kết luận nghiệm $x=6$.

Bài toán 11. Giải phương trình $\sqrt{3x+1} + 2\sqrt{5x+4} + 6 = 3\sqrt{7-3x} + 4\sqrt{9-5x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{9}{5}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x+1} - 2 + 2\sqrt{5x+4} - 2.3 + 3.2 - 3\sqrt{7-3x} + 4.2 - 4\sqrt{9-5x} = 0 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} - 2 + 2(\sqrt{5x+4} - 3) + 3(2 - \sqrt{7-3x}) + 4(2 - \sqrt{9-5x}) = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{3x-3}{\sqrt{3x+1}+2} + \frac{2(5x-5)}{\sqrt{5x+4}+3} + \frac{3(3x-3)}{2+\sqrt{7-3x}} + \frac{4(5x-5)}{2+\sqrt{9-5x}} = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} + \frac{10}{\sqrt{5x+4}+3} + \frac{9}{2+\sqrt{7-3x}} + \frac{20}{2+\sqrt{9-5x}} \right) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Chú ý rằng $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} + \frac{10}{\sqrt{5x+4}+3} + \frac{9}{2+\sqrt{7-3x}} + \frac{20}{2+\sqrt{9-5x}} > 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{9}{5}\right]$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 12. Giải bất phương trình $4\sqrt{x+2} + 5\sqrt{4x+1} - 6\sqrt{3-x} - 7\sqrt{5-2x} \geq 10 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{1}{4} \leq x \leq 3$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 4\sqrt{x+2} - 4.2 + 5\sqrt{4x+1} - 5.3 + 6 - 6\sqrt{3-x} + 7 - 7\sqrt{5-2x} \geq 0 \\ & \Leftrightarrow 4(\sqrt{x+2} - 2) + 5(\sqrt{4x+1} - 3) + 6(1 - \sqrt{3-x}) + 7(1 - \sqrt{5-2x}) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{4(x-2)}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{5(4x-8)}{\sqrt{4x+1}+3} + \frac{6(x-2)}{1+\sqrt{3-x}} + \frac{7(2x-4)}{1+\sqrt{5-2x}} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{4}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{20}{\sqrt{4x+1}+3} + \frac{6}{1+\sqrt{3-x}} + \frac{14}{1+\sqrt{5-2x}} \right) \geq 0 \quad (1).$$

Ta chú ý $\frac{4}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{20}{\sqrt{4x+1}+3} + \frac{6}{1+\sqrt{3-x}} + \frac{14}{1+\sqrt{5-2x}} > 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{4}; 3\right]$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $S = [2; 3]$.

Bài toán 13. Giải bất phương trình $3\sqrt{x+1} + 4\sqrt{2x+3} + 6\sqrt{3x-8} < 17\sqrt{4-x} + 6\sqrt{10-3x} + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{8}{3} \leq x \leq \frac{10}{3}$.

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{x+1} - 3.2 + 4\sqrt{2x+3} - 4.3 + 6\sqrt{3x-8} - 6 + 17 - 17\sqrt{4-x} + 6 - 6\sqrt{10-3x} < 0 \\ & \Leftrightarrow 3(\sqrt{x+1} - 2) + 4(\sqrt{2x+3} - 3) + 6(\sqrt{3x-8} - 1) + 17(1 - \sqrt{4-x}) + 6(1 - \sqrt{10-3x}) < 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{3(x-3)}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4(2x-6)}{\sqrt{2x+3}+3} + \frac{6(3x-9)}{\sqrt{3x-8}+1} + \frac{17(x-3)}{1+\sqrt{4-x}} + \frac{6(3x-9)}{1+\sqrt{10-3x}} < 0 \\ & \Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{3}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{8}{\sqrt{2x+3}+3} + \frac{18}{\sqrt{3x-8}+1} + \frac{17}{1+\sqrt{4-x}} + \frac{18}{1+\sqrt{10-3x}} \right) < 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Để ý $\frac{3}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{8}{\sqrt{2x+3}+3} + \frac{18}{\sqrt{3x-8}+1} + \frac{17}{1+\sqrt{4-x}} + \frac{18}{1+\sqrt{10-3x}} > 0, \forall x \in \left[\frac{8}{3}; \frac{10}{3}\right]$ nên (1) $\Leftrightarrow x-3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$.

Kết luận bất phương trình đề bài có nghiệm $S = \left[\frac{8}{3}; 3\right)$.

Bài toán 14. Giải phương trình $\sqrt{x+2} + 5\sqrt{x+7} + 4x = 25 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+2} - 2 + 5(\sqrt{x+7} - 3) + 4x - 8 = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{5(x-2)}{\sqrt{x+7}+3} + 4(x-2) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{5}{\sqrt{x+7}+3} + 4 \right) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Để thấy $\frac{1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{5}{\sqrt{x+7}+3} + 4 > 0, \forall x \geq -2$ nên (1) có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x = 2$.

Nhận xét.

Nhận xét $x = 2$ là nghiệm của phương trình đã cho. Do đó ta chủ định liên hợp với các hằng số dương a và b

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+2} - a + 5\sqrt{x+7} - 5b + 4x + a + 5b = 25 \\ & \Leftrightarrow \frac{x+2-a^2}{\sqrt{x+2}+a} + 5 \cdot \frac{x+7-b^2}{\sqrt{x+7}+b} + 4x + a + 5b - 25 = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\sqrt{x+2}+a} + 5 \cdot \frac{g(x)}{\sqrt{x+7}+b} + h(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Rõ ràng cần có } \begin{cases} f(2)=0 \\ g(2)=0 \\ h(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+2-a^2=0 \\ 2+7-b^2=0 \\ a+5b-17=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=4 \\ b^2=9 \\ a+5b=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$$

Nói cách khác các giá trị a và b cần tìm chính là giá trị của căn thức tại giá trị nghiệm.

Bài toán 15. Giải phương trình $4\sqrt{x+1}+3\sqrt{2x+3}+14x=59 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 4(\sqrt{x+1}-2)+3(\sqrt{2x+3}-3)+14x-42=0 \\ & \Leftrightarrow \frac{4(x-3)}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{6(x-3)}{\sqrt{2x+3}+3}+14(x-3)=0 \\ & \Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{3}{\sqrt{2x+3}+3}+7\right)=0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $\frac{2}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{3}{\sqrt{2x+3}+3}+7 > 0, \forall x \geq -1$ nên $(1) \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$.

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x=3$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -1$.

Xét trường hợp $x > 3 \Rightarrow 4\sqrt{x+1}+3\sqrt{2x+3}+14x > 4\sqrt{4}+3\sqrt{9}+14.3=59$.

Xét trường hợp $-1 \leq x < 3 \Rightarrow 4\sqrt{x+1}+3\sqrt{2x+3}+14x < 4\sqrt{4}+3\sqrt{9}+14.3=59$.

Xét trường hợp $x=3$, phương trình nghiệm đúng.

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x=3$.

Nhận xét.

Đối với lời giải 1 sử dụng phương án liên hợp, nhằm được nghiệm của phương trình bằng 3 nên

$$\begin{aligned} & 4\sqrt{x+1}-4a+3\sqrt{2x+3}-3b+14x+4a+3b-59=0 \\ & \Leftrightarrow \frac{4(x+1-a^2)}{\sqrt{x+1}+a}+\frac{3(2x+3-b^2)}{\sqrt{2x+3}+b}+14x+4a+3b-59=0 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(x)=x+1-a^2 \\ g(x)=2x+3-b^2 \\ h(x)=14x+4a+3b-59 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(3)=0 \\ g(3)=0 \\ h(3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$$

Bài toán 16. Giải phương trình $6\sqrt{x+2}+7\sqrt{3x-2}+3\sqrt{2x+5}+x=37 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 6(\sqrt{x+2}-2)+7(\sqrt{3x-2}-2)+3(\sqrt{2x+5}-3)+x-3=0 \\ & \Leftrightarrow \frac{6(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{7(3x-6)}{\sqrt{3x-2}+2}+\frac{3(2x-4)}{\sqrt{2x+5}+3}+x-3=0 \\ & \Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{6}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{21}{\sqrt{3x-2}+2}+\frac{6}{\sqrt{2x+5}+3}+1\right)=0 \quad (1) \end{aligned}$$

Dễ thấy $\frac{6}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{21}{\sqrt{3x-2}+2} + \frac{6}{\sqrt{2x+5}+3} + 1 > 0, \forall x \geq \frac{2}{3}$ nên (1) $\Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Đổi chiều điều kiện ta thu được nghiệm $x=2$.

Bài toán 17. Giải phương trình $3\sqrt{3x+1}+5\sqrt{x}+7\sqrt{4x-3}+2x=20 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 3(\sqrt{3x+1}-2)+5(\sqrt{x}-1)+7(\sqrt{4x-3}-1)+2x-2=0 \\ \Leftrightarrow & \frac{3(3x-3)}{\sqrt{3x+1}+2} + \frac{5(x-1)}{\sqrt{x}+1} + \frac{7(4x-4)}{\sqrt{4x-3}+1} + 2(x-1)=0 \\ \Leftrightarrow & (x-1)\left(\frac{9}{\sqrt{3x+1}+2} + \frac{5}{\sqrt{x}+1} + \frac{28}{\sqrt{4x-3}+1} + 2\right)=0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận thấy $\frac{9}{\sqrt{3x+1}+2} + \frac{5}{\sqrt{x}+1} + \frac{28}{\sqrt{4x-3}+1} + 2 > 0, \forall x \geq \frac{3}{4}$ nên (1) $\Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 18. Giải bất phương trình $7\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-5}+\sqrt{x-2}+10x \geq 47 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 7\sqrt{x+1}-7.2+\sqrt{3x-5}-2+\sqrt{x-2}-1+10x-30 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 7(\sqrt{x+1}-2)+\sqrt{3x-5}-2+\sqrt{x-2}-1+10x-30 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{7(x-3)}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{3x-9}{\sqrt{3x-5}+2} + \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + 10(x-3) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (x-3)\left(\frac{7}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{3}{\sqrt{3x-5}+2} + \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} + 10\right) \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $\frac{7}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{3}{\sqrt{3x-5}+2} + \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} + 10 > 0, \forall x \geq 2$ nên (1) $\Leftrightarrow x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x \geq 3$.

Bài toán 19. Giải bất phương trình $11\sqrt{3x-2}+8\sqrt{4x-7} < 13\sqrt{6-x}+\sqrt{8-2x}+4-x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{7}{4} \leq x \leq 4$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 11\sqrt{3x-2}-11.2+8\sqrt{4x-7}-8 < 13\sqrt{6-x}-13.2+\sqrt{8-2x}-2+2-x \\ \Leftrightarrow & 11(\sqrt{3x-2}-2)+8(\sqrt{4x-7}-1) < 13(\sqrt{6-x}-2)+\sqrt{8-2x}-2+2-x \\ \Leftrightarrow & \frac{11(3x-6)}{\sqrt{3x-2}+2} + \frac{8(4x-8)}{\sqrt{4x-7}+1} < \frac{13(2-x)}{\sqrt{6-x}+2} + \frac{4-2x}{\sqrt{8-2x}+2} + 2-x \\ \Leftrightarrow & (x-2)\left(\frac{11.3}{\sqrt{3x-2}+2} + \frac{8.4}{\sqrt{4x-7}+1} + \frac{13}{\sqrt{6-x}+2} + \frac{2}{\sqrt{8-2x}+2} + 1\right) < 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Để thấy $\frac{11.3}{\sqrt{3x-2}+2} + \frac{8.4}{\sqrt{4x-7}+1} + \frac{13}{\sqrt{6-x}+2} + \frac{2}{\sqrt{8-2x}+2} + 1 > 0, \forall x \in \left[\frac{7}{4}; 4\right]$ nên (1) $\Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Đối chiếu điều kiện thu được tập nghiệm $S = \left[\frac{7}{4}; 2\right)$.

Bài toán 20. Giải phương trình $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{2x-3} + 3\sqrt{3x-2} + x+1 \geq 4\sqrt{7-3x} + 5\sqrt{11-5x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \left[\frac{3}{2}; \frac{11}{5}\right]$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-1} - 1 + 2\sqrt{2x-3} - 2 + 3\sqrt{3x-2} - 3 + x - 2 \geq 4\sqrt{7-3x} - 4 + 5\sqrt{11-5x} - 5 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{x-1} - 1 + 2(\sqrt{2x-3} - 1) + 3(\sqrt{3x-2} - 1) + x - 2 \geq 4(\sqrt{7-3x} - 1) + 5(\sqrt{11-5x} - 1) \\ & \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{2(2x-4)}{\sqrt{2x-3}+1} + \frac{3(3x-3)}{\sqrt{3x-2}+1} + x-2 \geq \frac{4(6-3x)}{\sqrt{7-3x}+1} + \frac{5(10-5x)}{\sqrt{11-5x}+1} \\ & \Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{4}{\sqrt{2x-3}+1} + \frac{9}{\sqrt{3x-2}+1} + 1 + \frac{12}{\sqrt{7-3x}+1} + \frac{25}{\sqrt{11-5x}+1} \right) \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Để thấy $\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{4}{\sqrt{2x-3}+1} + \frac{9}{\sqrt{3x-2}+1} + 1 + \frac{12}{\sqrt{7-3x}+1} + \frac{25}{\sqrt{11-5x}+1} > 0, \forall x \in \left[\frac{3}{2}; \frac{11}{5}\right]$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Kết hợp nghiệm thu được $S = \left[2; \frac{11}{5}\right]$.

Nhận xét.

20 bài toán mở đầu bao gồm các bài toán cơ bản, thông qua quan sát hoặc sử dụng công cụ máy tính bỏ túi, các bạn đọc giả không quá khó khăn để phán đoán nghiệm của phương trình, đa phần quy về phương trình (bất

phương trình) dạng thức $(x-m) \left[\frac{n}{\sqrt{f(x)+r}} + \dots + \frac{p}{\sqrt{g(x)+s}} + h(x) + t \right] = 0$.

Trong đó hằng số m là nghiệm nguyên (hoặc hữu tỷ) đã xác định, các hằng số dương n, p, r, s, t và tất yếu các biểu thức $\frac{n}{\sqrt{f(x)+r}}, \frac{p}{\sqrt{g(x)+s}}$ đều có giá trị dương với điều kiện xác định của bài toán. Trong 20 bài toán trên,

mức độ công kênh đã được tăng cường đến 5 căn thức độc lập, tuy nhiên bên ngoài căn thức, $h(x)$ đều đồng nhất hằng số hoặc vẫn đơn thuần là nhị thức bậc nhất, đánh giá theo điều kiện hoàn toàn đơn giản. Trước khi nâng cấp các đa thức phía trong căn và ngoài căn trở thành dạng tam thức bậc hai và đa thức bậc cao, song song với phức tạp hóa đánh giá đa thức $h(x)$, mời các bạn đọc giả tham khảo các bài tập tương tự sau đây.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình trên tập hợp số thực

1. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = 3$.
2. $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} = 3$.
3. $\sqrt{x+3} + 5\sqrt{x} > 7$.
4. $\sqrt{x} + \sqrt{3x+1} = 3$.
5. $2\sqrt{x} + \sqrt{x+8} = 5$.
6. $5\sqrt{3x-2} + 8\sqrt{2x-1} \leq 13$.
7. $3\sqrt{x+3} + 2\sqrt{5x-1} = 10$.
8. $4\sqrt{3x+1} + 5\sqrt{8x+1} > 23$.
9. $7\sqrt{6x-2} + 9\sqrt{2x-1} = 23$.
10. $3\sqrt{x+3} - \sqrt{4-3x} < 5$.
11. $4\sqrt{x} - \sqrt{2-x} = 3$.
12. $8\sqrt{6x+3} - 7\sqrt{10-x} = 3$.
13. $\sqrt{7x+2} - \sqrt{2-x} \geq 2$.
14. $5\sqrt{2x+7} - 4\sqrt{3-2x} = 11$.
15. $7\sqrt{12x-11} < 4\sqrt{17-16x} + 3$.
16. $\sqrt{5x-4} + 2\sqrt{x} + 6\sqrt{6x-5} = 9$.
17. $5\sqrt{2x+7} + 2\sqrt{x} + \sqrt{5x-1} > 19$.
18. $\sqrt{x} + \sqrt{2x+2} + \sqrt{6x-2} = 5$.
19. $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{3x-2} < 12$.
20. $17\sqrt{x+3} + 6\sqrt{4x-3} + 19\sqrt{x} = 59$.
21. $2\sqrt{x+8} + \sqrt{10x-1} - \sqrt{17-x} = 5$.
22. $\sqrt{6x-5} + 3\sqrt{16x-15} > \sqrt{5-4x} + 3$.
23. $2\sqrt{5x+4} + 4\sqrt{4x+5} = \sqrt{26-x} + 13$.
24. $17\sqrt{4x-3} + 3\sqrt{5x-4} - \sqrt{10-9x} = 19$.
25. $\sqrt{x-1} + 6\sqrt{3x-2} \leq \sqrt{22-3x} + 9$.
26. $16\sqrt{7x-6} - 23\sqrt{19-18x} + 13\sqrt{17x-16} = 6$.
27. $7\sqrt{x-2} + 9\sqrt{4x-3} \geq \sqrt{19-x} + 31$.
28. $7\sqrt{8x-7} + 20\sqrt{9x-8} - \sqrt{12-11x} = 26$.
29. $\sqrt{4x+5} + \sqrt{5x+4} + \sqrt{3x+6} = 27$.
30. $\sqrt{4x-3} > 4\sqrt{4-3x} + 4\sqrt{2-x} - 7$.
31. $13\sqrt{x-3} + 7\sqrt{3x+4} + 3 > 11\sqrt{20-x}$.
32. $\sqrt{2x-1} + 4\sqrt{8x-7} + 6\sqrt{x} + 2\sqrt{11x-10} = 13$.
33. $\sqrt{x+8} + 20 > \sqrt{10-x} + 4\sqrt{5-x} + 3\sqrt{17-x}$.
34. $\sqrt{x+2} + 2\sqrt{3x-5} + 3\sqrt{x-1} + 11\sqrt{4x+1} = 40$.
35. $\sqrt{x-1} + 3\sqrt{7x-6} + 5\sqrt{12x-11} > 7\sqrt{19x-18}$.
36. $6\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+7} = 5\sqrt{2-x} + 4\sqrt{3-2x} + 6$.
37. $13 + \sqrt{x-1} \leq 2\sqrt{6-x} + 3\sqrt{7-3x} + 7\sqrt{9-4x}$.
38. $6\sqrt{4x+5} + 8\sqrt{7x+2} + 6 = 11\sqrt{19-3x} + \sqrt{17-x}$.

39. $2\sqrt{3x-2} + 4\sqrt{4x-3} > 5\sqrt{17-16x} + \sqrt{5-4x}$.
40. $4\sqrt{x+2} + 6\sqrt{3x+3} + \sqrt{5x+6} \leq 6\sqrt{17-4x} + 12$.
41. $6\sqrt{3x-2} + 17x = 23$.
42. $7\sqrt{4x-3} + 24x = 31$.
43. $9\sqrt{8x+1} = 31-4x$
44. $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} + x > 4$.
45. $\sqrt{x+8} + 3\sqrt{3x-2} + 2x = 8$.
46. $2\sqrt{3x-2} - \sqrt{2-x} + 2x > 3$.
47. $\sqrt{8x-7} + 4x + \sqrt{10x-9} = 6$.
48. $\sqrt{7x-6} + 8\sqrt{2x-1} + 5x < 14$.
49. $\sqrt{2x-1} + \sqrt{4x-3} + 3x = 5$.
50. $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} + 7x \geq 15$.
51. $\sqrt{3x+1} - 2\sqrt{10-x} + 17x = 13$.
52. $3\sqrt{x+3} - 4\sqrt{2-x} + x = -7$.
53. $5\sqrt{2x+6} - 8\sqrt{8-x} + 6x + 8 \leq 0$.
54. $4\sqrt{9x-8} - \sqrt{3-2x} + 2x = 5$.
55. $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} + \sqrt{2x-1} + 3x > 7$.
56. $\sqrt{2x+2} + 3\sqrt{3x+6} + 7\sqrt{4x-3} + 2x = 20$.
57. $13\sqrt{5x-4} - \sqrt{7-6x} - \sqrt{3-2x} + 5x \geq 16$.
58. $\sqrt{x} + \sqrt{3x-2} + \sqrt{2x-1} + x = 4$.
59. $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4} + 2x \leq 9$.
60. $\sqrt{x-1} + \sqrt{3x-2} - \sqrt{3-x} \leq 4-x$.
61. $6\sqrt{x-2} + \sqrt{3x-5} \leq \sqrt{4-x} + 5\sqrt{10-3x} + 5-x$.
62. $2\sqrt{x} + 9\sqrt{2x-1} - 3\sqrt{2-x} - 7\sqrt{5-x} + 7x \leq 1$.
63. $x + \sqrt{x} + \sqrt{7x+2} = \sqrt{10-x} + \sqrt{10-6x}$.
64. $4\sqrt{x} + \sqrt{7x-3} + 5\sqrt{4x-3} + x - 7 \leq \sqrt{28-3x}$.
65. $\sqrt{x} + \sqrt{6x+1} + \sqrt{x+5} + x > \sqrt{20-x} + 10$.
66. $6\sqrt{4x+5} + 4\sqrt{5x+4} + x - 25 = \sqrt{5-x} + \sqrt{17-x}$.
67. $2x + 5 + \sqrt{x-1} > \sqrt{6-x} + 2\sqrt{9-x} + 4\sqrt{14-x}$.
68. $3x + 6 + \sqrt{2x+7} \leq \sqrt{5-x} + 3\sqrt{7-3x} + 4\sqrt{3-2x}$.
69. $3x - 2 + \sqrt{x+8} = \sqrt{2-x} + \sqrt{10-9x} + \sqrt{7-3x}$.
70. $\sqrt{2x-1} + 2\sqrt{3x-2} + 3\sqrt{4x-3} + 3\sqrt{5x-4} + \sqrt{x} = 10$.
71. $\sqrt{3x-2} + 2\sqrt{4x-3} + 3\sqrt{5x-4} \leq \sqrt{7-6x} + 4\sqrt{8-7x} + 1$.
72. $\sqrt{x} + 3\sqrt{7x-6} + 4\sqrt{8x-7} > \sqrt{9-8x} + 7\sqrt{10-9x}$.
73. $3\sqrt{x} + 2x - 4 + 4\sqrt{x+3} \leq \sqrt{5-x} + \sqrt{10-x} + \sqrt{17-x}$.
74. $3x + \sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} + 2\sqrt{x} = 2\sqrt{2-x} + 7\sqrt{3-2x}$.
75. $x + 4\sqrt{x} + 4\sqrt{5x+4} + 5\sqrt{6x-5} > 7\sqrt{2-x} + \sqrt{8-7x} + 14$.
76. $\sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-1} + \sqrt{x+3} + x = 6$.
77. $2\sqrt{4x-3} + \sqrt{5x-1} + \sqrt{x+3} + 2x = 8$.

Bài toán 21. Giải phương trình $\sqrt{x-2} + x^2 - 4x + 2 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x-2} - 1 + (x-3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + (x-3)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{1}{\sqrt{x-2}+1} + x-1 \right) = 0 \quad (1)$$

Nhận xét $\frac{1}{\sqrt{x-2}+1} + x-1 > 0, \forall x \geq 2$ nên $(1) \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x=3$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 2$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x-2} + (x-2)^2 = 2$. Đặt $\sqrt{x-2} = t, (t \geq 0)$ ta thu được $t^4 + t = 2$.

Xét hàm số $f(t) = 4t^3 + 1 > 0, \forall t \geq 0$ nên hàm số đồng biến, liên tục trên $[0; +\infty)$.

Thu được $f(t) = f(1) \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} = 1 \Leftrightarrow x = 3$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x = 3$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x + 4 &= -2\sqrt{x-2} \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 = x - 2 - 2\sqrt{x-2} + 1 \\ \Leftrightarrow (x-3)(2x-1) &= (\sqrt{x-2}-1)^2 \Leftrightarrow (x-3)(2x-1) = \left(\frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} \right)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ 2x-1 = \frac{x-3}{(\sqrt{x-2}+1)^2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 2(\sqrt{x-2}+1)^2 = \frac{2x-6}{2x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 2(\sqrt{x-2}+1)^2 + \frac{5}{2x-1} = 1 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét rằng $2(\sqrt{x-2}+1)^2 + \frac{5}{2x-1} > 2.1 > 1, \forall x \geq 2$ nên (1) vô nghiệm.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x = 3$.

Nhận xét.

Lớp bài toán thứ hai của tài liệu có dạng thức vô tỷ chứa một căn thức duy nhất, phía ngoài căn thức có dạng đa thức bậc cao, sử dụng các đánh giá đơn giản theo điều kiện xác định của bài toán. Bài toán số 21 trên đây, lời giải 2 sử dụng tính chất đơn điệu hàm số hoặc lập luận nghiệm duy nhất $x=3$, đều có cùng bản chất, xin không bình luận. Các lời giải 1 và 3 đều sử dụng đại lượng liên hợp – trực căn thức, tuy nhiên các bạn học sinh dễ dàng nhận thấy quy trình liên hợp của lời giải 3 cần nhân thêm hằng số để thiết lập hằng đẳng thức, đồng thời các bước thực hiện hơi phức tạp và đòi hỏi mức độ tư duy nhất định, trong khi đó lời giải 1 hết sức ngắn gọn. Tùy theo từng tình huống, dù là một kỹ thuật nhưng có thể có các cách xử lý khác nhau, có nét độc đáo và đặc sắc riêng, lúc mềm dẻo, lúc cứng rắn, linh hoạt và cẩn thận để đạt được mục đích nhanh chóng.

Bài toán 22. Giải phương trình $2\sqrt{x+1} + 2x^2 - 3x = 13 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x+1} - 4 + 2x^2 - 3x - 9 &= 0 \Leftrightarrow 2(\sqrt{x+1}-2) + (x-3)(2x+3) = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2(x-3)}{\sqrt{x+1}+2} + (x-3)(2x+3) &= 0 \Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{2}{\sqrt{x+1}+2} + 2x+3 \right) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Để ý rằng $\frac{2}{\sqrt{x+1}+2} + 2x+3 > 0, \forall x \geq -1$ nên $(1) \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4\sqrt{x+1} + 4x^2 - 6x &= 26 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x - 21 = x+1 - 4\sqrt{x+1} + 4 \\ \Leftrightarrow (x-3)(4x+7) &= (\sqrt{x+1}-2)^2 \Leftrightarrow (x-3)(4x+7) = \left(\frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ (4x+7)(\sqrt{x+1}+2)^2 = x-3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 4(\sqrt{x+1}+2)^2 = \frac{4x-12}{4x+7} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 4(\sqrt{x+1}+2)^2 = \frac{4x+7-19}{4x+7} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 4(\sqrt{x+1}+2)^2 + \frac{19}{4x+7} = 1 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Chú ý rằng $4(\sqrt{x+1}+2)^2 + \frac{19}{4x+7} > 4 \cdot 2^2 > 1, \forall x \geq -1$ nên (1) vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=3$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \geq -1$.

Đặt $\sqrt{x+1}=t, (t \geq 0) \Rightarrow x=t^2-1$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2t+2(t^2-1)^2-3(t^2-1)=13 \\ t \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(t^4-2t^2+1)-3t^2+2t-10=0 \\ t \geq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^4-7t^2+2t-8=0 \\ t \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (t-2)(2t^3+4t^2+t+4)=0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=2 \Leftrightarrow x=3 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=3$.

Bài toán 23. Giải phương trình $\frac{3}{2}\sqrt{5x-1}+6x^2=7x+2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{5}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3\sqrt{5x-1} - 6 + 12x^2 - 14x + 2 &= 0 \Leftrightarrow 3(\sqrt{5x-1}-2) + 2(6x^2-7x+1) = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3(5x-5)}{\sqrt{5x-1}+2} + 2(x-1)(6x-1) &= 0 \Leftrightarrow (x-1) \left[\frac{3}{\sqrt{5x-1}+2} + 2(6x-1) \right] = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận định $\frac{3}{\sqrt{5x-1}+2} + 2(6x-1) > 0, \forall x \geq \frac{1}{5}$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Kết hợp với điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 24. Giải bất phương trình $17\sqrt{2x-3}+24x^2-78x+43 < 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 17\sqrt{2x-3}-17+24x^2-78x+60 < 0 &\Leftrightarrow 17(\sqrt{2x-3}-1)+6(4x^2-13x+10) < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{17(2x-4)}{\sqrt{2x-3}+1}+6(x-2)(4x-5) < 0 \Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{34}{\sqrt{2x-3}+1}+6(4x-5)\right] < 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $4x-5 > 0, \forall x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{34}{\sqrt{2x-3}+1}+6(4x-5) > 0, \forall x \geq \frac{3}{2}$ nên $(1) \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Kết hợp điều kiện ta thu được tập hợp nghiệm $S = \left[\frac{3}{2}; 2\right)$.

Bài toán 25. Giải phương trình $3\sqrt{3x-2}+3x^2-8x-2=0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3\sqrt{3x-2}-6+3x^2-8x+4=0 &\Leftrightarrow 3(\sqrt{3x-2}-2)+(x-2)(3x-2)=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3(3x-6)}{\sqrt{3x-2}+2}+(x-2)(3x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{9}{\sqrt{3x-2}+2}+3x-2\right)=0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $\frac{9}{\sqrt{3x-2}+2}+3x-2 > 0, \forall x \geq \frac{2}{3}$ nên $(1) \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x=2$.

Bài toán 26. Giải bất phương trình $\frac{7\sqrt{5x-1}+30x^2-10}{35x-1} \geq 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{5}$.

Nhận xét $35x-1 > 0, \forall x \geq \frac{1}{5}$ nên bất phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 7\sqrt{5x-1}+30x^2-10 &\geq 35x-1 \Leftrightarrow 7\sqrt{5x-1}+30x^2-35x-9 > 0 \\ &\Leftrightarrow 7\sqrt{5x-1}-14+5(6x^2-7x+1) > 0 \Leftrightarrow 7(\sqrt{5x-1}-2)+5(x-1)(6x-1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{7(5x-5)}{\sqrt{5x-1}+1}+5(x-1)(6x-1) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{35}{\sqrt{5x-1}+1}+5(6x-1)\right] \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $\frac{35}{\sqrt{5x-1}+1}+5(6x-1) > 0, \forall x \in \left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq 1$.

Bài toán 27. Giải bất phương trình $\frac{5\sqrt{7x-6}+25x^2-36x+34}{x^2+8x+19} \geq 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{6}{7}$.

Nhận xét $x^2 + 8x + 19 = (x + 4)^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} 5\sqrt{7x-6} + 25x^2 - 36x + 34 &\geq x^2 + 8x + 19 \Leftrightarrow 5\sqrt{7x-6} + 24x^2 - 44x + 15 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 5\sqrt{7x-6} - 5 + 4(6x^2 - 11x + 5) \geq 0 \Leftrightarrow 5(\sqrt{7x-6} - 1) + 4(x-1)(6x-5) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{5(7x-7)}{\sqrt{7x-6}+1} + 4(x-1)(6x-5) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1) \left[\frac{35}{\sqrt{7x-6}+1} + 4(6x-5) \right] \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ngoài ra $\frac{35}{\sqrt{7x-6}+1} + 4(6x-5) > 0, \forall x \in \left[\frac{6}{7}; +\infty \right)$ nên (1) $\Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq 1$.

Bài toán 28. Giải phương trình $\frac{5x^2 - 4x + 13\sqrt{x} - 13}{x^2 - 2x + 2} \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Nhận xét $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 5x^2 - 4x + 13\sqrt{x} - 13 &\leq x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow 13\sqrt{x} - 13 + 4x^2 - 2x - 2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 13\sqrt{x} - 13 + 2(2x^2 - x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow 13(\sqrt{x} - 1) + 2(x-1)(2x+1) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{13(x-1)}{\sqrt{x}+1} + 2(x-1)(2x+1) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1) \left[\frac{13}{\sqrt{x}+1} + 2(2x+1) \right] \leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Sở dĩ $\frac{13}{\sqrt{x}+1} + 2(2x+1) > 0, \forall x \geq 0$ nên (1) $\Leftrightarrow x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Kết hợp với điều kiện $x \geq 0$ ta thu được tập hợp nghiệm $S = [0; 1]$.

Nhận xét.

Các bài toán từ bài toán 21 đến bài toán số 28, sau khi thực hành sử dụng đại lượng liên hợp ta quy về dạng

$$\text{phương trình (tương ứng bất phương trình)} : (x-m) \left[\frac{n}{\sqrt{f(x)}+p} + g(x) \right] = 0.$$

Trong đó m là nghiệm hữu tỷ đã được phán đoán ban đầu, n và p đều là các hằng số dương. Lúc này $g(x)$ không còn đồng nhất hằng số như các bài toán trước đây, mà có dạng đơn giản nhị thức bậc nhất, các bạn độc giả lưu ý sử dụng đánh giá thông thường theo điều kiện xác định. Chú ý hơn nữa đối với các bài toán từ 26 đến 28, bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, cần sử dụng hằng đẳng thức thích hợp (chưa cần thông qua điều kiện) để lập luận dấu mẫu thức, quy đồng để đơn giản quy trình.

Bài toán 29. Giải phương trình $\frac{6x^2 - 7x - 10 + 3\sqrt{4x+1}}{x^2 + x + 3} < 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{4}$.

Nhận xét $x^2 + x + 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
6x^2 - 7x - 10 + 3\sqrt{4x+1} &< x^2 + x + 3 \Leftrightarrow 5x^2 + 3\sqrt{4x+1} - 8x - 13 < 0 \\
3\sqrt{4x+1} - 9 + 5x^2 - 8x - 4 &< 0 \Leftrightarrow 3(\sqrt{4x+1} - 3) + (x-2)(5x+2) < 0 \\
\Leftrightarrow \frac{3(4x-8)}{\sqrt{4x+1}+3} + (x-2)(5x+2) &< 0 \Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{12}{\sqrt{4x+1}+3} + 5x+2\right) < 0 \quad (1)
\end{aligned}$$

Ta có $\frac{12}{\sqrt{4x+1}+3} + 5x+2 > 0, \forall x \geq -\frac{1}{4}$ nên (1) $\Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Kết hợp điều kiện ta thu được tập nghiệm $S = \left[-\frac{1}{4}; 2\right)$.

Bài toán 30. Giải phương trình $11\sqrt{x+3} + (2x-1)^3 + 4x^3 = 27 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -3$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
11\sqrt{x+3} + 12x^3 - 12x^2 + 6x - 28 &= 0 \\
\Leftrightarrow 11\sqrt{x+3} - 22 + 12x^3 - 12x^2 + 6x - 6 &= 0 \\
\Leftrightarrow 11(\sqrt{x+3} - 2) + 6(2x^3 - 2x^2 + x - 1) &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{11(x-1)}{\sqrt{x+3}+2} + 6(x-1)(2x^2+1) &\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{11}{\sqrt{x+3}+2} + 6(2x^2+1)\right] = 0 \quad (1)
\end{aligned}$$

Để ý rằng $\frac{11}{\sqrt{x+3}+2} + 6(2x^2+1) > 0, \forall x \geq -3$ thì (1) $\Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Đổi chiều điều kiện, kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 31. Giải phương trình $\frac{3+\sqrt{3-x}}{x^3} = \frac{1}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $0 \neq x \leq 3$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
x^3 &= 2(3+\sqrt{3-x}) \Leftrightarrow x^3 - 6 = 2\sqrt{3-x} \Leftrightarrow 2(1-\sqrt{3-x}) + x^3 - 8 = 0 \\
\Leftrightarrow \frac{2(x-2)}{1+\sqrt{3-x}} + (x-2)(x^2+2x+4) &= 0 \Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{2}{1+\sqrt{3-x}} + (x+1)^2 + 3\right] = 0 \quad (1)
\end{aligned}$$

Ta có $\frac{2}{1+\sqrt{3-x}} + (x+1)^2 + 3 > 0, \forall x \leq 3, x \neq 0$ nên (1) $\Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Đổi chiều điều kiện, kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài toán 32. Giải bất phương trình $\frac{5\sqrt{3x-2}+6x^3}{3x^2+3x+11} \leq 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$.

Để ý rằng $3x^2+3x+11 > 0, \forall x \geq \frac{2}{3}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 5\sqrt{3x-2} + 6x^3 &\leq 6x^2 + 6x + 22 \\ \Leftrightarrow 5\sqrt{3x-2} - 10 + 6x^3 - 6x^2 - 6x - 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow 5(\sqrt{3x-2} - 2) + 6(x^3 - x^2 - x - 2) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{5(3x-6)}{\sqrt{3x-2} + 2} + 6(x-2)(x^2 + x + 1) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{15}{\sqrt{3x-2} + 2} + 6\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} \right] &\leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $\frac{15}{\sqrt{3x-2} + 2} + 6\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} > 0, \forall x \geq \frac{2}{3}$ nên $(1) \Leftrightarrow x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Kết hợp với điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left[\frac{2}{3}; 2\right]$.

Bài toán 33. Giải phương trình $\frac{6x^3 + 3}{2\sqrt{10-x} + 3x^2} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 10$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 6x^3 + 3 &= 2\sqrt{10-x} + 3x^2 \Leftrightarrow 6 - 2\sqrt{10-x} + 6x^3 - 3x^2 - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow 2(3 - \sqrt{10-x}) + 3(2x^3 - x^2 - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{3 + \sqrt{10-x}} + 3(x-1)(2x^2 + x + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1) \left[\frac{2}{3 + \sqrt{10-x}} + 6\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{21}{8} \right] &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $\frac{2}{3 + \sqrt{10-x}} + 6\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{21}{8} > 0, \forall x \leq 10$ nên $(1) \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x = 1$.

Bài toán 34. Giải phương trình $\sqrt{2x-1} + x^3 + 5x = 7 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-1} - 1 + x^3 + 5x - 6 &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} - 1 + (x-1)(x^2 + x + 6) = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2x-2}{\sqrt{2x-1} + 1} + (x-1)(x^2 + x + 6) &= 0 \Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{2}{\sqrt{2x-1} + 1} + x^2 + x + 6 \right) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Để ý rằng $\frac{2}{\sqrt{2x-1} + 1} + x^2 + x + 6 = \frac{2}{\sqrt{2x-1} + 1} + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} > 0, \forall x \geq \frac{1}{2}$ nên $(1) \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1} + x^3 + 5x; x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ thì $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} + 3x^2 + 5 > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Như vậy hàm số $f(x)$ liên tục, đồng biến trên miền $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Thu được $f(x) = f(1) \Leftrightarrow x = 1$. Kết hợp điều kiện ta có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 35. Giải bất phương trình $\frac{4x^2 - 7x + 4\sqrt{x-2} - 1}{x^2 + x - 3} \geq 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$.

Để thấy $x \geq 2 \Rightarrow x^2 + x - 3 \geq 2^2 + 2 - 3 = 3 > 0$ nên bất phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} 4x^2 - 7x + 4\sqrt{x-2} - 1 &\geq 2(x^2 + x - 3) \Leftrightarrow 4(\sqrt{x-2} - 1) + 2x^2 - 9x + 9 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{4(x-3)}{\sqrt{x-2}+1} + (x-3)(2x-3) &\geq 0 \Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{4}{\sqrt{x-2}+1} + 2x-3\right) \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Hơn nữa $\frac{4}{\sqrt{x-2}+1} + 2x-3 > 0, \forall x \geq 2$ nên (1) $\Leftrightarrow x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x \geq 3$.

Bài toán 36. Giải bất phương trình $\frac{10x^2 - 23x + 7 + 5x\sqrt{x-1}}{2x(2x-1)-1} < 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x(2x-1)-1 \neq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$

Nhận xét $4x^2 - 2x - 1 = 2x(2x-1)-1 \geq 2.1-1 > 0$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 10x^2 - 23x + 7 + 5x\sqrt{x-1} &< 4x^2 - 2x - 1 \Leftrightarrow 5x\sqrt{x-1} - 5x + 6x^2 - 16x + 8 < 0 \\ \Leftrightarrow 5x(\sqrt{x-1} - 1) + 2(3x^2 - 8x + 4) &< 0 \Leftrightarrow \frac{5x(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} + 2(x-2)(3x-2) < 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{5x}{\sqrt{x-1}+1} + 2(3x-2)\right] &< 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $\frac{5x}{\sqrt{x-1}+1} + 2(3x-2) > 0, \forall x \geq 1$ nên (1) $\Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Đổi chiều điều kiện ta thu được nghiệm $1 \leq x < 2$.

Nhận xét.

Điểm mấu chốt cơ bản là xử lý mẫu thức của bất phương trình. Chú ý sử dụng điều kiện $x \geq 1$ các bạn có thể có các phương án sau đây

1. Phương án 1. $4x^2 - 2x - 1 = 2x(2x-1)-1 \geq 2.1-1 > 0$.
2. Phương án 2. $4x^2 - 2x - 1 = (x-1)(4x+2)+1 \geq 0+1 = 1$.
3. Phương án 3. Xét hàm số $f(x) = 4x^2 - 2x - 1; x \geq 1$ ta có

$$f'(x) = 8x - 2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 8x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Do đó hàm số liên tục, đồng biến trên miền $[1; +\infty)$, suy ra $f(x) \geq f(1) = 1$.

4. Phương án 4. Sử dụng kiến thức Đại số lớp 10 THPT (không sử dụng đạo hàm), tiến hành khảo sát sự biến thiên hàm số bậc hai $f(x) = 4x^2 - 2x - 1; x \geq 1$ (đồ thị parabol) cũng thu được $f(x) \geq f(1) = 1$.

Bài toán 37. Giải bất phương trình $\frac{(x-2)(x-5)+\sqrt{x-4}+1}{x^2-4x+1} \leq \frac{1}{3} \quad (x \in \mathbb{R}),$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 4$.

Nhận xét với $x \geq 4$ thì $x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3 \geq (4-2)^2 - 3 = 1 > 0$.

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 7x + 11 + \sqrt{x-4}}{x^2 - 4x + 1} &\leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(x^2 - 7x + 11 + \sqrt{x-4}) \leq x^2 - 4x + 1 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{x-4} + 2x^2 - 17x + 32 &\leq 0 \Leftrightarrow 3(\sqrt{x-4} - 1) + 2x^2 - 17x + 35 \leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3(x-5)}{\sqrt{x-4}+1} + (x-5)(2x-7) &\leq 0 \Leftrightarrow (x-5)\left(\frac{3}{\sqrt{x-4}+1} + 2x-7\right) \leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác $\frac{3}{\sqrt{x-4}+1} + 2x - 7 \geq 0, \forall x \geq 4$ nên $(1) \Leftrightarrow x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$.

Đối chiếu với điều kiện ta thu được tập hợp nghiệm $S = [4; 5]$.

