

TÀI LIỆU THAM KHẢO TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

$$\Sigma \sqrt{xyz}$$

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

LÝ THUYẾT SỬ DỤNG ẨN PHỤ CĂN THỨC (PHẦN 1)

TRUNG ĐOÀN TRIỆU TRINH NƯƠNG – QUÂN ĐOÀN BỘ BINH

CHỦ ĐẠO: SỬ DỤNG MỘT ẨN PHỤ ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH HỮU TỶ.

- ĐẶT MỘT ẨN PHỤ CƠ BẢN – PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI.
- ĐẶT MỘT ẨN PHỤ CƠ BẢN – PHƯƠNG TRÌNH PHÂN THỨC HỮU TỶ.
- BÀI TOÁN NHIỀU CÁCH GIẢI.

“Non song Việt Nam có trở nên tươi đẹp hay không, dân tộc Việt Nam có bước tới đài vinh quang để sánh vai với các cường quốc năm châu được hay không, chính là nhờ một phần lớn ở công học tập của các em”

(Trích thư Chủ tịch Hồ Chí Minh).



*“...Trời đã sinh ra em,
Để mà xinh mà đẹp,
Trời đã sinh ra anh,
Để yêu em tha thiết,
Khi người ta yêu nhau,
Hôn nhau trong say đắm,
Còn anh, anh yêu em
Anh phải ra mặt trận...”*

(Hôn – Phùng Quán; 1956).

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH**LÝ THUYẾT SỬ DỤNG ẨN PHỤ CĂN THỨC (PHẦN 1)****TRUNG ĐOÀN TRIỆU TRINH NƯƠNG – QUÂN ĐOÀN BỘ BINH**

Trong chương trình Toán học phổ thông nước ta, cụ thể là chương trình Đại số, phương trình và bất phương trình là một nội dung quan trọng, phổ biến trên nhiều dạng toán xuyên suốt các cấp học, cũng là bộ phận thường thấy trong các kỳ thi kiểm tra chất lượng học kỳ, thi tuyển sinh lớp 10 THPT, thi học sinh giỏi môn Toán các cấp và kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng với hình thức hết sức phong phú, đa dạng. Mặc dù đây là một đề tài quen thuộc, chính thống nhưng không vì thế mà giảm đi phần thú vị, nhiều bài toán cơ bản tăng dần đến mức khó thậm chí rất khó, với các biến đổi đẹp kết hợp nhiều kiến thức, kỹ năng vẫn làm khó nhiều bạn học sinh THCS, THPT. Ngoài phương trình đại số bậc cao, phương trình phân thức hữu tỷ thì phương trình chứa căn (còn gọi là phương trình vô tỷ) đang được đông đảo các bạn học sinh, các thầy cô giáo và các chuyên gia Toán phổ thông quan tâm sâu sắc. Chương trình Toán Đại số lớp 9 THCS bước đầu giới thiệu các phép toán với căn thức, kể từ đó căn thức xuất hiện hầu hết trong các vấn đề đại số, hình học, lượng giác và xuyên suốt chương trình Toán THPT. Sự đa dạng về hình thức của lớp bài toán căn thức đặt ra yêu cầu cấp thiết là làm thế nào để đơn giản hóa, thực tế các phương pháp giải, kỹ năng, mẹo mực đã hình thành, đi vào hệ thống. Về cơ bản để làm việc với lớp phương trình, bất phương trình vô tỷ chúng ta ưu tiên khử hoặc giảm các căn thức phức tạp của bài toán.

Phép sử dụng ẩn phụ là một trong những phương pháp cơ bản nhằm mục đích đó, ngoài ra bài toán còn trở nên gọn gàng, sáng sủa và giúp chúng ta định hình hướng đi một cách ổn định nhất. Đôi khi đây cũng là phương pháp tối ưu cho nhiều bài toán công kênh. Mở đầu phương pháp sử dụng ẩn phụ với căn thức, xin trân trọng giới thiệu tới quý độc giả lý thuyết sử dụng ẩn phụ phần 1, chủ đạo xoay quanh một lớp các bài toán chứa căn thức giải được bằng phép đặt ẩn phụ quy về phương trình bậc hai và phương trình phân thức hữu tỷ. Đây được coi là dạng toán cơ bản đặt nền tảng cho các bạn học sinh trong việc tư duy, thao tác các bài toán có sử dụng yếu tố ẩn phụ với mức độ phức tạp, đa chiều hơn trong các tài liệu tiếp theo.

Tài liệu nhỏ phù hợp với các bạn học sinh lớp 9 THCS ôn thi vào lớp 10 THPT đại trà, lớp 10 hệ THPT Chuyên, các bạn chuẩn bị bước vào các kỳ thi học sinh giỏi Toán các cấp và dự thi kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán trên toàn quốc, cao hơn là tài liệu tham khảo dành cho các thầy cô giáo và các bạn trẻ yêu Toán khác.

I. KIẾN THỨC – KỸ NĂNG CHUẨN BỊ

1. Nắm vững các phép biến đổi đại số cơ bản (nhân, chia đa thức, phân tích đa thức thành nhân tử, biến đổi phân thức đại số và căn thức).
2. Kỹ năng biến đổi tương đương, nâng lũy thừa, phân tích hằng đẳng thức, thêm bớt.
3. Nắm vững lý thuyết bất phương trình, dấu nhị thức bậc nhất, dấu tam thức bậc hai.
4. Nắm vững kiến thức về đa thức đồng bậc, các thao tác cơ bản với phương trình một ẩn phụ.
5. Bước đầu thực hành giải và biện luận các bài toán phương trình bậc hai, bậc cao với tham số.
6. Sử dụng thành thạo các ký hiệu logic trong phạm vi toán phổ thông.

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH VÀ KINH NGHIỆM THAO TÁC

Bài toán 1. Giải phương trình $x - 4\sqrt{x} + 3 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} x + 3 &= 4\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 16x \Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 9x - x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-9)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 9\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có hai nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x} = t \quad (t \geq 0)$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} t^2 - 4t + 3 &= 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t - t + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (t-1)(t-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=1 \\ \sqrt{x}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=9 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x=1; x=9$.

Bài toán 2. Giải phương trình $2x - 5\sqrt{x} + 2 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x - 4\sqrt{x} - \sqrt{x} + 2 &= 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - (\sqrt{x}-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \in \left\{\frac{1}{2}; 2\right\} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{4}; 4\right\} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện đi đến hai nghiệm như trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x} = t \quad (t \geq 0)$, phương trình đã cho trở thành

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow (2t-1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{\frac{1}{2}; 2\right\} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{4}; 4\right\}.$$

Kết luận tập nghiệm của bài toán $S = \left\{\frac{1}{4}; 4\right\}$.

Bài toán 3. Giải phương trình $x + \sqrt{x} - 2 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x} = t \quad (t \geq 0)$, phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-2 \end{cases} \Rightarrow t=1 \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 4. Giải phương trình $4x - \sqrt{2x-1} = 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Đặt $\sqrt{2x-1} = t$ ($t \geq 0$) $\Rightarrow 2x = t^2 + 1$, phương trình đã cho trở thành

$$2(t^2 + 1) - t = 3 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Loại trường hợp $t = -\frac{1}{2}$. Với $t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 1 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x - 3 = \sqrt{2x-1} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3 \geq 0 \\ 16x^2 - 24x + 9 = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \geq 3 \\ 16x^2 - 26x + 10 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x \geq 3 \\ 8x^2 - 13x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ (x-1)(8x-5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ x \in \left\{1; \frac{5}{8}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất.

Bài toán 5. Giải phương trình $3x + 1 = 2\sqrt{x+3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ 9x^2 + 6x + 1 = 4(x+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq -1 \\ 9x^2 + 2x - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ (x-1)(9x+11) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -3$.

Đặt $\sqrt{x+3} = t$, ($t \geq 0$) $\Rightarrow x = t^2 - 3$, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} 3(t^2 - 3) + 1 &= 2t \Leftrightarrow 3t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(3t+4) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{-\frac{4}{3}; 2\right\} \\ &\Rightarrow t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 2 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Bài toán 6. Giải phương trình $6x - 5 = \sqrt{3x-2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 6x - 5 \geq 0 \\ 36x^2 - 60x + 25 = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x \geq 5 \\ 36x^2 - 63x + 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5}{6} \\ (x-1)(4x+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Kết luận phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$.

Đặt $\sqrt{3x-2} = y, (y \geq 0) \Rightarrow 3x = y^2 + 2$, phương trình đã cho trở thành

$$2(y^2 + 2) - 5 = y \Leftrightarrow 2y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(2y+1) = 0 \Leftrightarrow y \in \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$$

Loại trường hợp $y = -\frac{1}{2}$. Với $y = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} = 1 \Leftrightarrow 3x-2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm $x = 1$.

Bài toán 7. Giải phương trình $5x+1=3\sqrt{x+3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 25x^2 + 10x + 1 = 9x + 27 \\ 5x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x^2 + x - 26 = 0 \\ 5x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(25x+26) = 0 \\ x \geq -\frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -3$.

Đặt $\sqrt{x+3} = y, (y \geq 0) \Rightarrow x = y^2 - 3$, phương trình đã cho trở thành

$$5(y^2 - 3) + 1 = 3y \Leftrightarrow 5y^2 - 3y - 14 = 0 \Leftrightarrow (y-2)(5y+7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 2 \Leftrightarrow x+3 = 4 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình đề bài có nghiệm duy nhất.

Bài toán 8. Giải phương trình $x^2 + \sqrt{x^2 + 11} = 31 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 11} = 31 - x^2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 31 \\ x^2 + 11 = x^4 - 62x^2 + 961 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 31 \\ x^4 - 63x^2 + 950 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 31 \\ (x^2 - 25)(x^2 - 38) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 31 \\ x^2 \in \{25; 38\} \end{cases} \Rightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x \in \{-5; 5\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt{x^2 + 11} = t, (t \geq \sqrt{11} > 0) \Rightarrow x^2 = t^2 - 11$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} t^2 - 11 + t = 31 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + t - 42 = 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-6)(t+7) = 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 6 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x \in \{-5; 5\}.$$

Vậy phương trình đề bài có hai nghiệm $x = -5; x = 5$.

Bài toán 9. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + 7} = x^2 + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x^2 + 7 = x^4 + 4x^2 + 4 &\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 3x^2 - x^2 - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -3 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x \in \{-1; 1\} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt{2x^2 + 7} = t, t > 0 \Rightarrow 2x^2 = t^2 - 7$. Phương trình khi đó có dạng

$$t = \frac{t^2 - 7}{2} + 2 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t + 1)(t - 3) = 0 \Rightarrow t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 7} = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x \in \{-1; 1\}.$$

Kết luận tập nghiệm $S = \{-1; 1\}$.

Bài toán 10. Giải phương trình $2x^2 + \sqrt{5x^2 - 1} = 4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $5x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq \frac{\sqrt{5}}{5}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{5x^2 - 1} = 4 - 2x^2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 2 \\ 5x^2 - 1 = 4x^4 - 16x^2 + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 2 \\ 4x^4 - 21x^2 + 17 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 2 \\ (x^2 - 1)(4x^2 - 17) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 2 \\ x^2 \in \left\{1; \frac{17}{4}\right\} \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x \in \{-1; 1\} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện thu được hai nghiệm, $S = \{-1; 1\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $5x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Đặt $\sqrt{5x^2 - 1} = t, t \geq 0 \Rightarrow x^2 = \frac{t^2 + 1}{5}$, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \frac{2}{5}(t^2 + 1) + t = 4 &\Leftrightarrow 2t^2 + 5t - 18 = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(2t + 9) = 0 \\ &\Rightarrow t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{5x^2 - 1} = 2 \Leftrightarrow 5x^2 - 1 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x \in \{-1; 1\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện, suy ra phương trình ban đầu có tập nghiệm $S = \{-1; 1\}$.

Bài toán 11. Giải phương trình $2\sqrt{x^2 + 3} = 7x^2 - 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \begin{cases} 7x^2 \geq 3 \\ 4x^2 + 12 = 49x^4 - 42x^2 + 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 \geq 3 \\ 49x^4 - 46x^2 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2 \geq 3 \\ (x^2 - 1)(49x^2 + 3) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq \frac{3}{7} \\ x^2 \in \left\{-\frac{3}{49}; 1\right\} \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}.$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm như trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt{x^2 + 3} = t, t \geq \sqrt{3} > 0 \Rightarrow x^2 = t^2 - 3$. Phương trình đã cho trở thành

$$2t = 7(t^2 - 3) - 3 \Leftrightarrow 7t^2 - 2t - 24 = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(7t + 12) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{12}{7} \end{cases}$$

$$t > 0 \Rightarrow t = 2 \Leftrightarrow x^2 + 3 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}$$

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm, hay $S = \{-1; 1\}$.

Nhận xét.

11 thí dụ trên là các bài toán điển hình mở đầu cho lớp phương trình giải được bằng phương pháp đặt một ẩn phụ (đối với căn thức). 7 thí dụ đầu tiên thuộc loại cơ bản nhất, do phía trong và phía ngoài căn đều là các nhị thức bậc nhất với hệ số nguyên, 4 thí dụ tiếp theo nhị thức bậc nhất được nâng lên mức độ cao hơn là nhị thức bậc hai (không phải tam thức bậc hai). Chính vì đặc điểm này, ngoài kỹ thuật đặt ẩn phụ trực tiếp là căn thức quy về phương trình bậc hai ẩn t , các bạn hoàn toàn có thể sử dụng biến đổi tương đương – nâng cao lũy thừa, khi đó sẽ quy về phương trình bậc hai cơ bản với ẩn x hoặc phương trình trùng phương bậc bốn.

Lưu ý trong phép đặt ẩn phụ cần đặt điều kiện sơ lược cho t (có thể đặt điều kiện chặt nếu đủ khả năng) nhằm loại bớt các trường hợp ngoại lai, vô nghiệm. Sau đây mời các bạn đến với một số bài toán chứa đa thức bậc ba, đa thức bậc bốn nhưng vẫn quy về phương trình trùng phương mở rộng với bậc 6 và bậc 8.

Bài toán 12. Giải phương trình $\sqrt{3x^3 + 1} = x^3 + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x^3 \geq -\frac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$3x^3 + 1 = x^6 + 2x^3 + 1 \Leftrightarrow x^6 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Kết luận điều kiện ta có nghiệm $x = 0; x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x^3 \geq -\frac{1}{3}$.

Đặt $\sqrt{3x^3 + 1} = t, t \geq 0 \Rightarrow x^3 = \frac{t^2 - 1}{3}$. Phương trình ban đầu trở thành

$$t = \frac{t^2 - 1}{3} + 1 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ x^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được hai nghiệm $x = 0; x = 1$.

Bài toán 13. Giải phương trình $\sqrt{x^3 + 9} = x^3 + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x^3 \geq -9$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^3 \geq -3 \\ x^3 + 9 = x^6 + 6x^3 + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \geq -3 \\ x^6 + 5x^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \geq -3 \\ x^3(x^3 + 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x^3 \geq -9$.

Đặt $\sqrt{x^3 + 9} = t; t \geq 0 \Rightarrow x^3 = t^2 - 9$ thì phương trình đã cho trở thành

$$t = t^2 - 9 + 3 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t - 3)(t + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow t = 3 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài toán 14. Giải phương trình $\sqrt{2x^3 + 7} = 4x^3 - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $2x^3 + 7 \geq 0$.

Đặt $\sqrt{2x^3 + 7} = t, t \geq 0 \Rightarrow 2x^3 = t^2 - 7$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} t &= 2(t^2 - 7) - 1 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 15 = 0 \Leftrightarrow (t - 3)(2t + 5) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow t = 3 \Leftrightarrow 2x^3 = 2 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có nghiệm $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $2x^3 + 7 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 4x^3 - 1 \geq 0 \\ 2x^3 + 7 = 16x^6 - 8x^3 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 1 \geq 0 \\ 16x^6 - 10x^3 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 1 \geq 0 \\ (x^3 - 1)(8x^3 + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 15. Giải phương trình $\sqrt{5x^4 - 1} = x^4 + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $5x^4 \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 5x^4 - 1 &= x^8 + 2x^4 + 1 \Leftrightarrow x^8 - 3x^4 + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^4 - 1)(x^4 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 1 \\ x^4 = 2 \end{cases} \Rightarrow x \in \{-1; 1; -\sqrt[4]{2}; \sqrt[4]{2}\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có bốn nghiệm như trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $5x^4 \geq 1$.

Đặt $\sqrt{5x^4 - 1} = t, t \geq 0 \Rightarrow x^4 = \frac{t^2 + 1}{5}$. Phương trình đã cho trở thành

$$t = \frac{t^2 + 1}{5} + 1 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(t - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 1 \\ x^4 = 2 \end{cases} \Rightarrow x \in \{-1; 1; -\sqrt[4]{2}; \sqrt[4]{2}\}.$$

Kết luận phương trình đề bài có bốn nghiệm.

Bài toán 16. Giải phương trình $2\sqrt{x^4 + 8} = 5x^4 + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4(x^4 + 8) &= 25x^8 + 10x^4 + 1 \Leftrightarrow 25x^8 + 6x^4 - 31 = 0 \\ \Leftrightarrow (x^4 - 1)(25x^4 + 31) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 1 \\ x^4 = -\frac{31}{25} \end{cases} \Rightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt{x^4 + 8} = t, t > 0 \Rightarrow x^4 = t^2 - 8$, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} 2t &= 5(t^2 - 8) + 1 \Leftrightarrow 5t^2 - 2t - 39 = 0 \Leftrightarrow (t - 3)(5t + 13) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -\frac{13}{5} \end{cases} \Rightarrow t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^4 + 8} = 3 \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = 1; x = -1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm như trên.

Bài toán 17. Giải phương trình $\sqrt{2x^4 + 23} = 4x^4 + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x^4 + 23 = 16x^8 + 8x^4 + 1 \Leftrightarrow 16x^8 + 6x^4 - 22 = 0 \Leftrightarrow (x^4 - 1)(8x^4 + 11) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 1 \\ x^4 = -\frac{11}{8} \end{cases} \Rightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}.$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt{2x^4 + 23} = t, t > 0 \Rightarrow 2x^4 = t^2 - 23$. Phương trình đã cho khi đó trở thành

$$\begin{aligned} t &= 2(t^2 - 23) + 1 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 45 = 0 \Leftrightarrow (t - 5)(2t + 9) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -\frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow t = 5 \Rightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = -1; x = 1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đề bài có hai nghiệm như trên.

Bài toán 18. Giải phương trình $\sqrt{5x^4 - 1} = 3x^4 - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x^4 \geq \frac{1}{5}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 3x^4 \geq 1 \\ 5x^4 - 1 = 9x^8 - 6x^4 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4 \geq 1 \\ 9x^8 - 11x^4 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^4 \geq 1 \\ (x^4 - 1)(9x^4 - 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = -1; x = 1.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1; x = 1$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $3x - 7\sqrt{x} + 4 = 0$.
2. $4x + 5 = 9\sqrt{x}$.
3. $11 + \sqrt{x} = 12x$.
4. $\sqrt{x-3} + x = 5$.
5. $2\sqrt{2x-3} + x = 4$.
6. $3\sqrt{x+1} + 4x = 18$.
7. $\sqrt{5x-1} + 6x = 8$.
8. $3\sqrt{8x+1} + 7x = 16$.
9. $4\sqrt{x^2+3} = 5x^2+3$.
10. $5\sqrt{5x^2-4} = 6x^2-1$.
11. $6\sqrt{7x^2-3} = x^2+11$.
12. $6\sqrt{7x^2+2} = 13x^2+5$.
13. $7\sqrt{2x^2-1} = 5x^2+2$.
14. $8\sqrt{3x^2-2} + x^2 = 9$.
15. $\sqrt{7x^2-6} + 6x^2 = 7$.
16. $\sqrt{5x^3-4} = 2x^3-1$.
17. $4\sqrt{3x^3-2} = x^3+3$.
18. $5\sqrt{6x^3-5} = 3x^3+2$.
19. $7\sqrt{x^3+7} = 13x^3+1$.
20. $6\sqrt{9x^3-8} - x^3 = 5$.
21. $7\sqrt{3x^3-2} = 4x^3+3$.
22. $3\sqrt{5x^3+3} + 4x^3 = 10$.
23. $8\sqrt{2-x^3} + 1 = 9x^3$.
24. $5\sqrt{3-2x^3} = 4x^3+1$.
25. $2\sqrt{9-x^3} = 7x^3-3$.
26. $\sqrt{5-4x^4} + 1 = 2x^4$.
27. $\sqrt{6-5x^4} = 5x^4-4$.
28. $\sqrt{7-6x^3} = 4x^3-3$.
29. $2\sqrt{8-7x^4} = 5x^4-2$.
30. $7\sqrt{4-3x^4} = 5x^4+2$.
31. $3\sqrt{x^4+15} = 5x^4+7$.
32. $4\sqrt{6x^4+3} = 11x^4+1$.
33. $\sqrt{5-4x^6} = 3x^6-2$.
34. $\sqrt{4-3x^6} = 8x^6-7$.

Bài toán 19. Giải bất phương trình $x + \sqrt{2x-1} \geq 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x-1} \geq 2-x \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \leq 0 \\ 2x-1 \geq x^2-4x+4 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-6x+5 \leq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$.

Đặt $\sqrt{2x-1} = t, t \geq 0$ thì bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \frac{t^2+1}{2} + t \geq 2 &\Leftrightarrow t^2+1+2t \geq 4 \Leftrightarrow t^2+2t-3 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+3) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow t \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} \geq 1 \Leftrightarrow 2x-1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1 \end{aligned}$$

Kết luận bất phương trình đề bài có nghiệm $x \geq 1$.

Bài toán 20. Giải bất phương trình $\sqrt{6-x} < x-4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \leq 6$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ 6-x < x^2-8x+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2-7x+10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ (x-2)(x-5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5.$$

Kết hợp điều kiện đi đến kết luận phương trình ban đầu có nghiệm $S = (5; 6]$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \leq 6$.

Đặt $\sqrt{6-x} = t, t \geq 0 \Rightarrow x = 6-t^2$. Bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t < 6-t^2-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2+t-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq t < 1 \Leftrightarrow 6-x < 1 \Leftrightarrow x > 5.$$

Kết luận tập hợp nghiệm $S = (5; 6]$.

Bài toán 21. Giải bất phương trình $4\sqrt{2-x^3} \leq x^3+3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 \leq 2$.

Đặt $\sqrt{2-x^3} = t, t \geq 0 \Rightarrow x^3 = 2-t^2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4t \leq 2-t^2+3 &\Leftrightarrow t^2+4t-5 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+5) \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq t \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq t \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2-x^3 \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 \leq 2 \\ x^3 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đề bài có tập nghiệm $S = [1; \sqrt[3]{2}]$.

Bài toán 22. Giải bất phương trình $\sqrt{x^4 + 8} \leq 4x^4 - 1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt{x^4 + 8} = t, t > 0 \Rightarrow x^4 = t^2 - 8$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \begin{cases} t > 0 \\ t \leq 4(t^2 - 8) - 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ 4t^2 - t - 33 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ (t - 3)(4t + 11) \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow t \geq 3 \Leftrightarrow x^4 \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình ban đầu có nghiệm $x \geq 1 \vee x \leq -1$.

Bài toán 23. Giải phương trình $3x^2 + 21x + 16 + 2\sqrt{x^2 + 7x + 7} = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x^2 + 7x + 7 \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x^2 + 7x + 7} = t, t \geq 0 \Rightarrow x^2 = t^2 - 7x - 7$. Phương trình đã cho trở thành

$$3(t^2 - 7x - 7) + 21x + 16 + 2t = 0 \Leftrightarrow 3t^2 + 2t - 5 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(3t + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

- Loại trường hợp $t = -\frac{5}{3}$.
- $t = 1 \Leftrightarrow x^2 + 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = -6; x = -1$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm $x = -6; x = -1$.

Bài toán 24. Giải phương trình $\frac{x}{\sqrt{4x-1}} + \frac{\sqrt{4x-1}}{x} = 2$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > \frac{1}{4}$.

Đặt $\frac{x}{\sqrt{4x-1}} = t, t > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{4x-1}}{x} = \frac{1}{t}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow (t - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{4x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}\}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có tập nghiệm $S = \{2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}\}$.

Bài toán 25. Giải phương trình $x^2 + 3x + \sqrt{x^2 + 3x} = 2$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x(x + 3) \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x^2 + 3x} = t, t \geq 0$ thì phương trình đã cho trở thành

$$t^2 + t = 2 \Leftrightarrow (t - 1)(t + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

- Loại trường hợp $t = -2$.

○ Với $t = 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}; x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm như trên.

Bài toán 26. Giải phương trình $3\sqrt{x^2 + x + 2} = x^2 + x + 4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x^2 + x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt{x^2 + x + 2} = t, t > 0$ thì phương trình đã cho trở thành

$$3t = t^2 + 2 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

➤ $t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0, \Delta < 0$, trường hợp này vô nghiệm.

➤ $t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 1\}$.

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x = -2; x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x^2 + x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $x^2 + x = t \Rightarrow t = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} 3\sqrt{t+2} = t+4 \\ t \geq -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\frac{1}{4} \\ 9t+18 = t^2+8t+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\frac{1}{4} \\ t^2-t-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -\frac{1}{4} \\ (t+1)(t-2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 1$$

Kết luận bài toán có hai nghiệm $x = -2; x = 1$.

Bài toán 27. Giải phương trình $4x^2 + 10x + 9 = 5\sqrt{2x^2 + 5x + 3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^2 + 5x + 3 \geq 0$.

Đặt $\sqrt{2x^2 + 5x + 3} = t, t \geq 0 \Rightarrow 4x^2 + 10x + 9 = 2(2x^2 + 5x + 3) + 3 = 2t^2 + 3$.

Phương trình đã cho trở thành $2t^2 + 3 = 5t \Leftrightarrow (t-1)(2t-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{3}{2} \end{cases}$

• Với $t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 5x + 3} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{2}; -2\right\}$.

• Với $t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} = 3 \Leftrightarrow 8x^2 + 20x + 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{-5 + \sqrt{19}}{4}; \frac{-5 - \sqrt{19}}{4}\right\}$.

So sánh với điều kiện kết luận tập nghiệm là $S = \left\{-2; -\frac{1}{2}; \frac{-5 + \sqrt{19}}{4}; \frac{-5 - \sqrt{19}}{4}\right\}$.

Bài toán 28. Giải phương trình $x^2 - 4x + 2 = 2\sqrt{x^2 - 4x + 5} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 - 4x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = t, t \geq 1 \Rightarrow t^2 = x^2 - 4x + 5$. Phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 3 = 2t \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -1 \end{cases}$$

- Loại trường hợp $t = -1 < 0$.
- Với $t = 3 \Rightarrow x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x \in \{2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}\}$.

Vậy phương trình đề bài có hai nghiệm $x = 2 + \sqrt{2}; x = 2 - \sqrt{2}$.

Bài toán 29. Giải phương trình $(x+5)(2-x) = 3\sqrt{x^2 + 3x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x(x+3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -3 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với $-x^2 - 3x + 10 = 3\sqrt{x^2 + 3x} \Leftrightarrow x^2 + 3x + 3\sqrt{x^2 + 3x} - 10 = 0$.

Đặt $\sqrt{x^2 + 3x} = t, (t \geq 0)$ ta thu được $\begin{cases} t^2 + 3t - 10 = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-2)(t+5) = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in \{-5; 2\} \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$.

Khi đó $\sqrt{x^2 + 3x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+4) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-4; 1\}$.

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x = -4; x = 1$.

Bài toán 30. Giải phương trình $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = 7 - (x^2 + 2x)$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $5x^2 + 10x + 1 \geq 0$.

Đặt $\sqrt{5x^2 + 10x + 1} = t, (t \geq 0) \Rightarrow x^2 + 2x = \frac{t^2 - 1}{5}$. Phương trình khi đó trở thành

$$t = 7 - \frac{t^2 - 1}{5} \Leftrightarrow t^2 + 5t - 36 = 0 \Leftrightarrow (t-4)(t+9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = -9 \end{cases}$$

- Loại trường hợp $t = -9$.
- Với $t = 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 3 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3; 1\}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -3; x = 1$.

Bài toán 31. Giải phương trình $x^2 + \sqrt{x^2 - 2x - 19} = 2x + 39$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x^2 - 2x - 19 \geq 0$.

Biến đổi phương trình ban đầu về dạng $x^2 - 2x - 19 + \sqrt{x^2 - 2x - 19} = 20$.

Đặt $\sqrt{x^2 - 2x - 19} = t, (t \geq 0)$ thu được $t^2 + t = 20 \Leftrightarrow (t-4)(t+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 \\ t = 4 \end{cases}$

- ❖ Loại trường hợp $t = -5 < 0$.
- ❖ Với $t = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 19} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 35 = 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-7) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-5; 7\}$.

Đối chiếu điều kiện đi đến hai nghiệm như trên.

Bài toán 32. Giải bất phương trình $2x^2 + 4x + 3\sqrt{3-2x-x^2} > 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $3-2x-x^2 \geq 0$.

Đặt $\sqrt{3-2x-x^2} = t, (t \geq 0) \Rightarrow 2x+x^2 = 3-t^2$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ 2(3-t^2) + 3t > 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ 2t^2 - 3t - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ -1 < t < \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq t < \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x-x^2 \geq 0 \\ 2\sqrt{3-2x-x^2} < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-3 \leq 0 \\ 4x^2+8x+13 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ 4(x+1)^2 > -9 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $S = [-3; 1]$.

Bài toán 33. Giải bất phương trình $2x^2 + \sqrt{x^2 - 5x - 6} > 10x + 15 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 - 5x - 6 \geq 0$.

Biến đổi bất phương trình về dạng $2x^2 - 10x + \sqrt{x^2 - 5x - 6} > 15$.

Đặt $\sqrt{x^2 - 5x - 6} = t, (t \geq 0) \Rightarrow x^2 - 5x = t^2 + 6$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2(t^2 + 6) + t > 15 \\ t \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2 + t - 3 > 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)(2t+3) > 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t > 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x - 7 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5+\sqrt{53}}{2} \vee x > \frac{5-\sqrt{53}}{2} \end{aligned}$$

Kết luận bài toán có tập nghiệm $S = \left(-\infty; \frac{5-\sqrt{53}}{2}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{53}}{2}; +\infty\right)$.

Bài toán 34. Giải bất phương trình $\sqrt{\frac{x}{x-1}} + \sqrt{\frac{x-1}{x}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x(x-1) > 0$.

Đặt $\sqrt{\frac{x}{x-1}} = t, (t > 0) \Rightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{t}$. Bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \begin{cases} t + \frac{1}{t} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ t > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}t + 1 \geq 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ t \geq \sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{aligned} \blacksquare \quad 0 < t \leq \frac{\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) > 0 \\ \frac{x}{x-1} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1) > 0 \\ \frac{x+1}{x-1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 0. \\ \blacksquare \quad t \geq \sqrt{2} &\Leftrightarrow \frac{x}{x-1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow 1 < x \leq 2 \end{aligned} \end{aligned}$$

Vậy bài toán có nghiệm $S = [-1; 0) \cup (1; 2]$.

Bài toán 35. Giải bất phương trình $-4\sqrt{(4-x)(2+x)} \leq x^2 - 2x - 8 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $(4-x)(2+x) \geq 0$.

Bất phương trình đã cho quy về $-4\sqrt{-x^2 + 2x + 8} - x^2 + 2x + 8 \leq 0$.

Đặt $\sqrt{-x^2 + 2x + 8} = t, (t \geq 0)$ ta thu được

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ -4t + t^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t(t-4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} (4-x)(2+x) \geq 0 \\ -x^2 + 2x + 8 \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-x)(2+x) \geq 0 \\ (x-1)^2 \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4.$$

Kết luận tập hợp nghiệm $S = [-2; 4]$.

Bài toán 36. Giải phương trình $(x+1)(x+4) = 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Ta có $x^2 + 5x + 28 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{87}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho biến đổi về $x^2 + 5x + 4 = 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}$.

Đặt $\sqrt{x^2 + 5x + 28} = t, (t > 0) \Rightarrow x^2 + 5x = t^2 - 28$. Thu được

$$t^2 - 28 + 4 = 5t \Leftrightarrow t^2 - 5t - 24 = 0 \Leftrightarrow (t+3)(t-8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 8 \end{cases}$$

- Loại trường hợp $t = -3$.
- Với $t = 8 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 36 \Leftrightarrow (x-4)(x+9) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-4; 9\}$.

Vậy phương trình đề bài có hai nghiệm là $x = -4; x = 9$.

Bài toán 37. Giải phương trình $3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 + 5x + 1 \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = t, (t \geq 0) \Rightarrow x^2 + 5x = t^2 - 1$. Phương trình đã cho trở thành

$$3(t^2 - 1) + 2t = 2 \Leftrightarrow 3t^2 + 2t - 5 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(3t+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{5}{3} \\ t = 1 \end{cases}$$

- Loại trường hợp $t = -\frac{5}{3}$.
- Với $t = 1 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x+5) = 0 \Leftrightarrow x = -5; x = 0$.

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 38. Giải phương trình $(2x-1)^2 = 12\sqrt{x^2 - x - 2} + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 - x - 2 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $4x^2 - 4x + 1 = 12\sqrt{x^2 - x - 2} + 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 3\sqrt{x^2 - x - 2}$.

Đặt $\sqrt{x^2 - x - 2} = t, (t > 0) \Rightarrow x^2 - x = t^2 + 2$. Khi đó ta được

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 - 3t + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t = 1; t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\triangleright t = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}; x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}.$$

$$\triangleright t = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 3\}.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được bốn nghiệm kể trên.

Bài toán 39. Giải phương trình $2x + x^2 = 2\sqrt{2(x^2 + 2x + 4)} - 4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt{2(x^2 + 2x + 4)} = t, (t \geq 0) \Rightarrow x^2 + 2x = \frac{t^2 - 8}{2}$. Phương trình ban đầu trở thành

$$\frac{t^2 - 8}{2} = 2t - 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases}$$

✓ Loại trường hợp $t = 0$.

✓ Với $t = 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 4 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} - 1; x = -\sqrt{5} - 1$.

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm.

Bài toán 40. Giải bất phương trình $9\sqrt{x^2 + 3x + 12} > x(x + 3) + 26 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 + 3x + 12 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{39}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt{x^2 + 3x + 12} = t, t \geq \frac{\sqrt{39}}{2} \Rightarrow x^2 + 3x = t^2 - 12$. Bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \begin{cases} 9t > t^2 - 12 + 26 \\ t \geq \frac{\sqrt{39}}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 9t + 14 < 0 \\ t \geq \frac{\sqrt{39}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t - 2)(t - 7) < 0 \\ t \geq \frac{\sqrt{39}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < t < 7 \\ t \geq \frac{\sqrt{39}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{39}}{2} \leq t < 7 \\ &\Rightarrow x^2 + 3x - 37 < 0 \Leftrightarrow \frac{-3 - \sqrt{157}}{2} < x < \frac{-3 + \sqrt{157}}{2} \end{aligned}$$

Kết luận bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left[\frac{-3 - \sqrt{157}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{157}}{2}\right]$.

Bài toán 41. Giải bất phương trình $\sqrt{x(2x + 3)} > 3 - 4x^2 - 6x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x(2x + 3) \geq 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $2x(2x + 3) + \sqrt{x(2x + 3)} > 3$. Đặt $\sqrt{x(2x + 3)} = t, (t \geq 0)$ thì ta được

$$\begin{cases} 2t^2 + t - 3 > 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t - 1)(2t + 3) > 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t > 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \vee x < \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$$

Kết hợp điều kiện đi đến nghiệm $x > \frac{-3+\sqrt{17}}{4} \vee x < \frac{-3-\sqrt{17}}{4}$.

Bài toán 42. Giải bất phương trình $x^2 - 34x + 48 \geq 6\sqrt{(x-2)(x-32)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $(x-2)(x-32) \geq 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $x^2 - 34x + 48 \geq 6\sqrt{x^2 - 34x + 64}$.

Đặt $\sqrt{x^2 - 34x + 64} = t, (t \geq 0)$ thu được $\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 - 16 \geq 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t+2)(t-8) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq 8$.

Khi đó $x^2 - 34x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 34 \vee x \leq 0$. Kết luận tập nghiệm là $S = (-\infty; 0] \cup [34; +\infty)$.

Bài toán 43. Giải bất phương trình $2\sqrt{x^2 - 4x + 3} > 4x - x^2$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \vee x \leq 1$.

Đặt $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = t, (t \geq 0)$ ta thu được $\begin{cases} t \geq 0 \\ 2t > 3 - t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + 2t - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t > 1$.

Suy ra $x^2 - 4x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2 + \sqrt{2} \vee x < 2 - \sqrt{2}$.

Đổi chiều điều kiện ta có tập nghiệm $S = (-\infty; 2 - \sqrt{2}] \cup [2 + \sqrt{2}; +\infty)$.

Bài toán 44. Giải phương trình $x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = \frac{3}{2}x + 6$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $2x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

Phương trình đã cho biến đổi về $2x^2 - 3x + 2 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 8$.

Đặt $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = t, (t \geq 0)$ thu được $t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 4 \end{cases}$

❖ Loại trường hợp $t = -2$.

❖ Với $t = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 14 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(2x+7) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = -\frac{7}{2}$.

Kết hợp điều kiện ta thu được hai nghiệm $x = -2; x = -\frac{7}{2}$.

Bài toán 45. Giải phương trình $4\sqrt{(x+5)(x-1)} + (x+2)^2 = 14$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $(x+5)(x-1) \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương $4\sqrt{x^2 + 4x - 5} + x^2 + 4x = 10$.

Đặt $\sqrt{x^2 + 4x - 5} = t, (t \geq 0) \Rightarrow x^2 + 4x = t^2 + 5$, ta thu được

$$4t + t^2 + 5 = 10 \Leftrightarrow (t+2)^2 = 9 \Leftrightarrow |t+2| = 3 \Leftrightarrow t+2 = 3 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2 + 2\sqrt{2}; x = -2 - 2\sqrt{2}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 46. Giải phương trình $\sqrt{(x-5)(x+4)-1} + x(x-1) = 23 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $(x-5)(x+4)-1 \geq 0$. Đặt $\sqrt{(x-5)(x+4)-1} = t, (t \geq 0) \Rightarrow x^2 - x = t^2 + 21$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ t + t^2 + 21 = 23 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x = 22 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{89}}{2}; x = \frac{1-\sqrt{89}}{2} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện, suy ra phương trình ban đầu có hai nghiệm, $S = \left\{ \frac{1+\sqrt{89}}{2}; \frac{1-\sqrt{89}}{2} \right\}$.

Bài toán 47. Giải phương trình $11\sqrt{(x+2)(x+1)} = (2-x)(x+5) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $(x+2)(x+1) \geq 0$.

Biến đổi về dạng $11\sqrt{x^2+3x+2} = -x^2-3x+10 \Leftrightarrow x^2+3x+2+11\sqrt{x^2+3x+2}-12=0$.

Đặt $\sqrt{x^2+3x+2} = t, (t \geq 0)$ ta thu được $t^2+11t-12=0 \Leftrightarrow (t-1)(t+12)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-12 \end{cases}$

➤ Loại trường hợp $t = -12$.

➤ Với $t = 1 \Leftrightarrow x^2+3x+2=1 \Leftrightarrow x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}; x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

So sánh với điều kiện ta thu được hai nghiệm như trên.

Bài toán 48. Giải phương trình $4\sqrt{(x-2)(x-4)+3} = 3-(x-3)^2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho có dạng $4\sqrt{x^2-6x+11} + x^2-6x+11 = 5$.

Đặt $\sqrt{x^2-6x+11} = t, (t \geq 0)$ ta thu được $t^2+4t-5=0 \Leftrightarrow (t-1)(t+5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-5 \end{cases}$

○ Loại trường hợp $t = -5$.

○ Với $t = 1 \Leftrightarrow x^2-6x+10=0 \Leftrightarrow (x-3)^2=-1$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 49. Giải bất phương trình $4\sqrt{x(x+4)} < (1+x)(3+x) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x(x+4) \geq 0$. Bất phương trình ban đầu tương đương với $4\sqrt{x^2+4x} < x^2+4x+3$.

Đặt $\sqrt{x^2+4x} = t, (t \geq 0)$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ 4t < t^2 + 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 3 \\ 0 \leq t < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x > 9 \\ x(x+4) \geq 0 \\ x^2+4x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2+\sqrt{13} \\ x < -2-\sqrt{13} \\ 0 \leq x < -2+\sqrt{5} \\ -2-\sqrt{5} < x \leq -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận bài toán có tập hợp nghiệm là $S = (-\infty; -2 - \sqrt{13}) \cup (-2 - \sqrt{5}; -4] \cup [0; \sqrt{5} - 2) \cup (\sqrt{13} - 2; +\infty)$.

Bài toán 50. Giải bất phương trình $3\sqrt{(2x+1)(x+3)} \geq (2x+5)(x+1) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $(2x+1)(x+3) \geq 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $3\sqrt{2x^2 + 7x + 3} \geq 2x^2 + 7x + 3 + 2$.

Đặt $\sqrt{2x^2 + 7x + 3} = t, (t \geq 0)$ thì thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ 3t \geq t^2 + 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 7x + 3 \geq 1 \\ 2x^2 + 7x + 3 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 7x + 2 \geq 0 \\ 2x^2 + 7x - 1 \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{-7 + \sqrt{33}}{4} \vee x \leq \frac{-7 - \sqrt{33}}{4} \\ \frac{-7 - \sqrt{57}}{4} \leq x \leq \frac{-7 + \sqrt{57}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-7 - \sqrt{57}}{4} \leq x \leq \frac{-7 - \sqrt{33}}{4} \\ \frac{-7 + \sqrt{33}}{4} \leq x \leq \frac{-7 + \sqrt{57}}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left[\frac{-7 - \sqrt{57}}{4}; \frac{-7 - \sqrt{33}}{4} \right] \cup \left[\frac{-7 + \sqrt{33}}{4}; \frac{-7 + \sqrt{57}}{4} \right]$.

Bài toán 51. Giải phương trình $(\sqrt{3x+1} + 1)^2 + 2\sqrt{3x+1} = 13 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$. Phương trình đã cho đưa về $(\sqrt{3x+1} + 1)^2 + 2(\sqrt{3x+1} + 1) = 15$.

Đặt $\sqrt{3x+1} + 1 = t, (t \geq 1)$ thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 1 \\ t^2 + 2t - 15 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ (t-3)(t+5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ t \in \{-5; 3\} \end{cases} \Leftrightarrow t = 3 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} + 1 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 2 \Leftrightarrow 3x+1 = 4 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Giá trị này thỏa mãn điều kiện ban đầu. Kết luận nghiệm $x = 1$.

Bài toán 52. Giải phương trình $(2\sqrt{x+1} + 1)^2 + 3\sqrt{x+1} = 12 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$.

Đặt $\sqrt{x+1} = t, t \geq 0$ ta có

$$\begin{cases} (2t+1)^2 + 3t = 12 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t^2 + 7t - 11 = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)(4t+11) = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bài toán 53. Giải phương trình $2(\sqrt{x+3} - 1)^2 + 7\sqrt{x+3} = 16 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -3$.

Đưa phương trình về dạng $2(\sqrt{x+3} - 1)^2 + 7(\sqrt{x+3} - 1) = 9$.

Đặt $\sqrt{x+3}-1=t, (t \geq -1)$ ta thu được

$$\begin{cases} t \geq -1 \\ 2t^2 + 7t - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ (t-1)(2t+9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=2 \Leftrightarrow x=1.$$

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm $x=1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -3$.

Đặt $\sqrt{x+3}=t, t \geq 0$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ 2(t-1)^2 + 7t = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ 2t^2 + 3t - 14 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-2)(2t+7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}=2 \Leftrightarrow x=1.$$

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm $x=1$.

Bài toán 54. Giải phương trình $\left(3\sqrt{3x^2+x}-1\right)^2 + 4\sqrt{3x^2+x} = 33 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $3x^2+x \geq 0$.

Đặt $\sqrt{3x^2+x}=t, (t \geq 0)$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ (3t-1)^2 + 4t = 33 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ 9t^2 - 2t - 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-2)(16t+9) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow t=2 \Rightarrow 3x^2+x-4=0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; -\frac{4}{3}\right\} \end{aligned}$$

So sánh với điều kiện ta thu được hai nghiệm $x = -\frac{4}{3}; x=1$.

Bài toán 55. Giải phương trình $3\left(\sqrt{5x^2-4x}+2\right)^2 + 5\sqrt{5x^2-4x} = 32 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $5x^2-4x \geq 0$.

Đặt $\sqrt{5x^2-4x}=t, t \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ 3(t+2)^2 + 5t = 32 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ 3t^2 + 17t - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(3t+20) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t=1 \\ &\Leftrightarrow 5x^2-4x=1 \Leftrightarrow (x-1)(5x+1)=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}; x=1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -\frac{1}{5}; x=1$.

Bài toán 56. Giải phương trình $10x-x^2+\left(2\sqrt{10x-x^2}-1\right)^2 = 34 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x(10-x) \geq 0$.

Đặt $\sqrt{10x-x^2}=t, t \geq 0$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} t^2 + (2t-1)^2 = 34 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t^2 - 4t - 33 = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-3)(5t+11) = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3 \\ \Leftrightarrow 10x - x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-9) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 9$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 57. Giải phương trình $\left(3\sqrt{7x^2 - 3x + 4}\right)^2 + (x-1)(7x+4) = 100 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x(7x-3) \geq 0.$

Phương trình đã cho quy về $\left(3\sqrt{7x^2 - 3x + 4}\right)^2 + 7x^2 - 3x = 104.$

Đặt $\sqrt{7x^2 - 3x} = t, (t \geq 0)$ thu được

$$\begin{cases} (3t+4)^2 + t^2 = 104 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10t^2 + 24t - 88 = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-2)(5t+22) = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow 7x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(7x+4) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{4}{7}; 1\right\}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được hai nghiệm $x = -\frac{4}{7}; x = 1.$

Nhận xét.

Các bài toán từ 19 đến 57 nằm trong lớp bài toán phương trình, bất phương trình chứa căn thức cơ bản, được giải bằng phương pháp đặt một ẩn phụ quy về phương trình bậc hai, đại đa số các bài toán đều có biểu thức dưới dấu căn dưới dạng tam thức bậc hai, do vậy đòi hỏi người thực hành phải lưu ý điều kiện xác định của bài toán một cách đúng mức.

Có thể tổng quát dạng toán đối với phương trình và bất phương trình như sau

$$\begin{cases} Af(x) + B\sqrt{f(x)} + C = 0 \\ Af(x) + B\sqrt{f(x)} + C > 0 \\ Af(x) + B\sqrt{f(x)} + C \geq 0 \\ Af(x) + B\sqrt{f(x)} + C < 0 \\ Af(x) + B\sqrt{f(x)} + C \leq 0 \end{cases}$$

Mức độ các bài toán trên chỉ tạm dừng lại với $f(x)$ ở dạng tam thức bậc hai nên thao tác giải vẫn được coi là cơ bản. Tuy nhiên chúng ta cần nhìn nhận để biến đổi xuất hiện biểu thức $Af(x)$ phía ngoài căn, vì ở một tầm cao hơn nó thường ẩn giấu phía sau các hằng đẳng thức hay một biểu thức hỗn tạp.

Trong một số trường hợp với bất phương trình, có thể đặt điều kiện chặt cho ẩn phụ để dễ dàng lập luận các trường hợp xảy ra, hơn nữa nhiều khi chỉ cần đặt điều kiện xác định hình thức bởi kết quả thu được mạnh hơn !

Các bài toán căn thức gắn với kiến thức giá trị tuyệt đối cũng rất đáng lưu ý

Bài toán 58. Giải phương trình $\frac{|3x^2 - 5x + 3|}{\sqrt{(x-1)(3x-2)} + 1} = \frac{5}{3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $(x-1)(3x-2) \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 2 \geq 0.$

Ta có $3x^2 - 5x + 3 = 3x^2 - 5x + 2 + 1 > 0 \Rightarrow |3x^2 - 5x + 3| = 3x^2 - 5x + 3$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$3(3x^2 - 5x + 3) = 5\sqrt{3x^2 - 5x + 2} + 5 \Leftrightarrow 3(3x^2 - 5x + 2) - 5\sqrt{3x^2 - 5x + 2} - 2 = 0.$$

Đặt $\sqrt{3x^2 - 5x + 2} = t, (t \geq 0)$ ta thu được

$$\begin{cases} 3t^2 - 5t - 2 = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-2)(3t+1) = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in \left\{-\frac{1}{3}; 2\right\} \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 5x + 2} = 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(3x+1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{3}; 2\right\}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm kể trên.