Bài toán 38. Giải bất phương trình $\frac{x^3 + 3x^2 - 47x + 3x\sqrt{x-2} - 5}{3x^2 - 6x + 1} \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$.

Nhận xét $3x^2 - 6x + 1 = 3(x-1)^2 - 2 \geq 3 \cdot 1 - 2 = 1 > 0, \forall x \geq 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 47x + 3x\sqrt{x-2} - 5 &\leq 3x^2 - 6x + 1 \\ \Leftrightarrow 3x\sqrt{x-2} - 6x + x^3 - 35x - 6 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 3x(\sqrt{x-2} - 2) + (x-6)(x^2 + 6x + 1) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3x(x-6)}{\sqrt{x-2}+2} + (x-6)(x^2 + 6x + 1) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (x-6)\left(\frac{3x}{\sqrt{x-2}+2} + x^2 + 6x + 1\right) &\leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Chú ý $\frac{3x}{\sqrt{x-2}+2} + x^2 + 6x + 1 > 0, \forall x \geq 2$ nên $(1) \Leftrightarrow x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 6$.

Kết hợp với điều kiện ta thu được nghiệm $2 \leq x \leq 6$.

Bài toán 39. Giải bất phương trình $3\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7} + 2x^2 + 2x > 21 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{x+2} - 6 + \sqrt{x+7} - 3 + 2(x^2 + x - 6) > 0 \\ \Leftrightarrow & 3(\sqrt{x+2} - 2) + \sqrt{x+7} - 3 + 2(x-2)(x+3) > 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{3(x-2)}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x-2}{\sqrt{x+7}+3} + 2(x-2)(x+3) > 0 \\ \Leftrightarrow & (x-2) \left[\frac{3}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+7}+3} + 2(x+3) \right] > 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Để ý rằng $\frac{3}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+7}+3} + 2(x+3) > 0, \forall x \geq -2$. Ta có $(1) \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Kết luận bất phương trình có nghiệm $x > 2$.

Bài toán 40. Giải bất phương trình $2\sqrt{x+5} + 3\sqrt{x+12} + x^2 + 2x \geq 42 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -5$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 2(\sqrt{x+5} - 3) + 3(\sqrt{x+12} - 4) + x^2 + 2x - 24 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (x-4) \left(\frac{2}{\sqrt{x+5}+3} + \frac{3}{\sqrt{x+12}+4} + x+6 \right) \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Dễ thấy $\frac{2}{\sqrt{x+5}+3} + \frac{3}{\sqrt{x+12}+4} + x+6 > 0, \forall x \geq -5$ nên $(1) \Leftrightarrow x \geq 4$.

Kết luận bất phương trình có nghiệm $x \geq 4$.

Bài toán 41. Giải phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{1}{3} \leq x \leq 6$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x+1} - 4 + 1 - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 5 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}} + (x-5)(3x+1) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-5) \left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} + 3x+1 \right) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} + 3x+1 > 0, \forall x \geq -\frac{1}{3}$. Do đó $(1) \Leftrightarrow x-5=0 \Leftrightarrow x=5$.

Kết luận phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $x=5$.

Nhận xét.

Bài toán 41 trên đây nguyên trích lược câu II.2, Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng năm 2010, Môn Toán, Khối B, Đề thi chính thức. Tại thời điểm đó, kỹ thuật sử dụng đại lượng liên hợp có thể nói là phương cách tối ưu đối với bài toán này. Dễ dàng nhận thấy điều kiện xác định $-\frac{1}{3} \leq x \leq 6$ nên thực hiện quét trong miền giá trị này ta phán đoán được nghiệm $x=5$. Thực hiện tương tự với các hằng số dương a và b ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x+1} - a + b - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x + a - b - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{3x+1-a^2}{\sqrt{3x+1}+a} + \frac{b^2+x-6}{b+\sqrt{6-x}} + 3x^2 - 14x + a - b - 8 = 0 \end{aligned}$$

Ta có
$$\begin{cases} f(x) = 3x + 1 - a^2 \\ g(x) = b^2 + x - 6 \\ h(x) = 3x^2 - 14x + a - b - 8 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} f(5) = 0 \\ g(5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases} \\ h(5) = 0 \end{cases}$$

Bài toán 42. Giải phương trình $\sqrt{5x-4} + \sqrt{2x-1} + 6x^2 - x - 7 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{4}{5}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{5x-4} - 1 + \sqrt{2x-1} - 1 + 6x^2 - x - 5 = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{5x-5}{\sqrt{5x-4}+1} + \frac{2x-2}{\sqrt{2x-1}+1} + (x-1)(6x+5) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{5}{\sqrt{5x-4}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} + 6x+5 \right) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận định $\frac{5}{\sqrt{5x-4}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} + 6x+5 > 0, \forall x \geq \frac{4}{5}$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 43. Giải phương trình $\sqrt{x+3} = \sqrt{7-x} + x^2 - 14x + 50 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-3 \leq x \leq 7$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+3} - 3 = \sqrt{7-x} - 1 + x^2 - 14x + 48 \\ & \Leftrightarrow \frac{x-6}{\sqrt{x+3}+3} = \frac{6-x}{\sqrt{7-x}+1} + (x-6)(x-8) \\ & \Leftrightarrow (x-6) \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+3} + \frac{1}{\sqrt{7-x}+1} + 8-x \right) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận định $\frac{1}{\sqrt{x+3}+3} + \frac{1}{\sqrt{7-x}+1} + 8-x > 0, \forall x \in [-3; 7]$. Do đó $(1) \Leftrightarrow x-6=0 \Leftrightarrow x=6$.

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x=6$.

Bài toán 44. Giải phương trình $3\sqrt{2x+5} - 4\sqrt{3-x} = 2x^2 - 5x + 7 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{5}{2} \leq x \leq 3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 3(\sqrt{2x+5}-3) + 4(1-\sqrt{3-x}) = 2x^2 - 5x + 2 \\ & \Leftrightarrow \frac{3(2x-4)}{\sqrt{2x+5}+3} + \frac{4(x-2)}{1+\sqrt{3-x}} = (x-2)(2x-1) \\ & \Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{6}{\sqrt{2x+5}+3} + \frac{4}{1+\sqrt{3-x}} + 1-2x \right) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận định $\frac{6}{\sqrt{2x+5}+3} + \frac{4}{1+\sqrt{3-x}} + 1-2x > 0, \forall x \in \left[-\frac{5}{2}; 3\right]$ nên $(1) \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Đổi chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài toán 45. Giải phương trình $3\sqrt{2x+7} - \sqrt{1-5x} + 2x^2 + 13x + 22 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{1}{5}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 3(\sqrt{2x+7}-1) + 4 - \sqrt{1-5x} + 2x^2 + 13x + 21 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{3(2x+6)}{\sqrt{2x+7}+1} + \frac{15+5x}{4+\sqrt{1-5x}} + (x+3)(2x+7) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x+3) \left(\frac{6}{\sqrt{2x+7}+1} + \frac{5}{4+\sqrt{1-5x}} + 2x+7 \right) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Chú ý $\frac{6}{\sqrt{2x+7}+1} + \frac{5}{4+\sqrt{1-5x}} + 2x+7 > 0, \forall x \in \left[-\frac{7}{2}; \frac{1}{5}\right]$ nên $(1) \Leftrightarrow x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=-3$.

Bài toán 46. Giải bất phương trình $\sqrt{3x+4} - \sqrt{3-x} + 4x^2 + 11x + 8 \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{4}{3} \leq x \leq 3$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3x+4}-1) + (2-\sqrt{3-x}) + 4x^2 + 11x + 7 \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{3x+3}{\sqrt{3x+4}+1} + \frac{x+1}{2+\sqrt{3-x}} + (x+1)(4x+7) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & (x+1) \left(\frac{3}{\sqrt{3x+4}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{3-x}} + 4x+7 \right) \leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Đề ý $\frac{3}{\sqrt{3x+4}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{3-x}} + 4x+7 > 0, \forall x \in \left[-\frac{4}{3}; 3\right]$ nên $(1) \Leftrightarrow x+1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$.

Kết hợp điều kiện ta có tập hợp nghiệm $S = \left[-\frac{4}{3}; -1\right]$.

Bài toán 47. Giải bất phương trình $7\sqrt{3x+2} + 6\sqrt{6x+5} + 3x^2 + 4x < 36 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{2}{3}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 7(\sqrt{3x+2}-2) + 6(\sqrt{6x+5}-3) + 3x^2 + 4x - 4 < 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{7(3x-2)}{\sqrt{3x+2}+2} + \frac{6(6x-4)}{\sqrt{6x+5}+3} + (x+2)(3x-2) < 0 \\ \Leftrightarrow & (3x-2) \left(\frac{7}{\sqrt{3x+2}+2} + \frac{12}{\sqrt{6x+5}+3} + x+2 \right) < 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận thấy $\frac{7}{\sqrt{3x+2}+2} + \frac{12}{\sqrt{6x+5}+3} + x+2 > 0, \forall x \geq -\frac{2}{3}$ nên $(1) \Leftrightarrow 3x-2 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$.

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left[-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Bài toán 48. Giải bất phương trình $\sqrt{2x-1} + 2\sqrt{3x-2} + 3\sqrt{3x+1} + 5x^2 - 8x - 6 \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{2x-1} - 1 + 2\sqrt{3x-2} - 2 + 3\sqrt{3x+1} - 6 + 5x^2 - 8x - 3 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2x-1} - 1 + 2(\sqrt{3x-2} - 1) + 3(\sqrt{3x+1} - 2) + (x-1)(5x-3) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{2x-2}{\sqrt{2x-1}+1} + \frac{2(3x-3)}{\sqrt{3x-2}+1} + \frac{3(3x-3)}{\sqrt{3x+1}+2} + (x-1)(5x-3) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (x-1) \left(\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} + \frac{6}{\sqrt{3x-2}+1} + \frac{9}{\sqrt{3x+1}+2} + 5x-3 \right) \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận định $\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} + \frac{6}{\sqrt{3x-2}+1} + \frac{9}{\sqrt{3x+1}+2} + 5x-3 > 0, \forall x \geq \frac{2}{3}$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq 1$.

Bài toán 49. Giải phương trình $2\sqrt{4x-3} = \sqrt{2-x} + \sqrt{5-4x} + 2x^2 - 5x + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{4x-3} - 2 = \sqrt{2-x} - 1 + \sqrt{5-4x} - 1 + 2x^2 - 5x + 3 \\ \Leftrightarrow & \frac{2(4x-4)}{\sqrt{4x-3}+1} = \frac{1-x}{\sqrt{2-x}+1} + \frac{4-4x}{\sqrt{5-4x}+1} + (x-1)(2x-3) \\ \Leftrightarrow & (x-1) \left(\frac{8}{\sqrt{4x-3}+1} + \frac{1}{\sqrt{2-x}+1} + \frac{4}{\sqrt{5-4x}+1} + 3-2x \right) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Lại có $\frac{8}{\sqrt{4x-3}+1} + \frac{1}{\sqrt{2-x}+1} + \frac{4}{\sqrt{5-4x}+1} + 3-2x > 0, \forall x \in \left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4} \right]$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 50. Giải bất phương trình $\sqrt{3x-2} + 2\sqrt{4x-3} + 4x^2 - 7x + 3 < 4\sqrt{7-6x} + 3\sqrt{9-8x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{7}{6}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x-2} - 1 + 2\sqrt{4x-3} - 2 + 4x^2 - 7x + 3 < 4\sqrt{7-6x} - 4 + 3\sqrt{9-8x} - 3 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{3x-2} - 1 + 2(\sqrt{4x-3} - 1) + (x-1)(4x-3) < 4(\sqrt{7-6x} - 1) + 3(\sqrt{9-8x} - 1) \\ \Leftrightarrow & \frac{3x-3}{\sqrt{3x-2}+1} + \frac{2(4x-4)}{\sqrt{4x-3}+1} + (x-1)(4x-3) < \frac{4(6-6x)}{\sqrt{7-6x}+1} + \frac{3(8-8x)}{\sqrt{9-8x}+1} \\ \Leftrightarrow & (x-1) \left(\frac{3}{\sqrt{3x-2}+1} + \frac{8}{\sqrt{4x-3}+1} + \frac{24}{\sqrt{7-6x}+1} + \frac{24}{\sqrt{9-8x}+1} + 4x-3 \right) < 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác $\frac{3}{\sqrt{3x-2}+1} + \frac{8}{\sqrt{4x-3}+1} + \frac{24}{\sqrt{7-6x}+1} + \frac{24}{\sqrt{9-8x}+1} + 4x-3 > 0, \forall x \in \left[\frac{3}{4}; \frac{7}{6} \right]$.

Do vậy $(1) \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$. Kết hợp điều kiện ta thu được $S = \left[\frac{3}{4}; 1\right)$.

Bài toán 51. Giải phương trình $\sqrt{x+8} - \sqrt{2-x} + x^3 - x^2 + 2x = 4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-8 \leq x \leq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+8} - 3 + 1 - \sqrt{2-x} + x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x+8}+3} + \frac{x-1}{1+\sqrt{2-x}} + (x-1)(x^2+2) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{1}{\sqrt{x+8}+3} + \frac{1}{1+\sqrt{2-x}} + x^2+2 \right) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta để ý $\frac{1}{\sqrt{x+8}+3} + \frac{1}{1+\sqrt{2-x}} + x^2+2 > 0, \forall x \in [-8; 2]$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 52. Giải bất phương trình $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2} + x^3 < 12 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x-2} - 2 + \sqrt{x+2} - 2 + x^3 - 8 < 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{3x-6}{\sqrt{3x-2}+2} + \frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} + (x-2)(x^2+2x+4) < 0 \\ & \Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{3}{\sqrt{3x-2}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} + x^2+2x+4 \right) < 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận định $\frac{3}{\sqrt{3x-2}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} + x^2+2x+4 > 0, \forall x \geq \frac{2}{3}$ nên $(1) \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Kết hợp điều kiện ta thu được tập hợp nghiệm $S = \left[\frac{2}{3}; 2\right)$.

Bài toán 53. Giải bất phương trình $2x^3 + x + 7 + \sqrt{3x+1} < 2x^2 + 5\sqrt{5-x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{1}{3} \leq x \leq 5$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x+1} - 2 + 5(2 - \sqrt{5-x}) + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 < 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{3x-3}{\sqrt{3x+1}+2} + \frac{5(x-1)}{2+\sqrt{5-x}} + (x-1)(2x^2+1) < 0 \\ & \Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} + \frac{5}{2+\sqrt{5-x}} + 2x^2+1 \right) < 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} + \frac{5}{2+\sqrt{5-x}} + 2x^2+1 > 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{3}; 5\right]$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Kết hợp điều kiện thu được nghiệm $-\frac{1}{3} \leq x < 1$.

Bài toán 54. Giải phương trình $\sqrt{4x+5} - \sqrt{8-x} + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 4 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \left[-\frac{5}{4}; 8\right]$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{4x+5} - 1 + 3 - \sqrt{8-x} + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{4x+4}{\sqrt{4x+5}+1} + \frac{x+1}{3+\sqrt{8-x}} + (x+1)(3x^2+2) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x+1) \left(\frac{4}{\sqrt{4x+5}+1} + \frac{1}{3+\sqrt{8-x}} + 3x^2+2 \right) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Dễ thấy rằng $\frac{4}{\sqrt{4x+5}+1} + \frac{1}{3+\sqrt{8-x}} + 3x^2+2 > 0, \forall x \in \left[-\frac{5}{4}; 8\right]$ nên $(1) \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=-1$.

Bài toán 55. Giải phương trình $\sqrt{5x-1} + \sqrt{x+2} + x^3 - 5x^2 + 10x - 13 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{5}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{5x-1} - 3 + \sqrt{x+2} - 2 + x^3 - 5x^2 + 10x - 8 = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{5x-10}{\sqrt{5x-1}+3} + \frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} + (x-2)(x^2-3x+4) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{5}{\sqrt{5x-1}+3} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} + x^2-3x+4 \right) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác chú ý $x^2 - 3x + 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $\frac{5}{\sqrt{5x-1}+3} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} + x^2 - 3x + 4 > 0, \forall x \geq \frac{1}{5}$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$. Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài toán 56. Giải bất phương trình $3x^3 - 17x^2 - 8x + 9 + \sqrt{3x-2} - \sqrt{7-x} > 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \left[\frac{2}{3}; 7\right]$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 3x^3 - 17x^2 - 8x + 12 + \sqrt{3x-2} - 4 + 1 - \sqrt{7-x} > 0 \\ & \Leftrightarrow (x-6)(3x^2+x-2) + \frac{3x-18}{\sqrt{3x-2}+4} + \frac{x-6}{1+\sqrt{7-x}} > 0 \\ & \Leftrightarrow (x-6) \left[(x+1)(3x-2) + \frac{3}{\sqrt{3x-2}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{7-x}} \right] > 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Để ý $(x+1)(3x-2) + \frac{3}{\sqrt{3x-2}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{7-x}} > 0, \forall x \in \left[\frac{2}{3}; 7\right]$ nên $(1) \Leftrightarrow x-6 > 0 \Leftrightarrow x > 6$.

Vậy bất phương trình đề bài có nghiệm $6 < x \leq 7$.

Bài toán 57. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2} + x^4 - 2x^3 + 15x^2 - 4x - 7}{18x^2 - 12x + 1} \geq 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ 18x^2 - 12x + 1 \neq 0 \end{cases}$$

Nhận xét $18x^2 - 12x + 1 = 2(3x-1)^2 - 1 \geq 2 \cdot 1 - 1 = 1 > 0, \forall x \geq \frac{2}{3}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2} + x^4 - 2x^3 + 15x^2 - 4x - 7 \geq 18x^2 - 12x + 1 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2} + x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 8 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{3x-2} - 2 + \sqrt{x+2} - 2 + x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{3x-6}{\sqrt{3x-2}+2} + \frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} + (x-2)(x^3-3x+2) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (x-2) \left[\frac{3}{\sqrt{3x-2}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} + (x-1)^2(x+2) \right] \geq 0 \quad [*] \end{aligned}$$

Ta có $\frac{3}{\sqrt{3x-2}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} + (x-1)^2(x+2) > 0, \forall x \geq \frac{2}{3}$ nên $[*] \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Kết hợp điều kiện ban đầu ta có nghiệm $x \geq 2$.

Bài toán 58. Giải phương trình $2\sqrt{x-1} + 9x^3 - 24x^2 + 10x + 2 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{x-1} - 2 + 9x^3 - 24x^2 + 10x + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow & 2(\sqrt{x-1} - 1) + (x-2)(9x^2 - 6x - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{2(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} + (x-2)(9x^2 - 6x + 1 - 3) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-2) \left[\frac{2}{\sqrt{x-1}+1} + (3x-1)^2 - 3 \right] = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $(3x-1)^2 - 3 \geq (3 \cdot 1 - 1)^2 - 3 = 1 > 0, \forall x \geq 1 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x-1}+1} + (3x-1)^2 - 3 > 0$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$. Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x=2$.

Nhận xét.

Để đưa ra lập luận $9x^2 - 6x - 2 > 0, \forall x \geq 1$ các bạn có thể lựa chọn một trong các phương án sau đây

1. $9x^2 - 6x - 2 = 4x^2 - 3 + (x-1)(5x-1) \geq 4 - 3 + 0 \cdot 4 = 1 > 0, \forall x \geq 1.$

2. $9x^2 - 6x - 2 = (x-1)(9x+3) + 1 \geq 0 \cdot 12 + 1 = 1 > 0, \forall x \geq 1.$

3. $9x^2 - 6x - 2 = (3x-1)^2 - 3 \geq (3 \cdot 1 - 1)^2 - 3 = 1 > 0, \forall x \geq 1.$

4. Khảo sát sự biến thiên hàm số bậc hai $f(x) = 9x^2 - 6x - 2; x \geq 1$. Tọa độ đỉnh đồ thị parabol $I\left(\frac{1}{3}; -3\right)$ nên hàm số đồng biến trên miền $[1; +\infty)$. Do đó $f(x) \geq f(1) = 1 > 0$.

Rõ ràng đối với các bài toán chứa đa thức bậc ba bên ngoài căn thức sau khi sử dụng đại lượng liên hợp ta thường

$$\text{đối mặt hai trường hợp} \begin{cases} h(x) = ax^2 + bx + c & (i) \\ h(x) = ax^2 - bx + c & (ii) \end{cases}$$

Trong đó giả định $a, b, c > 0$. Thao tác đánh giá (i) khá đơn giản như các bài toán trước (có thể đánh giá thông thường theo điều kiện hoặc sử dụng hằng đẳng thức mà không cần điều kiện xác định). Đáng lưu ý nhất là (ii), để xử lý nó có thể có 4 phương án như bài toán 58, trong đó các hướng 1, 2 và 3 tuy gọn gàng nhưng tính tế, phương án 3 hết sức cơ bản và phù hợp với nhiều tình huống, nói chung yêu cầu kiến thức vững chắc về bất đẳng thức cũng như kỹ năng tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một miền.

Bài toán 59. Giải bất phương trình $4x\sqrt{2x-1} + 45x^3 - 75x^2 + 30x < 4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 4x\sqrt{2x-1} - 4x + 45x^3 - 75x^2 + 34x - 4 < 0 \\ \Leftrightarrow & 4x(\sqrt{2x-1} - 1) + (x-1)(45x^2 - 30x + 4) < 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{4x(2x-2)}{\sqrt{2x-1}+1} + (x-1)[5(3x-1)^2 - 1] < 0 \\ \Leftrightarrow & (x-1)\left[\frac{4x}{\sqrt{2x-1}+1} + 5(3x-1)^2 - 1\right] < 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $\frac{4x}{\sqrt{2x-1}+1} + 5(3x-1)^2 - 1 > 5\left(3 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)^2 - 1 > 0, \forall x \geq \frac{1}{2}$ nên (1) $\Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm $S = \left[\frac{1}{2}; 1\right)$.

Bài toán 60. Giải bất phương trình $\frac{3x^3 - 18x^2 + 7x\sqrt{x-3} + 39x - 55}{2x^2 - 4x - 5} > 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện} \begin{cases} x \geq 3 \\ 2x^2 - 4x - 5 \neq 0 \end{cases}$$

Nhận xét $2x^2 - 4x - 5 = 2(x-1)^2 - 7 \geq 2(3-1)^2 - 7 = 1 > 0, \forall x \geq 3$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 3x^3 - 18x^2 + 7x\sqrt{x-3} + 39x - 55 > 3(2x^2 - 4x - 5) \\ \Leftrightarrow & 7x\sqrt{x-3} - 7x + 3x^3 - 24x^2 + 58x - 40 > 0 \\ \Leftrightarrow & 7x\sqrt{x-3} - 7x + (x-4)(3x^2 - 12x + 10) > 0 \\ \Leftrightarrow & 7x(\sqrt{x-3} - 1) + (x-4)(3x^2 - 12x + 10) > 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{7x(x-4)}{\sqrt{x-3}+1} + (x-4)[3(x-2)^2 - 2] > 0 \\ \Leftrightarrow & (x-4)\left[\frac{7x}{\sqrt{x-3}+1} + 3(x-2)^2 - 2\right] > 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Dễ thấy $\frac{7x}{\sqrt{x-3}+1} + 3(x-2)^2 - 2 > 3(3-2)^2 - 2 = 1 > 0, \forall x \geq 3$ nên $(1) \Leftrightarrow x-4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$.

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $x > 4$.

Bài toán 61. Giải bất phương trình $\frac{2x^3 - 7x^2 + x\sqrt{x-3} - 7x + 28}{5x^2 - 20x + 16} > 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 3 \\ 5x^2 - 20x + 16 \neq 0 \end{cases}$

Nhận xét $5x^2 - 20x + 16 = 5(x-2)^2 - 4 \geq 5(3-2)^2 - 4 = 1 > 0, \forall x \geq 3$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x^3 - 7x^2 + x\sqrt{x-3} - 7x + 28 &> 5x^2 - 20x + 16 \\ \Leftrightarrow x\sqrt{x-3} - x + 2x^3 - 12x^2 + 13x + 12 &> 0 \\ \Leftrightarrow x(\sqrt{x-3} - 1) + (x-4)(2x^2 - 4x - 3) &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x(x-4)}{\sqrt{x-3}+1} + (x-4)[2(x-1)^2 - 5] &> 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)\left[\frac{x}{\sqrt{x-3}+1} + 2(x-1)^2 - 5\right] &> 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác $\frac{x}{\sqrt{x-3}+1} + 2(x-1)^2 - 5 > 2(3-1)^2 - 5 = 3 > 0, \forall x \geq 3$ nên $(1) \Leftrightarrow x-4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$.

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x > 4$.

Bài toán 62. Giải bất phương trình $x\sqrt{x-3} + \frac{3}{2}x\sqrt{x} + 2x^3 - 12x^2 + 10x + 14 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x\sqrt{x-3} + 3x\sqrt{x} + 4x^3 - 24x^2 + 20x + 28 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x\sqrt{x-3} - 2x + 3x\sqrt{x} - 3x + 4x^3 - 24x^2 + 25x + 28 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x(\sqrt{x-3} - 1) + 3x(\sqrt{x} - 2) + (x-4)(4x^2 - 8x - 7) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2x(x-4)}{\sqrt{x-3}+1} + \frac{3x(x-4)}{\sqrt{x}+2} + (x-4)(4x^2 - 8x - 7) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)\left[\frac{2x}{\sqrt{x-3}+1} + \frac{3x}{\sqrt{x}+2} + 4(x-1)^2 - 11\right] &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $\frac{2x}{\sqrt{x-3}+1} + \frac{3x}{\sqrt{x}+2} + 4(x-1)^2 - 11 > 4(3-1)^2 - 11 = 5 > 0, \forall x \geq 3$ nên $(1) \Leftrightarrow x-4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x = 4$.

Bài toán 63. Giải bất phương trình $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{3x-2} + 9x^3 - 24x^2 + 10x - 1 \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-1}-1+2\sqrt{3x-2}-4+9x^3-24x^2+10x+4 \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (\sqrt{x-1}-1)+2(\sqrt{3x-2}-2)+(x-2)(9x^2-6x-2) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{2(3x-6)}{\sqrt{3x-2}+2}+(x-2)[(3x-1)^2-3] \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{6}{\sqrt{3x-2}+2}+(3x-1)^2-3\right] \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Dễ thấy $\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{6}{\sqrt{3x-2}+2}+(3x-1)^2-3 > (3.1-1)^2-3=1 > 0, \forall x \geq 1$.

Hơn nữa $(1) \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Kết hợp điều kiện thu được $x \geq 2$.

Bài toán 64. Giải bất phương trình $x(\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-4})+3x^3-21x^2+4x+110 < 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 4$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & x\sqrt{x-1}+2x\sqrt{x-4}-4x+3x^3-21x^2+8x+110 < 0 \\ & \Leftrightarrow x\sqrt{x-1}-2x+2x\sqrt{x-4}-2x+(x-5)(3x^2-6x-22) < 0 \\ & \Leftrightarrow x(\sqrt{x-1}-2)+2x(\sqrt{x-4}-1)+(x-5)[3(x-1)^2-25] < 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{x(x-5)}{\sqrt{x-1}+2}+\frac{2x(x-5)}{\sqrt{x-4}+1}+(x-5)[3(x-1)^2-25] < 0 \\ & \Leftrightarrow (x-5)\left[\frac{x}{\sqrt{x-1}+2}+\frac{2x}{\sqrt{x-4}+1}+3(x-1)^2-25\right] < 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Đề ý $\frac{x}{\sqrt{x-1}+2}+\frac{2x}{\sqrt{x-4}+1}+3(x-1)^2-25 > 3(4-1)^2-25=2 > 0$. Do đó $(1) \Leftrightarrow x-5 < 0 \Leftrightarrow x < 5$.

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $S=[4;5)$.

Bài toán 65. Giải bất phương trình $\frac{9x^3-22x^2+19x+\sqrt{x-1}-7}{x^3+2x^2+2x-4} > 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ x^3+2x^2+2x-4 \neq 0 \end{cases}$

Nhận xét $x^3+2x^2+2x-4 \geq 1+2+2-4=1 > 0, \forall x \geq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 9x^3-22x^2+19x+\sqrt{x-1}-7 > x^3+2x^2+2x-4 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{x-1}-1+8x^3-24x^2+17x-2 > 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+(x-2)(8x^2-8x+1) > 0 \\ & \Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+2(2x-1)^2-1\right] > 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Rõ ràng $\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} + 2(2x-1)^2 - 1 > 2(2-1)^2 - 1 = 1 > 0, \forall x \geq 1$ nên $(1) \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Bài toán 66. Giải phương trình $\frac{44x^3 - 44x^2 + 14x + 3\sqrt{2x-1} - 4}{8x^3 + 4x^2 + 4x - 3} \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x \geq 1 \\ 8x^3 + 4x^2 + 4x - 3 \neq 0 \end{cases}$

Ta có $8x^3 + 4x^2 + 4x - 3 \geq 8 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 3 = 1 > 0, \forall x \geq \frac{1}{2}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 44x^3 - 44x^2 + 14x + 3\sqrt{2x-1} - 4 &\leq 8x^3 + 4x^2 + 4x - 3 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{2x-1} - 3 + 36x^3 - 48x^2 + 10x + 2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 3(\sqrt{2x-1} - 1) + (x-1)(36x^2 - 12x - 2) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3(2x-2)}{\sqrt{2x-1}+1} + (x-1)[(6x-1)^2 - 3] &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{3}{\sqrt{2x-1}+1} + (6x-1)^2 - 3\right] &\leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $\frac{3}{\sqrt{2x-1}+1} + (6x-1)^2 - 3 > \left(6 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)^2 - 3 = 1 > 0, \forall x \geq \frac{1}{2}$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Kết hợp điều kiện ta thu được tập hợp nghiệm $S = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Nhận xét.

Hai bài toán 65 và 66 trên đây tuy chỉ với một căn thức duy nhất nhưng có sự hiện diện đa thức bậc ba dưới mẫu thức, do đó các bạn đọc giả hết sức chú ý điều kiện căn thức, điều kiện xác định (hình thức) để có lập luận chính xác, gọn gàng. Mức độ phức tạp đã tăng lên khi bắt buộc phải đánh giá hai lần, xác định dấu của mẫu thức và đánh giá biểu thức sau khi sử dụng đại lượng liên hợp. Không quá khó khi nhận xét rằng đánh giá đa thức bậc ba khó hơn tam thức bậc hai, và cần kiến thức hàm số - bất đẳng thức – cực trị đại số nhất định. Ở trên chúng ta đã bắt gặp hai biểu thức bậc ba nhưng rất đơn giản, vì có dạng hàm tăng (hàm đồng biến) khi đa thức đều là tổng các đơn thức. Tùy theo các kiến thức đã học các bạn lựa chọn cho mình phương cách hợp lý nhất, không nhất thiết phải áp dụng công cụ đạo hàm, khảo sát hàm số, thậm chí chỉ cần kiến thức Đại số lớp 8 THCS như trên.

Bài toán 67. Giải bất phương trình $\frac{6x^2 - 18x + \sqrt{x-2} + 10}{2x^3 - 2x^2 + 5x - 18} \leq \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^3 - 2x^2 + 5x - 18 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ (x-2)(2x^2 + 2x + 9) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$.

Rõ ràng $2x^3 - 2x^2 + 5x - 18 > 0, \forall x > 2$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x(6x^2 - 18x + \sqrt{x-2} + 10) &\leq 2x^3 - 2x^2 + 5x - 18 \Leftrightarrow 6x^3 - 18x^2 + 10x + x\sqrt{x-2} \leq 2x^3 - 2x^2 + 5x - 18 \\ \Leftrightarrow x\sqrt{x-2} - x + 4x^3 - 16x^2 + 6x + 18 &\leq 0 \Leftrightarrow x(\sqrt{x-2} - 1) + (x-3)(4x^2 - 4x - 6) \leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x(x-3)}{\sqrt{x-2}+1} + (x-3)[(2x-1)^2 - 7] &\leq 0 \Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{x}{\sqrt{x-2}+1} + (2x-1)^2 - 7\right] \leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $\frac{x}{\sqrt{x-2}+1} + (2x-1)^2 - 7 > (2.2-1)^2 - 7 = 2 > 0, \forall x \geq 2$ nên $(1) \Leftrightarrow x-3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $2 < x \leq 3$.

Bài toán 68. Giải bất phương trình $\frac{3x^3 - 14x^2 + 2x\sqrt{x-3} + 12x + 2}{x^3 - 4x^2 + 4x - 3} \leq 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 3 \\ x^3 - 4x^2 + 4x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ (x-3)(x^2 - x + 1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Rõ ràng $x^3 - 4x^2 + 4x - 3 > 0, \forall x > 3$. Do đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3x^3 - 14x^2 + 2x\sqrt{x-3} + 12x + 2 &\leq 2(x^3 - 4x^2 + 4x - 3) \\ \Leftrightarrow 2x\sqrt{x-3} - 2x + x^3 - 6x^2 + 6x + 8 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 2x(\sqrt{x-3} - 1) + (x-4)(x^2 - 2x - 2) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2x(x-4)}{\sqrt{x-3}+1} + (x-4)[(x-1)^2 - 3] &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)\left[\frac{2x}{\sqrt{x-3}+1} + (x-1)^2 - 3\right] &\leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Nhận xét } \frac{2x}{\sqrt{x-3}+1} + (x-1)^2 - 3 > (3-1)^2 - 3 = 1 > 0, \forall x \geq 3 \text{ nên } (1) \Leftrightarrow x-4 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 4.$$

Kết luận điều kiện ta thu được $S = (3; 4]$.

Bài toán 69. Giải bất phương trình $\frac{5x^3 - 31x^2 + 17x + 3x\sqrt{x-2} + 35}{x^3 - 3x^2 + 6x - 7} < 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 2 \\ x^3 - 3x^2 + 6x - 7 \neq 0 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 7; x \geq 2$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x-1)^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số liên tục, đồng biến trên miền $x \geq 2 \Rightarrow f(x) \geq f(2) = 1 > 0$. Bất phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} 5x^3 - 31x^2 + 17x + 3x\sqrt{x-2} + 35 &< x^3 - 3x^2 + 6x - 7 \\ \Leftrightarrow 3x\sqrt{x-2} - 6x + 4x^3 - 28x^2 + 17x + 42 &< 0 \\ \Leftrightarrow 3x(\sqrt{x-2} - 2) + (x-6)(4x^2 - 4x - 7) &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3x(x-6)}{\sqrt{x-2}+2} + (x-6)[(2x-1)^2 - 8] &< 0 \\ \Leftrightarrow (x-6)\left[\frac{3x}{\sqrt{x-2}+2} + (2x-1)^2 - 8\right] &< 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Hơn nữa } \frac{3x}{\sqrt{x-2}+2} + (2x-1)^2 - 8 > (2.2-1)^2 - 8 = 1 > 0, \forall x \geq 2 \text{ nên } (1) \Leftrightarrow x-6 < 0 \Leftrightarrow x < 6.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $2 \leq x < 6$.

Bài toán 70. Giải bất phương trình $\frac{(2x-1)(x-2)+\sqrt{2x-3}}{2x^3-3x^2+3x-4} > \frac{1}{3x} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ 2x^3 - 3x^2 + 3x - 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } 2x^3 - 3x^2 + 3x - 4 = (2x-3)(x^2+1) + x - 1 \geq 0 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0, \forall x \geq \frac{3}{2}.$$

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 6x^3 - 15x^2 + 6x + 3x\sqrt{2x-3} &> 2x^3 - 3x^2 + 3x - 4 \\ \Leftrightarrow 3x\sqrt{2x-3} - 3x + 4x^3 - 12x^2 + 6x + 4 &> 0 \\ \Leftrightarrow 3x(\sqrt{2x-3} - 1) + (x-2)(4x^2 - 4x - 2) &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3x(2x-4)}{\sqrt{2x-3}+1} + (x-2)[(2x-1)^2 - 3] &> 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{6x}{\sqrt{2x-3}+1} + (2x-1)^2 - 3\right] &> 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Nhận xét } \frac{6x}{\sqrt{2x-3}+1} + (2x-1)^2 - 3 > (3-1)^2 - 3 = 1 > 0, \forall x \geq \frac{3}{2} \text{ nên } (1) \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x > 2$.

Nhận xét.

Để lập luận dấu mẫu thức ngoài phương án phân tích như lời giải trên

$$2x^3 - 3x^2 + 3x - 4 = (2x-3)(x^2+1) + x - 1 \geq 0 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0, \forall x \geq \frac{3}{2}.$$

Các bạn có thể lựa chọn các cách sau đây

$$1. \quad 2x^3 - 3x^2 + 3x - 4 = x^2(2x-3) + 3x - 4 \geq 0 + 3 \cdot \frac{3}{2} - 4 = \frac{1}{2}, \forall x \geq \frac{3}{2}.$$

$$2. \quad \text{Xét hàm số } f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 4; x \geq \frac{3}{2} \text{ thì } f'(x) = 6x^2 - 6x + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Như vậy hàm số liên tục và đồng biến với } x \geq \frac{3}{2}, \text{ suy ra } f(x) \geq f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0.$$

Bài toán 71. Giải bất phương trình $\frac{6x^3 - 29x^2 + 18x + x(\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+1}) + 37}{2x^3 - 9x^2 + 28} > 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq \frac{5}{2} \\ 2x^3 - 9x^2 + 28 \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 28; x \geq \frac{5}{2} \text{ ta có } f'(x) = 6x^2 - 18x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 3\}.$$

$$\text{Khảo sát sự biến thiên hàm số trên miền } x \geq \frac{5}{2} \text{ thì } f\left(\frac{5}{2}\right) = 3; f(3) = 1 \Rightarrow \underset{x \geq \frac{5}{2}}{\text{Min}} f(x) = f(3) = 1 > 0.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & 6x^3 - 29x^2 + 18x + x(\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+1}) + 37 > 2x^3 - 9x^2 + 28 \\
 \Leftrightarrow & x(\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+1}) - 3x + 4x^3 - 20x^2 + 21x + 9 > 0 \\
 \Leftrightarrow & x\sqrt{2x-5} - x + x\sqrt{x+1} - 2x + (x-3)(4x^2 - 8x - 3) > 0 \\
 \Leftrightarrow & x(\sqrt{2x-5} - 1) + x(\sqrt{x+1} - 2) + (x-3)[(4x^2 - 8x + 4) - 7] > 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{x(2x-6)}{\sqrt{2x-5}+1} + \frac{x(x-3)}{\sqrt{x+1}+2} + (x-3)[4(x-1)^2 - 7] > 0 \\
 \Leftrightarrow & (x-3) \left[\frac{2x}{\sqrt{2x-5}+1} + \frac{x}{\sqrt{x+1}+2} + 4(x-1)^2 - 7 \right] > 0 \quad (1)
 \end{aligned}$$

Chú ý $\frac{2x}{\sqrt{2x-5}+1} + \frac{x}{\sqrt{x+1}+2} + 4(x-1)^2 - 7 > 4\left(\frac{5}{2}-1\right)^2 - 7 = 2 > 0, \forall x \geq \frac{5}{2}$ nên $(1) \Leftrightarrow x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$.

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x > 3$.

Nhận xét.

Công cụ đạo hàm và kỹ năng khảo sát hàm số là kiến thức hết sức cơ bản và phổ biến của liên chương trình Đại số - Giải tích lớp 11 – 12 THPT. Dễ thấy sử dụng nó để tìm giá trị nhỏ nhất của mẫu thức là hợp lý và hiệu quả mạnh mẽ ngay tức thì. Tuy nhiên liệu một em học sinh lớp 9 THCS có thể lập luận đánh giá mẫu thức và xử lý tốt bài toán trên hay không? Câu trả lời là chắc chắn. Đôi khi các bạn không nên lạm dụng hàm số quá nhiều, chưa cần sử dụng những kiến thức cao quá tầm với, chẳng hạn chỉ cần

$$2x^3 - 9x^2 + 28 = (x-3)^2(2x+3) + 1 \geq 0 + 1 = 1 > 0, \forall x \geq \frac{5}{2}.$$

Bài toán 72. Giải bất phương trình $\frac{5x(x-2)(x-3) + (x+1)\sqrt{x-2} + x}{x(x^2 - 9x + 24) - 14} \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 2 \\ x(x^2 - 9x + 24) - 14 \neq 0 \end{cases}$$

Chú ý $x(x^2 - 9x + 24) - 14 = x^3 - 9x^2 + 24x - 14 = (x-4)^2(x-1) + 2 \geq 2 > 0, \forall x \geq 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & 5x(x^2 - 5x + 6) + (x+1)\sqrt{x-2} + x \leq x^3 - 9x^2 + 24x - 14 \\
 \Leftrightarrow & (x+1)\sqrt{x-2} - x - 1 + 4x^3 - 16x^2 + 7x + 15 \leq 0 \\
 \Leftrightarrow & (x+1)(\sqrt{x-2} - 1) + (x-3)(4x^2 - 4x - 5) \leq 0 \\
 \Leftrightarrow & (x+1) \cdot \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + (x-3)[(2x-1)^2 - 6] \leq 0 \\
 \Leftrightarrow & (x-3) \left[\frac{x+1}{\sqrt{x-2}+1} + (2x-1)^2 - 6 \right] \leq 0 \quad (1)
 \end{aligned}$$

Hơn nữa $\frac{x+1}{\sqrt{x-2}+1} + (2x-1)^2 - 6 > (2 \cdot 2 - 1)^2 - 6 = 3 > 0, \forall x \geq 2$ nên $(1) \Leftrightarrow x-3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$.

Đôi chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $2 \leq x \leq 3$.

Nhận xét.

Nếu sử dụng công cụ đạo hàm – khảo sát hàm số cho thao tác lập luận dấu mẫu thức thì

Xét hàm số $f(x) = x(x^2 - 9x + 24) - 14 = x^3 - 9x^2 + 24x - 14; x \geq 2$.

Đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x-2)(x-4); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2; 4\}$.

Khảo sát hàm số trên với $x \geq 2$ thì $f(2) = 6; f(4) = 2 \Rightarrow \underset{x \geq 2}{\text{Min}} f(x) = f(4) = 2 > 0 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \geq 2$.

Chung quy thì có rất nhiều lựa chọn, tùy theo tình huống, thời gian, hay theo sở thích, theo gu trình bày của bản thân mà các bạn lựa chọn cho mình phương cách phù hợp.

Bài toán 73. Giải bất phương trình $\frac{-2x^2 + 13x - (x+2)\sqrt{x+1} + 33}{x^3 - 3x + 4} \leq 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq -1 \\ x^3 - 3x + 4 \neq 0 \end{cases}$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 4; x \geq -1$ ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}$.

Khảo sát hàm số $f(x); x \geq -1$ thu được $f(1) = 2; f(-1) = 6 \Rightarrow \underset{x \geq -1}{\text{Min}} f(x) = f(1) = 2 \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \geq -1$.

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & -2x^2 + 13x - (x+2)\sqrt{x+1} + 33 \leq 2x^3 - 6x + 8 \\ & \Leftrightarrow (x+2)\sqrt{x+1} - 2x - 4 + 2x^3 + 2x^2 - 17x - 21 \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (x+2)(\sqrt{x+1} - 2) + (x-3)(2x^2 + 8x + 7) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (x+2) \cdot \frac{x-3}{\sqrt{x+1} + 2} + (x-3)[2(x+2)^2 - 1] \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (x-3) \left[\frac{x+2}{\sqrt{x+1} + 2} + 2(x+2)^2 - 1 \right] \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Hơn nữa $\frac{x+2}{\sqrt{x+1} + 2} + 2(x+2)^2 - 1 > 2(-1+2)^2 - 1 = 1 > 0, \forall x \geq -1$ nên $(1) \Leftrightarrow x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x \geq 3$.

Nhận xét.

Các bài toán từ 21 đến 73, không quá khó khăn độc giả có thể nhận thấy sự đơn giản nằm phía trong căn thức và biểu thức gắn với nó, bởi các biểu thức chỉ đơn thuần là nhị thức bậc nhất, thậm chí hằng số. Sau đây là một số thí dụ điển hình nâng cao và phát triển sự phức tạp của các biểu thức ấy, kết hợp đánh giá mẫu thức.

Bài toán 74. Giải phương trình $\frac{x\sqrt{x} + (x+1)\sqrt{x+3}}{2x^2 - 4x - 3} + 1 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0; 2x^2 - 4x - 3 \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & x\sqrt{x} + (x+1)\sqrt{x+3} + 2x^2 - 4x - 3 = 0 \\ & \Leftrightarrow x\sqrt{x} - x + (x+1)\sqrt{x+3} - 2(x+1) + 2x^2 - x - 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow x(\sqrt{x} - 1) + (x+1)(\sqrt{x+3} - 2) + (x-1)(2x+1) = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{\sqrt{x} + 1} + \frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{x+3} + 2} + (x-1)(2x+1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}} + \frac{x+1}{\sqrt{x+3}+2} + 2x+1\right) = 0 \quad (1)$$

Ta có $\frac{x}{\sqrt{x+1}} + \frac{x+1}{\sqrt{x+3}+2} + 2x+1 > 0, \forall x \geq 0$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x=1$.

Bài toán 75. Giải phương trình $\frac{(x+2)\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{2x+3}}{x^3-12x-13}+1=0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq -1 \\ x^3 - 12x - 13 \neq 0 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (x+2)\sqrt{x+1} + (x+1)\sqrt{2x+3} + x^3 - 12x - 13 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x+2)\sqrt{x+1} - 2(x+2) + (x+1)\sqrt{2x+3} - 3(x+1) + x^3 - 7x - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x+2)(\sqrt{x+1}-2) + (x+1)(\sqrt{2x+3}-3) + (x-3)(x^2+3x+2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(x+2)(x-3)}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{(x+1)(2x-6)}{\sqrt{2x+3}+3} + (x-3)(x^2+3x+2) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x-3)\left[\frac{x+2}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{2x+2}{\sqrt{2x+3}+3} + (x+1)(x+2)\right] = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $\frac{x+2}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{2x+2}{\sqrt{2x+3}+3} + (x+1)(x+2) > 0, \forall x \geq -1$ nên $(1) \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài toán 76. Giải bất phương trình $\frac{2x^2 + \sqrt{(x-1)^3} + (2x-1)\sqrt{2x-3}}{x^2+5x-2} > 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$. Nhận xét $x^2+5x-2 > \frac{31}{4}, \forall x \geq \frac{3}{2}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 2x^2 + \sqrt{(x-1)^3} + (2x-1)\sqrt{2x-3} > x^2 + 5x - 2 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(x-1)^3} + (2x-1)\sqrt{2x-3} + x^2 - 5x + 2 > 0 \\ \Leftrightarrow & (x-1)\sqrt{x-1} - x + 1 + (2x-1)\sqrt{2x-3} - 2x + 1 + x^2 - 2x > 0 \\ \Leftrightarrow & (x-1)(\sqrt{x-1}-1) + (2x-1)(\sqrt{2x-3}-1) + x(x-2) > 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{(2x-1)(2x-4)}{\sqrt{2x-3}+1} + x(x-2) > 0 \\ \Leftrightarrow & (x-2)\left[\frac{x-1}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{2(2x-1)}{\sqrt{2x-3}+1} + x\right] > 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Dễ thấy $\frac{x-1}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{2(2x-1)}{\sqrt{2x-3}+1} + x > 0, \forall x \geq \frac{3}{2}$ nên $(1) \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x > 2$.

Bài toán 77. Giải bất phương trình $x^2\sqrt{x} + (x+1)\sqrt{x+3} > 3x+2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & x^2\sqrt{x} - x^2 + (x+1)\sqrt{x+3} - 2x - 2 + x^2 - x > 0 \\ \Leftrightarrow & x^2(\sqrt{x}-1) + (x+1)(\sqrt{x+3}-2) + x(x-1) > 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2(x-1)}{\sqrt{x}+1} + \frac{(x+1)(x-1)}{\sqrt{x+3}+2} + x(x-1) > 0 \\ \Leftrightarrow & (x-1) \left[\frac{x^2}{\sqrt{x}+1} + \frac{x+1}{\sqrt{x+3}+2} + x \right] > 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Để ý rằng $\frac{x^2}{\sqrt{x}+1} + \frac{x+1}{\sqrt{x+3}+2} + x > 0, \forall x \geq 0$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x \geq 1$.

Bài toán 78. Giải bất phương trình $(x-1)\sqrt{x+1} + (x^2-2)\sqrt{x-2} + x^2 - 11x + 13 \leq 0$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (x-1)\sqrt{x+1} - 2x + 2 + (x^2-2)\sqrt{x-2} - x^2 + 2 + 2x^2 - 9x + 9 \leq 0 \\ \Leftrightarrow & (x-1)(\sqrt{x+1}-2) + (x^2-2)(\sqrt{x-2}-1) + (x-3)(2x-3) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(x-1)(x-3)}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{(x^2-2)(x-3)}{\sqrt{x-2}+1} + (x-3)(2x-3) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & (x-3) \left[\frac{x-1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{x^2-2}{\sqrt{x-2}+1} + 2x-3 \right] \leq 0 \quad [1] \end{aligned}$$

Nhận xét $\frac{x-1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{x^2-2}{\sqrt{x-2}+1} + 2x-3 > 2 \cdot 2 - 3 = 1 > 0, \forall x \geq 2$ nên $[1] \Leftrightarrow x-3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$.

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $2 \leq x \leq 3$.

Bài toán 79. Giải bất phương trình $\frac{(3x-1)\sqrt{x-1} + (2x-1)\sqrt{x+2} - 21}{x^2 - 10x + 26} + 1 > 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Nhận xét $x^2 - 10x + 26 = (x-5)^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (3x-1)\sqrt{x-1} + (2x-1)\sqrt{x+2} - 21 + x^2 - 10x + 26 > 0 \\ \Leftrightarrow & (3x-1)\sqrt{x-1} + (2x-1)\sqrt{x+2} + x^2 - 10x + 5 > 0 \\ \Leftrightarrow & (3x-1)\sqrt{x-1} - 3x + 1 + (2x-1)\sqrt{x+2} - 4x + 2 + x^2 - 3x + 2 > 0 \\ \Leftrightarrow & (3x-1)(\sqrt{x-1}-1) + (2x-1)(\sqrt{x+2}-2) + (x-2)(x-1) > 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(3x-1)(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{(2x-1)(x-2)}{\sqrt{x+2}+2} + (x-2)(x-1) > 0 \\ \Leftrightarrow & (x-2) \left(\frac{3x-1}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{2x-1}{\sqrt{x+2}+2} + x-1 \right) > 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $\frac{3x-1}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{2x-1}{\sqrt{x+2}+2} + x-1 > 0, \forall x \geq 1$ nên (1) $\Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Vậy bất phương trình có nghiệm $x > 2$.

Bài toán 80. Giải bất phương trình $\frac{x\sqrt{x+3}+x^3}{x^2+x+1} < 2-\sqrt{x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Rõ ràng $x^2+x+1 \geq 1 > 0, \forall x \geq 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x\sqrt{x+3}+x^3 &< 2(x^2+x+1) - (x^2+x+1)\sqrt{x} \\ \Leftrightarrow (x^2+x+1)\sqrt{x} + x\sqrt{x+3} + x^3 - 2x^2 - 2x - 2 &< 0 \\ \Leftrightarrow (x^2+x+1)\sqrt{x} - x^2 - x - 1 + x\sqrt{x+3} - 2x + x^3 - x^2 + x - 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow (x^2+x+1)(\sqrt{x}-1) + x(\sqrt{x+3}-2) + (x-1)(x^2+1) &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(x^2+x+1)(x-1)}{\sqrt{x}+1} + \frac{x(x-1)}{\sqrt{x+3}+2} + (x-1)(x^2+1) &< 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x}{\sqrt{x+3}+2} + x^2+1\right) &< 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x}{\sqrt{x+3}+2} + x^2+1 > 0, \forall x \geq 0$ nên (1) $\Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Kết hợp điều kiện ta thu được $0 \leq x < 1$.

Bài toán 81. Giải bất phương trình $(x^2-x+1)\sqrt{x+1} + (2x-1)\sqrt{x-2} < x^2+10 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (x^2-x+1)\sqrt{x+1} - 2x^2 + 2x - 2 + (2x-1)\sqrt{x-2} - 2x + 1 + x^2 - 9 &< 0 \\ \Leftrightarrow (x^2-x+1)(\sqrt{x+1}-2) + (2x-1)(\sqrt{x-2}-1) + x^2 - 9 &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(x^2-x+1)(x-3)}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{(2x-1)(x-3)}{\sqrt{x-2}+1} + (x-3)(x+3) &< 0 \\ \Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{2x-1}{\sqrt{x-2}+1} + x+3\right) &< 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Để thấy $\frac{x^2-x+1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{2x-1}{\sqrt{x-2}+1} + x+3 = \frac{(2x-1)^2+3}{4(\sqrt{x+1}+2)} + \frac{2x-1}{\sqrt{x-2}+1} + x+3 > 0, \forall x \geq 2$ nên (1) $\Leftrightarrow x-3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$.

Bài toán 82. Giải phương trình $2x^2-8x-11+(2x^2+1)\sqrt{2x+1}+(x+1)\sqrt{4x+3}=0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& (2x^2+1)\sqrt{2x+1}-4x^2-2+(x+1)\sqrt{4x+3}-3x-3+6x^2-5x-6=0 \\
& \Leftrightarrow (2x^2+1)(\sqrt{2x+1}-2)+(x+1)(\sqrt{4x+3}-3)+(2x-3)(3x+2)=0 \\
& \Leftrightarrow \frac{(2x^2+1)(2x-3)}{\sqrt{2x+1}+2}+\frac{(x+1)(4x-6)}{\sqrt{4x+3}+3}+(2x-3)(3x+2)=0 \\
& \Leftrightarrow (2x-3)\left[\frac{2x^2+1}{\sqrt{2x+1}+2}+\frac{2(x+1)}{\sqrt{4x+3}+3}+3x+2\right]=0 \quad (1)
\end{aligned}$$

Ta có $\frac{2x^2+1}{\sqrt{2x+1}+2}+\frac{2(x+1)}{\sqrt{4x+3}+3}+3x+2>0, \forall x \geq -\frac{1}{2}$ nên (1) $\Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x=\frac{3}{2}$.

Bài toán 83. Giải bất phương trình $\frac{(x^2-1)\sqrt{x-1}+x(3x-1)\sqrt{x+2}+x^3+5x^2-36x+17}{2x^3-9x^2+12x-3}+4 \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^3-9x^2+12x-3 \neq 0 \end{cases}$

Nhận định $2x^3-9x^2+12x-3=(x^2-4x+4)(2x-1)+1=(x-2)^2(2x-1)+1>0, \forall x \geq 1$.

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& (x^2-1)\sqrt{x-1}+x(3x-1)\sqrt{x+2}+x^3+5x^2-36x+17+8x^3-36x^2+48x-12 \geq 0 \\
& \Leftrightarrow (x^2-1)\sqrt{x-1}+x(3x-1)\sqrt{x+2}+9x^3-31x^2+12x+5 \geq 0 \\
& \Leftrightarrow (x^2-1)\sqrt{x-1}-x^2+1+x(3x-1)\sqrt{x+2}-6x^2+2x+9x^3-24x^2+10x+4 \geq 0 \\
& \Leftrightarrow (x^2-1)(\sqrt{x-1}-1)+(3x^2-x)(\sqrt{x+2}-2)+(x-2)(9x^2-6x-2) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{(x^2-1)(x-2)}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{(3x^2-x)(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}+(x-2)(9x^2-6x-2) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{x(3x-1)}{\sqrt{x+2}+2}+(3x-1)^2-3\right] \geq 0 \quad (1)
\end{aligned}$$

Mặt khác $\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{x(3x-1)}{\sqrt{x+2}+2}+(3x-1)^2-3>(3.1-1)^2-3=1>0, \forall x \geq 1$ nên (1) $\Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq 2$.

Bài toán 84. Giải bất phương trình $(x^2-2)\sqrt{x-2}+(x^2-3)\sqrt{x+1}+4x^3-19x^2+5x+29 \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& (x^2-2)\sqrt{x-2}-x^2+2+(x^2-3)\sqrt{x+1}-2x^2+6+4x^3-16x^2+5x+21 \leq 0 \\
& \Leftrightarrow (x^2-2)(\sqrt{x-2}-1)+(x^2-3)(\sqrt{x+1}-2)+(x-3)(4x^2-4x-7) \leq 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{(x^2-2)(x-3)}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{(x^2-3)(x-3)}{\sqrt{x+1}+2}+(x-3)(4x^2-4x-7) \leq 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left[\frac{x^2-2}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{x^2-3}{\sqrt{x+1}+2} + (2x-1)^2 - 8 \right] \leq 0 \quad [*].$$

$$\text{Để ý } \forall x \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} x^2-2 \geq 2^2-2=2>0 \\ x^2-3 \geq 2^2-3=1>0 \\ (2x-1)^2-8 \geq (2.2-1)^2-8=1>0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2-2}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{x^2-3}{\sqrt{x+1}+2} + (2x-1)^2 - 8 > 0.$$

Do đó $[*] \Leftrightarrow x-3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$. Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm $S = [2; 3]$.

Bài toán 85. Giải bất phương trình $(x^2 - 2x + 3)\sqrt{x+3} - (3-x)\sqrt{2-x} \geq 3x^2 - 8x + 7 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-3 \leq x \leq 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (x^2 - 2x + 3)\sqrt{x+3} - 2x^2 + 4x - 6 - (3-x)\sqrt{2-x} + 3 - x \geq x^2 - 5x + 4 \\ & \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 3)(\sqrt{x+3} - 2) + (3-x)(1 - \sqrt{2-x}) \geq (x-1)(x-4) \\ & \Leftrightarrow \frac{(x^2 - 2x + 3)(x-1)}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{(3-x)(x-1)}{1+\sqrt{2-x}} + (4-x)(x-1) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (x-1) \left[\frac{(x-1)^2 + 2}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{3-x}{1+\sqrt{2-x}} + 4-x \right] \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $\frac{(x-1)^2 + 2}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{3-x}{1+\sqrt{2-x}} + 4-x > 0, \forall x \in [-3; 2]$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Kết hợp với điều kiện ta thu được nghiệm $S = [1; 2]$.

Bài toán 86. Giải bất phương trình $9x^2 + (x^2 - 2x - 2)(\sqrt{x-3} - x) < (6-x)\sqrt{5-x} + 48x - 68 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $3 \leq x \leq 5$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (x^2 - 2x - 2)\sqrt{x-3} < (6-x)\sqrt{5-x} + x(x^2 - 2x - 2) - 9x^2 + 48x - 68 \\ & \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 2)\sqrt{x-3} < (6-x)\sqrt{5-x} + x^3 - 11x^2 + 46x - 68 \\ & \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 2)\sqrt{x-3} - x^2 + 2x + 2 < (6-x)\sqrt{5-x} + x - 6 + x^3 - 12x^2 + 47x - 60 \\ & \Leftrightarrow (x^2 - 2x - 2)(\sqrt{x-3} - 1) + (6-x)(1 - \sqrt{5-x}) + (x-4)(x-3)(5-x) < 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{(x^2 - 2x - 2)(x-4)}{\sqrt{x-3}+1} + \frac{(6-x)(x-4)}{1+\sqrt{5-x}} + (x-4)(x-3)(5-x) < 0 \\ & \Leftrightarrow (x-4) \left[\frac{(x-1)^2 - 3}{\sqrt{x-3}+1} + \frac{6-x}{1+\sqrt{5-x}} + (x-3)(5-x) \right] < 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $\begin{cases} (x-1)^2 - 3 \geq (3-1)2 - 3 = 1 > 0, \forall x \in [3; 5] \\ 6-x > 0, \forall x \in [3; 5] \\ (x-3)(5-x) > 0, \forall x \in [3; 5] \end{cases} \Rightarrow \frac{(x-1)^2 - 3}{\sqrt{x-3}+1} + \frac{6-x}{1+\sqrt{5-x}} + (x-3)(5-x) > 0, \forall x \in [3; 5].$

Do đó $(1) \Leftrightarrow x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 4$. Bất phương trình đã cho có nghiệm $3 \leq x < 4$.

Bài toán 87. Giải bất phương trình

$$(x^2 - 2x - 1)\sqrt{x - 3} - (x^2 - 2x + 1)\sqrt{8 - x} + x^3 - 5x^2 + 8x - 5 > 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $3 \leq x \leq 8$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (x^2 - 2x - 1)\sqrt{x - 3} - x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1)\sqrt{8 - x} + 2x^2 - 4x + 2 + x^3 - 6x^2 + 10x - 8 > 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2 - 2x - 1)(\sqrt{x - 3} - 1) + (x^2 - 2x + 1)(2 - \sqrt{8 - x}) + (x - 4)(x^2 - 2x + 2) > 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2 - 2x - 1)\frac{x - 4}{\sqrt{x - 3} + 1} + (x^2 - 2x + 1)\frac{x - 4}{2 + \sqrt{8 - x}} + (x - 4)(x^2 - 2x + 2) > 0 \\ \Leftrightarrow & (x - 4)\left[\frac{(x - 1)^2 - 2}{\sqrt{x - 3} + 1} + \frac{(x - 1)^2}{2 + \sqrt{8 - x}} + (x - 1)^2 + 1\right] > 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } (x - 1)^2 - 2 \geq (3 - 1)^2 - 2 = 2 > 0, \forall x \in [3; 8] \Rightarrow \frac{(x - 1)^2 - 2}{\sqrt{x - 3} + 1} + \frac{(x - 1)^2}{2 + \sqrt{8 - x}} + (x - 1)^2 + 1 > 0, \forall x \in [3; 8].$$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4 \Rightarrow S = (4; 8].$$

Bài toán 88. Giải bất phương trình $x^3 - x^2 - 7x + 3 \leq (x^2 - 4x)\sqrt{x - 2} + (x^2 - 2x)\sqrt{4 - x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2 \leq x \leq 4$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & x^3 - x^2 - x + 3 - (x^2 - 4x) - (x^2 - 2x) \\ & \leq (x^2 - 4x)\sqrt{x - 2} - (x^2 - 4x) + (x^2 - 2x)\sqrt{4 - x} - (x^2 - 2x) \\ \Leftrightarrow & x^3 - 3x^2 - 7x + 3 \leq (x^2 - 4x)(\sqrt{x - 2} - 1) + (x^2 - 2x)(\sqrt{4 - x} - 1) \\ \Leftrightarrow & (x - 3)(x^2 - 1) \leq x(x - 4) \cdot \frac{x - 3}{\sqrt{x - 2} + 1} + x(x - 2) \cdot \frac{3 - x}{\sqrt{4 - x} + 1} \\ \Leftrightarrow & (x - 3)\left[x^2 - 1 + \frac{x(4 - x)}{\sqrt{x - 2} + 1} + \frac{x(x - 2)}{\sqrt{4 - x} + 1}\right] \leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x(4 - x) \geq 0, \forall x \in [2; 4] \\ x(x - 2) \geq 0, \forall x \in [2; 4] \\ x^2 - 1 > 0, \forall x \in [2; 4] \end{cases} \Rightarrow x^2 - 1 + \frac{x(4 - x)}{\sqrt{x - 2} + 1} + \frac{x(x - 2)}{\sqrt{4 - x} + 1} > 0, \forall x \in [2; 4].$$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3 \Rightarrow S = [2; 3].$$

Nhận xét.

Mức độ xử lý các bài toán trên vẫn dừng lại tại thao tác đánh giá tam thức bậc hai, các bạn có thể sử dụng kiến thức sơ bộ Đại số 9, Đại số 10 hoặc công cụ đạo hàm với nó đều cho kết quả khả quan. Sau đây các biểu thức phía ngoài căn sẽ tăng cường độ phức tạp với sự xuất hiện của ít nhất một đa thức bậc ba hoặc bậc cao, biểu thức phía trong căn thức tạm thời vẫn đứng chân dưới dạng nhị thức bậc nhất. Tác giả mong muốn quý độc giả, mong muốn các bạn học sinh hết sức chú ý.

Bài toán 89. Giải phương trình

$$(x^3 + x - 1)\sqrt{x - 1} + (x - 4)\sqrt{3 - x} + x^3 - 4x^2 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $1 \leq x \leq 3$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (x^3 + x - 1)\sqrt{x-1} - x^3 - x + 1 + (x-4)\sqrt{3-x} + 4 - x + 2(x^3 - 2x^2 + x - 2) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x^3 + x - 1)(\sqrt{x-1} - 1) + (4-x)(1 - \sqrt{3-x}) + 2(x-2)(x^2 + 1) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x^3 + x - 1) \cdot \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} + (4-x) \cdot \frac{x-2}{1+\sqrt{3-x}} + 2(x-2)(x^2 + 1) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{x^3 + x - 1}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{4-x}{1+\sqrt{3-x}} + 2x^2 + 2 \right] = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Chú ý rằng $\begin{cases} x^3 + x - 1 \geq 1 + 1 - 1 = 1, \forall x \geq 1 \\ 4 - x > 0, \forall x \in [1; 3] \end{cases} \Rightarrow \frac{x^3 + x - 1}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{4-x}{1+\sqrt{3-x}} + 2x^2 + 2 > 0, \forall x \in [1; 3].$

Do đó (1) $\Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài toán 90. Giải phương trình

$$(x^3 + 1)\sqrt{2x-1} + 4x^3 + x^2 - 5x + 2 = (x^2 + 2)\sqrt{2-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (x^3 + 1)\sqrt{2x-1} - x^3 - 1 + 5x^3 - 5x^2 - x + 1 = (x^2 + 2)\sqrt{2-x} - x^2 - 2 \\ & \Leftrightarrow (x^3 + 1)(\sqrt{2x-1} - 1) + (x^2 + 2)(1 - \sqrt{2-x}) + (x-1)(5x^2 - 1) = 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{(x^3 + 1)(2x-2)}{\sqrt{2x-1}+1} + \frac{(x^2 + 2)(x-1)}{1+\sqrt{2-x}} + (x-1)(5x^2 - 1) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-1) \left[\frac{2(x^3 + 1)}{\sqrt{2x-1}+1} + \frac{x^2 + 2}{1+\sqrt{2-x}} + 5x^2 - 1 \right] = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $x^3 + 1 > 0; \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right], 5x^2 - 1 \geq 5 \cdot \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4} > 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Do đó $\frac{2(x^3 + 1)}{\sqrt{2x-1}+1} + \frac{x^2 + 2}{1+\sqrt{2-x}} + 5x^2 - 1 > 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Suy ra (1) $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Bài toán 91. Giải phương trình

$$(3x^3 - 2x^2 + 3x - 1)\sqrt{3x-2} + (3x^3 - 5x^2)\sqrt{4-3x} = 6x^3 - 8x^2 + 4x - 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (3x^3 - 2x^2 + 3x - 1)\sqrt{3x-2} - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 + (3x^3 - 5x^2)\sqrt{4-3x} - 3x^3 + 5x^2 + x^2 - x = 0 \\ & \Leftrightarrow (3x^3 - 2x^2 + 3x - 1)(\sqrt{3x-2} - 1) + (3x^3 - 5x^2)(\sqrt{4-3x} - 1) + x(x-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left[(3x-2)(x^2+1)+1 \right] \frac{3x-3}{\sqrt{3x-2}+1} + x^2(5-3x) \frac{3x-3}{\sqrt{4-3x}+1} + x(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left[3 \cdot \frac{(3x-2)(x^2+1)+1}{\sqrt{3x-2}+1} + \frac{3x^2(5-3x)}{\sqrt{4-3x}+1} + x \right] = 0 \quad (1)$$

Nhận xét $\begin{cases} (3x-2)(x^2+1)+1 > 0, \forall x \in \left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3} \right] \\ 3x^2(5-3x) > 0, \forall x \in \left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3} \right] \end{cases} \Rightarrow 3 \cdot \frac{(3x-2)(x^2+1)+1}{\sqrt{3x-2}+1} + \frac{3x^2(5-3x)}{\sqrt{4-3x}+1} + x > 0, \forall x \in \left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3} \right].$

Do đó (1) $\Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. Đối chiếu điều kiện kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 92. Giải bất phương trình $(x^3 - x^2 - 3)\sqrt{x-2} + (x^2 - 6x + 7)\sqrt{4-x} + x^3 - 6x^2 + 7x - 7 < 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2 \leq x \leq 4$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$(x^3 - x^2 - 3)\sqrt{x-2} - x^3 + x^2 + 3 + (x^2 - 6x + 7)\sqrt{4-x} - x^2 + 6x - 7 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3 < 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - x^2 - 3)(\sqrt{x-2} - 1) + (-x^2 + 6x - 7)(1 - \sqrt{4-x}) + (x-3)(2x^2 + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - x^2 - 3) \cdot \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + (-x^2 + 6x - 7) \frac{x-3}{1+\sqrt{4-x}} + (x-3)(2x^2 + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left[\frac{x^3 - x^2 - 3}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{(x-2)(4-x)+1}{1+\sqrt{4-x}} + 2x^2 + 1 \right] < 0 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - x^2 - 3; x \in [2; 4]$ ta có $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x-2) > 0, \forall x \in [2; 4]$.

Như vậy hàm số trên đồng biến, liên tục trên miền $[2; 4] \Rightarrow f(x) \geq \min_{x \in [2; 4]} f(x) = f(2) = 1 > 0$.

Hơn nữa $(x-2)(4-x) \geq 0, \forall x \in [2; 4] \Rightarrow \frac{x^3 - x^2 - 3}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{(x-2)(4-x)+1}{1+\sqrt{4-x}} + 2x^2 + 1 > 0, \forall x \in [2; 4]$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x-3 < 0 \Leftrightarrow x < 3 \Rightarrow S = [2; 3)$.

Nhận xét.

Quan sát một chút thao tác lập luận dấu biểu thức $f(x) = x^3 - x^2 - 3; x \in [2; 4]$. Lời giải trên sử dụng công cụ đạo hàm – khảo sát hàm số của liên chương trình Đại số giải tích 11 – 12 THPT, một định hướng rất tự nhiên và cơ bản, tuy nhiên nó đòi hỏi phần nào sự phù hợp về lứa tuổi cũng như cấp học! Hơn nữa bài toán cũng nhẹ nhàng, gặp may mắn khi hàm số cần xét đồng biến trên một miền, tránh được khảo sát bảng biến thiên hay đồ thị hàm số. Ngoài ra các bạn có thể thực hiện theo các phương cách khác không kém cơ bản như sau, và điều này học sinh lớp 8, lớp 9 THCS có lẽ cũng xử lý một cách không quá khó khăn

$$f(x) = x^3 - x^2 - 3 = (x-2)(x^2 + x + 2) + 1 \geq 1, \forall x \geq 2$$

$$f(x) = x^3 - x^2 - 3 = x(x^2 - 1) - 3 \geq 2 \cdot (2^2 - 1) - 3 = 1 > 0, \forall x \geq 2$$

Bài toán 93. Giải bất phương trình $\frac{(x^3 - 11x + 15)\sqrt{x-2} - 185}{x^3 - 2x^2 + 1} \leq \sqrt{7-x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2 \leq x \leq 7$.

Nhận xét $x^3 - 2x^2 + 1 = x^2(x-2) + 1 \geq 1, \forall x \in [2; 7] \quad (1).$

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
 & (x^3 - 11x + 15)\sqrt{x-2} - 185 \leq (x^3 - 2x^2 + 1)\sqrt{7-x} \\
 & \Leftrightarrow (x^3 - 11x + 15)\sqrt{x-2} - 2(x^3 - 11x + 15) + x^3 + 2x^2 - 22x - 156 \\
 & \leq (x^3 - 2x^2 + 1)\sqrt{7-x} - (x^3 - 2x^2 + 1) \\
 & \Leftrightarrow (x^3 - 11x + 15)(\sqrt{x-2} - 2) + (x^3 - 2x^2 + 1)(1 - \sqrt{7-x}) + x^3 + 2x^2 - 22x - 156 \leq 0 \\
 & \Leftrightarrow (x^3 - 11x + 15) \cdot \frac{x-6}{\sqrt{x-2}+2} + (x^3 - 2x^2 + 1) \cdot \frac{x-6}{1+\sqrt{7-x}} + (x-6)(x^2 + 8x + 26) \leq 0 \\
 & \Leftrightarrow (x-6) \left[\frac{x^3 - 11x + 15}{\sqrt{x-2}+2} + \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{1+\sqrt{7-x}} + (x+4)^2 + 10 \right] \leq 0 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
 x \geq 2 & \Rightarrow (x+1)^2 - 8 \geq 9 - 8 = 1 > 0 \\
 \Rightarrow x^3 - 11x + 15 & = (x-2)(x^2 + 2x - 7) + 1 = (x-2)[(x+1)^2 - 8] + 1 \geq 1 > 0, \forall x \in [2; 7]
 \end{aligned}$$

Kết hợp với (1) suy ra $\frac{x^3 - 11x + 15}{\sqrt{x-2}+2} + \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{1+\sqrt{7-x}} + (x+4)^2 + 10 > 0, \forall x \in [2; 7]$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 6 \Rightarrow 2 \leq x \leq 6$ là nghiệm của bài toán đã cho.

Nhận xét.

Trong bối cảnh tình hình thi cử phức tạp như hiện nay, đặc biệt đối với các kỳ thi quốc gia, có vai trò quan trọng, diễn hình như trong phòng thi tuyển sinh Đại học – cao đẳng, việc xử lý ổn thỏa (không bỏ dở dang) một bài toán có tác động rất lớn tới tâm lý làm bài của thí sinh, dường như nó chi phối toàn bộ tinh thần chiến đấu ngay sau đó. Vì lý do ấy, các bài toán phương trình, bất phương trình, hệ phương trình trong đề thi tuyển sinh chính thức (Bộ giáo dục và đào tạo), thực tế không nặng nề về phương pháp, nhưng rất coi trọng tư duy, và thông thường luôn được cài đặt một quả bom nào đó ở cuối con đường, nhằm ngăn chặn bước tiến của đông đảo sĩ tử chúng ta! Tất nhiên chướng ngại vật này luôn có cách giải quyết, mặc dù biết rõ khó khăn nhưng không có gì là không thể. Có thể nói, thao tác lập luận dấu biểu thức trong ngoặc vuông trong lớp bài toán trên là một bước đệm, dứt điểm, giải quyết trọn vẹn bài toán ban đầu, chính vì sự đa dạng và nhu cầu bức thiết của nó khiến tác giả đôi chút trăn trở, băn khoăn khi viết tài liệu nhỏ này, sau mỗi bài toán đều cố gắng nhận xét, đi theo nhiều hướng lập luận khác nhau nhằm tạo ra sự nhẹ nhàng, thân thiện, hy vọng các bạn có cách nhìn khả quan hơn với thao tác quyết định này.

Trong tự bài toán 92, các bạn có thể xử lý các biểu thức trong ngoặc vuông theo các phương án khác như sau

1. Xét hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1; x \in [2; 7]$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4) > 0, \forall x \in [2; 7]$.

Suy ra hàm số liên tục và đồng biến trên miền $[2; 7]$. Cho nên $f(x) \geq \min_{x \in [2; 7]} f(x) = f(2) = 1 > 0$.

2. Xét hàm số $g(x) = x^3 - 11x + 15; x \in [2; 7]$. Ta có $g'(x) = 3x^2 - 11 \geq 3 \cdot 22 - 11 > 0, \forall x \in [2; 7]$.

Suy ra hàm số liên tục và đồng biến trên miền $[2; 7]$. Cho nên $g(x) \geq \min_{x \in [2; 7]} g(x) = g(2) = 1 > 0$.

Bài toán 94. Giải bất phương trình $(x^3 - 2x + 1)\sqrt{x+2} + (x^3 + x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-1} + x \leq 19 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & (x^3 - 2x + 1)\sqrt{x+2} - 2(x^3 - 2x + 1) + (x^3 + x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-1} \\
 & - (x^3 + x^2 - 4x + 3) + 3x^3 + x^2 - 7x - 14 \leq 0 \\
 & \Leftrightarrow (x^3 - 2x + 1)(\sqrt{x+2} - 2) + (x^3 + x^2 - 4x + 3)(\sqrt{x-1} - 1) + 3x^3 + x^2 - 7x - 14 \leq 0
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - 2x + 1) \cdot \frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} + (x^3 + x^2 - 4x + 3) \cdot \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} + (x-2)(3x^2 + 7x + 7) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{x^3 - 2x + 1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x^3 + x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x-1}+1} + 3x^2 + 7x + 7 \right] \leq 0 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 2x + 1; x \geq 1$ ta có $f'(x) = 3x^2 - 2 > 0, \forall x \geq 1$.

Hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến với $x \geq 1$, suy ra $f(x) \geq \min_{x \geq 1} f(x) = f(1) = 0$.

Xét hàm số $g(x) = x^3 + x^2 - 4x + 3; x \geq 1$ ta có $g'(x) = 3x^2 + 2x - 4 \geq 3 + 2 - 4 = 1 > 0, \forall x \geq 1$.

Hàm số $g(x)$ liên tục và đồng biến với $x \geq 1$, suy ra $g(x) \geq \min_{x \geq 1} g(x) = g(1) = 1 > 0$.

Hơn nữa $3x^2 + 7x + 7 \geq 17 > 0, \forall x \geq 1$. Do đó $\frac{x^3 - 2x + 1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x^3 + x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x-1}+1} + 3x^2 + 7x + 7 > 0, \forall x \geq 1$.

Rõ ràng $(1) \Leftrightarrow x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2 \Rightarrow S = [1; 2]$.

Bài toán 95. Giải bất phương trình $(x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\sqrt{x-2} + (2x^3 - 9x^2 + 28)\sqrt{2x+3} + 12x^2 \leq 112 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$(x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\sqrt{x-2} - (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) + (2x^3 - 9x^2 + 28)\sqrt{2x+3} - 3(2x^3 - 9x^2 + 28) + 7x^3 - 21x^2 + 9x - 27 \leq 0$$

$$(x^3 - 6x^2 + 9x + 1)(\sqrt{x-2} - 1) + (2x^3 - 9x^2 + 28)(\sqrt{2x+3} - 3) + (x-3)(7x^2 + 9) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) \cdot \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + (2x^3 - 9x^2 + 28) \cdot \frac{2x-6}{\sqrt{2x+3}+3} + (x-3)(7x^2 + 9) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3) \left[\frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 1}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{2x^3 - 9x^2 + 28}{\sqrt{2x+3}+3} + 7x^2 + 9 \right] \leq 0 \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1; x \geq 2$ ta có $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$.

Dễ thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 3\}$. Khảo sát sự biến thiên hàm số này với $x \geq 2$ ta có

$$f(2) = 3; f(3) = 1 \Rightarrow f(x) \geq \min_{x \geq 2} f(x) = f(3) = 1 > 0.$$

Xét hàm số $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 28; x \geq 2$ ta có $g'(x) = 6x^2 - 18x = 6x(x-3)$.

Dễ thấy $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 3\}$. Khảo sát sự biến thiên hàm số này với $x \geq 2$ ta có

$$g(0) = 28; g(3) = 1 > 0 \Rightarrow g(x) \geq \min_{x \geq 2} g(x) = g(3) = 1 > 0.$$

Kết hợp hai nhận xét trên ta thu được $\frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 1}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{2x^3 - 9x^2 + 28}{\sqrt{2x+3}+3} + 7x^2 + 9 > 0, \forall x \geq 2$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3 \Rightarrow S = [2; 3]$.

Bài toán 96. Giải bất phương trình $(x^3 - 9x^2 + 15x + 26)\sqrt{x-4} + 4x^2 - 93 > (x^3 - 6x^2 + 33)\sqrt{6-x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $4 \leq x \leq 6$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & (x^3 - 9x^2 + 15x + 26)\sqrt{x-4} - (x^3 - 9x^2 + 15x + 26) + (x^3 - 6x^2 + 33) \\
 & + x^2 + 15x - 100 > (x^3 - 6x^2 + 33)\sqrt{6-x} \\
 \Leftrightarrow & (x^3 - 9x^2 + 15x + 26)(\sqrt{x-4} - 1) + (x^3 - 6x^2 + 33)(1 - \sqrt{6-x}) + x^2 + 15x - 100 > 0 \\
 \Leftrightarrow & (x^3 - 9x^2 + 15x + 26)\frac{x-5}{\sqrt{x-4}+1} + (x^3 - 6x^2 + 33)\frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}} + (x-5)(x+20) > 0 \\
 \Leftrightarrow & (x-5)\left(\frac{x^3 - 9x^2 + 15x + 26}{\sqrt{x-4}+1} + \frac{x^3 - 6x^2 + 33}{1+\sqrt{6-x}} + x + 20\right) > 0 \quad (1)
 \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 26; x \in [4; 6]$ ta có $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x-1)(x-5)$.

Rõ ràng $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 5\}$. Khảo sát sự biến thiên hàm số này với $x \in [4; 6]$ thu được

$$f(4) = 6; f(5) = 1; f(6) = 8 \Rightarrow f(x) \geq \min_{x \in [4; 6]} f(x) = f(5) = 1 > 0.$$

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 6x^2 + 33; x \in [4; 6]$ ta có $g'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$.

Rõ ràng $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 4\}$. Khảo sát sự biến thiên hàm số này với $x \in [4; 6]$, rõ ràng hàm số đồng biến và liên

tục, ta thu được $g(x) \geq \min_{x \in [4; 6]} g(x) = g(4) = 1 > 0$.

Kết hợp các dữ kiện trên ta có $\frac{x^3 - 9x^2 + 15x + 26}{\sqrt{x-4}+1} + \frac{x^3 - 6x^2 + 33}{1+\sqrt{6-x}} + x + 20 > 0, \forall x \in [4; 6]$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$. Đối chiếu điều kiện ta có tập hợp nghiệm $S = (5; 6]$.

Bài toán 97. Giải bất phương trình $\frac{x^3 + (2x^3 - 15x^2 + 36x - 22)\sqrt{x-1}}{x^3 - 9x^2 + 24x - 13} < \sqrt{6-x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 1 \leq x \leq 6 \\ x^3 - 9x^2 + 24x - 13 \neq 0 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 13; x \in [1; 6]$ ta có $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x-2)(x-4)$.

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2; 4\}$. Khảo sát sự biến thiên hàm số $f(x)$ trên miền $[1; 6]$ thu được

$$f(1) = 3; f(2) = 7; f(4) = 3; f(6) = 23 \Rightarrow f(x) \geq \min_{x \in [1; 6]} f(x) = f(1) = f(4) = 3 > 0.$$

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & x^3 + (2x^3 - 15x^2 + 36x - 22)\sqrt{x-1} < (x^3 - 9x^2 + 24x - 13)\sqrt{6-x} \\
 \Leftrightarrow & x^3 + 3x^2 - 12x + 4 + (2x^3 - 15x^2 + 36x - 22)\sqrt{x-1} - (2x^3 - 15x^2 + 36x - 22) \\
 & < (x^3 - 9x^2 + 24x - 13)\sqrt{6-x} - 2(x^3 - 9x^2 + 24x - 13) \\
 \Leftrightarrow & x^3 + 3x^2 - 12x + 4 + (2x^3 - 15x^2 + 36x - 22)(\sqrt{x-1} - 1) + (x^3 - 9x^2 + 24x - 13)(2 - \sqrt{6-x}) < 0 \\
 \Leftrightarrow & (x-2)(x^2 + 5x - 2) + (2x^3 - 15x^2 + 36x - 22)\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} + (x^3 - 9x^2 + 24x - 13)\frac{x-4}{2+\sqrt{6-x}} < 0 \\
 \Leftrightarrow & (x-2)\left(x^2 + 5x - 2 + \frac{2x^3 - 15x^2 + 36x - 22}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{x^3 - 9x^2 + 24x - 13}{2+\sqrt{6-x}}\right) < 0 \quad (1)
 \end{aligned}$$

Xét hàm số $g(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 22; x \in [1; 6]$ ta có $g'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x-2)(x-3)$.

Để thấy $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2, 3\}$. Khảo sát sự biến thiên hàm số này trên miền $[1; 6]$ thu được

$$g(1) = 1; g(2) = 6; g(3) = 5; g(6) = 86 \Rightarrow g(x) \geq \min_{x \in [1; 6]} g(x) = g(1) = 1 > 0.$$

Kết hợp với $x^2 + 5x - 2 \geq 4 > 0, \forall x \in [1; 6], f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 13 > 0, \forall x \in [1; 6]$ đi đến

$$x^2 + 5x - 2 + \frac{2x^3 - 15x^2 + 36x - 22}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{x^3 - 9x^2 + 24x - 13}{2 + \sqrt{6-x}} > 0, \forall x \in [1; 6].$$

Từ đây $(1) \Leftrightarrow x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2 \Rightarrow S = [1; 2)$.

Bài toán 98. Giải bất phương trình $\frac{2(2x^3 - 9x^2 + 12x + 1)\sqrt{x} + 13x + 31}{2x^3 - 15x^2 + 24x + 17} \geq \sqrt{5-x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \in [0; 5] \\ 2x^3 - 15x^2 + 24x + 17 \neq 0 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 17; x \in [0; 5]$ ta có $f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x-1)(x-4)$.