Bài toán 59. Giải phương trình $\frac{|6x^2 - 7x + 4| + 2x - 3}{\sqrt{(2x-1)(3x-2)} + 3x - 1} = \frac{2}{3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} (2x-1)(3x-2) \geq 0 \\ \sqrt{(2x-1)(3x-2)} + 3x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 7x + 2 \geq 0 \\ \sqrt{(2x-1)(3x-2)} \neq 1 - 3x \end{cases}$$

Nhận xét $6x^2 - 7x + 4 = 6x^2 - 7x + 2 + 2 > 0 \Rightarrow |6x^2 - 7x + 4| = 6x^2 - 7x + 4$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$3(6x^2 - 7x + 4) + 6x - 9 = 2\sqrt{6x^2 - 7x + 2} + 6x - 2 \Leftrightarrow 3(6x^2 - 7x + 2) - 2\sqrt{6x^2 - 7x + 2} - 1 = 0.$$

Đặt $\sqrt{6x^2 - 7x + 2} = t, (t \geq 0)$ ta thu được

$$\begin{cases} 3t^2 - 2t - 1 = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)(3t+1) = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in \left\{-\frac{1}{3}; 1\right\} \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6x^2 - 7x + 2} = 1 \Leftrightarrow 6x^2 - 7x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(6x-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{6}; 1\right\}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm kể trên.

Bài toán 60. Giải phương trình $\frac{\sqrt{(2x-3)(x-1)} + 4x - 5}{|3x^2 - 5x + 3| - x^2 + 3x - 4} = \frac{4}{3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} (2x-3)(x-1) \geq 0 \\ |3x^2 - 5x + 3| - x^2 + 3x - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 3 \geq 0 \\ |3x^2 - 5x + 3| - x^2 + 3x - 4 \neq 0 \end{cases}$$

Nhận xét $3x^2 - 5x + 3 = x^2 + (2x^2 - 5x + 3) \geq 0 \Rightarrow |3x^2 - 5x + 3| = 3x^2 - 5x + 3$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$3\sqrt{2x^2 - 5x + 3} + 12x - 15 = 4(2x^2 - 5x + 3) + 12x - 16 \Leftrightarrow 3\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 4(2x^2 - 5x + 3) - 1.$$

Đặt $\sqrt{2x^2 - 5x + 3} = t, (t \geq 0)$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ 3t = 4t^2 - 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(4t+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \left\{-\frac{1}{4}; 1\right\} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 3} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{2}; 2\right\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm kể trên.

Bài toán 61. Giải phương trình $\frac{|4x^2 + 5x - 3| - 5}{8x^2 - 6 + \sqrt{(2x-1)(x+3)}} = \frac{1}{4} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện. $\begin{cases} (2x-1)(x+3) \geq 0 \\ 8x^2 - 6 + \sqrt{(2x-1)(x+3)} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 \geq 0 \\ 8x^2 - 6 + \sqrt{(2x-1)(x+3)} \neq 0 \end{cases}$

Nhận xét $4x^2 + 5x - 3 = 2x^2 + 2x^2 + 5x - 3 \geq 0 \Rightarrow |4x^2 + 5x - 3| = 4x^2 + 5x - 3.$

Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 + 5x - 3}{8x^2 - 6 + \sqrt{(2x-1)(x+3)}} &= \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4(4x^2 + 5x - 3) = 8x^2 - 6 + \sqrt{(2x-1)(x+3)} \\ &\Leftrightarrow 4(2x^2 + 5x - 3) - 14 = \sqrt{2x^2 + 5x - 3} \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{2x^2 + 5x - 3} = t, (t \geq 0)$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4t^2 - t - 14 = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (t-2)(7t+4) = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in \left\{-\frac{4}{7}; 2\right\} \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 5x - 3} = 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x+7) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{7}{2}; 1\right\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm kể trên.

Bài toán 62. Giải phương trình $\frac{|2x^2 - x - 2| - 3}{2x^2 + \sqrt{(x+1)(x-2)}} = \frac{1}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải.

Điều kiện $(x+1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geq 0.$

Nhận xét $2x^2 - x - 2 = x^2 + x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow |2x^2 - x - 2| = 2x^2 - x - 2.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$2(2x^2 - x - 2) - 6 = 2x^2 + \sqrt{x^2 - x - 2} \Leftrightarrow 2(2x^2 - x - 2) - 6 = \sqrt{x^2 - x - 2}$$

Đặt $\sqrt{x^2 - x - 2} = t, (t \geq 0)$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2t^2 - 6 = t \\ t \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (t-2)(2t+3) = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in \left\{-\frac{3}{2}; 2\right\} \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 3\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm kể trên.

Bài toán 63. Giải phương trình $\frac{|3x^2 + 4x + 3|}{4x^2 - 1 + 3\sqrt{(x+2)^2 - 1}} = \frac{1}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} (x+2)^2 - 1 \geq 0 \\ 4x^2 - 1 + 3\sqrt{(x+2)^2 - 1} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 4x^2 - 1 + 3\sqrt{(x+2)^2 - 1} \neq 0 \end{cases}$$

Ta có $3x^2 + 4x + 3 = 2x^2 + x^2 + 4x + 3 > 0 \Rightarrow |3x^2 + 4x + 3| = 3x^2 + 4x + 3.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$2(3x^2 + 4x + 3) = 4x^2 - 1 + 3\sqrt{x^2 + 4x + 3} \Leftrightarrow 2(x^2 + 4x + 3) = 3\sqrt{x^2 + 4x + 3} - 1.$$

Đặt $\sqrt{x^2 + 4x + 3} = t, t \geq 0$ thu được

$$\begin{aligned} 2t^2 - 3t + 1 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 3 = 1 \\ 4(x^2 + 4x + 3) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 2 = 0 \\ 4x^2 + 16x + 11 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x &\in \left\{ -2 + \sqrt{2}; -2 - \sqrt{2}; \frac{-4 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-4 - \sqrt{5}}{2} \right\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện đi đến phương trình đã cho có bốn nghiệm kể trên.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\sqrt{9-5x} > x+1$.
2. $4\sqrt{5-x} \leq 7-3x$.
3. $6\sqrt{8-7x} \leq 11-5x$.
4. $\sqrt{7x^3+2} \leq 5x^3-2$.
5. $\sqrt{9x^3-8} > 3x^3-2$.
6. $2\sqrt{7x^3-6} \leq x^3+1$.
7. $\sqrt{5x^4+4} > x^4+2$.
8. $\sqrt{2x^4+7} < x^4+2$.
9. $\sqrt{8x^4+1} \leq 5x^4-2$.
10. $x^2+6x+4 \leq 2\sqrt{x^2+6x+3}$.
11. $4x^2+x+2\sqrt{4x^2+x+2} \leq 7$.
12. $\sqrt{x^2+9x}+5(x^2+9x) \leq 6$.
13. $\sqrt{6x^2-x+3}+24x^2-4x+5 \leq 0$.
14. $7\sqrt{5x^2-x+4}+6(5x^2-x+4) \leq 13$.
15. $x(x+4)+7\sqrt{x(x+4)}-8 \leq 0$.
16. $6\sqrt{x^2+6x+7}+x^2+6x > 0$.
17. $4x^2+2x-3+3\sqrt{x(2x+1)}+1=0$.
18. $\frac{x(2x+3)}{7-6\sqrt{x(2x+3)}} \leq 1$.
19. $2x(x-1)-1 > \sqrt{x^2-x+1}$.
20. $x^2-4x=-2+\sqrt{x^2+5-4x}$.
21. $7x^2-x+6\sqrt{7x^2-x+4}=3$.
22. $7\sqrt{8x^2+x}+8x^2+x-8=0$.
23. $3\sqrt{(x+4)(x+5)}+(x+1)(x+8)=6$.
24. $(3-x)^2+3x-22=\sqrt{x^2-3x+7}$.
25. $12-4\sqrt{(4-x)(x+2)} \leq x^2-2x$.
26. $x^2+5\sqrt{x(x+6)}=6(1-x)$.
27. $7\sqrt{(1+x)(2-x)} > 1+2x-2x^2$.
28. $5\sqrt{x^2-4x+3}+(x-2)^2=7$.
29. $5(x-1)(x+2)=23-8\sqrt{5x(x+1)}$.
30. $7\sqrt{(x+1)(x+3)}+(x-1)(x+5)=0$.

$$31. \frac{11\sqrt{x(x+4)}}{(2-x)(x+6)} > 1.$$

$$32. x^2 - 3x - 5\sqrt{9x^2 + x - 2} = \frac{11}{4} - \frac{28}{9}x.$$

$$33. \sqrt{x^2 + 7x + 9} < 2x^2 + 14x - 1.$$

$$34. \sqrt{4x^2 + x + 1} \leq 6(4x^2 + x) + 1.$$

$$35. 3\sqrt{3x^2 + x} - 3x^2 - x = 2.$$

$$36. \sqrt{x^2 + x + 2} = x(x+2) - 2.$$

$$37. 5\sqrt{x(x+2)} + 6(x+1)^2 > 17.$$

$$38. 3x^2 + 2x = 2\sqrt{x^2 + x + 1} - x.$$

$$39. \frac{4\sqrt{(x-4)(x+5)}}{35 - (x+3)(x-2)} = 1.$$

$$40. 4 + \sqrt{(x+1)(2+x)} \leq x^2 + 3x.$$

$$41. \sqrt{3x^2 + 6x + 4} < 2 - 2x - x^2.$$

$$42. \frac{5\sqrt{(x-4)(x+6)}}{(x+1)^2 - 21} = 1.$$

$$43. 10\sqrt{(x+3)(x-1)} + (x+1)^2 = 15.$$

$$44. x(x-4)\sqrt{4x-x^2} + (2-x)^2 < 2.$$

$$45. 13\sqrt{(x+3)(x+5)} + (x-1)(9+x) = -10.$$

$$46. \frac{(x+4)^2}{12 - 2\sqrt{(x+1)(x+7)}} = 1.$$

$$47. x^2 + 2x + 5 < 4\sqrt{2x(2+x)} + 3.$$

$$48. 4x^2 - 12x - 5\sqrt{4x^2 - 12x + 11} + 15 = 0.$$

$$49. (x-3)^2 + 6\sqrt{(x-1)(x-5)} = 11.$$

$$50. 11\sqrt{(x+5)(x+7)} = 13 - (6+x)^2.$$

$$51. (x+1)^2 = 15 - 5\sqrt{(x-2)(x+4)}.$$

$$52. (x+3)^2 = 17 - 8\sqrt{x(x+6)} + 1.$$

$$53. 8\sqrt{(x+5)(x+1)} = 12 - (x+2)(x+4).$$

$$54. \frac{(x-1)(2x+9)}{2 - 5\sqrt{(2x+1)(x+3)}} = 1.$$

$$55. (x-1)(8x+17) + 2\sqrt{(x+1)(8x+1)} + 15 = 0.$$

$$56. 9\sqrt{x(2x+1)} = 10x(2x+1) - 1.$$

$$57. 4\sqrt{x(9x+6)} = 6 - (3x+1)^2.$$

$$58. 4\sqrt{(2x-1)(x+4)} + 10x^2 + 35x = 29.$$

$$59. 5(x+2)^2 = 3(1 - \sqrt{x^2 + 4x + 5}).$$

$$60. 3\sqrt{(x-4)(x+5)} + 5(x-1)(x+2) = 98.$$

$$61. 8\sqrt{x(x+1)} + x^2 + x = 9.$$

$$62. \frac{149 - 12\sqrt{(x-1)(x+2)}}{5(2x+1)^2} = 1.$$

$$63. 17\sqrt{(x-2)(x+1)} + (2x-1)^2 = 59.$$

$$64. \frac{(x+4)(x-2)+2}{\sqrt{(x+5)(x-3)}} > 6.$$

$$65. \frac{\sqrt{(x-2)(x+6)}+6}{(x-1)(x+5)+3} = \frac{6}{19}.$$

$$66. \frac{2\sqrt{(2x-1)(x+3)}}{(2x+1)(x+1)+2x+5} = \frac{4}{13}.$$

$$67. \frac{(x+3)(x+2)-20}{7\sqrt{(x-2)(x+6)}+3x} = \frac{1}{3}.$$

$$68. \frac{2|x^2+x-1|+3}{1+\sqrt{(x-1)(x+2)}} = \frac{13}{3}.$$

$$69. \frac{|x^2+6x-5|+x-10}{\sqrt{(x-1)(x+7)}+3x} = \frac{1}{3}.$$

$$70. \frac{|3x^2-x-2|+x-7}{\sqrt{(x-2)(x+1)}+x+1} = 3.$$

$$71. \frac{|2x^2+2x-15|}{2x^2+3\sqrt{(x-3)(x+5)}-1} = \frac{1}{2}.$$

$$72. \frac{|3x^2+4x-12|}{8x^2+7\sqrt{(x-2)(x+6)}-3} = \frac{1}{4}.$$

$$73. \frac{|3x^2+x-2|}{6x^2+5\sqrt{(x-1)(x+2)}-2} = \frac{1}{3}.$$

$$74. \frac{|4x^2+7x-44|}{15x^2+9\sqrt{(x-4)(x+11)}-5} = \frac{1}{4}.$$

$$75. \frac{|3x^2+5x-3|}{4x^2-3+7\sqrt{(2x-1)(x+3)}} = \frac{1}{4}.$$

Tiếp theo ngay sau đây, chúng ta sẽ tiếp cận với các bài toán chứa căn thức giải được bằng ẩn phụ quy về bậc hai, trong đó ẩn phụ phía trong căn có dạng biểu thức bậc cao hoặc phức tạp hơn.

Bài toán 64. Giải phương trình $\sqrt{2x^3 - 3x^2 + 2} + 2x^3 - 3x^2 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^3 - 3x^2 + 2 \geq 0$.

Đặt $\sqrt{2x^3 - 3x^2 + 2} = t, t \geq 0$, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} t + t^2 - 2 = 0 &\Leftrightarrow (t-1)(t+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-2 \end{cases} \Rightarrow t=1 \Leftrightarrow \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 2} = 1 \\ &\Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(2x-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{2}; 1\right\} \end{aligned}$$

Thử lại trực tiếp ta thu được hai nghiệm như trên.

Bài toán 65. Giải phương trình $9x^3 - 12x^2 + 2 + \sqrt{3x^3 - 4x^2 + 2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $3x^3 - 4x^2 + 2 \geq 0$.

Đặt $\sqrt{3x^3 - 4x^2 + 2} = t, t \geq 0$ thì phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3(t^2 - 2) + 2 + t = 0 &\Leftrightarrow 3t^2 + t - 4 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(3t+4) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{-\frac{4}{3}; 1\right\} \\ &\Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow 3x^3 - 4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{1+\sqrt{13}}{6}; \frac{1-\sqrt{13}}{6}\right\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được ba nghiệm kể trên.

Bài toán 66. Giải phương trình $\sqrt{x(x^2 + 3)} + (x-1)(x^2 + x + 4) - 2 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x^3 + 3x} + x^3 + 3x - 6 = 0$. Đặt $\sqrt{x^3 + 3x} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} t + t^2 - 6 = 0 &\Leftrightarrow (t-2)(t+3) = 0 \Leftrightarrow t \in \{-3; 1\} \Rightarrow t=2 \Leftrightarrow x^3 + 3x = 4 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (2x+1)^2 = -15 \end{cases} \Rightarrow x=1 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện thu được nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 67. Giải phương trình $18\sqrt{x^3 - 4x + 4} + (x-3)(x^2 + 3x + 5) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 - 4x + 4 \geq 0$.

Phương trình tương đương $18\sqrt{x^3 - 4x + 4} + x^3 - 4x + 4 - 19 = 0$. Đặt $\sqrt{x^3 - 4x + 4} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} 18t + t^2 - 19 = 0 &\Leftrightarrow (t-1)(t+19) = 0 \Leftrightarrow t \in \{-19; 1\} \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^3 - 4x + 4} = 1 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được ba nghiệm kể trên.

Bài toán 68. Giải phương trình $16\sqrt{x^3 + 3x^2 - 3} + (x-2)(x^2 + 5x + 10) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 + 3x^2 - 3 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương $16\sqrt{x^3 + 3x^2 - 3} + x^3 + 3x^2 - 3 - 17 = 0$. Đặt $\sqrt{x^3 + 3x^2 - 3} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} 16t + t^2 - 17 &= 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+17) = 0 \Leftrightarrow t \in \{-17; 1\} \Rightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 3x^2 - 3} = 1 \\ &\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 1\} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được hai nghiệm kể trên.

Bài toán 69. Giải phương trình $\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 2} + (x-1)(x^2 + 4x + 7) = 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 2} + x^3 + 3x^2 + 3x - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 2} + x^3 + 3x^2 + 3x + 2 - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^3 + 1} + (x+1)^3 + 1 - 12 = 0 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{(x+1)^3 + 1} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} t^2 + t - 12 &= 0 \Leftrightarrow (t-3)(t+4) = 0 \Leftrightarrow t \in \{-4; 3\} \Leftrightarrow t = 3 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^3 + 1} = 3 \Leftrightarrow (x+1)^3 = 26 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{26} - 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \sqrt[3]{26} - 1$.

Bài toán 70. Giải phương trình $\sqrt{x^3 - 3x^2 + 3x - 3} + (x-3)(x^2 + 3) = 24 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 - 3x^2 + 3x - 3 \geq 0$

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x^3 - 3x^2 + 3x - 3} + x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = 30$.

Đặt $\sqrt{x^3 - 3x^2 + 3x - 3} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} t^2 + t = 30 &\Leftrightarrow (t-5)(t+6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -6 \\ t = 5 \end{cases} \Rightarrow t = 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^3 - 3x^2 + 3x - 3} = 5 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = 25 \Leftrightarrow (x-1)^3 = 27 \Leftrightarrow x = 4 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = 4$.

Bài toán 71. Giải phương trình $\sqrt{3x^3 + 3x^2 + 3x + 2} + 6x^3 + 6x^2 + 6x + 1 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $3x^3 + 3x^2 + 3x + 2 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{3x^3 + 3x^2 + 3x + 2} + 2(3x^3 + 3x^2 + 3x + 2) = 3$.

Đặt $\sqrt{3x^3 + 3x^2 + 3x + 2} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} t + 2t^2 = 3 &\Leftrightarrow (t-1)(2t+3) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{-\frac{3}{2}; 1\right\} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3x^3 + 3x^2 + 3x + 2} = 1 \\ &\Leftrightarrow 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 = -2x^3 \Leftrightarrow x+1 = -x\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$.

Bài toán 72. Giải phương trình $3\sqrt{11x^3+6x^2+6x+6}+x(11x^2+6x+6)=4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $11x^3+6x^2+6x+6 \geq 0$. Đặt $\sqrt{11x^3+6x^2+6x+6}=t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} 3\sqrt{11x^3+6x^2+6x+4}+11x^3+6x^2+6x+6 &= 10 \Leftrightarrow 3t+t^2=10 \\ \Leftrightarrow (t-2)(t+5) &= 0 \Leftrightarrow t \in \{-5; 2\} \Leftrightarrow t=2 \Leftrightarrow \sqrt{11x^3+6x^2+6x+6}=2 \\ \Leftrightarrow 11x^3+6x^2+6x+2 &= 0 \Leftrightarrow \frac{11}{2}x^3+3x^2+3x+1=0 \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 &= -\frac{9}{2}x^3 \Leftrightarrow x+1 = -\sqrt[3]{\frac{9}{2}}x \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{9}} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = -\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{9}}$.

Bài toán 73. Giải phương trình $3x^3+36x+2\sqrt{x^3-6x^2+12x-3}=18x^2+14 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3-6x^2+12x-3 \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x^3-6x^2+12x-3}=t, t \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^3-6x^2+12x-3}+3(x^3-6x^2+12x-3) &= 5 \Leftrightarrow 2t+3t^2=5 \\ \Leftrightarrow (t-1)(3t+5) &= 0 \Leftrightarrow t \in \left\{-\frac{5}{3}; 1\right\} \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^3-6x^2+12x-3}=1 \\ \Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-4 &= 0 \Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-8=-4 \Leftrightarrow (x-2)^3=-4 \Leftrightarrow x=2-\sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=2-\sqrt[3]{4}$.

Bài toán 74. Giải phương trình $7\sqrt{x(x+1)(x+2)+x+4}+(x+1)^3=5 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $(x+1)^3+3 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$7\sqrt{x(x^2+3x+2)+x+4}+(x+1)^3=5 \Leftrightarrow 7\sqrt{(x+1)^3+3}+(x+1)^3+3=8.$$

Đặt $\sqrt{(x+1)^3+3}=t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} 7t+t^2 &= 8 \Leftrightarrow (t-1)(t+8)=0 \Leftrightarrow t \in \{-8; 1\} \Leftrightarrow t=1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^3+3} &= 1 \Leftrightarrow (x+1)^3=-2 \Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{2}-1 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 75. Giải phương trình $\sqrt{x^3+2x^2-2}+|x^3+2x^2-1|=3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3+2x^2-2 \geq 0$.

Ta có $x^3 + 2x^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow x^3 + 2x^2 - 1 > 0 \Rightarrow |x^3 + 2x^2 - 1| = x^3 + 2x^2 - 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x^3 + 2x^2 - 2} + x^3 + 2x^2 - 2 = 2$.

Đặt $\sqrt{x^3 + 2x^2 - 2} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t^2 + t = 2 \\ t \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)(t+2) = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in \{-2; 1\} \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 2x^2 - 2} = 1 \\ &\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 76. Giải phương trình $4\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x - 1} + |x(x^2 + 3x + 3) + 1| = 7 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 + 3x^2 + 3x - 1 \geq 0$.

Khi đó $x(x^2 + 3x + 3) + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x - 1 + 2 > 0 \Rightarrow |x(x^2 + 3x + 3) + 1| = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

Đặt $\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x - 1} = t, t \geq 0$, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x - 1} + x^3 + 3x^2 + 3x - 1 &= 5 \Leftrightarrow 4t + t^2 = 5 \Leftrightarrow (t-1)(t+5) = 0 \\ &\Leftrightarrow t \in \{-5; 1\} \Rightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x - 1} = 1 \Leftrightarrow (x+1)^3 - 2 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3} - 1 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = \sqrt[3]{3} - 1$.

Bài toán 77. Giải phương trình $2\sqrt{(x-2)(x^2 - x + 1)} + 5|x^3 - 2x^2 + 3x - 1| - 5x^2 = 12 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 \geq 0$.

Khi đó $x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 2 + x^2 + 1 > 0 \Rightarrow |x^3 - 2x^2 + 3x - 1| = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.

Đặt $\sqrt{x^3 - 3x^2 + 3x - 2} = t, t \geq 0$, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^3 - 3x^2 + 3x - 2} + 5(x^3 - 3x^2 + 3x - 2) &= 7 \Leftrightarrow 2t + 5t^2 = 7 \\ &\Leftrightarrow (t-1)(5t+7) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{-\frac{7}{5}; 1\right\} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^3 - 3x^2 + 3x - 2} = 1 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^3 = 2 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = 1 + \sqrt[3]{2}$.

Bài toán 78. Giải phương trình $5\sqrt{x^4 + 3x^2 - 3} + x^4 + 3x^2 = 9 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 + 3x^2 - 3 \geq 0$. Đặt $\sqrt{x^4 + 3x^2 - 3} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} 5\sqrt{x^4 + 3x^2 - 3} + x^4 + 3x^2 - 3 &= 6 \Leftrightarrow 5t + t^2 = 6 \Leftrightarrow (t-1)(5t+6) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{-\frac{6}{5}; 1\right\} \Leftrightarrow t = 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^4 + 3x^2 - 3} = 1 \Leftrightarrow x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 79. Giải phương trình $6\sqrt{x^4 + x^3 + x + 2} + x^4 + x^3 + x = 5 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 + x^3 + x + 2 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với $6\sqrt{x^4 + x^3 + x + 2} + x^4 + x^3 + x + 2 = 7$.

Đặt $\sqrt{x^4 + x^3 + x + 2} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} 6t + t^2 = 7 \\ t \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)(t+7) = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in \{-7; 1\} \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^4 + x^3 + x + 2} = 1 \\ &\Leftrightarrow x^4 + x^3 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Bài toán 80. Giải phương trình $2\sqrt{x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 10} + x^4 + x^3 - 4x^2 + x = 5 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 10 \geq 0$. Đặt $\sqrt{x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 10} = t, t \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 10} + x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 10 &= 15 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ 2t + t^2 = 15 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-3)(t+5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \{-5; 3\} \end{cases} \Leftrightarrow t = 3 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 10} = 3 \Leftrightarrow x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0 \end{aligned}$$

Nhận xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình trên. Xét $x \neq 0$ thu được

$$x^2 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + x + \frac{1}{x} - 2 = 0.$$

Với $x + \frac{1}{x} = u$ ta có

$$\begin{aligned} u^2 + u - 6 &= 0 \Leftrightarrow (u-2)(u+3) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 2x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + 1 = 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-3+\sqrt{5}}{2}; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được ba nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Mặc dù tài liệu trọng tâm sử dụng một ẩn phụ căn thức đưa về phương trình bậc hai, tuy nhiên mức độ phức tạp cũng như hình thức của bài toán sẽ có độ khó tăng dần, khi đa thức trong căn thức có dạng bậc cao hay phân thức hữu tỷ. Để giải quyết một cách trọn vẹn những bài toán này, các bạn độc giả cần nắm vững các kiến thức, kỹ năng giải phương trình đại số bậc cao, phương trình phân thức hữu tỷ, chứa ẩn ở mẫu đã được đề cập tại các tiêu mục trước, trực thuộc Sư đoàn 5, Quân đoàn bộ binh.

Bài toán 81. Giải phương trình $3\sqrt{x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x + 1} + x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x = 9 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x + 1 \geq 0$. Đặt $\sqrt{x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x + 1} = y, y \geq 0$ thì phương trình trở thành

$$\begin{aligned} 3\sqrt{x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x + 1} + x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x + 1 &= 10 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 3y = 10 \\ y \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)(y+5) = 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \{-5; 2\} \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2 \\ &\Leftrightarrow x^4 + x^3 - 4x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 3x^2 - x^3 - 2x^2 + 3x + x^2 + 2x - 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x^2(x^2 + 2x - 3) - x(x^2 + 2x - 3) + x^2 + 2x - 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow (2x^2 - 2x + 2)(x - 1)(x + 3) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; x = -3 \\ x^2 + (x - 1)^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-3; 1\}
\end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 82. Giải phương trình $4\sqrt{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 10} + x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x = 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 10 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $4\sqrt{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 10} + x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 10 = 12$.

Đặt $\sqrt{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 10} = y, y \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} y \geq 0 \\ 4y + y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y - 2)(y + 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \in \{-6; 2\} \end{cases} \Leftrightarrow y = 2 \\
&\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 10 = 4 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 6 = 0 \\
&x^4 + (7 - 4x)x^2 - 5x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow 4x^4 + 4(7 - 4x)x^2 = 20x^2 - 4x - 24 = 0 \\
&\Leftrightarrow 4x^4 + 4(7 - 4x)x^2 + (7 - 4x)^2 = 36x^2 - 60x + 25 \Leftrightarrow (2x^2 - 4x + 7)^2 = (6x - 5)^2 \\
&\Leftrightarrow (2x^2 - 10x + 12)(2x^2 + 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow 2(x - 2)(x - 3)(2x^2 + 2x + 2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; x = 3 \\ 2x^2 + 2x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; x = 3 \\ x^2 + (x + 1)^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{2; 3\}
\end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 83. Giải phương trình $6\sqrt{x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 3} + x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x = 4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 3 \geq 0$. Đặt $\sqrt{x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 3} = y, y \geq 0$ thì phương trình trở thành

$$\begin{aligned}
&6\sqrt{x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 3} + x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 3 = 7 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 6y + y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y - 1)(y + 7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \in \{-7; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 3} = 1 \Leftrightarrow x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^4 - (3x - 3)x^2 = -(2x^2 - 4x + 2) \Leftrightarrow 4x^4 - 4(3x - 3)x^2 = -4(2x^2 - 4x + 2) \\
&\Leftrightarrow 4x^4 - 4.3(x - 1)x^2 + 9(x - 1)^2 = -8(2x^2 - 4x + 2) + 9(x - 1)^2 \\
&\Leftrightarrow (2x^2 - 3x + 3)^2 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow (2x^2 - 4x + 4)(2x^2 - 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 = -1 \\ (x - 1)^2 + x^2 = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Dễ thấy tuyến phương trình trên vô nghiệm, do đó phương trình đề bài vô nghiệm.

Bài toán 84. Giải phương trình $x^4 - 21x^2 + 10x + 7\sqrt{x^4 - 21x^2 + 10x + 7} = 11 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 - 21x^2 + 10x + 7 \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x^4 - 21x^2 + 10x + 7} = y, y \geq 0$ thì phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} & x^4 - 21x^2 + 10x + 7 + 7\sqrt{x^4 - 21x^2 + 10x + 7} = 18 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y^2 + 7y = 18 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)(y+9) = 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \{-9; 2\} \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x^4 - 21x^2 + 10x + 7} = 2 \Leftrightarrow x^4 - 21x^2 + 10x + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow & 25x^2 - 10x + 1 = x^4 + 4x^2 + 4 \Leftrightarrow (5x-1)^2 = (x^2+2)^2 \\ \Leftrightarrow & (x^2+5x+1)(x^2-5x+3) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-5+\sqrt{21}}{2}; \frac{-5-\sqrt{21}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2}; \frac{5-\sqrt{13}}{2} \right\} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được ba nghiệm kể trên.

Bài toán 85. Giải phương trình $x^4 + 2x^2 + 8x + 6\sqrt{x^4 + 2x^2 + 8x + 5} = 22 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 + 2x^2 + 8x + 5 \geq 0$. Đặt $\sqrt{x^4 + 2x^2 + 8x + 5} = y, y \geq 0$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & x^4 + 2x^2 + 8x + 5 + 6\sqrt{x^4 + 2x^2 + 8x + 5} = 27 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + 6y = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y-3)(y+9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \in \{-9; 3\} \end{cases} \Leftrightarrow y = 3 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x^4 + 2x^2 + 8x + 5} = 3 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 8x - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow & x^4 + 4x^2 + 4 = 2x^2 - 8x + 8 \Leftrightarrow (x^2+2)^2 = 2(x-2)^2 \\ \Leftrightarrow & (x^2 - \sqrt{2}x + 2 + 2\sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x + 2 - 2\sqrt{2}) = 0 \end{aligned}$$

Xét các trường hợp xảy ra

- $x^2 - \sqrt{2}x + 2 + 2\sqrt{2} = 0, \Delta < 0$, phương trình này vô nghiệm.
- $x^2 - \sqrt{2}x + 2 - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{8\sqrt{2}-2}}{2}; x = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{8\sqrt{2}-2}}{2}$.

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm.

Bài toán 86. Giải phương trình $x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 14x + 3\sqrt{x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 14x + 2} = 16 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 14x + 2 \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 14x + 2} = y, y \geq 0$, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 14x + 2 + 3\sqrt{x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 14x + 2} = 18 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + 3y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y-3)(y+6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \in \{-6; 3\} \end{cases} \Leftrightarrow y = 3 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 14x + 2} = 3 \Leftrightarrow x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 14x - 7 = 0 \\ \Leftrightarrow & x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 7x^2 + 14x + 7 \Leftrightarrow (x^2+2x)^2 = 7(x+1)^2 \\ \Leftrightarrow & (x^2 + 2x + \sqrt{7}x + \sqrt{7})(x^2 + 2x - \sqrt{7}x - \sqrt{7}) = 0 \end{aligned}$$

Xét các trường hợp

$$\begin{aligned} \circ \quad x^2 + 2x + \sqrt{7}x + \sqrt{7} = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-(2+\sqrt{7})+\sqrt{11}}{2}; x = \frac{-(2+\sqrt{7})-\sqrt{11}}{2}. \\ \circ \quad x^2 + 2x - \sqrt{7}x - \sqrt{7} = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{7}-2+\sqrt{11}}{2}; x = \frac{\sqrt{7}-2-\sqrt{11}}{2}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm.

Bài toán 87. Giải phương trình $7\sqrt{x^4 - 4x + 3} + x^4 - 4x = 15 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 - 4x + 3 \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x^4 - 4x + 3} = y, y \geq 0$ thì phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 7\sqrt{x^4 - 4x + 3} + x^4 - 4x + 3 = 18 &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 7y + y^2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y-2)(y+9) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \in \{-9; 2\} \end{cases} \Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^4 - 4x + 3} = 2 \Leftrightarrow x^4 = 4x + 1 \\ &\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2 + 4x + 2 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = 2(x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} = 0 \\ x^2 + 1 + \sqrt{2}x + \sqrt{2} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad x^2 - \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}; x = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}. \\ \bullet \quad x^2 + 1 + \sqrt{2}x + \sqrt{2} = 0, \Delta < 0 &\text{ nên trường hợp này vô nghiệm.} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}; x = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}$.

Bài toán 88. Giải phương trình $x(x^3 + x + 4) + 5\sqrt{x^4 + x^2 + 4x + 6} = 18 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 + x^2 + 4x + 6 \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x^4 + x^2 + 4x + 6} = y, y \geq 0$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 4x + 6 + 5\sqrt{x^4 + x^2 + 4x + 6} &= 24 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + 5y = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y-3)(y+8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \in \{-8; 3\} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow y = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^4 + x^2 + 4x + 6} = 3 \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 4x = 3 \\ &\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = (x-2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 3 = 0 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{➤ } x^2 - x + 3 = 0, \Delta < 0 \text{ nên phương trình vô nghiệm.}$$

$$\text{➤ } x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 89. Giải phương trình $17\sqrt{x^4 - 3x^2 - 10x - 3} + 6x^4 - 18x^2 - 60x = 41 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 - 3x^2 - 10x - 3 \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x^4 - 3x^2 - 10x - 3} = y, y \geq 0$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} 17\sqrt{x^4 - 3x^2 - 10x - 3} + 6(x^4 - 3x^2 - 10x - 3) &= 23 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 6y^2 + 17y = 23 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y-1)(6y+23) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \in \left\{-\frac{23}{6}; 1\right\} \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^4 - 3x^2 - 10x - 3} = 1 \\ \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 10x &= 4 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 5x^2 + 10x + 5 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = 5(x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = \sqrt{5}(x+1) \\ x^2 + 1 = -\sqrt{5}(x+1) \end{cases} \\ \blacksquare \quad x^2 + 1 &= \sqrt{5}(x+1) \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{5}x - \sqrt{5} + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{1+4\sqrt{5}}}{2}; x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{1+4\sqrt{5}}}{2}. \\ \blacksquare \quad x^2 + \sqrt{5}x + \sqrt{5} + 1 &= 0, \Delta < 0 \text{ nên trường hợp này vô nghiệm.} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 90. Giải phương trình $x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 5\sqrt{x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 1} = 13 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 1 \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 1} = y, y \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 1 + 5\sqrt{x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 1} &= 14 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + 5y = 14 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y-2)(y+7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \in \{-7; 2\} \end{cases} \Leftrightarrow y = 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 1} &= 2 \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x = 3 \\ \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + x^2 &= 12x^2 + 12x + 3 \Leftrightarrow (x^2 + x)^2 = 3(2x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x = \sqrt{3}(2x+1) \\ x^2 + x = -\sqrt{3}(2x+1) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp

$$\begin{aligned} \text{➤ } x^2 + (1-2\sqrt{3})x - \sqrt{3} &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}-1+\sqrt{13}}{2}; x = \frac{2\sqrt{3}-1-\sqrt{13}}{2}. \\ \text{➤ } x^2 + (1-2\sqrt{3})x - \sqrt{3} &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}-1+\sqrt{13}}{2}; x = \frac{2\sqrt{3}-1-\sqrt{13}}{2}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có bốn nghiệm kể trên.

Bài toán 91. Giải phương trình $2x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 9\sqrt{2x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 2} = 8 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 2 \geq 0$. Đặt $\sqrt{2x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 2} = y, y \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 2 + 9\sqrt{2x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 2} &= 10 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 9y = 10 \\ y \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)(y+10) = 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \{-10; 1\} \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sqrt{2x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 2} = 1 \Leftrightarrow 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2x^4 + 4x^2(x+1) + 2(x^2 + 2x + 1) = 9x^2 + 6x + 1 \\
&\Leftrightarrow 2(x^2 + x + 1)^2 = (3x + 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x^2 + (\sqrt{2} + 3)x + \sqrt{2} + 1 = 0 \\ \sqrt{2}x^2 + (\sqrt{2} - 3)x + \sqrt{2} - 1 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Xét các trường hợp

$$\begin{aligned}
&\circ \sqrt{2}x^2 + (\sqrt{2} + 3)x + \sqrt{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} - 1; x = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \\
&\circ \sqrt{2}x^2 + (\sqrt{2} - 3)x + \sqrt{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 1; x = \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

$$\text{Kết luận nghiệm } S = \left\{ \sqrt{2} - 1; -\sqrt{2} - 1; \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Bài toán 92. Giải phương trình $3x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x + 4\sqrt{3x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x + 5} = 16 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $3x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x + 5 \geq 0$.

Đặt $\sqrt{3x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x + 5} = y, y \geq 0$, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&3x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x + 5 + 4\sqrt{3x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x + 5} = 21 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 4y = 21 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-3)(y+7) = 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \{-7; 3\} \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 3 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{3x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x + 5} = 3 \Leftrightarrow 3x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 4x - 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2(3x^2 + 2x + 2) - 2(3x^2 + 2x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2)(3x^2 + 2x + 2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ 2x^2 + (x+1)^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 93. Giải phương trình $2x^4 + 12x^3 + 18x^2 + 32x + 5\sqrt{x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 16x + 4} + 1 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 16x + 4 \geq 0$. Đặt $\sqrt{x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 16x + 4} = y, y \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
&2(x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 16x + 4) + 5\sqrt{x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 16x + 4} = 7 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 5y = 7 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-1)(2y+7) = 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \left\{-\frac{7}{2}; 1\right\} \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 16x + 4} = 1 \Leftrightarrow x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 16x + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2(x^2 + x + 3) + 5x(x^2 + x + 3) + (x^2 + x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x + 3)(x^2 + 5x + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (x+1)^2 = -5 \\ x^2 + 5x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}; \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} \right\}
\end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm kể trên.

Bài toán 94. Giải phương trình $2x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 2x + 14 + 3\sqrt{2x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 2x + 18} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 2x + 18 \geq 0$. Đặt $\sqrt{2x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 2x + 18} = y, y \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} 2x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 2x + 18 + 3\sqrt{2x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 2x + 18} &= 4 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + 3y = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y-1)(y+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \in \{-4; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 2x + 18} = 1 &\Leftrightarrow 2x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 2x + 17 = 0 \\ \Leftrightarrow 3[x^4 + 2x^2(1-3x) + 9x^2 - 6x + 1] &= 5[x^4 + 2x^2(2-x) + x^2 - 4x + 4] \\ \Leftrightarrow 3(x^2 - 3x + 1)^2 &= 5(x^2 - x + 2)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3} - \sqrt{5})x^2 + (\sqrt{5} - 3\sqrt{3})x + \sqrt{3} - 2\sqrt{5} = 0 & (1) \\ (\sqrt{3} + \sqrt{5})x^2 - (\sqrt{5} + 3\sqrt{3})x + \sqrt{3} + 2\sqrt{5} = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp

➤ Giải phương trình (1) thu được $x = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{6\sqrt{15} - 20}}{2(\sqrt{3} - \sqrt{5})}; x = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{5} - \sqrt{6\sqrt{15} - 20}}{2(\sqrt{3} - \sqrt{5})}$.

➤ Phương trình (2) vô nghiệm do $\Delta = -20 - 6\sqrt{15} < 0$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 95. Giải phương trình $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 4\sqrt{x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 2} = 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 2 \geq 0$. Đặt $\sqrt{x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 2} = y, y \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 2 + 4\sqrt{x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 2} &= 5 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + 4y = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y-1)(y+5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \in \{-5; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 2} = 1 &\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0 \end{aligned}$$

- Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.
- Xét $x \neq 0$; phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 + 2x - 6 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0 \quad (1).$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow (t+1)^2 = 9 \Leftrightarrow |t+1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} t+1 = 3 \\ t+1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -4 \end{cases}$

Với $t = 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Với $t = -4 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \sqrt{3} \\ x = -2 - \sqrt{3} \end{cases}$

Phương trình ban đầu có tập nghiệm $S = \{-2 - \sqrt{3}; -2 + \sqrt{3}; 1\}$.

Bài toán 96. Giải phương trình $\frac{10x^4 - 27x^3 - 110x^2 - 27x + 9}{\sqrt{10x^4 - 27x^3 - 110x^2 - 27x + 11}} = -1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $10x^4 - 27x^3 - 110x^2 - 27x + 11 > 0$. Đặt $\sqrt{10x^4 - 27x^3 - 110x^2 - 27x + 11} = y, y > 0$ ta được

$$10x^4 - 27x^3 - 110x^2 - 27x + 9 + \sqrt{10x^4 - 27x^3 - 110x^2 - 27x + 11} = 0$$

$$\Leftrightarrow 10x^4 - 27x^3 - 110x^2 - 27x + 11 + \sqrt{10x^4 - 27x^3 - 110x^2 - 27x + 11} = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y^2 + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ (y-1)(y+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y \in \{-2; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow y = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{10x^4 - 27x^3 - 110x^2 - 27x + 11} = 1 \Leftrightarrow 10x^4 - 27x^3 - 110x^2 - 27x + 10 = 0$$

Biến đổi về dạng

$$10x^4 + 20x^2 + 10 - 27x^3 - 27x - 130x^2 = 0 \Leftrightarrow 10(x^2 - 1)^2 - 27x(x^2 - 1) - 130x^2 = 0.$$

Đặt $x^2 - 1 = u; x^2 = v$ thu được

$$10u^2 - 27uv - 130v^2 = 0 \Leftrightarrow (2u + 5v)(5u + 26v) = 0 \Leftrightarrow (2x^2 + 5x + 2)(5x^2 - 26x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(x+2)(5x-1)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-2; -\frac{1}{2}; \frac{1}{5}; 5\right\}$$

Kết luận phương trình ban đầu có tập nghiệm $S = \left\{-2; -\frac{1}{2}; \frac{1}{5}; 5\right\}$.

Bài toán 97. Giải phương trình $\frac{2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x - 5}{\sqrt{2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 3}} = -7 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 3 > 0$.

Đặt $\sqrt{2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 3} = y, y > 0$ ta thu được

$$2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 3 + 7\sqrt{2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 3} = 8$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y^2 + 7y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ (y-1)(y+8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y \in \{-8; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow y = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 3} = 1 \Leftrightarrow 2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + 1)^2 - 13(x^2 + 1)x + 20x^2 = 0 \Leftrightarrow 16(x^2 + 1)^2 - 104(x^2 + 1)x + 169x^2 = 9x^2$$

$$\Leftrightarrow [4(x^2 + 1) - 13x]^2 = (3x)^2 \Leftrightarrow (4x^2 - 10x + 4)(4x^2 - 16x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 = 0 \\ (2x-1)(x-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{3}; x = 2 + \sqrt{3} \\ x = \frac{1}{2}; x = 2 \end{cases}$$

Kết luận phương trình đã cho có bốn nghiệm $x = 2 - \sqrt{3}; x = 2 + \sqrt{3}; x = \frac{1}{2}; x = 2$.

Bài toán 98. Giải phương trình $\sqrt{3x^5 - 10x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 10x + 4} + 3x^5 - 10x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 10x + 2 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $3x^5 - 10x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 10x + 4 \geq 0$. Đặt $\sqrt{3x^5 - 10x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 10x + 4} = y, y \geq 0$ thì ta được

$$\sqrt{3x^5 - 10x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 10x + 4} + 3x^5 - 10x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 10x + 4 = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y-1)(y+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \in \{-2; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow y = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^5 - 10x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 10x + 4} = 1 \Leftrightarrow 3x^5 - 10x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

Biến đổi phương trình về

$$3x^4(x+1) - 13x^3(x+1) + 16x^2(x+1) - 13x(x+1) + 3(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(3x^4 - 13x^3 + 16x^2 - 13x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 3x^4 - 13x^3 + 16x^2 - 13x + 3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

✓ Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1).

✓ Xét trường hợp $x \neq 0$, phương trình (1) trở thành

$$3x^2 - 13x + 16 - \frac{13}{x} + \frac{3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 16 = 0.$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, quy về

$$3(t^2 - 2) - 13t + 16 = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 13t + 10 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(3t-10) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(3x^2 - 10x + 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{3}; 3\right\}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm $S = \left\{-1; \frac{1}{3}; 3\right\}$.

Bài toán 99. Giải phương trình $\frac{5\sqrt{x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x + 5}}{x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x - 9} = -1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x + 5 \geq 0 \\ x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x - 9 \neq 0 \end{cases}$

Đặt $\sqrt{x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x + 5} = y, y \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$5\sqrt{x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x + 5} + x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x + 5 = 14$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + 5y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y-2)(y+7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \in \{-7; 2\} \end{cases} \Leftrightarrow y = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x + 5} = 2 \Leftrightarrow x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4(x+1) + x^3(x+1) - 4x^2(x+1) + x(x+1) + x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

• Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1).

• Xét trường hợp $x \neq 0$, phương trình (1) trở thành

$$x^2 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + x + \frac{1}{x} - 6 = 0.$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t$ thu được $t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+3) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2+3x+1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-3+\sqrt{5}}{2}; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm.

Bài toán 100. Giải phương trình $\frac{x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 5}{6 - \sqrt{x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 5}} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 5 \geq 0 \\ x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 5 \neq 36 \end{cases}$

Đặt $\sqrt{x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 5} = y, y \geq 0, y \neq 6$ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 5} + x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = 6 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + y = 6 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)(y+3) = 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \{-3; 2\} \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 5} = 2 \Leftrightarrow x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow x^4(x+1) - 5x^3(x+1) + 8x^2(x+1) - 5x(x+1) + x + 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow (x+1)(x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

- Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1).
- Xét trường hợp $x \neq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$.

Đặt $x + \frac{1}{x} = y$ thu được phương trình

$$\begin{aligned} & y^2 - 2 - 5y + 8 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow (y-3)(y-2) = 0 \\ & \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}; x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Vậy phương trình ban đầu có bốn nghiệm.

Bài toán 101. Giải phương trình $\frac{3x^4 - 13x^3 - 6x^2 + 13x}{19 - 11\sqrt{3x^4 - 13x^3 - 6x^2 + 13x + 7}} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 3x^4 - 13x^3 - 6x^2 + 13x + 7 \geq 0 \\ 11\sqrt{3x^4 - 13x^3 - 6x^2 + 13x + 7} \neq 19 \end{cases}$

Đặt $\sqrt{3x^4 - 13x^3 - 6x^2 + 13x + 7} = y, y \geq 0$, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 3x^4 - 13x^3 - 6x^2 + 13x + 7 + 11\sqrt{3x^4 - 13x^3 - 6x^2 + 13x + 7} = 26 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 11y = 26 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)(y+13) = 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \{-13; 2\} \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{3x^4 - 13x^3 - 6x^2 + 13x + 7} = 2 \Leftrightarrow 3x^4 - 13x^3 - 6x^2 + 13x + 3 = 0 \end{aligned}$$

Xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình đã cho. Xét $x \neq 0$; chia hai vế cho $x^2 \neq 0$ ta có

$$3x^2 - 13x - 6 + \frac{13}{x} + \frac{3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 13\left(x - \frac{1}{x}\right) - 6 = 0.$$

$$\text{Đặt } x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2. \text{ Thu được } 3t^2 - 13t = 0 \Leftrightarrow t = 0; t = \frac{13}{3}.$$

$$\text{Nếu } t = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1; x = 1. \text{ Nếu } t = \frac{13}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 13x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{13 + \sqrt{205}}{6}; x = \frac{13 - \sqrt{205}}{6}.$$

Kết luận phương trình đã cho có bốn nghiệm như trên.

Bài toán 102. Giải phương trình $\frac{5x^4 - 6x^3 - 10x^2 + 6x}{1 - 6\sqrt{5x^4 - 6x^3 - 10x^2 + 6x + 6}} = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 5x^4 - 6x^3 - 10x^2 + 6x + 6 \geq 0 \\ 36(5x^4 - 6x^3 - 10x^2 + 6x + 6) \neq 1 \end{cases}$$

Đặt $\sqrt{5x^4 - 6x^3 - 10x^2 + 6x + 6} = y, y \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} 6\sqrt{5x^4 - 6x^3 - 10x^2 + 6x + 6} + 5x^4 - 6x^3 - 10x^2 + 6x + 6 &= 7 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + 6y = 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y-1)(y+7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \in \{-7; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{5x^4 - 6x^3 - 10x^2 + 6x + 6} &= 1 \Leftrightarrow 5x^4 - 6x^3 - 10x^2 + 6x + 5 = 0 \end{aligned}$$

- Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.
- Xét $x \neq 0$; biến đổi $5x^2 - 6x - 10 + \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6\left(x - \frac{1}{x}\right) - 10 = 0.$

$$\text{Đặt } x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2. \text{ Thu được } 5t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 0; t = \frac{6}{5}.$$

$$\text{Với } t = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1; x = 1. \text{ Với } t = \frac{6}{5} \Leftrightarrow 5x^2 - 6x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 + \sqrt{34}}{5}; x = \frac{3 - \sqrt{34}}{5}.$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm $x = 1; x = -1; x = \frac{3 + \sqrt{34}}{5}; x = \frac{3 - \sqrt{34}}{5}.$

Bài toán 103. Giải phương trình $\frac{9x^4 - 6x^3 + 25x^2 - 8x + 7}{8\sqrt{9x^4 - 6x^3 + 25x^2 - 8x + 17} + 1} = -1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } 9x^4 - 6x^3 + 25x^2 - 8x + 17 \geq 0.$$

Đặt $\sqrt{9x^4 - 6x^3 + 25x^2 - 8x + 17} = y, y \geq 0$ ta thu được phương trình

$$\begin{aligned} 9x^4 - 6x^3 + 25x^2 - 8x + 17 + 8\sqrt{9x^4 - 6x^3 + 25x^2 - 8x + 17} &= 9 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + 8y = 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y-1)(y+9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \in \{-9; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{9x^4 - 6x^3 + 25x^2 - 8x + 17} &= 1 \Leftrightarrow 9x^4 - 6x^3 + 25x^2 - 8x + 16 = 0 \end{aligned}$$

- ✓ Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.
- ✓ Xét $x \neq 0$; phương trình đã cho tương đương với

$$9x^2 - 6x + 25 - \frac{8}{x} + \frac{16}{x^2} \Leftrightarrow \left(9x^2 + \frac{16}{x^2}\right) - 2\left(3x + \frac{4}{x}\right) + 25 = 0 \quad (1).$$

$$\text{Đặt } 3x + \frac{4}{x} = t \Rightarrow 9x^2 + \frac{16}{x^2} = t^2 - 24; |t| \geq 4\sqrt{3}. \text{ Suy ra } (1) \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Với $t = 1 \Rightarrow 3x^2 - x + 4 = 0$. Phương trình này vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 104. Giải phương trình $\frac{2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 4}{4\sqrt{2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 9}} = -1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 9 > 0$. Đặt $\sqrt{2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 9} = y, y > 0$ ta thu được phương trình

$$\begin{aligned} 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 9 + 4\sqrt{2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 9} &= 5 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + 4y = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y-1)(y+5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \in \{-5; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 9} &= 1 \Leftrightarrow 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = 0 \end{aligned}$$

- ❖ Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.
- ❖ Xét $x \neq 0$; phương trình đã cho tương đương với

$$2x^2 - 3x - 7 + \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 3\left(x - \frac{2}{x}\right) - 7 = 0.$$

$$\text{Đặt } x - \frac{2}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 + 4. \text{ Ta thu được } 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1; t = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Với } t = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 2\}. \text{ Với } t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1+\sqrt{33}}{4}; \frac{1-\sqrt{33}}{4}\right\}.$$

Vậy phương trình ban đầu có bốn nghiệm kể trên.

Bài toán 105. Giải phương trình $\frac{x^6 + x^5 + x^4 - 6x^3 + x^2 + x}{4 - 5\sqrt{x^6 + x^5 + x^4 - 6x^3 + x^2 + x + 2}} = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^6 + x^5 + x^4 - 6x^3 + x^2 + x + 2 \geq 0 \\ 16 \neq 25(x^6 + x^5 + x^4 - 6x^3 + x^2 + x + 2) \end{cases}$$

Đặt $\sqrt{x^6 + x^5 + x^4 - 6x^3 + x^2 + x + 2} = y, y \geq 0$ ta thu được phương trình

$$\begin{aligned} 5\sqrt{x^6 + x^5 + x^4 - 6x^3 + x^2 + x + 2} + x^6 + x^5 + x^4 - 6x^3 + x^2 + x + 2 &= 6 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 5y + y^2 = 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y-1)(y+6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \in \{-6; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^6 + x^5 + x^4 - 6x^3 + x^2 + x + 2} &= 1 \Leftrightarrow x^6 + x^5 + x^4 - 6x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \end{aligned}$$

- Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.
- Xét $x \neq 0$; phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + x^2 + x - 6 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0.$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \text{ và } t^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$; $x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$. Ta có phương trình

$$t^3 - 3t + t^2 - 2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t^3 + t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2 + 3t + 4) = 0.$$

Phương trình $t^2 + 3t + 4 = 0$, $\Delta < 0$ nên vô nghiệm. Với $t = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 106. Giải phương trình $\frac{2x^6 + x^5 + 3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + x}{4 - 3\sqrt{2x^6 + x^5 + 3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + x + 6}} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $0 \leq 2x^6 + x^5 + 3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + x + 5 \neq \frac{16}{9}$.

Đặt $\sqrt{2x^6 + x^5 + 3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + x + 6} = y, y \geq 0$ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} 2x^6 + x^5 + 3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + x + 6 + 3\sqrt{2x^6 + x^5 + 3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + x + 6} &= 10 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + 3y = 10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y-2)(y+5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \in \{-5; 2\} \end{cases} \Leftrightarrow y = 2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2x^6 + x^5 + 3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + x + 6} &= 2 \Leftrightarrow 2x^6 + x^5 + 3x^4 - 12x^3 + 3x^2 + x + 2 = 0 \end{aligned}$$

Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho. Xét $x \neq 0$; phương trình đã cho tương đương với

$$2x^3 + x^2 + 3x - 12 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 2\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 12 = 0.$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ và $t^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2; x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$.

Ta có phương trình $2(t^3 - 3t) + t^2 - 2 + 3t - 12 = 0 \Leftrightarrow 2t^3 + t^2 - 3t - 14 = 0$

$$\Leftrightarrow (t-2)(2t^2 + 4t + 7) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee 2(t+1)^2 = -5 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm.

Bài toán 107. Giải phương trình $\sqrt{x^4 + x^3 - 2x^2 - 15x} + x^4 + x^3 - 2x^2 - 15x = 30 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 + x^3 - 2x^2 - 15x \geq 0$. Đặt $\sqrt{x^4 + x^3 - 2x^2 - 15x} = y, y \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} y^2 + y = 30 \\ y \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (y-5)(y+6) = 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \{-6; 5\} \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 5 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^4 + x^3 - 2x^2 - 15x} &= 5 \Leftrightarrow x^4 + x^3 - 2x^2 - 15x - 25 = 0 \\ \Leftrightarrow 25 + 15x + 2x^2 - x^3 - x^4 &= 0 \Leftrightarrow 5^2 + 3x \cdot 5 + 2x^2 - x^3 - x^4 = 0 \end{aligned}$$

Đặt $5 = a$ thu được

$$\begin{aligned} a^2 + 3x \cdot a + 2x^2 - x^3 - x^4 &\Leftrightarrow (a+x-x^2)(a+x^2+2x) = 0 \\ \Leftrightarrow (x^2+2x+5)(x^2-x-5) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = -4 \\ x^2-x-5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{21}}{2}; x = \frac{1-\sqrt{21}}{2} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x = \frac{1+\sqrt{21}}{2}; x = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$.

Bài toán 108. Giải phương trình $\frac{3x^4 + 4x^3 + 5x^2}{16 - 4\sqrt{3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 5}} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $0 \leq 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 5 \neq 16$. Đặt $\sqrt{3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 5} = y, 0 \leq y \neq 16$ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} 4\sqrt{3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 5} + 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 5 &= 21 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 4y + y^2 = 21 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y-3)(y+7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \in \{-7; 3\} \end{cases} \Leftrightarrow y = 3 \\ \Leftrightarrow \sqrt{3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 5} = 3 &\Leftrightarrow 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow 4 - 5x^2 - 4x^3 - 3x^4 = 0 &\Leftrightarrow 2^2 - 2x^2 - 3x^2 - 4x^3 - 3x^4 = 0 \end{aligned}$$

Đặt $2 = t$ thu được

$$\begin{aligned} t^2 - x^2t - 3x^2 - 4x^3 - 3x^4 &= 0 \Leftrightarrow t(t + x^2 + x) - 3x^2(t + x^2 + x) - x(t + x^2 + x) = 0 \\ \Leftrightarrow (t + x^2 + x)(t - 3x^2 - x) &= 0 \Leftrightarrow (3x^2 + x - 2)(x^2 + x + 2) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 2 = 0 \\ 3x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)^2 = -7 \\ (2x-3)(x+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{3}; x = -1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 109. Giải phương trình $\frac{3 - \sqrt{x^4 + 2x^3 + 2x}}{x^4 + 2x^3 + 2x + 1} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 + 2x^3 + 2x \geq 0$. Đặt $\sqrt{x^4 + 2x^3 + 2x} = y, y \geq 0$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 + 2x + \sqrt{x^4 + 2x^3 + 2x} &= 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y-1)(y+2) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \in \{-2; 1\} \end{cases} &\Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^4 + 2x^3 + 2x} = 1 \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + 2x = 1 \\ \Leftrightarrow 1 - 2x - 2x^3 - x^4 &= 0 \Leftrightarrow 1^2 - 2x \cdot 1 - 2x^3 - x^4 = 0 \end{aligned}$$

Đặt $1 = a$ thu được

$$\begin{aligned} a^2 - 2xa - 2x^3 - x^4 &= 0 \Leftrightarrow a(a - x^2 - 2x) + x^2(a - x^2 - 2x) = 0 \\ \Leftrightarrow (a - x^2 - 2x)(a + x^2) &= 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2x - 1)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x \in \{-1 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}\} \end{aligned}$$

Vậy phương trình ban đầu có tập nghiệm $S = \{-1 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}\}$.

Bài toán 110. Giải phương trình

$$\sqrt{6x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 8x^2 - 4x + 17} + 6x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 8x^2 - 4x + 15 = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $6x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 8x^2 - 4x + 17 \geq 0$.

Đặt $\sqrt{6x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 8x^2 - 4x + 17} = y, y \geq 0$ ta thu được phương trình

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{6x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 8x^2 - 4x + 17} + 6x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 8x^2 - 4x + 17 = 2 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y-1)(y+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \in \{-2; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 \\
 & \Leftrightarrow \sqrt{6x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 8x^2 - 4x + 17} = 1 \Leftrightarrow 6x^5 + 3x^4 - 12x^3 - 8x^2 - 4x + 16 = 0 \\
 & \Leftrightarrow 3x^3(2x^2 + x - 4) - 4(2x^2 + x - 4) = 0 \Leftrightarrow (3x^3 - 4)(2x^2 + x - 4) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3 = 4 \\ 2x^2 + x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{4}{3}}; x = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4}; x = \frac{-1 - \sqrt{33}}{4}
 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 111. Giải phương trình $2\sqrt{x^6 - 44x^2 + 1} + x^6 - 44x^2 = 47 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^6 - 44x^2 + 1 \geq 0$. Đặt $\sqrt{x^6 - 44x^2 + 1} = y, y \geq 0$ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{x^6 - 44x^2 + 1} + x^6 - 44x^2 + 1 &= 48 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 2y + y^2 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y-6)(y+8) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \in \{-8; 6\} \end{cases} \Leftrightarrow y = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x^6 - 44x^2 + 1} = 6 \Leftrightarrow x^6 - 44x^2 = 35 \\
 &\Leftrightarrow 49x^2 + 35 - (x^4 + 5)x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 7^2 + 5 \cdot 7 - (x^4 + 5)x^2 = 0
 \end{aligned}$$

Đặt $7 = t$ thu được

$$\begin{aligned}
 x^2 t^2 + 5t - (x^4 + 5)x^2 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2 \\ t = -\frac{x^4 + 5}{x^2} \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 7 \\ x^4 + 7x^2 + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{ \sqrt{7}; -\sqrt{7}; \frac{-7 + \sqrt{29}}{2}; \frac{-7 - \sqrt{29}}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm, tập nghiệm $S = \left\{ \sqrt{7}; -\sqrt{7}; \frac{-7 + \sqrt{29}}{2}; \frac{-7 - \sqrt{29}}{2} \right\}$.

Bài toán 112. Giải phương trình $\frac{x(x^3 + 2x^2 + 8)}{28 - 3\sqrt{x^4 + 2x^3 + 8x}} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $0 \leq x^4 + 2x^3 + 8x \neq \left(\frac{28}{3}\right)^2$. Đặt $\sqrt{x^4 + 2x^3 + 8x} = y, y \geq 0$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
 3\sqrt{x^4 + 2x^3 + 8x} + x^4 + 2x^3 + 8x &= 28 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + 3y = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ (y-4)(y+7) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \in \{-7; 4\} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^4 + 2x^3 + 8x} = 4 \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + 8x - 16 = 0 \\
 &\Leftrightarrow 16 - 2x \cdot 4 - x^4 - 2x^3 = 0 \Leftrightarrow 4^2 - 2x \cdot 4 - x^4 - 2x^3 = 0
 \end{aligned}$$

Đặt $4 = t$ thu được

$$t^2 - 2xt - x^4 - 2x^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -x^2 \\ t = x^2 + 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -4 \\ x^2 + 2x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1 + \sqrt{5}; x = -1 - \sqrt{5}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 113. Giải phương trình $\sqrt{2x - \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{x}{2x^2 - 1}} = 2 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $\frac{x}{2x^2 - 1} > 0$. Đặt $\sqrt{\frac{x}{2x^2 - 1}} = t, t > 0$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2x^2 - 1}{x}} + \sqrt{\frac{x}{2x^2 - 1}} = 2 &\Leftrightarrow \frac{1}{t} + t = 2 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t} = 0 \Leftrightarrow t = 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{2x^2 - 1}} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm kể trên.

Bài toán 114. Giải bất phương trình $\sqrt{\frac{x}{x-1}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \frac{x}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{\frac{x}{x-1}} = t, t > 0 \text{ ta thu được } t + \frac{1}{t} \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow t^2 - \frac{3}{\sqrt{2}}t + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \sqrt{2} \\ 0 < t \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x-1} \geq 2 \\ \frac{x}{x-1} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 2 \\ -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm } \begin{cases} 1 < x \leq 2 \\ -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

Bài toán 115. Giải phương trình $\frac{\sqrt{2x-1}}{x} + \frac{2x}{\sqrt{2x-1}} = 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x > \frac{1}{2}$. Đặt $\frac{\sqrt{2x-1}}{x} = t, t > 0$ ta thu được phương trình

$$\begin{aligned} t + \frac{2}{t} = 3 &\Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow t \in \{1; 2\} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2x-1 \\ 4x^2 = 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0 \\ 3x^2 + (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 116. Giải phương trình $\sqrt{x + \frac{1}{x}} + 1 + \sqrt{\frac{x}{x^2 + x + 1}} = \frac{7}{4} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Ta có $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên chỉ cần điều kiện $x > 0$.

Đặt $\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x}} = t, t > 0$ ta thu được $\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x}} + \sqrt{\frac{x}{x^2 + x + 1}} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow 4t^2 - 7t + 4 = 0 \quad (1).$

Phương trình (1) có $\Delta < 0$ nên vô nghiệm. Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 117. Giải phương trình $\sqrt{x + \frac{3}{x}} + 2\sqrt{\frac{x}{x^2 + 3}} = 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\frac{x^2 + 3}{x}} + 2\sqrt{\frac{x}{x^2 + 3}} = 3.$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2 + 3}{x}} = t, t > 0$ thu được

$$\begin{aligned} t + \frac{2}{t} = 3 &\Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 1)(t^2 - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - x + 3)(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)^2 + 11 = 0 \\ (x-1)(x-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1; 3\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 118. Giải phương trình $\sqrt{x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{2x}{2x^2 - x + 1}} = 3 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\frac{2x^2 - x + 1}{2x}} + 2\sqrt{\frac{2x}{2x^2 - x + 1}} = 3$. Đặt $\sqrt{\frac{2x^2 - x + 1}{2x}} = t, t > 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} t + \frac{2}{t} = 3 &\Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 1)(t^2 - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{2x^2 - x + 1}{2x} - 1\right)\left(\frac{2x^2 - x + 1}{2x} - 4\right) \Leftrightarrow (2x^2 - 3x + 1)(2x^2 - 9x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 = 0 \\ 2x^2 - 9x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{2}; 1; \frac{9 + \sqrt{73}}{4}; \frac{9 - \sqrt{73}}{4}\right\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được bốn nghiệm kể trên.

Bài toán 119. Giải phương trình $\sqrt{3(x-1) + \frac{6-4x}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{3x^2 - 4x + 3}} = 2 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x > -1$.

Phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{\frac{3x^2 - 3 - 4x + 6}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{3x^2 - 4x + 3}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3x^2 - 4x + 3}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{3x^2 - 4x + 3}} = 2.$$

Đặt $\sqrt{\frac{3x^2 - 4x + 3}{x + 1}} = t, t > 0$ thu được

$$\frac{1}{t} + t = 2 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t} = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3x^2 - 4x + 3}{x + 1}} = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 3 = x + 1$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x-2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{2}{3}; 1\right\}.$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm kể trên.

Bài toán 120. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 4x + 18} - \frac{70}{x + 4} + \sqrt{\frac{x + 4}{x^3 + 2x + 3}} = 2 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x > -4$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{\frac{(x+4)(x^2 - 4x + 18) - 70}{x + 4}} + \sqrt{\frac{x + 4}{x^3 + 2x + 3}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 2}{x + 4}} + \sqrt{\frac{x + 4}{x^3 + 2x + 3}} = 2.$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^3 + 2x + 2}{x + 4}} = t, t > 0$ ta thu được phương trình

$$\frac{1}{t} + t = 2 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t} = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^3 + 2x + 2}{x + 4}} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x + 2 = x + 4 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 121. Giải phương trình $\sqrt{x+8} + \frac{9x}{\sqrt{x+8}} - 6\sqrt{x} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x + 8 + 9x - 6\sqrt{x^2 + 8x} &= 0 \Leftrightarrow 5x + 4 = 3\sqrt{x^2 + 8x} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4 \geq 0 \\ 25x^2 + 40x + 16 = 9(x^2 + 8x) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{4}{5} \\ 16x^2 - 32x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{4}{5} \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $1 + \frac{9x}{x+8} - 6\sqrt{\frac{x}{x+8}} = 0$.

Đặt $\sqrt{\frac{x}{x+8}} = t, t > 0$ thu được $9t^2 - 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow (3t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{x+8}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 9x = x + 8 \Leftrightarrow x = 1$.

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x = 1$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \geq 0$.

Nhận xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình ban đầu.

Với $x > 0$ phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\frac{x+8}{x}} + 9\sqrt{\frac{x}{x+8}} - 6 = 0$.

Đặt $\sqrt{\frac{x+8}{x}} = t, t > 0$ ta thu được $t + \frac{9}{t} = 6 \Leftrightarrow (t-3)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+8}{x}} = 3 \Leftrightarrow x+8 = 9x \Leftrightarrow x = 1$.

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x = 1$.

Nhận xét.

Lời giải 1 bài toán 121 tự nhiên hơn cả, chỉ đơn thuần sử dụng phép biến đổi tương đương. Các lời giải 2 và 3 sử dụng phép đặt một ẩn phụ quy về phương trình bậc hai, tuy nhiên hai ẩn phụ của hai phương án khác nhau, khách quan mà nói lời giải 2 ít chông gai hơn lời giải 3, nguyên do $x+8 > 0, \forall x \geq 0$. Các bạn đọc giải lưu ý khi chia hoặc nhân một phương trình với một biểu thức chứa biến cần xét trường hợp biểu thức ấy có khả năng bằng 0 hay không. Đôi khi vô tình lãng quên kiến thức cơ bản này sẽ làm bài toán mất nghiệm, thừa nghiệm và lời giải lúc đó bị sai quy chế, không trọn vẹn về mặt tư tưởng.

Bài toán 122. Giải bất phương trình $10\sqrt{x+3} + \frac{3x}{\sqrt{x+3}} - 13\sqrt{x} > 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với $10 + \frac{3x}{x+3} - 13\sqrt{\frac{x}{x+3}} > 0$.

Đặt $\sqrt{\frac{x}{x+3}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$3t^2 - 13t + 10 > 0 \Leftrightarrow (t-1)(3t-10) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3t > 10 \\ t < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 100(x+3) \\ x < x+3 \end{cases} \Leftrightarrow x < -\frac{300}{97}.$$

Đổi chiều điều kiện, kết luận bất phương trình vô nghiệm.

Bài toán 123. Giải bất phương trình $4\sqrt{x^2+3} + \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - 5\sqrt{x} \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với $4 + \frac{x}{x^2+3} - 5\sqrt{\frac{x}{x^2+3}} \geq 0$.

Đặt $\sqrt{\frac{x}{x^2+3}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$t^2 - 5t + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-4) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 4 \\ t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 16(x^2+3) \\ x \leq x^2+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 - x + 48 \leq 0 & (1) \\ x^2 - x + 3 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

$$\circ (1) \Leftrightarrow 32x^2 - 2x + 96 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 31x^2 \leq -95 \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\circ (2) \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + x^2 + 5 \geq 0 \text{ (Nghiệm đúng).}$$

Kết luận bất phương trình có nghiệm $x \geq 0$.

Bài toán 124. Giải bất phương trình $2\sqrt{x^2-x+1} + \frac{3x}{\sqrt{x^2-x+1}} \geq 5\sqrt{x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $2 + \frac{3x}{x^2-x+1} \geq 5\sqrt{\frac{x}{x^2-x+1}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Đặt $\sqrt{\frac{x}{x^2-x+1}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$3t^2 - 5t + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)(3t-2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ t \leq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq x^2 - x + 1 \\ 9x \leq 4(x^2 - x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 \leq 0 \\ 4x^2 - 13x + 4 \geq 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

➤ $(1) \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1.$

➤ $(2) \Leftrightarrow x \geq \frac{13+\sqrt{105}}{8} \vee x \leq \frac{13-\sqrt{105}}{8}.$

Đổi chiều điều kiện thu được nghiệm $S = \left[0; \frac{13-\sqrt{105}}{8}\right] \cup \{1\} \cup \left[\frac{13+\sqrt{105}}{8}; +\infty\right).$

Bài toán 125. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+x^2+1} + \frac{x+1}{\sqrt{x^3+x^2+1}} \leq 2\sqrt{x+1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^2(x+1)+1 \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1.$

Bất phương trình đã cho tương đương với $1 + \frac{x+1}{x^3+x^2+1} \leq 2\sqrt{\frac{x+1}{x^3+x^2+1}}$

Đặt $\sqrt{\frac{x+1}{x^3+x^2+1}} = t, t \geq 0$ ta thu được $1+t^2 \leq 2t \Leftrightarrow (t-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+1}{x^3+x^2+1}} = 1 \Leftrightarrow x^3+x^2+1 = x+1$
 $\Leftrightarrow x^3+x^2-x=0 \Leftrightarrow x(x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left\{0; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}.$

Bài toán 126. Giải bất phương trình $\sqrt{2x^3+x^2+x+1} - \frac{5(x-1)}{\sqrt{2x^3+x^2+x+1}} + 4\sqrt{x-1} \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x(2x^2+x+1)+1 > 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$

Bất phương trình đã cho tương đương với $1 - \frac{5(x-1)}{2x^3+x^2+x+1} + 4\sqrt{\frac{x-1}{2x^3+x^2+x+1}} \geq 0.$

Đặt $\sqrt{\frac{x-1}{2x^3+x^2+x+1}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{cases} t^2 + 4t - 5 \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)(t+5) \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{2x^3+x^2+x+1}} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x-1 \geq 2x^3+x^2+x+1 \Leftrightarrow 2x^3+x^2+2 \leq 0 \quad (1)$$

Rõ ràng (1) vô nghiệm do $x \geq 1$. Kết luận bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 127. Giải bất phương trình $2\sqrt{x^2+x+1} + \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \geq 3\sqrt{x^2-x+1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với $2 + \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \geq 3\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}.$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}} = t, t > 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} t^2 + 2 &\geq 3t \Leftrightarrow (t-1)(t-2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t \leq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1 \geq 4(x^2+x+1) \\ x^2-x+1 \leq x^2+x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+5x+3 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0 \end{aligned}$$

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq 0$.

Bài toán 128. Giải phương trình $2\sqrt{x^3+1} - 7 \cdot \frac{3x^2+x+1}{\sqrt{x^3+1}} + 5\sqrt{3x^2+x+1} \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x > -1$. Bất phương trình đã cho tương đương với $2 - 7 \cdot \frac{3x^2+x+1}{x^3+1} + 5\sqrt{\frac{3x^2+x+1}{x^3+1}} \geq 0.$

Đặt $\sqrt{\frac{3x^2+x+1}{x^3+1}} = t, t > 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t > 0 \\ 2t^2 + 5t - 7 \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ (t-1)(2t+7) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3x^2+x+1}{x^3+1}} \geq 1 \Leftrightarrow 3x^2+x+1 \geq x^3+1 \\ &\Leftrightarrow x^3-3x^2-x \leq 0 \Leftrightarrow x(x^2-3x-1) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{3+\sqrt{13}}{2} \vee x \leq \frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $0 \leq x \leq \frac{3+\sqrt{13}}{2} \vee -1 < x \leq \frac{3-\sqrt{13}}{2}.$

Bài toán 129. Giải phương trình $\sqrt{\frac{x}{2x+3}} + \frac{x}{2x+3} = 2 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $\frac{x}{2x+3} \geq 0$. Đặt $\sqrt{\frac{x}{2x+3}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \{-2; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = 2x+3 \Leftrightarrow x = -3.$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = -3$.

Bài toán 130. Giải phương trình $2\sqrt{\frac{2x+3}{x+1}} + \frac{1}{x+1} = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -1; \frac{2x+3}{x+1} \geq 0.$

Phương trình đã cho tương đương với $2\sqrt{\frac{2x+3}{x+1}} + \frac{1}{x+1} + 2 = 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{2x+3}{x+1}} + \frac{2x+3}{x+1} = 3$.

Đặt $\sqrt{\frac{2x+3}{x+1}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + 2t = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \{-3; 1\} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2x+3}{x+1}} = 1 \Leftrightarrow 2x+3 = x+1 \Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = -2$.

Bài toán 131. Giải bất phương trình $3\sqrt{\frac{3x+1}{x+2}} - \frac{5}{x+2} \geq 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -2; \frac{3x+1}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3} \vee x < -2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$3\sqrt{\frac{3x+1}{x+2}} + 3 - \frac{5}{x+2} \geq 4 \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{3x+1}{x+2}} + \frac{3x+6-5}{x+2} \geq 4 \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{3x+1}{x+2}} + \frac{3x+1}{x+2} \geq 4.$$

Đặt $\sqrt{\frac{3x+1}{x+2}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + 3t \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3x+1}{x+2}} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x+2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \vee x < -2.$$

Kết hợp điều kiện thu được nghiệm $x \geq \frac{1}{2} \vee x < -2$.

Bài toán 132. Giải phương trình $6\sqrt{\frac{x+5}{2x+3}} + \frac{7}{2x+3} \leq 7 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -\frac{3}{2}; \frac{x+5}{2x+3} \geq 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2} \vee x \leq -5$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 6\sqrt{\frac{x+5}{2x+3}} + 1 + \frac{7}{2x+3} &\leq 8 \Leftrightarrow 6\sqrt{\frac{x+5}{2x+3}} + \frac{2x+3+7}{2x+3} \leq 8 \\ &\Leftrightarrow 6\sqrt{\frac{x+5}{2x+3}} + \frac{2x+10}{2x+3} \leq 8 \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x+5}{2x+3}} + \frac{x+5}{2x+3} \leq 4 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{\frac{x+5}{2x+3}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ 3t + t^2 \leq 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ -4 \leq t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{\frac{x+5}{2x+3}} \leq 1 \Rightarrow \frac{x+5}{2x+3} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x-2}{2x+3} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x < -\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x \geq 2 \vee x \leq -5$.

Bài toán 133. Giải bất phương trình $\sqrt{3 - \frac{4}{x+3}} + \frac{2x+4}{x+3} \leq 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{3x+5}{x+3} \geq 0; x \neq -3 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{3} \vee x < -3$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{3 - \frac{4}{x+3}} + \frac{4x+8}{x+3} \leq 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{3x+9-4}{x+3}} + \frac{3x+5}{x+3} + 1 \leq 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{3x+5}{x+3}} + \frac{3x+5}{x+3} \leq 3.$$

Đặt $\sqrt{\frac{3x+5}{x+3}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + 2t \leq 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ -3 \leq t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{3x+5}{x+3}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3x+5}{x+3} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+2}{x+3} \leq 0 \Leftrightarrow -3 < x < -1 \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện, kết luận bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 134. Giải phương trình $3\sqrt{\frac{11}{x+4}} - 1 + \frac{x+26}{x+4} = 8 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -4; \frac{11}{x+4} \geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $3\sqrt{\frac{11}{x+4}} - 1 + \frac{x+26}{x+4} - 1 = 7 \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{11}{x+4}} - 1 + \frac{22}{x+4} - 2 = 5$.

$$\begin{aligned} \text{Đặt } \sqrt{\frac{11}{x+4}} - 1 = t, t \geq 0 \text{ ta thu được } \begin{cases} t \geq 0 \\ 3t + 2t^2 = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(2t+5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \left\{-\frac{5}{2}; 1\right\} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{11}{x+4}} - 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{11}{x+4} = 2 \Leftrightarrow x+4 = \frac{11}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện, kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm.

Nhận xét.

Các bài toán 129 đến 134 mức độ ẩn phụ không quá phức tạp, biểu thức trong căn thức có dạng $\frac{ax+b}{cx+d}$, có thể một số bạn học sinh có thể cảm thấy khó khăn khi quan sát các phép biến đổi đưa về ẩn phụ ở trên. Tất nhiên ngoài phương cách trên chúng ta có thể sử dụng chia tách phần nguyên để đưa về ẩn phụ, và đây là ý tưởng tự nhiên hơn cả. Mời quý độc giả theo dõi các thí dụ tiếp theo

Bài toán 135. Giải phương trình $3\sqrt{\frac{2x-3}{x-2}} + \frac{5x-9}{x-2} = 7 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 2; \frac{2x-3}{x-2} \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$3\sqrt{\frac{2x-4+1}{x-2}} + \frac{5x-9}{x-2} - 5 = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{2 + \frac{1}{x-2}} + \frac{1}{x-2} = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{2 + \frac{1}{x-2}} + 2 + \frac{1}{x-2} = 4.$$

Đặt $\sqrt{2 + \frac{1}{x-2}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ 3t + t^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \{-4; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x-2} = 1 \Leftrightarrow x-2 = -1 \Leftrightarrow x = 1.$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 136. Giải phương trình $\sqrt{1 + \frac{2x-1}{x+2}} + \frac{x+1}{x+2} = \frac{8}{5} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -2; \frac{3x+1}{x+2} \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 5\sqrt{1 + \frac{2x-1}{x+2}} + \frac{5x+5}{x+2} &= 8 \Leftrightarrow 5\sqrt{1 + \frac{2(x+2)-5}{x+2}} + \frac{5x+10-5}{x+2} = 8 \\ \Leftrightarrow 5\sqrt{3 - \frac{5}{x+2}} + 5 - \frac{5}{x+2} &= 8 \Leftrightarrow 5\sqrt{3 - \frac{5}{x+2}} + 3 - \frac{5}{x+2} = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Đặt } \sqrt{3 - \frac{5}{x+2}} = t, t \geq 0 \text{ ta thu được } \begin{cases} t \geq 0 \\ 5t + t^2 = 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \{-6; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{3 - \frac{5}{x+2}} = 1 &\Leftrightarrow 3 - \frac{5}{x+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{x+2} = 2 \Leftrightarrow x+2 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm.

Bài toán 137. Giải phương trình $6\sqrt{\frac{2x+7}{x-2}} + \frac{7x-3}{x-2} = 12 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $\frac{2x+7}{x-2} \geq 0; x \neq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$6\sqrt{\frac{2x-4+11}{x-2}} + \frac{7x-3}{x-2} - 7 = 5 \Leftrightarrow 6\sqrt{2 + \frac{11}{x-2}} + \frac{11}{x-2} = 5 \Leftrightarrow 6\sqrt{2 + \frac{11}{x-2}} + 2 + \frac{11}{x-2} = 7.$$

Đặt $\sqrt{2 + \frac{11}{x-2}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ 6t + t^2 = 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+7) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \{-7; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2 + \frac{11}{x-2}} = 1 \\ \Leftrightarrow 2 + \frac{11}{x-2} &= 1 \Leftrightarrow \frac{11}{x-2} = -1 \Leftrightarrow x-2 = -11 \Leftrightarrow x = -9 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm duy nhất $x = -9$

Bài toán 138. Giải phương trình $3\sqrt{x + \frac{1}{x}} + \frac{(x-1)^2}{x} = 2 \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với $3\sqrt{\frac{x^2+1}{x}} + \frac{x^2-2x+1}{x} = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x^2+1}{x}} + \frac{x^2+1}{x} = 4.$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2+1}{x}} = t, t > 0$ thu được $\begin{cases} t > 0 \\ 3t + t^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ (t-1)(t+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t \in \{-4; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1.$

Suy ra $\sqrt{\frac{x^2+1}{x}} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \quad (1).$

Phương trình (1) vô nghiệm do $\Delta < 0$. Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 139. Giải bất phương trình $2\sqrt{4x + \frac{1}{x}} + \frac{(2x+1)^2}{x} > 7 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0; \frac{4x^2+1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x > 0.$

Bất phương trình đã cho tương đương với $2\sqrt{4x + \frac{1}{x}} + \frac{4x^2+4x+1}{x} > 7 \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{4x^2+1}{x}} + \frac{4x^2+1}{x} > 3.$

Đặt $\sqrt{\frac{4x^2+1}{x}} = t, t > 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t > 0 \\ 2t + t^2 > 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ (t-1)(t+3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t > 1 \end{cases} \Leftrightarrow t > 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{4x^2+1}{x}} > 1 \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - x + 1 > 0 \Leftrightarrow 8x^2 - 2x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 7x^2 + 1 > 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Dễ thấy (1) nghiệm đúng với mọi giá trị thực x . Kết luận bất phương trình có nghiệm $x > 0$.

Bài toán 140. Giải bất phương trình $3\sqrt{x + \frac{6}{x}} + \frac{(x+2)(x+3)}{x} > 9 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0; \frac{x^2+6}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0.$

Bất phương trình đã cho tương đương với $3\sqrt{x + \frac{6}{x}} + \frac{x^2+5x+6}{x} > 9 \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x^2+6}{x}} + \frac{x^2+6}{x} > 4.$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2+6}{x}} = t, t > 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t > 0 \\ 3t + t^2 > 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ (t-1)(t+4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t > 1 \end{cases} \Leftrightarrow t > 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+6}{x}} > 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x + 6 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 12 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + x^2 > -11 \quad (1) \end{aligned}$$

Rõ ràng (1) hiển nhiên. Do đó bất phương trình ban đầu có nghiệm $x > 0$.

Bài toán 141. Giải bất phương trình $3\sqrt{x+1 + \frac{4}{x}} + \frac{(x+2)^2}{x} = 7 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x+1 + \frac{4}{x} > 0; x \neq 0.$

Phương trình đã cho tương đương với $3\sqrt{x+1 + \frac{4}{x}} + \frac{x^2+4x+4}{x} = 7 \Leftrightarrow 3\sqrt{x+1 + \frac{4}{x}} + x+1 + \frac{4}{x} = 4.$

Đặt $\sqrt{x+1+\frac{4}{x}} = t, t > 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t > 0 \\ 3t + t^2 = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ (t-1)(t+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t \in \{-4; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+1+\frac{4}{x}} = 1 \Leftrightarrow x + \frac{4}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \quad (1) \end{aligned}$$

Phương trình (1) vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 142. Giải phương trình $5\sqrt{\frac{x^2+1}{x}} - 1 + \frac{(x-1)^2}{x} = 5 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0; \frac{x^2+1}{x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $5\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x}} + \frac{x^2-2x+1}{x} = 5 \Leftrightarrow 5\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x}} + \frac{x^2-x+1}{x} = 6$.

Đặt $\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x}} = t, t > 0$ ta thu được phương trình

$$\begin{cases} t > 0 \\ 5t + t^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ (t-1)(5t+6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-x+1}{x} = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 143. Giải phương trình $x^2 + 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0; x(x^2 - 1) \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương $x^2 - 1 + 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3x \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x} + 2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} = 3$.

Đặt $\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + 2t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2-1}{x}} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được hai nghiệm $x \in \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}$.

Bài toán 144. Giải phương trình $4x^2 + x - 2 = 3x\sqrt{2x - \frac{1}{x}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ x(2x^2 - 1) \geq 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với $2(2x^2 - 1) + x = 3x\sqrt{2x - \frac{1}{x}} \Leftrightarrow 2\left(\frac{2x^2-1}{x}\right) - 3\sqrt{\frac{2x^2-1}{x}} + 1 = 0$.

Đặt $\sqrt{2x - \frac{1}{x}} = t, t \geq 0$ thu được $\begin{cases} t \geq 0 \\ 2t^2 - 3t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(2t-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}.$

✓ $t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2x^2 - 1}{x}} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}.$

✓ $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2x^2 - 1}{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4(2x^2 - 1) = x \Leftrightarrow 8x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1+\sqrt{129}}{16}; \frac{1-\sqrt{129}}{16}\right\}.$

Đổi chiều điều kiện suy ra phương trình đã cho có bốn nghiệm $x \in \left\{-\frac{1}{2}; 1; \frac{1+\sqrt{129}}{16}; \frac{1-\sqrt{129}}{16}\right\}.$

Bài toán 145. Giải phương trình $(x+1)^2 = 3\left(1+x\sqrt{x-\frac{2}{x}}\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0; x(x^2 - 2) \geq 0.$

Phương trình đã cho tương đương với $x^2 - 2 - 3x\sqrt{x-\frac{2}{x}} + 2x = 0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{2}{x}\right) - 3\sqrt{x-\frac{2}{x}} + 2 = 0.$

Đặt $\sqrt{x-\frac{2}{x}} = t, t \geq 0$ ta thu được $\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 - 3t + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \in \{1; 2\}$

$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(x^2 - 4x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 2; 2+\sqrt{2}; 2-\sqrt{2}\}.$

Đổi chiều điều kiện ta thu được bốn nghiệm kể trên.

Bài toán 146. Giải phương trình $\frac{x-1}{\sqrt{x-\frac{3}{x}}} = \frac{3x}{x+3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x - \frac{3}{x} > 0; x(x+3) \neq 0.$ Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (x-1)(x+3) &= 3x\sqrt{x-\frac{3}{x}} \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 3x\sqrt{x-\frac{3}{x}} \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 3}{x} &= 3\sqrt{x-\frac{3}{x}} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3}{x} - 3\sqrt{\frac{x^2 - 3}{x}} + 2 = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2 - 3}{x}} = t, t > 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 - 3t + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (t^2 - 1)(t^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{x} - 1\right)\left(x - \frac{3}{x} - 4\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - x - 3)(x^2 - 4x - 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1+\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{2+\sqrt{7}}{2}; \frac{2-\sqrt{7}}{2}\right\} \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện thu được bốn nghiệm kể trên.

Bài toán 147. Giải phương trình $3x+1+\frac{x}{x-1}\sqrt{3x-\frac{1}{x}}=0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x(x-1) \neq 0; 3x-\frac{1}{x} \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (x-1)(3x+1)+x\sqrt{3x-\frac{1}{x}} &= 0 \Leftrightarrow 3x^2-2x-1+x\sqrt{3x-\frac{1}{x}}=0 \\ \Leftrightarrow \frac{3x^2-2x-1}{x}+\sqrt{3x-\frac{1}{x}} &= 0 \Leftrightarrow 3x-\frac{1}{x}+\sqrt{3x-\frac{1}{x}}-2=0 \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{3x-\frac{1}{x}}=t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2+t-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \{-2; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow t^2=1 \Leftrightarrow 3x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1+\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{13}}{2} \right\}.$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 148. Giải bất phương trình $(x-2)^2+3x\sqrt{\frac{x^2-4}{x}} \geq 8 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \neq 0 \\ x(x^2-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ -2 \leq x < 0 \end{cases}$$

Bất phương trình đã cho tương đương với $x^2-4x-4+3x\sqrt{\frac{x^2-4}{x}} \geq 0 \quad (1)$.

- Xét trường hợp $x \geq 2$ thì (1) $\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x}+3\sqrt{\frac{x^2-4}{x}}-4 \geq 0$. Đặt $\sqrt{\frac{x^2-4}{x}}=t, t \geq 0$ thu được

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2+3t-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2-4}{x}} \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1+\sqrt{17}}{2}.$$
- Xét trường hợp $-2 \leq x < 0$ thì (1) $\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x}+3\sqrt{\frac{x^2-4}{x}}-4 \leq 0$. Đặt $\sqrt{\frac{x^2-4}{x}}=t, t \geq 0$ thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2+3t-4 \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ -4 \leq t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2-4}{x}} &\leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ \frac{x^2-4}{x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ x^2-x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq \frac{1-\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

Tổng hợp hai trường hợp thu được nghiệm $S = \left[-2; \frac{1-\sqrt{17}}{2} \right] \cup [2; +\infty)$.

Bài toán 149. Giải bất phương trình $3x\sqrt{\frac{4x^2-1}{x}} \geq 2-(2x-1)^2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \neq 0 \\ x(4x^2 - 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 1 \\ -\frac{1}{2} \leq x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Bất phương trình đã cho tương đương với } 4x^2 - 4x - 1 + 3x\sqrt{\frac{4x^2 - 1}{x}} \geq 0 \quad (1).$$

$$\diamond \text{ Xét trường hợp } x \geq \frac{1}{2} \text{ thì } (1) \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 4x - 1}{x} + 3\sqrt{\frac{4x^2 - 1}{x}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 1}{x} + 3\sqrt{\frac{4x^2 - 1}{x}} \geq 4.$$

$$\text{Đặt } \sqrt{\frac{4x^2 - 1}{x}} = t, t \geq 0 \text{ ta thu được}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + 3t \geq 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{4x^2 - 1}{x}} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 1}{x} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2 - x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \geq \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \vee x \leq \frac{1 - \sqrt{17}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \end{aligned}$$

$$\diamond \text{ Xét trường hợp } -\frac{1}{2} \leq x < 0 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 4x - 1}{x} + 3\sqrt{\frac{4x^2 - 1}{x}} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 1}{x} + 3\sqrt{\frac{4x^2 - 1}{x}} \leq 4.$$

$$\text{Đặt } \sqrt{\frac{4x^2 - 1}{x}} = t, t \geq 0 \text{ ta thu được}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + 3t \leq 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ -4 \leq t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow t \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{4x^2 - 1}{x}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 1}{x} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ 4x^2 - x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < 0 \\ x \geq \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \vee x \leq \frac{1 - \sqrt{17}}{8} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1 - \sqrt{17}}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Đổi chiều điều kiện thu được tập nghiệm } S = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1 - \sqrt{17}}{8} \right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{17}}{8}; +\infty \right).$$

$$\text{Bài toán 150. Giải phương trình } \sqrt{x + \frac{6}{x} + 2} + \frac{(x+2)(x+3)}{x} = 15 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } x \neq 0; x + \frac{6}{x} + 2 \geq 0. \text{ Biến đổi } \sqrt{x + \frac{6}{x} + 2} + \frac{x^2 + 5x + 6}{x} = 15 \Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{6}{x} + 2} + x + \frac{6}{x} + 2 = 12.$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x + \frac{6}{x} + 2} = t, t \geq 0 \text{ ta thu được}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + t - 12 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-3)(t+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \{-4, 3\} \end{cases} \Leftrightarrow t = 3 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x + \frac{6}{x} + 2} = 3 \Leftrightarrow x + \frac{6}{x} = 7 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 6\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 151. Giải phương trình $\sqrt{2x + \frac{8}{x} - 1} + \frac{(2x+1)(x+8)}{x} = 30 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0; 2x + \frac{8}{x} - 1 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{2x + \frac{8}{x} - 1} + \frac{2x^2 + 17x + 8}{x} = 30 \Leftrightarrow \sqrt{2x + \frac{8}{x} - 1} + 2x + \frac{8}{x} + 17 = 30 \Leftrightarrow \sqrt{2x + \frac{8}{x} - 1} + 2x + \frac{8}{x} - 1 = 12.$$

Đặt $\sqrt{2x + \frac{8}{x} - 1} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + t - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-3)(t+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \{-4; 3\} \end{cases} \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2x + \frac{8}{x} - 1} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 4\}.$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 152. Giải phương trình $\sqrt{x-2 + \frac{2}{x+5}} + \frac{x^2-13}{x+5} + 1 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -5; x-2 + \frac{2}{x+5} \geq 0$.

Phương trình tương đương với $\sqrt{\frac{(x+5)(x-2)+12}{x+5}} + \frac{x^2-13}{x+5} + 3 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+3x+2}{x+5}} + \frac{x^2+3x+2}{x+5} = 2.$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2+3x+2}{x+5}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + t = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \{-2; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+3x+2}{x+5}} = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = x + 5 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3; 1\} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được hai nghiệm kể trên.

Bài toán 153. Giải phương trình $\sqrt{x-2 + \frac{8}{x+3}} + \frac{(x+1)^2+4}{x+3} = 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -3; x-2 + \frac{8}{x+3} \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x-2 + \frac{8}{x+3}} + \frac{x^2+2x+5}{x+3} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(x+3)(x-2)+8}{x+3}} + \frac{x^2+2x+5}{x+3} - 1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}} + \frac{x^2+x+2}{x+3} = 2.$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + t = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \{-2; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}} = 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm kể trên.

Bài toán 154. Giải phương trình $6\sqrt{x+1+\frac{4}{x-1}} + \frac{(x+1)^2}{x-1} > 9 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 1; \frac{x^2+3}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x > 1.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$6\sqrt{x+1+\frac{4}{x-1}} + \frac{x^2+2x+1}{x-1} > 9 \Leftrightarrow 6\sqrt{\frac{x^2-1+4}{x-1}} + \frac{x^2+2x+1}{x-1} - 2 > 7 \Leftrightarrow 6\sqrt{\frac{x^2+3}{x-1}} + \frac{x^2+3}{x-1} > 7.$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2+3}{x-1}} = t, t > 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t > 0 \\ 6t + t^2 > 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ (t-1)(t+7) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t > 1 \end{cases} \Leftrightarrow t > 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+3}{x-1} > 1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+4 > 0 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(x-1)^2 > -7 \\ x > 1 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Dễ thấy (1) hiển nhiên nên bất phương trình đã cho có nghiệm $x > 1.$

Bài toán 155. Giải phương trình $4\sqrt{2x-\frac{7x}{x+5}} + \frac{2x^2+4x+5}{x+5} \geq 6 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -5; \frac{2x^2+3x}{x+5} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -5 < x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với $4\sqrt{\frac{2x(x+5)-7x}{x+5}} + \frac{2x^2+3x}{x+5} - 1 \geq 5 \Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{2x^2+3x}{x+5}} + \frac{2x^2+3x}{x+5} \geq 5.$

Đặt $\sqrt{\frac{2x^2+3x}{x+5}} = t, t \geq 0$ thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ 4t + t^2 \geq 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+5) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x^2+3x}{x+5} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2+2x-5}{x+5} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-1+\sqrt{11}}{2} \vee -5 < x \leq \frac{-1-\sqrt{11}}{2} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện thu được tập nghiệm $S = \left[\frac{-1+\sqrt{11}}{2}; +\infty \right) \cup \left[-5; \frac{-1-\sqrt{11}}{2} \right].$

Bài toán 156. Giải phương trình $\sqrt{\frac{3x+1}{x^2-x+4}} + \frac{3x^2+13}{x^2-x+4} = 5 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{\frac{3x+1}{x^2-x+4}} + \frac{3x^2+13}{x^2-x+4} - 3 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3x+1}{x^2-x+4}} + \frac{3x+1}{x^2-x+4} = 2.$$

Đặt $\sqrt{\frac{3x+1}{x^2-x+4}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + t = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \in \{-2; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3x+1}{x^2-x+4}} = 1 \\ &\Leftrightarrow 3x+1 = x^2-x+4 \Leftrightarrow x^2-4x+3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 3\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 157. Giải bất phương trình $2\sqrt{\frac{x-2}{x^2+x+2}} + \frac{2x^2+3x+4}{x^2+x+2} \leq 5 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{\frac{x-2}{x^2+x+2}} + \frac{2x^2+3x+4}{x^2+x+2} - 2 \leq 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{x-2}{x^2+x+2}} + \frac{x-2}{x^2+x+2} \leq 3.$$

Đặt $\sqrt{\frac{x-2}{x^2+x+2}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ 2t + t^2 \leq 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ -3 \leq t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-2}{x^2+x+2}} \leq 1 \Leftrightarrow x-2 \leq x^2+x+2 \Leftrightarrow x^2+4 \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Dễ thấy (1) hiển nhiên. Kết luận bất phương trình có nghiệm $x \geq 2$.