Rõ ràng $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 4\}$. Khảo sát hàm số này trên miền $[0; 5]$ thu được

$$f(0) = 17; f(1) = 28; f(4) = 1; f(5) = 12 \Rightarrow \min_{x \in [0; 5]} f(x) = f(4) = 1 > 0.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 2(2x^3 - 9x^2 + 12x + 1)\sqrt{x} + 13x + 31 - (2x^3 - 15x^2 + 24x + 17)\sqrt{5-x} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 2(2x^3 - 9x^2 + 12x + 1)(\sqrt{x} - 1) + (2x^3 - 15x^2 + 24x + 17)(2 - \sqrt{5-x}) + (x-1)(12x+1) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 2(2x^3 - 9x^2 + 12x + 1) \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + (2x^3 - 15x^2 + 24x + 17) \cdot \frac{x-1}{2+\sqrt{5-x}} + (x-1)(12x+1) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (x-1) \left[\frac{2(2x^3 - 9x^2 + 12x + 1)}{\sqrt{x}+1} + \frac{2x^3 - 15x^2 + 24x + 17}{2+\sqrt{5-x}} + 12x + 1 \right] \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta xét hàm số $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1; x \in [0; 5]$ ta có $g'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$.

Đạo hàm $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 2\}$. Khảo sát hàm số này trên miền $[0; 5]$ ta có

$$g(0) = 1; g(1) = 6; g(2) = 5; g(5) = 86 \Rightarrow \min_{x \in [0; 5]} g(x) = g(0) = 1 > 0.$$

Kết hợp với $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 17 > 0, \forall x \in [0; 5]; 24x + 1 > 0, \forall x \in [0; 5]$ ta có $(1) \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $1 \leq x \leq 5$.

Bài toán 99. Giải phương trình $(x^3 + 1)\sqrt{x-3} + (x^4 + x + 1)\sqrt{x+5} = 3x^4 + x^3 + 3x + 4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (x^3 + 1)\sqrt{x-3} + (x^4 + x + 1)\sqrt{x+5} - x^3 - 1 - 3x^4 - 3x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^3 + 1)(\sqrt{x-3} - 1) + (x^4 + x + 1)(\sqrt{x+5} - 3) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^3 + 1) \cdot \frac{x-4}{\sqrt{x-3}+1} + (x^4 + x + 1) \cdot \frac{x-4}{\sqrt{x+5}+3} = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x-4)\left(\frac{x^3+1}{\sqrt{x-3}+1}+\frac{x^4+x+1}{\sqrt{x+5}+3}\right)=0 \quad (1).$$

Ta có $\frac{x^3+1}{\sqrt{x-3}+1}+\frac{x^4+x+1}{\sqrt{x+5}+3}>0, \forall x \geq 3$ nên $(1) \Leftrightarrow x-4=0 \Leftrightarrow x=4$.

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x=4$.

Bài toán 100. Giải phương trình $2(x^3+x-9)\sqrt{x-2}+(x^4-x-13)\sqrt{x+1}=2x^4+2x^3-x-41 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 2(x^3+x-9)\sqrt{x-2}-2(x^3+x-9)+(x^4-x-13)\sqrt{x+1}-2(x^4-x-13)+x-3=0 \\ & \Leftrightarrow 2(x^3+x-9)(\sqrt{x-2}-1)+(x^4-x-13)(\sqrt{x+1}-2)+x-3=0 \\ & \Leftrightarrow 2(x^3+x-9) \cdot \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+(x^4-x-13) \cdot \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}+x-3=0 \\ & \Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{2(x^3+x-9)}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{x^4-x-13}{\sqrt{x+1}+2}+1\right]=0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta xét hàm số $f(x)=x^3+x-9; x \geq 2$ thì $f'(x)=3x^2+1>0, \forall x \in \mathbb{R}$, hàm số liên tục và đồng biến nên ta có

$$f(x) \geq \min_{x \geq 2} f(x) = f(2) = 1 > 0.$$

Xét hàm số $g(x)=x^4-x-13; g'(x)=4x^3-1>0, \forall x \geq 2 \Rightarrow g(x)$ liên tục, đồng biến trên miền $x \geq 2$.

$$g(x) \geq \min_{x \geq 2} g(x) = g(2) = 1 > 0.$$

Kết hợp lại suy ra $\frac{2(x^3+x-9)}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{x^4-x-13}{\sqrt{x+1}+2}+1>0, \forall x \geq 2$. Do đó $(1) \Leftrightarrow x-3=0 \Leftrightarrow x=3$.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài toán 101. Giải phương trình $(x^2+x+1)\sqrt{x}+(x^4-x+1)\sqrt{x+3}=2x^4+x^2-4x+6 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (x^2+x+1)\sqrt{x}+(x^4-x+1)\sqrt{x+3}=2(x^4-x+1)+(x^2+x+1)-3x+3 \\ & \Leftrightarrow (x^2+x+1)(\sqrt{x}-1)+(x^4-x+1)(\sqrt{x+3}-2)+3x-3=0 \\ & \Leftrightarrow (x^2+x+1) \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}+(x^4-x+1) \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}+3(x-1)=0 \\ & \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}+1}+\frac{x^4-x+1}{\sqrt{x+3}+2}+3\right)=0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $x^2+x+1=\frac{4x^2-4x+4}{4}=\frac{(2x-1)^2+3}{4}>0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hơn nữa $x^4-x+1=\frac{4x^4-4x+4}{4}=\frac{4x^4-4x^2+1+4x^2-4x+1+2}{4}=\frac{(2x^2-1)^2+(2x-1)^2+2}{4}>0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x+1}} + \frac{x^4-x+1}{\sqrt{x+3}+2} + 3 > 0, \forall x \geq 0$, nên $(1) \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 102. Giải phương trình

$$(x^3 + 2x^2 + x + 1)\sqrt{2x-1} + (x^4 - x + 2)\sqrt{x+3} = 2x^4 + x^3 + 2x^2 - x + 5 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (x^3 + 2x^2 + x + 1)\sqrt{2x-1} + (x^4 - x + 2)\sqrt{x+3} = 2(x^4 - x + 2) + (x^3 + 2x^2 + x + 1) \\ & \Leftrightarrow (x^3 + 2x^2 + x + 1)(\sqrt{2x-1} - 1) + (x^4 - x + 2)(\sqrt{x+3} - 2) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x^3 + 2x^2 + x + 1)\frac{2x-2}{\sqrt{2x-1}+1} + (x^4 - x + 2)\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{2(x^3 + 2x^2 + x + 1)}{\sqrt{2x-1}+1} + \frac{x^4 - x + 2}{\sqrt{x+3}+2}\right] = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $x^4 - x + 2 = \frac{4x^4 - 4x + 8}{4} = \frac{4x^4 - 4x^2 + 1 + 4x^2 - 4x + 1 + 6}{4} = \frac{(2x^2 - 1)^2 + (2x - 1)^2 + 6}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hơn nữa $x^3 + 2x^2 + x + 1 > 0, \forall x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2(x^3 + 2x^2 + x + 1)}{\sqrt{2x-1}+1} + \frac{x^4 - x + 2}{\sqrt{x+3}+2} > 0, \forall x \geq \frac{1}{2}$. Do đó $(1) \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 103. Giải bất phương trình $x^5 + x^2 + \sqrt{3x+1} = x^4 + 4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & x^5 - x^4 + x^2 + x - 4 + \sqrt{3x+1} = 0 \Leftrightarrow x^5 - x^4 + x^2 + x - 2 + \sqrt{3x+1} - 2 = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-1)(x^4 + x + 2) + \frac{3x-3}{\sqrt{3x+1}+2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^4 + x + 2 + \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2}\right) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $x^4 + x + 2 = \frac{4x^4 + 4x + 8}{4} = \frac{4x^4 - 4x^2 + 1 + 4x^2 + 4x + 1 + 6}{4} = \frac{(2x^2 - 1)^2 + (2x + 1)^2 + 6}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $x^4 + x + 2 + \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} > 0, \forall x \geq -\frac{1}{3}$ nên $(1) \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 104. Giải phương trình $(x^4 - 4x + 3)\sqrt{x-1} + x^5 + 5x = 6x^3 + 5 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (x^4 - 4x + 3)\sqrt{x-1} + x^5 + 5x - 6x^3 + 5 = 0 \\ & \Leftrightarrow (x^4 - 4x + 3)(\sqrt{x-1} - 1) - (x^4 - 4x + 3) + x^5 + x^4 - 6x^3 + x - 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x^4 - 4x + 3) \cdot \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} + (x-2)(x^4 + 3x^3 + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{x^4 - 4x + 3}{\sqrt{x-1}+1} + x^4 + 3x^3 + 1 \right) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $x^4 - 4x + 3 = x^4 - 2x^2 + 1 + 2x^2 - 4x + 2 = (x^2 - 1)^2 + 2(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hơn nữa $x^4 + 3x^3 + 1 > 0, \forall x \geq 1 \Rightarrow \frac{x^4 - 4x + 3}{\sqrt{x-1}+1} + x^4 + 3x^3 + 1 > 0, \forall x \geq 1$ nên $(1) \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài toán 105. Giải phương trình $(x^4 - 8x + 8)\sqrt{2x+3} + 2x^5 - 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 18x = 17 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{3}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &(x^4 - 8x + 8)\sqrt{2x+3} - 2(x^4 - 8x + 8) + 2x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^4 - 8x + 8)(\sqrt{2x+3} - 2) + (2x-1)(x^4 + x^2 + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^4 - 8x + 8) \cdot \frac{2x-1}{\sqrt{2x+3}+2} + (2x-1)(x^4 + x^2 + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x-1) \left(\frac{x^4 - 8x + 8}{\sqrt{2x+3}+2} + x^4 + x^2 + 1 \right) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $x^4 - 8x + 8 = x^4 - 4x^2 + 4 + 4x^2 - 8x + 4 = (x^2 - 2)^2 + 4(x-1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Hơn nữa $x^4 + x^2 + 1 = \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $\frac{x^4 - 8x + 8}{\sqrt{2x+3}+2} + x^4 + x^2 + 1 > 0, \forall x \geq -\frac{3}{2}$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2}$.

Bài toán 106. Giải phương trình $(x^4 + 1)\sqrt{4x+1} + (x^4 - 12x + 16)\sqrt{3x-2} = 5x^4 - 24x + 35 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &(x^4 + 1)\sqrt{4x+1} + (x^4 - 12x + 16)\sqrt{3x-2} = 3(x^4 + 1) + 2(x^4 - 12x + 16) \\ &\Leftrightarrow (x^4 + 1)(\sqrt{4x+1} - 3) + (x^4 - 12x + 16)(\sqrt{3x-2} - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^4 + 1) \cdot \frac{4x-8}{\sqrt{4x+1}+3} + (x^4 - 12x + 16) \cdot \frac{3x-6}{\sqrt{3x-2}+2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{4(x^4 + 1)}{\sqrt{4x+1}+3} + \frac{3(x^4 - 12x + 16)}{\sqrt{3x-2}+2} \right] = 0 \quad (1). \end{aligned}$$

Rõ ràng $x^4 - 12x + 16 = x^4 - 6x^2 + 9 + 6x^2 - 12x + 6 + 1 = (x^2 - 3)^2 + 6(x-1)^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$\frac{4(x^4 + 1)}{\sqrt{4x+1}+3} + \frac{3(x^4 - 12x + 16)}{\sqrt{3x-2}+2} > 0, \forall x \geq \frac{2}{3}.$$

Do đó $(1) \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài toán 107. Giải phương trình $(x^2 + 1)\sqrt{x+2} + (x^5 - 20x^2 + 49)\sqrt{x-1} = x^5 - 20x^2 + 2x + 51 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (x^2 + 1)\sqrt{x+2} + (x^5 - 20x^2 + 49)\sqrt{x-1} = x^5 - 20x^2 + 49 + 2(x^2 + 1) \\ & \Leftrightarrow (x^2 + 1)(\sqrt{x+2} - 2) + (x^5 - 20x^2 + 49)(\sqrt{x-1} - 1) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x^2 + 1) \cdot \frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} + (x^5 - 20x^2 + 49) \cdot \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-2) \left[\frac{x^2+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x^5-20x^2+49}{\sqrt{x-1}+1} \right] = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta xét hàm số $f(x) = x^5 - 20x^2 + 49; x \geq 1$ ta có $f'(x) = 5x^4 - 40x = 5x(x^3 - 8)$.

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 2\}$. Khảo sát sự biến thiên hàm số này trên miền $x \geq 1$ ta có

$$f(0) = 49; f(1) = 28; f(2) = 1 \Rightarrow \underset{x \geq 1}{\text{Min}} f(x) = f(2) = 1 > 0 \Rightarrow \frac{x^2+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x^5-20x^2+49}{\sqrt{x-1}+1} > 0, \forall x \geq 1.$$

Do đó $(1) \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 2$.

Bài toán 108. Giải phương trình

$$(3x^4 + 4x^3 + 2)\sqrt{2x+3} + (2x^5 + 5x^4 - 5x^2 - 20x + 19)\sqrt{x+1} = 31x^4 + 12x^3 - 10x^2 - 41x + 47 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (3x^4 + 4x^3 + 2)\sqrt{2x+3} + (2x^5 + 5x^4 - 5x^2 - 20x + 19)\sqrt{x+1} \\ & = 2(2x^5 + 5x^4 - 5x^2 - 20x + 19) + 3(3x^4 + 4x^3 + 2) - (4x^5 - 12x^4 + x - 3) \\ & \Leftrightarrow (3x^4 + 4x^3 + 2)(\sqrt{2x+3} - 3) + (2x^5 + 5x^4 - 5x^2 - 20x + 19)(\sqrt{x+1} - 2) + (4x^4 + 1)(x - 3) = 0 \\ & \Leftrightarrow (3x^4 + 4x^3 + 2) \frac{2x-6}{\sqrt{2x+3}+3} + (2x^5 + 5x^4 - 5x^2 - 20x + 19) \cdot \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} + (4x^4 + 1)(x-3) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x-3) \left[\frac{3x^4+4x^3+2}{\sqrt{2x+3}+3} + \frac{2x^5+5x^4-5x^2-20x+19}{\sqrt{x+1}+2} + 4x^4+1 \right] = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1) \geq 0, \forall x \geq -1$.

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục, đồng biến trên miền $x \geq -1$. Suy ra $f(x) \geq \underset{x \geq -1}{\text{Min}} f(x) = f(-1) = 1 > 0$.

Xét hàm số $g(x) = 2x^5 + 5x^4 - 5x^2 - 20x + 19$ thì $g'(x) = 10x^4 + 20x^3 - 10x - 20 = 10(x+2)(x^3-1)$.

Phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 1\}$.

Khảo sát hàm số này trên miền $x \geq -1$ ta có $g(-1) = 41; g(1) = 1 \Rightarrow \underset{x \geq -1}{\text{Min}} g(x) = g(1) = 1 > 0$.

Do đó $\frac{3x^4+4x^3+2}{\sqrt{2x+3}+3} + \frac{2x^5+5x^4-5x^2-20x+19}{\sqrt{x+1}+2} + 4x^4+1 > 0, \forall x \geq -1$, nên $(1) \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Bài toán 109. Giải phương trình $(x^5 - 5x - 21)\sqrt{4x - 3} + (x^4 - x - 13)\sqrt{x - 2} = 30x^3 - 124 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (x^5 - 5x - 21)\sqrt{4x - 3} - 3(x^5 - 5x - 21) + (x^4 - x - 13)\sqrt{x - 2} \\ & - (x^4 - x - 13) + 3x^5 + x^4 - 30x^3 - 16x + 48 = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^5 - 5x - 21)(\sqrt{4x - 3} - 3) + (x^4 - x - 13)(\sqrt{x - 2} - 1) + (3x^4 + 10x^3 - 16)(x - 3) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^5 - 5x - 21)\frac{4x - 12}{\sqrt{4x - 3} + 3} + (x^4 - x - 13)\frac{x - 3}{\sqrt{x - 2} + 1} + (3x^4 + 10x^3 - 16)(x - 3) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x - 3)\left[\frac{x^5 - 5x - 21}{\sqrt{4x - 3} + 3} + \frac{x^4 - x - 13}{\sqrt{x - 2} + 1} + 3x^4 + 10x^3 - 16\right] = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = x^5 - 5x - 21; x \geq 2$ ta có $f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1) > 0, \forall x \geq 2$.

Hàm số liên tục và đồng biến trên miền $x \geq 2$. Suy ra $f(x) \geq \min_{x \geq 2} f(x) = f(2) = 1 > 0$.

Xét hàm số $g(x) = x^4 - x - 13; x \geq 2$. Ta có $g'(x) = 4x^3 - 1 > 0, \forall x \geq 2$ nên hàm số liên tục, đồng biến.

Suy ra $g(x) \geq \min_{x \geq 2} g(x) = g(2) = 1 > 0$.

Xét hàm số $h(x) = 3x^4 + 10x^3 - 16$ ta có $h'(x) = 12x^3 + 30x^2 > 0, \forall x \geq 2$, hàm số liên tục và đồng biến.

Do đó $h(x) \geq \min_{x \geq 2} h(x) = h(2) = 112 > 0$.

Kết hợp lại ta có $\frac{x^5 - 5x - 21}{\sqrt{4x - 3} + 3} + \frac{x^4 - x - 13}{\sqrt{x - 2} + 1} + 3x^4 + 10x^3 - 16 > 0, \forall x \geq 2$. Khi đó $(1) \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Nhận xét.

109 bài toán trên đây tác giả tạm dừng lại với hai căn thức, biểu thức dưới dấu căn có dạng nhị thức bậc nhất, đa thức phía ngoài căn hoặc gắn với căn thức dừng lại tại đa thức hệ số nguyên bậc 5. Hơn nữa trọng tâm tài liệu là sử dụng đại lượng liên hợp sau khi đã xác định một nghiệm, điều này vẫn còn mức độ đơn giản, với Lý thuyết phần 3 có hai nghiệm, liên hợp biểu thức sẽ trở nên phức tạp hơn rất nhiều. Hầu hết các bạn đọc giả đều dễ dàng phán đoán được nghiệm nguyên hay nghiệm hữu tỷ của bài toán, tuy nhiên công đoạn phía sau tỏ ra khó khăn, đòi hỏi cần có những cái nhìn tinh tế, nhạy bén, kỹ năng đánh giá, ước lượng thuần túy, sử dụng công cụ đạo hàm – khảo sát hàm số hay tính chất bất đẳng thức, nói chung cần có nền tảng, có năng khiếu và quá trình rèn luyện gian nan, kiên trì, mọi sự tùy duyên nhưng không thể hoàn tất trong một sớm một chiều, cần có quy luật và thời gian nhất định.

Mặt khác, 109 bài toán còn có một sự đơn điệu khi hầu hết các đánh giá của chúng ta đều có tính chất đồng chỉ, tức là đánh giá cùng phương hướng, chưa xuất hiện những đánh giá đối lập hay cần tư duy quá khó. Trong phần tiếp theo của tài liệu, tác giả trân trọng giới thiệu một số bài toán phức tạp hơn, với hình thức đa dạng của các đa thức trong căn thức và phía ngoài căn thức, cũng như số lượng căn thức tăng lên, kết hợp đánh giá nghịch chỉ, đánh giá đối lập hai bên phương trình, hy vọng các bạn sẽ có cách nhìn toàn diện hơn đối với các phép xử lý hệ quả phía sau phép liên hợp – trực căn thức cơ bản.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập số thực

1. $\sqrt{x-2} + 2x^2 - 8x + 5 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
2. $3\sqrt{x+1} + 2x^2 - 3x - 15 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
3. $5\sqrt{5x-1} + 12x^2 - 14x - 8 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
4. $5\sqrt{2x-3} + 24x^2 - 78x + 55 < 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
5. $7\sqrt{3x-2} + 3x^2 - 8x - 10 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
6. $12\sqrt{5x-1} + 30x^2 - 35x - 19 > 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
7. $\frac{7\sqrt{7x-6} + 25x^2 - 36x + 34}{x^2 + 8x + 21} \geq 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
8. $\frac{5x^2 - 4x + 11\sqrt{x} - 7}{x^2 - 2x + 2} \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
9. $\frac{5x^2 - 7x - 10 + 3\sqrt{4x+1}}{x^2 + x + 6} < 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
10. $7\sqrt{x+3} + 12x^3 - 12x^2 + 6x - 20 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
11. $\frac{1 + \sqrt{3-x}}{x^3 - 2} = \frac{1}{3} \quad (x \in \mathbb{R}).$
12. $\frac{2 + \sqrt{3-x}}{x^3 - 12} = \frac{1}{4} \quad (x \in \mathbb{R}).$
13. $7\sqrt{3x-2} + 6x(x^2 - x - 1) = 26 \quad (x \in \mathbb{R}).$
14. $\frac{6x^3 + 9}{4\sqrt{10-x} + 3x^2} > 16 \quad (x \in \mathbb{R}).$
15. $\frac{3\sqrt{2x-1} + x^3}{9-5x} = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
16. $\frac{4x^2 + 5\sqrt{x-2} - 7x - 6}{x^2 + x - 5} \geq 2 \quad (x \in \mathbb{R}).$
17. $\frac{11x^2 - 20x + 7 + 7x\sqrt{x-1}}{x(5x-3) - 1} \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
18. $\frac{3\sqrt{x-4} + 3x^2 - 21x + 34}{x^2 - 4x + 2} \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
19. $\frac{x^3 + 2x^2 - 45x - 9 + 4x\sqrt{x-2}}{2x^2 - 2x - 3} > 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
20. $3\sqrt{x+5} + 2\sqrt{x+12} + x^2 + 2x \geq 41 \quad (x \in \mathbb{R}).$
21. $4\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7} + 2x^2 + 2x > 23 \quad (x \in \mathbb{R}).$
22. $\frac{3x^2 + \sqrt{3x+1}}{2\sqrt{6-x} + 14x + 7} = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
23. $3\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 16 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
24. $2\sqrt{5x-4} + \sqrt{2x-1} + 6x^2 - x - 9 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$

25. $4\sqrt{2x+7} + 2x^2 + 13x + 21 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
26. $\frac{6x^2 + 2\sqrt{5x-4} + \sqrt{2x-1}}{x+8} = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
27. $\frac{\sqrt{x+3} - 2\sqrt{7-x}}{x^2 - 14x + 49} = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
28. $4\sqrt{2x+7} - 2\sqrt{1-5x} + 4x^2 + 26x + 46 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
29. $4\sqrt{3x+4} - \sqrt{3-x} + 4x^2 + 11x + 5 \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
30. $4\sqrt{3x+4} + 4x^2 + 11x + 9 < 3\sqrt{3-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$
31. $\sqrt{3x-2} + 4\sqrt{x+2} + x^3 - 18 < 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
32. $3\sqrt{3x+1} - 5\sqrt{5-x} + 2x^3 - 2x^2 + x + 3 < 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
33. $\frac{\sqrt{4x+5} + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 7}{\sqrt{8-x}} = 2 \quad (x \in \mathbb{R}).$
34. $\sqrt{5x-1} + 5\sqrt{x+2} + x^3 - 5x^2 + 10x = 21 \quad (x \in \mathbb{R}).$
35. $3x^3 - 17x^2 - 8x + 10 + \sqrt{3x-2} > 2\sqrt{7-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$
36. $\sqrt{3x-2} + 3\sqrt{x+2} + x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 12 \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
37. $3\sqrt{x-1} + 9x^3 - 24x^2 + 10x + 1 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
38. $2x\sqrt{x-1} + 9x^3 - 24x^2 + 8x + 4 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
39. $4\sqrt{2x-1} + 45x^3 - 75x^2 + 34x - 8 < 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
40. $\frac{3x^3 - 18x^2 + 7\sqrt{x-3} + 46x - 62}{2x^2 - 4x - 5} > 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$
41. $2x^3 - 12x^2 + 13x + 11 + \sqrt{x-3} > 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
42. $2\sqrt{x-3} + 3x\sqrt{x} + 4x^3 - 24x^2 + 25x + 26 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
43. $3\sqrt{x-1} + 2\sqrt{3x-2} + 9x^3 - 24x^2 + 10x = 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$
44. $x\sqrt{x-1} + 3x\sqrt{x-4} + 3x^3 - 21x^2 + 3x + 110 < 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
45. $\frac{9x^3 - 22x^2 + 19x + 3\sqrt{x-1} - 9}{x^3 + 2x^2 + 2x - 4} > 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
46. $\frac{44x^3 - 44x^2 + 14x + 4\sqrt{2x-1} - 5}{8x^3 + 4x^2 + 4x - 3} \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
47. $\frac{6x^2 - 18x + 3\sqrt{x-2} + 8}{2x^3 - 2x^2 + 5x - 18} \leq \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R}).$
48. $\frac{3x^3 - 14x^2 + 4x\sqrt{x-3} + 10x + 2}{x^3 - 4x^2 + 4x - 3} \leq 2 \quad (x \in \mathbb{R}).$
49. $\frac{5x^3 - 31x^2 + 15x + 4x\sqrt{x-2} + 35}{x^3 - 3x^2 + 6x - 7} < 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
50. $\frac{6x^3 - 15x^2 + 4x + 5x\sqrt{2x-3}}{2x^3 - 3x^2 + 3x - 4} > 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
51. $\frac{6x^3 - 29x^2 + 16x + 37 + 3x\sqrt{2x-5} + x\sqrt{x+1}}{2x^3 - 9x^2 + 28} > 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

$$52. 2x\sqrt{x} + (x+2)\sqrt{x+3} + 2x^2 - 5x - 3 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$53. \frac{-2x^2 + 13x - (x+3)\sqrt{x+1} + 35}{2x^3 - 6x + 8} \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$54. \frac{5x^3 - 24x^2 + 30x - 1 + (x+2)\sqrt{x-2}}{x^3 - 9x^2 + 24x - 14} \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$55. \frac{2x^2 - x + 1 + 2\sqrt{(x-1)^3} + (2x-1)\sqrt{2x-3}}{x^2 + 5x - 2} > 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$56. x^2\sqrt{x} + (x+3)\sqrt{x+3} > 3x + 6 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$57. (x-1)\sqrt{x+1} + (x^2-3)\sqrt{x-2} + x^2 - 11x + 14 \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$58. (x^2 - x + 3)\sqrt{x+1} + (2x-1)\sqrt{x-2} < x^2 + 14 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$59. \frac{(x^2 + x + 4)\sqrt{x} + x\sqrt{x+3} + x^3}{2x^2 + 2x + 5} < 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$60. (2x^2 + 1)\sqrt{2x+1} + (x+1)\sqrt{4x+3} + 2x^2 - 8x - 21 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$61. (x^2 - 2)\sqrt{x-2} + (x^2 - 1)\sqrt{x+1} + 4x^3 - 19x^2 + 5x + 25 \leq 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$62. \frac{(x^2 - 2x + 3)\sqrt{x+3} - 3x^2 + 8x - 6}{4 - x} \geq \sqrt{2-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$63. (x^2 - 2x - 1)\sqrt{x-3} - (x^2 - 2x + 1)\sqrt{8-x} + 2x^3 - 11x^2 + 18x - 13 > 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$64. \frac{(x^3 + x - 1)\sqrt{x-1} + (x-4)\sqrt{3-x} + 3}{2x^2 + x} - 1 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$65. 9x^3 - 9x^2 - 2x + 3 + (x^3 + 1)\sqrt{2x-1} = (x^2 + 2)\sqrt{2-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$66. \frac{(x^3 - 11x + 15)\sqrt{x-2} - x^3 - x^2 + 16x - 29}{x^3 - 2x^2 + 1} \leq \sqrt{7-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$67. (x^3 - 2x + 1)\sqrt{x+2} + (x^3 + x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-1} \leq 3x^3 + x^2 - 8x + 7 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$68. \frac{(3x^4 + 4x^3 + 2)\sqrt{2x+3} + (2x^5 + 5x^4 - 5x^2 - 20x + 19)\sqrt{x+1}}{31x^4 + 12x^3 - 10x^2 - 43x + 53} = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$69. \frac{2(x^2 + 1)\sqrt{x+2} + (x^5 - 20x^2 + 49)\sqrt{x-1}}{x^5 - 16x^2 + 53} = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$70. \frac{2(x^4 + 1)\sqrt{4x+1} + (x^4 - 12x + 16)\sqrt{3x-2}}{8x^4 - 24x + 38} = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$71. (x^5 - 5x - 21)\sqrt{4x-3} + 2(x^4 - x - 13)\sqrt{x-2} = x^4 + 30x^3 - x - 137 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$72. \frac{(x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\sqrt{x-2} + (2x^3 - 9x^2 + 28)\sqrt{2x+3}}{7x^3 - 24x^2 + 9x + 85} = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$73. \frac{4(x^3 + 1)\sqrt{x+3} + (x^4 + x + 1)\sqrt{x+5}}{3x^4 + 4x^3 + 7} = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$74. \frac{(x^3 - 9x^2 + 15x + 26)\sqrt{x-4} + 4x^2 - 18x - 3}{x^3 - 6x^2 + 33} > \sqrt{6-x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Bài toán 110. Giải phương trình $\sqrt{x+3} = x^2 + 3x - 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+3} - 2 = x^2 + 3x - 4 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} = (x-1)(x+4) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = x+4 \end{cases} \quad (1)$$

Ta có $\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} \leq \frac{1}{2} < 1 \leq x+4, \forall x \geq -3 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm. Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Nhận xét.

Để lập luận phương trình (1) ở trên vô nghiệm theo điều kiện xác định, trước hết ta biến đổi

$$(1) \Leftrightarrow (x+4)(\sqrt{x+3}+2) = 1$$

Sau đó các bạn có thể lựa chọn thêm các phương án sau đây,

- Đặt ẩn phụ $\sqrt{x+3} = t, t \geq 0$ thì thu được $\begin{cases} (t^2+1)(t+2) = 1 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 + 2t^2 + t = -1 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in \emptyset$.
- Xét hàm số $f(x) = (x+4)(\sqrt{x+3}+2); x \geq -3$, hàm số đồng biến nên $f(x) \geq \min_{x \geq -3} f(x) = f(-3) = 2 > 1$.

Và tất yếu, các trường hợp đều cho phương trình (1) vô nghiệm.

Bài toán 111. Giải phương trình $\sqrt{x+2} = x^2 + 3x - 8 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -2$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+2} - 2 = x^2 + 3x - 10 \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} = (x-2)(x+5) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = x+5 \end{cases} \quad (1)$$

Ta có $\frac{1}{\sqrt{x+2}+2} \leq \frac{1}{2} < 3 \leq x+5, \forall x \geq -2 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm. Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 112. Giải phương trình $2\sqrt{x+1} = x^2 + 5x - 20 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2(\sqrt{x+1}-2) = x^2 + 5x - 24 \Leftrightarrow \frac{2x-6}{\sqrt{x+1}+2} = (x-3)(x+8) \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \frac{2}{\sqrt{x+1}+2} = x+8 \end{cases} \quad (1)$$

Rõ ràng $\frac{2}{\sqrt{x+1}+2} \leq \frac{2}{2} = 1 < 7 \leq x+8, \forall x \geq -1 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x=3$.

Nhận xét.

Các bài toán 111 và 112 đối với phương trình hệ quả (1) đều có các cách lập luận vô nghiệm tương tự bài toán 110. Tùy nghi theo gu trình bày, theo kiến thức sẵn có của bản thân, theo độ tuổi và cấp học, tác giả mong muốn các bạn độc giả lựa chọn cho mình hướng đi phù hợp nhất.

Bài toán 113. Giải phương trình $4\sqrt{x+5} = 3x^2 + 6x - 60 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -5$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$4(\sqrt{x+5}-3) = 3(x^2+2x-24) \Leftrightarrow \frac{4(x-4)}{\sqrt{x+5}+3} = 3(x-4)(x+6) \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ \frac{4}{\sqrt{x+5}+3} = 3(x+6) \end{cases} \quad (1)$$

Ta dễ ý $\frac{4}{\sqrt{x+5}+3} \leq \frac{4}{3} < 3 \leq 3(x+6) \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 4$.

Bài toán 114. Giải phương trình $5\sqrt{x-1} = x^3 - 2x^2 + 6x - 7 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$5(\sqrt{x-1}-1) = x^3 - 2x^2 + 6x - 12 \Leftrightarrow \frac{5(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} = (x-2)(x^2+6) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{5}{\sqrt{x-1}+1} = x^2+6 \end{cases} \quad (1)$$

Dễ thấy $\frac{5}{\sqrt{x-1}+1} \leq \frac{5}{1} = 5 < 7 \leq x^2+6, \forall x \geq 1$ nên (1) vô nghiệm.

Suy ra phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = 2$.

Bài toán 115. Giải phương trình $2\sqrt{3x+1} = x^3 - 3x^2 + 5x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2(\sqrt{3x+1}-2) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3 \Leftrightarrow \frac{2(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2} = (x-1)(x^2-2x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{2}{\sqrt{3x+1}+2} = (x-1)^2+2 \end{cases} \quad (1)$$

Dễ dàng nhận thấy $\frac{2}{\sqrt{3x+1}+2} \leq \frac{2}{2} = 1 < 2 \leq (x-1)^2+2, \forall x \geq -\frac{1}{3} \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Suy ra phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 116. Giải phương trình $5\sqrt{x+2} = x^3 + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$5(\sqrt{x+2}-2) = x^3 - 8 \Leftrightarrow \frac{5(x-2)}{\sqrt{x+2}+2} = (x-2)(x^2+2x+4) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{5}{\sqrt{x+2}+2} = (x+1)^2+3 \end{cases} \quad (1)$$

Rõ ràng $\frac{5}{\sqrt{x+2}+2} \leq \frac{5}{2} < 3 \leq (x+1)^2+3, \forall x \geq -2$ nên (1) vô nghiệm.

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài toán 117. Giải phương trình $\sqrt{x+5} = 2x^2 + 3x - 41 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -5$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x+5} - 3 = 2x^2 + 3x - 44 \Leftrightarrow \frac{(x-4)}{\sqrt{x+5}+3} = (x-4)(2x+11) \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ \frac{1}{\sqrt{x+5}+3} = 2x+11 \end{cases} \quad (1)$$

Dễ nhận thấy $\frac{1}{\sqrt{x+5}+3} \leq \frac{1}{3} < 1 \leq 2x+11, \forall x \geq -5$ nên (1) vô nghiệm.

Kết luận phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $x = 4$.

Bài toán 118. Giải phương trình $3\sqrt{17x+3} = 289x^2 - 34x - 15 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{3}{17}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3(\sqrt{17x+3} - 3) &= 289x^2 - 34x - 24 \\ \Leftrightarrow \frac{3(17x-6)}{\sqrt{17x+3}+3} &= (17x-6)(17x+4) \Leftrightarrow \begin{cases} 17x-6=0 \\ \frac{3}{\sqrt{17x+3}+3} = 17x+4 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Dễ thấy $\frac{3}{\sqrt{17x+3}+3} \leq \frac{3}{3} = 1 \leq 17x+4, \forall x \geq -\frac{3}{17}$ nên (1) có nghiệm khi dấu đẳng thức xảy ra.

Tức là thu được $(17x-6)(17x+3) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{3}{17}; \frac{6}{17}\right\}$.

Thử lại trực tiếp, kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 119. Giải phương trình $(\sqrt{x+7} + 3)^2 = 17x^2 + 137x - 306 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -7$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 6\sqrt{x+7} &= 17x^2 + 136x - 322 \Leftrightarrow 6(\sqrt{x+7} - 3) = 17(x^2 + 8x - 20) \\ \Leftrightarrow \frac{6(x-2)}{\sqrt{x+7}+3} &= 17(x-2)(x+10) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{6}{\sqrt{x+7}+3} = 17(x+10) \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $\frac{6}{\sqrt{x+7}+3} \leq \frac{6}{3} = 2 < 119 = 17(-3+10) \leq 17(x+10)$ suy ra (1) vô nghiệm.

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x = 2$.

Bài toán 120. Giải phương trình $2(5 + 2\sqrt{3x+2}) = 9x(1+3x) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{2}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4\sqrt{3x+2} &= 27x^2 + 9x - 10 \Leftrightarrow 4(\sqrt{3x+2} - 2) = 9(3x^2 + x - 2) \\ \Leftrightarrow \frac{4(3x-2)}{\sqrt{3x+2}+2} &= 9(3x-2)(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2=0 \\ \frac{4}{\sqrt{3x+2}+2} = 9(x+1) \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $\frac{4}{\sqrt{3x+2}+2} \leq \frac{4}{2} = 2 < 3 \leq 9(x+1), \forall x \geq -\frac{2}{3}$ nên (1) vô nghiệm.

Vậy ta có $3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$. Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm.

Bài toán 121. Giải phương trình $13\sqrt{x-3}+5=(x-2)(x^2-2x+1) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 13\sqrt{x-3} &= x^3 - 4x^2 + 5x - 7 \Leftrightarrow 13(\sqrt{x-3}-1) = x^3 - 4x^2 + 5x - 20 \\ \Leftrightarrow \frac{13(x-4)}{\sqrt{x-3}+1} &= (x-4)(x^2+5) \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ \frac{13}{\sqrt{x-3}+1} = x^2+5 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận thấy $\frac{13}{\sqrt{x-3}+1} \leq \frac{13}{1} = 13 < 14 \leq x^2+5, \forall x \geq 3$ nên (1) vô nghiệm.

Do đó thu được nghiệm duy nhất của phương trình $x=4$.

Bài toán 122. Giải bất phương trình $7\sqrt{x-4} \leq (x-4)(x^2-x-12)-1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 4$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 7\sqrt{x-4} &\leq x^3 - 5x^2 - 8x + 47 \Leftrightarrow 7(\sqrt{x-4}-1) \leq x^3 - 5x^2 - 8x + 40 \\ \Leftrightarrow \frac{7(x-5)}{\sqrt{x-4}+1} &\leq (x-5)(x^2-8) \Leftrightarrow (x-5)\left(x^2-8-\frac{7}{\sqrt{x-4}+1}\right) \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $x^2-8 \geq 4^2-8=8 > 7 = \frac{7}{1} \geq \frac{7}{\sqrt{x-4}+1}, \forall x \geq 4 \Rightarrow x^2-8-\frac{7}{\sqrt{x-4}+1} > 0, \forall x \geq 4$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$. Kết hợp điều kiện ta có tập hợp nghiệm $S=[5; +\infty)$.

Nhận xét.

Bài toán 122 đã bước đầu chuyển sang bất phương trình, có thể gây khó khăn đối với một số bạn đọc nhỏ tuổi hoặc chưa được rèn kỹ năng về bất phương trình. Một số bạn học sinh thường sử dụng giải phương trình, kết hợp xét dấu các nghiệm của bài toán, tuy nhiên theo ý kiến chủ quan của tác giả, làm như thế là thủ công và rất dễ gây mất nghiệm, thiếu nghiệm, thậm chí thừa nghiệm mà không kiểm soát được, hơn nữa dường như còn làm mất đi sự đẹp đẽ vốn có trong đánh giá bất phương trình, mặc dù điều này không quá khó.

Lưu ý đối với lớp bất phương trình, các bạn không tách riêng nghiệm như các phương trình trước đó, thực hiện chuyển vế và giữ nguyên biểu thức cồng kềnh, sử dụng tổng hợp các kiến thức có được về ẩn phụ, ước lượng thuần túy, hàm số, bất đẳng thức, tìm cực trị để lập luận xử lý biểu thức cuối cùng, đi đến lời giải trọn vẹn. Một sai lầm rất thường thấy của các bạn học sinh hiện nay là tinh thần xông pha, hiếu thắng nhất thời quên mất đi điều kiện xác định ban đầu, lăm le chạy ngay vào cấm thành nhưng đến trung tâm thì bị chặn lại do thiếu quân tiếp viện! Đối với bất phương trình vô tỷ nói chung, điều kiện xác định luôn rất đối thân thương và quan trọng, là tiền đề mở ra hướng đi đột phá trong các đánh giá cho chúng ta.

Hàng năm, dù đi về đâu,
Cũng biết cúi đầu nhớ ngày giỗ tổ.

Bài toán 123. Giải bất phương trình $9\sqrt{x-2} \leq (x-1)(2x^2-10x-13)+5 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 9(\sqrt{x-2}-2) &\leq 2x^3-12x^2-3x+18 \Leftrightarrow 9\sqrt{x-2} \leq 2x^3-12x^2-3x+36 \\ &\Leftrightarrow \frac{9(x-6)}{\sqrt{x-2}+2} \leq (x-6)(2x^2-3) \Leftrightarrow (x-6)\left(2x^2-3-\frac{9}{\sqrt{x-2}+2}\right) \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $2x^2-3 \geq 2.2^2-3=5 > \frac{9}{2} \geq \frac{9}{\sqrt{x-2}+2}, \forall x \geq 2 \Rightarrow 2x^2-3-\frac{9}{\sqrt{x-2}+2} > 0, \forall x \geq 2$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x-6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 6$. Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq 6$.

Bài toán 124. Giải bất phương trình $2\sqrt{x-1}+5x > (x-1)(x-2)(x-3) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x-1} > x^3-6x^2+7x-6 \Leftrightarrow 2(\sqrt{x-1}-2) > x^3-6x^2+7x-10 \\ &\Leftrightarrow \frac{2(x-5)}{\sqrt{x-1}+2} > (x-5)(x^2-x+2) \Leftrightarrow (x-5)\left(x^2-x+2-\frac{2}{\sqrt{x-1}+2}\right) < 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Rõ ràng $x^2-x+2 = x(x-1)+2 \geq 2 > 1 = \frac{2}{2} \geq \frac{2}{\sqrt{x-1}+2}, \forall x \geq 1 \Rightarrow x^2-x+2-\frac{2}{\sqrt{x-1}+2} > 0, \forall x \geq 1$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x-5 < 0 \Leftrightarrow x < 5$. Kết hợp điều kiện ta thu được $1 \leq x < 5$.

Bài toán 125. Giải bất phương trình $3\sqrt{x-2} \geq (x-3)^3+4x-9 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3\sqrt{x-2} \geq x^3-9x^2+31x-36 \Leftrightarrow 3(\sqrt{x-2}-1) \geq x^3-9x^2+31x-39 \\ &\Leftrightarrow \frac{3(x-3)}{\sqrt{x-2}+1} \geq (x-3)(x^2-6x+13) \Leftrightarrow (x-3)\left(x^2-6x+13-\frac{3}{\sqrt{x-2}+1}\right) \leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $x^2-6x+13 = (x-3)^2+4 \geq 4 > 3 = \frac{3}{1} \geq \frac{3}{\sqrt{x-2}+1}, \forall x \geq 2 \Rightarrow x^2-6x+13-\frac{3}{\sqrt{x-2}+1} > 0, \forall x \geq 2$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow x-3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$. Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $2 \leq x \leq 3$.