Bài toán 158. Giải bất phương trình $4\sqrt{\frac{x+2}{x^2-3x+2}} + \frac{x^2-2x+4}{(x-1)(x-2)} < 6 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x > 2 \\ -2 \leq x < 1 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$4\sqrt{\frac{x+2}{x^2-3x+2}} + \frac{x^2-2x+4}{x^2-3x+2} - 1 < 5 \Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{x+2}{x^2-3x+2}} + \frac{x+2}{x^2-3x+2} < 5.$$

Đặt $\sqrt{\frac{x+2}{x^2-3x+2}} = t, t \geq 0$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0 \\ 4t + t^2 < 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t-1)(t+5) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ -5 < t < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq t < 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x+2}{x^2-3x+2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x}{x^2-3x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-4)}{(x-1)(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ 1 \leq x \leq 2 \\ x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện ta thu được nghiệm $\begin{cases} x \geq 4 \\ -2 \leq x < 0 \end{cases}$

Bài toán 159. Giải phương trình $\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} + 1 = \frac{6}{x^2+3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - 1 = \frac{6}{x^2+3} - 2 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - 1 = \frac{-2x^2}{x^2+3} \Leftrightarrow \frac{2x^2}{x^2+3} + \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} - 1 = 0.$$

Đặt $\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = t$ ta thu được

$$2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow (2t-1)(t+1) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{-1; \frac{1}{2}\right\}$$

$$\diamond \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 = x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in \{-1; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\diamond \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = -1 \Leftrightarrow -x = \sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 = x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 160. Giải phương trình $\frac{x}{\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{2-x^2} = 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 < 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x}{\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{2-x^2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} + \frac{x^2}{2(2-x^2)} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{2-x^2}} + \frac{x^2}{2-x^2} = 3.$$

Đặt $\frac{x}{\sqrt{2-x^2}} = t$ ta thu được

$$2t + t^2 = 3 \Leftrightarrow (t-1)(t+3) = 0 \Leftrightarrow t \in \{-3; 1\}.$$

$$\circ t = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{2-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 2-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\circ t = -3 \Leftrightarrow x = -3\sqrt{2-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 = 9 \cdot 2 - 9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 5x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x = 1; x = -\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Bài toán 161. Giải bất phương trình $\frac{1}{1-x^2} + 1 \geq \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-1 < x < 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\frac{1}{1-x^2} - 1 + 2 \geq \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow \frac{x^2}{1-x^2} - \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} + 2 \geq 0$.

Đặt $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = t$ ta thu được $t^2 - 3t + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t \leq 1 \end{cases}$

- $t \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 2\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 4-4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 5x^2 \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{\sqrt{5}}.$
- $t \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 \leq 1-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \geq 0 \\ 2x^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Kết hợp với điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left(-1; \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{5}}; 1\right).$

Bài toán 162. Giải bất phương trình $\frac{x}{\sqrt{5-x^2}} + \frac{x^2+10}{5-x^2} \geq 6 \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải.

Điều kiện $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$. Biến đổi tương đương $\frac{x}{\sqrt{5-x^2}} + \frac{x^2+10}{5-x^2} - 2 \geq 4 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} + \frac{3x^2}{5-x^2} \geq 4$

Đặt $\frac{x}{\sqrt{5-x^2}} = t$ ta thu được $t + 3t^2 \geq 4 \Leftrightarrow (t-1)(3t+4) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ 3t \leq -4 \end{cases}$

- $t \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{5-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 5-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{\frac{5}{2}}$
- $3t \leq -4 \Leftrightarrow 3x \leq -4\sqrt{5-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 9x^2 \leq 16.5-16x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 5x^2 \leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{\sqrt{5}} \leq x \leq 0.$

Kết hợp điều kiện ta thu được $S = \left[-\frac{4}{\sqrt{5}}; 0\right] \cup \left[\frac{\sqrt{10}}{2}; \sqrt{5}\right).$

Bài toán 163. Giải phương trình $\frac{3x}{\sqrt{3-x^2}} + \frac{6}{3-x^2} \geq 7 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$. Biến đổi $\frac{3x}{\sqrt{3-x^2}} + \frac{6}{3-x^2} - 2 \geq 5 \Leftrightarrow \frac{3x}{\sqrt{3-x^2}} + \frac{2x^2}{3-x^2} \geq 5.$

Đặt $\frac{x}{\sqrt{3-x^2}} = t$ ta thu được $2t^2 + 3t \geq 5 \Leftrightarrow (t-1)(2t+5) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ t \leq -\frac{5}{2} \end{cases}$

- $t \leq -\frac{5}{2} \Leftrightarrow -2x \geq 5\sqrt{3-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 4x^2 \geq 25(3-x^2) \end{cases} \Leftrightarrow x < -5\sqrt{\frac{3}{29}}.$
- $t \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{3-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 3-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{\frac{3}{2}}.$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left(-\sqrt{3}; -5\sqrt{\frac{3}{29}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{3}\right).$

Nhận xét.

Các bài toán từ 159 đến 163, dạng thức này đã từng xuất hiện rất nhiều tại các tài liệu tham khảo khác, điển hình bài toán 161 lần đầu tiên nó xuất hiện trong bộ đề tuyển sinh Đại học năm 1996, tác giả không nhớ rõ vị trí đề số bao nhiêu, và xuất hiện trở lại tại đề thi dự bị 2 Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2005, tuy nhiên nó vẫn làm khó không ít các bạn thí sinh trong thao tác thiết lập ắ phụ.

Dạng tổng quát (với phương trình và bất phương trình) tạm nêu như sau $\frac{ax}{\sqrt{m+nx^2}} + \frac{b}{m+nx^2} = c$.

Để thiết lập ắ phụ $\frac{x}{\sqrt{m+nx^2}} = t$, biểu thức chứa căn hoàn toàn không thể can thiệp được, rõ ràng cần quy biểu thức $\frac{b}{m+nx^2}$ về dạng $\frac{kx^2}{m+nx^2}$. Thực hiện $\frac{ax}{\sqrt{m+nx^2}} + \frac{b}{m+nx^2} - \frac{m}{b} = c - \frac{m}{b} \Leftrightarrow \frac{ax}{\sqrt{m+nx^2}} - \frac{mn}{b} \cdot \frac{x^2}{m+nx^2} = c - \frac{m}{b}$.

Bài toán 164. Giải phương trình $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-3}} + \frac{4-2x}{x^2-3} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $|x| > \sqrt{3}$. Phương trình đã cho tương đương với $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-3}} + \frac{4-2x}{x^2-3} + 1 = 2 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2-3}} + \frac{(x-1)^2}{x^2-3} = 2$.

Đặt $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-3}} = t$ ta thu được $t^2 + t = 2 \Leftrightarrow (t-1)(t+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-2 \end{cases}$

$$\text{➤ } t=1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2-3}} = 1 \Leftrightarrow x-1 = \sqrt{x^2-3} \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 1 = x^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\text{➤ } t=-2 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2-3}} = -2 \Leftrightarrow x-1 = -2\sqrt{x^2-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 1 = 4x^2 - 12 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-1+2\sqrt{10}}{3}; \frac{-1-2\sqrt{10}}{3} \right\}.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được ba nghiệm kể trên.

Bài toán 165. Giải phương trình $\frac{3x-2}{\sqrt{x^2-8}} + \frac{5x^2-6x-2}{x^2-8} = 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $|x| > \sqrt{8}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{6x-4}{\sqrt{x^2-8}} + \frac{10x^2-12x-4}{x^2-8} &= 4 \Leftrightarrow \frac{6x-4}{\sqrt{x^2-8}} + \frac{10x^2-12x-4}{x^2-8} - 1 = 3 \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-8}} + \frac{9x^2-12x+4}{x^2-8} &= 3 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-8}} + \frac{(3x-2)^2}{x^2-8} = 3 \end{aligned}$$

Đặt $\frac{3x-2}{\sqrt{x^2-8}} = t$ ta thu được $2t + t^2 = 3 \Leftrightarrow (t-1)(t+3) = 0 \Leftrightarrow t=1; t=-3$.

$$\bullet \quad t=1 \Leftrightarrow 3x-2 = \sqrt{x^2-8} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 2 \\ 9x^2 - 12x + 4 = x^2 - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ 8x^2 - 12x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$\bullet \quad t=-3 \Leftrightarrow 3x-2 = -3\sqrt{x^2-8} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{2}{3} \\ 9x^2 - 12x + 4 = 9x^2 - 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{2}{3} \\ x = \frac{19}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

III. MỘT SỐ TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 8.*
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
2. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 9.*
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
3. *Nâng cao và phát triển toán 8, tập 1 – tập 2.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
4. *Nâng cao và phát triển toán 9, tập 1 – tập 2.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
5. *Toán nâng cao Đại số 10.*
Nguyễn Huy Đoan; NXB Giáo dục Việt Nam; 1999.
6. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Đại số 10.*
Nguyễn Huy Đoan; Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2006.
7. *Tài liệu chuyên toán: Đại số 10 – Bài tập Đại số 10.*
Đoàn Quỳnh – Doãn Minh Cường – Trần Nam Dũng – Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2010.
8. *Một số chuyên đề Đại số bồi dưỡng học sinh giỏi THPT.*
Nguyễn Văn Mậu – Nguyễn Văn Tiến và một số tác giả; NXB Giáo dục Việt Nam; 2009.
9. *Tuyển tập các bài toán hay và khó Đại số 9.*
Nguyễn Đức Tấn – Đặng Đức Trọng – Nguyễn Cao Huynh – Vũ Minh Nghĩa – Bùi Ruy Tân – Lương Anh Văn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
10. *Một số phương pháp chọn lọc giải các bài toán sơ cấp, tập 1 – tập 3.*
Phan Đức Chính – Phạm Văn Điều – Đỗ Văn Hà – Phạm Văn Hạp – Phạm Văn Hùng – Phạm Đăng Long – Nguyễn Văn Mậu – Đỗ Thanh Sơn – Lê Đình Thịnh; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 1997.
11. *Bài giảng chuyên sâu Toán THPT: Giải toán Đại số 10.*
Lê Hồng Đức – Nhóm Cụ Môn; NXB Hà Nội; 2011.
12. *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình.*
Nguyễn Văn Mậu; NXB Giáo dục Việt Nam; 1994.
13. *Toán bồi dưỡng học sinh phổ thông trung học – quyển 1; Đại số.*
Hàn Liên Hải – Phan Huy Khải – Đào Ngọc Nam – Nguyễn Đạo Phương – Lê Tất Tôn – Đặng Quan Viễn; NXB Hà Nội; 1991.
14. *Phương trình và hệ phương trình không mẫu mực.*
Nguyễn Đức Tấn – Phan Ngọc Thảo; NXB Giáo dục Việt Nam; 1996.
15. *Chuyên đề bồi dưỡng Toán cấp ba; Đại số.*
Nguyễn Sinh Nguyên; NXB Đà Nẵng; 1997.
16. *Giải toán Đại số sơ cấp (Dùng cho học sinh 12 chuyên, luyện thi đại học).*
Trần Thành Minh – Vũ Thiện Căn – Võ Anh Dũng; NXB Giáo dục Việt Nam; 1995.
17. *Những dạng toán điển hình trong các kỳ thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng; Tập 3.*
Bùi Quang Trường; NXB Hà Nội; 2002.
18. *Ôn luyện thi môn Toán THPT theo chủ đề; Tập một: Đại số và lượng giác.*
Cung Thế Anh; NXB Giáo dục Việt Nam; 2011.
19. *Phương pháp giải toán trọng tâm.*
Phan Huy Khải; NXB Đại học Sư phạm; 2011.
20. *Các bài giảng luyện thi môn Toán; Tập 2.*
Phan Đức Chính – Vũ Dương Thụy – Đào Tam – Lê Thống Nhất; NXB Giáo dục Việt Nam; 1993.
21. *Hệ phương trình và phương trình chứa căn thức.*
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2006.

22. **Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT Chuyên trực thuộc đại học và THPT Chuyên các tỉnh thành.**
23. **Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT hệ đại trà các địa phương trên toàn quốc.**
24. **Đề thi học sinh giỏi môn toán khối 8 đến khối 12 các cấp.**
25. **Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán (chính thức – dự bị) qua các thời kỳ.**
26. **Đề thi Olympic 30 tháng 4 Toán học khối 10, khối 11 các tỉnh miền Trung và Nam bộ (1995 – 2013).**
27. **Các tạp chí toán học:** Tạp chí Toán học và tuổi trẻ; Tạp chí Toán tuổi thơ 2 THCS; Tạp chí Kvant...
28. **Các diễn đàn toán học:** Boxmath.vn; Math.net.vn; Mathscope.org; Onluyentoan.vn; Diendantoanhoc.net; Math.net.vn; K2pi.net; Mathlink.ro;...
29. **Một số trang mạng học tập thông qua facebook; twiter;...**



THÂN THỂ TẠI NGỤC TRUNG
TINH THẦN TẠI NGỤC NGOẠI
DỤC THÀNH ĐẠI SỰ NGHIỆP
TINH THẦN CẢNH YẾU ĐẠI

TÀI LIỆU CHÍNH THỨC

TÀI LIỆU THAM KHẢO TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

$$\Sigma \sqrt{xyz}$$

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

LÝ THUYẾT SỬ DỤNG ẨN PHỤ CĂN THỨC (PHẦN 4)

TRUNG ĐOÀN ĐẶNG TIẾN ĐÔNG – QUÂN ĐOÀN BỘ BINH

CHỦ ĐẠO: SỬ DỤNG HAI ẨN PHỤ ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG BẬC – ĐẲNG CẤP

- ĐẶT HAI ẨN PHỤ – PHƯƠNG TRÌNH ĐỒNG BẬC BẬC HAI.
- ĐẶT HAI ẨN PHỤ – PHÂN TÍCH NHÂN TỬ.
- BÀI TOÁN NHIỀU CÁCH GIẢI.

CREATED BY GIANG SƠN (FACEBOOK); GACMA1431988@GMAIL.COM (GMAIL)

THỦ ĐÔ HÀ NỘI – MÙA THU 2013

“Non sông Việt Nam có trở nên tươi đẹp hay không, dân tộc Việt Nam có bước tới đài vinh quang để sánh vai với các cường quốc năm châu được hay không, chính là nhờ một phần lớn ở công học tập của các em”

(Trích thư Chủ tịch Hồ Chí Minh).



“...Tiếng giày gõ vang lên một âm điệu đều đặn, rất khó nhận ra trong tiếng xe cộ ồn ào và dòng thác âm thanh của thành phố. Nhưng ở giữa hai bước đi vội vã, người ta vẫn có thể nghe thấy nó. Cũng giống như vào một giây phút ít ngờ nhất, người ta sẽ nhận ra những hồi âm xa thẳm của cuộc đời, của khoảng thời gian trùng điệp ở phía sau lưng mỗi người.”

(Chàng trai trên sân thượng – Dương Thu Hương).

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

LÝ THUYẾT SỬ DỤNG ẨN PHỤ CĂN THỨC (PHẦN 4)

TRUNG ĐOÀN ĐẠNG TIỀN ĐÔNG – QUÂN ĐOÀN BỘ BINH

Trong chương trình Toán học phổ thông nước ta, cụ thể là chương trình Đại số, phương trình và bất phương trình là một nội dung quan trọng, phổ biến trên nhiều dạng toán xuyên suốt các cấp học, cũng là bộ phận thường thấy trong các kỳ thi kiểm tra chất lượng học kỳ, thi tuyển sinh lớp 10 THPT, thi học sinh giỏi môn Toán các cấp và kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng với hình thức hết sức phong phú, đa dạng. Mặc dù đây là một đề tài quen thuộc, chính thống nhưng không vì thế mà giảm đi phần thú vị, nhiều bài toán cơ bản tăng dần đến mức khó thậm chí rất khó, với các biến đổi đẹp kết hợp nhiều kiến thức, kỹ năng vẫn làm khó nhiều bạn học sinh THCS, THPT. Ngoài phương trình đại số bậc cao, phương trình phân thức hữu tỷ thì phương trình chứa căn (còn gọi là phương trình vô tỷ) đang được đồng đạo các bạn học sinh, các thầy cô giáo và các chuyên gia Toán phổ thông quan tâm sâu sắc. Chương trình Toán Đại số lớp 9 THCS bước đầu giới thiệu các phép toán với căn thức, kể từ đó căn thức xuất hiện hầu hết trong các vấn đề đại số, hình học, lượng giác và xuyên suốt chương trình Toán THPT. Sự đa dạng về hình thức của lớp bài toán căn thức đặt ra yêu cầu cấp thiết là làm thế nào để đơn giản hóa, thực tế các phương pháp giải, kỹ năng, mẹo mực đã hình thành, đi vào hệ thống. Về cơ bản để làm việc với lớp phương trình, bất phương trình vô tỷ chúng ta ưu tiên khử hoặc giảm các căn thức phức tạp của bài toán.

Phép sử dụng ẩn phụ là một trong những phương pháp cơ bản nhằm mục đích đó, ngoài ra bài toán còn trở nên gọn gàng, sáng sủa và giúp chúng ta định hình hướng đi một cách ổn định nhất. Đôi khi đây cũng là phương pháp tối ưu cho nhiều bài toán công kênh. Tiếp theo lý thuyết sử dụng ẩn phụ căn thức (các phần 1 đến 3), kết thúc ý tưởng sử dụng một căn thức duy nhất, tác giả xin trình bày tới quý độc giả lý thuyết sử dụng ẩn phụ căn thức (phần 4), chủ yếu xoay quanh một lớp các bài toán chứa căn thức được giải thông ý tưởng sử dụng hai ẩn phụ đưa về phương trình đồng bậc – đẳng cấp bậc hai cơ bản kết hợp phân tích nhân tử – phương trình tích. Kỹ năng này đồng hành cùng việc giải hệ phương trình hữu tỷ đồng bậc – đẳng cấp, hệ phương trình chứa căn quy về đẳng cấp, ngày một nâng cao kỹ năng giải phương trình – hệ phương trình cho các bạn học sinh.

Mức độ các bài toán đã nâng cao một chút, do đó độ khó đã tăng dần so với các phần 1 đến 3, đồng nghĩa đòi hỏi sự tư duy logic, nhạy bén kết hợp với vốn kiến thức nhất định của độc giả. Tài liệu nhỏ phù hợp với các bạn học sinh lớp 9 THCS ôn thi vào lớp 10 THPT đại trà, lớp 10 hệ THPT Chuyên, các bạn chuẩn bị bước vào các kỳ thi học sinh giỏi Toán các cấp và dự thi kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán trên toàn quốc, cao hơn là tài liệu tham khảo dành cho các thầy cô giáo và các bạn trẻ yêu Toán khác.

I. KIẾN THỨC – KỸ NĂNG CHUẨN BỊ

1. Nắm vững các phép biến đổi đại số cơ bản (nhân, chia đa thức, phân tích đa thức thành nhân tử, biến đổi phân thức đại số và căn thức).
2. Kỹ năng biến đổi tương đương, nâng lũy thừa, phân tích hằng đẳng thức, thêm bớt.
3. Nắm vững lý thuyết bất phương trình, dấu nhị thức bậc nhất, dấu tam thức bậc hai.
4. Nắm vững kiến thức về đa thức đồng bậc, các thao tác cơ bản với phương trình một ẩn phụ.
5. Bước đầu thực hành giải và biện luận các bài toán phương trình bậc hai, bậc cao với tham số.
6. Sử dụng thành thạo các ký hiệu logic trong phạm vi toán phổ thông.

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH VÀ KINH NGHIỆM THAO TÁC

Bài toán 1. Giải phương trình $x^2 + 6x - 3 = 4x\sqrt{2x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$.

Nhận xét $x(x^2 + 6x - 3) > 0, \forall x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^4 + 30x^2 + 12x^3 - 36x + 9 &= 16x^2(2x-1) \Leftrightarrow x^4 - 20x^3 + 46x^2 - 36x + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow x^2(x-1)^2 - 18x(x-1)^2 + 9(x-1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 18x + 9)(x-1)^2 &= 0 \Leftrightarrow x \in \{9 - 6\sqrt{2}; 1; 9 + 6\sqrt{2}\} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện thu được nghiệm $S = \{9 - 6\sqrt{2}; 1; 9 + 6\sqrt{2}\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x(x - \sqrt{2x-1}) &= 3x^2 - 6x + 3 \Leftrightarrow \frac{4x(x-1)^2}{x + \sqrt{2x-1}} = 3(x-1)^2 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2(3\sqrt{2x-1} - x) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3\sqrt{2x-1} \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Ta có $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 18x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{9 - 6\sqrt{2}; 9 + 6\sqrt{2}\}$. Đối chiếu điều kiện ta thu được ba nghiệm.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2 - 4x\sqrt{2x-1} + 3(2x-1) = 0$.

Đặt $\sqrt{2x-1} = y$ ($y \geq 0$) thu được $x^2 - 4xy + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow x(x-y) - 3y(x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x-3y) = 0$

- $x - y = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$
- $x - 3y = 0 \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 18x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{9 - 6\sqrt{2}; 9 + 6\sqrt{2}\}$

Đối chiếu với điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$, kết luận tập nghiệm $S = \{9 - 6\sqrt{2}; 1; 9 + 6\sqrt{2}\}$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 - 4x\sqrt{2x-1} + 4(2x-1) = 2x-1 \Leftrightarrow (x - 2\sqrt{2x-1})^2 = (\sqrt{2x-1})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\sqrt{2x-1} \\ x = \sqrt{2x-1} \end{cases}$$

- ❖ Với $x = 3\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 18x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{9 - 6\sqrt{2}; 9 + 6\sqrt{2}\}.$

$$\diamond \text{ Với } x = \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Đối chiếu với điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$, kết luận tập nghiệm $S = \{9 - 6\sqrt{2}; 1; 9 + 6\sqrt{2}\}$.

Nhận xét.

- Lời giải 1 và 4 sử dụng phép biến đổi tương đương thuần túy, trong đó lời giải 1 nâng lũy thừa trực tiếp có kèm theo điều kiện hai vế không âm thông qua nhận xét dựa trên điều kiện. Lời giải 4 thêm bớt hạng tử đưa về hiệu hai bình phương cũng cho kết quả nhanh chóng.
- Lời giải 2 dựa trên phép nhân nghiệm, sử dụng đẳng thức liên hợp đưa phương trình đã cho về dạng tích, tác giả đã trình bày tại Lý thuyết sử dụng đại lượng liên hợp – trục căn thức – hệ tạm thời.
- Lời giải 3 là hướng trọng tâm của tài liệu, mặc dù chỉ sử dụng một ẩn phụ y nhưng thực tế đưa phương trình đã cho về phương trình hai ẩn x và y . Các bạn có thể thấy đa thức hai ẩn $x^2 - 4xy + 3y^2$ dễ dàng phân tích thành hai nhân tử, cụ thể là $(x-y)(x-3y)$.
- Sở dĩ như vậy vì đây là dạng phương trình hai ẩn đồng bậc hai $x^2 - 4xy + 3y^2 = 0$. Ngoài cách giải trên, các bạn có thể tham khảo thêm cách trình bày cùng bản chất sau
Biến đổi về..... $x^2 - 4xy + 3y^2 = 0$.

Xét $y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, không nghiệm đúng phương trình ban đầu.

Xét trường hợp $y \neq 0$ thì ta có $x^2 - 4xy + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{y}\right) + 3 = 0$

Đặt $\frac{x}{y} = t$ ta có $t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2x-1} \\ x = 3\sqrt{2x-1} \end{cases}$

Bài toán 2. Giải phương trình $3(x^2 - 1) + 4x = 4x\sqrt{4x-3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với $3x^2 + 4x - 3 = 4x\sqrt{4x-3}$.

Đặt $\sqrt{4x-3} = y \quad (y \geq 0)$ thu được $3x^2 - 4xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(3x-y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 3x=y \end{cases}$

- $x = y \Leftrightarrow x = \sqrt{4x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1; 3\}$.
- $3x = y \Leftrightarrow 3x = \sqrt{4x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

So sánh điều kiện $x \geq \frac{3}{4}$ ta thu được tập nghiệm $S = \{1; 3\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$3x^2 + 4x - 3 = 4x\sqrt{4x-3} \Leftrightarrow 4x^2 - 4x\sqrt{4x-3} + 4x - 3 = x^2 \Leftrightarrow (2x - \sqrt{4x-3})^2 = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{4x-3} \\ 3x = \sqrt{4x-3} \end{cases}$$

$$\diamond x = \sqrt{4x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{1; 3\}.$$

$$\diamond 3x = \sqrt{4x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm).}$$

So sánh điều kiện ta thu được tập nghiệm $S = \{1; 3\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{4}$. Nhận xét $x \geq \frac{3}{4} \Rightarrow (3x^2 + 4x - 3)x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 9x^4 + 24x^3 - 2x^2 - 24x + 9 &= 16x^2(4x-3) \Leftrightarrow 9x^4 - 40x^3 + 46x^2 - 24x + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x-3)(9x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện thu được hai nghiệm, $S = \{1; 3\}$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{4}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4x(x - \sqrt{4x-3}) = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow \frac{4x(x^2 - 4x + 3)}{x + \sqrt{4x-3}} = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 3)(\sqrt{4x-3} - 3x) = 0.$$

$$\blacksquare x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\blacksquare 3x = \sqrt{4x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 9x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm).}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được tập nghiệm $S = \{1; 3\}$.

Bài toán 3. Giải bất phương trình $2x^2 - 3x + 2 \leq x\sqrt{3x-2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$. Đặt $\sqrt{3x-2} = t$ ($t \geq 0$), ta thu được

$$2x^2 - t^2 \leq xt \Leftrightarrow 2x(x-t) + t(x-t) \leq 0 \Leftrightarrow (2x+t)(x-t) \leq 0 \quad (*).$$

$$\text{Ta có } x \geq \frac{2}{3}; t \geq 0 \Rightarrow 2x+t > 0. \text{ Do đó } (*) \Leftrightarrow x-t \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{3x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x^2 - 3x + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2.$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = [1; 2]$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8x^2 - 12x + 8 &\leq 4x\sqrt{3x-2} \Leftrightarrow 9x^2 \leq x^2 + 4x\sqrt{3x-2} + 4(3x-2) \\ &\Leftrightarrow (3x)^2 \leq (x + 2\sqrt{3x-2})^2 \Leftrightarrow (2x + \sqrt{3x-2})(x - \sqrt{3x-2}) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x - \sqrt{3x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 2 \\ x^2 - 3x + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = [1; 2]$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$.

Nhận xét $x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow (2x^2 - 3x + 2)x > 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x^4 + (3x - 2)^2 - 4x^2(3x - 2) &\leq x^2(3x - 2) \\ \Leftrightarrow 4x^4 - 5x^2(3x - 2) + (3x - 2)^2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2)(4x^2 - 3x + 2) &\leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta có $4x^2 - 3x + 2 = 4\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{23}{16} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $(1) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = [1; 2]$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x(x - \sqrt{3x - 2}) + x^2 - 3x + 2 &\leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x^2 - 3x + 2)}{x + \sqrt{3x - 2}} + x^2 - 3x + 2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(x^2 - 3x + 2)(2x + \sqrt{3x - 2})}{x + \sqrt{3x - 2}} &\leq 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Nhận xét $x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow 2x + \sqrt{3x - 2} > 0; x + \sqrt{3x - 2} > 0$. Do đó $(2) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = [1; 2]$.

Bài toán 4. Giải bất phương trình $4x^2 + 3x + 3 \leq 8x\sqrt{x+1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $4x^2 - 8x\sqrt{x+1} + 3(x+1) \leq 0$.

Đặt $\sqrt{x+1} = y \ (y \geq 0)$ thu được $4x^2 - 8xy + 3y^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2x(2x - 3y) - y(2x - 3y) \leq 0 \Leftrightarrow (2x - y)(2x - 3y) \leq 0$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \begin{cases} 2x - y \leq 0 \\ 2x - 3y \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \leq \sqrt{x+1} \\ 2x \geq 3\sqrt{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - x - 1 \leq 0 \\ 4x^2 - 9x - 9 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{Hệ vô nghiệm}). \\ \bullet \quad \begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ 2x - 3y \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq \sqrt{x+1} \\ 2x \leq 3\sqrt{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - x - 1 \geq 0 \\ 4x^2 - 9x - 9 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \leq x \leq 3. \end{aligned}$$

Kết luận tập nghiệm $S = \left[\frac{1 + \sqrt{17}}{8}; 3 \right]$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$4x^2 - 8x\sqrt{x+1} + 4(x+1) \leq x+1 \Leftrightarrow (2x - 2\sqrt{x+1})^2 \leq (\sqrt{x+1})^2 \Leftrightarrow (2x - 3\sqrt{x+1})(2x - \sqrt{x+1}) \leq 0$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \diamond \quad \begin{cases} 2x \leq \sqrt{x+1} \\ 2x \geq 3\sqrt{x+1} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - x - 1 \leq 0 \\ 4x^2 - 9x - 9 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{Hệ vô nghiệm}). \\ \diamond \quad \begin{cases} 2x \geq \sqrt{x+1} \\ 2x \leq 3\sqrt{x+1} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - x - 1 \geq 0 \\ 4x^2 - 9x - 9 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{17}}{8} \leq x \leq 3. \end{aligned}$$

Kết luận tập nghiệm $S = \left[\frac{1+\sqrt{17}}{8}; 3 \right]$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \geq -1$.

Nhận xét rằng $4x^2 + 3x + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \begin{cases} x > 0 \\ 16x^4 + 9(x+1)^2 + 24x^2(x+1) \leq 64x^2(x+1) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 16x^4 - 40x^2(x+1) + 9(x+1)^2 \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (4x^2 - x - 1)(4x^2 - 9x - 9) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \begin{cases} -\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{1-\sqrt{17}}{8} \\ \frac{1+\sqrt{17}}{8} \leq x \leq 3 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

So sánh điều kiện, kết luận tập nghiệm cần tìm $S = \left[\frac{1+\sqrt{17}}{8}; 3 \right]$.

Bài toán 5. Giải bất phương trình $\sqrt{2-x} + x \geq \frac{4-2x}{x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $0 \neq x \leq 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{x^2 + x\sqrt{2-x} - 2(2-x)}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - \sqrt{2-x})(x + 2\sqrt{2-x})}{x} \geq 0 \quad (*)$$

Xét hai trường hợp

- $0 < x \leq 2 \Rightarrow x + 2\sqrt{2-x} > 0$. Khi đó $(*) \Leftrightarrow x - \sqrt{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 + x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.
- $x < 0 \Rightarrow x - \sqrt{2-x} < 0$; $(*) \Leftrightarrow x + 2\sqrt{2-x} \geq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2-x} \geq -x \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 4x - 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 - 2\sqrt{3} \leq x < 0$.

Kết luận nghiệm $S = [-2 - 2\sqrt{3}; 0) \cup [1; 2]$.

Bài toán 6. Giải bất phương trình $3x^2 + 2x + 7 = 3(x+1)\sqrt{x^2+3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $(x+1)^2 - 3(x+1)\sqrt{x^2+3} + 2(x^2+3) = 0$.

Đặt $x+1 = a; \sqrt{x^2+3} = b$ ($b > 0$). Phương trình trên trở thành

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0 \Leftrightarrow a(a-b) - 2b(a-b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a-2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases}$$

- $a = b \Leftrightarrow x+1 = \sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x + 1 = x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.
- $a = 2b \Leftrightarrow x+1 = 2\sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x + 1 = 4x^2 + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x^2 - 2x + 11 = 0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3(x+1)^2 - 3(x+1)\sqrt{x^2+3} &= 4x-4 \Leftrightarrow 3(x+1)(x+1-\sqrt{x^2+3}) = 4(x-1) \\ \Leftrightarrow \frac{6(x+1)(x-1)}{x+1+\sqrt{x^2+3}} &= 4(x-1) \Leftrightarrow (x-1)(2\sqrt{x^2+3} - x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x+1 = 2\sqrt{x^2+3} \end{cases} \end{aligned}$$

Với $x+1 = 2\sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x + 1 = 4x^2 + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x^2 - 2x + 11 = 0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 12x^2 + 8x + 28 &= 12(x+1)\sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow 4(x^2 + 2x + 1) - 12(x+1)\sqrt{x^2+3} + 9(x^2+3) = x^2 + 3 \\ \Leftrightarrow (2x+2-3\sqrt{x^2+3})^2 &= (\sqrt{x^2+3})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 2\sqrt{x^2+3} \\ x+1 = \sqrt{x^2+3} \end{cases} \end{aligned}$$

- $x+1 = 2\sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x + 1 = 4x^2 + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x^2 - 2x + 11 = 0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).
- $x+1 = \sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x + 1 = x^2 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét $3x^2 + 2x + 7 = 2x^2 + (x+1)^2 + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x+1 > 0 \\ 9x^4 + 12x^3 + 46x^2 + 28x + 49 = 9(x+1)^2(x^2+3) \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x > -1 \\ 3x^3 - 5x^2 + 13x - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ (x-1)(3x^2 - 2x + 11) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 7. Giải phương trình $7x + \frac{2}{x} + 1 = 7\sqrt{x^2 + x + 2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$7x^2 + x + 2 = 7x\sqrt{x^2 + x + 2} \Leftrightarrow x^2 + x + 2 - 7x\sqrt{x^2 + x + 2} + 6x^2 = 0 \quad (1).$$

Đặt $\sqrt{x^2 + x + 2} = t$ ($t > 0$), phương trình (1) trở thành

$$t^2 - 7xt + 6x^2 = 0 \Leftrightarrow t(t - x) - 6x(t - x) = 0 \Leftrightarrow (t - x)(t - 6x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 2} = x \\ \sqrt{x^2 + x + 2} = 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x + 2 = x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x + 2 = 36x^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{281}}{70}$$

Kết luận phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{281}}{70} \right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 7x^2 + x + 2 &= 7x\sqrt{x^2 + x + 2} \Leftrightarrow 28x^2 + 4x + 8 = 28x\sqrt{x^2 + x + 2} \\ \Leftrightarrow 4(x^2 + x + 2) - 28x\sqrt{x^2 + x + 2} + 49x^2 &= 25x^2 \Leftrightarrow (2\sqrt{x^2 + x + 2} - 7x)^2 = (5x)^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + x + 2} = x \\ \sqrt{x^2 + x + 2} = 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x + 2 = x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x + 2 = 36x^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{281}}{70}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất, hay $S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{281}}{70} \right\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $7x^2 + x + 2 = 7x\sqrt{x^2 + x + 2}$ (*).

Nhận xét $7x^2 + x + 2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 49x^4 + 14x^3 + 29x^2 + 4x + 4 = 49x^2(x^2 + x + 2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 35x^3 + 69x^2 - 4x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x + 2)(35x^2 - x - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{281}}{70} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{281}}{70} \right\}$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$7x^2 + \frac{x+2}{x} = 7x\sqrt{x^2+x+2} \Leftrightarrow 7(\sqrt{x^2+x+2}-x) = \frac{x+2}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7(x+2)}{\sqrt{x^2+x+2}+x} = \frac{x+2}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ \sqrt{x^2+x+2}=6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ 35x^2-x-2=0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=\frac{1+\sqrt{281}}{70} \end{cases}$$

Thử lại nghiệm, kết luận $S = \left\{ \frac{1+\sqrt{281}}{70} \right\}$.

Bài toán 8. Giải phương trình $\frac{6x^2+4x+8}{x+1} = 5\sqrt{2x^2+3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$6x^2+4x+8 = 5(x+1)\sqrt{2x^2+3}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2+2x+1) - 5(x+1)\sqrt{2x^2+3} + 2(2x^2+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 - 5(x+1)\sqrt{2x^2+3} + 2(2x^2+3) = 0$$

Đặt $x+1=u$; $\sqrt{2x^2+3}=v$ ($v>0$) thu được

$$2u^2 - 5uv + 2v^2 = 0 \Leftrightarrow (u-2v)(2u-v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=2v \\ v=2u \end{cases}$$

Xét các trường hợp

$$\checkmark \quad u=2v \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+2x+1=8x^2+12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 7x^2-2x+11=0 \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm).}$$

$$\checkmark \quad v=2u \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^2+3=4(x^2+2x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2x^2+8x+1=0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-4+\sqrt{14}}{2}.$$

Đổi chiếu điều kiện kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = \frac{-4+\sqrt{14}}{2}$.

Bài toán 9. Giải phương trình $x^2 - 5x\sqrt{2x-3} + 4(2x-3) = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$.

Đặt $\sqrt{2x-3}=y$ ($y \geq 0$) thì phương trình đã cho trở thành

$$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x-4y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=4y \end{cases}$$

$$\blacksquare \quad x=y \Leftrightarrow x=\sqrt{2x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-2x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-1)^2=-2 \end{cases} \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\blacksquare \quad x=4y \Leftrightarrow x=4\sqrt{2x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-32x+48=0 \end{cases} \Rightarrow x \in \{16+4\sqrt{13}; 16-4\sqrt{13}\}.$$

Đổi chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm kể trên.

Bài toán 10. Giải bất phương trình $5x^2 + 2x + 2 \leq 5x\sqrt{x^2 + x + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $3x^2 - 5x\sqrt{x^2 + x + 1} + 2(x^2 + x + 1) \leq 0$.

Đặt $\sqrt{x^2 + x + 1} = y$ ($y > 0$) $\Rightarrow \frac{2}{3}y < y$. Thu được

$$\begin{aligned} 3x^2 - 5xy + 2y^2 \leq 0 &\Leftrightarrow 3x^2 - 3xy - 2xy + 2y^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 3x(x - y) - 2y(x - y) \leq 0 \Leftrightarrow (3x - 2y)(x - y) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}y \leq x \leq y \end{aligned}$$

Nhận xét $y > 0$; $\frac{2}{3}y \leq x \leq y \Rightarrow x > 0$. Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \circ \quad 2y \leq 3x &\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x^2 + x + 1) \leq 9x^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 4x - 4 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{2 + 2\sqrt{6}}{5}. \\ \circ \quad x \leq y &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 \leq x^2 + x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0. \end{aligned}$$

Kết hợp hai trường hợp ta có nghiệm $x > 0$.

Nhận xét.

- Các bài toán từ 2 đến 10 đều được giải bằng khá nhiều phương pháp, bao gồm biến đổi tương đương (nâng lũy thừa trực tiếp, thêm bớt đưa về hiệu hai bình phương), sử dụng đẳng thức liên hợp và trọng tâm là đặt ẩn phụ không hoàn toàn.
- Điểm đặc biệt trong các bài toán trên, khi đặt ẩn phụ hoàn toàn (hoặc không hoàn toàn) đều đưa về các phương trình (hoặc bất phương trình) bậc hai có tính chất đồng bậc bậc hai $ax^2 - bxy + cy^2 = 0$, thao tác phân tích nhân tử trở nên đơn giản. Các bạn có thể lựa chọn một trong các phương án sau

- Tính nghiệm, đưa trực tiếp về nhân tử $(mx - ny)(px - qy) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} mx = ny \\ px = qy \end{cases}$
- Xét trường hợp $y = 0$ (hoặc $x = 0$) có là nghiệm của phương trình ban đầu hay không.
Xét trường hợp $y \neq 0$ (tương ứng $x \neq 0$), chia hai vế cho $y^2 \neq 0$ thu được

$$a\left(\frac{x}{y}\right)^2 - b\left(\frac{x}{y}\right) + c = 0 \quad (\text{tương ứng } c\left(\frac{y}{x}\right)^2 - b\left(\frac{y}{x}\right) + a = 0).$$

Đặt $\frac{x}{y} = t$ (tương ứng $\frac{y}{x} = t$) quy về phương trình cơ bản $at^2 - bt + c = 0$ ($ct^2 - bt + a = 0$).

Quan sát thấy tính chất đồng bậc, đặt trực tiếp $x = ky$ đưa về

$$ak^2y^2 - bky^2 + cy^2 = 0 \Leftrightarrow y^2(ak^2 - bk + c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ ak^2 - bk + c = 0 \end{cases}$$

Suy ra hai trường hợp Giải phương trình bậc hai ẩn k sẽ thu được tỷ lệ giữa x và y .

Lưu ý do vai trò của x và y bình đẳng nên các bạn có thể chia cho x hoặc y mà không ảnh hưởng tới kết quả của bài toán. Nếu bài toán là bất phương trình thì trước khi chia cần xét dấu của y (tương ứng x). Tùy theo từng trường hợp có thể chọn phép chia hợp lý và tiết kiệm nhất, sử dụng các đánh giá thông thường đảm bảo cho lời giải được gọn gàng (điển hình bài toán 10).

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $4x^2 + 12x = 9 + 7x\sqrt{4x-3}.$

2. $\frac{2}{x} + 4x + 2 = 5\sqrt{x^2 + x + 1}.$

3. $4x^2 + 10x + 5 \geq 4x\sqrt{x^2 + 4x + 2}.$

4. $5\sqrt{4-x} + x^2 - 4x + 4 = 6(2-x)\sqrt{4-x}$

5. $7x^2 + 4x + 10 \leq 7(x+2)\sqrt{x^2 + 1}.$

6. $x\sqrt{1-x} + 2(1-x) = x^2$

7. $6x^2 - 6x + 5 \leq 5(x-1)\sqrt{2x^2 + 2x + 1}.$

8. $2008x^2 - 4x + 3 = 2007x\sqrt{4x-3}.$

9. $\frac{2x^2 - 4x + 5}{x-2} \leq 3\sqrt{x^2 + 1}.$

10. $6x^2 - x \geq 21 + (x-3)\sqrt{x^2 + x - 6}.$

11. $2012x + \frac{4}{x} = 2011\sqrt{5x-4} + 5.$

12. $x^2 + 11x + 42 = 2x\sqrt{11x + 42}.$

13. $4x^2 + 12x\sqrt{1+x} \geq 27(x+1).$

14. $4x^2 + 1 + 5x\sqrt{1-x} = x.$

15. $(3x-1)(3x+1) - 8x\sqrt{x+1} = x.$

16. $7 + 3(1-x)\sqrt{2-x} = x^2 + 2x.$

17. $6x - 3 + \frac{2}{x} \leq 6\sqrt{x^2 - 3x + 2}.$

18. $3x + 4 - \frac{4}{x} = 7\sqrt{x-1}.$

19. $5x^2 - 5x\sqrt{x^2 + x + 4} + 2x + 5 = 0.$

20. $\frac{3x^2 + 22x + 47}{x+3} \leq 7\sqrt{5+x}.$

21. $2x^2 - 3x + 2 = x\sqrt{3x-2}.$

22. $2(x^2 + 6) - 5x\sqrt{6-x} \leq 2x.$

23. $2(x+1)^2 - 7(x+1)\sqrt{4-x} + 4 = x.$

24. $5x^2 - 5x\sqrt{x^2 + x + 1} = x + 1.$

25. $3x + 5\left(1 + \frac{3}{x}\right) < 8\sqrt{3+x}.$

26. $9x^2 + 8x + 9 = 9(x+1)\sqrt{2x^2 + 1}.$

27. $12 + 5(x-2)\sqrt{3x^2 + x} > 5x^2 + 20x.$

28. $3x + \frac{1}{x} + 2 = 3\sqrt{x^2 + 4x + 2}.$

Bài toán 11. Giải phương trình $x^2 + 5x + 7 = 7\sqrt{x^3 + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -1$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2 - x + 1 - 7\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x^2 - x + 1} + 6x + 6 = 0$.

Đặt $\sqrt{x^2 - x + 1} = u; \sqrt{x+1} = v$ ($u > 0; v \geq 0$) ta thu được $u^2 - 7uv + 6u^2 = 0 \Leftrightarrow (u-v)(u-6v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = 6v \end{cases}$

- $u = v \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - x + 1 = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$
- $u = 6v \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} = 6\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 37x - 35 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{37 + \sqrt{1509}}{2}; \frac{37 - \sqrt{1509}}{2} \right\}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $S = \left\{ 0; 2; \frac{37 + \sqrt{1509}}{2}; \frac{37 - \sqrt{1509}}{2} \right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -1$.

Nhận xét $x^2 + 5x + 7 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^4 + 10x^3 + 39x^2 + 70x + 49 &= 49(x^3 + 1) \Leftrightarrow x^4 - 39x^3 + 39x^2 + 70x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-2)(x^2 - 37x - 35) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ 0; 2; \frac{37 + \sqrt{1509}}{2}; \frac{37 - \sqrt{1509}}{2} \right\} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $S = \left\{ 0; 2; \frac{37 + \sqrt{1509}}{2}; \frac{37 - \sqrt{1509}}{2} \right\}$.

Nhận xét.

Lời giải 1 đặt ắn phụ đưa về phương trình đồng bậc bậc hai với hai ắn u và v . Đối với các căn thức có thể khai phương theo hằng dẫn thức, các bạn chú ý

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \text{ và } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Bài toán 12. Giải bất phương trình $(x-1)^2 + 3 \leq 2\sqrt{x^3 - 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $x^2 - 2x + 4 \leq 2\sqrt{x^3 - 1} \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - 2\sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \sqrt{x-1} - 3(x-1) \leq 0$.

Đặt $\sqrt{x^2 + x + 1} = u; \sqrt{x-1} = v$ ($u > 0; v \geq 0$) thu được

$$\begin{aligned} u^2 - 2uv - 3v^2 \leq 0 &\Leftrightarrow (u+v)(u-3v) \leq 0 \Leftrightarrow u \leq 3v \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 1} \leq 3\sqrt{x-1} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + x + 1 \leq 9x - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 8x + 10 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 - \sqrt{6} \leq x \leq 4 + \sqrt{6} \end{aligned}$$

Kết luận tập nghiệm $S = [4 - \sqrt{6}; 4 + \sqrt{6}]$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 1$.

Nhận xét $(x-1)^2 + 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 16 \leq 4x^3 - 4 \Leftrightarrow x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 16x + 20 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 8x + 10)(x^2 + 2) \leq 0 \Leftrightarrow 4 - \sqrt{6} \leq x \leq 4 + \sqrt{6}$$

Kết luận tập nghiệm $S = [4 - \sqrt{6}; 4 + \sqrt{6}]$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \geq 1$.

- Xét trường hợp $x = 1$ không thỏa mãn bất phương trình ban đầu.
- Xét trường hợp $x > 1$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 + 2 \leq 2x - 2 + 2\sqrt{x^3 - 1} \Leftrightarrow x^2 + 2 \leq 2(\sqrt{x^3 - 1} + x - 1) \Leftrightarrow x^2 + 2 \leq \frac{2(x^3 - x^2 + 2x - 2)}{\sqrt{x^3 - 1} - x + 1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 \leq 2(x^2 + 2) \frac{x - 1}{\sqrt{x^3 - 1} - x + 1} \Leftrightarrow \frac{2x - 2}{\sqrt{x^3 - 1} - x + 1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x - 1}} \geq 1 \quad (*)$$

Nhận xét: $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x - 1} = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x - 1}} > 0 \forall x > 1$. Do đó

$$(*) \Leftrightarrow 2\sqrt{x - 1} \geq \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x - 1} \Leftrightarrow 3\sqrt{x - 1} \geq \sqrt{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 8x + 10 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [4 - \sqrt{6}; 4 + \sqrt{6}].$$

Kết luận tập nghiệm $S = [4 - \sqrt{6}; 4 + \sqrt{6}]$.

Nhận xét.

- Bài toán 12 thuộc lớp bất phương trình giải được thông qua phép đặt ẩn phụ, đưa về phương trình đồng bậc bậc hai, kết quả phân tích nhân tử rất đẹp mắt. Trong thao tác giải bất phương trình, các bạn cần chú ý điều kiện xác định (hoặc điều kiện có nghiệm), điều kiện của ẩn phụ để giảm thiểu các trường hợp xảy ra, giảm nhẹ tính toán và làm cho lời giải trở nên súc tích.
- Lời giải 2 sử dụng phép nâng lũy thừa trực tiếp (sau khi nhận xét hai vế không âm).
- Lời giải 3 sử dụng đẳng thức liên hợp, nhóm hạng tử phân tích thành thừa số, giản ước đưa về bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức. Tuy nhiên, sử dụng linh hoạt đẳng thức liên hợp "thêm một lần", hệ quả thu được đã trở nên đơn giản.

Bài toán 13. Giải bất phương trình $x^2 + 13 + 3\sqrt{x^3 + 2x - 3} \geq 9x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x^3 + 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $x^2 + x + 3 + 3\sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{x^2 + x + 3} - 10(x - 1) \geq 0$

Đặt $\sqrt{x^2 + x + 3} = a; \sqrt{x - 1} = b \quad (a > 0; b \geq 0)$ thu được

$$a^2 + 3ab - 10b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a(a + 5b) - 2b(a + 5b) \geq 0 \Leftrightarrow (a - 2b)(a + 5b) \geq 0 \Leftrightarrow a - 2b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 3} \geq 2\sqrt{x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x + 7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S = [1; +\infty)$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x^3 + 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $3\sqrt{x^3 + 2x - 3} \geq -(x^2 - 9x + 13) \quad (1).$

- Xét $x^2 - 9x + 13 > 0$, bất phương trình (1) nghiệm đúng.

- Xét $x^2 - 9x + 13 \leq 0$, ta có

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9x + 13 \leq 0 \\ 9(x^3 + 2x - 3) \geq x^4 - 18x^3 + 107x^2 - 234x + 169 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9x + 13 \leq 0 \\ x^4 - 27x^3 + 107x^2 - 252x + 196 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9x + 13 \leq 0 \\ (x^2 - 3x + 7)(x^2 - 24x + 28) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 9x + 13 \leq 0 \\ x^2 - 24x + 28 \leq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Ta có $x^2 - 9x + 13 \leq 0; x \geq 1 \Rightarrow x^2 - 9x + 13 - 15(x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 24x + 28 \leq 0$.

Vậy (*) nghiệm đúng với $x^2 - 9x + 13 \leq 0$.

Kết hợp hai trường hợp, (1) nghiệm đúng với mọi giá trị x thuộc tập xác định, hay $x \geq 1$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x^3 + 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 - 3x + 7 + 3\left(\sqrt{x^3 + 2x - 3} - 2x - 2\right) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 7 + \frac{3(x^3 - 4x^2 + 10x - 7)}{\sqrt{x^3 + 2x - 3} + 2x + 2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 7 + \frac{3(x - 1)(x^2 - 3x + 7)}{\sqrt{x^3 + 2x - 3} + 2x + 2} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 7) \left[1 + \frac{3(x - 1)}{\sqrt{x^3 + 2x - 3} + 2x + 2} \right] \geq 0 \quad (2)$$

Nhận xét $x^2 - 3x + 7 > 0 \forall x \in \mathbb{R}; x \geq 1 \Rightarrow 1 + \frac{3(x - 1)}{\sqrt{x^3 + 2x - 3} + 2x + 2} > 0$. Vậy (2) nghiệm đúng với $x \geq 1$.

Kết luận tập nghiệm $S = [1; +\infty)$.

Nhận xét.

- Lời giải 1 sử dụng phép đặt ẩn phụ đưa về bất phương trình đồng bậc (đẳng cấp) bậc hai. Khi đó với điều kiện mới của ẩn, chúng ta dễ dàng lập luận loại bỏ một trường hợp.
- Lời giải 2 nâng lũy thừa trực tiếp, thu được bất phương trình đa thức bậc 4, sử dụng hệ số bất định đưa về nhân tử. Các bạn chú ý kết hợp điều kiện xác định để tránh được các phép biến đổi căn thức phức tạp.

Bài toán 14. Giải bất phương trình $3x^2 + 27 \geq 7\sqrt{x^3 + x} - 10 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x^3 + x - 10 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 5) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $3(x^2 + 2x + 5) - 6(x - 2) \geq 7\sqrt{x^2 + 2x + 5} \cdot \sqrt{x - 2}$

Đặt $\sqrt{x^2 + 2x + 5} = u; \sqrt{x - 2} = v \quad (u \geq 13; v \geq 0)$, quy về

$$3u^2 - 7uv - 6v^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3u(u - 3v) + 2v(u - 3v) \geq 0 \Leftrightarrow (u - 3v)(3u + 2v) \geq 0 \Leftrightarrow u \geq 3v$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 5} \geq 3\sqrt{x - 2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 7x + 23 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

Kết luận tập nghiệm $S = [2; +\infty)$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x^3 + x - 10 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 5) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$9x^4 + 162x^2 + 729 \geq 49x^3 + 49x - 490 \Leftrightarrow 9x^4 - 49x^3 + 162x^2 - 49x + 1219 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 7x + 23)(9x^2 + 14x + 53) \geq 0 \quad (1)$$

Ta có $x^2 - 7x + 23 > 0 \forall x \in \mathbb{R}; 9x^2 + 14x + 53 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên (1) nghiệm đúng với mọi giá trị x thuộc tập xác định.
Kết luận tập hợp nghiệm $S = [2; +\infty)$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x^3 + x - 10 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 5) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

- Nhận xét $x = 2$ không là nghiệm của bất phương trình ban đầu.
- Xét trường hợp $x > 2$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3x^2 - 21x + 69 &\geq 7\left(\sqrt{x^3 + x - 10} - 3x + 6\right) \Leftrightarrow 3(x^2 - 7x + 23) \geq \frac{7(x^3 - 9x^2 + 37x - 46)}{\sqrt{x^3 + x - 10} + 3x - 6} \\ &\Leftrightarrow 3(x^2 - 7x + 23) \geq \frac{7(x - 2)(x^2 - 7x + 23)}{\sqrt{x^3 + x - 10} + 3x - 6} \Leftrightarrow (x^2 - 7x + 23) \left[\frac{7(x - 2)}{\sqrt{x^3 + x - 10} + 3x - 6} - 3 \right] \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{7(x - 2)}{\sqrt{(x - 2)(x^2 + 2x + 5)} + 3(x - 2)} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x^2 + 2x + 5} + 3\sqrt{x - 2}} \leq 3 \\ &\Leftrightarrow 7\sqrt{x - 2} \leq 3\sqrt{x^2 + 2x + 5} + 9\sqrt{x - 2} \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 2x + 5} + 2\sqrt{x - 2} \geq 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi giá trị x thuộc tập xác định.

Do đó ta có tập nghiệm $S = [2; +\infty)$.

Nhận xét.

- Lời giải 2 sử dụng phép bình phương trực tiếp và hệ số bất định, phân tích phương trình bậc bốn hệ quả về hai phương trình bậc hai, hết sức may mắn khi hai tam thức bậc hai luôn luôn dương với mọi giá trị của biến, suy ra tập nghiệm chính là tập xác định của phương trình ban đầu. Lời giải 3 sử dụng đẳng thức liên hợp kết hợp điều kiện xác định, tránh được việc biện luận dấu mẫu thức của phương trình hệ quả, và cho kết quả hoàn toàn tương tự.
- Lời giải 1 ngắn gọn, súc tích dựa trên quan sát $\sqrt{x^3 + x - 10} = \sqrt{x - 2} \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 5}$. Có thể thấy phía ngoài căn thức là $3x^2 + 27$, dễ dàng đặt ẩn phụ và phân tích nhân tử. Trong một số trường hợp, điều này không đơn giản, mời các bạn theo dõi các thí dụ tiếp theo.

Bài toán 15. Giải phương trình $5x^2 - x + 5 = 5\sqrt{x^4 + x^2 + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$.

Phương trình đã cho tương đương với $2(x^2 + x + 1) + 3(x^2 - x + 1) = 5\sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \sqrt{x^2 - x + 1}$

Đặt $\sqrt{x^2 + x + 1} = u; \sqrt{x^2 - x + 1} = v \quad (u > 0; v > 0)$ thu được

$$2u^2 + 3v^2 = 5uv \Leftrightarrow 2u(u - v) = 3v(u - v) \Leftrightarrow (2u - 3v)(u - v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ 2u = 3v \end{cases}$$

- $u = v \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x = 0$.
- $2u = 3v \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 4 = 9x^2 - 9x + 9 \Leftrightarrow 5x^2 - 13x + 5 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{13 + \sqrt{69}}{10}; \frac{13 - \sqrt{69}}{10} \right\}$.

Kết luận tập nghiệm $S = \left\{ 0; \frac{13 - \sqrt{69}}{10}; \frac{13 + \sqrt{69}}{10} \right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét $5x^2 - x + 5 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$25x^4 + 50x^2 + 25 - 10x(x^2 + 1) + x^2 = 25(x^4 + x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 10x^3 - 26x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow x(5x^2 - 13x + 5) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ 0; \frac{13 - \sqrt{69}}{10}; \frac{13 + \sqrt{69}}{10} \right\}$$

Kết luận tập nghiệm $S = \left\{ 0; \frac{13 - \sqrt{69}}{10}; \frac{13 + \sqrt{69}}{10} \right\}$.

Nhận xét.

- Lời giải 1 đặt ắn đưa về phương trình đồng bậc dựa trên quan sát $\sqrt{x^4 + x^2 + 1} = \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \sqrt{x^2 - x + 1}$. Tuy nhiên để có được biểu thị đẹp mắt $5x^2 - x + 5 = 2(x^2 + x + 1) + 3(x^2 - x + 1)$ là một vấn đề không đơn giản, nguyên do cả hai nhân tử đều có dạng tam thức bậc hai. Ngoài cặp hệ số $(2; 3)$, các cặp số khác cũng khá khả thi, chẳng hạn $(4; 1), (1; 4), (3; 2), (6; -1), (-2; 7), \dots$

- Các bạn có thể sử dụng đồng nhất thức để tìm được các hệ số 2 và 3.

Đặt ắn phụ $\sqrt{x^2 + x + 1} = u; \sqrt{x^2 - x + 1} = v$ ($u > 0; v > 0$), giả định

$$5x^2 - x + 5 = mu^2 + nv^2 = m(x^2 + x + 1) + n(x^2 - x + 1) = (m + n)x^2 + (m - n)x + m + n.$$

$$\text{Đồng nhất} \begin{cases} m + n = 5 \\ m - n = -1 \\ m + n = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases}$$

- Lưu ý một số phép biến đổi đồng nhất quen thuộc sau đây

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

$$4x^4 + 1 = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^2 = (2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1)$$

$$x^4 + 64 = x^4 + 16x^2 + 64 - 16x^2 = (x^2 - 4x + 8)(x^2 + 4x + 8) \dots$$

Bài toán 16. Giải phương trình $2x^2 - x + 1 = \sqrt{4x^4 + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$4x^4 - 4x^3 + x^2 + 2(2x^2 - x) + 1 = 4x^4 + 1 \Leftrightarrow 4x^3 - 5x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(4x^2 - 5x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases}$$

Phương trình $4x^2 - 5x + 2 = 0$ vô nghiệm do $\Delta < 0$. Kết luận tập nghiệm $S = \{0\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$8x^2 - 4x + 4 = 4\sqrt{(2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1)} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 1 + 3(2x^2 - 2x + 1) = 4\sqrt{2x^2 - 2x + 1} \cdot \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

Đặt $\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = u; \sqrt{2x^2 - 2x + 1} = v$ ($u > 0; v > 0$) ta thu được

$$u^2 + 3v^2 = 4uv \Leftrightarrow (u - v)(u - 3v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = 3v \end{cases}$$

- $u = v \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x = 0$.

- $u = 3v \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 2x + 1} = 3\sqrt{2x^2 - 2x + 1} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 1 = 9(2x^2 - 2x + 1) \Leftrightarrow 16x^2 - 20x + 8 = 0$ (Vô nghiệm)

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{0\}$.

Bài toán 17. Giải phương trình $8x^2 + 20x + 1 = \sqrt{64x^4 + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét $64x^4 + 1 = (8x^2 + 1)^2 - 16x^2 = (8x^2 + 4x + 1)(8x^2 - 4x + 1)$. Phương trình đã cho tương đương với

$$3(8x^2 + 4x + 1) - 2(8x^2 - 4x + 1) = \sqrt{8x^2 + 4x + 1} \cdot \sqrt{8x^2 - 4x + 1}$$

Đặt $\sqrt{8x^2 + 4x + 1} = a; \sqrt{8x^2 - 4x + 1} = b$ ($a > 0; b > 0$) ta thu được

$$3a^2 - 2b^2 = ab \Leftrightarrow 3a(a - b) + 2b(a - b) = 0 \Leftrightarrow (a - b)(3a + 2b) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \sqrt{8x^2 + 4x + 1} = \sqrt{8x^2 - 4x + 1} \Leftrightarrow 8x^2 + 4x + 1 = 8x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{0\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} 8x^2 + 20x + 1 \geq 0 \\ 64x^4 + 16x^2 + 1 + 40x(8x^2 + 1) + 400x^2 = 64x^4 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 + 20x + 1 \geq 0 \\ 320x^3 + 416x^2 + 40x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 + 20x + 1 \geq 0 \\ x(40x^2 + 52x + 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \begin{cases} 8x^2 + 20x + 1 \geq 0 \\ 40x^2 + 52x + 5 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{0\}$.

Bài toán 18. Giải bất phương trình $3\sqrt{81x^4 + 4} \geq 27x^2 + 42x + 6$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét $81x^4 + 4 = 81x^4 + 36x^2 + 4 - 36x^2 = (9x^2 + 2)^2 - (6x)^2 = (9x^2 - 6x + 2)(9x^2 + 6x + 2)$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$3\sqrt{9x^2 - 6x + 2} \cdot \sqrt{9x^2 + 6x + 2} \geq 5(9x^2 + 6x + 2) - 2(9x^2 - 6x + 2).$$

Đặt $\sqrt{9x^2 + 6x + 2} = u; \sqrt{9x^2 - 6x + 2} = v$ ($u > 0; v > 0$) quy về

$$3uv \geq 5u^2 - 2v^2 \Leftrightarrow u(5u + 2v) - v(5u + 2v) \leq 0 \Leftrightarrow (u - v)(5u + 2v) \leq 0 \Leftrightarrow u \leq v$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9x^2 + 6x + 2} \leq \sqrt{9x^2 - 6x + 2} \Leftrightarrow 9x^2 + 6x + 2 \leq 9x^2 - 6x + 2 \Leftrightarrow x \leq 0$$

Kết luận nghiệm $S = (-\infty; 0]$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Xét hai trường hợp

- $27x^2 + 42x + 6 < 0$, bất phương trình đã cho nghiệm đúng.
- $27x^2 + 42x + 6 \geq 0$, bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 27x^2 + 42x + 6 \geq 0 \\ 9(81x^4 + 4) \geq 729x^4 + 324x^2 + 36 + 84x(27x^2 + 6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27x^2 + 42x + 6 \geq 0 \\ 2268x^3 + 324x^2 + 504x \leq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 27x^2 + 42x + 6 \geq 0 \\ x(63x^2 + 9x + 14) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27x^2 + 42x + 6 \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp hai trường hợp thu được nghiệm $S = (-\infty; 0]$.

Bài toán 19. Giải bất phương trình $x^2 - 4x + 2 \geq \sqrt{x^4 + 4}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2x^2 - 8x + 4 \geq 2\sqrt{x^4 + 4} \Leftrightarrow 3(x^2 - 2x + 2) - (x^2 + 2x + 2) \geq 2\sqrt{x^2 - 2x + 2} \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 2}.$$

Đặt $\sqrt{x^2 - 2x + 2} = a; \sqrt{x^2 + 2x + 2} = b$ ($a > 0; b > 0$) ta thu được

$$3a^2 - b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a(3a + b) - b(3a + b) \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)(3a + b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a \geq b \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq \sqrt{x^2 + 2x + 2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 \geq x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow x \leq 0$$

Kết luận: Bất phương trình ban đầu có tập nghiệm $S = (-\infty; 0]$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 2 \geq 0 \\ x^4 + 4x^2 + 4 - 8x(x^2 + 2) + 16x^2 \geq x^4 + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2 \geq 0 \\ x(2x^2 - 5x + 4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2 \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 0.$$

Kết luận: Bất phương trình ban đầu có tập nghiệm $S = (-\infty; 0]$.

Bài toán 20. Giải phương trình $3x^2 - 4x + 23 = 3\sqrt{x^4 - 8x + 63}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x^4 - 8x + 63 \geq 0$.

Nhận xét $x^4 - 8x + 63 = x^4 + 16x^2 + 64 - (16x^2 + 8x + 1) = (x^2 + 8)^2 - (4x + 1)^2 = (x^2 + 4x + 9)(x^2 - 4x + 7)$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2(x^2 - 4x + 7) + x^2 + 4x + 9 = 3\sqrt{x^2 - 4x + 7} \cdot \sqrt{x^2 + 4x + 9}$$

Đặt $\sqrt{x^2 - 4x + 7} = u; \sqrt{x^2 + 4x + 9} = v$ ($u > 0; v > 0$) ta thu được

$$2u^2 + v^2 = 3uv \Leftrightarrow (u - v)(2u - v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ 2u = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4x + 7} = \sqrt{x^2 + 4x + 9} \\ 2\sqrt{x^2 - 4x + 7} = \sqrt{x^2 + 4x + 9} \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$\blacksquare (1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 7 = x^2 + 4x + 9 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

$$\blacksquare (2) \Leftrightarrow 4(x^2 - 4x + 7) = x^2 + 4x + 9 \Leftrightarrow 3x^2 - 20x + 19 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{10 - \sqrt{43}}{3}, \frac{10 + \sqrt{43}}{3} \right\}.$$

So sánh điều kiện, kết luận nghiệm $S = \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{10-\sqrt{43}}{3}; \frac{10+\sqrt{43}}{3} \right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x^4 - 8x + 63 \geq 0$.

Nhận xét $3x^2 - 4x + 23 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$9x^4 - 24x^3 + 16x^2 + 46(3x^2 - 4x) + 23^2 = 9(x^4 - 8x + 63) \Leftrightarrow 24x^3 - 154x^2 + 112x - 38 = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x^3 - 77x^2 + 56x - 19 = 0 \Leftrightarrow (4x+1)(3x^2 - 20x + 19) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ 0; \frac{10-\sqrt{43}}{3}; \frac{10+\sqrt{43}}{3} \right\}$$

So sánh điều kiện, kết luận nghiệm $S = \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{10-\sqrt{43}}{3}; \frac{10+\sqrt{43}}{3} \right\}$.

Bài toán 21. Giải phương trình $x^2 + 5x - 2 = 4\sqrt{x^3 - 8}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$.

- Xét $x = 2$ không thỏa mãn phương trình ban đầu.
- Xét $x > 2$, phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 + 2x + 4 + 3(x-2) = 4\sqrt{x^2 + 2x + 4} \cdot \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 4}{x-2} + 3 = 4\sqrt{\frac{x^2 + 2x + 4}{x-2}}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 4}{x-2}} = t \quad (t > 0) \text{ thu được } t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=3 \end{cases}$$

Với $t = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x + 6 = 0$ (Vô nghiệm).

Với $t = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 = 9x - 18 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 22 = 0$ (Vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 22. Giải bất phương trình $2x^2 + 5x - 1 > 7\sqrt{x^3 - 1}$ ($x \in \mathbb{R}$)

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1$. Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$3(x-1) + 2(x^2 + x + 1) > 7\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

Đặt $\sqrt{x-1} = a; \sqrt{x^2 + x + 1} = b$ ($a \geq 0; b > 0$) thu được

$$3a^2 - 7ab + 2b^2 > 0 \Leftrightarrow (3a-b)(a-2b) > 0 \Leftrightarrow \frac{9a^2 - b^2}{3a+b} \cdot \frac{a^2 - 4b^2}{a+2b} > 0$$

$$\Leftrightarrow (9a^2 - b^2)(a^2 - 4b^2) > 0 \Leftrightarrow (8x^2 - 19x + 8)(3x^2 + 6x + 3) < 0$$

$$\Leftrightarrow (8x^2 - 19x + 8)(x+1)^2 < 0 \Leftrightarrow \frac{19-\sqrt{105}}{16} < x < \frac{19+\sqrt{105}}{16}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $1 < x < \frac{19+\sqrt{105}}{16}$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $5x^2 + 6x + 4 = 6\sqrt{x^3 - 1}$.
2. $4x^2 + 7x + 1 = 7\sqrt{x^3 - 1}$.
3. $x^2 + 3x + 5 \leq 5\sqrt{x^3 + 1}$.
4. $\frac{5x^2 - 2x + 8}{\sqrt{x^3 + 1}} < 8$.
5. $\frac{10\sqrt{x^3 - 8}}{x^2 + 11x - 14} \leq 1$.
6. $3x^2 - \sqrt{2}x + 3 = 3\sqrt{x^4 + 1}$.
7. $11x^2 + 6x + 22 \leq 11\sqrt{x^4 + 4}$.
8. $\frac{5\sqrt{4x^4 + 1}}{10x^2 - 6x + 5} > 1$.
9. $72x^2 - 4x + 9 \leq 9\sqrt{64x^4 + 1}$.
10. $5x^2 - 6x + 28 = 9\sqrt{x^3 + 8}$.
11. $4x^2 + 15x + 45 \leq 7\sqrt{x^3 - 27}$.
12. $x^2 + x + 21 < 5\sqrt{x^3 + 27}$.
13. $\frac{x^2 + x + 36}{\sqrt{x^3 + 64}} = 6$.
14. $\sqrt{x^3 - 64} \leq 3x^2 + 10x + 56$.
15. $x^2 + 4x + 1 = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$.
16. $7x^2 - 5x + 7 > 7\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$.
17. $\frac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{3x^2 - 5x + 3} \leq \frac{1}{3}$.
18. $4x^2 - 4x + 1 \leq 2\sqrt{16x^4 + 4x^2 + 1}$.
19. $x^2 + 6x - 1 > 5\sqrt{x^3 + 3x - 14}$.
20. $\frac{6x^2 + 14x + 35}{\sqrt{2x^3 + 5x - 26}} > 5$.
21. $4x^2 + 17x + 99 \leq \sqrt{x^3 + 4x^2 - 24}$.
22. $x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 \leq \sqrt{1 + x^4}$.
23. $4x^2 - 4x + 31 \leq 4\sqrt{x^4 - 8x + 63}$.
24. $1 \leq \frac{\sqrt{x^4 - x^2 + 4}}{3x^2 - 7\sqrt{5}x + 6}$.
25. $4x^2 - \sqrt{7}x + 1 \leq 2\sqrt{4x^4 - 3x^2 + 1}$.
26. $20x^2 - 3x + 5 = 5\sqrt{16x^4 - x^2 + 1}$.
27. $\frac{7\sqrt{x^2(x+1)} - 2}{5x^2 + 12x + 8} > 1$.

Bài toán 23. Giải phương trình $\sqrt{2x-1} + 2\sqrt{2-x} = 3\sqrt[4]{(2x-1)(2-x)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{2x-1} + 2\sqrt{2-x} = 3\sqrt[4]{2x-1} \cdot \sqrt[4]{2-x}$.

Đặt $\sqrt[4]{2x-1} = u; \sqrt[4]{2-x} = v$ ($u \geq 0; v \geq 0$) ta có $u^2 + 2v^2 = 3uv \Leftrightarrow (u-v)(u-2v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = 2v \end{cases}$

- $u = v \Leftrightarrow 2x-1 = 2-x \Leftrightarrow x = 1$.
- $u = 2v \Leftrightarrow \sqrt[4]{2x-1} = 2\sqrt[4]{2-x} \Leftrightarrow 2x-1 = 16(2-x) \Leftrightarrow \frac{11}{6}$.

So sánh điều kiện $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ ta thu được tập nghiệm $S = \left\{ \frac{11}{6}; 1 \right\}$.

Bài toán 24. Giải phương trình $3\sqrt{3x-2} + 4\sqrt{4x-3} = 7\sqrt[4]{12x^2-17x+6}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{4}$.

Phương trình đã cho tương đương với $3\sqrt{3x-2} + 4\sqrt{4x-3} = 7\sqrt[4]{3x-2} \cdot \sqrt[4]{4x-3}$ (*)

Đặt $\sqrt[4]{3x-2} = u; \sqrt[4]{4x-3} = v$ ($u > 0; v \geq 0$) thì (*) trở thành

$$3u^2 + 4v^2 = 7uv \Leftrightarrow (u-v)(3u-4v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ 3u = 4v \end{cases}$$

- $u = v \Leftrightarrow \sqrt[4]{3x-2} = \sqrt[4]{4x-3} \Leftrightarrow 3x-2 = 4x-3 \Leftrightarrow x = 1$.
- $3u = 4v \Leftrightarrow 3\sqrt[4]{3x-2} = 4\sqrt[4]{4x-3} \Leftrightarrow 27(3x-2) = 256(4x-3) \Leftrightarrow x = \frac{714}{943}$.

Đối chiếu điều kiện $x \geq \frac{3}{4}$ ta có tập hợp nghiệm $S = \left\{ \frac{714}{943}; 1 \right\}$.

Bài toán 25. Giải bất phương trình $2\sqrt{5x-2} \geq 3\sqrt[4]{30x^2-17x+2} - \sqrt{6x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{5}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $2\sqrt{5x-2} \geq 3\sqrt[4]{5x-2} \cdot \sqrt[4]{6x-1} - \sqrt{6x-1}$.

Đặt $\sqrt[4]{5x-2} = a; \sqrt[4]{6x-1} = b$ ($a \geq 0; b > 0$) thu được

$$2a^2 \geq 3ab - b^2 \Leftrightarrow a(2a-b) - b(2a-b) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)(2a-b) \geq 0 \quad (1)$$

Ta có $x \geq \frac{2}{5} \Rightarrow 0 < 5x-2 < 6x-1 \Rightarrow \sqrt[4]{5x-2} < \sqrt[4]{6x-1} \Leftrightarrow a < b$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow 2a \leq b \Leftrightarrow 2\sqrt[4]{5x-2} \leq \sqrt[4]{6x-1} \Leftrightarrow 16(5x-2) \leq 6x-1 \Leftrightarrow x \leq \frac{31}{74}$

Đối chiếu với điều kiện $x \geq \frac{2}{5}$, kết luận tập nghiệm $S = \left[\frac{2}{5}; \frac{31}{74} \right]$.

Bài toán 26. Giải phương trình $\frac{x^3-8}{x-2} = 3\sqrt{x^3+4x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $0 \leq x \neq 2$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2 + 2x + 4 = 3\sqrt{x^3 + 4x} \Leftrightarrow x^2 + 4 + 2x = 3\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^2 + 4}$.

Đặt $\sqrt{x^2 + 4} = u; \sqrt{x} = v$ ($u > 0; v \geq 0$) ta thu được

$$u^2 + 2v^2 = 3uv \Leftrightarrow u(u - v) - 2v(u - v) = 0 \Leftrightarrow (u - v)(u - 2v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = 2v \end{cases}$$

- $u = v \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 + 4 = x \Leftrightarrow x^2 - x + 4 = 0$ (Vô nghiệm).
- $u = 2v \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 + 4 = 4x \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

So sánh điều kiện, kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $0 \leq x \neq 2$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2 + 2x + 4 = 3\sqrt{x^3 + 4x}$ (1).

Nhận xét $x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 8x^2 + 16x + 16 = 9x^3 + 36x \Leftrightarrow x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 20x + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(x^2 - 4x + 4) - x(x^2 - 4x + 4) + 4(x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x + 4)(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

So sánh điều kiện, kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 27. Giải bất phương trình $2\sqrt{1-x} + 2\sqrt{1-x^2} \leq 5\sqrt{(x+1)(x-1)^2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $2\sqrt{1-x} + 2\sqrt{1-x^2} \leq 5\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1-x^2}$.

Đặt $\sqrt[4]{1-x} = a; \sqrt[4]{1-x^2} = b$ ($a \geq 0; b \geq 0$) ta có $2a^2 + 2b^2 \leq 5ab \Leftrightarrow 2a(a - 2b) - b(a - 2b) \Rightarrow (2a - b)(a - 2b) \leq 0$.

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \begin{cases} 2a - b \leq 0 \\ a - 2b \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 2\sqrt[4]{1-x} \leq \sqrt[4]{1-x^2} \\ \sqrt[4]{1-x} \geq 2\sqrt[4]{1-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16x + 15 \leq 0 \\ 16x^2 - x - 15 \geq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 15 \\ \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -\frac{15}{16} \end{cases} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -1 \leq x \leq -\frac{15}{16} \end{cases} \\ \blacksquare \quad \begin{cases} 2a - b \geq 0 \\ a - 2b \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 2\sqrt[4]{1-x} \geq \sqrt[4]{1-x^2} \\ \sqrt[4]{1-x} \leq 2\sqrt[4]{1-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16x + 15 \geq 0 \\ 16x^2 - x - 15 \leq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{15}{16} \leq x \leq 1 \\ \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 15 \end{cases} \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{15}{16} \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Kết luận tập nghiệm của bất phương trình là $S = [-1; 1]$.

Nhận xét.

Ngoài cách xử lý "thủ công" phần cuối bài toán 24, các bạn có thể thử sức với cách sử dụng đẳng thức liên hợp.

Bài toán 28. Giải phương trình $\sqrt[3]{(x+2)^2} + 3\sqrt[3]{(x-2)^2} = 4\sqrt[3]{x^2-4}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.Đặt $\sqrt[3]{x+2} = a; \sqrt[3]{x-2} = b$, phương trình đã cho trở thành

$$a^2 + 3b^2 = 4ab \Leftrightarrow a(a-b) - 3b(a-b) = 0 \Leftrightarrow (a-3b)(a-b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 3b \end{cases}$$

- $a = b \Leftrightarrow x-2 = x+2 \Leftrightarrow 0x = 4$ (Vô nghiệm).
- $a = 3b \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+2} = 3\sqrt[3]{x-2} \Leftrightarrow x+2 = 27(x-2) \Leftrightarrow x = \frac{28}{13}$.

Kết luận phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{28}{13} \right\}$.**Bài toán 29.** Giải phương trình $4\sqrt[3]{(2x+1)^2} + 3\sqrt[3]{(1-2x)^2} = 8\sqrt[3]{4x^2-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).**Lời giải.**Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.Đặt $\sqrt[3]{2x+1} = u; \sqrt[3]{2x-1} = v$, phương trình đã cho trở thành

$$4u^2 + 3v^2 = 8uv \Leftrightarrow 2u(2u-3v) - v(2u-3v) = 0 \Leftrightarrow (2u-v)(2u-3v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2u = v \\ 2u = 3v \end{cases}$$

- $2u = v \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow 8(2x+1) = 2x-1 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{14}$.
- $2u = 3v \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{2x+1} = 3\sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow 8(2x+1) = 27(2x-1) \Leftrightarrow x = \frac{35}{38}$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -\frac{9}{14}$ hoặc $x = \frac{35}{38}$.**Bài toán 30.** Giải bất phương trình $\sqrt[3]{x^2+6x+9} - 4\sqrt[3]{6x-x^2-9} + 5\sqrt[3]{9-x^2} < 0$ ($x \in \mathbb{R}$).**Lời giải.**Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt[3]{(x+3)^2} + 4\sqrt[3]{(x-3)^2} < 5\sqrt[3]{x^2-9}$.Đặt $\sqrt[3]{x+3} = u; \sqrt[3]{x-3} = v$ ta thu được

$$u^2 + 4v^2 < 5uv \Leftrightarrow u(u-v) - 4v(u-v) < 0 \Leftrightarrow (u-v)(u-4v) < 0 \quad (1).$$

Nhận xét $x+3 > x-3 \Rightarrow \sqrt[3]{x+3} > \sqrt[3]{x-3} \Leftrightarrow u > v$.Do đó (1) $\Leftrightarrow u-4v > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+3} > 4\sqrt[3]{x-3} \Leftrightarrow x+3 > 64(x-3) \Leftrightarrow x < \frac{65}{21}$.Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left(-\infty; \frac{65}{21} \right)$.**Nhận xét.**

Các bài toán từ 23 $\rightarrow$ 30 về hình thức gợi ý chúng ta đặt ẩn phụ đưa về phương trình đồng bậc (bậc hai), ngoài ra có thể nâng lũy thừa trực tiếp cũng cho kết quả tương tự. Đối với lớp bất phương trình, các bạn chú ý chia các trường hợp chính xác hoặc linh hoạt sử dụng tập xác định (điều kiện có nghiệm) để lập luận, đánh giá nhân tử, giảm thiểu các nghiệm ngoại lai và một số tính toán cồng kềnh, không cần thiết.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $x^2 + 5x + 7 = 6\sqrt{x^3 + 7x}$.
2. $6x^2 + 7x + 8 > 9\sqrt{3x^3 + 4x}$.
3. $16x^2 + 7x + 4 \leq 11\sqrt{4x^3 + x}$.
4. $(x+1)^2 + 3 = 2\sqrt{x^3 + 4x}$.
5. $7x^2 - 10x + 14 = 5\sqrt{x^4 + 4}$.
6. $\sqrt[3]{(x+1)^2} + 5\sqrt[3]{(x-1)^2} = 6\sqrt[3]{x^2 - 1}$.
7. $2(x^2 + 2x + 3) < 5\sqrt{x^3 + 5x^2 + 3x + 2}$.
8. $7\sqrt{1+x^3} = \sqrt{6}(x^2 + 2)$.
9. $2\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x^2 - 1}$.
10. $3x^2 - 9x + 3 + \sqrt{3(x^4 + x^2 + 1)} = 0$.
11. $5x^2 + 4x + 3 = 5\sqrt{5x^3 + 3x}$.
12. $\sqrt{1-x} + 2\sqrt{1-x^2} = 3\sqrt[4]{(1-x)^2(1+x)}$.
13. $3\sqrt{x+2} + 8\sqrt{x+3} \leq 11\sqrt[4]{x^2 + 5x + 6}$.
14. $5x + 5 + 6\sqrt{x} \geq 11\sqrt[4]{x(x+1)^2}$.
15. $\sqrt[3]{(x+1)^2} + 3\sqrt[3]{(1-x)^2} = 4\sqrt[3]{x^2 - 1}$.
16. $2\sqrt[3]{(x-5)^2} + 2\sqrt[3]{(x+5)^2} \leq 5\sqrt[3]{x^2 - 25}$.
17. $4\sqrt{x} < 11\sqrt[4]{x(3-x)} - 7\sqrt{3-x}$.
18. $10\sqrt[3]{(3x-2)^2} - 7\sqrt[3]{(3x+2)^2} \leq 3\sqrt[3]{9x^2 - 4}$.
19. $\sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(2x-1)^2} \geq \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 1}$.
20. $2\sqrt[3]{(3x-1)^2} + 3\sqrt[3]{(4x-1)^2} = 5\sqrt[3]{12x^2 - 7x + 1}$.
21. $3\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 2\sqrt{x-2} \geq 5\sqrt[4]{x^3 - 2x - 4}$.
22. $2\sqrt[3]{(x-2)^2} \leq \sqrt[3]{(x^2 + 2x + 4)^2} + \sqrt[3]{x^3 - 8}$.
23. $5\sqrt[3]{(x+1)^2} = 8\sqrt[3]{(x^2 - x + 1)^2} - 3\sqrt[3]{x^3 + 1}$.
24. $17\sqrt[3]{(x-3)^2} > 4\sqrt[3]{(x^2 + 3x + 9)^2} + 13\sqrt[3]{x^3 - 27}$.
25. $6\sqrt[3]{(x^2 - x + 1)^2} = 5\sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^2} + \sqrt[3]{x^4 + x^2 + 1}$.
26. $2\sqrt{3x-2} + \sqrt{2+x} \geq 3\sqrt[4]{(3x-2)(x+2)}$.
27. $5x^4 + 3x^2 - 3 = 8x^2\sqrt{(x-1)(x+1)}$.
28. $\sqrt{x^2 + 1} + 4\sqrt{x-1} < 5\sqrt[4]{x^3 - x^2 + x - 1}$.

Bài toán 31. Giải phương trình $x^2 + 7x + 3 = 3\sqrt{x^3 + 4x^2 - 5}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x^3 + 4x^2 - 5 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 5x + 5) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^2 + 5x + 5 + 2(x-1) = 3\sqrt{x-1}\sqrt{x^2 + 5x + 5}$ (1).

Đặt $\sqrt{x-1} = u; \sqrt{x^2 + 5x + 5} = v$ ($u \geq 0; v > 0$) ta có

$$(1) \Leftrightarrow 2u^2 + v^2 = 3uv \Leftrightarrow (u-v)(2u-v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ v = 2u \end{cases}$$

- $u = v \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \sqrt{x^2 + 5x + 5} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + 4x + 5 = 0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).
- $2u = v \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = \sqrt{x^2 + 5x + 5} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + 5x + 5 = 4x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + x + 9 = 0 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 32. Giải phương trình $x^2 - 3x + 4 = 3\sqrt{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $(x-1)(x-2)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với $x^2 - 5x + 6 + 2(x-1) = 3\sqrt{x-1}\sqrt{x^2 - 5x + 6}$ (1).

Đặt $\sqrt{x-1} = a; \sqrt{x^2 - 5x + 6} = b$ ($a \geq 0; b \geq 0$) ta có

$$(1) \Leftrightarrow a^2 + 2b^2 = 3ab \Leftrightarrow (a-b)(a-2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases}$$

- $a = b \Leftrightarrow x-1 = x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{2} \\ x = 3 - \sqrt{2} \end{cases}$
- $a = 2b \Leftrightarrow x-1 = 4(x^2 - 5x + 6) \Leftrightarrow 4x^2 - 21x + 25 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{21 - \sqrt{41}}{8}; \frac{21 + \sqrt{41}}{8} \right\}$.

Đối chiếu điều kiện ta thu được bốn nghiệm $S = \left\{ 3 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2}; \frac{21 - \sqrt{41}}{8}; \frac{21 + \sqrt{41}}{8} \right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $(x-1)(x-2)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Nhận xét $x = 1$ không là nghiệm của phương trình đã cho. Do đó phương trình đã cho tương đương với

$$x^2 - 5x + 6 + 2(x-1) = 3\sqrt{(x-1)(x^2 - 5x + 6)} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 6}{x-1} + 2 = 3\sqrt{\frac{x^2 - 5x + 6}{x-1}} \quad (*)$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2 - 5x + 6}{x-1}} = t$ ($t \geq 0$) ta có $(*) \Leftrightarrow t^2 + 2 = 3t \Leftrightarrow (t-1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$

- $t = 1 \Leftrightarrow x-1 = x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{2} \\ x = 3 - \sqrt{2} \end{cases}$

$$\blacksquare \quad t = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 4(x^2 - 5x + 6) \Leftrightarrow 4x^2 - 21x + 25 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{21 - \sqrt{41}}{8}; \frac{21 + \sqrt{41}}{8} \right\}.$$

Đổi chiều điều kiện ta thu được bốn nghiệm $S = \left\{ 3 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2}; \frac{21 - \sqrt{41}}{8}; \frac{21 + \sqrt{41}}{8} \right\}.$

Bài toán 33. Giải phương trình $2x^2 - 5x + 1 = 3\sqrt{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải 1.

Điều kiện $(x-1)(x-2)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với $2(x^2 - 3x + 2) + (x - 3) = 3\sqrt{(x^2 - 3x + 2)(x - 3)} \quad (*)$

Đặt $x^2 - 3x + 2 = a; x - 3 = b$ thì

$$(*) \Leftrightarrow 2a + b = 3\sqrt{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b \geq 0 \\ 4a^2 + 4ab + b^2 = 9ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b \geq 0 \\ (a - b)(4a - b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b \geq 0 \\ a = b \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2a + b \geq 0 \\ 4a = b \end{cases} \quad (2)$$

• $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 5 = 0 \end{cases} \quad (\text{Hệ vô nghiệm}).$

• $(2) \Leftrightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 1 \geq 0 \\ 4(x^2 - 3x + 2) = x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5x + 1 \geq 0 \\ 4x^2 - 13x + 11 = 0 \end{cases} \quad (\text{Hệ vô nghiệm}).$

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $(x-1)(x-2)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Nhận xét $x = 3$ không thỏa mãn phương trình ban đầu.

Do đó phương trình đã cho tương đương với

$$2(x^2 - 3x + 2) + (x - 3) = 3\sqrt{(x^2 - 3x + 2)(x - 3)} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3} + 1 = 3\sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}} \quad (*)$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}} = t \quad (t \geq 0)$ thì $(*)$ trở thành: $2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(2t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$

Xét hai trường hợp

• $t = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 0; \Delta' = -1 < 0$, phương trình vô nghiệm.

• $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4(x^2 - 3x + 2) = x - 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 13x + 11 = 0; \Delta = -7 < 0$, phương trình vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét.

- Các bài toán 31 → 33 đều được giải được bằng phép sử dụng ẩn phụ đưa về phương trình đồng bậc và tìm tỷ lệ giữa hai ẩn thông qua phương trình bậc hai. Ngoài ra các bạn có thể sử dụng nâng lũy thừa trực tiếp kết hợp hệ số bất định cũng cho lời giải "khỏe mạnh, chớp nhoáng, bất ngờ".
- Quan sát và thực hành các thí dụ phía trước một cách có hệ thống, dạng toán này có thể đã trở nên quen thuộc với một số bạn học sinh, hai bài toán 32 và 33 về hình thức vẫn chưa có điều gì mới lạ, tuy nhiên có một sự khác biệt nhỏ nhỏ trong lập luận, điểm nhấn trọng tâm của hai thí dụ này là: Đa thức trong căn thức khó có thể phân tích thành các nhân tử độc lập (nếu không chia trường hợp theo điều kiện xác định). Cụ thể trong hai bài toán 32 và 33 ta đều có phân tích

$$\sqrt{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)} = \begin{cases} \sqrt{(x-1)[(x-2)(x-3)]} = \sqrt{(x-1)(x^2 - 5x + 6)} \\ \sqrt{(x-2)[(x-1)(x-3)]} = \sqrt{(x-2)(x^2 - 4x + 3)} \\ \sqrt{[(x-1)(x-2)](x-3)} = \sqrt{(x^2 - 3x + 2)(x-3)} \end{cases}$$

Xin nhắc lại kiến thức cơ bản: $\sqrt{ABC...} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \cdot \sqrt{C}... \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \dots \end{cases}$

- Đối với bài toán 32 ta có quan sát $x^2 - 3x + 4 = x^2 - 5x + 6 + 2(x-1)$ nên hướng xây dựng ẩn phụ đồng bậc sẽ là $\sqrt{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \sqrt{(x-1)[(x-2)(x-3)]} = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ (*).

Lưu ý điều kiện $(x-1)(x-2)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Dễ thấy (*) xảy ra hiển nhiên. Kết quả thu được lời giải 1 bài toán 32.

- Đối với bài toán 33 ta có quan sát $2x^2 - 5x + 1 = 2(x^2 - 3x + 2) + x - 3$ nên hướng xây dựng ẩn phụ đồng bậc sẽ là $\sqrt{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \sqrt{[(x-1)(x-2)](x-3)} = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \cdot \sqrt{x-3}$ (**).

Lưu ý điều kiện $(x-1)(x-2)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Trong trường hợp này (**) không đúng, nói khác nó chỉ xảy ra khi $x \geq 3$.

Điều này đặt ra một nghi vấn: Phải chăng chúng ta đang gặp một chương ngại vật?

Bởi vì hai nhân tử này luôn dính với nhau như "hình với bóng", nếu tách ra sẽ rất phức tạp.

Vậy có nên dừng lại hay không? Không, trường kỳ kháng chiến nhất định thắng lợi!

Đoàn kết, đoàn kết, đại đoàn kết! Thành công, thành công, đại thành công!

Có một số phương án lựa chọn như sau

- Dùng vũ lực, tách biệt hoàn toàn hai nhân tử bằng cách chia trường hợp
Trường hợp 1: $x \geq 3$, (**) xảy ra, chúng ta "mãn nguyện" với hai ẩn phụ

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} = u; \sqrt{x-3} = v \quad (u \geq 0; v \geq 0) \Rightarrow 2u^2 + v^2 = 3uv$$

Trường hợp 2: $1 \leq x \leq 2$, (**) không xảy ra nhưng lại có mũi vu hồi bất ngờ

$$\sqrt{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \sqrt{[(x-1)(x-2)](x-3)} = \sqrt{-x^2 + 3x - 2} \cdot \sqrt{3-x}$$

Chúng ta không được "hài lòng" lắm với hai ẩn phụ $\sqrt{-x^2 + 3x - 2} = a; \sqrt{3-x} = b \quad (a \geq 0; b \geq 0)$.

Phương trình khi đó có dạng $-2a^2 - b^2 = 3ab \Leftrightarrow (a+b)(2a+b) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

Sở dĩ như vậy vì $a \geq 0; b \geq 0$. Và tất nhiên trường hợp này sẽ vô nghiệm.

Phương án 1 rất khả thi, song chưa phải tối ưu vì phải chia hai trường hợp, hai lần đặt ẩn phụ, mặt khác một trường hợp mang tính chất "thủ tục" vì lý do vô nghiệm, song nếu không có nó thì bài toán coi như không trọn vẹn về "tư tưởng".

- *Thỏa hiệp, tâm lý chiến, gián tiếp:* Không tách biệt riêng biệt hai nhân tử, vẫn để chúng "dính kếp" vào nhau. Sử dụng phép đặt ắn phụ phía trong căn, sau phép bình phương trực tiếp (kéo theo điều kiện) chúng ta đã có quyền sinh quyền sát, thực hiện đưa về nhân tử, lúc này có "dính kếp" cũng không quan trọng nữa. Kết quả chúng ta đã thu được lời giải 1 bài toán 32. Tuy nhiên việc giải các hệ hỗn tạp cũng gây không ít trở ngại.
- *Chiến tranh du kích, mềm dẻo, linh hoạt:* Không tách riêng hai nhân tử, nhưng mục tiêu trung gian là tìm tỷ lệ giữa hai nhân tử, vậy tại sao không để chúng "dính kếp" với nhau theo "tỷ lệ" ấy, không ảnh hưởng nhiều đến việc độc lập hay ly khai phức tạp. Chúng ta hãy tác thành cho họ !

Các bạn lưu ý : $\sqrt{AB}$ xác định thì $\sqrt{\frac{A}{B}}$ ($B \neq 0$) cũng xác định.

Kết quả ý tưởng thu được lời giải 2 bài toán 32.

Nhận xét $x = 3$ không là nghiệm, đây sẽ là "cái cớ" để chia hai vế cho biểu thức $x - 3$, hệ quả dẫn đến ắn phụ rất gọn gàng. Có thể nói với dạng toán này, phương án 3 là tối ưu.

Các bạn hoàn toàn có thể chia hai vế cho $x^2 - 3x + 2 = 0$, nhưng không nên, vì như vậy sẽ phải xét hai trường hợp $x = 1; x = 2$ có là nghiệm của phương trình hay không.

Giả định có một chủ kiến "phái" bỏ từ đỉnh này sang đỉnh kia (hai đỉnh của hai góc nhọn) của một tam giác vuông thực, kiến sẽ chọn bỏ theo cạnh huyền hay theo hai cạnh góc vuông, hay là theo đường gấp khúc hoặc một đường cong nào đó ?

Với điều kiện trên các con đường của ta không có một giọt mật nào.

Hy vọng các bạn thông minh hơn kiến nhé !

Sự linh hoạt này các bạn có thể áp dụng trong việc giải bất phương trình chứa căn, loại bỏ đi khá nhiều tiểu tiết không cần thiết. Mời quý độc giả theo dõi các thí dụ tiếp theo.

Bài toán 34. Giải bất phương trình $3x^2 - 4x - 5 > 5\sqrt{x^3 - 7x - 6}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } x^3 - 7x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ -2 \leq x \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{Bất phương trình đã cho tương đương với } 3(x^2 - 2x - 3) + 2(x+2) > 5\sqrt{x^2 - 2x - 3} \cdot \sqrt{x+2}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x^2 - 2x - 3} = u; \sqrt{x+2} = v \ (u \geq 0; v \geq 0) \text{ ta có } 3u^2 + 2v^2 > 5uv \Leftrightarrow (u-v)(3u-2v) > 0$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \begin{cases} u-v > 0 \\ 3u-2v > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 > x+2 \\ 9(x^2 - 2x - 3) > 4(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 5 > 0 \\ 9x^2 - 22x - 35 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3+\sqrt{29}}{2} \\ x < \frac{3-\sqrt{29}}{2} \end{cases} \\ \bullet \quad & \begin{cases} u-v < 0 \\ 3u-2v < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 < x+2 \\ 9(x^2 - 2x - 3) < 4(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 5 < 0 \\ 9x^2 - 22x - 35 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{11-2\sqrt{109}}{9} < x < \frac{11+2\sqrt{109}}{9} \end{aligned}$$

$$\text{Kết hợp điều kiện ta có nghiệm } S = \left[-2; \frac{3-\sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{11-2\sqrt{109}}{9}; -1\right] \cup \left(\frac{3+\sqrt{29}}{2}; +\infty\right).$$

Bài toán 35. Giải phương trình $2x^2 + 13x = 36 + 7\sqrt{x^3 - 24x + 32}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } x^3 - 24x + 32 \geq 0.$$

Nhận xét $x = 4$ không là nghiệm của phương trình ban đầu.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2(x^2 + 4x - 8) + 5(x - 4) = 7\sqrt{(x^2 + 4x - 8)(x - 4)} \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{x^2 + 4x - 8}{x - 4} + 5 = 7\sqrt{\frac{x^2 + 4x - 8}{x - 4}} \quad (1)$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2 + 4x - 8}{x - 4}} = t \ (t \geq 0)$ thì (1) $\Leftrightarrow 2t^2 - 7t + 5 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(2t - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{5}{2} \end{cases}$

- $t = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 8 = x - 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 4) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-4; 1\}$.
- $t = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 4(x^2 + 4x - 8) = 25(x - 4) \Leftrightarrow 4x^2 - 9x + 68 = 0; \Delta = -1007 < 0$. Phương trình vô nghiệm.