Bài toán 126. Giải bất phương trình $\sqrt{x-3} \leq 2x^3-15x^2+33x-19 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x-3}-1 \leq 2x^3-15x^2+33x-20 \Leftrightarrow \frac{x-4}{\sqrt{x-3}+1} \leq (x-4)(2x^2-7x+5) \\ &\Leftrightarrow (x-4)\left(2x^2-7x+5-\frac{1}{\sqrt{x-3}+1}\right) \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = 2x^2-7x+5; x \geq 3$ ta có $f'(x) = 4x-7 > 0, \forall x \geq 3 \Rightarrow f(x)$ liên tục và đồng biến với $x \geq 3$.

Suy ra $f(x) \geq \min_{x \geq 3} f(x) = f(3) = 2 > 1 \geq \frac{1}{\sqrt{x-3}+1} \Rightarrow 2x^2-7x+5-\frac{1}{\sqrt{x-3}+1} > 0, \forall x \geq 2$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$. Bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq 4$.

Bài toán 127. Giải bất phương trình $5\sqrt{x+7} + 101 > x(x^2 + 13x + 28) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -7$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 5\sqrt{x+7} > x^3 + 13x^2 + 28x - 101 &\Leftrightarrow 5(\sqrt{x+7} - 3) > (x-2)(x^2 + 15x + 58) \\ \Leftrightarrow \frac{5(x-2)}{\sqrt{x+7}+3} > (x-2)[(x+7)(x+8)+2] &\Leftrightarrow (x-2)\left[(x+7)(x+8)+2 - \frac{5}{\sqrt{x+7}+3}\right] < 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta nhận xét $(x+7)(x+8)+2 \geq 0+2=2 > \frac{5}{3} \geq \frac{5}{\sqrt{x+7}+3}, \forall x \geq -7 \Rightarrow (x+7)(x+8)+2 - \frac{5}{\sqrt{x+7}+3} > 0, \forall x \geq -7$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2 \Rightarrow S = [-7; 2)$.

Nhận xét.

Ngoài phương án tiếp cận kiểu phân tích thuần túy

$$(x+7)(x+8)+2 \geq 0+2=2 > \frac{5}{3} \geq \frac{5}{\sqrt{x+7}+3}, \forall x \geq -7 \Rightarrow (x+7)(x+8)+2 - \frac{5}{\sqrt{x+7}+3} > 0, \forall x \geq -7.$$

Các bạn có thể xử lý theo cung cách hàm số tương tự bài toán 126 như sau

➤ Xét hàm số $f(x) = x^2 + 15x + 58; x \geq -7$ ta có $f'(x) = 2x + 15 > 0, \forall x \geq -7 \Rightarrow f(x)$ liên tục và đồng biến trên miền $x \geq -7$. Suy ra

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \min_{x \geq -7} f(x) = f(-7) = 2 > \frac{5}{3} \geq \frac{5}{\sqrt{x+7}+3}, \forall x \geq -7 \\ \Rightarrow (x+7)(x+8)+2 - \frac{5}{\sqrt{x+7}+3} &> 0, \forall x \geq -7 \end{aligned}$$

Bài toán 128. Giải bất phương trình $\sqrt{x+3} \leq 1+x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -3$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} - 2 \leq x^3 - 1 &\Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} \leq (x-1)(x^2+x+1) \\ \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+x+1 - \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right) &\geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > \frac{1}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}, \forall x \geq -3 \Rightarrow x^2 + x + 1 - \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} > 0, \forall x \geq -3$

Do đó $(1) \Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \Rightarrow S = [1; +\infty)$. Kết luận phương trình đã cho có nghiệm $x \geq 1$.

Bài toán 129. Giải phương trình $2\sqrt{x-2} = 2x^4 - 10x^3 + x^2 - 6x + 9 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{x-1}-2) &= 2x^4 - 10x^3 + x^2 - 6x + 5 \\ \Leftrightarrow \frac{2(x-5)}{\sqrt{x-1}+2} &= (x-5)(2x^3+x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ \frac{2}{\sqrt{x-1}+2} = 2x^3+x-1 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Rõ ràng } \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x-1}+2} \leq \frac{2}{2} = 1, \forall x \geq 1 \\ 2x^3 + x - 1 \geq 2 + 1 - 1 = 2, \forall x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x-1}+2} < 2x^3 + x - 1 \Rightarrow (1) \text{ vô nghiệm.}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 5$.

Bài toán 130. Giải phương trình $\sqrt{2x+1} = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 13x - 9 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+1} - 3 &= x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 13x - 12 \\ \Leftrightarrow \frac{2(x-4)}{\sqrt{2x+1}+3} &= (x-4)(x^3 + 4x + 3) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ \frac{2}{\sqrt{2x+1}+3} = x^3 + 4x + 3 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } \frac{2}{\sqrt{2x+1}+3} \leq \frac{2}{3}, \forall x \geq -\frac{1}{2}.$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 4x + 3; x \geq -\frac{1}{2}$ thì $f'(x) = 3x^2 + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ là hàm số liên tục và đồng biến trên miền đang xét, suy ra $f(x) \geq \min_{x \geq -\frac{1}{2}} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8} > \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2x+1}+3} < x^3 + 4x + 3, \forall x \geq -\frac{1}{2}$.

Vậy (1) vô nghiệm. Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất $x = 4$.

Bài toán 131. Giải phương trình $\sqrt{x-1} = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 6x - 11 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} - 1 &= x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 5x - 12 \\ \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} &= (x-2)(x^3 - 3x^2 + 6) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} = x^3 - 3x^2 + 6 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6; x \geq 1$ ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 2\}$.

Khảo sát hàm số trên miền $x \geq 1 \Rightarrow f(1) = 4; f(2) = 2 \Rightarrow f(x) \geq \min_{x \geq 1} f(x) = f(2) = 2$.

Do đó $\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} \leq \frac{1}{1} = 1 < 2 \leq x^3 - 3x^2 + 6, \forall x \geq 1 \Rightarrow (1) \text{ vô nghiệm.}$

Vậy phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài toán 132. Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} + 1 = \sqrt{x+16} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - 1 + \sqrt{x+4} - 2 &= \sqrt{x+16} - 4 \\ \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{x}{\sqrt{x+4}+2} &= \frac{x}{\sqrt{x+16}+4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{\sqrt{x+16}+4} \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Rõ ràng $\sqrt{x+16}+4 > \sqrt{x+4}+2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+16}+4} < \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} < \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$.

Do đó phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài toán 133. Giải phương trình nghiệm không âm $\sqrt{2x+1}+2\sqrt{3x+4}=\sqrt{4x+9}+2 \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{2x+1}-1+2(\sqrt{3x+4}-2)=\sqrt{4x+9}-3 \\ \Leftrightarrow & \frac{2x}{\sqrt{2x+1}+1}+\frac{6x}{\sqrt{3x+4}+2}=\frac{4x}{\sqrt{4x+9}+3} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x=0 \\ \frac{1}{\sqrt{2x+1}+1}+\frac{3}{\sqrt{3x+4}+2}=\frac{2}{\sqrt{4x+9}+3} \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Để ý rằng $x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4x+9}+3 > \sqrt{2x+1}+1 \\ \sqrt{4x+9}+3 > \sqrt{3x+4}+2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4x+9}+3} < \frac{1}{\sqrt{2x+1}+1}; \frac{1}{\sqrt{4x+9}+3} < \frac{1}{\sqrt{3x+4}+2}$.

Suy ra $\frac{2}{\sqrt{4x+9}+3} < \frac{1}{\sqrt{2x+1}+1} + \frac{3}{\sqrt{3x+4}+2} \Rightarrow (1)$ vô nghiệm. Do đó phương trình ban đầu có nghiệm $x=0$.

Bài toán 134. Giải phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}+6=3\sqrt{x+15} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x}-1+\sqrt{x+3}-2+\sqrt{x+8}-3=3(\sqrt{x+15}-4) \\ \Leftrightarrow & \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}+\frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{x-1}{\sqrt{x+8}+3}=\frac{3(x-1)}{\sqrt{x+15}+4} \\ \Leftrightarrow & x=1 \vee \frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}+\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}=\frac{3}{\sqrt{x+15}+4} \quad (1) \end{aligned}$$

Để ý rằng $\sqrt{x+15}+4 > \sqrt{x+8}+3 > \sqrt{x+3}+2 > \sqrt{x}+1$ nên

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{x+15}+4} < \frac{1}{\sqrt{x}+1}; \frac{1}{\sqrt{x+15}+4} < \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}; \frac{1}{\sqrt{x+15}+4} < \frac{1}{\sqrt{x+8}+3} \\ \Rightarrow & \frac{3}{\sqrt{x+15}+4} < \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+8}+3} \Rightarrow (1) \text{ vô nghiệm.} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 135. Giải phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}=\sqrt{x+100} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+1}-1+\sqrt{x+4}-2+\sqrt{x+9}-3+\sqrt{x+16}-4=\sqrt{x+100}-10 \\ \Leftrightarrow & \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{x}{\sqrt{x+4}+2}+\frac{x}{\sqrt{x+9}+3}+\frac{x}{\sqrt{x+16}+4}=\frac{x}{\sqrt{x+100}+10} \\ \Leftrightarrow & x=0 \vee \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}+\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}+\frac{1}{\sqrt{x+16}+4}=\frac{1}{\sqrt{x+100}+10} \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x+100}+10 > \sqrt{x+1}+1 &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+100}+10} < \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+100}+10} < \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+9}+3} + \frac{1}{\sqrt{x+16}+4} \end{aligned}$$

Do đó phương trình (1) vô nghiệm. Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài toán 136. Giải phương trình nghiệm không âm

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+1} + \sqrt{4x+1} = 2\sqrt{5x+4} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1}-1 + \sqrt{2x+1}-1 + \sqrt{3x+1}-1 + \sqrt{4x+1}-1 &= 2\sqrt{5x+4}-4 \\ \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{2x}{\sqrt{2x+1}+1} + \frac{3x}{\sqrt{3x+1}+1} + \frac{4x}{\sqrt{4x+1}+1} &= \frac{2.5x}{\sqrt{5x+1}+2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x+1}+1} + \frac{3}{\sqrt{3x+1}+1} + \frac{4}{\sqrt{4x+1}+1} = \frac{10}{\sqrt{5x+1}+2} \end{cases} &(1) \end{aligned}$$

Để ý các đánh giá

$$\begin{aligned} x \geq 0 &\Rightarrow \sqrt{5x+1}+2 > \sqrt{4x+1}+1 > \sqrt{3x+1}+1 > \sqrt{2x+1}+1 > \sqrt{x+1}+1 \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5x+1}+2} < \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}; \frac{2}{\sqrt{5x+1}+2} < \frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}; \\ \frac{3}{\sqrt{5x+1}+2} < \frac{3}{\sqrt{3x+1}+1}; \frac{4}{\sqrt{5x+1}+2} < \frac{4}{\sqrt{4x+1}+1} \\ \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{5x+1}+2} < \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x+1}+1} + \frac{3}{\sqrt{3x+1}+1} + \frac{4}{\sqrt{4x+1}+1} \end{aligned}$$

Do đó phương trình (1) vô nghiệm. Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài toán 137. Giải phương trình nghiệm không âm

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{3x+4} + \sqrt{5x+9} - 2 = \sqrt{9x+16} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1}-1 + \sqrt{3x+4}-2 + \sqrt{5x+9}-3 &= \sqrt{9x+16}-4 \\ \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{3x}{\sqrt{3x+4}+2} + \frac{5x}{\sqrt{5x+9}+3} &= \frac{9x}{\sqrt{9x+16}+4} \\ \Leftrightarrow x=0 \vee \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{3}{\sqrt{3x+4}+2} + \frac{5}{\sqrt{5x+9}+3} &= \frac{9}{\sqrt{9x+16}+4} \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} x \geq 0 &\Rightarrow \sqrt{9x+16}+4 > \sqrt{5x+9}+3 > \sqrt{3x+4}+2 > \sqrt{x+1}+1 \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{9x+16}+4} < \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}; \frac{3}{\sqrt{9x+16}+4} < \frac{3}{\sqrt{3x+4}+2}; \frac{5}{\sqrt{9x+16}+4} < \frac{5}{\sqrt{5x+9}+3} \\ \Rightarrow \frac{9}{\sqrt{9x+16}+4} < \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{3}{\sqrt{3x+4}+2} + \frac{5}{\sqrt{5x+9}+3} \end{aligned}$$

Phương trình (1) vô nghiệm nên bài toán có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài toán 138. Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = x^2 + x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - 1 + \sqrt{x+3} - 2 &= x^2 + x - 2 \\ \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} &= (x-1)(x+2) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = x+2 \end{cases} & \quad (1) \end{aligned}$$

Rõ ràng $\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{3}+2} < 2 \leq x+2, \forall x \geq 0 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài toán 139. Giải phương trình $\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+1} = 2x^2 - x - 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{2x-3}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+1}} = (2x-3)(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3=0 \\ \frac{1}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+1}} = x+1 \end{cases} \quad (1)$$

Ta thấy $\frac{1}{\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{0 + \sqrt{\frac{2}{3}+1}} < \frac{5}{3} \leq x+1, \forall x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Vậy ta thu được $2x-3=0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$.

Bài toán 140. Giải phương trình $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2x^2 - 5x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2 \leq x \leq 4$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2} - 1 + 1 - \sqrt{4-x} &= 2x^2 - 5x - 3 \\ \Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{x-3}{1+\sqrt{4-x}} &= (x-3)(2x+1) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{1}{1+\sqrt{4-x}} = 2x+1 \end{cases} & \quad (1) \end{aligned}$$

Chú ý rằng $\frac{1}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{1}{1+\sqrt{4-x}} < \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2 < 5 \leq 2x+1, \forall x \in [2; 4] \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Vậy ta thu được $x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \in [2; 4] \Rightarrow S = \{3\}$

Bài toán 141. Giải phương trình $\sqrt{x^2+15} = 3x-2 + \sqrt{x^2+8} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét $\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x^2+8}=3x-2 \Leftrightarrow 3x-2=\frac{7}{\sqrt{x^2+15}+\sqrt{x^2+8}} > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+15}-4+3-\sqrt{x^2+8}=3x-3 &\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4}+\frac{1-x^2}{\sqrt{x^2+8}+3}=3(x-1) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \frac{x+1}{\sqrt{x^2+15}+4}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}+3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+15}+4}=\frac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}+\frac{3}{x+1} \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $\begin{cases} \sqrt{x^2+15}+4 > \sqrt{x^2+8}+3, \\ 3x > 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+15}+4} < \frac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}+\frac{3}{x+1} \Rightarrow (1) \text{ vô nghiệm.}$

Vậy phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 142. Giải phương trình $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét $\sqrt{x^2+12}-\sqrt{x^2+5}=3x-5 \Leftrightarrow 3x-5=\frac{7}{\sqrt{x^2+12}+\sqrt{x^2+5}} > 0 \Rightarrow x > \frac{5}{3}$. Phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+12}-4=\sqrt{x^2+5}-3+3x-6 &\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}=\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}+3(x-2) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}+3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+12}+4}=\frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}+\frac{3}{x+2} \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Để thấy $\begin{cases} \sqrt{x^2+12}+4 > \sqrt{x^2+5}+3, \\ x > \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+12}+4} < \frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}+\frac{3}{x+2} \Rightarrow (1) \text{ vô nghiệm.}$

Vậy ta thu được nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài toán 143. Giải bất phương trình $(\sqrt{x^2+24}+\sqrt{x^2+15})(3x-2) > 9 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $3x-2 > \frac{9}{\sqrt{x^2+24}+\sqrt{x^2+15}} \quad (1).$

Từ (1) $\Rightarrow 3x-2 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$. Biến đổi

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 3x-2 > \sqrt{x^2+24}-\sqrt{x^2+15} \Leftrightarrow 3x-3 > \sqrt{x^2+24}-5+4-\sqrt{x^2+15} \\ &\Leftrightarrow 3(x-1) > \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+24}+5}+\frac{1-x^2}{4+\sqrt{x^2+15}} \Leftrightarrow (x-1)\left(3+\frac{x+1}{4+\sqrt{x^2+15}}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+24}+5}\right) > 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Mặt khác $\begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ 4+\sqrt{x^2+15} < \sqrt{x^2+24}+5 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{4+\sqrt{x^2+15}} > \frac{x+1}{\sqrt{x^2+24}+5} \Rightarrow 3+\frac{x+1}{4+\sqrt{x^2+15}}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2+24}+5} > 0.$

Do đó $(2) \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Rightarrow S = (1; +\infty)$.

Bài toán 144. Trích lược câu 5; Đề thi thử sức trước Kỳ thi THPT Quốc gia; Lần thứ nhất; Năm học 2015 – 2016; Trường THPT Việt Trì; Thành phố Việt Trì; Tỉnh Phú Thọ.

Giải bất phương trình $\sqrt{9x^2 + 3} + 9x - 1 \geq \sqrt{9x^2 + 15} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện x thực.

Bất phương trình đã cho tương đương với $9x - 1 \geq \sqrt{9x^2 + 15} - \sqrt{9x^2 + 3}$.

Nhận xét $\sqrt{9x^2 + 15} - \sqrt{9x^2 + 3} = \frac{12}{\sqrt{9x^2 + 15} + \sqrt{9x^2 + 3}} > 0 \Rightarrow 9x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{9} \quad (*)$.

Biến đổi về dạng

$$\begin{aligned} & \sqrt{9x^2 + 3} - 2 + 3(3x - 1) \geq \sqrt{9x^2 + 15} - 4 \\ & \Leftrightarrow \frac{9x^2 - 1}{\sqrt{9x^2 + 3} + 2} + 3(3x - 1) - \frac{9x^2 - 1}{\sqrt{9x^2 + 15} + 4} \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (3x - 1) \left[\frac{3x + 1}{\sqrt{9x^2 + 3} + 2} - \frac{3x + 1}{\sqrt{9x^2 + 15} + 4} + 3 \right] \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (3x - 1) \left[\frac{(3x + 1)(\sqrt{9x^2 + 15} - \sqrt{9x^2 + 3} + 12)}{(\sqrt{9x^2 + 3} + 2)(\sqrt{9x^2 + 15} + 4)} + 3 \right] \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Theo lập luận (*), $\sqrt{9x^2 + 15} - \sqrt{9x^2 + 3} > 0$; $x \geq \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{(3x + 1)(\sqrt{9x^2 + 15} - \sqrt{9x^2 + 3} + 12)}{(\sqrt{9x^2 + 3} + 2)(\sqrt{9x^2 + 15} + 4)} + 3 > 0, \forall x > \frac{1}{9}$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow 3x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3} \Rightarrow S = \left[\frac{1}{3}; +\infty \right)$.

Bài toán 145. Trích lược câu 8; Đề thi thử sức trước Kỳ thi THPT Quốc gia; Lần thứ hai; Năm học 2015 – 2016; Trường THPT Yên Lạc; Huyện Yên Lạc; Tỉnh Vĩnh Phúc.

Giải bất phương trình $1 + \sqrt{4x^2 + 20} \leq x + \sqrt{4x^2 + 9}$.

Lời giải.

Điều kiện x thực. Biến đổi $x - 1 \geq \sqrt{4x^2 + 20} - \sqrt{4x^2 + 9} = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 20} + \sqrt{4x^2 + 9}} > 0 \Rightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & x - 2 \geq \sqrt{4x^2 + 20} - 6 - (\sqrt{4x^2 + 9} - 5) \Leftrightarrow x - 2 \geq \frac{4x^2 - 16}{\sqrt{4x^2 + 20} + 6} - \frac{4x^2 - 16}{\sqrt{4x^2 + 9} + 5} \\ & \Leftrightarrow (x - 2) \left[\frac{4(x + 2)}{\sqrt{4x^2 + 9} + 5} - \frac{4(x + 2)}{\sqrt{4x^2 + 20} + 6} + 1 \right] \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Kết hợp $\frac{1}{\sqrt{4x^2 + 9} + 5} > \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 20} + 6}$; $x > 1 \Rightarrow \frac{4(x + 2)}{\sqrt{4x^2 + 9} + 5} - \frac{4(x + 2)}{\sqrt{4x^2 + 20} + 6} > 0$.

Dẫn đến $\frac{4(x + 2)}{\sqrt{4x^2 + 9} + 5} - \frac{4(x + 2)}{\sqrt{4x^2 + 20} + 6} + 1 > 0$, vậy $(1) \Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Kết luận $S = [2; +\infty)$.

Bài toán 146. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+91}+4 < \sqrt{x^2+7}+\frac{10x}{3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } \sqrt{x^2+91}-\sqrt{x^2+7} < \frac{10x}{3}-4 \Leftrightarrow \frac{84}{\sqrt{x^2+91}+\sqrt{x^2+7}} < \frac{10x}{3}-4 \Rightarrow 10x > 12 \Leftrightarrow x > \frac{6}{5}.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+91}-10 < \sqrt{x^2+7}-4+\frac{10x}{3}-10 &\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+91}+10} < \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}+4}+\frac{10(x-3)}{3} \\ &\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{10}{3}+\frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}+4}-\frac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10}\right) > 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Rõ ràng } \begin{cases} \sqrt{x^2+7}+4 < \sqrt{x^2+91}+10 \\ x > \frac{6}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}+4} > \frac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10} \Rightarrow \frac{10}{3}+\frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}+4}-\frac{x+3}{\sqrt{x^2+91}+10} > 0.$$

$$\text{Vậy } (1) \Leftrightarrow x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3 \Rightarrow S = (3; +\infty).$$

Bài toán 147. Giải phương trình $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}+7x+2=2x^2$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $3 \leq x \leq 5$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x-3}-1+\sqrt{5-x}-1 &= 2x^2-7x-4 \Leftrightarrow \frac{x-4}{\sqrt{x-3}+1}+\frac{4-x}{\sqrt{5-x}+1} = (x-4)(2x+1) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ \frac{1}{\sqrt{x-3}+1} = \frac{1}{\sqrt{5-x}+1}+2x+1 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Rõ ràng } \frac{1}{\sqrt{x-3}+1} \leq 1 < 7 < \frac{1}{\sqrt{5-x}+1}+2x+1, \forall x \in [3; 5] \Rightarrow (1) \text{ vô nghiệm. Kết luận nghiệm } S = \{4\}.$$

Bài toán 148. Giải bất phương trình $3+\sqrt{x-2}=2\sqrt{x+1}+x^2-3x$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2}-1 &= 2\sqrt{x+1}-4+x^2-3x \Leftrightarrow \sqrt{x-2}-1 = 2(\sqrt{x+1}-2)+x^2-3x \\ &\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} = \frac{2(x-3)}{\sqrt{x+1}+2}+x(x-3) \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} = \frac{2}{\sqrt{x+1}+2}+x \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Dễ nhận thấy } \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} \leq \frac{1}{2} = 1 < 2 \leq \frac{2}{\sqrt{x+1}+2}+x, \forall x \geq 2 \Rightarrow (1) \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 149. Giải phương trình $\sqrt{x+4}+\sqrt{6-x}+x^2+31=12x$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in [-4; 6]$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4}-3+x^2-12x+35 &= 1-\sqrt{6-x} \\ \Leftrightarrow \frac{x-5}{\sqrt{x+4}+3}+(x-5)(x-7) &= \frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ \frac{1}{\sqrt{x+4}+3}+x-7 &= \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Chú ý $\frac{1}{\sqrt{x+4}+3}+x-7 < \frac{1}{3}+6-7 = -\frac{2}{3} < 0 < \frac{1}{1+\sqrt{6-x}}, \forall x \in [-4;6] \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=5$.

Bài toán 150. Giải phương trình $\sqrt{x+6}+\sqrt{12-x}=x^3-3x^2+x+3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in [-6;12]$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x+6}-3 &= 3-\sqrt{12-x}+x^3-3x^2+x-3 \\ \Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+6}+3} &= \frac{x-3}{3+\sqrt{12-x}}+(x-3)(x^2+1) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ \frac{1}{\sqrt{x+6}+3} &= \frac{1}{3+\sqrt{12-x}}+(x^2+1) \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $\frac{1}{\sqrt{x+6}+3} \leq \frac{1}{3} < 1 < \frac{1}{3+\sqrt{12-x}}+(x^2+1), \forall x \in [-6;12] \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Ta thu được $x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \in [-6;12] \Rightarrow S=\{3\}$.

Bài toán 151. Giải bất phương trình $\sqrt{6-x}+\sqrt{2x+6}+\sqrt{6x-5} < x^2-2x-5 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{5}{6} \leq x \leq 6$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{6-x}-1+\sqrt{2x+6}-4+\sqrt{6x-5}-5 &< x^2-2x-15 \\ \Leftrightarrow \frac{5-x}{\sqrt{6-x}+1}+\frac{2x-10}{\sqrt{2x+6}+4}+\frac{6x-30}{\sqrt{6x+5}+5} &< (x+3)(x-5) \\ \Leftrightarrow (x-5) \left[\frac{2}{\sqrt{2x+6}+4}+\frac{6}{\sqrt{6x+5}+5}-\left(\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+x+3\right) \right] &< 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{2x+6}+4}+\frac{6}{\sqrt{6x+5}+5} &< \frac{2}{4}+\frac{6}{5}=\frac{17}{10} < \frac{23}{6} < \frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+x+3, \forall x \in \left[\frac{5}{6};6\right] \\ \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2x+6}+4}+\frac{6}{\sqrt{6x+5}+5}-\left(\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+x+3\right) &< 0 \end{aligned}$$

Do đó $(1) \Leftrightarrow x-5 > 0 \Leftrightarrow x > 5 \Rightarrow S=(5;6]$.

Bài toán 152. Giải bất phương trình $2\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+4}+\sqrt{5-x} \leq 2x^2-3x-9 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{1}{2} \leq x \leq 5$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 2(\sqrt{2x+1}-3) + \sqrt{3x+4} - 4 \leq 1 - \sqrt{5-x} + 2x^2 - 3x - 20 \\ \Leftrightarrow & \frac{4(x-4)}{\sqrt{2x+1}+3} + \frac{3(x-4)}{\sqrt{3x+4}+4} \leq \frac{x-4}{1+\sqrt{5-x}} + (x-4)(2x+5) \\ \Leftrightarrow & (x-4) \left[\frac{4}{\sqrt{2x+1}+3} + \frac{3}{\sqrt{3x+4}+4} - \left(\frac{1}{1+\sqrt{5-x}} + 2x+5 \right) \right] \leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} & \frac{4}{\sqrt{2x+1}+3} + \frac{3}{\sqrt{3x+4}+4} < \frac{4}{3} + \frac{3}{4} < 4 < \frac{1}{1+\sqrt{5-x}} + 2x+5, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}; 5\right] \\ \Rightarrow & \frac{4}{\sqrt{2x+1}+3} + \frac{3}{\sqrt{3x+4}+4} - \left(\frac{1}{1+\sqrt{5-x}} + 2x+5 \right) < 0, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}; 5\right] \end{aligned}$$

Do đó $(1) \Leftrightarrow x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$. Kết hợp với điều kiện đi đến nghiệm $S = [4; 5]$.

Bài toán 153. Giải phương trình $\sqrt{x+6} + (x+1)^3 = \sqrt{x-2} + \sqrt{7-x} + 2x^3 + 10 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2 \leq x \leq 7$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+6} = \sqrt{x-2} + \sqrt{7-x} + x^3 - 3x^2 - 3x + 9 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x+6} - 3 + 2 - \sqrt{7-x} = \sqrt{x-2} - 1 + x^3 - 3x^2 - 3x + 9 \\ \Leftrightarrow & \frac{x-3}{\sqrt{x+6}+3} + \frac{x-3}{2+\sqrt{7-x}} = \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + (x-3)(x^2-3) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x=3 \\ \frac{1}{\sqrt{x+6}+3} + \frac{1}{2+\sqrt{7-x}} = \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} + (x^2-3) \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Bên cạnh đó $\frac{1}{\sqrt{x+6}+3} + \frac{1}{2+\sqrt{7-x}} < \frac{1}{\sqrt{8}+3} + \frac{1}{2} < 1 < \frac{1}{\sqrt{x-2}+1} + (x^2-3), \forall x \in [2; 7] \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Bài toán 154. Giải phương trình $\sqrt{x+2} - \sqrt{8-x} = 3x^3 - 21x^2 + 2x - 12 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in [-2; 8]$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+2} - 3 + 1 - \sqrt{8-x} = 3x^3 - 21x^2 + 2x - 14 \\ \Leftrightarrow & \frac{x-7}{\sqrt{x+2}+3} + \frac{x-7}{1+\sqrt{8-x}} = (x-7)(3x^2+2) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x=7 \\ \frac{1}{\sqrt{x+2}+3} + \frac{1}{1+\sqrt{8-x}} = (3x^2+2) \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận định $\frac{1}{\sqrt{x+2}+3} + \frac{1}{1+\sqrt{8-x}} < \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3} < 2 \leq 3x^2+2, \forall x \in [-2; 8] \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Do đó phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = 7$.

Bài toán 155. Giải bất phương trình $\sqrt{6x+4} + 2\sqrt{4x+1} \geq 5\sqrt{x+2} + x^3 + 2x - 12 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{4}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{6x+4} - 4 + 2(\sqrt{4x+1} - 3) \geq 5(\sqrt{x+2} - 2) + x^3 + 2x - 12 \\ \Leftrightarrow & \frac{6(x-2)}{\sqrt{6x+4}+4} + \frac{8(x-2)}{\sqrt{4x+1}+3} \geq \frac{5(x-2)}{\sqrt{x+2}+2} + (x-2)(x^2+2x+6) \\ \Leftrightarrow & (x-2) \left[\frac{6}{\sqrt{6x+4}+4} + \frac{8}{\sqrt{4x+1}+3} - \left(\frac{5}{\sqrt{x+2}+2} + x^2 + 2x + 6 \right) \right] \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có đánh giá

$$\begin{aligned} & \frac{6}{\sqrt{6x+4}+4} + \frac{8}{\sqrt{4x+1}+3} < \frac{6}{\sqrt{\frac{5}{2}+4}} + \frac{8}{3} < 4 < 5 < \frac{5}{\sqrt{x+2}+2} + (x+1)^2 + 5, \forall x \geq -\frac{1}{4} \\ \Rightarrow & \frac{6}{\sqrt{6x+4}+4} + \frac{8}{\sqrt{4x+1}+3} - \left(\frac{5}{\sqrt{x+2}+2} + x^2 + 2x + 6 \right) < 0, \forall x \geq -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Do đó (1) $\Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm $x \geq 2$.

Bài toán 156. Giải phương trình $\sqrt{x-2} + 2\sqrt{x+3} = 3\sqrt{3x-2} + x^3 - 3x^2 - 2x + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-2} - 2 + 2(\sqrt{x+3} - 3) = 3(\sqrt{3x-2} - 4) + x^3 - 3x^2 - 2x + 6 \\ \Leftrightarrow & \frac{x-6}{\sqrt{x-2}+2} + \frac{2(x-6)}{\sqrt{x+3}+3} = \frac{6(x-6)}{\sqrt{3x-2}+4} + (x^2-2)(x-3) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x=6 \\ \frac{1}{\sqrt{x-2}+2} + \frac{2}{\sqrt{x+3}+3} = \frac{6}{\sqrt{3x-2}+4} + x^2 - 2 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $\frac{1}{\sqrt{x-2}+2} + \frac{2}{\sqrt{x+3}+3} < \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} < 2 < \frac{6}{\sqrt{3x-2}+4} + x^2 - 2, \forall x \geq 2 \Rightarrow (2)$ vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 6$.

Bài toán 157. Giải bất phương trình $2x^2 - 5x < \sqrt{x-2} + \sqrt{2x-5} + \sqrt{4-x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{5}{2} \leq x \leq 4$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 5x - 3 + 1 - \sqrt{4-x} < \sqrt{x-2} - 1 + \sqrt{2x-5} - 1 \\ \Leftrightarrow & (x-3)(2x+1) + \frac{x-3}{1+\sqrt{4-x}} < \frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{2x-6}{\sqrt{2x-5}+1} \\ \Leftrightarrow & (x-3) \left[2x+1 + \frac{1}{1+\sqrt{4-x}} - \left(\frac{1}{\sqrt{x-2}+1} + \frac{2}{\sqrt{2x-5}+1} \right) \right] < 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận định

$$2x+1+\frac{1}{1+\sqrt{4-x}} > 2 \cdot \frac{5}{2}+1=6 > 3 > \frac{1}{1}+\frac{2}{1} > \frac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x-5}+1}, \forall x \in \left[\frac{5}{2}; 4\right]$$

$$\Rightarrow 2x+1+\frac{1}{1+\sqrt{4-x}} - \left(\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{2}{\sqrt{2x-5}+1}\right) > 0, \forall x \in \left[\frac{5}{2}; 4\right]$$

Do vậy (1) $\Leftrightarrow x-3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$. Kết hợp với điều kiện $\frac{5}{2} \leq x \leq 4 \Rightarrow S = \left[\frac{5}{2}; 3\right)$.

Bài toán 158. Giải bất phương trình $2\sqrt{6x-3} = \sqrt{3x-1} + \sqrt{9x-2} + 9x^3 - 12x^2 + 19x - 11 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2(\sqrt{6x-3}-1) = \sqrt{3x-1}-1 + \sqrt{9x-2}-2 + 9x^3 - 12x^2 + 19x - 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(3x-2)}{\sqrt{6x-3}+1} = \frac{3x-2}{\sqrt{3x-1}+1} + \frac{9x-6}{\sqrt{9x-2}+2} + (3x-2)(3x^2-2x+5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2=0 \\ \frac{4}{\sqrt{6x-3}+1} = \frac{1}{\sqrt{3x-1}+1} + \frac{1}{\sqrt{9x-2}+2} + 3x^2-2x+5 \end{cases} \quad (1)$$

Dễ dàng đánh giá

$$3x^2-2x+5 = 3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{14}{3} > 4 > \frac{4}{\sqrt{6x-3}+1}, \forall x \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3x-1}+1} + \frac{1}{\sqrt{9x-2}+2} + 3x^2-2x+5 > \frac{4}{\sqrt{6x-3}+1}, \forall x \geq \frac{1}{2}$$

Do đó phương trình (1) ở trên vô nghiệm. Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = \frac{2}{3}$.

Bài toán 159. Giải phương trình $1+8\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}=2\sqrt{2x-5}+x(x^2-9x+16) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$8(\sqrt{x-3}-2)+\sqrt{x+2}-3=2(\sqrt{2x-5}-3)+x^3-9x^2+16x-14$$

$$\Leftrightarrow \frac{8(x-7)}{\sqrt{x-3}+2}+\frac{x-7}{\sqrt{x+2}+3}=\frac{4(x-7)}{\sqrt{2x-5}+3}+(x-7)(x^2-2x+2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ \frac{8}{\sqrt{x-3}+2}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+3}=\frac{4}{\sqrt{2x-5}+3}+(x-1)^2+1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Nhận xét } \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{2x-5}+3}+(x-1)^2+1 > (3-1)^2+1=5, \forall x \geq 3 \\ \frac{8}{\sqrt{x-3}+2}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+3} \leq \frac{8}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}+2} < 5, \forall x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow (1) \text{ vô nghiệm.}$$

Đổi chiều điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = 7$.

Nhận xét.

Với bài toán 159 nếu các bạn sử dụng đánh giá theo hằng đẳng thức thuần túy mà không yêu thương điều kiện xác định thì sẽ là một thảm họa, như kiểu bộ binh qua sông Nhực Thủy không có thiết giáp hay cầu phao, sông Nhực Thủy là con sông độc nhất trong tam giới, chỉ có Trư Bát Giới mới bơi qua được !

Xét phương trình hệ quả
$$\frac{8}{\sqrt{x-3}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+2}+3} = \frac{4}{\sqrt{2x-5}+3} + (x-1)^2 + 1 \quad (1).$$

Nếu sử dụng $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, không những dấu đẳng thức không xảy ra vì $x=1 < 3$ mà còn thu được $1 < \frac{8}{2} = 4$, hướng đi thất bại. Do đó cần hết sức chú ý đến điều kiện xác định ban đầu $x \geq 3$ của bài toán.

Ngoài lập luận trong lời giải trên các bạn có thể lựa chọn các phương án sau đây tùy theo cấp học

- $x^2 - 2x + 2 = (x-3)(x+1) + 5 \geq 5, \forall x \geq 3$.
- Xét hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 2$ với $x \geq 3$ thì $f'(x) = 2x - 2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Suy ra hàm số đồng biến trên miền $x \geq 3$, thu được $f(x) \geq \min_{x \geq 3} f(x) = f(3) = 5$.
- Xét hàm số bậc hai $f(x) = x^2 - 2x + 2$ với $x \geq 3$ có đồ thị parabol với đỉnh $I(1;1)$, bề lõm parabol quay lên phía trên. Khảo sát sự biến thiên với $x \geq 3$ ta có $f(x) \geq \min_{x \geq 3} f(x) = f(3) = 5$.

Bài toán 160. Giải bất phương trình $\sqrt{x+3} > 7\sqrt{x-2} + 2\sqrt{2x-3} + x^3 - 7x^2 + 6x - 17 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} - 3 &> 7(\sqrt{x-2} - 2) + 2(\sqrt{2x-3} - 3) + x^3 - 7x^2 + 6x \\ \Leftrightarrow \frac{(x-6)}{\sqrt{x+3}+3} &> \frac{7(x-6)}{\sqrt{x-2}+2} + \frac{4(x-6)}{\sqrt{2x-3}+3} + (x-6)(x^2-x) \\ \Leftrightarrow (x-6) \left[\frac{7}{\sqrt{x-2}+2} + \frac{4}{\sqrt{2x-3}+3} + x^2 - x - \frac{6}{\sqrt{x+3}+3} \right] &< 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Đề ý $f(x) = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 2, \forall x \geq 2$, suy ra

$$\begin{aligned} \frac{7}{\sqrt{x-2}+2} + \frac{4}{\sqrt{2x-3}+3} + x^2 - x &> 2 > \frac{6}{\sqrt{5}+3} \geq \frac{6}{\sqrt{x+3}+3} \\ \Rightarrow \frac{7}{\sqrt{x-2}+2} + \frac{4}{\sqrt{2x-3}+3} + x^2 - x - \frac{6}{\sqrt{x+3}+3} &> 0 \end{aligned}$$

Do đó $(1) \Leftrightarrow x - 6 < 0 \Leftrightarrow x < 6 \Rightarrow S = [2; 6)$.

Nhận xét.

Bài toán số 160 cũng tương tự bài toán 159, các bạn đọc giả hết sức lưu ý. Đối với biểu thức trong dấu ngoặc

$$\frac{7}{\sqrt{x-2}+2} + \frac{4}{\sqrt{2x-3}+3} + x^2 - x - \frac{6}{\sqrt{x+3}+3}.$$

Không ít bạn có chiều hướng đánh giá lỏng lẻo $\frac{6}{\sqrt{x+3}+3} < 2, \forall x \geq -3$ hoặc $x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tuy nhiên đi đêm lắm có ngày gặp ma, khi đó không xảy ra may mắn vì $2 > -\frac{1}{4}!$

Điều này nhắc nhở chúng ta cần đánh giá một cách chặt chẽ và logic hơn.

Không quá khó để nhìn nhận $\frac{6}{\sqrt{x+3}+3} \leq \frac{6}{\sqrt{5}+3}, \forall x \geq 2$ và với đa thức, có thể sử dụng công cụ đạo hàm – khảo sát hàm số với chú ý miền xác định ban đầu
 Xét hàm số $f(x) = x^2 - x; f'(x) = 2x - 1 > 0, \forall x \geq 2 \Rightarrow f(x)$ liên tục, đồng biến với $x \geq 2$. Do đó hoàn toàn tự nhiên ta thu được $f(x) \geq \min_{x \geq 2} f(x) = f(2) = 2 > \frac{6}{\sqrt{3}+3}$, từ đây đi đến công đoạn kết thúc trọn vẹn bài toán.

Bài toán 161. Giải phương trình $2\sqrt{x+1} + 5\sqrt{x+6} + 6x(x+1) = x^4 + 10 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x+1} - 4 + 5\sqrt{x+6} - 15 &= x^4 - 6x^2 - 6x - 9 \\ \Leftrightarrow 2(\sqrt{x+1} - 2) + 5(\sqrt{x+6} - 3) &= (x-3)(x^3 + 3x^2 + 3x + 3) \\ \Leftrightarrow \frac{2(x-3)}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{5(x-3)}{\sqrt{x+6}+3} &= (x-3)[(x+1)^3 + 2] \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \frac{2}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{5}{\sqrt{x+6}+3} = (x+1)^3 + 2 \end{cases} & \quad (1) \end{aligned}$$

Để ý rằng $\frac{2}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{5}{\sqrt{x+6}+3} \leq \frac{2}{2} + \frac{5}{\sqrt{5}+3} < 2, \forall x \geq -1$ và $(x+1)^3 + 2 \geq 2, \forall x \geq -1$.

Do đó $\frac{2}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{5}{\sqrt{x+6}+3} < (x+1)^3 + 2, \forall x \geq -1 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Đổi chiều điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = 3$.

Nhận xét.

Bài toán số 161, phương trình hệ quả đã bước đầu xuất hiện đa thức bậc ba. Rõ ràng với hàm số bậc ba, phương án đồ thị parabol thuộc chương trình Đại số lớp 10 THPT không còn khả thi. Chỉ còn lại sử dụng đánh giá thuần túy lớp 8 – 9 THCS hoặc công cụ đạo hàm – khảo sát hàm số của liên chương trình Đại số, Giải tích lớp 11 – 12 THPT. Hơn nữa nếu khéo léo quy về hằng đẳng thức như lời giải trên sẽ gọn gàng hơn

$$\frac{2}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{5}{\sqrt{x+6}+3} = (x+1)^3 + 2 \quad (1).$$

Có thể khảo sát trực tiếp hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3; x \geq -1$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục, đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Như vậy $f(x) \geq \min_{x \geq -1} f(x) = f(-1) = 2$. Ngoài ra cũng lưu ý thêm, sau khi tìm được tìm được giá trị nhỏ nhất của

đa thức về phải bằng 2, đôi khi một số bạn vẫn bỏ lỡ cơ hội, để vuột mất tầm tay vì đánh giá chưa chặt chẽ sau

$$\frac{2}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{5}{\sqrt{x+6}+3} < \frac{2}{2} + \frac{5}{3} = \frac{8}{3} \text{ mà } \frac{8}{3} > 2.$$

Thực ra biểu thức về trái thậm chí chưa đạt đến 2 (nói vui chỉ tiệm cận 2), đây là ý đồ ban đầu của tác giả, vì

$$\frac{2}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{5}{\sqrt{x+6}+3} \leq \frac{2}{2} + \frac{5}{\sqrt{5}+3} < 2, \forall x \geq -1$$

Trong Toán học thường không hay có khái niệm bẫy hay cạm trong câu chữ như hóa học vật lý, mà thường là nhiều trường hợp và tư duy chặt chẽ, do vậy chỉ khinh suất một chút chúng ta khó có thể đi đến kết quả cuối cùng, mong muốn bạn đọc tỉnh táo và cảnh giác!

Bài toán 162. Giải bất phương trình $\sqrt{x+5} + 2\sqrt{2x+1} \geq \sqrt{x-3} + x^3 - 3x^2 + 9 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+5} - 3 + 2(\sqrt{2x+1} - 3) \geq \sqrt{x-3} - 1 + x^3 - 3x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{x-4}{\sqrt{x+5}+3} + \frac{4(x-4)}{\sqrt{2x+1}+3} \geq \frac{x-4}{\sqrt{x-3}+1} + (x-4)[(x-3)x^2+1] \\ \Leftrightarrow & (x-4) \left[\frac{1}{\sqrt{x-3}+1} + (x-3)x^2+1 - \left(\frac{1}{\sqrt{x+5}+3} + \frac{4}{\sqrt{2x+1}+3} \right) \right] \leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Rõ ràng

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-3}+1} + (x-3)x^2+1 > 1, \forall x \geq 3 \\ \frac{1}{\sqrt{x+5}+3} + \frac{4}{\sqrt{2x+1}+3} \leq \frac{1}{\sqrt{8}+3} + \frac{4}{\sqrt{7}+3} < 1, \forall x \geq 3 \end{cases} \\ \Rightarrow & \frac{1}{\sqrt{x-3}+1} + (x-3)x^2+1 - \left(\frac{1}{\sqrt{x+5}+3} + \frac{4}{\sqrt{2x+1}+3} \right) > 0 \end{aligned}$$

Do đó $(1) \Leftrightarrow x-4 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$. Kết hợp với điều kiện ta thu được nghiệm $3 \leq x \leq 4$.

Bài toán 163. Giải bất phương trình

$$3\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7} < \sqrt{x-1} + x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2x + 8 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 3\sqrt{x+2} - 6 + \sqrt{x+7} - 3 < \sqrt{x-1} - 1 + x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2x \\ \Leftrightarrow & 3(\sqrt{x+2} - 2) + \sqrt{x+7} - 3 < \sqrt{x-1} - 1 + (x-2)(x^3 - x^2 + x) \\ \Leftrightarrow & \frac{3(x-2)}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x-2}{\sqrt{x+7}+3} < \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} + (x-2)[(x-1)(x^2+1)+1] \\ \Leftrightarrow & (x-2) \left[(x-1)(x^2+1)+1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \left(\frac{3}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+7}+3} \right) \right] > 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x-1)(x^2+1) \geq 0, \forall x \geq 1 \Rightarrow (x-1)(x^2+1)+1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} > 1, \forall x \geq 1 \\ \frac{3}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+7}+3} \leq \frac{3}{\sqrt{3}+2} + \frac{1}{\sqrt{8}+3} < 1, \forall x \geq 1 \end{cases} \\ \Rightarrow & (x-1)(x^2+1)+1 + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \left(\frac{3}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+7}+3} \right) > 0, \forall x \geq 1 \end{aligned}$$

Do đó $(1) \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x > 2$.

Bài toán 164. Giải phương trình

$$7\sqrt{x+5} + \sqrt{x} + \sqrt{5-x} = 2x^4 - 11x^3 + 12x^2 + 3x + 12 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \in [0; 5]$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 7(\sqrt{x+5}-3)+\sqrt{x}-2 &= 1-\sqrt{5-x}+2x^4-11x^3+12x^2+3x-12 \\ \Leftrightarrow \frac{7(x-4)}{\sqrt{x+5}+3}+\frac{x-4}{\sqrt{x}+2} &= \frac{x-4}{1+\sqrt{5-x}}+(x-4)(2x^3-3x^2+3) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-4=0 \\ \frac{7}{\sqrt{x+5}+3}+\frac{1}{\sqrt{x}+2} &= \frac{1}{1+\sqrt{5-x}}+2x^3-3x^2+3 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x)=2x^3-3x^2+3; x \in [0;5]$ thì $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1); f'(x)=0 \Leftrightarrow x \in \{0;1\}$.

Khảo sát hàm số $f(x)$ trên miền $[0;5]$ ta có $f(0)=3; f(1)=2; f(5)=178 \Rightarrow f(x) \geq \min_{x \in [0;5]} f(x) = f(1) = 2$.

Lại có $\frac{7}{\sqrt{x+5}+3}+\frac{1}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{7}{\sqrt{5}+3}+\frac{1}{2} < 2, \forall x \in [0;5]$ nên

$$\frac{7}{\sqrt{x+5}+3}+\frac{1}{\sqrt{x}+2} < \frac{1}{1+\sqrt{5-x}}+2x^3-3x^2+3, \forall x \in [0;5].$$

Như vậy (1) vô nghiệm. Thu được $x-4=0 \Leftrightarrow x=4 \in [0;5]$. Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm.

Nhận xét.

Để lập luận $f(x)=2x^3-3x^2+3 \geq 2, \forall x \in [0;5]$, như đã trình bày tại các thí dụ trước, không nhất thiết sử dụng công cụ đạo hàm – khảo sát hàm số thuộc liên chương trình Đại số, Giải tích 11 – 12 THPT mà chỉ cần kỹ năng phân tích nhân tử, đánh giá thuần túy thuộc phạm vi chương trình Đại số 8 THCS

$$f(x)=2x^3-3x^2+3=(x-1)^2(2x+1)+2 \geq 2, \forall x \in [0;5].$$

Bài toán 165. Giải bất phương trình $6x+2\sqrt{x-1}+3\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x} \leq (x-1)^2(x^2-9x+23)+13 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $1 \leq x \leq 6$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x-1}+3\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x} &\leq x^4-11x^3+42x^2-61x+36 \\ \Leftrightarrow 2(\sqrt{x-1}-1)+3(\sqrt{x+2}-2) &\leq 2-\sqrt{6-x}+x^4-11x^3+42x^2-61x+26 \\ \Leftrightarrow \frac{2(x-2)}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{3(x-2)}{\sqrt{x+2}+2} &\leq \frac{x-2}{2+\sqrt{6-x}}+(x-2)(x^3-9x^2+24x-13) \\ \Leftrightarrow (x-2) \left[x^3-9x^2+24x-13+\frac{1}{2+\sqrt{6-x}}-\left(\frac{2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{3}{\sqrt{x+2}+2}\right) \right] &\geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x)=x^3-9x^2+24x-13; x \in [1;6]$.

Ta có $f'(x)=3x^2-18x+24=3(x-2)(x-3); f'(x)=0 \Leftrightarrow x \in \{2;4\}$.

Khảo sát sự biến thiên hàm số trên với $x \in [1;6]$ ta có

$$f(1)=3; f(2)=7; f(4)=3; f(6)=23 \Rightarrow f(x) \geq \min_{x \in [1;6]} f(x) = f(1) = f(4) = 3.$$

Lại có $\frac{2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{3}{\sqrt{x+2}+2} \leq \frac{2}{1}+\frac{3}{\sqrt{3}+2} < 3, \forall x \in [1;6]$ nên

$$\frac{2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{3}{\sqrt{x+2}+2} < 3 < x^3-9x^2+24x-13+\frac{1}{2+\sqrt{6-x}}, \forall x \in [1;6]$$

Hay $x^3-9x^2+24x-13+\frac{1}{2+\sqrt{6-x}}-\left(\frac{2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{3}{\sqrt{x+2}+2}\right) > 0, \forall x \in [1;6]$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Kết hợp điều kiện thu được nghiệm $2 \leq x \leq 6$.

Nhận xét.

Không nhất thiết sử dụng công cụ đạo hàm – khảo sát hàm số, các bạn có thể tham khảo phân tích

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 13 = (x-1)(x-4)^2 + 3 \geq 3, \forall x \in [1; 6].$$

Bài toán 166. Giải phương trình $3\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3(\sqrt{x+2} - 2) + \sqrt{x-1} - 1 &= x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 4 \\ \Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} &= (x-2)(x^4 + x^2 + 2) \\ \Leftrightarrow x = 2 \vee \frac{3}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} &= x^4 + x^2 + 2 \quad (1) \end{aligned}$$

Rõ ràng $\frac{3}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} \leq \frac{3}{\sqrt{3}+2} + \frac{1}{1} < 2 \leq x^4 + x^2 + 2, \forall x \geq 1 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Do đó phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Nhận xét.

Bài toán 166 mở đầu cho phương trình hệ quả có vẻ phải là đa thức bậc bốn, lưu ý đa thức bậc bốn có rất nhiều kiểu đánh giá, và nó có thể không âm với mọi giá trị thực x , chưa kể điều kiện xác định.

Bài toán 167. Giải phương trình $3\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3(\sqrt{x+3} - 2) + \sqrt{x} - 1 &= x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 3x - 3 \\ \Leftrightarrow \frac{3(x-1)}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} &= (x-1)(x^4 - 2x^2 + 3) \\ \Leftrightarrow x = 1 \vee \frac{3}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} &= (x^2 - 1)^2 + 2 \quad (1) \end{aligned}$$

Lại có $\frac{3}{\sqrt{x+3}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \leq \frac{3}{\sqrt{3}+2} + \frac{1}{2} < 2 \leq (x^2 - 1)^2 + 2, \forall x \geq 0$ nên phương trình (1) vô nghiệm.

Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 168. Giải phương trình $\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{4x-2} = 2x^5 - 3x^4 - 2x^2 + 9x - 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+1} - 2 + 2(\sqrt{4x-2} - 2) &= 2x^5 - 3x^4 - 2x^2 + 9x - 9 \\ \Leftrightarrow \frac{2x-3}{\sqrt{2x+1}+2} + \frac{4(2x-3)}{\sqrt{4x-2}+2} &= (2x-3)(x^4 - x + 3) \\ \Leftrightarrow 2x-3 = 0 \vee \frac{1}{\sqrt{2x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{4x-2}+2} &= x^4 - x + 3 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét rằng

$$x^4 - x + 3 = x^4 - x^2 + \frac{1}{4} + x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{5}{2} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} > \frac{5}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{4x-2}+2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+1}+2} + \frac{4}{2} < \frac{5}{2}, \forall x \geq \frac{1}{2}$$

Suy ra $\frac{1}{\sqrt{2x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{4x-2}+2} < x^4 - x + 3, \forall x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = \frac{3}{2}$.

Bài toán 169. Giải phương trình $\sqrt{3x-3} + \sqrt{5-3x} = \sqrt{7-6x} + 3x^5 - 4x^4 - 12x^2 + 37x - 27 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \left[1; \frac{7}{6}\right]$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{3x-3} - 1 + 1 - \sqrt{7-6x} &= 1 - \sqrt{5-3x} + 3x^5 - 4x^4 - 12x^2 + 37x - 28 \\ \Leftrightarrow \frac{3x-4}{\sqrt{3x-3}+1} + \frac{6x-8}{1+\sqrt{7-6x}} &= \frac{3x-4}{1+\sqrt{5-3x}} + (3x-4)(x^4-4x+7) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=4 \\ \frac{1}{\sqrt{3x-3}+1} + \frac{1}{1+\sqrt{7-6x}} = \frac{1}{1+\sqrt{5-3x}} + (x^4-4x+7) \end{cases} & (1) \end{aligned}$$

Chú ý $\frac{1}{\sqrt{3x-3}+1} + \frac{1}{1+\sqrt{7-6x}} < 1+1=2, \forall x \in \left[1; \frac{7}{6}\right]$, hơn nữa

$$x^4 - 4x + 7 = x^4 - 4x^2 + 4 + 4x^2 - 4x + 1 + 2 = (x^2 - 2)^2 + (2x - 1)^2 + 2 > 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{5-3x}} + (x^4 - 4x + 7) > 2 > \frac{1}{\sqrt{3x-3}+1} + \frac{1}{1+\sqrt{7-6x}} \quad \forall x \in \left[1; \frac{7}{6}\right]$$

Vậy phương trình (1) vô nghiệm. Thu được $3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \in \left[1; \frac{7}{6}\right]$.

Bài toán 170. Giải phương trình $\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+6} + \sqrt{7-x} = x^5 - 3x^4 - 8x^2 + 34x - 20 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-1 \leq x \leq 7$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - 2 + 2(\sqrt{x+6} - 3) &= 2 - \sqrt{7-x} + x^5 - 3x^4 - 8x^2 + 34x - 30 \\ \Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{2x-6}{\sqrt{x+6}+3} &= \frac{x-3}{2+\sqrt{7-x}} + (x-3)(x^4-8x+10) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{2}{\sqrt{x+6}+3} = \frac{1}{2+\sqrt{7-x}} + x^4 - 8x + 10 \end{cases} & (1) \end{aligned}$$

Ta có $\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{2}{\sqrt{x+6}+3} \leq \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}+3} < 1, \forall x \in [-1; 7]$.

Ngoài ra $x^4 - 8x + 10 = x^4 - 2x^2 + 1 + 2x^2 - 8x + 8 + 1 = (x^2 - 1)^2 + 2(x - 2)^2 + 1 > 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Cho nên $\Rightarrow \frac{1}{2+\sqrt{7-x}} + x^4 - 8x + 10 > 1 > \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{2}{\sqrt{x+6}+3}, \forall x \in [-1; 7] \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Vậy ta có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Nhận xét.

Đối với các phương trình hệ quả có chứa đa thức bậc bốn, sử dụng công cụ đạo hàm – khảo sát hàm số đôi khi tỏ ra khó khăn hoặc không gọn gàng nguyên do phương trình đạo hàm không có nghiệm hữu tỷ, khi đó các bạn cần tinh tế phân tích biểu thức theo các hằng đẳng thức tổng bình phương, chẳng hạn một số bài toán quen thuộc sau

$$k \geq \frac{1}{2}; x^4 \pm x + k = x^4 - x^2 + \frac{1}{4} + x^2 \pm x + \frac{1}{4} + k - \frac{1}{2} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x \pm \frac{1}{2}\right)^2 + k - \frac{1}{2} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$k \geq \frac{5}{4}; x^4 \pm 2x + k = x^4 - x^2 + \frac{1}{4} + x^2 \pm 2x + 1 + k - \frac{5}{4} = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + (x \pm 1)^2 + k - \frac{5}{4} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$k \geq 3; x^4 \pm 4x + k = x^4 - 2x^2 + 1 + 2x^2 \pm 4x + 2 + k - 3 = (x^2 - 1)^2 + 2(x \pm 1)^2 + k - 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Bài toán 171. Giải phương trình $\sqrt{x-3} + 3\sqrt{x} + \sqrt{5-x} > x^5 - 4x^4 - 7x^2 - 30x + 240 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in [3; 5]$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-3} - 1 + 3(\sqrt{x} - 2) > 1 - \sqrt{5-x} + x^5 - 4x^4 - 7x^2 - 30x + 232 \\ \Leftrightarrow & \frac{x-4}{\sqrt{x-3}+1} + \frac{3(x-4)}{\sqrt{x}+2} > \frac{x-4}{1+\sqrt{5-x}} + (x-4)(x^4 - 7x - 58) \\ \Leftrightarrow & (x-4) \left[x^4 - 7x - 58 + \frac{1}{1+\sqrt{5-x}} - \left(\frac{1}{\sqrt{x-3}+1} + \frac{3}{\sqrt{x}+2} \right) \right] < 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta xét hàm số $f(x) = x^4 - 7x - 58; x \in [3; 5]$, rõ ràng $f'(x) = 4x^3 - 7 > 0, \forall x \in [3; 5] \Rightarrow f(x)$ liên tục, đồng biến.

Suy ra $f(x) \geq \min_{x \in [3; 5]} f(x) = f(3) = 2$. Hơn nữa $\frac{1}{\sqrt{x-3}+1} + \frac{3}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{1}{1} + \frac{3}{\sqrt{5}+2} < 2$.

Do đó $x^4 - 7x - 58 + \frac{1}{1+\sqrt{5-x}} - \left(\frac{1}{\sqrt{x-3}+1} + \frac{3}{\sqrt{x}+2} \right) > 0, \forall x \in [3; 5]$. Vậy (1) $\Leftrightarrow x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 4 \Rightarrow S = [3; 4]$.

Bài toán 172. Giải phương trình $\frac{\sqrt{x-1} + 3\sqrt{x+2} + \sqrt{x+7}}{x^5 - 10x^4 + 38x^3 - 68x^2 + 59x - 12} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ x^5 - 10x^4 + 38x^3 - 68x^2 + 59x - 12 \neq 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x-1} - 1 + 3(\sqrt{x+2} - 2) + \sqrt{x+7} - 3 = x^5 - 10x^4 + 38x^3 - 68x^2 + 59x - 22 \\ \Leftrightarrow & \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{3(x-2)}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{(x-2)}{\sqrt{x+7}+3} = (x-2)(x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 11) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 2 \\ \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{3}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+7}+3} = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 11 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 11; x \geq 1$ ta có

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 4(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 4(x-1)(x-2)(x-3).$$

Phương trình đạo hàm $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 2; 3\}$. Khảo sát sự biến thiên hàm số này trên miền $x \geq 1$ thu được

$$f(1) = 2; f(2) = 3; f(3) = 2 \Rightarrow f(x) \geq \underset{x \geq 1}{\text{Min}} f(x) = f(1) = f(3) = 2.$$

Hơn nữa $\frac{1}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{3}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{1}{\sqrt{x+7}+3} \leq 1 + \frac{3}{\sqrt{3}+2} + \frac{1}{\sqrt{8}+3} < 2, \forall x \geq 1$ nên (1) vô nghiệm.

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài toán 173. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3} + \sqrt{3x+1} + x = 5 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+3} - 2 + \sqrt{3x+1} - 2 + x - 1 = 0 &\Leftrightarrow \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+3}+2} + \frac{3(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2} + x-1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} + \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} = 0 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Phương trình (1) vô nghiệm vì $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} + \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} > 0, \forall x \geq -\frac{1}{3}$.

Do đó phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 174. Giải phương trình $3\sqrt{3x^2+1} + 2\sqrt{3x+1} + 2x = 12 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3(\sqrt{3x^2+1}-2) + 2(\sqrt{3x+1}-2) + 2(x-1) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3(x^2-1)}{\sqrt{3x^2+1}+2} + \frac{6(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2} + 2(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{3(x+1)}{\sqrt{3x^2+1}+2} + \frac{6}{\sqrt{3x+1}+2} + 2 = 0 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $\frac{3(x+1)}{\sqrt{3x^2+1}+2} + \frac{6}{\sqrt{3x+1}+2} + 2 > 0, \forall x \geq -\frac{1}{3}$ nên (1) vô nghiệm.

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 175. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3} + \sqrt{2x-1} + 5x = 8 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2+3}-2+\sqrt{2x-1}-1+5x-5=0 \\ & \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1}+5(x-1)=0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+5=0 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Vì $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+5>0, \forall x \geq \frac{1}{2}$ nên (1) vô nghiệm. Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 176. Giải phương trình $3\sqrt{x^2+3}+2\sqrt{x}=x^2+2x+5 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 3(\sqrt{x^2+3}-2)+2(\sqrt{x}-1)=x^2+2x-3 \Leftrightarrow \frac{3(x^2-1)}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{2(x-1)}{\sqrt{x}+1}=(x-1)(x+3) \\ & \Leftrightarrow \frac{3(x-1)(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{2(x-1)}{\sqrt{x}+1}=(x-1)(x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{3(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{2}{\sqrt{x}+1}=x+3 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Dễ thấy $\frac{3(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{2}{\sqrt{x}+1}<\frac{3(x+1)}{3}+\frac{2}{1}=x+3 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 177. Giải phương trình $\sqrt{10-x^2}+2\sqrt{2x-1}+x^2+2x=8 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt{10}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 3-\sqrt{10-x^2}=2(\sqrt{2x-1}-1)+x^2+2x-3 \\ & \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{3+\sqrt{10-x^2}}=\frac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1}+1}+(x-1)(x+3) \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{x+1}{3+\sqrt{10-x^2}}=\frac{2}{\sqrt{2x-1}+1}+x+3 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $\frac{x+1}{3+\sqrt{10-x^2}} \leq \frac{x+1}{3} < x+3 < \frac{1}{\sqrt{x+8}+3}+x+3, \forall x \in \left[\frac{1}{2}; \sqrt{10}\right]$ nên (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 178. Giải phương trình $3\sqrt{3x+1}+2\sqrt{5-x^2}+x^2+x=12 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{1}{3} \leq x \leq \sqrt{5}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2(2 - \sqrt{5 - x^2}) &= 3(\sqrt{3x+1} - 2) + x^2 + x - 2 \\ \Leftrightarrow \frac{2(x^2 - 1)}{2 + \sqrt{5 - x^2}} &= \frac{3(x-1)}{\sqrt{3x+1} + 2} + (x-1)(x+2) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \frac{2(x+1)}{2 + \sqrt{5 - x^2}} = \frac{3}{\sqrt{3x+1} + 2} + x + 2 \end{cases} & \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác với điều kiện xác định thì $\frac{2(x+1)}{2 + \sqrt{5 - x^2}} \leq x+1 < x+2 < \frac{3}{\sqrt{3x+1} + 2} + x+2 \Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Do đó phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 179. Giải phương trình $\sqrt{10 - x^2} + \sqrt{x+1} + 2x^2 - 4x = 9 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-1 \leq x \leq \sqrt{10}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{10 - x^2} &= \sqrt{x+1} - 2 + 2(x^2 - 2x - 3) \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 - 9}{1 + \sqrt{10 - x^2}} &= \frac{x-3}{\sqrt{x+1} + 2} + 2(x-3)(x+1) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \frac{x+3}{1 + \sqrt{10 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} + 2x + 2 \end{cases} & \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $\frac{x+3}{1 + \sqrt{10 - x^2}} \leq x+3 \leq 2x+2 < \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} + 2x+2, \forall x \geq -1$ nên (1) vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Bài toán 180. Giải phương trình $1 + \sqrt{x(2x-1)} = \sqrt{x} + (2x-1)^2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x(2x-1)} - 1 &= \sqrt{x} - 1 + 4x^2 - 4x \Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{x(2x-1)} + 1} = \frac{x-1}{\sqrt{x} + 1} + 4x(x-1) \\ \Leftrightarrow \frac{(x-1)(2x+1)}{\sqrt{x(2x-1)} + 1} &= \frac{x-1}{\sqrt{x} + 1} + 4x(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \frac{2x+1}{\sqrt{x(2x-1)} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} + 4x \end{cases} & \quad (1) \end{aligned}$$

Lại có $\frac{2x+1}{\sqrt{x(2x-1)} + 1} \leq 2x+1 \leq 4x < \frac{1}{\sqrt{x} + 1} + 4x, \forall x \geq \frac{1}{2}$ nên (1) vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Bài toán 181. Giải phương trình $\sqrt{x(3x-4)} = \sqrt{4x+1} + 3x^2 - 4x - 5 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{1}{4} \leq x \leq 0 \vee x \geq \frac{4}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x(3x-4)} - 2 &= \sqrt{4x+1} - 3 + 3x^2 - 4x - 4 \\ \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x(3x-4)} + 2} &= \frac{4(x-2)}{\sqrt{4x+1} + 3} + (x-2)(3x+2) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{3x+2}{\sqrt{x(3x-4)} + 2} = \frac{4}{\sqrt{4x+1} + 3} + 3x+2 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Chú ý $\frac{3x+2}{\sqrt{x(3x-4)} + 2} \leq \frac{3x+2}{2} \leq 3x+2 < \frac{4}{\sqrt{4x+1} + 3} + 3x+2, \forall x \geq -\frac{1}{4}$ nên (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài toán 182. Giải phương trình $\sqrt{x(2x-3)} + \sqrt{x+1} = x^2 - 4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-1 \leq x \leq 0 \vee x \geq \frac{3}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x(2x-3)} - 3 + \sqrt{x+1} - 2 &= x^2 - 9 \\ \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3x - 9}{\sqrt{x(2x-3)} + 3} + \frac{2x-6}{\sqrt{x+1} + 2} &= (x-3)(x+3) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \frac{2x+3}{\sqrt{x(2x-3)} + 3} + \frac{2}{\sqrt{x+1} + 2} = x+3 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Do $\frac{2x+3}{\sqrt{x(2x-3)} + 3} + \frac{2}{\sqrt{x+1} + 2} < \frac{2x+3}{3} + 1 < x+3, \forall x \geq -1$ nên (1) vô nghiệm.

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Bài toán 183. Giải phương trình $\sqrt{(x-1)(x+2)} + \sqrt{4x+1} = 2x^2 - x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{1}{4} \leq x \leq -2 \vee x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)(x+2)} - 2 + \sqrt{4x+1} - 3 &= 2x^2 - x - 6 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{x^2 + x - 2} + 2} + \frac{4(x-2)}{\sqrt{4x+1} + 3} &= (x-2)(2x+3) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{x+3}{\sqrt{x^2 + x - 2} + 2} + \frac{1}{\sqrt{4x+1} + 3} = 2x+3 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Chú ý $\frac{x+3}{\sqrt{x^2 + x - 2} + 2} + \frac{1}{\sqrt{4x+1} + 3} < \frac{x+3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+4}{2} < 2x+3, \forall x \geq -\frac{1}{4}$ nên (1) vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài toán 184. Giải phương trình $\frac{\sqrt{10-x^2}+x^3}{5x+11}=1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}; x \neq -\frac{11}{5}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{10-x^2}+x^3 &= 5x+11 \Leftrightarrow 1-\sqrt{10-x^2}=x^3-5x-12 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2-9}{1+\sqrt{10-x^2}} &= (x-3)(x^2+3x+4) \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ \frac{x+3}{1+\sqrt{10-x^2}}=x^2+3x+4 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $x^2+3x+4 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x+3 > 0$. Do đó $\frac{x+3}{1+\sqrt{10-x^2}} \leq x+3 \leq x+3+(x+1)^2 = x^2+3x+4 \quad (2)$.

Mặt khác $\begin{cases} \sqrt{10-x^2}=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\} \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$ nên dấu đẳng thức tại (2) không xảy ra.

Do đó (1) vô nghiệm. Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

Nhận xét.

Các bài toán từ 173 đến 184 là 11 bài toán mở màn cho một chiến dịch quy mô hơn trong chuỗi kế hoạch nâng cấp phương trình hệ quả thu được phía sau liên hợp của tài liệu. Chắc chắn các bạn độc giả đều nhận ra mức độ khó đã tăng cấp so với các bài toán trước đó, nguyên do biểu thức trong căn có dạng tam thức bậc hai, do đó sau khi sử dụng đại lượng liên hợp – trực căn thức chúng ta thu được duy nhất một biểu thức hệ quả có dạng $\frac{ax+b}{\sqrt{f(x)}+p}$, và

kèm theo một biểu thức có dạng đơn giản $\frac{q}{\sqrt{h(x)}+r}$, nghĩa là tử thức không còn đơn độc hằng số như trước nữa.

Mọi đánh giá với phương trình hệ quả đều phải hết sức để ý đến nhị thức bậc nhất $g(x)=ax+b$, nếu không mọi kế hoạch sẽ bị phá sản, không đi được đến đích cuối cùng.

Tuy nhiên 11 bài toán vẫn cho chúng ta con đường sống, khi mà chỉ toàn bộ các nhị thức $g(x)=ax+b$ đều có giá trị không âm khi kéo theo điều kiện xác định, hơn nữa biểu thức $\sqrt{f(x)}+p$ chưa đạt mức độ đánh giá chặt chẽ. Có thể tổng quát hóa một số đánh giá như sau (ký hiệu về phải là VP).

- Đánh giá lỏng lẻo

$$\begin{aligned} \frac{ax+b}{\sqrt{f(x)}+p} + \frac{q}{\sqrt{f(x)}+r} &< \frac{ax+b}{p} + \frac{q}{r} < \frac{ax+b}{p} + \frac{q}{r} + M = VP; M \geq 0 \\ \frac{ax+b}{\sqrt{f(x)}+p} &\leq \frac{ax+b}{p} < \frac{ax+b}{p} + \frac{q}{\sqrt{f(x)}+r} + M = VP; M \geq 0 \end{aligned}$$

- Đánh giá chặt chẽ

$$\begin{aligned} \frac{ax+b}{\sqrt{f(x)}+p} + \frac{q}{\sqrt{f(x)}+r} &< \frac{ax+b}{p+k} + \frac{q}{r} < \frac{ax+b}{p+k} + \frac{q}{r} + M = VP; M \geq 0; \sqrt{f(x)} \geq k > 0 \\ \frac{ax+b}{\sqrt{f(x)}+p} &\leq \frac{ax+b}{p+k} < \frac{ax+b}{p+k} + \frac{q}{\sqrt{f(x)}+r} + M = VP; M \geq 0; \sqrt{f(x)} \geq k > 0 \end{aligned}$$

Trong đó nếu bài toán phát triển đến mức độ đánh giá chặt chẽ, biểu thức M (có giá trị không âm) càng phức tạp và ẩn giấu, hay thậm chí nhị thức bậc nhất $g(x)=ax+b$ không còn dễ cưa cạo theo điều kiện xác định, lúc đó chúng ta gặp nhiều chướng ngại vật hơn, cần phải đầu tư óc tư duy nhiều hơn, sẵn sàng đối mặt mọi tình huống.

Bài toán 185. Giải bất phương trình $x^3 + 2x^2 - x > \sqrt{7-3x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\sqrt{\frac{7}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{7}{3}}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2 - \sqrt{7-3x^2} + x^3 + 2x^2 - x - 2 &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3x^2-3}{2+\sqrt{7-3x^2}} + (x^2-1)(x+2) &> 0 \\ \Leftrightarrow (x^2-1) \left(\frac{3}{2+\sqrt{7-3x^2}} + x+2 \right) &> 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Để ý $\frac{3}{2+\sqrt{7-3x^2}} + x+2 > 0, \forall x \in \left[-\sqrt{\frac{7}{3}}; \sqrt{\frac{7}{3}}\right]$ nên $(1) \Leftrightarrow x^2-1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm $S = \left[-\sqrt{\frac{7}{3}}; -1\right) \cup \left(1; \sqrt{\frac{7}{3}}\right]$.

Bài toán 186. Giải bất phương trình $x^3 + 8x + \sqrt{5-4x^2} > x^2 + 9 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{5-4x^2} < x^3 - x^2 + 8x - 8 &\Leftrightarrow \frac{4x^2-4}{1+\sqrt{5-4x^2}} < (x-1)(x^2+8) \\ \Leftrightarrow (x-1) \left[x^2 + 8 - \frac{4(x+1)}{1+\sqrt{5-4x^2}} \right] &> 0 \quad (1) \end{aligned}$$

○ Để ý rằng nếu $x+1 < 0 \Rightarrow x^2 + 8 - \frac{4(x+1)}{1+\sqrt{5-4x^2}} > 0; x-1 < 0 \Rightarrow (x-1) \left[x^2 + 8 - \frac{4(x+1)}{1+\sqrt{5-4x^2}} \right] < 0$.

Khi đó (1) vô nghiệm.

○ Nếu $x+1 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 8 = (x-2)^2 + 4x + 4 \geq 4x + 4 \geq \frac{4(x+1)}{1+\sqrt{5-4x^2}} \quad (2)$.

Hơn nữa $\begin{cases} x-2=0 \\ \sqrt{5-4x^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x^2=\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \Rightarrow$ dấu đẳng thức tại (2) không xảy ra.

Như vậy $x^2 + 8 - \frac{4(x+1)}{1+\sqrt{5-4x^2}} > 0$, suy ra $(1) \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Kết luận $S = \left(1; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$.

Bài toán 187. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{4x^2-3}-x}{(2x+1)^2} + 1 > x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 4x^2 \geq 3 \\ x \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \vee x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^2-3}-x &> (x-1)(2x+1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2-3}-1 > (x-1)(2x+1)^2+x-1 \\ &\Leftrightarrow \frac{4x^2-4}{\sqrt{4x^2-3}+1} > (x-1)(4x^2+4x+2) \Leftrightarrow (x-1) \left[4x^2+4x+2 - \frac{4(x+1)}{\sqrt{4x^2-3}+1} \right] < 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $4x^2+4x+2 = (2x+1)^2+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên xét hai trường hợp

- $x+1 < 0 \Rightarrow x-1 < 0; 4x^2+4x+2 - \frac{4(x+1)}{\sqrt{4x^2-3}+1} > 0$, (1) nghiệm đúng.
- $x+1 \geq 0 \Rightarrow \frac{4(x+1)}{\sqrt{4x^2-3}+1} \leq 4x+4 < 4x+5 + (4x^2-3) = 4x^2+4x+2$.

Do đó ta có $4x^2+4x+2 - \frac{4(x+1)}{\sqrt{4x^2-3}+1} > 0$. Hiển nhiên (1) $\Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Kết hợp điều kiện thu được $S = \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right)$.

Nhận xét.

Với bài toán 187, sau khi thu được hệ quả chúng ta cần xét dấu biểu thức $P = 4x^2+4x+2 - \frac{4(x+1)}{\sqrt{4x^2-3}+1}$.

Một số bài toán trước đó chỉ sử dụng đánh giá thuần túy hằng đẳng thức theo motip $f(x) \leq f(x) + M^2 + k$, với k là hằng số không âm, không đả động gì đến điều kiện xác định của bài toán, mức độ còn rất cơ bản.

Nhiều bạn có ý tưởng khảo sát trực tiếp hàm số $P = f(x) = 4x^2+4x+2 - \frac{4(x+1)}{\sqrt{4x^2-3}+1}$ với điều kiện xác định ban đầu, điều này là đúng tư tưởng nhưng phức tạp. Một bộ phận độc giả khác có thể có ý định tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = 4x^2+4x+2$ cũng với điều kiện ban đầu, tuy nhiên còn một chương ngại vật cứng đầu tồn tại gắn với căn thức, thay vì hằng số nó lại là nhị thức $4x+4$.

Bình tĩnh và khoan thư một chút, không quá khó để nhận ra điểm nhấn $\frac{4(x+1)}{\sqrt{4x^2-3}+1} \leq \frac{4(x+1)}{1} = 4x+4$ nếu như chúng ta có $x+1 \geq 0$. Do đó nếu xác định dấu của biểu thức $x+1$ đồng thời so sánh được hai đối tượng sau đây: $4x^2+4x+2 \sim 4x+4$ thì có thể mở ra cánh cửa tương lai!

Chú ý rằng $4x^2+4x+2 = (2x+1)^2+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên nếu $x+1 < 0 \Rightarrow 4x^2+4x+2 - \frac{4(x+1)}{\sqrt{4x^2-3}+1} > 0$. Khi đó ta lại có lập luận $x+1 < 0 \Rightarrow x-1 < 0; 4x^2+4x+2 - \frac{4(x+1)}{\sqrt{4x^2-3}+1} > 0$.

Vấn đề tiếp theo là trường hợp $x+1 \geq 0$. Quán triệt đường lối phía trên, để thực hiện được điều này đơn giản, mạnh mẽ từ thao tác xét hiệu $4x^2+4x+2 - (4x+4) = 4x^2-2 > 0$, vì $4x^2 > 3$ cơ mà. Đảm bảo đánh giá được liền mạch và gọn gàng các bạn có thể lựa chọn

- $\frac{4(x+1)}{\sqrt{4x^2-3}+1} \leq 4x+4 < 4x+5 + (4x^2-3) = 4x^2+4x+2 \Rightarrow 4x^2+4x+2 - \frac{4(x+1)}{\sqrt{4x^2-3}+1} > 0$.
- $4x^2-3 > 0 \Rightarrow 4x^2-2 > 0 \Rightarrow 4x^2+4x+2 > 4x+4 \geq \frac{4(x+1)}{\sqrt{4x^2-3}+1} \Rightarrow 4x^2+4x+2 - \frac{4(x+1)}{\sqrt{4x^2-3}+1} > 0$.

Trong trường hợp đa thức bậc ba xuất hiện phía sau liên hợp, khi đó các cần linh hoạt kết hợp linh hoạt tổng hòa các kiến thức phân tích nhân tử, hằng đẳng thức và công cụ đạo hàm – khảo sát hàm số, chú ý điều kiện xác định đi theo như hình với bóng để đạt được mục đích cuối cùng.

Bài toán 188. Giải bất phương trình $x^3 - 6x^2 + 15x + 2\sqrt{5-x^2} \geq 14 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4 - 2\sqrt{5-x^2} &\leq x^3 - 6x^2 + 15x - 10 \\ \Leftrightarrow \frac{2(x^2-1)}{2+\sqrt{5-x^2}} &\leq (x-1)(x^2-5x+10) \\ \Leftrightarrow (x-1) \left[x^2-5x+10 - \frac{2(x+1)}{2+\sqrt{5-x^2}} \right] &\geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $x^2 - 5x + 10 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

➤ Nếu $x+1 < 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 10 - \frac{2(x+1)}{2+\sqrt{5-x^2}} > 0 \Rightarrow (x-1) \left[x^2 - 5x + 10 - \frac{2(x+1)}{2+\sqrt{5-x^2}} \right] < 0$, (1) vô nghiệm.

➤ Nếu $x+1 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 10 = (x-3)^2 + x + 1 \geq x + 1 \geq \frac{2(x+1)}{2+\sqrt{5-x^2}} \quad (2)$.

Hơn nữa $\begin{cases} \sqrt{5-x^2} = 0 \\ x-3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\} \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \Rightarrow$ dấu đẳng thức tại (2) không xảy ra.

Do đó $x^2 - 5x + 10 > \frac{2(x+1)}{2+\sqrt{5-x^2}}$ nên (1) $\Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $1 < x \leq \sqrt{5}$.

Nhận xét.

Đối với lớp phương trình hệ quả $\frac{ax+b}{\sqrt{f(x)}+p} = M$, trong đó M là hỗn hợp đa thức, căn thức, và điểm đặc thù là M

có giá trị không âm. Tổng quát hóa đánh giá như sau (đánh giá chặt chẽ)

- $ax+b < 0 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.
- $ax+b \geq 0 \Rightarrow \frac{ax+b}{\sqrt{f(x)}+p} \leq \frac{ax+b}{k+p} \leq M$, có nghiệm hoặc vô nghiệm tùy theo từng bài toán cụ thể.

Đối với lớp bất phương trình quy về dạng tích $(x-s) \left(M - \frac{ax+b}{\sqrt{f(x)}+p} \right)$, tương tự như trên

- $ax+b < 0 \Rightarrow M - \frac{ax+b}{\sqrt{f(x)}+p} > 0$.
- $ax+b \geq 0 \Rightarrow \frac{ax+b}{\sqrt{f(x)}+p} \leq \frac{ax+b}{k+p} \leq M$.

Việc còn lại trong tình huống thứ hai này rất cơ bản, xử lý $x-s$ đồng thời kết hợp điều kiện xác định là thu được nghiệm của bất phương trình ban đầu.

Bài toán 189. Giải phương trình $\frac{5-x^3}{\sqrt{17-x^2}} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\sqrt{17} < x < \sqrt{17}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{17-x^2} + x^3 &= 5 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{17-x^2} = x^3 - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{4+\sqrt{17-x^2}} &= (x-1)(x^2+x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{x+1}{4+\sqrt{17-x^2}} = x^2+x+1 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $4x^2+3x+3 = \left(2x+\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{39}{16} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow x+1 > 0$ nên

$$\frac{x+1}{4+\sqrt{17-x^2}} \leq \frac{x+1}{4} < x^2+x+1$$

Khi đó (1) vô nghiệm. Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 190. Giải bất phương trình $x^3+4x^2+x+1+\sqrt{25-x^2} \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-5 \leq x \leq 5$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3 - \sqrt{25-x^2} \leq x^3+4x^2+x+4 &\Leftrightarrow \frac{x^2-16}{3+\sqrt{25-x^2}} \leq (x+4)(x^2+1) \\ \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x+4)}{3+\sqrt{25-x^2}} &\leq (x+4)(x^2+1) \Leftrightarrow (x+4) \left(x^2+1 - \frac{x-4}{3+\sqrt{25-x^2}} \right) \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

- Nếu $x+4 < 0 \Rightarrow \frac{x-4}{3+\sqrt{25-x^2}} < 0 \Rightarrow x^2+1 - \frac{x-4}{3+\sqrt{25-x^2}} > 0 \Rightarrow (x+4) \left(x^2+1 - \frac{x-4}{3+\sqrt{25-x^2}} \right) < 0$.

Khi đó (1) vô nghiệm.

- Nếu $-4 \leq x < 4 \Rightarrow \begin{cases} x^2+1 - \frac{x-4}{3+\sqrt{25-x^2}} > 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x+4) \left(x^2+1 - \frac{x-4}{3+\sqrt{25-x^2}} \right) \geq 0, (1) \text{ nghiệm đúng.}$

- Nếu $x-4 \geq 0 \Rightarrow x+4 > 0; x^2+1 - \frac{x-4}{3+\sqrt{25-x^2}} \geq x^2+1 - \frac{x-4}{3} = \frac{3x^2-x+7}{3} > 0, \forall x \geq 4$.

Tổng hợp các trường hợp ta thu được nghiệm $-4 \leq x \leq 5$.

Bài toán 191. Giải bất phương trình $x^3-2x^2+3x+3\sqrt{10-x^2} \geq 11 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3(3-\sqrt{10-x^2}) &\leq x^3-2x^2+3x-2 \\ \Leftrightarrow \frac{3(x^2-1)}{3+\sqrt{10-x^2}} &\leq (x-1)(x^2-x+2) \\ \Leftrightarrow (x-1) \left[x^2-x+2 - \frac{3(x+1)}{3+\sqrt{10-x^2}} \right] &\geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Dễ thấy $x^2-x+2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên xét các khả năng

$$\circ \text{ Nếu } x+1 < 0 \Rightarrow x-1 < 0; x^2 - x + 2 - \frac{3(x+1)}{3+\sqrt{10-x^2}} > 0 \Rightarrow (x-1) \left[x^2 - x + 2 - \frac{3(x+1)}{3+\sqrt{10-x^2}} \right] < 0.$$

Khi đó (1) vô nghiệm.

$$\circ \text{ Nếu } x+1 \geq 0 \Rightarrow x^2 - x + 2 = (x-1)^2 + x + 1 \geq x + 1 \geq \frac{3(x+1)}{3+\sqrt{10-x^2}} \quad (2).$$

$$\text{Chú ý rằng } \begin{cases} x-1=0 \\ \sqrt{10-x^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x \in \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \text{ nên (2) không xảy ra dấu đẳng thức.}$$

Vì vậy $x^2 - x + 2 - \frac{3(x+1)}{3+\sqrt{10-x^2}} > 0$. Suy ra (1) $\Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Kết luận nghiệm $1 \leq x \leq \sqrt{10}$.