So sánh điều kiện, ta thu được tập nghiệm $S = \{-4; 1\}$.

Bài toán 36. Giải bất phương trình $4x^2 - 25x + 14 \leq 3\sqrt{x^3 - 31x + 30} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 - 31x + 30 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 5)(x + 6) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ -6 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4(x^2 - 6x + 5) - (x + 6) &\leq 3\sqrt{(x^2 - 6x + 5)(x + 6)} \\ \Leftrightarrow 4(x^2 - 6x + 5) - (x + 6) &\leq 3\sqrt{x^2 - 6x + 5} \cdot \sqrt{x + 6} \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2 - 6x + 5} = a; \sqrt{x + 6} = b \quad (a \geq 0; b \geq 0)$ ta có

$$(1) \Leftrightarrow 4a^2 - b^2 \leq 3ab \Leftrightarrow (a - b)(4a + b) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 0 \\ a \leq b \end{cases}$$

- $4a + b = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0 \\ x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \\ x = -6 \end{cases}$ (Hệ vô nghiệm).
- $a \leq b \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 \leq x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 7x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{7 - \sqrt{53}}{2} \leq x \leq \frac{7 + \sqrt{53}}{2}$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = \left[\frac{7 - \sqrt{53}}{2}; 1 \right] \cup \left[5; \frac{7 + \sqrt{53}}{2} \right]$.

Bài toán 37. Giải bất phương trình $3x^2 + 14x - 14 \geq 2\sqrt{x^3 + x^2 - 26x + 24} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 + x^2 - 26x + 24 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 6)(x - 4) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ -6 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với $3(x^2 + 5x - 6) - (x - 4) \geq 2\sqrt{(x^2 + 5x - 6)(x - 4)}$

Đặt $x^2 + 5x - 6 = u; x - 4 = v$ ta thu được

$$3u - v \geq 2\sqrt{uv} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u - v \geq 0 \\ 9u^2 - 6uv + v^2 \geq 4uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u - v \geq 0 \\ 9u^2 - 10uv + v^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u - v \geq 0 \\ (u - v)(9u - v) \geq 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{cases} 3u - v \geq 0 \\ u - v \geq 0 \\ 9u - v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 14x - 14 \geq 0 \\ x^2 + 4x - 2 \geq 0 \\ 9x^2 + 44x - 50 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{-22 - \sqrt{934}}{9} \\ x \geq \frac{-22 + \sqrt{934}}{9} \end{cases} \\ & \bullet \begin{cases} 3u - v \geq 0 \\ u - v \leq 0 \\ 9u - v \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 14x - 14 \geq 0 \\ x^2 + 4x - 2 \leq 0 \\ 9x^2 + 44x - 50 \leq 0 \end{cases} \quad (\text{Hệ vô nghiệm}). \end{aligned}$$

Vậy ta có nghiệm $S = \left[-6; \frac{-22 - \sqrt{934}}{9}\right] \cup [4; +\infty)$.

Bài toán 38. Giải phương trình $3x^2 + 5x - 5 = 2\sqrt{x^3 - 2x^2 - 11x + 12}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } (x-1)(x+3)(x-4) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ -3 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$3(x^2 + 2x - 3) - (x - 4) = 2\sqrt{(x^2 + 2x - 3)(x - 4)} \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 4} - 1 = 2\sqrt{\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 4}} \quad (1)$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 4}} = t$ ($t \geq 0$) ta có

$$(1) \Leftrightarrow 3t^2 - 1 = 2t \Leftrightarrow (t-1)(3t+1) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = x - 4 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0 \quad (\text{Vô nghiệm}).$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 39. Giải phương trình $5x^2 + 11x - 2 = 2\sqrt{x^3 - 4x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } x(x^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$5(x^2 + 2x) + (x - 2) = 6\sqrt{x(x^2 - 4)} \Leftrightarrow 5 \cdot \frac{x^2 + 2x}{x - 2} + 1 = 6\sqrt{\frac{x^2 + 2x}{x - 2}}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{\frac{x^2 + 2x}{x - 2}} = t \quad (t \geq 0) \text{ ta thu được } 5t^2 + 1 = 6t \Leftrightarrow (t-1)(5t-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ 5t = 1 \end{cases}$$

Xét hai khả năng xảy ra

- $t = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x = x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x + 2 = 0$. Phương trình vô nghiệm.
- $5t = 1 \Leftrightarrow 25(x^2 + 2x) = x - 2 \Leftrightarrow 25x^2 + 49x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-49 + \sqrt{2201}}{50}; \frac{-49 - \sqrt{2201}}{50} \right\}$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta thu được nghiệm } S = \left\{ \frac{-49 + \sqrt{2201}}{50}; \frac{-49 - \sqrt{2201}}{50} \right\}.$$

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $4x^2 - 15x + 10 = 5\sqrt{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$.
2. $4x^2 - x - 19 = 5\sqrt{(4x^2 - 5x + 1)(x - 5)}$.
3. $x^2 + 6x - 7 = 4\sqrt{x^3 - x^2 - 7x - 20}$.
4. $5x^2 - 22x + 12 > 3\sqrt{(x^2 - 4x + 2)(x - 1)}$.
5. $7x^2 - 24x + 19 \leq 4\sqrt{x^3 - 7x^2 + 13x - 4}$.
6. $x^2 - 2x \leq 3\sqrt{(x^2 - 4x + 1)(x - 3)} + 5$.
7. $5x^2 + 6x - 1 \leq 6\sqrt{x(x^2 - 1)}$.
8. $3x^2 + 13x = 7\sqrt{x^3 - 5x - 12}$.
9. $3x^2 + 17x + 22 = 2\sqrt{(x^2 + 6x + 5)(x - 7)}$.
10. $3x^2 - 10x + 5 \geq 5\sqrt{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$.
11. $3x^2 + 8x - 13 = 5\sqrt{x^3 - 7x + 6}$.
12. $3x^2 - 10x - 2 \geq 8\sqrt{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}$.
13. $x^2 - 2x + 4 = 2\sqrt{(2x^2 - x - 1)(x - 3)}$.
14. $2x^2 + 3x - 5 = 2\sqrt{2x(x^2 - 4x - 5)}$.
15. $x^2 + 5x + 12 = 4\sqrt{(x - 3)(2x^2 + 3x)}$.
16. $2x^2 + 7x + 3 > 5\sqrt{5x^3 - 22x^2 + 23x - 6}$.
17. $6x^2 + 7x + 2 = 7\sqrt{x(x^2 + 3x + 2)}$.
18. $12x^2 + 17x - 10 = 5\sqrt{3x^3 + 22x^2 + 20x - 24}$.
19. $2x^2 + 9x - 22 \leq 9\sqrt{x^3 - 3x^2 - x - 12}$.
20. $2x^2 + x - 1 = 2\sqrt{(x - 1)(x^3 + 2x^2 + x + 2)}$.
21. $x^2 + 10x = 10 + 6\sqrt{x^3 - 2x + 1}$.
22. $18x^2 - 13x + 46 \geq 11\sqrt{6x^3 + 29x^2 - 33x + 10}$.
23. $x^2 - 4x + 19 = 4\sqrt{x^3 - 7x^2 + 7x + 15}$.
24. $x^2 + 9x - 2 = 4\sqrt{2x^3 + 3x^2 - 11x - 6}$.
25. $3x^2 + 4x - 2 > 4\sqrt{(x^2 - 1)(x + 2)}$.
26. $4x^2 + 7x + 17 = 7\sqrt{x^3 + 4x^2 + 5x + 6}$.
27. $4x^2 + 12x = 5\sqrt{6x^3 + 7x^2 - 1}$.
28. $5x^2 + 5x - 16 > 11\sqrt{5x^3 - 31x^2 + 50x - 24}$.
29. $4x^2 + 22x = 6\sqrt{4x^3 + 5x^2 - 47x - 12} + 11$.
30. $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = 2\sqrt{2x^5 + 3x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 1}$.

Bài toán 40. Giải phương trình $x+1+\sqrt{2x+1}=\sqrt{3x^2+8x+4}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 3x^2+8x+4 \geq 0 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với $x+1+\sqrt{2x+1}=\sqrt{3(x^2+2x+1)+2x+1}$.

Đặt $x+1=a$; $\sqrt{2x+1}=b$ ($a>0$; $b \geq 0$) ta thu được

$$a+b=\sqrt{3a^2+b^2} \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2=3a^2+b^2 \Leftrightarrow a(a-b)=0 \Leftrightarrow a=b \text{ (Do } a>0 \text{)}.$$

$$\text{Do đó } x+1=\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+2x+1=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x=0$.

Lời giải 2.

Điều kiện $3x^2+8x+4 \geq 0$; $2x+1 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2+2x+1+2(x+1)\sqrt{2x+1}+2x+1 &= 3x^2+8x+4 \Leftrightarrow 2(x+1)\sqrt{2x+1}=2x^2+4x+2 \\ \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{2x+1} &= (x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{2x+1}=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x \geq -1 \\ 2x+1=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=0 \end{cases} \end{aligned}$$

So sánh điều kiện ta thu được nghiệm $x=0$.

Bài toán 41. Giải phương trình $x-1+\sqrt{2x-3}=\sqrt{5x^2-12x+8}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ 5x^2-12x+8 \geq 0 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với $x-1+\sqrt{2x-3}=\sqrt{5(x^2-2x+1)-(2x-3)}$ (1)

Đặt $x-1=u$; $\sqrt{2x-3}=v$ ($u>0$; $v \geq 0$) thì

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow u+v=\sqrt{5u^2-v^2} \Leftrightarrow u^2+2uv+v^2=5u^2-v^2 \Leftrightarrow 2u^2-uv-v^2=0 \Leftrightarrow (u-v)(2u+v)=0 \\ &\Leftrightarrow u=v \Leftrightarrow x-1=\sqrt{2x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-2x+1=2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-4x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

Lời giải 2.

Điều kiện $5x^2-12x+8 \geq 0$; $x \geq \frac{3}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2-2x+1+2(x-1)\sqrt{2x-3} &= 5x^2-12x+8 \Leftrightarrow 2(x-1)\sqrt{2x-3}=4x^2-12x+10 \\ \Leftrightarrow (x-1)\sqrt{2x-3} &= 2x^2-6x+5 \Leftrightarrow (x-1)\sqrt{2x-3}=2(x^2-2x+1)-(2x-3) \\ \Leftrightarrow (x-1)\sqrt{2x-3} &= 2(x-1)^2-(2x-3) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x-3}}{x-1}=2-\frac{2x-3}{x-1} \end{aligned} \quad (2)$$

Đặt $\frac{\sqrt{2x-3}}{x-1} = t$ ($t > 0$) thì $(2) \Leftrightarrow t = 2 - t^2 \Leftrightarrow (t-1)(t+2) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x-3} = x-1 \Leftrightarrow x = 2$.

Kết hợp điều kiện, suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài toán 42. Giải phương trình $2x + \sqrt{2x+1} = 1 + \sqrt{4x^2 + 2x + 4}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2x - 1 + \sqrt{2x+1} = \sqrt{(4x^2 - 4x + 1) + 3(2x+1)} \Leftrightarrow 2x - 1 + \sqrt{2x+1} = \sqrt{(2x-1)^2 + 3(2x+1)} \quad (*).$$

$$\text{Đặt } 2x-1 = u; \sqrt{2x+1} = v \ (v \geq 0) \text{ ta có } (*) \Leftrightarrow u+v = \sqrt{u^2+3v^2} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geq 0 \\ u^2+2uv+v^2 = u^2+3v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geq 0 \\ v(v-u) = 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\bullet \begin{cases} u+v \geq 0 \\ v=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1+\sqrt{2x+1} \geq 0 \\ 2x+1=0 \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm).}$$

$$\bullet \text{ Do } v \geq 0 \text{ nên } \begin{cases} u+v \geq 0 \\ u=v \end{cases} \Leftrightarrow u=v \Leftrightarrow 2x-1=\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2-4x+1=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x(2x-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x-1+\sqrt{2x+1} &= \sqrt{4x^2+2x+4} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1+\sqrt{2x+1}-2 \geq 0 \\ 4x^2-4x+1+2x+1+2(2x-1)\sqrt{2x+1} &= 4x^2+2x+4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+2) \geq 0 \\ 2(2x-1)\sqrt{2x+1} = 4x+2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+1} \geq 1 \\ (2x-1)\sqrt{2x+1} = 2x+1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x-1 = \sqrt{2x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 4x^2-4x+1 = 2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được tập nghiệm $S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$.

Bài toán 43. Giải phương trình $x-1+\sqrt{2x+1} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (2x+1)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$.

Đặt $x-1 = a; \sqrt{2x+1} = b$ ($b \geq 0$) phương trình đã cho trở thành

$$a+b = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ a^2+b^2+2ab = 2a^2+2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ (a-b)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow a=b.$$

$$\Leftrightarrow x-1=\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-2x+1=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x(x-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = \{4\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq -\frac{1}{2}$. Để ý rằng $\forall a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}$ ta có

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq 2(a^2 + b^2) \Leftrightarrow (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \quad (*).$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có

$$\begin{aligned} (x-1+\sqrt{2x+1})^2 &\leq 2[(x-1)^2 + (2x+1)] \\ \Rightarrow |x-1+\sqrt{2x+1}| &\leq \sqrt{2[(x-1)^2 + (2x+1)]} \\ \Rightarrow x-1+\sqrt{2x+1} &\leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (2x+1)} \quad (1) \end{aligned}$$

Do đó phương trình đã cho có nghiệm khi tại (1) xảy ra dấu đẳng thức

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1+\sqrt{2x+1} \geq 0 \\ x-1=\sqrt{2x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1+\sqrt{2x+1} \geq 0 \\ x \geq 1 \\ x^2-2x+1=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x(x-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $S = \{4\}$.

Bài toán 44. Giải bất phương trình $1+x+\sqrt{x} \geq \sqrt{2(1+3x+x^2)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$1+x+\sqrt{x} \geq \sqrt{2(1+2x+x^2)}+2x \Leftrightarrow 1+x+\sqrt{x} \geq \sqrt{2(1+x)^2+2x} \quad (1).$$

Đặt $1+x=u; \sqrt{x}=v$ ($u \geq 1; v \geq 0$) thì (1) trở thành

$$\begin{aligned} u+v &\geq \sqrt{2(u^2+v^2)} \Leftrightarrow u^2+2uv+v^2 \geq 2(u^2+v^2) \Leftrightarrow (u-v)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (u-v)^2 = 0 \Leftrightarrow u=v \Leftrightarrow 1+x=\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2+2x+1=x \Leftrightarrow x^2+x+1=0 \end{aligned}$$

Kết luận bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho hai cặp số dương $(1;1), (1+x;\sqrt{x})$ ta có

$$(1+x+\sqrt{x})^2 \leq (1^2+1^2)[(1+x)^2+x] = 2(1+3x+x^2) \Rightarrow 1+x+\sqrt{x} \leq \sqrt{2(1+3x+x^2)} \quad (2)$$

Bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (2) xảy ra đẳng thức

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{1+x}{1} = \frac{\sqrt{x}}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm).}$$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \geq 0$.

Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Xét $x > 0$, bất phương trình ban đầu trở thành $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} + 1 \geq \sqrt{2\left(\frac{1}{x} + 3 + x\right)}$

Đặt $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = t$ ($t > 0$) $\Rightarrow t^2 = \frac{1}{x} + x + 2$; ta được

$$t + 1 \geq \sqrt{2(t^2 + 1)} \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 \geq 2t^2 + 2 \Leftrightarrow (t - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = 1 \quad (3)$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}} = 2$. Dẫn đến (3) vô nghiệm.

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét.

- Các bài toán từ 40 đến 44 đều giải được bằng cách sử dụng ắnn phụ đưa về phương trình đồng bậc (bậc hai), điểm nhấn trọng tâm là không thể đưa về dạng đồng bậc trực tiếp mà trước tiên phải thực hiện phép biến đổi tương đương và nâng lũy thừa hợp lý. Mặc dù cùng một phương hướng nhưng mỗi lời giải đều có những nét riêng đáng lưu ý (hai lời giải của bài toán 43). Ngoài ra các bạn có thể sử dụng biến đổi tương đương, nâng lũy thừa trực tiếp hay đưa về phương trình tích, vẫn rất khả thi đối với lớp bài toán dạng này.
- Hai bài toán 43 và 44 tác giả trình bày phương pháp sử dụng đánh giá – hàm số – bất đẳng thức để các bạn có cách nhìn toàn diện, đầy đủ và bao quát hơn trong quá trình lựa chọn lời giải. Hai lời giải 2 tương ứng của bài 43 và 44 có cùng bản chất sử dụng hình thức bất đẳng thức Bunyakovsky, tuy nhiên lời giải 2 bài 40 có lập luận theo hằng đẳng thức mang tính chất "cơ bản", vì lẽ đó phần nào được ưa chuộng hơn.

Bài toán 45. Giải phương trình $\frac{3 - x + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{2(x^2 - 3x + 4)}} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$3 - x + \sqrt{x} = 1 + \sqrt{2(x^2 - 3x + 4)} \Leftrightarrow 2 - x + \sqrt{x} = \sqrt{2(x^2 - 3x + 4)} \Leftrightarrow 2 - x + \sqrt{x} = \sqrt{2(x^2 - 4x + 4 + x)}$$

Đặt $2 - x = u; \sqrt{x} = v$ ($u \geq 0$) ta thu được

$$\begin{aligned} u + v &= \sqrt{2(u^2 + v^2)} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \geq 0 \\ u^2 + v^2 + 2uv = 2(u^2 + v^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \geq 0 \\ (u - v)^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow 2 - x = \sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 0$. Biến đổi về $3 - x + \sqrt{x} = 1 + \sqrt{2(x^2 - 3x + 4)} \Leftrightarrow 2 - x + \sqrt{x} = \sqrt{2(x^2 - 3x + 4)}$.

$$\begin{aligned} \text{Đặt } \sqrt{x} = t \ (t \geq 0) \text{ ta có } 2 - t^2 + t &= \sqrt{2(t^4 - 3t^2 + 4)} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 - t - 2 \leq 0 \\ t^4 + t^2 + 4t + 4 - 2t^2(t + 2) = 2(t^4 - 3t^2 + 4) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ (t + 1)(t - 2) \leq 0 \\ t^4 + 2t^3 - 3t^2 - 4t + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 2 \\ t^4 + 4 + 2(t^3 - 2t) - 3t^2 = 0 \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Nhận xét $t = 0$ không là nghiệm của hệ. Do vậy ta có

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t \leq 2 \\ t^2 + \frac{4}{t^2} + 2\left(t - \frac{2}{t}\right) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t \leq 2 \\ \left(t - \frac{2}{t}\right)^2 + 2\left(t - \frac{2}{t}\right) + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t \leq 2 \\ \left(t - \frac{2}{t} + 1\right)^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t \leq 2 \\ t - \frac{2}{t} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t \leq 2 \\ t^2 + t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t \leq 2 \\ (t-1)(t+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

So sánh điều kiện, kết luận nghiệm $x = 1$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho quy về $3 - x + \sqrt{x} = 1 + \sqrt{2(x^2 - 3x + 4)} \Leftrightarrow 2 - x + \sqrt{x} = \sqrt{2(x^2 - 3x + 4)}$.

Nhận xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình trên.

Xét trường hợp $x > 0$ thu được $\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} + 1 = \sqrt{2\left(x - 3 + \frac{4}{x}\right)}$. Đặt $\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{4}{x} + x = t^2 + 4$. Suy ra

$$\begin{aligned} t + 1 &= \sqrt{2(t^2 + 1)} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ t^2 + 2t + 1 = 2t^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ (t-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = 1 \\ &\Leftrightarrow 2 - x = \sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = -2 \\ \sqrt{x} = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận nghiệm $x = 1$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x \geq 0$. Đưa phương trình về dạng $3 - x + \sqrt{x} = 1 + \sqrt{2(x^2 - 3x + 4)} \Leftrightarrow 2 - x + \sqrt{x} = \sqrt{2(x^2 - 3x + 4)}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$\begin{aligned} (2 - x + \sqrt{x})^2 &\leq (1^2 + 1^2)[(2 - x)^2 + x] = 2(x^2 - 3x + 4) \\ &\Rightarrow |2 - x + \sqrt{x}| \leq \sqrt{2(x^2 - 3x + 4)} \Rightarrow 2 - x + \sqrt{x} \leq \sqrt{2(x^2 - 3x + 4)} \end{aligned}$$

Phương trình đề bài có nghiệm khi và chỉ khi dấu đẳng thức xảy ra, nghĩa là

$$2 - x = \sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

- Bài toán 45 sau khi biến đổi có dạng tương tự bài toán 44. Lời giải 1 sử dụng ắn phụ đưa về phương trình đồng bậc quen thuộc, lời giải 2 về bản chất nâng lũy thừa trực tiếp có kéo theo điều kiện, việc đặt ắn phụ $\sqrt{x} = t$ ($t \geq 0$) chỉ làm cho bài toán gọn gàng về hình thức. Hệ quả đưa về hương trình đa thức bậc bốn, tuy nhiên đã có một sự may mắn xuất hiện, bởi đây là phương trình đối xứng hồi quy, phương pháp giải có lẽ đã rất quen thuộc với một số bạn. Kết quả thu được hoàn toàn trùng hợp với lời giải 1.
- Ngoài ra hình thức bài toán 45 cũng có sự đặc biệt do đây là trường hợp xảy ra đẳng thức của bài toán áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky, các bạn có thể giải tương tự theo lời giải 2 bài toán số 43. Phương pháp đặt ắn phụ trong lời giải 3 các bài toán 44 và 45 thường xuất hiện trong các kỳ thi tuyển sinh đại học môn Toán những năm gần đây, cụ thể là Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2010 môn Toán chính thức và Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2012 môn Toán chính thức. Về dạng toán này, tác giả chỉ xin nhắc lại, hiện tại đã được trình bày cặn kẽ tại Lý thuyết đặt ắn phụ các phần 2 và 3.

Bài toán 46. Giải bất phương trình $\frac{2-x+\sqrt{x}}{\sqrt{2(x^2-5x+9)}-1} \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải 1.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 5x + 9 \geq 0 \\ 2(x^2 - 5x + 9) \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Nhận xét rằng: $\sqrt{2(x^2-5x+9)}-1 = \frac{2x^2-10x+17}{\sqrt{2(x^2-5x+9)}+1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2-x+\sqrt{x} \leq \sqrt{2(x^2-5x+9)}-1 \Leftrightarrow 3-x+\sqrt{x} \leq \sqrt{2(x^2-5x+9)} \Leftrightarrow 3-x+\sqrt{x} \leq \sqrt{2(x^2-6x+9+x)}.$$

Đặt $3-x=a; \sqrt{x}=b \ (b \geq 0)$ ta thu được $a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$ (1)

Chú ý rằng $\forall a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}$ ta có

$$\begin{aligned} (a-b)^2 \geq 0 &\Leftrightarrow 2ab \leq a^2+b^2 \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \leq 2(a^2+b^2) \\ &\Leftrightarrow (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2) \Rightarrow a+b \leq |a+b| \leq \sqrt{2(a^2+b^2)} \end{aligned}$$

Do đó (1) nghiệm đúng với $\forall a \in \mathbb{R}; b \geq 0$. Kết luận nghiệm của bất phương trình là $x \geq 0$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 0; x^2-5x+9 \geq 0; 2(x^2-5x+9) \neq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Nhận xét $2(x^2-5x+9)-1 = 2x^2-10x+17 = 2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{2(x^2-5x+9)}-1 > 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2-x+\sqrt{x} \leq \sqrt{2(x^2-5x+9)}-1 \Leftrightarrow 3-x+\sqrt{x} \leq \sqrt{2(x^2-5x+9)} \quad (1)$$

Dễ thấy (1) thỏa mãn với $x=0$. Xét trường hợp $x>0$ ta có $(1) \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} + 1 \leq \sqrt{2\left(x-5+\frac{9}{x}\right)}$

Đặt $\frac{3}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{9}{x} + x = t^2 + 6$ ta thu được

$$t+1 \leq \sqrt{2(t^2+1)} \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1 \\ t \geq -1 \\ t^2+2t+1 \leq 2t^2+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1 \\ t \geq -1 \\ (t-1)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1 \\ t \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow t \in \mathbb{R}.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq 0$.

Nhận xét.

Xin nhắc lại hai dạng tổng quát đồng bậc hai và dạng đồng bậc ba như các bài toán trước

$$af^2(x)+bf(x)g(x)+cg^2(x)=0; \quad af^2(x)+bf^2(x)g(x)+cf(x)g^2(x)+dg^3(x)=0.$$

Áp dụng cho dạng tổng quát chứa căn: $af(x)+bg(x)=c\sqrt{df^2(x)+eg^2(x)}.$

Các bạn thực hiện bình phương hai vế kèm theo điều kiện để quy về dạng phương trình đồng bậc bậc hai có hình thức rõ ràng hơn.

Bài toán 47. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{6(x^2-2x+4)}-2x} \geq \frac{1}{2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải 1.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x + 4 \geq 0 \\ \sqrt{6(x^2 - 2x + 4)} \neq 2x \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$\text{Nhận xét } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{6(x^2 - 2x + 4)} - 2x = \frac{6(x^2 - 2x + 4) - 4x^2}{\sqrt{6(x^2 - 2x + 4)} + 2x} = \frac{2(x-3)^2 + 6}{\sqrt{6(x^2 - 2x + 4)} + 2x} > 0.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2(\sqrt{x} - 2) \geq \sqrt{6(x^2 - 2x + 4)} - 2x \Leftrightarrow 2x - 4 + 2\sqrt{x} \geq \sqrt{6(x^2 - 2x + 4)} \Leftrightarrow 2(x-2) + 2\sqrt{x} \geq \sqrt{6(x-2)^2 + 12x}$$

Đặt $x-1=u; \sqrt{x}=v$ thu được

$$\begin{aligned} 2u + 2v \geq \sqrt{6u^2 + 12v^2} &\Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geq 0 \\ 4u^2 + 8uv + 4v^2 \geq 6u^2 + 12v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geq 0 \\ (u-2v)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geq 0 \\ u=2v \end{cases} \\ \Leftrightarrow u=2v \ (u \geq 0; v \geq 0) &\Rightarrow \begin{cases} u=2v \\ u \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=2\sqrt{x} \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x}-1)^2 = 3 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow x = 4 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 4 + 2\sqrt{3}$.

Lời giải 2.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x + 4 \geq 0 \\ \sqrt{6(x^2 - 2x + 4)} \neq 2x \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0.$$

$$\text{Nhận xét } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{6(x^2 - 2x + 4)} = \sqrt{4x^2 + 2(x-3)^2 + 6} > \sqrt{4x^2} = 2|x| = 2x \Rightarrow \sqrt{6(x^2 - 2x + 4)} - 2x > 0.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2(\sqrt{x} - 2) \geq \sqrt{6(x^2 - 2x + 4)} - 2x \Leftrightarrow 2x - 4 + 2\sqrt{x} \geq \sqrt{6(x^2 - 2x + 4)} \quad (1).$$

Xét $x=0$ không thỏa mãn bất phương trình (1).

$$\text{Xét trường hợp } x > 0 \text{ ta có } (1) \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) + 2 \geq \sqrt{6\left(x - 2 + \frac{4}{x}\right)} \quad (2).$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = t \Rightarrow t^2 = x + \frac{4}{x} - 4; (2) \text{ trở thành}$$

$$\begin{aligned} 2t + 2 \geq \sqrt{6(t^2 + 2)} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2t + 2 \geq 0 \\ 4t^2 + 8t + 4 \geq 6t^2 + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ 2(t-2)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq -1 \\ (t-2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2 \\ \Rightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t^2 = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x + \frac{4}{x} - 4 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 8x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

So sánh điều kiện ta thu được nghiệm $x = 4 + 2\sqrt{3}$.

Bài toán 48. Giải phương trình $x-1+\sqrt{x}=\sqrt{7x^2-17x+7}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0; 7x^2 - 17x + 7 \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $x-1+\sqrt{x}=\sqrt{7(x^2-2x+1)}-3x$. Đặt $x-1=u; \sqrt{x}=v$ ($v \geq 0$) ta thu được

$$u+v=\sqrt{7u^2-3v^2} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geq 0 \\ u^2+2uv+v^2=7u^2-3v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geq 0 \\ 3u^2-uv-2v^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geq 0 \\ (u-v)(3u+2v)=0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned} \bullet \quad & \begin{cases} u+v \geq 0 \\ u=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq 0; v \geq 0 \\ u=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x-1=\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-3x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}. \\ \bullet \quad & \begin{cases} u+v \geq 0 \\ 3u+2v=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \leq 0; v \geq 0 \\ 2\sqrt{x}=3-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 4x=9x^2-18x+9 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{11-2\sqrt{10}}{9}. \end{aligned}$$

So sánh điều kiện ta có nghiệm $S=\left\{\frac{11-2\sqrt{10}}{9}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Bài toán 49. Giải bất phương trình $2(2-x) \geq \sqrt{x} + \sqrt{4x^2-19x+16}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2-19x+16 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{19-\sqrt{105}}{8} \\ x \geq \frac{19+\sqrt{105}}{8} \end{cases}$$

Bất phương trình biến đổi về $2(2-x)-\sqrt{x} \geq \sqrt{4(x-2)^2-3x}$. Đặt $x-2=a; \sqrt{x}=b$ ($b \geq 0$) ta thu được

$$2a-b \geq \sqrt{4a^2-3b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b \geq 0 \\ 4a^2-4ab+b^2 \geq 4a^2-3b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b \geq 0 \\ b(b-a) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a \geq b \\ b=0 \\ b \geq a \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & \begin{cases} 2a \geq b \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\sqrt{x} \leq 4 \\ \sqrt{x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0. \\ \blacksquare \quad & \begin{cases} 2a \geq b \\ b \geq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\sqrt{x}-4 \leq 0 \\ \sqrt{x} \geq 2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\sqrt{x}-4 \leq 0 \\ (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \sqrt{x} \leq \frac{\sqrt{33}-1}{4} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{17-\sqrt{33}}{8}. \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S=\{0\} \cup \left[1; \frac{19-\sqrt{105}}{8}\right]$.

Nhận xét.

Để tìm các hệ số ẩn phụ trong căn thức các bạn nên sử dụng đồng nhất thức như các bài toán trước. Trong trường hợp bất phương trình, cần có nhận xét, đánh giá, lập luận để giảm bớt một số trường hợp, thành thử nếu không thì lời giải sẽ rườm rà, tốn kém thời gian, công sức. Ngoài ra các bạn cần tìm điều kiện và kết hợp nghiệm chính xác, bởi nghiệm thông thường là một khoảng, đoạn hoặc hợp các khoảng và điểm, thao tác thử nghiệm tỏ ra khá khó khăn, do đó rất dễ dẫn đến sai lầm và ngộ nhận.

Bài toán 50. Giải phương trình $6 = 3x + \sqrt{x} + 2\sqrt{3x^2 - 14x + 12}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2 - 14x + 12 \geq 0 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$3(2-x) - \sqrt{x} = 2\sqrt{3(x^2 - 4x + 4)} - 2x \Leftrightarrow 3(2-x) - \sqrt{x} = 2\sqrt{3(2-x)^2 - 2x}$$

Đặt $2-x=u; \sqrt{x}=v$ ($v \geq 0$) thu được

$$\begin{aligned} 3u-v &= 2\sqrt{3u^2-2v^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u-v \geq 0 \\ 9u^2-6uv+v^2=12u^2-8v^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3u-v \geq 0 \\ u^2+2uv-3v^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u-v \geq 0 \\ (u-v)(u+3v)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u-v \geq 0 \\ \begin{cases} u=v \\ u=-3v \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

- $\begin{cases} 3u-v \geq 0 \\ u=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq 0; v \geq 0 \\ u=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 2-x=\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$
- $\begin{cases} 3u-v \geq 0 \\ u=-3v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10v \geq 0 \\ u=-3v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \leq 0 \\ u=-3v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v=0 \\ u=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm).}$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x=1$.

Bài toán 51. Giải phương trình $1 = \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt{4x^2 - 2x + 3}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geq 0 \\ 4x^2 - 2x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -3 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với $x + \sqrt{x^2 + 2x - 3} = \sqrt{5x^2 - (x^2 + 2x - 3)}$.

Đặt $\sqrt{x^2 + 2x - 3} = y$ ($y \geq 0$) ta thu được

$$\begin{aligned} x+y &= \sqrt{5x^2 - y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 0 \\ x^2 + y^2 + 2xy = 5x^2 - y^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 0 \\ 2x^2 - xy - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 0 \\ (x-y)(2x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 0 \\ \begin{cases} x=y \\ 2x+y=0 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

- $\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \sqrt{x^2 + 2x - 3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$
- $\begin{cases} x+y \geq 0 \\ 2x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ -2x = \sqrt{x^2 + 2x - 3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 3x^2 - 2x + 3 = 0 \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm).}$

Đối chiếu điều kiện, kết luận nghiệm $S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$.

Bài toán 52. Giải bất phương trình $2x-1-\sqrt{x} \leq \sqrt{2(4x^2-3x+1)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2x-1-\sqrt{x} \leq \sqrt{2(4x^2-4x+1)+2x} \Leftrightarrow 2x-1-\sqrt{x} \leq \sqrt{2(2x-1)^2+2x} \quad (1)$$

Đặt $2x-1=a; \sqrt{x}=b$ ($b \geq 0$) thu được

$$a-b \leq \sqrt{2a^2+2b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a < b \\ a \geq b \\ a^2-2ab+b^2 \leq 2a^2+2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < b \\ a \geq b \\ (a+b)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < b \\ a \geq b \end{cases}$$

Vậy bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi x thuộc tập xác định, tức là $S=[0;+\infty)$.

Bài toán 53. Giải bất phương trình $x-3\sqrt{x}+2 \leq \sqrt{x^2+7x+4}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $x+2-3\sqrt{x} \leq \sqrt{x^2+4x+4+3x} \Leftrightarrow x+2-3\sqrt{x} \leq \sqrt{(x+2)^2+3x}$.

Đặt $x+2=a; \sqrt{x}=b$ ($a > 0; b \geq 0$) ta thu được

$$a-3b \leq \sqrt{a^2+3b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 3b \\ a \geq 3b \\ a^2-6ab+9b^2 \leq a^2+3b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 3b \\ a \geq 3b \\ b(a-b) \geq 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp

- $a < 3b \Leftrightarrow x-3\sqrt{x}+2 < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) < 0 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 4$.
- $\begin{cases} a \geq 3b \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3\sqrt{x}+2 \geq 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.
- $\begin{cases} a \geq 3b \\ a-b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3\sqrt{x}+2 \geq 0 \\ x-\sqrt{x}+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \geq 2 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 1 \end{cases}$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x \geq 0$.

Bài toán 54. Giải bất phương trình $2x-1-\sqrt{x} \leq \sqrt{4x^2-7x+1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2-7x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{7+\sqrt{33}}{8} \\ 0 \leq x \leq \frac{7-\sqrt{33}}{8} \end{cases}$$

Bất phương trình đã cho tương đương với $2x-1-\sqrt{x} \leq \sqrt{4x^2-4x+1+3x} \Leftrightarrow 2x-1-\sqrt{x} \leq \sqrt{(2x-1)^2+3x}$.

$$\text{Đặt } 2x-1=a; \sqrt{x}=b \text{ } (b \geq 0) \text{ thu được } a-b \leq \sqrt{a^2+3b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a < b \\ a \geq b \\ a^2-2ab+b^2 \leq a^2+3b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < b \\ a \geq b \\ b(a+b) \geq 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

- $a < b \Leftrightarrow 2x - \sqrt{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 1) < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow x < 1.$
- $\begin{cases} a \geq b \\ b(a+b) \geq 0 \end{cases}$ (Nghiem đúng với mọi x thuộc tập xác định).

Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x \geq \frac{7+\sqrt{33}}{8} \\ 0 \leq x \leq \frac{7-\sqrt{33}}{8} \end{cases}$

Bài toán 55. Giải bất phương trình $x+1-\sqrt{x-2} \leq \sqrt{x^2+5} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Nhận xét $x+1-\sqrt{x-2} = \frac{x^2+x+3}{x+1+\sqrt{x-2}} > 0 \quad \forall x \geq 2.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2+2x+1+x-2-2(x+1)\sqrt{x-2} &\leq x^2+5 \Leftrightarrow 3x-6 \leq 2(x+1)\sqrt{x-2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 3\sqrt{x-2} \leq 2(x+1) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 4x^2-x+22 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \end{aligned}$$

Bất phương trình đã cho có nghiệm $S = \{2\}.$

Bài toán 56. Giải bất phương trình $2x+2 \leq \sqrt{x-1} + \sqrt{3x^2+4x+5} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 1.$

Nhận xét $2x+2-\sqrt{x-1} = x + \left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0 \quad \forall x \geq 1.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x+2-\sqrt{x-1} &\leq \sqrt{3x^2+4x+5} \Leftrightarrow 4x^2+8x+4+x-1-4(x+1)\sqrt{x-1} \leq 3x^2+4x+5 \\ \Leftrightarrow x^2+5x-2-4(x+1)\sqrt{x-1} &\leq 0 \Leftrightarrow x^2+2x+1-4(x+1)\sqrt{x-1}+3(x-1) \leq 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)^2-4(x+1)\sqrt{x-1}+3(x-1) &\leq 0 \Leftrightarrow 1-4 \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}+3 \cdot \frac{x-1}{(x+1)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Đặt $\frac{\sqrt{x-1}}{x+1} = t \quad (t \geq 0)$ ta có $1-4t+3t^2 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(3t-1) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq t \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{\sqrt{x-1}}{x+1} \leq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} \leq x+1 \\ 3\sqrt{x-1} \geq x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \leq x^2+2x+1 \\ 9x-9 \geq x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+2 \geq 0 \\ x^2-7x+10 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = [2; 5].$

Bài toán 57. Giải bất phương trình $x+1-2\sqrt{2x-1} \leq \sqrt{2x^2+12x-2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x+1-2\sqrt{2x-1} \leq \sqrt{2(x^2+2x+1)+4(2x-1)} \Leftrightarrow x+1-2\sqrt{2x-1} \leq \sqrt{2(x+1)^2+4(2x-1)}$$

Đặt $x+1=u; \sqrt{2x-1}=v$ ($u>0; v \geq 0$) ta thu được

$$u-2v \leq \sqrt{2u^2+4v^2} \Leftrightarrow \begin{cases} u-2v < 0 \\ u-2v \geq 0 \\ u^2-4uv+4v^2 \leq 2u^2+4v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u < 2v \\ u \geq 2v \\ u^2+4uv \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u < 2v \\ u \geq 2v \\ u(u+4v) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u < 2v \\ u \geq 2v \end{cases}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq \frac{1}{2}$.

Bài toán 58. Giải bất phương trình $2(x+1) \leq 3\sqrt{x-1} + \sqrt{4x^2+9x+3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 1$.

$$\text{Phương trình đã cho tương đương } 2(x+1)-3\sqrt{x-1} \leq \sqrt{4(x^2+2x+1)+x-1} \quad (1)$$

Đặt $x+1=a; \sqrt{x-1}=b$ ($a>0; b \geq 0$) ta có

$$(1) \Leftrightarrow 2a-3b \leq \sqrt{4a^2+b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a < 3b \\ 2a \geq 3b \\ 4a^2-12ab+9b^2 \leq 4a^2+b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a < 3b \\ 2a \geq 3b \\ b(2b-3a) \leq 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp xảy ra sau

- $2a < 3b \Leftrightarrow 2x+2 < 3\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 4x^2+8x+4 < 9x-9 \Leftrightarrow 4x^2-x+13 < 0$ (Vô nghiệm).
- $\begin{cases} 2a \geq 3b \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2 \geq 3\sqrt{x-1} \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$
- $\begin{cases} 2a \geq 3b \\ 2b \leq 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2 \geq 3\sqrt{x-1} \\ 3x+3 \geq 2\sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+8x+4 \geq 9x-9 \\ 9x^2+18x+9 \geq 4x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-x+13 \geq 0 \\ 9x^2+14x+13 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x \geq 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 1$.

$$\text{Phương trình đã cho tương đương } 2(x+1)-3\sqrt{x-1} \leq \sqrt{4(x^2+2x+1)+x-1} \quad (1)$$

$$\text{Nhận xét } 2(x+1)-3\sqrt{x-1} = \frac{4x^2-x+13}{2(x+1)+3\sqrt{x-1}} > 0 \quad \forall x \geq 1.$$

Đặt $x+1=a; \sqrt{x-1}=b$ ($a>0; b \geq 0; 2a>3b$) thì (1) trở thành

$$(1) \Leftrightarrow 2a-3b \leq \sqrt{4a^2+b^2} \Leftrightarrow 4a^2-12ab+9b^2 \leq 4a^2+b^2 \Leftrightarrow b(2b-3a) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ 3a \geq 2b \end{cases}$$

Xét các khả năng

- $b=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow x=1.$
- Trường hợp $3a \geq 2b$ hiển nhiên do $3a > 2a > 3b > 2b.$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S=[1; +\infty).$

Bài toán 59. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+x+1}+x \geq 2\sqrt{x^2+3x+3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x^2+x+1}+x \geq 2\sqrt{3(x^2+x+1)}-2x^2$.

Đặt $\sqrt{x^2+x+1}=y$ ($y > 0$) ta có

$$y+x \geq 2\sqrt{3y^2-2x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y+x \geq 0 \\ y^2+x^2+2xy \geq 12y^2-8x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 0 \\ 9x^2+2xy-11y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 0 \\ (x-y)(9x+11y) \geq 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \bullet & \begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-y \geq 0 \\ 9x+11y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ x \geq y \\ 9x+11y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0. \\ \bullet & \begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-y \leq 0 \\ 9x+11y \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 0 \\ x \leq \sqrt{x^2+x+1} \\ 20x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x+1} \geq -x \\ \sqrt{x^2+x+1} \geq x \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x+1} \geq -x \\ \sqrt{x^2+x+1} \geq -x \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0. \end{aligned}$$

Kết hợp hai trường hợp và điều kiện ta thu được nghiệm $x \geq -1$.

Bài toán 60. Giải phương trình $\sqrt{x^2+x-2}+x=2+\sqrt{4x^2-x-2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2+x-2 \geq 0 \\ 4x^2-x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+x-2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+x-2}+x-2=\sqrt{3(x^2+x-2)}+(x^2-4x+4) \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x-2}+x-2=\sqrt{3(x^2+x-2)}+(x-2)^2$$

Đặt $\sqrt{x^2+x-2}=u$; $x-2=v$ ($u \geq 0$), khi đó

$$(1) \Leftrightarrow u+v=\sqrt{3u^2+v^2} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geq 0 \\ u^2+2uv+v^2=3u^2+v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geq 0 \\ u(u-v)=0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \blacksquare & \begin{cases} u+v \geq 0 \\ u=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x-2}+x-2 \geq 0 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+x-2}+x-2 \geq 0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{cases} \quad (\text{Hệ vô nghiệm}). \\ \blacksquare & \begin{cases} u+v \geq 0 \\ u=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq 0; v \geq 0 \\ u=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{x^2+x-2}=x-2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2+x-2=x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x=\frac{6}{5} \end{cases} \quad (\text{Hệ vô nghiệm}). \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 61. Giải phương trình $2\sqrt{x^2+3x+3}+x+1=\sqrt{9x^2+23x+19}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{x^2+3x+3}+x+1=\sqrt{5(x^2+3x+3)+4(x^2+2x+1)} \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+3x+3}+x+1=\sqrt{5(x^2+3x+3)+4(x+1)^2}$$

Đặt $\sqrt{x^2+3x+3}=a; x+1=b$ ($a > 0$) ta thu được phương trình

$$2a+b=\sqrt{5a^2+4b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b \geq 0 \\ 4a^2+4ab+b^2=5a^2+4b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b \geq 0 \\ a^2-4ab+3b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b \geq 0 \\ a=b \\ a=3b \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

$$\diamond \begin{cases} 2a+b \geq 0 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0; b \geq 0 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+3x+3=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x=-2 \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm).}$$

$$\diamond \begin{cases} 2a+b \geq 0 \\ a=3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0; b \geq 0 \\ a=3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+3x+3=9(x^2+2x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 8x^2+15x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{33}-15}{16}.$$

So sánh điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{\frac{\sqrt{33}-15}{16}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Nhận xét $x=-1$ không thỏa mãn phương trình ban đầu. Xét trường hợp $x \neq -1$, phương trình trở thành

$$2\sqrt{x^2+3x+3}+x+1=\sqrt{5(x^2+3x+3)+4(x+1)^2} \Leftrightarrow 2\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}+1=\sqrt{\frac{5(x^2+3x+3)}{(x+1)^2}+4}$$

$$\text{Đặt } \frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}=t \text{ ta thu được } 2t+1=\sqrt{5t^2+4} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t+1 \geq 0 \\ 4t^2+4t+1=5t^2+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t+1 \geq 0 \\ t^2-4t+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=3 \end{cases}$$

$$\triangleright t=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x+3}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+3x+3=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x=-2 \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm).}$$

$$\triangleright t=3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x+3}=3(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+3x+3=9(x^2+2x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 8x^2+15x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{33}-15}{16}.$$

So sánh điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{\frac{\sqrt{33}-15}{16}\right\}$.

Bài toán 62. Giải phương trình $\sqrt{1-x^2}+1-2x=2\sqrt{14x^2-12x+1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $-1 \leq x \leq 1; 4x^2-12x+1 \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{1-x^2}+1-2x=2\sqrt{3(4x^2-4x+1)-2(1-x^2)} \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}+1-2x=2\sqrt{3(1-2x)^2-2(1-x^2)}$$

Đặt $\sqrt{1-x^2}=a; 1-2x=b$ ($a \geq 0$) ta có

$$a+b=2\sqrt{3a^2-2b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ a^2+2ab+b^2=12a^2-8b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ 11a^2-2ab-9b^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ (a-b)(11a+9b)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ \begin{cases} a=b \\ 11a+9b=0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ a=b \end{cases} \vee \begin{cases} a+b \geq 0 \\ 11a+9b=0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned} \circ \quad & \begin{cases} a+b \geq 0 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0; b \geq 0 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x^2 = 4x^2 - 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x(5x-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0. \\ \circ \quad & \begin{cases} a \geq 0 \\ a+b \geq 0 \\ 11a+9b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ -\frac{2}{9}a \geq 0 \\ 11a+9b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a \leq 0 \\ 11a+9b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2=0 \\ 1-2x=0 \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm).} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài toán 63. Giải phương trình $x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1} = 3\sqrt{3x^4 - 2x^2 + 2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $|x| \geq 1$.

Phương trình đã cho biến đổi về $x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1} = 3\sqrt{3x^4 - 2(x^2 - 1)}$

Đặt $x^2 = a; \sqrt{x^2 - 1} = b$ ($a \geq 1; b \geq 0$) ta thu được

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a \geq 1; b \geq 0 \\ a+2b = 3\sqrt{3a^2 - 2b^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1; b \geq 0 \\ a^2 + 4ab + 4b^2 = 9(3a^2 - 2b^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1; b \geq 0 \\ 13a^2 - 2ab - 11b^2 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1; b \geq 0 \\ (a-b)(13a+11b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow x^2 = \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow x^4 - x^2 + 1 = 0 \text{ (Vô nghiệm).} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 64. Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x - 6} + \sqrt{x} = \sqrt{3x^2 + 4x - 18}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 3x^2 + 4x - 18 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Phương trình đã cho quy về $\sqrt{x^2 + x - 6} + \sqrt{x} = \sqrt{3(x^2 + x - 6)} + x$.