Bài toán 192. Tìm nghiệm không âm của phương trình

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x+1} = x^3 + 3x^2 + 2x + 2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1} - 1 + \sqrt{x+1} - 1 &= x^3 + 3x^2 + 2x \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1} + \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} &= x(x^2 + 3x + 2) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} &= x^2 + 3x + 2 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } x \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} < \frac{x}{1} + \frac{1}{1} = x+1 \leq x+1 + (x+1)^2 = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow (1) \text{ vô nghiệm.}$$

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

$$\textbf{Bài toán 193.} \text{ Giải phương trình } \sqrt{x^2+5} + 2\sqrt{x+2} = \frac{x^3 + 4x^2 + x + 9}{5} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+5} - 3 + 2(\sqrt{x+2} - 2) &= \frac{x^3 + 4x^2 + x - 26}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3} + \frac{2(x-2)}{\sqrt{x+2}+2} &= \frac{(x-2)(x^2+6x+13)}{5} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} + \frac{2}{\sqrt{x+2}+2} &= \frac{x^2+6x+13}{5} \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } \frac{(x+2)(x+3)}{5} \geq 0, \forall x \geq -2 \text{ nên chú ý rằng}$$

$$\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} + \frac{2}{\sqrt{x+2}+2} < \frac{x+2}{2+3} + \frac{2}{2} = \frac{x+2}{5} + 1 = \frac{x+7}{5} \leq \frac{(x+2)(x+3) + x+7}{5} = \frac{x^2+6x+13}{5}, \forall x \geq -2.$$

Điều này dẫn đến phương trình (1) vô nghiệm. Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài toán 194. Giải phương trình $3\sqrt{x^2+3} + \sqrt{3x+1} = \frac{x^3+4x^2+x+10}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3(\sqrt{x^2+3}-2) + \sqrt{3x+1}-2 &= \frac{x^3+4x^2+x-6}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{3(x^2-1)}{\sqrt{x^2+3}+2} + \frac{3(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2} &= (x-1) \cdot \frac{x^2+5x+6}{2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \frac{3(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2} + \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} = \frac{x^2+5x+6}{2} \end{cases} & \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác $\frac{3(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2} + \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} < \frac{3(x+1)}{3} + \frac{3}{2} = \frac{2x+5}{2} < \frac{2x+5+3x+1+x^2}{2} = \frac{x^2+5x+6}{2}, \forall x \geq -\frac{1}{3}$.

Vậy (1) vô nghiệm. Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 195. Giải phương trình nghiệm không âm $\sqrt{x(6x-5)} = x^3+3x^2-2x-1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ x(6x-5) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x \geq \frac{5}{6} \end{cases}.$$

Xét $x=0$ không thỏa mãn phương trình ban đầu. Với $x \geq \frac{5}{6}$ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x(6x-5)}-1 &= x^3+3x^2-2x-2 \Leftrightarrow \frac{6x^2-5x-1}{\sqrt{x(6x-5)}+1} = x^3+3x^2-2x-2 \\ \Leftrightarrow \frac{(x-1)(6x+1)}{\sqrt{x(6x-5)}+1} &= (x-1)(x^2+4x+2) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{6x+1}{\sqrt{x(6x-5)}+1} = x^2+4x+2 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Nhận xét } x \geq \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{6x+1}{\sqrt{x(6x-5)}+1} \leq 6x+1 \leq 6x+1+(x-1)^2 = x^2+4x+2 \quad (2).$$

$$\text{Hơn nữa xét hệ } \begin{cases} \sqrt{x(6x-5)}=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left\{0; \frac{5}{6}\right\} \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \Rightarrow (2) \text{ không xảy ra dấu đẳng thức.}$$

Phương trình (1) vô nghiệm, vậy bài toán có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 196. Giải bất phương trình $\frac{x(9x^2-12x+5)}{\sqrt{x(3x-2)}+1} \geq 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 0 \vee x \geq \frac{2}{3}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x(3x-2)}+1 &\leq 9x^3-12x^2+5x \Leftrightarrow \sqrt{x(3x-2)}-1 \leq 9x^3-12x^2+5x-2 \\ \Leftrightarrow \frac{3x^2-2x-1}{\sqrt{x(3x-2)}+1} &\leq 9x^3-12x^2+5x-2 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(3x+1)}{\sqrt{x(3x-2)}+1} \leq (x-1)(9x^2-3x+2) \\ \Leftrightarrow (x-1) \left(9x^2-3x+2 - \frac{3x+1}{\sqrt{x(3x-2)}+1} \right) &\geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $9x^2-3x+2 = \left(3x-\frac{3}{18}\right)^2 + \frac{71}{36} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên xét các trường hợp

- Nếu $3x+1 < 0 \Rightarrow x-1 < 0; \frac{3x+1}{\sqrt{x(3x-2)}+1} < 0 \Rightarrow 9x^2-3x+2 - \frac{3x+1}{\sqrt{x(3x-2)}+1} > 0, (1)$ vô nghiệm.
- Nếu $3x+1 \geq 0 \Rightarrow 9x^2-3x+2 - \frac{3x+1}{\sqrt{x(3x-2)}+1} \geq 9x^2-3x+2 - (3x+1) = 9x^2-6x+1 = (3x-1)^2 \geq 0 \quad (2).$

Hơn nữa xét hệ $\begin{cases} \sqrt{x(3x-2)}=0 \\ 3x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(3x-2)=0 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \Rightarrow (2) \text{ không xảy ra dấu đẳng thức.}$

Do đó $9x^2-3x+2 - \frac{3x+1}{\sqrt{x(3x-2)}+1} > 0$, đi đến (1) $\Leftrightarrow x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \Rightarrow S = [1; +\infty)$.

Bài toán 197. Giải bất phương trình $\sqrt{5x^2-8x+4} > x(x^2-x+1) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \leq 0 \vee x \geq \frac{8}{5}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x(5x-8)} &> x^3-x^2+x-4 \Leftrightarrow \sqrt{x(5x-8)}-2 > x^3-x^2+x-6 \\ \Leftrightarrow \frac{5x^2-8x-4}{\sqrt{x(5x-8)}+2} &> (x-2)(x^2+x+3) \Leftrightarrow (x-2) \left(x^2+x+3 - \frac{5x+2}{\sqrt{x(5x-8)}+2} \right) < 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $x^2+x+3 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Xét các trường hợp

- ❖ Nếu $5x+2 < 0 \Rightarrow x-2 < 0; \frac{5x+2}{\sqrt{x(5x-8)}+2} < 0 \Rightarrow x^2+x+3 - \frac{5x+2}{\sqrt{x(5x-8)}+2} > 0, (1)$ nghiệm đúng.
- ❖ Nếu $5x+2 \geq 0 \Rightarrow x^2+x+3 - \frac{5x+2}{\sqrt{x(5x-8)}+2} \geq x^2+x+3 - \frac{5x+2}{2} = \frac{2x^2-3x+4}{2} = \left(x-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{16} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Do đó (1) $\Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$, suy ra $-\frac{2}{5} \leq x < 2$. Kết hợp với điều kiện ta thu được nghiệm $x \leq 0 \vee \frac{8}{5} \leq x < 2$.

Bài toán 198. Giải phương trình $2\sqrt{(x-1)(x+2)} = 4x^3-11x^2+10x-4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $(x-1)(x+2) \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-1)(x+2)} &= \frac{4x^3 - 11x^2 + 10x - 4}{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x+2)} - 2 = \frac{4x^3 - 11x^2 + 10x - 8}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{(x-1)(x+2)} + 2} &= \frac{4x^3 - 11x^2 + 10x - 8}{2} \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+3)}{\sqrt{(x-1)(x+2)} + 2} = \frac{(x-2)(4x^2 - 3x + 4)}{2}\end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\blacksquare \quad \frac{x+3}{\sqrt{(x-1)(x+2)} + 2} = \frac{4x^2 - 3x + 4}{2} \quad (1).$$

Nhận xét $4x^2 - 3x + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x + 3 > 0$. Do vậy

$$\frac{x+3}{\sqrt{(x-1)(x+2)} + 2} \leq \frac{x+3}{2} \leq \frac{x+3 + (2x-1)^2}{2} = \frac{4x^2 - 3x + 4}{2} \quad (2).$$

$$\text{Lại xét hệ } \begin{cases} \sqrt{(x-1)(x+2)} = 0 \\ 2x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{-2; 1\} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \Rightarrow (2) \text{ không xảy ra dấu đẳng thức.}$$

Do đó (1) vô nghiệm.

Vậy bài toán ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài toán 199. Giải phương trình $\frac{\sqrt{(2x-1)(3x-2)} + 2x^2 + x}{4x^3} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $(2x-1)(3x-2) \geq 0; x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}\sqrt{(2x-1)(3x-2)} + 2x^2 + x &= 4x^3 \Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)(3x-2)} - 1 = 4x^3 - 2x^2 - x - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{6x^2 - 7x + 1}{\sqrt{(2x-1)(3x-2)} + 1} &= (x-1)(4x^2 + 2x + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \frac{6x-1}{\sqrt{(2x-1)(3x-2)} + 1} = 4x^2 + 2x + 1 \end{cases} \quad (1)\end{aligned}$$

Nhận xét $4x^2 + 2x + 1 = 3x^2 + (x+1)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 6x-1 > 0$ nên

$$\frac{6x-1}{\sqrt{(2x-1)(3x-2)} + 1} \leq 6x-1 < 6x + (2x-1)^2 = 4x^2 + 2x + 1.$$

Vậy (1) vô nghiệm. Kết hợp điều kiện ta thu được tập nghiệm duy nhất $x = 1$.

Nhận xét.

Các bài toán từ 173 đến 199, không nằm ngoài phạm vi lớp bài toán phương trình, bất phương trình chứa căn sử dụng đại lượng liên hợp – trực căn thức – hệ tạm thời, đặc thù với các căn thức đơn độc (không có đa thức gắn với căn), mức độ phức tạp đã được nâng lên khi biểu thức trong căn thức có dạng tam thức bậc hai, với một vế có dạng đa thức bậc ba xuất hiện sau khi liên hiệp, các bài toán đã xoay quanh toàn thể các đánh giá đồng chí, nghịch chí, một số bài toán bước đầu sử dụng điều kiện xác định, tuy nhiên vẫn dừng ở mức độ hàm số bậc hai.

Thông thường các bài toán trên thường có nghiệm duy nhất, do tác giả đã sắp xếp từ trước để hệ quả phía sau vô nghiệm. Riêng với bài toán 199 có hai nghiệm, bình thường bài toán này có thể xử lý theo hướng khác là liên hiệp biểu thức, nhưng có lẽ sẽ khá khó khăn và dài dòng so với lời giải phía trên. Đối với lớp bất phương trình tương tự, chúng ta cần lưu ý xử lý dấu đẳng thức có thể xảy ra đối với hệ quả, nếu xảy ra bài toán sẽ đi theo một

chiều hướng khác, chú ý rằng $\begin{cases} AB \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A \in \mathbb{R} \end{cases} \vee \begin{cases} B > 0 \\ A \geq 0 \end{cases}$

Các bài toán trên không những đòi hỏi kỹ năng liên hợp thành thạo mà còn cần tư duy bất đẳng thức, đánh giá, hàm số tổng hòa kiến thức, mong các bạn đọc giả nhỏ tuổi chuẩn bị trước hoặc song hành để có tinh thần tham khảo tài liệu một cách tốt nhất.

Bài toán 200. Tìm nghiệm không âm của phương trình

$$\sqrt{(x+1)(3x-1)} + 1 = \frac{x^3 + 4x^2 + x}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+1)(3x-1)} - 2 &= \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{2} \Leftrightarrow \frac{3x^2 + 2x - 5}{\sqrt{(x+1)(3x-1)} + 2} = \frac{(x-1)(x^2 + 5x + 6)}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{(x-1)(3x+5)}{\sqrt{(x+1)(3x-1)} + 2} &= \frac{(x-1)(x^2 + 5x + 6)}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \frac{3x+5}{\sqrt{(x+1)(3x-1)} + 2} = \frac{x^2 + 5x + 6}{2} \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Nhận xét với điều kiện trên thì } \frac{3x+5}{\sqrt{(x+1)(3x-1)} + 2} \leq \frac{3x+5}{2} \leq \frac{3x+5+(x+1)^2}{2} = \frac{x^2 + 5x + 6}{2} \quad (2).$$

$$\text{Dấu đẳng thức tại (2) xảy ra khi } \begin{cases} \sqrt{(x+1)(3x-1)} = 0 \\ x+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left\{-1; \frac{1}{3}\right\} \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 \text{ (Loại).}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 201. Giải phương trình $x^3 - 4x^2 - 11x + 43 = \sqrt{10 - x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 - 11x + 42 &= \sqrt{10 - x^2} - 1 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 - x - 14) = \frac{9 - x^2}{\sqrt{10 - x^2} + 1} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ x^2 - x - 14 + \frac{x+3}{\sqrt{10 - x^2} + 1} = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \frac{x+3}{\sqrt{10 - x^2} + 1} = x + 14 - x^2 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét

$$x + 14 - x^2 = x + 4 + 10 - x^2 > 0, \forall x \in [-\sqrt{10}; \sqrt{10}] \Rightarrow x + 3 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{\sqrt{10 - x^2} + 1} \leq x + 3 < x + 4 + (10 - x^2) = x + 14 - x^2$$

Suy ra (1) vô nghiệm. Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Bài toán 202. Giải phương trình $3x^3 + 2x^2 - 9x - 7 = \sqrt{2 - x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$3x^3 + 2x^2 - 9x - 8 = \sqrt{2-x^2} - 1 \Leftrightarrow (x+1)(3x^2 - x - 8) = \frac{1-x^2}{\sqrt{2-x^2} + 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ 3x^2 - x - 8 = \frac{1-x}{\sqrt{2-x^2} + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{2-x^2} + 1} = x+8-3x^2 \end{cases} \quad (1)$$

Kết hợp (1) và $x+8-3x^2 = x+2+3(2-x^2) > 0, \forall x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \Rightarrow x-1 > 0$.

Khi đó $\Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{2-x^2} + 1} \leq x-1 < x+2+3(2-x^2) = x+8-3x^2$, tức là (1) vô nghiệm.

Đổi chiều điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = -1$.

Bài toán 203. Giải phương trình $4x^3 + 17 = 7x^2 + 11x + 3\sqrt{2-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$3(1-\sqrt{2-x^2}) + 4x^3 - 7x^2 - 11x + 14 = 0 \Leftrightarrow \frac{3(x^2-1)}{1+\sqrt{2-x^2}} + (x-1)(4x^2-3x-14) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \frac{3(x+1)}{1+\sqrt{2-x^2}} = 3x+14-4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{3(x+1)}{1+\sqrt{2-x^2}} = 3(x+2)+4(2-x^2) \end{cases} \quad (1)$$

Nhận xét với điều kiện xác định thì

$$3(x+2)+4(2-x^2) > 0, \forall x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \Rightarrow x+1 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{3(x+1)}{1+\sqrt{2-x^2}} \leq 3(x+1) < 3(x+2)+4(2-x^2)$$

Suy ra phương trình (1) vô nghiệm. Đổi chiều điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 204. Giải phương trình nghiệm không âm $\frac{\sqrt{x^2-3}+3x(x+2)}{2x^3+9} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 \geq 3; x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2-3} = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3} - 1 = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 8$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-3}+1} = (x-2)(2x^2+x-4) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1} = 2x^2+x-4 \end{cases} \quad (1)$$

Với điều kiện xác định thì $\frac{x+2}{\sqrt{x^2-3}+1} \leq x+2 \leq x+2+2(x^2-3) = 2x^2+x-4 \quad (2)$.

Dấu đẳng thức tại (2) xảy ra khi $\sqrt{x^2-3} = 0 \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$. Do vậy (1) có hai nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \sqrt{3}; x = 2$.

Bài toán 205. Giải bất phương trình $x^3 - 5x^2 - 18x + 89 \geq \sqrt{17-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\sqrt{17} \leq x \leq \sqrt{17}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 5x^2 - 18x + 88 + 1 - \sqrt{17 - x^2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x-4)(x^2 - x - 22) + \frac{x^2 - 16}{1 + \sqrt{17 - x^2}} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x-4) \left(22 + x - x^2 - \frac{x+4}{1 + \sqrt{17 - x^2}} \right) &\geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $22 + x - x^2 = (17 - x^2) + x + 5 > 0, \forall x \in [-\sqrt{17}; \sqrt{17}]$ nên xét hai trường hợp

- Nếu $x + 4 < 0 \Rightarrow x - 4 < 0; 22 + x - x^2 - \frac{x+4}{1 + \sqrt{17 - x^2}} > 0$, (1) vô nghiệm.
- Nếu $x + 4 \geq 0 \Rightarrow 22 + x - x^2 = (17 - x^2) + x + 5 \geq x + 5 > x + 4 \geq \frac{x+4}{1 + \sqrt{17 - x^2}}$.

Suy ra $22 + x - x^2 - \frac{x+4}{1 + \sqrt{17 - x^2}} > 0$. Do đó (1) $\Leftrightarrow x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$.

Kết hợp với điều kiện thu được nghiệm $4 \leq x \leq \sqrt{17}$.

Bài toán 206. Giải phương trình $\sqrt{x(2x-1)} = x(2x-1)^2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x(2x-1) \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x(2x-1)} = x(2x-1)^2 &\Leftrightarrow \sqrt{x(2x-1)} - 1 = 4x^3 - 4x^2 + x - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{x(2x-1)} + 1} = (x-1)(4x^2 + 1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \frac{2x+1}{\sqrt{x(2x-1)} + 1} = 4x^2 + 1 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $4x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên từ (1) ta có $2x+1 > 0$. Kết hợp với điều kiện xác định thì

$$\frac{2x+1}{\sqrt{x(2x-1)} + 1} \leq 2x+1 \leq 2x+1 + 2x(2x-1) = 4x^2 + 1 \quad (2).$$

Dấu đẳng thức xảy ra tại (2) khi $x(2x-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$. Vậy phương trình (1) có hai nghiệm.

Đối chiếu điều kiện ta thu được ba nghiệm kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x(2x-1) \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x(2x-1)} = x(2x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x(2x-1) = x^2(2x-1)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x(2x-1)[x(2x-1)^3 - 1] = 0 \end{cases}$$

Xét các tình huống

$$\triangleright \begin{cases} x \geq 0 \\ x(2x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{1}{2}\right\}.$$

$$\triangleright \begin{cases} x \geq 0 \\ x(8x^3 - 12x^2 + 6x - 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-1)(8x^3 - 4x^2 + 2x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ 8x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = 8x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = 0; x \geq 0$ ta có $f'(x) = 24x^2 - 8x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục và đồng biến khi $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq \min_{x \geq 0} f(x) = f(0) = 1 > 0$, dẫn đến phương trình $f(x) = 0$, hệ (1) vô nghiệm.

Kết luận bài toán đã cho có tập nghiệm $S = \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$.

Nhận xét.

Bài toán số 206 thoát tiên quan sát chúng ta có thể thấy có nhân tử chung, thực hiện nâng lũy thừa trực tiếp như lời giải 2 là một hướng đi có lý và không quá mạo hiểm, tuy nhiên công đoạn cuối cần xử lý bằng công cụ hàm số (mặc dù không nhất thiết), đôi khi là một thao tác xa xỉ với các bạn học sinh nhỏ tuổi bậc THCS. Ngoài ra dựa trên cơ sở ba nghiệm rất là đẹp dễ với tập nghiệm $S = \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$, bài toán còn tồn tại một lời giải sử dụng đại lượng

liên hợp – trực căn thức khá phức tạp với phép liên hợp biểu thức, nội dung sẽ trình bày tại lý thuyết phần thứ 5. Hiển nhiên lời giải 1 là một lựa chọn khôn ngoan, nhưng không khó kiểm!

Khi bình luận về bài toán này, với cái cụm từ lựa chọn khôn ngoan, nhưng không khó kiểm, tác giả lại lan man một chút, nhớ lại truyện ngắn Tiệc xòe vui nhất, truyện ngắn thứ 4 trong tuyển tập 10 truyện ngắn Những ngọn gió Hua Tát nổi tiếng của nhà văn Nguyễn Huy Thiệp. Trong truyện ngắn ấy, khi trưởng bản Hà Văn Ló chọn chồng cho cô con gái Hà Thị E, có rất nhiều chàng trai đến cầu hôn, y như trong truyện Sơn Tinh – Thủy Tinh vậy, nhưng sắc thái nhân văn mang nét riêng khác biệt. Đáng chú ý có một chàng trai thông minh sáng sủa nói Khôn ngoan là đức tính đáng quý và khó kiểm, tôi là người có đức tính ấy! Kết quả chứng minh chàng trai đi vào rừng từ sáng đến chiều, mang về một đôi rái cá còn nguyên vẹn. Với dân tộc Thái, rái cá là con vật khôn ngoan nhất rừng, nó vô cùng tinh nhạy, bẫy được nó gần như là việc sức người không thể làm được. Chàng trai mỉm cười, mắt chàng long lanh sáng, người chàng như có hào quang... Nàng E mỉm cười, một lần nữa trái tim của nàng rung động. Đôi mắt người cầu hôn có ánh lửa, có giống bão. Nhưng, những người khôn ngoan bao giờ cũng đau khổ, thậm chí bất hạnh. Họ biết quá nhiều... Chung cuộc, nàng Hà Thị E nói đức tính khôn ngoan không khó kiểm, vì từ sáng tới chiều chàng đã chứng minh được nó! Hết sức bất ngờ.

Cuối truyện ngắn, đức tính đáng quý nhất là đức tính trung thực của chàng trai mở còi tên Hặc, chứng minh bằng cách lập đàn cầu mưa cho cả bản Hua Tát. Quả thực, khôn ngoan là đức tính không khó kiểm, nhưng trung thực ngay thẳng lại là đức tính khó kiểm gấp trăm ngàn lần. Giữa cuộc sống muôn màu, thiên biến vạn hóa và thay đổi không ngừng, nhịp sống xô bồ và nhiều cạm bẫy đạo đức giữa chốn phồn hoa đô hội thời đại hiện nay, để có thể trung thực mà vẫn tồn tại, để có thể nêu cao danh dự trách nhiệm là điều vô cùng khó khăn, nó liên quan mật thiết với miếng cơm manh áo hàng ngày, với cả đạo lý, nhân cách và muôn vàn hệ lụy khác.

Trong kho tàng ca dao dân ca Việt Nam có câu tục ngữ Giấy rách phải giữ lấy lề, một tờ giấy trắng giữ cho nó nguyên bản là vô cùng khó, nếu viết chữ, chà đạp hoặc vấy mực hoen ố lên nó thì lại vô cùng dễ. Tuy nhiên dù nó đẹp hay xấu, dù nó lành hay rách, nguyên vẹn hay đau thương, nó vẫn là tờ giấy duy nhất, gắn bó với tiềm thức, với quá khứ hào hùng, với kỷ niệm khó phai, vì thế không được để cho nó rách thêm nữa, đau thêm nữa, ít nhất phải nhìn thấy nó tốt đẹp lên từng ngày, ít nhất vẫn còn cái gốc gác, để mà tự hào, để mà hãnh diện. Dù đi đâu, ở đâu, làm gì, dòng máu chảy trong tim, với tình yêu cội nguồn nồng nàn, tình yêu đôi lứa trong sáng vẫn mãi là linh thiêng, cao quý; gia đình thân yêu, quê hương nơi chôn rau cắt rốn, mái trường, bệnh viện và những thứ được thừa hưởng từ chế độ này, những thứ nâng niu tuổi thơ của mỗi công dân chúng ta ngày xưa ấy, là nơi chấp cánh cho những biết bao ước mơ trong chân chính mai sau.

Em đã sống bởi vì em đã thắng,
Cả nước bên em, quanh giường nệm trắng,
Hát cho em như tiếng mẹ ngày xưa,
Sóng Thu Bồn giọng hát đò đưa...

(Người con gái Việt Nam – Nhà thơ Tố Hữu tặng chị Trần Thị Lý 07.12.1958).

Bài toán 207. Giải bất phương trình $13x^2 + 1 + \sqrt{x(5x-4)} < 5x(2x^2 + 1) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{4}{5} \vee x \leq 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x(5x-4)} - 1 < 10x^3 - 13x^2 + 5x - 2 &\Leftrightarrow \frac{5x^2 - 4x - 1}{\sqrt{x(5x-4)} + 1} < (x-1)(10x^2 - 3x + 2) \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-1)(5x+1)}{\sqrt{x(5x-4)} + 1} < (x-1)(10x^2 - 3x + 2) \Leftrightarrow (x-1) \left[10x^2 - 3x + 2 - \frac{5x+1}{\sqrt{x(5x-4)} + 1} \right] > 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $10x^2 - 3x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên kết hợp điều kiện xác định ta xét các trường hợp

- Nếu $5x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{5} \Rightarrow 10x^2 - 3x + 2 - \frac{5x+1}{\sqrt{x(5x-4)} + 1} > 0; x-1 < 0$, (1) vô nghiệm.
- Nếu $5x+1 \geq 0 \Rightarrow 10x^2 - 3x + 2 = 2(5x^2 - 4x) + 5x + 2 > 5x + 1 \geq \frac{5x+1}{\sqrt{x(5x-4)} + 1}$.

Ta có $10x^2 - 3x + 2 - \frac{5x+1}{\sqrt{x(5x-4)} + 1} > 0$. Do vậy (1) $\Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Kết hợp điều kiện các trường hợp thu được nghiệm $x > 1$.

Bài toán 208. Giải bất phương trình $\sqrt{(2x-1)(3x-2)} + 7x^2 + 1 > 6x^3 + 3x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3} \vee x \leq \frac{1}{2}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{(2x-1)(3x-2)} - 1 &> 6x^3 - 7x^2 + 3x - 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{6x^2 - 7x + 1}{\sqrt{(2x-1)(3x-2)} + 1} > (x-1)(6x^2 - x + 2) \\ &\Leftrightarrow (x-1) \left[6x^2 - x + 2 - \frac{6x-1}{\sqrt{(2x-1)(3x-2)} + 1} \right] < 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận định $6x^2 - x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên kết hợp với điều kiện xác định ta có

- ❖ Nếu $6x-1 < 0 \Rightarrow 6x^2 - x + 2 - \frac{6x-1}{\sqrt{(2x-1)(3x-2)} + 1} > 0; x-1 < 0$, (1) nghiệm đúng.
- ❖ Nếu $6x-1 \geq 0 \Rightarrow \frac{6x-1}{\sqrt{(2x-1)(3x-2)} + 1} < 6x-1 < 6x + (2x-1)(3x-2) = 6x^2 - x + 2$.

Suy ra ta có $6x^2 - x + 2 - \frac{6x-1}{\sqrt{(2x-1)(3x-2)} + 1} > 0$, đi đến (1) $\Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ hay $\frac{1}{6} \leq x < 1$.

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; 1\right)$.

Bài toán 209. Giải phương trình $\sqrt{x^3 - 7} = 3x^3 - 4x^2 - 7 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 \geq 7$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^3-7}-1 &= 3x^3-4x^2-8 \Leftrightarrow \frac{x^3-8}{\sqrt{x^3-7}+1} = 3x^3-4x^2-8 \\ \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{\sqrt{x^3-7}+1} &= (x-2)(3x^2+2x+4) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{x^2+2x+4}{\sqrt{x^3-7}+1} = 3x^2+2x+4 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Để ý với điều kiện xác định thì

$$x^2+2x+4 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{x^2+2x+4}{\sqrt{x^3-7}+1} \leq x^2+2x+4 < x^2+2x+4+2x^2 = 3x^2+2x+4.$$

Vậy (1) vô nghiệm. Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài toán 210. Giải phương trình $\frac{x(2x^2-2x+1)}{\sqrt{x^3-4}+8} = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x^3-4 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^3-4}+8 &= 2x^3-2x^2+x \Leftrightarrow \sqrt{x^3-4}-2 = 2x^3-2x^2+x-10 \\ \Leftrightarrow \frac{x^3-8}{\sqrt{x^3-4}+2} &= (x-2)(2x^2+2x+5) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \frac{x^2+2x+4}{\sqrt{x^3-4}+2} = 2x^2+2x+5 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Dễ thấy } x^2+2x+4 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{x^2+2x+4}{\sqrt{x^3-4}+2} \leq x^2+2x+4 < x^2+2x+4+x^2+1 = 2x^2+2x+5, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra (1) vô nghiệm. Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài toán 211. Giải phương trình $\sqrt{x(4x-3)}+2\sqrt{x+3} = x^3-x^2+6x+1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $-3 \leq x \leq 0 \vee x \geq \frac{3}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x(4x-3)}-1+2(\sqrt{x+3}-2) &= x^3-x^2+6x-6 \\ \Leftrightarrow \frac{4x^2-3x-1}{\sqrt{x(4x-3)}+1} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x+3}+2} &= (x-1)(x^2+6) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{4x+1}{\sqrt{x(4x-3)}+1} + \frac{2}{\sqrt{x+3}+2} = x^2+6 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\checkmark \text{ Nếu } 4x+1 < 0 \Rightarrow \frac{4x+1}{\sqrt{x(4x-3)}+1} + \frac{2}{\sqrt{x+3}+2} < 0+1 < x^2+6.$$

$$\checkmark \text{ Nếu } 4x+1 \geq 0 \Rightarrow \frac{4x+1}{\sqrt{x(4x-3)}+1} + \frac{2}{\sqrt{x+3}+2} < \frac{4x+1}{1} + \frac{2}{2} = 4x+2 < 4x+2+(x-2)^2 = x^2+6.$$

Do đó (1) vô nghiệm. Phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 212. Giải phương trình $\sqrt{x(2-x)} + \sqrt{2x-1} = x^3 + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x(2-x)} - 1 + \sqrt{2x-1} - 1 &= x^3 - 1 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 2x - 1}{\sqrt{x(2-x)} + 1} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{2x-1} + 1} = x^3 - 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \frac{1-x}{\sqrt{x(2-x)} + 1} + \frac{2}{\sqrt{2x-1} + 1} = x^2 + x + 1 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\circ \text{ Nếu } 1-x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \Rightarrow \frac{1-x}{\sqrt{x(2-x)} + 1} + \frac{2}{\sqrt{2x-1} + 1} < 0 + 2 < 3 \leq x^2 + x + 1.$$

$$\circ \text{ Nếu } 1-x \geq 0 \Rightarrow \frac{1-x}{\sqrt{x(2-x)} + 1} + \frac{2}{\sqrt{2x-1} + 1} < 1 - x + 2 = 1 - x < 1 - x + x^2 + 2x = x^2 + x + 1, \forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right].$$

Do đó (1) vô nghiệm trong cả hai trường hợp. Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 213. Giải phương trình $\sqrt{x(2x-1)} + \sqrt{x} = x^3 + x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2} \vee x = 0$.

Nhận xét $x = 0$ nghiệm đúng phương trình đã cho. Với $x \geq \frac{1}{2}$ thì

$$\begin{aligned} \sqrt{x(2x-1)} - 1 + \sqrt{x} - 1 &= x^3 + x^2 - 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{x(2x-1)} + 1} + \frac{x-1}{\sqrt{x} + 1} = (x-1)(x^2 + 2x + 2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \frac{2x+1}{\sqrt{x(2x-1)} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = x^2 + 2x + 2 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Chú ý } \frac{2x+1}{\sqrt{x(2x-1)} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \leq 2x + 1 + 1 = 2x + 2 < 2x + 2 + x^2 = x^2 + 2x + 2, \forall x \geq \frac{1}{2}.$$

Do đó (1) vô nghiệm. Phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 1$ hoặc $x = 0$.

Bài toán 214. Giải phương trình $2 + \sqrt{x(3x-2)} = \sqrt{x+3} + 3x^3 - 2x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-3 \leq x \leq 0 \vee x \geq \frac{2}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x(3x-2)} - 1 &= \sqrt{x+3} - 2 + 3x^3 - 2x^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{3x^2 - 2x - 1}{\sqrt{x(3x-2)} + 1} = \frac{x-1}{\sqrt{x+3} + 2} + (x-1)(3x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \frac{3x+1}{\sqrt{x(3x-2)}+1} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} + 3x^2 + x + 1 \end{cases} \quad (1)$$

Nhận xét $3x^2 + x + 1 = 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{12} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên kết hợp điều kiện ta xét hai trường hợp

- $3x+1 < 0 \Rightarrow \frac{3x+1}{\sqrt{x(3x-2)}+1} < 0 < \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} + 3x^2 + x + 1.$
- $\frac{3x+1}{\sqrt{x(3x-2)}+1} \leq 3x+1 \leq 3x+1+x(3x-2) = 3x^2 + x + 1 < \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} + 3x^2 + x + 1.$

Như vậy phương trình (1) luôn vô nghiệm. Bài toán có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 215. Giải phương trình $\sqrt{2x(x-1)} - \sqrt{x+2} = x^3 - 3x^2 + 4x - 4 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $-2 \leq x \leq 0 \vee x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{2x(x-1)} - 2 &= \sqrt{x+2} - 2 + x^3 - 3x^2 + 4x - 4 \\ \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2x - 4}{\sqrt{2x(x-1)} + 2} &= \frac{x-2}{\sqrt{x+2} + 2} + (x-2)(x^2 - x + 2) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{2x+2}{\sqrt{2x(x-1)} + 2} = \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} + x^2 - x + 2 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên xét hai trường hợp xảy ra

- $x+1 < 0 \Rightarrow \frac{2x+2}{\sqrt{2x(x-1)} + 2} < 0 < x^2 - x + 2 < \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} + x^2 - x + 2.$
- $x+1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2x+2}{\sqrt{2x(x-1)} + 2} \leq x+1 \leq x+1+(x-1)^2 = x^2 - x + 2 < \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} + x^2 - x + 2.$

Như vậy phương trình (1) luôn vô nghiệm. Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Nhận xét.

Một số bạn đọc giả nhận thấy hai vế của phương trình đều chứa nhân tử do

$$\begin{aligned} 2x(x-1) - (x+2) &= 2x^2 - 3x - 2 = (x-2)(2x+1) \\ x^3 - 3x^2 + 4x - 4 &= (x-2)(x^2 - x + 2) \end{aligned}$$

Mạo hiểm liên hợp trực tiếp hai căn thức của vế trái ta thu được

$$\frac{2x^2 - 3x - 2}{\sqrt{2x(x-1)} + \sqrt{x+2}} = (x-2)(x^2 - x + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{2x+1}{\sqrt{2x(x-1)} + \sqrt{x+2}} = x^2 - x + 2 \end{cases} \quad (1)$$

Nhận xét $x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và với $2x+1 < 0$ thì (1) vô nghiệm.

Tuy nhiên với trường hợp

$$2x+1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{\sqrt{2x(x-1)} + \sqrt{x+2}} \leq 2x+1 \leq x^2 - x + 2?$$

Rõ ràng không xử lý nổi, kể cả khi đã kết hợp điều kiện xác định. Phương án mạo hiểm này thất bại.

Bài toán 216. Giải phương trình $\sqrt{(x-1)(3x-2)} - \sqrt{x+7} = 3x^3 - 8x^2 + 7x - 7 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-7 \leq x \leq \frac{2}{3} \vee x \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)(3x-2)} - 2 &= \sqrt{x+7} - 3 + 3x^3 - 8x^2 + 7x - 6 \\ \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 5x - 2}{\sqrt{(x-1)(3x-2)} + 2} &= \frac{x-2}{\sqrt{x+7} + 3} + (x-2)(3x^2 - 2x + 3) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{3x+1}{\sqrt{(x-1)(3x-2)} + 2} = \frac{1}{\sqrt{x+7} + 3} + 3x^2 - 2x + 3 \end{cases} &\quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $3x^2 - 2x + 3 = 2x^2 + (x-1)^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên kết hợp điều kiện ta xét hai trường hợp

$$\checkmark \quad 3x+1 < 0 \Rightarrow \frac{3x+1}{\sqrt{(x-1)(3x-2)} + 2} < 0 < 3x^2 - 2x + 3 < \frac{1}{\sqrt{x+7} + 3} + 3x^2 - 2x + 3.$$

$$\checkmark \quad 3x+1 \geq 0 \Rightarrow \frac{3x+1}{\sqrt{(x-1)(3x-2)} + 2} \leq 3x+1 \leq 3x+1 + (3x^2 - 5x + 2) = 3x^2 - 2x + 3 < \frac{1}{\sqrt{x+7} + 3} + 3x^2 - 2x + 3.$$

Vậy phương trình (1) vô nghiệm. Bài toán có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài toán 217. Giải bất phương trình $\sqrt{2x^2 - 3x} + \sqrt{x+6} = \frac{2}{3}(x^3 - 3x^2 + 5x - 6) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-6 \leq x \leq 0 \vee x \geq \frac{3}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3(\sqrt{2x^2 - 3x} + \sqrt{x+6}) &= 2x^3 - 6x^2 + 10x - 12 \\ \Leftrightarrow 3[\sqrt{x(2x-3)} - 3] + 3(\sqrt{x+6} - 3) &= 2x^3 - 6x^2 + 10x - 30 \\ \Leftrightarrow \frac{3(2x^2 - 3x - 9)}{\sqrt{x(2x-3)} + 3} + \frac{3(x-3)}{\sqrt{x+6} + 3} &= (x-3)(2x^2 + 10) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \frac{3(2x+3)}{\sqrt{x(2x-3)} + 3} + \frac{3}{\sqrt{x+6} + 3} = 2x^2 + 10 \end{cases} &\quad (1) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad 2x+3 < 0 \Rightarrow \frac{3(2x+3)}{\sqrt{x(2x-3)} + 3} + \frac{3}{\sqrt{x+6} + 3} < 0 + 1 = 1 < 2x^2 + 10.$$

$$\bullet \quad 2x+3 \geq 0 \Rightarrow \frac{3(2x+3)}{\sqrt{x(2x-3)} + 3} + \frac{3}{\sqrt{x+6} + 3} < 2x+3+1 = 2x+4 \leq 2x+4 + (2x^2 - 3x) + (x+6) = 2x^2 + 10.$$

Như vậy phương trình (1) luôn vô nghiệm. Bài toán có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Bài toán 218. Giải phương trình $\sqrt{3x^2+2x-1}+3\sqrt{2x+7}=\frac{6x^3+x^2+15}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{7}{2} \leq x \leq -1 \vee x \geq \frac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{3x^2+2x-1}-2+3(\sqrt{2x+7}-3) &= \frac{6x^3+x^2-7}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{3x^2+2x-5}{\sqrt{3x^2+2x-1}+2} + \frac{6(x-1)}{\sqrt{2x+7}+3} &= \frac{(x-1)(6x^2+7x+7)}{2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{3x+5}{\sqrt{3x^2+2x-1}+2} + \frac{6}{\sqrt{2x+7}+3} = \frac{6x^2+7x+7}{2} \end{cases} & \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $3x+5 < 0 \Rightarrow \frac{3x+5}{\sqrt{3x^2+2x-1}+2} + \frac{6}{\sqrt{2x+7}+3} < 2 < \frac{6x^2+7x+7}{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$
- $3x+5 \geq 0 \Rightarrow \frac{3x+5}{\sqrt{3x^2+2x-1}+2} + \frac{6}{\sqrt{2x+7}+3} < \frac{3x+5}{2} + 2 = \frac{3x+9}{2} \leq \frac{3x+9}{2} + 3x^2+2x-1 = \frac{6x^2+7x+7}{2}.$

Do đó (1) luôn vô nghiệm. Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 219. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3x}+3\sqrt{x+8}-8=\frac{2x^3+5x^2-x}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $-8 \leq x \leq -3 \vee x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+3x}-2+3(\sqrt{x+8}-3) &= \frac{2x^3+5x^2-x-6}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2+3x-4}{\sqrt{x(x+3)}+2} + \frac{3(x-1)}{\sqrt{x+8}+3} &= \frac{(x-1)(2x^2+7x+6)}{2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{x+4}{\sqrt{x(x+3)}+2} + \frac{3}{\sqrt{x+8}+3} = \frac{2x^2+7x+6}{2} \end{cases} & \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

- $x+4 \geq 0$, kết hợp điều kiện thu được $x \geq 0$. Khi đó

$$\frac{x+4}{\sqrt{x(x+3)}+2} + \frac{3}{\sqrt{x+8}+3} < \frac{x+4}{2} + 1 = \frac{x+6}{2} + x^2+3x = \frac{2x^2+7x+6}{2}.$$

- $x+4 < 0 \Leftrightarrow x < -4 \Rightarrow -8 \leq x < -4$. Khi đó

$$\frac{x+4}{\sqrt{x(x+3)}+2} + \frac{3}{\sqrt{x+8}+3} < 1 < \frac{2x^2+7x+6}{2}, \forall x \in [-8; 4).$$

Vậy phương trình (1) ở trên luôn vô nghiệm. Kết luận phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 220. Giải phương trình $\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+8x}=\frac{x^3+7x^2+22x}{6} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \leq -8 \vee x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+3x}-2+\sqrt{x^2+8x}-3 &= \frac{x^3+7x^2+22x-30}{6} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2+3x-4}{\sqrt{x^2+3x+2}} + \frac{x^2+8x-9}{\sqrt{x^2+8x+3}} &= \frac{x^3+7x^2+22x-30}{6} \\ \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+4)}{\sqrt{x^2+3x+2}} + \frac{(x-1)(x+9)}{\sqrt{x^2+8x+3}} &= \frac{(x-1)(x^2+8x+30)}{6} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{x+4}{\sqrt{x^2+3x+2}} + \frac{x+9}{\sqrt{x^2+8x+3}} = \frac{x^2+8x+30}{6} \end{cases} & \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp theo điều kiện xác định

❖ Nếu $x \geq 0 \Rightarrow x+4 > 0; x+9 > 0$, khi đó (1) vô nghiệm do

$$\frac{x+4}{\sqrt{x^2+3x+2}} + \frac{x+9}{\sqrt{x^2+8x+3}} < \frac{x+4}{2} + \frac{x+9}{3} = \frac{5x+30}{6} \leq \frac{5x+30+x^2+3x}{6} = \frac{x^2+8x+30}{6}.$$

❖ Nếu $x \leq -8 \Rightarrow x+4 < 0; x+8 \leq 0$, khi đó

$$\frac{x+4}{\sqrt{x^2+3x+2}} + \frac{x+9}{\sqrt{x^2+8x+3}} = \frac{x+4}{\sqrt{x^2+3x+2}} + \frac{x+8}{\sqrt{x^2+8x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+3}} < \frac{1}{3}.$$

Hơn nữa $\frac{x^2+8x+30}{6} = \frac{(x+4)^2+14}{6} \geq \frac{7}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra (1) vô nghiệm.

Vậy bài toán ban đầu có nghiệm duy nhất $x=1$.

Nhận xét.