Đặt $\sqrt{x^2 + x - 6} = u; \sqrt{x} = v$ ($u \geq 0; v > 0$) thu được

$$\begin{cases} u \geq 0; v > 0 \\ u+v = \sqrt{3u^2 + v^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq 0; v > 0 \\ u^2 + 2uv + v^2 = 3u^2 + v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq 0; v > 0 \\ u(u-v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=0 \\ u=v \end{cases}$$

- $u=0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3; 2\}$.
- $u=v \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x - 6} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{6}; \sqrt{6}\}$.

Đối chiếu điều kiện, kết luận nghiệm $S = \{2; \sqrt{6}\}$.

Lời giải 2.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0; x \geq 0 \\ 3x^2 + 4x - 18 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\frac{x^2+x-6}{x}}+1=\sqrt{\frac{3x^2+4x-18}{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x-\frac{6}{x}+1}+1=\sqrt{3\left(x-\frac{6}{x}+1\right)}+1$

Đặt $\sqrt{x-\frac{6}{x}+1}=t$ ($t \geq 0$) thu được $t+1=\sqrt{3t^2+1} \Leftrightarrow t^2+2t+1=3t^2+1 \Leftrightarrow t(t-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases}$

$$\text{➤ } t=0 \Leftrightarrow x^2+x=6 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-3 \end{cases}$$

$$\text{➤ } t=1 \Leftrightarrow x-\frac{6}{x}=0 \Leftrightarrow x^2=6 \Leftrightarrow x=\sqrt{6} \vee x=-\sqrt{6}.$$

Quan sát điều kiện, kết luận nghiệm $S=\{2; \sqrt{6}\}$.

Bài toán 65. Giải phương trình $\sqrt{x}+2\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{5x^2+9x-10}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x}+2\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{5(x^2+x-2)+4x}$

Đặt $\sqrt{x}=a; \sqrt{x^2+x-2}=b$ ($a > 0; b \geq 0$) ta quy về

$$\begin{aligned} \begin{cases} a+2b=\sqrt{5a^2+4b^2} \\ a>0; b \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+4ab+4b^2=5a^2+4b^2 \\ a>0; b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-b)=0 \\ a>0; b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=x^2+x-2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{2} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $S=\{\sqrt{2}\}$.

Lời giải 2.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Biến đổi về dạng $\sqrt{x}+2\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{5(x^2+x-2)+4x} \Leftrightarrow 1+2\sqrt{\frac{x^2+x-2}{x}}=\sqrt{5 \cdot \frac{x^2+x-2}{x}+4}$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2+x-2}{x}}=t$ ($t > 0$) ta thu được

$$1+2t=\sqrt{5t^2+4} \Leftrightarrow 4t^2+4t+1=5t^2+4 \Leftrightarrow t(t-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow t=1 \Leftrightarrow x^2=2 \Rightarrow x \in \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}.$$

Quan sát và kết hợp điều kiện, suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $S=\{\sqrt{2}\}$.

Bài toán 66. Giải bất phương trình $\frac{6-x+2\sqrt{x}}{3-\sqrt{3x^2-14x+27}} \geq 1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ 3-\sqrt{3x^2-14x+27} \neq 0 \end{cases}$$

Nhận xét $3 - \sqrt{3x^2 - 14x + 27} = 3 - \sqrt{3\left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + \frac{32}{3}} \leq 3 - \sqrt{\frac{32}{3}} < 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$6 - x + 2\sqrt{x} \geq 3 - \sqrt{3x^2 - 14x + 27} \Leftrightarrow 3 - x + 2\sqrt{x} \geq \sqrt{3(x^2 - 6x + 9) + 4x} \quad (1).$$

Đặt $3 - x = u; 2\sqrt{x} = v$ ($v \geq 0$) ta có (1) $\Leftrightarrow u + v \geq \sqrt{3u^2 + v^2} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \geq 0 \\ u^2 + v^2 + 2uv \geq 3u^2 + v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \geq 0 \\ u(u - v) \leq 0 \end{cases}$

Xét các khả năng xảy ra

$$\begin{aligned} \bullet & \begin{cases} u + v \geq 0 \\ u \geq 0 \\ u \leq v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x + 2\sqrt{x} \geq 0 \\ 3 - x \geq 0 \\ 3 - x \leq 2\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2\sqrt{x} - 3 \leq 0 \\ x \leq 3 \\ x + 2\sqrt{x} - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \leq 3 \\ x \leq 3 \\ \sqrt{x} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3. \\ \bullet & \begin{cases} u + v \geq 0 \\ u \leq 0 \\ u \geq v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x + 2\sqrt{x} \geq 0 \\ 3 - x \leq 0 \\ 3 - x \geq 2\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2\sqrt{x} - 3 \leq 0 \\ x \geq 3 \\ x + 2\sqrt{x} - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \leq 3 \\ x \geq 3 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} \text{ (Hệ vô nghiệm).} \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S = [1; 3]$.

Bài toán 67. Giải bất phương trình $\frac{1 + \sqrt{x}}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $1 + \sqrt{x} \leq x + \sqrt{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow 1 - x + \sqrt{x} \leq \sqrt{(1 - x)^2 + 3x}$.

$$\text{Đặt } 1 - x = u; \sqrt{x} = v \quad (v \geq 0) \text{ thì } u + v \leq \sqrt{u^2 + 3v^2} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v < 0 \\ u + v \geq 0 \\ u^2 + 3v^2 \geq u^2 + 2uv + v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v < 0 \\ u + v \geq 0 \\ v(v - u) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v \geq 0 \\ v = 0 \\ u + v < 0 \\ u + v \geq 0 \\ v \geq u \end{cases}$$

Xét các trường hợp

$$\begin{aligned} \blacksquare & \begin{cases} u + v \geq 0 \\ v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x + \sqrt{x} \geq 0 \\ \sqrt{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0. \\ \blacksquare & u + v < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x} - 1 > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}. \\ \blacksquare & \begin{cases} u + v \geq 0 \\ v \geq u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x + \sqrt{x} \geq 0 \\ 1 - x \geq \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x} - 1 \leq 0 \\ x + \sqrt{x} - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{3 - \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Kết hợp tất cả các trường hợp ta có nghiệm $S = \left[0; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

Bài toán 68. Giải bất phương trình $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x^2 + x + 5} \leq \sqrt{2x^2 + 4x + 8} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2+x+5} \leq \sqrt{2(x-1)+2(x^2+x+5)}$.

Đặt $\sqrt{x-1} = a; \sqrt{x^2+x+5} = b$ ($a \geq 0; b > 0$) ta được

$$a + b \leq \sqrt{2a^2 + 2b^2} \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0 \text{ (Hằng bất đẳng thức).}$$

Vậy bất phương trình nghiệm đúng với mọi giá trị x thuộc tập xác định, tức là $S = [1; +\infty)$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2+x+5} \leq \sqrt{2(x-1)+2(x^2+x+5)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+5}} + 1 \leq \sqrt{2 \cdot \frac{x-1}{x^2+x+5} + 2}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{\frac{x-1}{x^2+x+5}} = t \text{ (} t \geq 0 \text{) ta thu được } t+1 \leq \sqrt{2t^2+2} \Leftrightarrow t^2+2t+1 \leq 2t^2+2 \Leftrightarrow (t-1)^2 \geq 0 \quad (*)$$

Nhận thấy (*) nghiệm đúng với mọi giá trị thực t nên suy ra tập nghiệm $S = [1; +\infty)$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \geq 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x-1+x^2+x+5+2\sqrt{(x-1)(x^2+x+5)} \leq 2x^2+4x+8 \Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)(x^2+x+5)} \leq x^2+2x+4 \quad (1)$$

$$\forall a \geq 0; b \geq 0: (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b \Rightarrow 2\sqrt{(x-1)(x^2+x+5)} \leq (x-1)(x^2+x+5) = x^2+2x+4$$

Do đó (1) nghiệm đúng với mọi $x \geq 1$. Kết luận $S = [1; +\infty)$.

Lời giải 4.

Điều kiện $x \geq 1$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$\begin{aligned} (\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2+x+5})^2 &= (1 \cdot \sqrt{x-1} + 1 \cdot \sqrt{x^2+x+5})^2 \leq (1^2 + 1^2)(x-1+x^2+x+5) = 2x^2+4x+8 \\ \Rightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2+x+5} &\leq \sqrt{2x^2+4x+8} \end{aligned}$$

Như vậy bất phương trình đã cho hiển nhiên đúng với mọi giá trị x thuộc tập xác định.

Kết luận tập hợp nghiệm $S = [1; +\infty)$.

Bài toán 69. Giải bất phương trình $\sqrt{4x+1} + \sqrt{x^2-2x} \geq \sqrt{2}(1+x)$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 4x+1 \geq 0 \\ x(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} \leq x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{4x+1} + \sqrt{x^2-2x} &\geq \sqrt{2}|x+1| \Leftrightarrow \sqrt{4x+1} + \sqrt{x^2-2x} \geq \sqrt{2(x+1)^2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{4x+1} + \sqrt{x^2-2x} \geq \sqrt{2(x^2-2x)+2(4x+1)} \end{aligned} \quad (1)$$

Đặt $\sqrt{4a+1} = a; \sqrt{x^2-2x} = b$ ($a \geq 0; b \geq 0$) ta có

$$(1) \Leftrightarrow a+b \geq \sqrt{2(a^2+b^2)} \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \geq 2(a^2+b^2) \Leftrightarrow (a-b)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a-b=0$$

$$\Leftrightarrow 4x+1 = x^2-2x \Leftrightarrow x^2-6x-1=0 \Leftrightarrow x \in \{3-\sqrt{10}; 3+\sqrt{10}\}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \{3-\sqrt{10}; 3+\sqrt{10}\}$.

Lời giải 2.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 4x+1 \geq 0 \\ x(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} \leq x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Nhận xét bất phương trình không thỏa mãn với $x = -\frac{1}{4}$.

Ngoài trường hợp trên ta có $\sqrt{4x+1} > 0$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{x^2-2x} \geq \sqrt{2}|x+1| \Leftrightarrow \sqrt{4x+1} + \sqrt{x^2-2x} \geq \sqrt{2(x+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x+1} + \sqrt{x^2-2x} \geq \sqrt{2(x^2-2x)+2(4x+1)} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{\frac{x^2-2x}{4x+1}} \geq \sqrt{2 \cdot \frac{x^2-2x}{4x+1} + 2}$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2-2x}{4x+1}} = t$ ($t \geq 0$) thu được

$$1+t \geq \sqrt{2t^2+2} \Leftrightarrow t^2+2t+2 \geq 2t^2+2 \Leftrightarrow (t-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t=1$$

$$\Leftrightarrow 4x+1 = x^2-2x \Leftrightarrow x^2-6x-1=0 \Leftrightarrow x \in \{3-\sqrt{10}; 3+\sqrt{10}\}.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \{3-\sqrt{10}; 3+\sqrt{10}\}$.

Lời giải 3.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 4x+1 \geq 0 \\ x(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} \leq x \leq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$\left(\sqrt{4x+1} + \sqrt{x^2-2x}\right)^2 \leq (1^2+1^2)(4x+1+x^2-2x) = 2(x^2+2x+1) = 2(x+1)^2$$

$$\Rightarrow \left|\sqrt{4x+1} + \sqrt{x^2-2x}\right| \leq \sqrt{2}|x+1| \Rightarrow \sqrt{4x+1} + \sqrt{x^2-2x} \leq \sqrt{2}|x+1| \quad \left(\forall x \geq -\frac{1}{4}\right) \quad (*)$$

Bất phương trình đã cho có nghiệm khi (*) xảy ra dấu đẳng thức

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{4x+1}}{1} = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{1} \Leftrightarrow 4x+1 = x^2-2x \Leftrightarrow x^2-6x-1=0 \Leftrightarrow x \in \{3-\sqrt{10}; 3+\sqrt{10}\}.$$

Quan sát điều kiện ta thu được nghiệm $S = \{3-\sqrt{10}; 3+\sqrt{10}\}$.

Bài toán 70. Giải phương trình $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x^2+3x-1} = \sqrt{x^2+9x-4} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x^2+3x-1} = \sqrt{3(2x-1) + x^2+3x-1}.$

Đặt $\sqrt{2x-1} = a; \sqrt{x^2+3x-1} = b$ ($a \geq 0; b \geq 0$) ta thu được

$$a+b=\sqrt{3a^2+b^2} \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2=3a^2+b^2 \Leftrightarrow a(a-b)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=b \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

- $a=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.
- $a=b \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}=\sqrt{x^2+3x-1} \Leftrightarrow 2x-1=x^2+3x-1 \Leftrightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Bài toán 71. Giải phương trình $2\sqrt{2x-3}+\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{x^2+19x-28}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $2\sqrt{2x-3}+\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{8(2x-3)+x^2+3x-4}$.

Đặt $\sqrt{2x-3}=a; \sqrt{x^2+3x-4}=b$ ($a \geq 0; b > 0$) thu được

$$2a+b=\sqrt{8a^2+b^2} \Leftrightarrow 4a^2+4ab+b^2=8a^2+b^2 \Leftrightarrow a(a-b)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=b \end{cases}$$

- $a=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.
- $a=b \Leftrightarrow \sqrt{2x-3}=\sqrt{x^2+3x-4} \Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

So sánh điều kiện ta thu được nghiệm $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq \frac{3}{2}$.

Nhận xét $x=\frac{3}{2}$ là một nghiệm của phương trình ban đầu. Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{2x-3}+\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{8(2x-3)+x^2+3x-4} \Leftrightarrow 2+\sqrt{\frac{x^2+3x-4}{2x-3}}=\sqrt{8+\frac{x^2+3x-4}{2x-3}}.$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2+3x-4}{2x-3}}=t$ ($t \geq 0$) ta thu được $2+t=\sqrt{8+t^2} \Leftrightarrow t^2+4t+4=t^2+8 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow x^2+x=1$ (1).

Phương trình (1) vô nghiệm với $x \geq \frac{3}{2}$. So sánh điều kiện và kết luận nghiệm $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Bài toán 72. Giải bất phương trình $\frac{2\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+x-7}}{\sqrt{10x^2+9x+2-7}} \geq 1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$.

Nhận xét $x \geq 2 \Rightarrow 10x^2+9x+2 \geq 60 > 49 \Rightarrow \sqrt{10x^2+9x+2} > 7$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2+x} - 7 \geq \sqrt{10x^2+9x+2} - 7$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2+x} \geq \sqrt{10(x^2+x)-(x-2)} \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{x-2}{x^2+x}} + 1 \geq \sqrt{10 - \frac{x-2}{x^2+x}}$$

Đặt $\sqrt{\frac{x-2}{x^2+x}} = t (t \geq 0)$ ta thu được $2t+1 \geq \sqrt{10-t^2} \Leftrightarrow 4t^2+4t+1 \geq 10-t^2 \Leftrightarrow 5t^2+4t-9 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (t-1)(5t+9) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-2}{x^2+x}} \geq 1 \Leftrightarrow x-2 \geq x^2+x \Leftrightarrow x^2+2 \leq 0 \quad (1)$$

Bất phương trình (1) vô nghiệm. Do đó bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 73. Giải bất phương trình $\frac{3\sqrt{2x-1} + \sqrt{x^2+1} - 5}{2\sqrt{5x^2-2x+6} - 5} \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2\sqrt{5x^2-2x+6} \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$

Do đó $\forall x > \frac{1}{2} \Rightarrow (2x-1)(10x+1) > 0 \Leftrightarrow 10x^2-8x-1 > 0 \Rightarrow 4(5x^2-2x+6) > 25 \Rightarrow 2\sqrt{5x^2-2x+6} > 5.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$3\sqrt{2x-1} + \sqrt{x^2+1} - 5 \leq 2\sqrt{5x^2-2x+6} - 5 \Leftrightarrow 3\sqrt{2x-1} + \sqrt{x^2+1} \leq 2\sqrt{5(x^2+1)-(2x-1)}.$$

Đặt $\sqrt{2x-1} = v; \sqrt{x^2+1} = u (u > 0; v > 0)$ ta thu được

$$u + 3v \leq 2\sqrt{5u^2 - v^2} \Leftrightarrow u^2 + 6uv + 9v^2 \leq 4(5u^2 - v^2) \Leftrightarrow 19u^2 - 6uv - 13v^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (u-v)(19u+13v) \geq 0 \Leftrightarrow u \geq v \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow x^2-2x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Kết hợp tất cả các trường hợp ta thu được nghiệm $S = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$

Bài toán 74. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{3x-1} + 2\sqrt{x^2+x+3} - 6}{\sqrt{11x^2+5x+35} - 6} \geq 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{3}.$

Nhận xét $11x^2+5x+35 > 36 \Rightarrow \sqrt{11x^2+5x+35} - 6 > 0 \forall x \geq \frac{1}{3}.$ Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{3x-1} + 2\sqrt{x^2+x+3} - 6 \geq \sqrt{11x^2+5x+35} - 6 \Leftrightarrow \sqrt{3x-1} + 2\sqrt{x^2+x+3} \geq \sqrt{11(x^2+x+3)} - 2(3x-1).$$

Đặt $\sqrt{3x-1} = a; \sqrt{x^2+x+3} = b (a \geq 0; b > 0)$ ta thu được

$$a + 2b \geq \sqrt{11b^2 - 2a^2} \Leftrightarrow a^2 + 4ab + 4b^2 \geq 11b^2 - 2a^2 \Leftrightarrow 3a^2 + 4ab - 7b^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(3a+7b) \leq 0 \Leftrightarrow a \leq b \Leftrightarrow \sqrt{3x-1} \leq \sqrt{x^2+x+3} \Leftrightarrow x^2-2x+4 \geq 0 \quad (*)$$

Bất phương trình (*) nghiệm đúng với mọi giá trị x thuộc tập xác định. Vậy $S = \left[\frac{1}{3}; +\infty\right).$

Bài toán 75. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2+2x+3}\leq\sqrt{9x^2+13x+17}$ ($x\in\mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x\in\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x^2+2x+3}\leq\sqrt{5(x^2+x+1)+4(x^2+2x+3)}$$

Đặt $\sqrt{x^2+x+1}=a; \sqrt{x^2+2x+3}=b$ ($a>0; b\geq 1$) ta thu được

$$a+2b\leq\sqrt{5a^2+4b^2}\Leftrightarrow a^2+4ab+b^2\leq 5a^2+4b^2\Leftrightarrow a(a-b)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow a\geq b\Leftrightarrow x^2+x+1\geq x^2+2x+3\Leftrightarrow x\leq -2$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=(-\infty; -2]$.

Bài toán 76. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+x-2}<\sqrt{4x^2+6x-10}$ ($x\in\mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $\begin{cases} x\geq 1 \\ x\leq -3 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+x-2}<\sqrt{2(x^2+2x-3)+2(x^2+x-2)}$$

Đặt $\sqrt{x^2+2x-3}=a; \sqrt{x^2+x-2}=b$ ($a\geq 0; b\geq 0$) ta thu được

$$a+b<\sqrt{2a^2+2b^2}\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2<2a^2+2b^2\Leftrightarrow (a-b)^2>0\Leftrightarrow a\neq b$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x-3}\neq\sqrt{x^2+x-2}\Leftrightarrow x^2+2x-3\neq x^2+x-2\Leftrightarrow x\neq 1$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $\begin{cases} x>1 \\ x\leq -3 \end{cases}$

Lời giải 2.

Điều kiện $\begin{cases} x\geq 1 \\ x\leq -3 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+x-2}<\sqrt{2(x^2+2x-3)+2(x^2+x-2)}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có

$$\left(\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+x-2}\right)^2\leq(1^2+1^2)(x^2+2x-3+x^2+x-2)=2(2x^2+3x-5)$$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+x-2}\leq\sqrt{4x^2+6x-10}\quad (1)$$

Bất phương trình đã cho là trường hợp (*) không xảy ra đẳng thức

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x-3}\neq\sqrt{x^2+x-2}\Leftrightarrow x^2+2x-3\neq x^2+x-2\Leftrightarrow x\neq 1.$$

Kết luận nghiệm tương tự lời giải 1.

Lời giải 3.

Điều kiện $\begin{cases} x\geq 1 \\ x\leq -3 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{(x-1)(x+3)}+\sqrt{(x-1)(x+2)}<\sqrt{2(x-1)(2x+5)}$ (1).

Nhận xét $x=1$ không thỏa mãn (1).

➤ Xét trường hợp $x>1$ thì

$$\begin{aligned}\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2} &< \sqrt{2(2x+5)} \Leftrightarrow 2x+5+2\sqrt{x^2+5x+6} < 4x+10 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+5x+6} &< 2x+5 \Leftrightarrow 4(x^2+5x+6) < 4x^2+20x+25 \text{ (Hiển nhiên).}\end{aligned}$$

➤ Xét trường hợp $x \leq -3$ thì

$$\begin{aligned}(1) \Leftrightarrow \sqrt{-(x+3)} + \sqrt{-(x+2)} &< \sqrt{-2(2x+5)} \\ \Leftrightarrow -2x-5+2\sqrt{x^2+5x+6} &< -4x-10 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+5x+6} < -2x-5 \quad (2)\end{aligned}$$

Bất phương trình (*) nghiệm đúng với $x \leq -3$.

Kết luận nghiệm của bất phương trình đề bài là $\begin{cases} x > 1 \\ x \leq -3 \end{cases}$

Bài toán 77. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-3x} + \sqrt{x^2-5x+4} \leq \sqrt{4x^2-16x+8} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 0 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}x^2-3x+x^2-5x+4+2\sqrt{x(x-3)(x-1)(x-4)} &\leq 4x^2-16x+8 \Leftrightarrow 2\sqrt{x(x-3)(x-1)(x-4)} \leq 2x^2-8x+4 \\ \Leftrightarrow (x^2-3x)+(x^2-5x+4)-2\sqrt{(x^2-3x)(x^2-5x+4)} &\geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2-5x+4})^2 \geq 0 \quad (*)\end{aligned}$$

Bất phương trình (*) hiển nhiên. Do đó ta có nghiệm $\begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 0 \end{cases}$

Lời giải 2.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 0 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x^2-3x} + \sqrt{x^2-5x+4} \leq \sqrt{2(x^2-3x)+2(x^2-5x+4)}$

Đặt $\sqrt{x^2-3x}=u; \sqrt{x^2-5x+4}=v \ (u \geq 0; v \geq 0)$ ta thu được $u+v \leq \sqrt{2u^2+2v^2} \quad (1)$

$$\forall a \geq 0; b \geq 0: (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow 2ab \leq a^2+b^2 \Rightarrow (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2) \Rightarrow a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$$

Do đó (1) hiển nhiên. Vậy ta có tập nghiệm $S = (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

Lời giải 3.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 0 \end{cases}$

Nhận xét $x=0$ thỏa mãn bất phương trình đã cho.

Ngoài trường hợp trên, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x^2-3x} + \sqrt{x^2-5x+4} \leq \sqrt{2(x^2-3x)+2(x^2-5x+4)} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x^2-3x}} \leq \sqrt{2+2 \cdot \frac{x^2-5x+4}{x^2-3x}}$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x^2-3x}} = t \ (t \geq 0)$ ta được $1+t \leq \sqrt{2t^2+2} \Leftrightarrow t^2+2t+1 \leq 2t^2+2 \Leftrightarrow (t-1)^2 \geq 0$ (Hiển nhiên).

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq 4 \vee x \leq 0$.

Bài toán 78. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-x} + \sqrt{x-2} \leq \sqrt{5x^2-6x+2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 2$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x - 2} \leq \sqrt{5(x^2 - x) - (x - 2)} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{\frac{x - 2}{x^2 - x}} \leq \sqrt{5 - \frac{x - 2}{x^2 - x}}$

Đặt $\sqrt{\frac{x - 2}{x^2 - x}} = t$ ($t \geq 0$) ta thu được

$$\begin{aligned} 1 + t &\leq \sqrt{5 - t^2} \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 \leq 5 - t^2 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (t - 1)(t + 2) \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1 \Leftrightarrow x - 2 \leq x^2 - x \Leftrightarrow x^2 + 2 \geq 0 \text{ (Hiển nhiên)}. \end{aligned}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S = [2; +\infty)$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 2$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2 - 2 + 2\sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x} &\leq 5x^2 - 6x + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^3 - 3x^2 + 2x} \leq 2x^2 - 3x + 2 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x \leq 4x^4 + 8x^2 + 4 - 12x(x^2 + 1) + 9x^2 \\ &\Leftrightarrow 4x^4 - 13x^3 + 20x^2 - 14x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 4x^4 - 14x^3 + 20x^2 - 14x + 4 + x \geq 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Nhận thấy

$$4x^4 - 14x^3 + 20x^2 - 14x + 4 + x \geq 0 = 2(x^2 - 2x + 1)(2x^2 - 3x + 2) + x = 2(x - 1)^2(2x^2 - 3x + 2) + x > 0, \forall x \geq 2.$$

Do đó (*) nghiệm đúng với $x \geq 2$. Kết luận nghiệm $S = [2; +\infty)$.

Bài toán 79. Giải phương trình $x + \sqrt{x^3 + x^2 - 2} = \sqrt{3x^3 + 4x^2 - 6}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^3 + x^2 - 2 \geq 0 \\ 3x^3 + 4x^2 - 6 \geq 0 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với $x + \sqrt{x^3 + x^2 - 2} = \sqrt{3(x^3 + x^2 - 2) + x^2}$

$$\text{Đặt } \sqrt{x^3 + x^2 - 2} = y \text{ } (y \geq 0) \text{ ta thu được } x + y = \sqrt{3y^2 + x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \geq 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 = 3y^2 + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \geq 0 \\ y(x - y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \begin{cases} x + y \geq 0 \\ y = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3 + x^2 - 2} + x \geq 0 \\ x^3 + x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3 + x^2 - 2} + x \geq 0 \\ (x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \\ \bullet \quad \begin{cases} x + y \geq 0 \\ x = y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^3 + x^2 - 2} + x \geq 0 \\ x = \sqrt{x^3 + x^2 - 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

Thử lại nghiệm, kết luận $S = \{1; \sqrt[3]{2}\}$.

Bài toán 80. Giải phương trình $4x = \sqrt{x^3 + 4x^2 - 5} + \sqrt{2(x^3 + 2x^2 - 5)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^3 + 4x^2 - 5 \geq 0 \\ 2x^3 + 4x^2 - 10 \geq 0 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với $2.2x - \sqrt{x^3 + 4x^2 - 5} = \sqrt{2(x^3 + 4x^2 - 5)} - 4x^2$ ($x \in \mathbb{R}$).

Đặt $2x = u; \sqrt{x^3 + 4x^2 - 5} = v$ ($v \geq 0$) ta thu được

$$\begin{aligned} 2u - v = \sqrt{2v^2 - u^2} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2u - v \geq 0 \\ 4u^2 - 4uv + v^2 = 2v^2 - u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u - v \geq 0 \\ 5u^2 - 4uv - v^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2u - v \geq 0 \\ (u - v)(5u + v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2u \geq v \\ u = v \end{cases} \\ \begin{cases} 2u - v \geq 0 \\ 5u + v = 0 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

- $\begin{cases} 2u \geq v \\ u = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 = x^3 + 4x^2 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}.$
- $\begin{cases} 2u - v \geq 0 \\ 5u + v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7u \geq 0 \\ 5u + v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq 0; v \geq 0 \\ 5u + v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x^3 + 4x^2 - 5} = 0 \end{cases} \text{ (Vô nghiệm).}$

Thử lại, vậy phương trình đã cho có nghiệm $S = \{\sqrt[3]{5}\}.$

Bài toán 81. Giải bất phương trình $\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3 + x - 2} \leq \sqrt{3x^3 + 4x - 4} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x^3 + x - 2 \geq 0 \\ 3x^3 + 4x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ (x-1)(x^2 + x + 2) \geq 0 \\ 3x^3 + 4x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3 + x - 2} \geq \sqrt{3(x^3 + x - 2) + x + 2}$

Đặt $\sqrt{x+2} = a; \sqrt{x^3 + x - 2} = b$ ($a > 0; b \geq 0$) ta thu được

$$\begin{aligned} a + b \geq \sqrt{3a^2 + b^2} &\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 3a^2 + b^2 \Leftrightarrow a(a - b) \leq 0 \Leftrightarrow a \leq b \\ &\Leftrightarrow x + 2 \leq x^3 + x - 2 \Leftrightarrow x^3 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

Kết luận nghiệm $S = [\sqrt[3]{4}; +\infty).$

Bài toán 82. Giải phương trình $2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x^3 + 2x - 7} = \sqrt{3x^3 + 18x - 27} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 3x^3 + 18x - 27 \geq 0 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ x^3 + 2x - 7 \geq 0 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x^3 + 2x - 7} = \sqrt{6(2x-1) + 3(x^3 + 2x - 7)}.$$

Đặt $\sqrt{2x-1} = a; \sqrt{x^3 + 2x - 7} = b$ ($a \geq 0; b \geq 0$) thu được

$$\begin{aligned} 2a + b &= \sqrt{6a^2 + 3b^2} \Leftrightarrow 4a^2 + 4ab + b^2 = 6a^2 + 3b^2 \Leftrightarrow 2(a - b)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow 2x - 1 = x^3 + 2x - 7 \Leftrightarrow x^3 = 6 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{6} \end{aligned}$$

Thử lại thấy giá trị này thỏa mãn phương trình ban đầu. Kết luận nghiệm $S = \{\sqrt[3]{6}\}$.

Bài toán 83. Giải bất phương trình

$$2\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^3+x^2+x-3} \leq \sqrt{6x^3+9x^2+9x-16} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2+x+1 \geq 0 \\ x^3+x^2+x-3 \geq 0 \\ 6x^3+9x^2+9x-16 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2+2x+3) \geq 0 \\ 6x^3+9x^2+9x-16 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^3+x^2+x-3} \leq \sqrt{3(x^2+x+1)+6(x^3+x^2+x-3)}$$

Đặt $\sqrt{x^2+x+1} = u; \sqrt{x^3+x^2+x-3} = v$ ($u > 0; v \geq 0$) ta thu được

$$\begin{aligned} 2u + v &\leq \sqrt{3u^2 + 6v^2} \Leftrightarrow 4u^2 + 4uv + v^2 \leq 3u^2 + 6v^2 \Leftrightarrow u^2 + 4uv - 5v^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (u-v)(u+5v) \leq 0 \Leftrightarrow u \leq v \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+1} \leq \sqrt{x^3+x^2+x-3} \\ &\Leftrightarrow x^2+x+1 \leq x^3+x^2+x-3 \Leftrightarrow x^3 \geq 4 \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = [\sqrt[3]{4}; +\infty)$.

Bài toán 84. Giải bất phương trình

$$2\sqrt{x^2-2x} + 3\sqrt{3x^3+x^2-2x-2} \geq \sqrt{9x^3+25x^2-50x-18} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x(x-2) \geq 0 \\ 3x^3+x^2-2x-2 \geq 0 \\ 9x^3+25x^2-50x-18 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) \geq 0 \\ (x-1)(3x^2+4x+2) \geq 0 \\ (9x^3+25x^2-50x)-18 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$2\sqrt{x^2-2x} + 3\sqrt{3x^3+x^2-2x-2} \geq \sqrt{16(x^2-2x)+9(x^3+x^2-2x-2)}$$

Đặt $\sqrt{x^2-2x} = a; \sqrt{3x^3+x^2-2x-2} = b$ ($a \geq 0; b > 0$) ta thu được

$$\begin{aligned} 2a + 3b &\geq \sqrt{16a^2 + 9b^2} \Leftrightarrow 4a^2 + 12ab + 9b^2 \geq 16a^2 + 9b^2 \Leftrightarrow 12a(a-b) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a \leq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x = 0 \\ x^2-2x \leq 3x^3+x^2-2x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) = 0 \\ 3x^3 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 2 \\ x \geq \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $x \geq 2$.

Bài toán 85. Giải phương trình

$$3\sqrt{2x^2+x} = \sqrt{5x^3+13x^2+4x-10} + \sqrt{x^3+3x^2+x-2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x^2+x \geq 0 \\ x^3+3x^2+x-2 \geq 0 \\ 5x^3+13x^2+4x-10 \geq 0 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với $3\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{x^3+3x^2+x-2}=\sqrt{5(x^3+3x^2+x-2)}-(2x^2+x)$

Đặt $\sqrt{2x^2+x}=a; \sqrt{x^3+3x^2+x-2}=b$ ($a \geq 0; b \geq 0$) ta có

$$3a-b=\sqrt{5b^2-a^2} \Rightarrow 9a^2-6ab+b^2=5b^2-a^2 \Leftrightarrow 5a^2-3ab-2b^2=0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(5a+2b)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 5a+2b=0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad a=b \Leftrightarrow 2x^2+x=x^3+3x^2+x-2 \Leftrightarrow x^3+x^2-2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+2)=0 \Leftrightarrow x=1.$$

$$\bullet \quad \begin{cases} 5a+2b=0 \\ a \geq 0; b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+x=0 \\ x^3+3x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{1}{2} \\ x^3+3x^2+x-2=0 \end{cases} \quad (\text{Hệ vô nghiệm}).$$

Thử lại thấy $x=1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Bài toán 86. Giải phương trình $\frac{2\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^3+2x-3}-4}{\sqrt{x^3+8x^2+2x-27}-4} \leq 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 \geq 4 \\ x^3+2x-3 \geq 0 \\ x^3+8x^2+2x-27 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+2) \geq 0 \\ (x-1)(x^2+x+3) \geq 0 \\ x^3+8x^2+2x-27 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Nhận xét

$$x^3+8x^2+2x-27=x(x-2)(x+10)+22x-27 \geq 22 \cdot 2-27=17 \Rightarrow \sqrt{x^3+8x^2+2x-27} > \sqrt{17} > 4.$$

Do đó bất phương trình đã cho trở thành $2\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^3+2x-3} \leq \sqrt{x^3+2x-3}+8(x^2-4)$

Đặt $\sqrt{x^2-4}=u; \sqrt{x^3+2x-3}=v$ ($u \geq 0; v > 0$) ta thu được

$$2u+v \leq \sqrt{8u^2+v^2} \Leftrightarrow 4u^2+4uv+v^2 \leq 8u^2+v^2 \Leftrightarrow 4u(u-v) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=0 \\ u \geq v \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

$$\text{➤ } u=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\text{➤ } u \geq v \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4} \geq \sqrt{x^3+2x-3} \Leftrightarrow x^3-x^2+2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2-x+2)+1 \geq 0 \quad (*)$$

Dễ thấy (*) nghiệm đúng với mọi $x \geq 2$.

So sánh và thử lại, kết luận phương trình đã cho có tập nghiệm $S=[2;+\infty)$.

Nhận xét.

Đối với bài toán 83, trong thao tác nhận xét và phân lập luận (*), các bạn THPT có thể dùng kiến thức liên quan đến đạo hàm – tính đơn điệu của hàm số của chương trình Giải tích lớp 12, chú ý rằng các hàm số liên quan $f(x)=x^3+8x^2+2x-27; g(x)=x^3-x^2+2x+1$ đều đồng biến trên miền $D=[2;+\infty)$.

Bài toán 87. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+x-10}+\sqrt{x^3+x^2-2} \leq \sqrt{4x^3+3x^2+x-16} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^3 + x - 10 \geq 0 \\ x^3 + x^2 - 2 \geq 0 \\ 4x^3 + 3x^2 + x - 16 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x^2 + 2x + 5) \geq 0 \\ (x-1)(x^2 + 2x^2 + 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2. \\ 4x^3 + 3x^2 + x - 16 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Bất phương trình đã cho tương đương với } \sqrt{x^3 + x - 10} + \sqrt{x^3 + x^2 - 2} \leq \sqrt{3(x^3 + x^2 - 2) + x^3 + x - 10} \quad (1)$$

Đặt $\sqrt{x^3 + x - 10} = a; \sqrt{x^3 + x^2 - 2} = b$ ($a \geq 0; b > 0$) thì

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow a + b \leq \sqrt{3b^2 + a^2} \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq 3b^2 + a^2 \Leftrightarrow b(b - a) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^3 + x^2 - 2} \geq \sqrt{x^3 + x - 10} \Leftrightarrow x^2 - x + 8 \geq 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Nhận thấy (*) hiển nhiên. Do đó bất phương trình đã cho có nghiệm $S = [2; +\infty)$.

Bài toán 88. Giải phương trình $2\sqrt{x^3 + x - 2} = \sqrt{x^3 + 2x + 2} + \sqrt{x^3 + 5x + 14}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^3 + x - 2 \geq 0 \\ x^3 + 2x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1. \\ x^3 + 5x + 14 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình đã cho tương đương với } 2\sqrt{x^3 + x - 2} - \sqrt{x^3 + 2x + 2} = \sqrt{4(x^3 + 2x + 2) - 3(x^3 + x - 2)} \quad (1)$$

Đặt $\sqrt{x^3 + x - 2} = a; \sqrt{x^3 + 2x + 2} = b$ ($a \geq 0; b \geq 0$) thì (1) trở thành

$$2a - b = \sqrt{4a^2 - 3b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b \geq 0 \\ 4a^2 - 4ab + b^2 = 4a^2 - 3b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b \geq 0 \\ a(a - b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b \geq 0 \\ a = 0 \\ a = b \end{cases}$$

$$\checkmark \quad a = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\checkmark \quad a = b \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + x - 2} = \sqrt{x^3 + 2x + 2} \Leftrightarrow x - 2 = 2x + 2 \Leftrightarrow x = -4.$$

So sánh và thử lại nghiệm, kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 89. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^3 + 2x - 3} + 2(x + 1) \leq \sqrt{5x^3 + 4x^2 + 18x - 11} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^3 + 2x - 3 \geq 0 \\ 5x^3 + 4x^2 + 18x - 11 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

$$\text{Bất phương trình đã cho tương đương với } \sqrt{x^3 + 2x - 3} + 2(x + 1) \leq \sqrt{5(x^3 + 2x - 3) + 4(x^2 + 2x + 1)}$$

Đặt $\sqrt{x^3 + 2x - 3} = u; x + 1 = v$ ($u \geq 0; v > 0$) thu được

$$u + 2v \leq \sqrt{5u^2 + 4v^2} \Leftrightarrow u^2 + 4uv + 4v^2 \leq 5u^2 + 4v^2 \Leftrightarrow u(u - v) \geq 0$$

$$\text{➤ } u = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{➤ } u \geq v \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 2x - 3} \geq x + 1 \Leftrightarrow x^3 + 2x - 3 \geq x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + x + 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

Kết luận nghiệm $S = \{1\} \cup [2; +\infty)$.

Bài toán 90. Giải phương trình $2\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x^2-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $|x| \geq 1$.

Nhận xét phương trình đã cho không có nghiệm $x = 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $2\sqrt[6]{(x+1)^2} - \sqrt[6]{(x-1)^2} = \sqrt[6]{x^2-1} \Leftrightarrow 2\sqrt[6]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} - 1 = \sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}$

Đặt $\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}} = t$ ($t \geq 0$) ta thu được $2t^2 - 1 = t \Leftrightarrow (t-1)(2t+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow t = 1 \Leftrightarrow x+1 = x-1$ (Vô nghiệm).

Vậy phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 91. Giải phương trình $2\sqrt[3]{x+1} + 2\sqrt[3]{x-1} = 5\sqrt[6]{x^2-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $|x| \geq 1$.

Nhận xét phương trình đã cho không có nghiệm $x = 1$.

Phương trình đã cho tương đương với $2\sqrt[6]{(x+1)^2} + 2\sqrt[6]{(x-1)^2} = 5\sqrt[6]{x^2-1} \Leftrightarrow 2\sqrt[6]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} + 2 = 5\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}$

Đặt $\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}} = t$ ($t \geq 0$) ta có $2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(2t-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$

▪ $t = 1 \Leftrightarrow x+1 = x-1 \Leftrightarrow 0x = 2$ (Vô nghiệm).

▪ $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow x = -\frac{65}{63}$.

So sánh điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left\{-\frac{65}{63}\right\}$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $x-1+3\sqrt{x} = \sqrt{2(x^2+7x+1)}$.

2. $x-3+\sqrt{x} = \sqrt{2(x^2-5x+9)}$.

3. $2x-1+\sqrt{x} \leq \sqrt{2(4x^2-3x+1)}$.

4. $3-x+2\sqrt{x} = \sqrt{8+(1+x)^2}$.

5. $3\sqrt{x}+2 \leq \sqrt{10x^2-34x+40}+x$.

6. $2(1-x) + \sqrt{x} = \sqrt{x^2 + 5x + 1}$.
7. $3(5-x) + \sqrt{x-1} > \sqrt{2x^2 - 6x + 51}$.
8. $\sqrt{x-2} + 6 = 2x + \sqrt{2x^2 - 15x + 29}$.
9. $\sqrt{2x-1} + 3x > \sqrt{15x^2 + 2x - 1}$.
10. $\frac{x - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{2(x^2 - x + 1)}} \geq 1$.
11. $2\sqrt{2x-1} + x = \sqrt{3(x^2 + 4x - 2)}$.
12. $\frac{x - 5 + 3\sqrt{x}}{2\sqrt{x^2 - 3x + 9} - 2} < 1$.
13. $2(1 + \sqrt{x}) \leq x + \sqrt{5x^2 - 24x + 20}$.
14. $\frac{2\sqrt{x} + x - 1}{2 - \sqrt{6x^2 - 33x + 54}} \leq 1$.
15. $3 + \sqrt{2x+1} \leq x + \sqrt{5x^2 - 32x + 44}$.
16. $x + 2 + 2\sqrt{2-x} \leq \sqrt{8x^2 + 31x + 34}$.
17. $\frac{3x - 5 + \sqrt{4x-3}}{\sqrt{9x^2 + 6x - 8} - 4} < 1$.
18. $\sqrt{x-1} + x + 1 \geq 2\sqrt{3x^2 + 4x + 5}$.
19. $x + 2 + \sqrt{x^2 + x + 1} \leq 2\sqrt{x^2 + 10x + 10}$.
20. $\frac{x - 2 + \sqrt{x^2 - 2x + 3}}{\sqrt{2x^2 - 4x + 4} - 1} \leq 1$.
21. $\frac{x - 1 + \sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt{4x^2 + 3x - 6} - 1} < 1$.
22. $x - 1 + \sqrt{3 - x^2} \leq \sqrt{6x^2 - 10x + 25}$.
23. $2x - 3 + 2\sqrt{x^2 + x} > \sqrt{15x^2 - 17x + 18}$.
24. $\frac{x + 2\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x^2 + 26x - 7} - 1} > 1$.
25. $x + 1 + 3\sqrt{2-x} = \sqrt{13x^2 + 23x + 19}$.
26. $\frac{2x - 10 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}}{\sqrt{9x^2 - 22x + 33} - 4} \leq 1$.
27. $x + \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{4x^2 - 6x + 3} + 3$.
28. $\frac{x - 5 + \sqrt{x^2 + 3x - 4}}{\sqrt{4x^2 - 15x + 23} - 2} > 1$.
29. $\sqrt{x-2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \leq 2\sqrt{4x^2 + x + 10}$.
30. $2\sqrt{x^2 + 2x + 5} \leq \sqrt{5x^2 + 18x + 21} - \sqrt{2x-1}$.
31. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x^2 + x} \geq \sqrt{5x^2 + 4x + 1}$.

32. $2\sqrt{2x-3} + \sqrt{x^2-x} \leq \sqrt{2x^2+12x-21}$.
33. $2\sqrt{x^2-2x} + \sqrt{x-1} \leq \sqrt{7x^2-12x-2}$.
34. $3\sqrt{x^2-3x} - \sqrt{2-x} \leq \sqrt{5x^2-14x-2}$.
35. $3\sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{x+1} > \sqrt{6x^2-20x+10}$.
36. $\frac{\sqrt{x^2+x} + 4\sqrt{x-2} - 2}{\sqrt{x^2+25x-48} - 2} \geq 1$.
37. $\sqrt{x^2+3x} \geq \sqrt{4x^2+18x+6} - \sqrt{x^2-3}$.
38. $\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{x^2+3x} \geq \sqrt{4x^2+6x-6}$.
39. $\sqrt{7x^2-11x+3} - \sqrt{x^2-2x} \geq \sqrt{2x^2-3x+1}$.
40. $2\sqrt{x^2+1} + 3\sqrt{x^2+2x-8} \leq \sqrt{25x^2+18x-56}$.
41. $3\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x+1} \leq \sqrt{4x^2-6x+5}$.
42. $2\sqrt{x^2-4} - \sqrt{x-1} \leq \sqrt{4x^2-3x-13}$.
43. $3\sqrt{4x^2+1} + \sqrt{x^2+x-2} \geq \sqrt{61x^2+x+13}$.
44. $\sqrt{x^2-2x} + \sqrt{2x^2-3x+1} \leq \sqrt{9x^2-13x+5}$.
45. $\sqrt{3x^2-x} + \sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{2x^2+x+5}$.
46. $x + \sqrt{x^3+x^2-2} = \sqrt{x^3+4x^2-2}$.
47. $x-1 + \sqrt{x^3+x^2-2x} \leq \sqrt{x^3+4x^2-8x+3}$.
48. $x+1 + \sqrt{2x^3+x^2+2x} \leq \sqrt{2x^3+x^2+5x+3}$.
49. $x+1 + 2\sqrt{x^3+1} > \sqrt{4x^3+5x^2+10x+9}$.
50. $2x + \sqrt{x^3-4x+1} = 1 + \sqrt{x^3+2x-2}$.
51. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x^3+x-2} = \sqrt{2(x^3+2x-1)}$.
52. $\sqrt{2-x} + \sqrt{x^3-x+10} = \sqrt{x^3-4x+16}$.
53. $\frac{2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x^3+2x-3} - 2}{\sqrt{x^3+18x-11} - 2} > 1$.
54. $2\sqrt{x-2} + 3\sqrt{x^3+x-6} \leq \sqrt{9x^3+25x-86}$.
55. $\sqrt{4x-1} + \sqrt{x^3+2} \leq \sqrt{x^3+12x-1}$.
56. $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x^3+2x-9} = \sqrt{x^3+8x-12}$.
57. $\sqrt{x-3} + \sqrt{x^3+x-11} \leq \sqrt{3x^3+4x-36}$.
58. $\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^3+x^2+x-3} = \sqrt{x^3+4x^2+4x}$.
59. $\sqrt{x^2+3} + 2\sqrt{x^3+x^2-2} \leq \sqrt{x^3+4x^2+7}$.
60. $3\sqrt{x^2-1} + 2\sqrt{x^3+x^2-12} \leq \sqrt{4x^3+25x^2-69}$.
61. $\sqrt{x^2+2x+3} + \sqrt{2x^3+x^2+2x-5} \leq \sqrt{2x^3+4x^2+8x+4}$.
62. $\frac{\sqrt{x^2+3} + 3\sqrt{x^3+x^2-2} - 5}{\sqrt{9x^3+16x^2+3} - 5} < 1$.
63. $x+3 + \sqrt{x^3+6x+9} = \sqrt{x^3+3x^2+24x+36}$.