Bài toán 220, nguyên do hai biểu thức dưới dấu căn đều có dạng tam thức bậc hai, do đó sau khi sử dụng đại lượng liên hợp thu được phương trình hệ quả chứa đồng thời hai nhị thức bậc nhất, việc đánh giá theo điều kiện xác định bước đầu gặp một chút khó khăn, để chúng se duyên với nhau bắt buộc cần có ông tơ bà nguyệt, điểm nhấn nằm ở thao tác tách phân thức

$$\frac{x+4}{\sqrt{x^2+3x+2}} + \frac{x+9}{\sqrt{x^2+8x+3}} = \frac{x+4}{\sqrt{x^2+3x+2}} + \frac{x+8}{\sqrt{x^2+8x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+3}} < \frac{1}{3}.$$

Rõ ràng nếu bạn cứ bo bo giữ thành trì Quy Nhơn kiểu Nguyễn Nhạc sẽ mau chóng thất bại, quân chúa Nguyễn Phúc Anh theo gió Nam cứ lâm lũ tấn chiếm, kết cục bạn không có chỗ chôn

$$\frac{x+4}{\sqrt{x^2+3x+2}} + \frac{x+9}{\sqrt{x^2+8x+3}} = \frac{x+4}{\sqrt{x^2+3x+2}} + \frac{x+9}{\sqrt{x^2+8x+3}} \leq x+9 < \frac{x^2+8x+30}{6}, \forall x \geq -8?$$

Nếu không thực hiện phương án se duyên, tất yếu sẽ phải chia vùng miền $\begin{cases} x \geq 0 \\ -9 \leq x \leq -8 \\ x < -9 \end{cases}$

Bài toán 221. Giải phương trình $\sqrt{x^2+8x}+\sqrt{x+15}=\frac{5x^2+77x+2}{12} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-15 \leq x \leq -8 \vee x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+8x}-3+\sqrt{x+15}-4=\frac{5x^2+77x-82}{12} \Leftrightarrow \frac{x^2+8x-9}{\sqrt{x^2+8x+3}}+\frac{x-1}{\sqrt{x+15}+4}=\frac{5x^2+77x-82}{12}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+9)}{\sqrt{x^2+8x+3}} + \frac{x-1}{\sqrt{x+15}+4} = \frac{(x-1)(5x+82)}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{x+9}{\sqrt{x^2+8x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x+15}+4} = \frac{5x+82}{12} \end{cases} \quad (1)$$

Xét hai trường hợp theo điều kiện xác định

- Nếu $x \geq 0 \Rightarrow x+9 > 0$, khi đó

$$\frac{x+9}{\sqrt{x^2+8x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x+15}+4} < \frac{x+9}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4x+39}{12} < \frac{4x+39}{12} + \frac{x+43}{12} = \frac{5x+82}{12}.$$

- Nếu $x \in [-15; -8] \Rightarrow x+8 \leq 0; x+15 \geq 0$ nên

$$\frac{x+9}{\sqrt{x^2+8x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x+15}+4} = \frac{x+8}{\sqrt{x^2+8x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+8x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x+15}+4} < \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \leq \frac{7}{12} + \frac{5x+75}{12} = \frac{5x+82}{12}.$$

Tóm lại (1) vô nghiệm, bài toán có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 222. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+3x}+2\sqrt{2x+7} < \frac{6x^3+15x^2-13x+40}{6} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $-\frac{7}{2} \leq x \leq -3 \vee x \geq 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2+3x}-2+2(\sqrt{2x+7}-3) < \frac{6x^3+15x^2-13x-8}{6} \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2+3x-4}{\sqrt{x^2+3x}+2} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{2x+7}+3} < \frac{6x^3+15x^2-13x-8}{6} \\ \Leftrightarrow & \frac{(x-1)(x+4)}{\sqrt{x^2+3x}+2} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{2x+7}+3} < \frac{(x-1)(6x^2+21x+8)}{6} \\ \Leftrightarrow & (x-1) \left(\frac{x+4}{\sqrt{x^2+3x}+2} + \frac{2}{\sqrt{2x+7}+3} - \frac{6x^2+21x+8}{6} \right) < 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét với điều kiện xác định thì $x+4 > 0$, suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{x+4}{\sqrt{x^2+3x}+2} + \frac{2}{\sqrt{2x+7}+3} < \frac{x+4}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3x+8}{6} \leq \frac{3x+8}{6} + x^2+3x = \frac{6x^2+21x+8}{6} \\ \Rightarrow & \frac{x+4}{\sqrt{x^2+3x}+2} + \frac{2}{\sqrt{2x+7}+3} - \frac{6x^2+21x+8}{6} < 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \end{aligned}$$

Kết luận bất phương trình ban đầu có nghiệm $x > 1$.

Bài toán 223. Giải bất phương trình $4\sqrt{x^2+8x+7}+5\sqrt{x+24} \geq x(x^2+8x+8)+24 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $-24 \leq x \leq -7 \vee x \geq -1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 4(\sqrt{x^2+8x+7}-4)+5(\sqrt{x+24}-5) \geq x^3+8x^2+8x-17 \\ \Leftrightarrow & \frac{4(x^2+8x-9)}{\sqrt{x^2+8x+7}+4} + \frac{5(x-1)}{\sqrt{x+24}+5} \geq (x-1)(x^2+9x+17) \\ \Leftrightarrow & (x-1) \left[\frac{4(x+9)}{\sqrt{x^2+8x+7}+4} + \frac{5}{\sqrt{x+24}+5} - (x^2+9x+17) \right] \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp kết hợp điều kiện xác định

- Nếu $x+9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -9$ thì

$$\frac{4(x+9)}{\sqrt{x^2+8x+7+4}} + \frac{5}{\sqrt{x+24+5}} < x+9+1 = x+10 \leq x+10+(x^2+8x+7) = x^2+9x+17.$$

Lúc này $(1) \Leftrightarrow x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \Rightarrow -9 \leq x \leq 1$.

- Nếu $x+9 < 0 \Leftrightarrow x < -9 \Rightarrow x \in [-24; -9)$ thì $\frac{4(x+9)}{\sqrt{x^2+8x+7+4}} + \frac{5}{\sqrt{x+24+5}} < 0+1=1$ và $x-1 < 0$.

Trong khi đó xét hàm số $f(x) = x^2+9x+17; x \in [-24; -9) \Rightarrow f(x) \geq \min_{x \in [-24; -9)} f(x) = f(-9) = 17 > 1$.

Lúc đó $\frac{4(x+9)}{\sqrt{x^2+8x+7+4}} + \frac{5}{\sqrt{x+24+5}} < x^2+9x+17$, (1) nghiệm đúng.

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $S = [-24; -7] \cup [-1; 1]$.

Nhận xét.

Bài toán 223 là một bài toán kết hợp tổng hòa sử dụng đại lượng liên hợp – trực căn thức một nghiệm, đánh giá thuận tủy kéo theo điều kiện xác định và công cụ đạo hàm – khảo sát hàm số bậc THPT. Để sáng tạo ra lớp bài toán theo ý đồ này, cũng không quá khó, tác giả xin chia sẻ một số quy trình như sau.

Trước tiên cần lựa chọn hai căn thức, theo thứ tự các biểu thức dưới dấu căn có dạng tam thức bậc hai và nhị thức bậc nhất $\sqrt{f(x)}; \sqrt{g(x)}$, biểu thức về phải có dạng đa thức bậc ba, đảm bảo sau khi tách biệt nghiệm quy về tam thức bậc hai $h(x)$, hàm ý đòi hỏi sử dụng đánh giá khó hơn nhị thức bậc nhất, kể cả có kèm theo điều kiện.

Sau khi thực hiện liên hợp ta có hệ quả là phương trình dạng $\frac{ax+b}{\sqrt{f(x)+p}} + \frac{c}{\sqrt{g(x)+q}} = h(x)$. Lưu ý điều kiện xác định của các căn thức, đây sẽ là yếu tố quyết định thành bại đấy. Để vượt qua các đơn vị trọng điểm xông pha, cần bố trí $x_1 > x_0$ với $x_1 \Leftarrow ax+b=0; x_0 \Leftarrow g(x)=0$. Nếu bạn mềm lòng để xuất kẻ hở $x_1 < x_0$ thì địch sẽ công phá ngay, nguy hiểm cơ quan đầu não, cụ thể trong bài toán 221, miền xác định $D: -24 \leq x \leq -7 \vee x \geq -1$ nên

$$\frac{ax+b}{\sqrt{f(x)+p}} \sim \frac{4(x+9)}{\sqrt{x^2+8x+7+4}} \text{ thay vì } \frac{ax+b}{\sqrt{f(x)+p}} \sim \frac{4(x+25)}{\sqrt{x^2+8x+7+4}}.$$

Bước tiếp theo, để có điều kiện đánh bực phá đôi A1 kiểu Trung đoàn 174, đánh quy các các cứ điểm trọng yếu của địch, làm cho chúng không gượng gẩy được, không tìm được lối thoát, lưu ý cần chọn tam thức bậc hai khỏe mạnh, cường tráng, bao hàm được toàn bộ các tình huống xảy ra, cụ thể phải trình sát trận địa từng giai đoạn

$$\diamond x \geq -9 \Rightarrow \frac{4(x+9)}{\sqrt{x^2+8x+7+4}} + \frac{5}{\sqrt{x+24+5}} < x+9+1 = x+10.$$

$$\diamond x < -9 \Rightarrow \frac{4(x+9)}{\sqrt{x^2+8x+7+4}} + \frac{5}{\sqrt{x+24+5}} < 0+1=1.$$

Bây giờ phải chọn tam thức đảm bảo $h(x) > x+10; h(x) > 1$ với điều kiện xác định kéo theo ban đầu nữa.

Có vô vàn lựa chọn cho chúng ta, vì cứ đem cháu $x+10$ cộng thêm một đại lượng không âm đề chết số 1 thì sẽ thành công ngay tức khắc

$$h(x) = x+10+(x^2+2x+1)+1 = x^2+3x+12$$

$$h(x) = x+10+(x^2+x+1)+1 = x^2+2x+12$$

$$h(x) = x+10+(x^2-x+3)+1 = x^2+14$$

...

Tuy nhiên khi đó việc kéo theo điều kiện chưa được sử dụng triệt để, gây lãng phí, thất thoát tài sản nhà nước, cần phải phát hiện, tổ chức phê bình, kiểm điểm, tri trích, cảnh cáo, đấu tố, lên án và tra tấn, biệt giam, cao hơn là tử hình. Cần phải có trách nhiệm cao hơn với những thứ mình đã vạch ra, những thứ mình thừa hưởng. Trong bài toán 223 tác giả đã khéo léo sử dụng điều kiện thông qua quan sát

$$x \geq -9 \Rightarrow x+10 \leq x+10+(x^2+8x+7) = x^2+9x+17$$

$$x < -9 \Rightarrow x^2+9x+17-1 = x^2+9x+16 = x(x+9)+16 > 0$$

Lời giải bài toán 223 sử dụng công cụ đạo hàm – khảo sát hàm số tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số bậc hai, chẳng qua là ngụ ý đạo to búa lớn mà thôi, để quý vị có cái nhìn khách quan, dễ hình dung hơn, dù rằng nó thực sự cơ bản, có thể sử dụng đồ thị parabol lớp 10 THPT hoặc tính cực trị kiểu lớp 12 THPT đều đi đến kết quả. Lời khuyên dành cho các bạn nhỏ tuổi nên dùng đánh giá thuần túy $x(x+9) > 0, \forall x < -9$, tất nhiên vận dụng điều này sẽ dễ dàng tạo lập về phải hệ quả hơn so với việc quy về xây dựng hàm số theo nguyên hàm.

Bài toán 224. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+6x-7} + \sqrt{x+14} < \frac{x^3+8x^2+2x+40}{12} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-14 \leq x \leq -7 \vee x \geq 1$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x-1)(x+7)} - 3 + \sqrt{x+14} - 4 < \frac{x^3+8x^2+2x-44}{12} \\ \Leftrightarrow & \frac{x^2+6x-16}{\sqrt{(x-1)(x+7)}+3} + \frac{x-2}{\sqrt{x+14}+4} < \frac{(x-2)(x^2+10x+22)}{12} \\ \Leftrightarrow & (x-2) \left(\frac{x+8}{\sqrt{x^2+6x-7}+3} + \frac{1}{\sqrt{x+14}+4} - \frac{x^2+10x+22}{12} \right) < 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp kết hợp điều kiện xác định

○ Nếu $x+8 \geq 0$ thì

$$\frac{x+8}{\sqrt{x^2+6x-7}+3} + \frac{1}{\sqrt{x+14}+4} < \frac{x+8}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4x+11}{12} \leq \frac{4x+11+(x^2+6x-7)+18}{12} = \frac{x^2+10x+22}{12}.$$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

○ Nếu $x+8 < 0 \Leftrightarrow x < -8 \Rightarrow x \in [-14; -8)$ thì $\frac{x+8}{\sqrt{x^2+6x-7}+3} + \frac{1}{\sqrt{x+14}+4} < \frac{1}{4}$ và $x-2 < 0$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2+10x+22}{12}; f'(x) = \frac{2x+10}{12} < 0, \forall x \in [-14; -8)$ ta có

$$f(x) \geq \min_{x \in [-14; -8)} f(x) = f(-8) = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}.$$

Ta có $\frac{x+8}{\sqrt{x^2+6x-7}+3} + \frac{1}{\sqrt{x+14}+4} - \frac{x^2+10x+22}{12} < 0$. Do đó (1) vô nghiệm.

Kết luận bài toán có nghiệm $x > 2$.

Bài toán 225. Giải phương trình $\sqrt{6x^2-7x+2} = \sqrt{x} + x^3+5x^2-6x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $0 \leq x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq \frac{2}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& \sqrt{(2x-1)(3x-2)} - 1 = \sqrt{x} - 1 + x^3 + 5x^2 - 6x \\
& \Leftrightarrow \frac{6x^2 - 7x + 1}{\sqrt{(2x-1)(3x-2)} + 1} = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + x(x^2 + 5x - 6) \\
& \Leftrightarrow \frac{(x-1)(6x-1)}{\sqrt{(2x-1)(3x-2)} + 1} = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} + (x^2 + 6x)(x-1) \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{6x-1}{\sqrt{(2x-1)(3x-2)} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} + x^2 + 6x \end{cases} \quad (1)
\end{aligned}$$

Xét $6x-1 < 0 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{6x-1}{\sqrt{(2x-1)(3x-2)} + 1} < 0 < \frac{1}{\sqrt{x}+1} + x^2 + 6x$.

Xét $6x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{6x-1}{\sqrt{(2x-1)(3x-2)} + 1} < 6x-1 < 6x-1 + x^2 + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} + x^2 + 6x$.

Suy ra phương trình (1) vô nghiệm. Vậy bài toán có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 226. Giải phương trình $2\sqrt{x^2+3x} + \frac{5(x+7)}{\sqrt{x+8}+1} = x(x+2)(x+3) + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-8 \leq x \leq -3 \vee x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
& 2\sqrt{x^2+3x} + 5(\sqrt{x+8}-1) = x^3 + 5x^2 + 6x + 2 \\
& \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+3x} + 5\sqrt{x+8} = x^3 + 5x^2 + 6x + 7 \\
& \Leftrightarrow 2(\sqrt{x^2+3x}-2) + 5(\sqrt{x+8}-3) = x^3 + 5x^2 + 6x - 12 \\
& \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{x^2+3x-4}{\sqrt{x^2+3x}+2} + \frac{5(x-1)}{\sqrt{x+8}+3} = (x-1)(x^2+6x+12) \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \frac{2(x+4)}{\sqrt{x^2+3x}+2} + \frac{5}{\sqrt{x+8}+3} = x^2+6x+12 \end{cases} \quad (1)
\end{aligned}$$

Nhận xét $x^2+5x+7 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$\triangleright x \geq -4 \Rightarrow \frac{2(x+4)}{\sqrt{x^2+3x}+2} + \frac{5}{\sqrt{x+8}+3} \leq x+4 + \frac{5}{2+3} = x+5 < x^2+6x+12.$$

$$\triangleright -8 \leq x < -4 \Rightarrow \frac{2(x+4)}{\sqrt{x^2+3x}+2} + \frac{5}{\sqrt{x+8}+3} < \frac{5}{3} < 2 < 6 + (x+4)(x+2) = x^2+6x+12.$$

Do vậy phương trình (1) ở trên vô nghiệm. Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 227. Giải phương trình $x^2 + 3\sqrt{x^2+3} + 5\sqrt{x^2+8} = 3x^3 + 19 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện x thực.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & 3(\sqrt{x^2+3}-2)+5(\sqrt{x^2+8}-3)=3x^3-x^2-2 \\
 \Leftrightarrow & \frac{3(x^2-1)}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{5(x^2-1)}{\sqrt{x^2+8}+3}=3x^3-x^2-2 \\
 \Leftrightarrow & \frac{3(x-1)(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{5(x-1)(x+1)}{\sqrt{x^2+8}+3}=(x-1)(3x^2+2x+2) \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x=1 \\ \frac{3(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{5(x+1)}{\sqrt{x^2+8}+3}=3x^2+2x+2 \end{cases} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Nhận xét $3x^2+2x+2=(x+1)^2+2x+1>0, \forall x \in \mathbb{R}$. Xét các trường hợp xảy ra

- Nếu $x < -1 \Rightarrow x+1 < 0 \Rightarrow \frac{3(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{5(x+1)}{\sqrt{x^2+8}+3} < 0$, dẫn đến (1) vô nghiệm.
- Nếu $x \geq -1 \Rightarrow x+1 \geq 0 \Rightarrow \frac{3(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2}+\frac{5(x+1)}{\sqrt{x^2+8}+3} \leq \frac{3(x+1)}{1+2}+\frac{5(x+1)}{2+3}=2x+2 < 2x+2+3x^2$.

Vậy phương trình (1) luôn luôn vô nghiệm. Bài toán có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 228. Giải phương trình $8\sqrt{x^2+9}+2\sqrt{x^2-3x}=x^3-2x^2-3x+24 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 3 \vee x \leq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & 8(\sqrt{x^2+9}-5)+2(\sqrt{x^2-3x}-2)=x^3-2x^2-3x-20 \\
 \Leftrightarrow & 8 \cdot \frac{x^2-16}{\sqrt{x^2+9}+5}+2 \cdot \frac{x^2-3x-4}{\sqrt{x^2-3x}+2}=x^3-2x^2-3x-20 \\
 \Leftrightarrow & 8 \cdot \frac{(x-4)(x+4)}{\sqrt{x^2+9}+5}+2 \cdot \frac{(x-4)(x+1)}{\sqrt{x^2-3x}+2}=(x-4)(x^2+2x+5) \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} x=4 \\ \frac{8(x+4)}{\sqrt{x^2+9}+5}+\frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2-3x}+2}=x^2+2x+5 \end{cases} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Nhận xét $x^2+2x+5=(x+1)^2+4>0, \forall x \in \mathbb{R}; x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Các trường hợp xảy ra

- $x < -4 \Rightarrow x+4 < 0; x+1 < 0 \Rightarrow \frac{8(x+4)}{\sqrt{x^2+9}+5}+\frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2-3x}+2} < 0$.
- $-4 \leq x < -1 \Rightarrow x+4 \geq 0; x+1 < 0 \Rightarrow \frac{8(x+4)}{\sqrt{x^2+9}+5}+\frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2-3x}+2} < \frac{8(x+4)}{3+5}$
 $=x+4 < x+4+(x^2+x+1)=x^2+2x+5$.
- $x \geq -1 \Rightarrow x+4 > 0; x+1 \geq 0 \Rightarrow \frac{8(x+4)}{\sqrt{x^2+9}+5}+\frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2-3x}+2} < \frac{8(x+4)}{3+5}+\frac{2(x+1)}{2}$
 $=x+4+x+1=2x+5 < x^2+2x+5$.

Như vậy phương trình (1) ở trên luôn luôn vô nghiệm. Kết luận bài toán có nghiệm duy nhất $x=4$.

Nhận xét.

Bài toán 228 có một sự đột phá nho nhỏ, khi nâng cấp hai căn thức đều trở thành tam thức bậc hai, trong đó vẫn dùng chân khi một căn thức luôn luôn dương với giá trị thực x , không cần tìm điều kiện xác định.

Hệ quả sau khi thực hiện liên hợp như sau $\frac{ax+b}{\sqrt{f(x)+p}} + \frac{cx+d}{\sqrt{g(x)+q}} = h(x)$.

Việc kết hợp điều kiện xác định và các nghiệm $x = -\frac{b}{a}; x = -\frac{d}{c}$ vẫn không đạt được mong muốn, khi chúng quá phức tạp, không thể co cụm vào một miền Chi Lăng – Xương Giang nhỏ hơn, chúng cứ chạy lung tung, quấy phá nhân dân, buộc chúng ta phải dàn trải quân, tung hết hỏa lực xét toàn bộ trường hợp, và dĩ nhiên, bảm sát chúng sẽ tạo điều kiện thuận lợi hơn cả.

Các bạn nên xét theo các nghiệm $x = -\frac{b}{a}; x = -\frac{d}{c}$ hơn so với các nghiệm $x = 0; x = 3$.

○ Đánh tan đơn vị yếu nhất nhé: $x < -4 \Rightarrow x+4 < 0; x+1 < 0 \Rightarrow \frac{8(x+4)}{\sqrt{x^2+9+5}} + \frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2-3x+2}} < 0$.

○ Đánh giá chặt đơn vị thứ hai:

$$-4 \leq x < -1 \Rightarrow x+4 \geq 0; x+1 < 0 \Rightarrow \frac{8(x+4)}{\sqrt{x^2+9+5}} + \frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2-3x+2}} < \frac{8(x+4)}{3+5} = x+4$$

○ Đánh giá chặt đơn vị thứ ba:

$$x \geq -1 \Rightarrow x+4 > 0; x+1 \geq 0 \Rightarrow \frac{8(x+4)}{\sqrt{x^2+9+5}} + \frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2-3x+2}} < \frac{8(x+4)}{3+5} + \frac{2(x+1)}{2} = x+4 + x+1 = 2x+5.$$

Để chặn đứng đà tiến quân của hai đơn vị mạnh hơn này, cần chọn tam thức sao cho nó bao hàm đề chết đơn vị trưởng của chúng, tức là $h(x) > 2x+5; h(x) > x+4$. Có khá nhiều chiêu trò ác độc đây, bài toán 226 vẫn còn nhẹ nhàng lắm, vẫn còn tha không giết tù binh, khi lựa chọn

$$h(x) = x^2 + 2x + 5 = (2x+5) + x^2 = x+4 + (x^2 + x + 1).$$

Các bạn có thể cứng rắn hơn khi kết hợp điều kiện xác định toàn phương trình, chẳng hạn

$$\begin{cases} h(x) = 2x+5 + [x^2 + (x^2-3x)] = 2x^2 - x + 5 \\ h(x) = 2x^2 - x + 5 = x+4 + (2x^2 - 2x + 1) > x+4 \\ h(x) = 2x+6 + [2x^2 + (x^2-3x)] = 3x^2 - x + 6 \\ h(x) = 3x^2 - x + 6 = x+4 + (3x^2 - 2x + 2) > x+4 \end{cases}$$

Và có thể còn ác độc hơn khi kết hợp với điều kiện của hai đơn vị mạnh hơn đó thôi, tức là $x \geq -4; x^2 - 3x \geq 0$

Xông pha mạnh dạn nhé $\begin{cases} h(x) = 2x+5 + (x^2-3x) + (x+4) = x^2 + 9 \\ h(x) = x^2 + 9 = x+4 + x^2 - x + 5 > x+4 \end{cases}$

Thực ra làm thế là “Chim sẻ bắt ve, không ngờ bọ ngựa đứng đằng sau” hay thậm chí “Dã tràng xe cát Biển Đông” vì hóa ra $h(x) = 2x+5 + (x^2-2x+4)$ mất rồi, đâu cần điều kiện $x \geq -4; x^2 - 3x \geq 0$ đúng không các bạn.

Cách điệu nó một chút $\begin{cases} h(x) = 2x+5 + [3(x^2-3x) + x+4] = 3x^2 - 6x + 9 \\ h(x) = 3x^2 - 6x + 9 = x+4 + 3x^2 - 7x + 5 \end{cases}$

Vụ này thành công bởi vì không có kẻ hở $3x^2 - 8x + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và lại có $3x^2 - 7x + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Tương tự như thế các bạn có thể xây dựng muôn vàn bài toán khác với cấp độ mạnh hơn, ý đồ thâm thúy hơn và bắt buộc nhau nhọc lòng nhiều hơn, đừng có kiệt sức cơ bắp quá là được. Good luck.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\sqrt{x+3} = x^2 + 4x - 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$
2. $\sqrt{x+4} = (x+1)^2 + 3x + 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
3. $\sqrt{x+2} = x^2 + 4x - 10 \quad (x \in \mathbb{R}).$
4. $2\sqrt{x+1} = x^2 + x - 8 \quad (x \in \mathbb{R}).$
5. $\sqrt{x+5} = x^2 + 2x - 21 \quad (x \in \mathbb{R}).$
6. $5\sqrt{x-1} = x^3 - 2x^2 + 7x - 9 \quad (x \in \mathbb{R}).$
7. $2\sqrt{3x+1} = x^3 - 3x^2 + 6x \quad (x \in \mathbb{R}).$
8. $6 + \sqrt{x+2} = x^3 \quad (x \in \mathbb{R}).$
9. $\sqrt{x+5} = 2x^2 + 5x - 49 \quad (x \in \mathbb{R}).$
10. $3\sqrt{17x+3} = 289x^2 - 17x - 21 \quad (x \in \mathbb{R}).$
11. $2\sqrt{x-1} > x^3 - 6x^2 + 8x - 15 \quad (x \in \mathbb{R}).$
12. $2x^3 - 12x^2 - x + 24 = 9\sqrt{x-2} \quad (x \in \mathbb{R}).$
13. $3\sqrt{x-2} > x^3 - 9x^2 + 32x - 39 \quad (x \in \mathbb{R}).$
14. $\sqrt{x-3} \leq 2x^3 - 15x^2 + 34x - 23 \quad (x \in \mathbb{R}).$
15. $5\sqrt{x+7} > x^3 + 13x^2 + 29x - 103 \quad (x \in \mathbb{R}).$
16. $\sqrt{x+3} \leq x^3 + 2x^2 + 2x - 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
17. $2\sqrt{x-1} = 2x^4 - 10x^3 + x^2 - 5x + 4 \quad (x \in \mathbb{R}).$
18. $\sqrt{2x+1} = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 12x - 13 \quad (x \in \mathbb{R}).$
19. $\sqrt{x-1} = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 7x - 13 \quad (x \in \mathbb{R}).$
20. $2\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{3x+4} = \sqrt{4x+9} + 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$
21. $2\sqrt{x} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} + 5 = 3\sqrt{x+15} \quad (x \in \mathbb{R}).$
22. $2\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} = \sqrt{x+100} + 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
23. $2\sqrt{x+1} + \sqrt{3x+4} + \sqrt{5x+9} = \sqrt{9x+16} + 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$
24. $\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = x^2 + 2x \quad (x \in \mathbb{R}).$
25. $\sqrt{3x-2} - \sqrt{x+1} = 2x^2 + x - 6 \quad (x \in \mathbb{R}).$
26. $\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x} = 2x^2 - 3x - 9 \quad (x \in \mathbb{R}).$
27. $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = x^2 - 6x + 9 \quad (x \in \mathbb{R}).$
28. $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x+8} - \sqrt{x+3} \quad (x \in \mathbb{R}).$
29. $3\sqrt{x+1} + 3\sqrt{x-1} = 4x + 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
30. $\sqrt{x^2+16} - \sqrt{x^2+7} = 3x - 8 \quad (x \in \mathbb{R}).$
31. $\sqrt{x^3+10} - \sqrt{x^3+5} = 2x + 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$
32. $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{2x^2+4x+3} = 1 + 2x \quad (x \in \mathbb{R}).$

33. $\sqrt{x} + \sqrt{2x+7} = -3x^2 + 2x + 5 \quad (x \in \mathbb{R}).$
34. $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} + \sqrt{2x-7} = 2x^2 - 9x + 7 \quad (x \in \mathbb{R}).$
35. $\sqrt{x-3} + \sqrt{5-x} = 2x^2 - 5x - 10 \quad (x \in \mathbb{R}).$
36. $\sqrt{x-2} = 2\sqrt{x+1} + x^2 - 2x - 6 \quad (x \in \mathbb{R}).$
37. $\sqrt{x+4} + x^2 - 13x + 36 + \sqrt{6-x} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
38. $\sqrt{x+6} + \sqrt{12-x} = x^3 - 3x^2 + 2x \quad (x \in \mathbb{R}).$
39. $\sqrt{6-x} + \sqrt{2x+6} + \sqrt{6x-5} < x^2 - x - 10 \quad (x \in \mathbb{R}).$
40. $\sqrt{6-x} + \sqrt{2x+6} + \sqrt{6x-5} < x^2 + x - 20 \quad (x \in \mathbb{R}).$
41. $2\sqrt{2x+1} + \sqrt{3x+4} + \sqrt{5-x} \leq 2x^2 - x - 17 \quad (x \in \mathbb{R}).$
42. $\sqrt{x+6} - \sqrt{7-x} = \sqrt{x-2} + x^3 - 3x^2 - 2x + 6 \quad (x \in \mathbb{R}).$
43. $\sqrt{x+2} - \sqrt{8-x} = 3x^3 - 21x^2 + 4x - 26 \quad (x \in \mathbb{R}).$
44. $\sqrt{6x+4} + 2\sqrt{4x+1} \geq 5\sqrt{x+2} + x^3 + 3x - 14 \quad (x \in \mathbb{R}).$
45. $\sqrt{x-2} + 2\sqrt{x+3} = 3\sqrt{3x-2} + x^3 - 3x^2 - 3x - 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
46. $3x^2 - 8x - \sqrt{4-x} < \sqrt{x-2} + \sqrt{2x-5} \quad (x \in \mathbb{R}).$
47. $2\sqrt{3(2x-1)} = \sqrt{3x-1} + \sqrt{9x-2} + 9x^3 - 12x^2 + 22x - 13 \quad (x \in \mathbb{R}).$
48. $8\sqrt{x-3} + \sqrt{x+2} = 2\sqrt{2x-5} + x^3 - 9x^2 + 17x - 8 \quad (x \in \mathbb{R}).$
49. $\sqrt{x+3} > 7\sqrt{x-2} + 2\sqrt{2x-3} + x^3 - 7x^2 + 7x - 20 \quad (x \in \mathbb{R}).$
50. $2\sqrt{x+1} + 5\sqrt{x+6} = x^4 - 6x^2 - 5x + 7 \quad (x \in \mathbb{R}).$
51. $\sqrt{x+5} + 2\sqrt{2x+1} \geq \sqrt{x-3} + x^3 - 3x^2 + 10 \quad (x \in \mathbb{R}).$
52. $7\sqrt{x+5} + \sqrt{x} + \sqrt{5-x} = 2x^4 - 11x^3 + 12x^2 + 4x + 8 \quad (x \in \mathbb{R}).$
53. $3\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = x^5 - 2x^4 + x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
54. $\sqrt{2x+1} + 4x^2 \leq 6x + \sqrt{6x-5} \quad (x \in \mathbb{R}).$
55. $4\sqrt{x+2} + 2\sqrt{2x+5} + x \leq x^2(x+2) \quad (x \in \mathbb{R}).$
56. $\frac{1}{\sqrt{x+2}} - \frac{1}{\sqrt{-x-1}} - \frac{2x}{3} \geq 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
57. $\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{2(2x-1)} = 2x^5 - 3x^4 - 2x^2 + 8x - 6 \quad (x \in \mathbb{R}).$
58. $\sqrt{3x-3} + \sqrt{5x-3x} - \sqrt{7-6x} = 3x^5 - 4x^4 - 12x^2 + 32x - 31 \quad (x \in \mathbb{R}).$
59. $\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+6} + \sqrt{7-x} = x^5 - 3x^4 - 8x^2 + 35x - 25 \quad (x \in \mathbb{R}).$
60. $\sqrt{x-3} + 3\sqrt{x} + \sqrt{5-x} > x^5 - 4x^4 - 7x^2 - 29x + 236 \quad (x \in \mathbb{R}).$
61. $2\sqrt{x^2+3} + \sqrt{3x+1} + x - 7 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
62. $5\sqrt{3x^2+1} + 2\sqrt{3x+1} + 2x = 16 \quad (x \in \mathbb{R}).$
63. $3\sqrt{x^2+3} + \sqrt{2x-1} + 5x = 12 \quad (x \in \mathbb{R}).$
64. $3\sqrt{x^2+3} + 2\sqrt{x} = x^2 + 3x + 4 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập số thực

1. $-\sqrt{10-x^2} = 2\sqrt{2x-1} + x^2 + 3x - 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$
2. $\sqrt{x(2x-1)} = \sqrt{x} + 5x^2 - 5x \quad (x \in \mathbb{R}).$
3. $\sqrt{x(3x-4)} = \sqrt{4x+1} + 3x^2 - 2x - 9 \quad (x \in \mathbb{R}).$
4. $\sqrt{x(2x-3)} + \sqrt{x+1} = x^2 + x - 7 \quad (x \in \mathbb{R}).$
5. $\sqrt{(x-1)(x+2)} + \sqrt{4x+1} = 2x^2 + x - 5 \quad (x \in \mathbb{R}).$
6. $16 - \sqrt{10-x^2} = x^3 - 4x \quad (x \in \mathbb{R}).$
7. $x^3 - \sqrt{7-3x^2} + 3x^2 - x - 1 > 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$
8. $6 - \sqrt{17-x^2} = x^3 + x \quad (x \in \mathbb{R}).$
9. $\sqrt{x(3x-2)} \leq 9x^3 - 12x^2 + 6x - 2 \quad (x \in \mathbb{R}).$
10. $\sqrt{x(6x-5)} = x^3 + 3x^2 - x - 2 \quad (x \in \mathbb{R}^+).$
11. $\sqrt{x(5x-8)} > x^3 - x^2 + 2x - 6 \quad (x \in \mathbb{R}).$
12. $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x+1} = x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \quad (x \in \mathbb{R}^+).$
13. $\sqrt{(2x-1)(3x-2)} = 4x^3 - 2x^2 - 1 \quad (x \in \mathbb{R}^+).$
14. $x^3 - 4x^2 - 12x + 46 = \sqrt{10-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$
15. $3x^3 + 2x^2 - 10x - 8 = \sqrt{2-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$
16. $4x^3 - 7x^2 - 12x + 18 = 3\sqrt{2-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$
17. $2\sqrt{x^2+3x} + 5\sqrt{x+8} = x^3 + 5x^2 + 7x + 6 \quad (x \in \mathbb{R}).$
18. $3\sqrt{x^2+3} + 5\sqrt{x^2+8} = 3x^3 - x^2 + x - 3 + 6 + 15 \quad (x \in \mathbb{R}).$
19. $\frac{8\sqrt{x^2+9} + 2\sqrt{x^2-3x}}{x^3 - 2x^2 - 2x + 20} = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
20. $\sqrt{(2x-1)(3x-2)} = \sqrt{x} + x^3 + 5x^2 - 5x - 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
21. $4\sqrt{x^2+8x+7} + 5\sqrt{x+24} \geq x^3 + 8x^2 + 9x + 23 \quad (x \in \mathbb{R}).$
22. $\sqrt{x^2+3x} + 3\sqrt{x+8} - 11 = \frac{2x^3 + 5x^2 - 7}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$
23. $\sqrt{3x^2+2x-1} + 3\sqrt{2x+7} - 7 = \frac{6x^3 + x^2 + x}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$
24. $\frac{\sqrt{(x-1)(3x-2)} - \sqrt{x+7}}{3x^3 - 8x^2 + 8x - 9} = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
25. $\frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 8}{\sqrt{2x(x-1)} - \sqrt{x+2}} = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$
26. $\frac{\sqrt{x(3x-2)} - \sqrt{x+3}}{3x^3 - 2x^2 + 2x - 4} = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

III. MỘT SỐ TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 8.*
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
2. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 9.*
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
3. *Nâng cao và phát triển toán 8, tập 1 – tập 2.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
4. *Nâng cao và phát triển toán 9, tập 1 – tập 2.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
5. *Toán nâng cao Đại số 10.*
Nguyễn Huy Đoan; NXB Giáo dục Việt Nam; 1999.
6. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Đại số 10.*
Nguyễn Huy Đoan; Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2006.
7. *Tài liệu chuyên toán: Đại số 10 – Bài tập Đại số 10.*
Đoàn Quỳnh – Doãn Minh Cường – Trần Nam Dũng
– Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2010.
8. *Một số chuyên đề Đại số bồi dưỡng học sinh giỏi THPT.*
Nguyễn Văn Mậu – Nguyễn Văn Tiến và
một số tác giả; NXB Giáo dục Việt Nam; 2009.
9. *Tuyển tập các bài toán hay và khó Đại số 9.*
Nguyễn Đức Tấn – Đặng Đức Trọng – Nguyễn Cao Huynh
– Vũ Minh Nghĩa – Bùi Ruy Tân – Lương Anh Văn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
10. *Một số phương pháp chọn lọc giải các bài toán sơ cấp, tập 1 – tập 3.*
Phan Đức Chính – Phạm Văn Điều – Đỗ Văn Hà – Phạm Văn Hạp
– Phạm Văn Hùng – Phạm Đăng Long – Nguyễn Văn Mậu
– Đỗ Thanh Sơn – Lê Đình Thịnh; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 1997.
11. *Bài giảng chuyên sâu Toán THPT: Giải toán Đại số 10.*
Lê Hồng Đức – Nhóm Cụ Môn; NXB Hà Nội; 2011.
12. *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình.*
Nguyễn Văn Mậu; NXB Giáo dục Việt Nam; 1994.
13. *Toán bồi dưỡng học sinh phổ thông trung học – quyển 1; Đại số.*
Hàn Liên Hải – Phan Huy Khải – Đào Ngọc Nam – Nguyễn Đạo Phương
– Lê Tất Tôn – Đặng Quan Viễn; NXB Hà Nội; 1991.
14. *Phương trình và hệ phương trình không mẫu mực.*
Nguyễn Đức Tấn – Phan Ngọc Thảo; NXB Giáo dục Việt Nam; 1996.
15. *Chuyên đề bồi dưỡng Toán cấp ba; Đại số.*
Nguyễn Sinh Nguyên; NXB Đà Nẵng; 1997.
16. *Giải toán Đại số sơ cấp (Dùng cho học sinh 12 chuyên, luyện thi đại học).*
Trần Thành Minh – Vũ Thiện Căn – Võ Anh Dũng; NXB Giáo dục Việt Nam; 1995.
17. *Những dạng toán điển hình trong các kỳ thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng; Tập 1;2;3;4.*
Bùi Quang Trường; NXB Hà Nội; 2002.
18. *Ôn luyện thi môn Toán THPT theo chủ đề; Tập một: Đại số và lượng giác.*
Cung Thế Anh; NXB Giáo dục Việt Nam; 2011.
19. *Phương pháp giải toán trọng tâm.*
Phan Huy Khải; NXB Đại học Sư phạm; 2011.
20. *Các bài giảng luyện thi môn Toán; Tập 2.*
Đức Chính – Vũ Dương Thụy – Đào Tam – Lê Thống Nhất; NXB Giáo dục Việt Nam; 1993.
21. *500 Bài toán chọn lọc Đại số - Hình học 10.*
Lê Hoàng Phò; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 2012.
22. *Tam thức bậc hai và ứng dụng.*

- Lê Sĩ Đồng – Lê Minh Tâm; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.
23. *Chuyên đề Bất đẳng thức và ứng dụng trong đại số.*
Nguyễn Đức Tấn; NXB Giáo dục Việt nam; 2003.
24. *23 Chuyên đề giải 1001 bài toán sơ cấp ; Quyển 1.*
Nguyễn Văn Vĩnh – Nguyễn Đức Đồng
và một số đồng nghiệp (NKTH); NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
25. *Phương pháp giải toán bất đẳng thức và cực trị.*
Nguyễn Văn Dũng – Võ Quốc Bá Cẩn – Trần Quốc Anh; NXB ĐHQG Hà Nội; 2011.
26. *Các bài giảng về bất đẳng thức Cauchy.*
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2008.
27. *Cẩm nang luyện thi Đại học Ứng dụng hàm số Giải toán Đại số và Giải tích.*
Huỳnh Nguyễn Luân Lưu – Nguyễn Thị Duy An; NXB ĐHQG Hà Nội ;2014.
28. *Tư duy logic tìm tòi lời giải Hệ phương trình.*
Mai Xuân Vinh – Phạm Kim Chung – Phạm Chí Tuấn
– Đào Văn Chung – Dương Văn Sơn ; NXB ĐHQG Hà Nội; 2015.
29. *Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Trung học cơ sở, Đại số.*
Nguyễn Thị Thanh Thủy – Phạm Minh Phương
– Trần Văn Tấn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2014.
30. *9 Chuyên đề Đại số Trung học cơ sở.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2014.
31. *Hệ phương trình và phương trình chứa căn thức.*
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2006.
32. *Tam thức bậc hai và ứng dụng.*
Lê Sĩ Đồng – Lê Minh Tâm; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.
33. *Chuyên đề Bất đẳng thức và ứng dụng trong Đại số.*
Nguyễn Đức Tấn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.
34. *Ôn thi vào lớp 10 THPT Chuyên; Môn Toán.*
Doãn Minh Cường – Trịnh Hoài Dương
– Trần Văn Khải – Đỗ Thanh Sơn ; NXB Giáo dục Việt Nam ; 2013.
35. *Tài liệu chuyên toán THCS; Toán 9; Tập 1: Đại số.*
Vũ Hữu Bình – Phạm Thị Bạch Ngọc – Đàm Văn Nhĩ ; NXB Giáo dục Việt Nam ; 2012.
36. *Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT Chuyên trực thuộc đại học và THPT Chuyên các tỉnh thành.*
37. *Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT hệ đại trà các địa phương trên toàn quốc.*
38. *Đề thi học sinh giỏi môn toán khối 8 đến khối 12 các cấp.*
39. *Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán (chính thức – dự bị) qua các thời kỳ.*
40. *Đề thi Olympic 30 tháng 4 Toán học khối 10, khối 11 các tỉnh miền Trung và Nam bộ (1995 – 2013).*
41. *Các tạp chí toán học:* Tạp chí Toán học và tuổi trẻ; Tạp chí Toán tuổi thơ 2 THCS; Tạp chí Kvant...
42. *Các diễn đàn toán học:* Boxmath.vn; Math.net.vn; Mathscope.org; Onluyentoan.vn; Diendantoanhoc.net;
Math.net.vn; K2pi.net; Mathlink.ro;...
43. *Một số trang mạng học tập thông qua facebook; twitter;...*



**THÂN THỂ TẠI NGỰC TRUNG
TINH THẦN TẠI NGỰC NGOẠI
DỤC THÀNH ĐẠI SỰ NGHIỆP
TINH THẦN CẢNH YẾU ĐẠI**

TÀI LIỆU CHÍNH THỨC