64. $\sqrt{x} + \sqrt{x^3 + x - 30} \geq \sqrt{2(x^3 + 2x - 30)}.$
65. $\sqrt{3x^2 + 3x + 1} + \sqrt{(x+1)^3 - 8} \leq \sqrt{(x+1)^3 + 9x^2 + 9x - 5}.$
66. $\sqrt{x} + \sqrt{x^3 - 8} > \sqrt{3x^3 + x - 24}.$
67. $\sqrt{2x^2 + x + 2} + \sqrt{x^3 + 2x^2 + x - 4} \geq \sqrt{x^3 + 8x^2 + 4x + 2}.$
68. $\sqrt{3x^2 - x + 2} + \sqrt{2x^3 + 3x^2 - x - 4} > \sqrt{2x^3 + 12x^2 - 4x + 2}.$
69. $2\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{3x^3 + x^2 + x - 5} < \sqrt{3x^3 + 9x^2 + 9x - 13}.$
70. $3x + \sqrt{x^3 + 9x^2 - 6x} \leq 1 + \sqrt{x^3 + 36x^2 - 24x + 3}.$
71. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^3 - 3x - 2} \leq \sqrt{2(x^3 + x^2 - 6x)}.$
72. $2\sqrt{x^2 + 3x + 5} + \sqrt{x^3 + x^2 + 3x - 4} \geq \sqrt{x^3 + 9x^2 + 27x + 36}.$
73. $4\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^3 + x^2 - x - 10} \geq \sqrt{x^3 + 16x^2 - 16x - 10}.$
74. $3\sqrt{2x^2 + 2x + 5} + \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x - 5} \leq \sqrt{x^3 + 32x^2 + 32x + 70}.$
75. $\sqrt{3x^2 + x + 1} + \sqrt{x^3 + 3x^2 + x - 5} \geq \sqrt{x^3 + 12x^2 + 4x - 2}.$
76. $\sqrt{x^3 + 2x + 1} + \sqrt{x^3 + 2x + 2} = \sqrt{2(2x^3 + 4x + 3)}.$
77. $\sqrt{x^3 + 2} + \sqrt{x^3 + x - 2} \geq \sqrt{2(2x^3 + x)}.$
78. $\sqrt{x^3 + 3x^2 + 2} + \sqrt{x^3 + x^2 + 4} = 2\sqrt{x^3 + 2x^2 + 3}.$
79. $\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x^3 + x - 2} \leq \sqrt{2(2x^3 + x - 1)}.$
80. $2\sqrt{x^3 - 1} + \sqrt{x^3 + 2x^2 - 3} \geq \sqrt{4x^3 + 2x^2 - 6}.$
81. $\frac{\sqrt{x^3 + x - 2} + 2\sqrt{x^3 + x - 10} - 6}{\sqrt{9x^3 + 9x - 50} - 6} \geq 1.$
82. $3\sqrt{x^3 + x} + \sqrt{x^3 + 3x + 5} \geq \sqrt{16x^3 + 30x + 35}.$
83. $\sqrt{x^3 - x} + \sqrt{x^3 + 3x - 14} \leq \sqrt{4x^3 - 14}.$
84. $\sqrt{x^3 + x^2 + x - 3} + \sqrt{x^3 + 2x^2 + x - 4} \geq \sqrt{4x^3 + 5x^2 + 4x - 13}.$
85. $2\sqrt{x^3 - 8} + \sqrt{x^3 + x - 2} \geq \sqrt{9x^3 + 3x - 54}.$
86. $2\sqrt{x^3 + 2x} + \sqrt{x^3 + 4x - 5} \geq \sqrt{9x^3 + 24x - 15}.$
87. $\frac{2\sqrt{x^3 + 4x} + \sqrt{x^3 + 5x - 6} - 5}{\sqrt{9x^3 + 39x - 18} - 5} < 1.$
88. $2\sqrt{x^3 + 6x} + \sqrt{x^3 + x^2 + 3x - 5} = \sqrt{9x^3 + 3x^2 + 45x - 15}.$
89. $\sqrt{x^3 + 5x} + \sqrt{x^3 + 7x - 6} \geq 2\sqrt{x^3 + 6x - 3}.$
90. $2\sqrt{x^3 + x} + \sqrt{x^3 - x - 6} \leq \sqrt{3(3x^3 + x - 6)}.$
91. $2\sqrt{5x^2 + x + 1} + \sqrt{x^3 + 5x^2 + x - 7} \leq \sqrt{x^3 + 20x^2 + 4x - 4}.$
92. $\sqrt{3x^2 + 2x + 5} + \sqrt{x^3 + 3x^2 + 2x - 6} > \sqrt{2(x^3 + 6x^2 + 4x - 1)}.$
93. $\sqrt{x^3 - 2x} + \sqrt{x^2 - 2x + 4} = \sqrt{x^3 + 3x^2 - 8x + 12}.$

Bài toán 92. Giải phương trình $\sqrt{5x^2 + 24x + 28} = 5\sqrt{x+2} + \sqrt{x^2 + x - 20}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 5x^2 + 24x + 28 \geq 0 \\ x \geq -2 \\ x^2 + x - 20 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4.$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 5x^2 + 24x + 28 &= 25(x+2) + x^2 + x - 20 + 10\sqrt{(x+2)(x-4)(x+5)} \\ \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 &= 5\sqrt{(x+5)(x^2 - 2x - 8)} \Leftrightarrow 2(x^2 - 2x - 8) + 3(x+5) = 5\sqrt{x+5} \cdot \sqrt{x^2 - 2x - 8} \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x+5} = a; \sqrt{x^2 - 2x - 8} = b$ ($a > 0; b \geq 0$) ta thu được

$$3a^2 + 2b^2 = 5ab \Leftrightarrow (a-b)(3a-2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 3a = 2b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad a = b &\Leftrightarrow \sqrt{x+5} = \sqrt{x^2 - 2x - 8} \Leftrightarrow x^2 - 3x - 13 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{3+\sqrt{61}}{2}; \frac{3-\sqrt{61}}{2} \right\}. \\ \blacksquare \quad 3a = 2b &\Leftrightarrow 3\sqrt{x+5} = 2\sqrt{x^2 - 2x - 8} \Leftrightarrow 4x^2 - 17x - 77 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{11}{4}; 7 \right\}. \end{aligned}$$

So sánh điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left\{ 7; \frac{3+\sqrt{61}}{2} \right\}$.

Bài toán 93. Giải phương trình $\sqrt{5x^2 + 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x+1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 5x^2 + 14x + 9 \geq 0 \\ x^2 - x - 20 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(5x+9) \geq 0 \\ (x+4)(x-5) \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5.$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{5x^2 + 14x + 9} &= \sqrt{x^2 - x - 20} + 5\sqrt{x+1} \\ \Leftrightarrow 5x^2 + 14x + 9 &= x^2 - x - 20 + 25(x+1) + 10\sqrt{(x+4)(x-5)(x+1)} \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 &= 5\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{x^2 - 4x - 5} \Leftrightarrow 2(x^2 - 4x - 5) + 3(x+4) = 5\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{x^2 - 4x - 5} \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x+4} = b; \sqrt{x^2 - 4x - 5} = a$ ($a \geq 0; b > 0$) ta có

$$(1) \Leftrightarrow 2a^2 + 3b^2 = 5ab \Leftrightarrow (a-b)(2a-3b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 2a = 3b \end{cases}$$

$$\text{➤ } a = b \Leftrightarrow x+4 = x^2 - 4x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5+\sqrt{61}}{2} \vee x = \frac{5-\sqrt{61}}{2}.$$

$$\text{➤ } 2a = 3b \Leftrightarrow 4(x^2 - 4x - 5) = 9(x+4) \Leftrightarrow 4x^2 - 25x - 56 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{4} \vee x = 8.$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được tập nghiệm $S = \left\{ 8; \frac{\sqrt{61}+5}{2} \right\}$.

Bài toán 94. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}-\sqrt{3x^2-6x+19}=0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1} &= \sqrt{3x^2-6x+19} \\ \Leftrightarrow x^2+x-6+9(x-1)+6\sqrt{(x-2)(x+3)(x-1)} &= 3x^2-6x+19 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{(x^2+2x-3)(x-2)} &= x^2-8x+17 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{(x^2+2x-3)(x-2)} &= (x^2+2x-3)-10(x-2) \quad (*) \end{aligned}$$

Nhận xét (*) không thỏa mãn nghiệm $x = 2$.

Trong trường hợp $x > 2$ thì $(*) \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x-2}} = \frac{x^2+2x-3}{x-2} - 10$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x-2}} = t \ (t > 0)$ ta được $(*) \Leftrightarrow 3t = t^2 - 10 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 5 \end{cases}$

Loại nghiệm $t = -2 < 0$. Với $t = 5 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x-3}{x-2} = 25 \Leftrightarrow x^2-23x+47=0 \Leftrightarrow x = \frac{23-\sqrt{341}}{2} \vee x = \frac{23+\sqrt{341}}{2}$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = \left\{ \frac{23-\sqrt{341}}{2}; \frac{23+\sqrt{341}}{2} \right\}$.

Bài toán 95. Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2-3x-2} = \sqrt{18x^2+16x-39} - 5\sqrt{x-1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 5\sqrt{x-1} + \sqrt{2x^2-3x-2} &= \sqrt{18x^2+16x-39} \\ \Leftrightarrow 25(x-1) + 2x^2-3x-2 + 10\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{(2x+1)(x-2)} &= 18x^2+16x-39 \\ \Leftrightarrow 10\sqrt{(x-1)(2x+1)(x-2)} &= 16x^2-6x-12 \\ \Leftrightarrow 5\sqrt{(x-1)(2x+1)} \cdot \sqrt{x-2} &= 8x^2-3x-6 \\ \Leftrightarrow 5\sqrt{2x^2-x-1} \cdot \sqrt{x-2} &= 4(2x^2-x-1) + x-2 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{2x^2-x-1} = u; \sqrt{x-2} = v \ (u > 0; v \geq 0)$ ta thu được

$$5uv = 4u^2 + v^2 \Leftrightarrow (u-v)(4u-v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = 4v \end{cases}$$

- $u = v \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2-x-1 = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2-2x+1 = 0 \end{cases} \text{ (Vô nghiệm).}$
- $u = 4v \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2-x-1 = 16x-32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x^2-17x+31 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{17+4\sqrt{3}}{4}.$

Vậy phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $x = \frac{17+4\sqrt{3}}{4}$.

Nhận xét.

Trọng tâm nội dung của tài liệu là đặt hai ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp – đồng bậc, do vậy các bài toán từ 92 đến 95 cũng không nằm ngoài phạm vi đó. Độ khó của bài toán đã tăng dần so với các bài toán trước, nguyên do tính chất đồng bậc tiềm ẩn, các ẩn phụ chỉ xuất hiện sau khi nâng lũy thừa và ghép nhóm thích hợp. Lời giải bài toán 94 vẫn giữ bản chất cùng hai bài toán 92, 93 mặc dù hình thức trình bày có hơi khác một chút.

Để cụ thể hơn nữa, tác giả xin lấy thí dụ điển hình bài toán 93, mặc dù đã khá cũ nhưng vẫn còn giữ nguyên giá trị, lần đầu tiên bài toán xuất hiện trong Đề ra kỳ này (Các lớp THCS) Tạp chí Toán học và tuổi trẻ, Số 267 – Tháng 9 năm 1999. Tác giả bài toán là nhà giáo Huỳnh Tấn Châu, trường THPT Chuyên Lương Văn Chánh, tỉnh Phú Yên, một cộng tác viên trung thành lâu năm của Tạp chí THPT và Toán tuổi thơ.

$$\bullet \text{ Về điều kiện các bạn cần tìm chính xác } \begin{cases} 5x^2 + 14x + 9 \geq 0 \\ x^2 - x - 20 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(5x+9) \geq 0 \\ (x+4)(x-5) \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5.$$

Điều này đôi khi ảnh hưởng mạnh mẽ tới lập luận hoặc chính là chìa khóa mở ra cánh cửa lời giải.

$$\bullet \text{ Biến đổi tương đương phương án 1: } \sqrt{5x^2 + 14x + 9} = \sqrt{x^2 - x - 20} + 5\sqrt{x+1}.$$

Có thể một số bạn tư duy theo hướng đồng bậc dạng $k\sqrt{ma^2 + nb^2} = pa + qb$. Chúng ta cùng thử nghiệm

$$\text{Giả định } \sqrt{a(x^2 - x - 20) + b(x+1)} = \sqrt{5x^2 + 14x + 9} = \sqrt{x^2 - x - 20} + 5\sqrt{x+1}.$$

Chưa cần sử dụng đồng nhất thức có thể thấy ngay $a = 5$, tuy nhiên b không tồn tại. Thất bại.

$$\bullet \text{ Biến đổi tương đương phương án 2: } \sqrt{5x^2 + 14x + 9} - 5\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2 - x - 20}.$$

$$\text{Theo đường lối cũ, giả định } \sqrt{5x^2 + 14x + 9} - 5\sqrt{x+1} = \sqrt{a(5x^2 + 14x + 9) + b(x+1)} = \sqrt{x^2 - x - 20}.$$

Và tương tự, thấy ngay rằng $a = \frac{1}{5}$, b cũng không tồn tại. Phải chăng phương pháp này không còn phù hợp?

$$\bullet \text{ Biến đổi tương đương và nâng lũy thừa theo các căn thức đơn giản nhất}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{5x^2 + 14x + 9} &= \sqrt{x^2 - x - 20} + 5\sqrt{x+1} \\ \Leftrightarrow 5x^2 + 14x + 9 &= x^2 - x - 20 + 25(x+1) + 10\sqrt{(x+4)(x-5)(x+1)} \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 &= 5\sqrt{(x+4)(x-5)(x+1)} \quad (*) \end{aligned}$$

Về phía phương trình (*) có hình thức đa chiều, từ đây xảy ra nhiều phương án nhỏ khi đưa về dạng đồng bậc, để tạo ra các sự lựa chọn này cũng chính là yếu điểm, là điểm nhấn của bài toán: $x^2 - x - 20 = (x+4)(x-5)$.

Do điều kiện $x \geq 5$ nên có thể ghép hai trong ba thừa số trong căn thức với nhau, giảm bớt xuống còn hai nhân tử, và thực hiện thử nghiệm theo "chiêu bài" đồng bậc thông qua đồng nhất thức. Trong trường hợp điều kiện không cho phép "ly khai" nhân tử chúng ta vẫn có thể lập luận được, bằng cách để chúng "dính kếp" vào nhau theo kiểu phân thức như lời giải bài toán 94, điều này đã trình bày trong các phần phía trước của tài liệu.

Lưu ý khả năng $\sqrt{(x+4)(x-5)} \cdot \sqrt{x+1}$ đã xét ở trên. Các khả năng còn lại gồm

$$\begin{aligned} \sqrt{x-5} \cdot \sqrt{(x+4)(x+1)} &= \sqrt{x+5} \cdot \sqrt{x^2 + 5x + 4} \\ \Rightarrow a(x^2 + 5x + 4) + b(x+5) &= 2x^2 - 5x + 2 \text{ (Không tồn tại } a \text{ và } b). \end{aligned}$$

Hoặc là

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4} \cdot \sqrt{(x-5)(x+1)} &= \sqrt{x+4} \cdot \sqrt{x^2 - 4x - 5} \\ \Rightarrow a(x^2 - 4x - 5) + b(x+4) &= 2x^2 - 5x + 2 \Rightarrow a = 2; b = 3 \end{aligned}$$

Đây chính là trường hợp các hệ số "đẹp" nhất. Như vậy lời giải bài toán 93 là tổng hợp của cả một quá trình thử chọn, thực tế cũng chông gai lắm, và để tạo lập được một đề bài "hội tụ" yếu tố như thế này chắc chắn cũng không phải một công việc đơn giản.

Mời quý bạn theo dõi các ví dụ tiếp theo, bài toán 96, một lần nữa dạng toán này lại xuất hiện trên tạp chí Toán học và tuổi trẻ thân yêu, tọa lạc tại Đề ra kỳ này (Các lớp THCS) số 410 – Tháng 8 năm 2011, chào mừng đội tuyển Việt Nam trở về từ Hà Lan sau kỳ thi IMO lần thứ 52. Tác giả bài toán cũng là một cộng tác viên thân thiết của THPT, nhà giáo Thới Ngọc Ánh, trường THCS Phổ Minh, huyện Đức Phổ, tỉnh Quảng Ngãi. Một chặng đường lịch sử 12 năm tư duy kế thừa !

Bài toán 96. Giải phương trình $\sqrt{7x^2 + 25x + 19} - \sqrt{x^2 - 2x - 35} = 7\sqrt{x + 2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 7x^2 + 25x + 19 \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 35 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 7.$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{7x^2 + 25x + 19} &= 7\sqrt{x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x - 35} \\ \Leftrightarrow 7x^2 + 25x + 19 &= 49(x + 2) + x^2 - 2x - 35 + 14\sqrt{x + 2} \cdot \sqrt{(x + 5)(x - 7)} \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 11x - 22 &= 7\sqrt{(x + 2)(x - 7)} \cdot \sqrt{x + 5} \\ \Leftrightarrow 3(x^2 - 5x - 14) + 4(x + 5) &= 7\sqrt{x^2 - 5x - 14} \cdot \sqrt{x + 5} \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2 - 5x - 14} = a; \sqrt{x + 5} = b \quad (a > 0; b > 0)$ thì thu được

$$3a^2 - 7ab + 4b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - b)(3a - 4b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 3a = 4b \end{cases}$$

$$\diamond a = b \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x^2 - 5x - 14 = x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x^2 - 6x - 19 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3 - 2\sqrt{7}.$$

$$\diamond 3a = 4b \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ 9(x^2 - 5x - 14) = 16(x + 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ 9x^2 - 61x - 206 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{61 + \sqrt{11137}}{18}.$$

Vậy phương trình đề bài có hai nghiệm $x = 3 + 2\sqrt{7}; x = \frac{61 + \sqrt{11137}}{18}$.

Bài toán 97. Giải phương trình $\sqrt{3x^2 + 11x - 27} = \sqrt{x^2 - 1} + 3\sqrt{x - 2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x \geq 2 \\ 3x^2 + 11x - 27 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3x^2 + 11x - 27 &= x^2 - 1 + 9(x - 2) + 6\sqrt{(x + 1)(x - 1)(x - 2)} \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 8 &= 6\sqrt{(x + 1)(x - 2)(x - 1)} \\ \Leftrightarrow x^2 + x - 4 &= 3\sqrt{(x + 1)(x - 2)} \cdot \sqrt{x - 1} \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 2 + 2(x - 1) &= 3\sqrt{x^2 - x - 2} \cdot \sqrt{x - 1} \end{aligned} \quad (1)$$

Đặt $\sqrt{x^2 - x - 2} = a; \sqrt{x - 1} = b \quad (a \geq 0; b > 0)$ thì (1) trở thành

$$a^2 + 2b^2 = 3ab \Leftrightarrow (a-b)(a-2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\blacksquare a = b \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\}.$$

$$\blacksquare a = 2b \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} = 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 4(x-1) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{5 + \sqrt{17}}{2}; \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \right\}.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left\{ \frac{5 + \sqrt{17}}{2}; 1 + \sqrt{2} \right\}.$

Bài toán 98. Giải phương trình $\sqrt{11x^2 + 3x - 19} = 3\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x - 2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 11x^2 + 3x - 19 &= 9(x^2 - 1) + x - 2 + 6\sqrt{(x-1)(x+1)(x-2)} \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 8 &= 6\sqrt{(x-1)(x+1)(x-2)} \Leftrightarrow x^2 + x - 4 = 3\sqrt{x-1}\sqrt{x^2 - x - 2} \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 2 + 2(x-1) &= 3\sqrt{x-1}\sqrt{x^2 - x - 2} \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2 - x - 2} = a; \sqrt{x-1} = b \quad (a \geq 0; b > 0)$ thì (1) trở thành

$$a^2 + 2b^2 = 3ab \Leftrightarrow (a-b)(a-2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\blacksquare a = b \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\}.$$

$$\blacksquare a = 2b \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} = 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 4(x-1) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{5 + \sqrt{17}}{2}; \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \right\}.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left\{ \frac{5 + \sqrt{17}}{2}; 1 + \sqrt{2} \right\}.$

Bài toán 99. Giải phương trình $3\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{3x^2 + 19x + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 9x + 9 + x^2 - 4 + 6\sqrt{(x+1)(x+2)(x-2)} &= 3x^2 + 19x + 1 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 3x + 2}\sqrt{x-2} &= x^2 + 5x - 2 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 3x + 2}\sqrt{x-2} &= x^2 + 3x + 2 + 2(x-2) \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2 + 3x + 2} = a; \sqrt{x-2} = b \quad (a > 0; b \geq 0)$ ta thu được

$$3ab = a^2 + 2b^2 \Leftrightarrow (a-b)(a-2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\circ a = b \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3x + 2} = \sqrt{x-2} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 4 = 0 \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\circ a = 2b \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 3x + 2} = 2\sqrt{x-2} \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 4x - 8 \Leftrightarrow x^2 - x + 10 = 0 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Vậy phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 100. Giải phương trình $\sqrt{5x^2 + 21x - 27} - 5\sqrt{x - 2} = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}\sqrt{5x^2 + 21x - 27} &= 5\sqrt{x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3} \\ \Leftrightarrow 5x^2 + 21x - 27 &= 25(x - 2) + x^2 + 2x - 3 + 10\sqrt{(x - 2)(x - 1)(x + 3)} \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 6x + 26 &= 10\sqrt{(x - 2)(x - 1)} \cdot \sqrt{x + 3} \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 13 = 5\sqrt{x^2 - 3x + 2} \cdot \sqrt{x + 3} \\ \Leftrightarrow 2(x^2 - 3x + 2) + 3(x + 3) &= 5\sqrt{x^2 - 3x + 2} \cdot \sqrt{x + 3}\end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = u; \sqrt{x + 3} = v$ ($u \geq 0; v > 0$) ta được $2u^2 + 3v^2 = 5uv \Leftrightarrow (u - v)(2u - 3v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ 2u = 3v \end{cases}$

$$\text{➤ } u = v \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{x + 3} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \{2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}\}.$$

$$\text{➤ } 2u = 3v \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 3x + 2} = 3\sqrt{x + 3} \Leftrightarrow 4x^2 - 21x - 19 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{21 - \sqrt{745}}{8}; \frac{21 + \sqrt{745}}{8} \right\}.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được các nghiệm $S = \left\{ \frac{21 + \sqrt{745}}{8}; 2 + \sqrt{5} \right\}.$

Bài toán 101. Giải phương trình $\sqrt{5x^2 + 8x - 15} = \sqrt{x^2 + x - 6} + \sqrt{x - 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}5x^2 + 8x - 15 &= x^2 + x - 6 + x - 1 + 2\sqrt{(x - 2)(x + 3)(x - 1)} \\ \Leftrightarrow 4x^2 + 6x - 8 &= 2\sqrt{x - 2} \cdot \sqrt{x^2 + 2x - 3} \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 4 = 2\sqrt{x - 2} \cdot \sqrt{x^2 + 2x - 3} \\ \Leftrightarrow 2(x^2 + 2x - 3) - (x - 2) &= \sqrt{x - 2} \cdot \sqrt{x^2 + 2x - 3} \quad (*)\end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2 + 2x - 3} = u; \sqrt{x - 2} = v$ ($u > 0; v \geq 0$) thì (*) trở thành

$$\begin{aligned}2u^2 - v^2 &= uv \Leftrightarrow (u - v)(2u + v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ 2u + v = 0 \end{cases} \Rightarrow u = v \\ \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 &= x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \vee x = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện, kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 102. Giải bất phương trình $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x^2 + 5x + 6} < \sqrt{4x^2 + 11x - 6}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + 5x + 6 \geq 1 \\ 4x^2 + 11x - 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}x - 1 + x^2 + 5x + 6 + 2\sqrt{(x - 1)(x + 2)(x + 3)} &< 4x^2 + 11x - 6 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{(x - 1)(x + 3)} \cdot \sqrt{x + 2} &< 3x^2 + 5x - 11 \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + 2x - 3} \cdot \sqrt{x + 2} < 3(x^2 + 2x - 3) - (x + 2) \quad (*)\end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2 + 2x - 3} = a; \sqrt{x + 2} = b$ ($a \geq 0; b > 0$) thì (*) trở thành

$$2ab < 3a^2 - b^2 \Leftrightarrow (a - b)(3a + b) > 0 \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x - 3} > \sqrt{x + 2} \Leftrightarrow x^2 - x - 5 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \\ x > \frac{1 - \sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được tập hợp nghiệm $S = \left[\frac{\sqrt{21} + 1}{2}; +\infty \right)$.

Bài toán 103. Giải bất phương trình $\sqrt{2(4x^2 - x - 6)} < \sqrt{2x^2 + x - 1} + \sqrt{2x - 3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 8x^2 - 2x - 12 \geq 0 \\ x \geq \frac{3}{2} \\ 2x^2 + x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 8x^2 - 2x - 12 < 2x^2 + x - 1 + 2x - 3 + 2\sqrt{(2x - 1)(x + 1)(2x - 3)} \\ &\Leftrightarrow 6x^2 - 5x - 8 < 2\sqrt{2x - 1} \cdot \sqrt{2x^2 - x - 3} \Leftrightarrow 3(2x^2 - x - 3) - (2x - 1) < 2\sqrt{2x - 1} \cdot \sqrt{2x^2 - x - 3} \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{2x - 1} = u; \sqrt{2x^2 - x - 3} = v$ ($u > 0; v \geq 0$) ta thu được

$$3v^2 - u^2 < 2uv \Leftrightarrow (v - u)(3v + u) < 0 \Leftrightarrow v < u \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - x - 3} < \sqrt{2x - 1} \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 2.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left[\frac{3}{2}; 2 \right)$.

Bài toán 104. Giải bất phương trình $2\sqrt{x + 1} + \sqrt{3x^2 + 5x - 2} \geq \sqrt{18x^2 + 18x - 5}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq -1 \\ 3x^2 + 5x - 2 \geq 0 \\ 18x^2 + 18x - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &4x + 4 + 3x^2 + 5x - 2 + 4\sqrt{(x + 1)(3x - 1)(x + 2)} \geq 18x^2 + 18x - 5 \\ &\Leftrightarrow 4\sqrt{(x + 1)(3x - 1)} \cdot \sqrt{x + 2} \geq 15x^2 + 9x - 7 \Leftrightarrow 4\sqrt{3x^2 + 2x - 1} \cdot \sqrt{x + 2} \geq 5(3x^2 + 2x - 1) - (x + 2) \quad (*) \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{3x^2 + 2x - 1} = u; \sqrt{x + 2} = v$ ($u \geq 0; v > 0$) thì (*) trở thành

$$\begin{aligned} &4uv \geq 5u^2 - v^2 \Leftrightarrow (u - v)(5u + v) \leq 0 \Leftrightarrow u \leq v \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 + 2x - 1} \leq \sqrt{x + 2} \Leftrightarrow 3x^2 + x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1 + \sqrt{37}}{6} \leq x \leq \frac{\sqrt{37} - 1}{6} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{37} - 1}{6}$.

Bài toán 105. Giải bất phương trình $2\sqrt{x^2 - 6x + 5} + \sqrt{x - 2} < \sqrt{3(3x^2 - 13x + 11)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 - 6x + 5 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \\ 3x^2 - 13x + 11 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 4(x^2 - 6x + 5) + x - 2 + 4\sqrt{(x-1)(x-5)(x-2)} < 3(3x^2 - 13x + 11) \\ & \Leftrightarrow 4\sqrt{(x-1)(x-2)} \cdot \sqrt{x-5} > 5x^2 - 16x + 15 \\ & \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2 - 3x + 2} \cdot \sqrt{x-5} > 5(x^2 - 3x + 2) - (x-5) \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = u; \sqrt{x-5} = v$ ($u > 0; v \geq 0$) thì (1) trở thành

$$4uv > 5u^2 - v^2 \Leftrightarrow (u-v)(5u+v) < 0 \Leftrightarrow u < v \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} < \sqrt{x-5} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 7 < 0 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 106. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2 - 8x + 7} + 4\sqrt{x-3} \leq \sqrt{2x^2 + 19x - 143}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^2 - 8x + 7 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 19x - 143 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 7.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & x^2 - 8x + 7 + 16x - 48 + 8\sqrt{(x-1)(x-7)(x-3)} \leq 2x^2 + 19x - 143 \\ & \Leftrightarrow 8\sqrt{(x-1)(x-3)} \cdot \sqrt{x-7} \leq x^2 + 11x - 102 \\ & \Leftrightarrow 8\sqrt{x^2 - 4x + 3} \cdot \sqrt{x-7} \leq x^2 - 4x + 3 + 15(x-7) \quad (*) \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = u; \sqrt{x-7} = v$ ($u > 0; v \geq 0$), khi đó (*) trở thành

$$\begin{aligned} & 8uv \leq u^2 + 15v^2 \Leftrightarrow (u-3v)(u-5v) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{u^2 - 3v^2}{u+3v} \cdot \frac{u^2 - 25v^2}{u+5v} \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (x^2 - 13x + 66)(x^2 - 29x + 178) \geq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Do $x^2 - 13x + 66 > 0, \forall x \in \mathbb{R}; x^2 - 29x + 178 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên (1) nghiệm đúng với mọi x thuộc tập xác định.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S = [7; +\infty)$.

Bài toán 107. Giải bất phương trình $\sqrt{10x^2 - 50x - 3} \geq \sqrt{2x^2 - 5x + 2} - 3\sqrt{x-5}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 10x^2 - 50x - 3 \geq 0 \\ 2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{25 + \sqrt{745}}{10}.$$

$$\text{Nhận xét } \sqrt{2x^2 - 5x + 2} - 3\sqrt{x-5} = \frac{2x^2 - 14x + 47}{\sqrt{2x^2 - 5x + 2} + 3\sqrt{x-5}} > 0.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 10x^2 - 50x - 3 &\geq 2x^2 - 5x + 2 + 9x - 45 - 6\sqrt{(2x-1)(x-2)(x-5)} \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 27x + 20 + 3\sqrt{(2x-1)(x-5)} \cdot \sqrt{x-2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2(2x^2 - 11x + 5) - 5(x-2) + 3\sqrt{2x^2 - 11x + 5} \cdot \sqrt{x-2} &\geq 0 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{2x^2 - 11x + 5} = u; \sqrt{x-2} = v$ ($u > 0; v > 0$) ta thu được

$$\begin{aligned} 2u^2 - 5v^2 + 3uv &\geq 0 \Leftrightarrow (u-v)(2u+5v) \geq 0 \Leftrightarrow u \geq v \\ \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 11x + 5} &\geq \sqrt{x-2} \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{6+\sqrt{22}}{2} \vee x \leq \frac{6-\sqrt{22}}{2} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm $S = \left[3 + \frac{\sqrt{22}}{2}; +\infty \right)$.

Bài toán 108. Giải bất phương trình $\sqrt{3(9x^2 - 20x + 9)} > 2\sqrt{6x^2 - 11x + 3} - \sqrt{x-2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$.

$$\text{Nhận xét } x \geq 2 \Rightarrow 2\sqrt{6x^2 - 11x + 3} - \sqrt{x-2} = \frac{4(6x^2 - 11x + 3) - (x-2)}{2\sqrt{6x^2 - 11x + 3} + \sqrt{x-2}} = \frac{24x^2 - 45x + 14}{2\sqrt{6x^2 - 11x + 3} + \sqrt{x-2}} > 0.$$

Suy ra bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 27x^2 - 60x + 27 &> 4(6x^2 - 11x + 3) + x - 2 - 4\sqrt{(2x-3)(3x-1)(x-2)} \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 17x + 17 + 4\sqrt{(3x-1)(x-2)} \cdot \sqrt{2x-3} &> 0 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 2 + 4\sqrt{3x^2 - 7x + 2} \cdot \sqrt{2x-3} - 5(2x-3) &> 0 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{3x^2 - 7x + 2} = a; \sqrt{2x-3} = b$ ($a \geq 0; b > 0$) thu được

$$\begin{aligned} a^2 + 4ab - 5b^2 &> 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+5b) > 0 \Leftrightarrow a > b \\ \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 7x + 2} &> \sqrt{2x-3} \Leftrightarrow 3x^2 - 9x + 5 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{9-\sqrt{21}}{6} \vee x > \frac{9+\sqrt{21}}{6} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm $S = \left(\frac{9+\sqrt{21}}{6}; +\infty \right)$.

Bài toán 109. Giải bất phương trình $\sqrt{x(8x-15)} \geq \sqrt{4x^2 - 5x + 1} - 2\sqrt{x-2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 2$.

$$\text{Nhận xét } \sqrt{4x^2 - 5x + 1} - 2\sqrt{x-2} = \frac{4x^2 - 9x + 9}{\sqrt{4x^2 - 5x + 1} + 2\sqrt{x-2}} > 0, \forall x \geq 2.$$

Do đó bất phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} 8x^2 - 15x &\geq 4x^2 - 5x + 1 + 4(x-2) - 4\sqrt{(x-1)(4x-1)(x-2)} \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 14x + 7 + 4\sqrt{(4x-1)(x-2)} \cdot \sqrt{x-1} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 9x + 2 + 4\sqrt{4x^2 - 9x + 2} \cdot \sqrt{x-1} - 5(x-1) &\geq 0. \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{4x^2 - 9x + 2} = u; \sqrt{x-1} = v$ ($u \geq 0; v > 0$) ta thu được

$$\begin{aligned} u^2 + 4uv - 5v^2 &\geq 0 \Leftrightarrow (u-v)(u+5v) \geq 0 \Leftrightarrow u \geq v \\ \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 - 9x + 2} &\geq \sqrt{x-1} \Leftrightarrow 4x^2 - 10x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{5+\sqrt{13}}{4} \\ x \leq \frac{5-\sqrt{13}}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left[\frac{5+\sqrt{13}}{4}; +\infty \right)$.

Bài toán 110. Giải bất phương trình $\sqrt{4x^2 + 13x - 173} + 6\sqrt{x-5} \geq \sqrt{2x^2 - x - 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 4x^2 + 13x - 173 \geq 0 \\ x \geq 5 \\ 2x^2 - x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{\sqrt{2937} - 13}{8}.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{4x^2 + 13x - 173} \geq \sqrt{2x^2 - x - 1} - 6\sqrt{x-5}$ (1).

Nhận xét $\sqrt{2x^2 - x - 1} - 6\sqrt{x-5} = \frac{2x^2 - 37x + 179}{\sqrt{2x^2 - x - 1} + 6\sqrt{x-5}} > 0, \forall x$ thuộc tập xác định.

Do đó

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 4x^2 + 13x - 173 \geq 2x^2 - x - 1 + 36(x-5) - 12\sqrt{(2x+1)(x-1)(x-5)} \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 22x + 8 + 12\sqrt{(2x+1)(x-5)} \cdot \sqrt{x-1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 9x - 5 + 12\sqrt{2x^2 - 9x - 5} \cdot \sqrt{x-1} - 13(x-1) \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Đặt $\sqrt{2x^2 - 9x - 5} = a; \sqrt{x-1} = b$ ($a > 0; b > 0$) thì

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow a^2 + 12ab - 13b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)(a+13b) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq b \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 9x - 5} \geq \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x^2 - 5x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5+\sqrt{33}}{2} \vee x \leq \frac{5-\sqrt{33}}{2} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm $S = \left[\frac{5+\sqrt{33}}{2}; +\infty \right)$.

Bài toán 111. Giải bất phương trình $3\sqrt{x-4} \geq 2\sqrt{3x^2 - 5x + 2} - \sqrt{27x^2 - 98x + 29}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 27x^2 - 98x + 29 \geq 0 \\ 3x^2 - 5x + 2 \geq 0 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{27x^2 - 98x + 29} \geq 2\sqrt{3x^2 - 5x + 2} - 3\sqrt{x-4}$ (1).

Nhận xét: $x \geq 4 \Rightarrow 2\sqrt{3x^2 - 5x + 2} - 3\sqrt{x-4} = \frac{12x^2 - 29x + 44}{2\sqrt{3x^2 - 5x + 2} - 3\sqrt{x-4}} > 0$. Khi đó

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow 27x^2 - 98x + 29 \geq 4(3x^2 - 5x + 2) + 9x - 36 - 12\sqrt{(3x-2)(x-1)(x-4)} \\
 &\Leftrightarrow 15x^2 - 87x + 57 + 12\sqrt{(3x-2)(x-4)} \cdot \sqrt{x-1} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow 5(3x^2 - 14x + 8) + 12\sqrt{3x^2 - 14x + 8} \cdot \sqrt{x-1} - 17(x-1) \geq 0 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{3x^2 - 14x + 8} = u; \sqrt{x-1} = v$ ($u > 0; v > 0$) thì (2) trở thành

$$\begin{aligned}
 5u^2 + 12uv - 17v^2 \geq 0 &\Leftrightarrow (u-v)(5u+17v) \geq 0 \Leftrightarrow u \geq v \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 14x + 8} \geq \sqrt{x-1} \\
 &\Leftrightarrow 3x^2 - 15x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5+\sqrt{13}}{2} \vee x \geq \frac{5-\sqrt{13}}{2}
 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có tập hợp nghiệm $S = \left[\frac{5+\sqrt{13}}{2}; +\infty \right)$.

Bài toán 112. Giải bất phương trình $5\sqrt{x-5} + 3\sqrt{2x^2 - x - 17} \geq 4\sqrt{x^2 - 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 5 \\ 18x^2 - 9x - 153 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{18x^2 - 9x - 153} \geq 4\sqrt{x^2 - 1} - 5\sqrt{x-5}$ (1).

Nhận xét $4\sqrt{x^2 - 1} - 5\sqrt{x-5} = \frac{16x^2 - 25x + 109}{4\sqrt{x^2 - 1} + 5\sqrt{x-5}} > 0 \forall x \geq 5$. Vì thế

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow 18x^2 - 9x - 153 \geq 16x^2 - 16 + 25x - 125 - 20\sqrt{(x+1)(x-1)(x-5)} \\
 &\Leftrightarrow 2x^2 - 34x - 12 + 20\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{(x-1)(x-5)} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 17x - 6 + 10\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 5} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 + 10\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 5} - 11(x+1) \geq 0 \quad (2)
 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x+1} = a; \sqrt{x^2 - 6x + 5} = b$ ($a > 0; b \geq 0$) ta có

$$\begin{aligned}
 (2) &\Leftrightarrow b^2 + 10ab - 11a^2 \geq 0 \Leftrightarrow (b-a)(b+11a) \geq 0 \Leftrightarrow b \geq a \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{x+1} \leq \sqrt{x^2 - 6x + 5} \Leftrightarrow x^2 - 7x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{7+\sqrt{33}}{2} \vee x \leq \frac{7-\sqrt{33}}{2}
 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm của bất phương trình ban đầu là $x \geq \frac{\sqrt{33}+7}{2}$.

Bài toán 113. Giải bất phương trình $\sqrt{6x^2 - 14x - 24} + \sqrt{x-3} \geq x+1$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 6x^2 - 14x - 24 \geq 0 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{7+\sqrt{193}}{6} \quad (*).$$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{6x^2 - 14x - 24} \geq x+1 - \sqrt{x-3}$ (1).

Nhận xét $x+1 - \sqrt{x-3} = \frac{x^2 + x + 4}{x+1 + \sqrt{x-3}} > 0, \forall x$ thỏa mãn điều kiện (*). Bởi vậy

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow 6x^2 - 14x - 24 \geq x^2 + 2x + 1 + x - 3 - 2(x+1)\sqrt{x-3} \\
 &\Leftrightarrow 5x^2 - 17x - 22 + 2(x+1)\sqrt{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(5x-22+2\sqrt{x-3}) \geq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-3} \geq 22-5x \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{22}{5} \\ x \leq \frac{22}{5} \\ 4x-12 \geq 25x^2-220x+484 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{22}{5} \\ x \leq \frac{22}{5} \\ 25x^2-224x+496 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{22}{5} \\ x \leq \frac{22}{5} \\ 4 \leq x \leq \frac{124}{25} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4
 \end{aligned}$$

So sánh với điều kiện, kết luận nghiệm $x \geq 4$.

Bài toán 114. Giải bất phương trình $\sqrt{2x-5} + \sqrt{10x^2-34x+21} > 2x-2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{17+\sqrt{79}}{10} \quad (*)$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{10x^2-34x+21} > 2x-2-\sqrt{2x-5} \quad (1)$.

Nhận xét $2x-2-\sqrt{2x-5} = \frac{4x^2-10x+9}{2x-2+\sqrt{2x-5}} > 0, \forall x$ thỏa mãn (*). Do đó

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow 10x^2 - 34x + 21 > 4x^2 - 8x + 4 + 2x - 5 - 4(x-1)\sqrt{2x-5} \\
 &\Leftrightarrow 6x^2 - 28x + 22 + 4(x-1)\sqrt{2x-5} > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 14x + 11 + 2(x-1)\sqrt{2x-5} > 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-1)(3x-11+2\sqrt{2x-5}) > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-5} > 11-3x \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{11}{3} \\ x \leq \frac{11}{3} \\ 8x-20 > 9x^2-66x+121 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{11}{3} \\ x \leq \frac{11}{3} \\ 3 < x < \frac{47}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x > 3
 \end{aligned}$$

Kết luận nghiệm $S = (3; +\infty)$.

Bài toán 115. Giải bất phương trình $\sqrt{4x^2+24x+35} \geq \sqrt{x^2+3x+2} + \sqrt{x^2+7x+12} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in D = (-\infty; -4] \cup \left[-\frac{5}{2}; -2\right] \cup [-1; +\infty)$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 4x^2 + 24x + 35 &\geq 2x^2 + 10x + 14 + 2\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \\
 &\Leftrightarrow 2x^2 + 14x + 21 \geq 2\sqrt{(x+2)(x+4)(x+1)(x+3)} \\
 &\Leftrightarrow 3(x^2 + 6x + 8) - (x^2 + 4x + 3) \geq 2\sqrt{(x^2 + 6x + 8)(x^2 + 4x + 3)}
 \end{aligned}$$

Đặt $x^2 + 6x + 8 = a; x^2 + 4x + 3 = b$ thu được

$$3a - b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b \geq 0 \\ 9a^2 - 6ab + b^2 \geq 4ab \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b \geq 0 \\ 9a^2 - 10ab + b^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - b \geq 0 \\ (a-b)(9a-b) \geq 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp

$$\diamond \begin{cases} 3a-b \geq 0 \\ a-b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x^2+6x+8) \geq x^2+4x+3 \\ x^2+6x+8 \geq x^2+4x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+14x+21 \geq 0 \\ x \geq -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{\sqrt{7}-7}{2}.$$

$$\diamond \begin{cases} 3a-b \geq 0 \\ 9a-b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x^2+6x+8) \geq x^2+4x+3 \\ 9(x^2+6x+8) \geq x^2+4x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+14x+21 \geq 0 \\ 8x^2+50x+69 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{\sqrt{7}-7}{2} \\ x \leq -\frac{25+\sqrt{73}}{8} \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $S = \left(-\infty; -\frac{25+\sqrt{73}}{8}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{7}-7}{2}; -2\right]$.

Bài toán 116. Giải bất phương trình $\sqrt{4x^2+21x+20} \leq \sqrt{x^2+4x+3} + \sqrt{x^2+7x+10} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1$ hoặc $x \leq -5$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x^2+22x+30 &\leq 2x^2+11x+13+2\sqrt{(x+1)(x+3)(x+2)(x+5)} \\ \Leftrightarrow 2x^2+11x+17 &\leq 2\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)(x+5)} \\ \Leftrightarrow x^2+3x+2+x^2+8x+15-2\sqrt{x^2+3x+2}\cdot\sqrt{x^2+8x+15} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+8x+15}\right)^2 &\leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x+2}=\sqrt{x^2+8x+15} \Leftrightarrow x=-\frac{13}{5} \end{aligned}$$

So sánh điều kiện, kết luận bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 117. Giải bất phương trình $\sqrt{2(2x^2+11x+12)} \geq \sqrt{x^2+6x+5} + \sqrt{x^2+5x+6} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -5 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2(2x^2+11x+12) &\geq 2x^2+11x+11+2\sqrt{(x+1)(x+5)(x+2)(x+3)} \\ \Leftrightarrow 2x^2+11x+13 &\geq 2\sqrt{(x+1)(x+3)(x+5)(x+2)} \\ \Leftrightarrow x^2+4x+3+x^2+7x+10 &\geq 2\sqrt{x^2+4x+3}\cdot\sqrt{x^2+7x+10} \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+4x+3}-\sqrt{x^2+7x+10}\right)^2 &\geq 0 \text{ (Hiển nhiên).} \end{aligned}$$

Kết luận bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = (-\infty; -5] \cup [-1; +\infty)$.

Bài toán 118. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3+2x^2-9x+2} \geq \sqrt{x^3-1} + \sqrt{x-2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^3+2x^2-9x+2 \geq 0 \\ x \geq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x^2+4x-1) \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 x^3 + 2x^2 - 9x + 2 &\geq x^3 - 1 + x - 2 + 2\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)(x-2)} \\
 \Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 5 &\geq 2\sqrt{(x-1)(x-2)} \cdot \sqrt{x^2+x+1} \\
 \Leftrightarrow 3(x^2 - 3x + 2) - (x^2 + x + 1) &\geq 2\sqrt{x^2 - 3x + 2} \cdot \sqrt{x^2 + x + 1} \quad (1)
 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = u; \sqrt{x^2 + x + 1} = v$ ($u \geq 0; v > 0$) thì (1) trở thành

$$3u^2 - v^2 \geq 2uv \Leftrightarrow (u-v)(3u+v) \geq 0 \Leftrightarrow u \geq v \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 2} \geq \sqrt{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{4}.$$

Kết hợp điều kiện, suy ra bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 119. Giải phương trình $\sqrt{x^3 + 2x^2 + 27x + 12} - \sqrt{2+x} = \sqrt{1+x^3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^3 + 2x^2 + 27x + 12 \geq 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^3 + 2x^2 + 27x + 12} &= \sqrt{1+x^3} + \sqrt{2+x} \\
 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 27x + 12 &= x^3 + x + 3 + 2\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)(x+2)} \\
 \Leftrightarrow 2x^2 + 26x + 9 &= 2\sqrt{(x+1)(x+2)} \cdot \sqrt{x^2-x+1} \\
 \Leftrightarrow 7(x^2 + 3x + 2) - 5(x^2 - x + 1) &= 2\sqrt{x^2 + 3x + 2} \cdot \sqrt{x^2 - x + 1}
 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2 + 3x + 2} = u; \sqrt{x^2 - x + 1} = v$ ($u \geq 0; v > 0$) ta thu được

$$7u^2 - 5v^2 = 2uv \Leftrightarrow (u-v)(7u+5v) = 0 \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

Thử lại, kết luận nghiệm duy nhất $S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

Bài toán 120. Giải bất phương trình $\sqrt{4x^3 + 4x^2 + 4x - 19} \geq 2\sqrt{x^3 - 8} + \sqrt{x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 4x^3 + 4x^2 + 4x - 19 \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 4x^3 + 4x^2 + 4x - 19 &\geq 4x^3 - 32 + x - 1 + 4\sqrt{(x-2)(x^2+2x+4)(x-1)} \\
 \Leftrightarrow 4x^2 + 3x - 20 &\geq 4\sqrt{(x-2)(x-1)} \cdot \sqrt{x^2+2x+4} \\
 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 + 3(x^2 + 2x + 4) &\geq 4\sqrt{x^2 - 3x + 2} \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 4} \quad [1]
 \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = a; \sqrt{x^2 + 2x + 4} = b$ ($a \geq 0; b > 0$) ta có

$$\begin{aligned}
 [1] &\Leftrightarrow a^2 + 3b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)(a-3b) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{a+b} \cdot \frac{a^2 - 9b^2}{a+3b} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow (a^2 - b^2)(a^2 - 9b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (5x+2)(8x^2 + 21x + 34) \geq 0 \quad [2]
 \end{aligned}$$

Nhận thấy [2] nghiệm đúng với mọi $x \geq 2$. Kết luận tập hợp nghiệm $S = [2; +\infty)$.

Bài toán 121. Giải phương trình $\sqrt{x^3 + 2x^2 - 7x + 6} - \sqrt{x} = \sqrt{x^3 + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^3 + 2x^2 - 7x + 6 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x^3 + 2x^2 - 7x + 6} = \sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 7x + 6 = x^3 + x + 1 + 2\sqrt{(x+1)(x^2 - x + 1)}x \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 5 = 2\sqrt{x^2 - x + 1}\sqrt{x^2 + x}$$

$$\Leftrightarrow 5(x^2 - x + 1) - 3(x^2 + x) = 2\sqrt{x^2 - x + 1}\sqrt{x^2 + x} \Leftrightarrow 5 - 3 \cdot \frac{x^2 + x}{x^2 - x + 1} = 2\sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2 - x + 1}} \quad [*]$$

$$\text{Đặt } \sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2 - x + 1}} = t \quad (t \geq 0) \text{ thì } [*] \Leftrightarrow 5 - 3t^2 = 2t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{5}{3} \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow t = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = x^2 + x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Đổi chiều điều kiện và thử lại ta thu được nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

Bài toán 122. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3 + 4x^2 + 10x + 20} - \sqrt{x^3 - 27} \leq 2\sqrt{x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^3 + 4x^2 + 10x + 20 \geq 0 \\ x^3 \geq 27 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 4x^2 + 10x + 20 \leq x^3 + 4x - 27 + 4\sqrt{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}x$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 6x + 47 \leq 4\sqrt{x(x-3)}\sqrt{x^2 + 3x + 9}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 3(x^2 + 3x + 9) \leq 4\sqrt{x^2 - 3x}\sqrt{x^2 + 3x + 9} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3x + 9} + 3 \leq 4\sqrt{\frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3x + 9}} \quad [1]$$

$$\text{Đặt } \sqrt{\frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3x + 9}} = t \quad (t \geq 0) \text{ thì } [1] \Leftrightarrow t^2 + 3 \leq 4t \Leftrightarrow (t-1)(t-3) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{\frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3x + 9}} \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + 9 \leq x^2 - 3x \\ x^2 - 3x \leq 9(x^2 + 3x + 9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 9 \leq 0 \\ 8x^2 + 30x + 81 \geq 0 \end{cases} \quad [2] \text{ (Hệ vô nghiệm do } x \geq 3).$$

Kết luận bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 123. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3 - 1} - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 17x + 8} + \sqrt{x} \geq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \\ x^3 + 2x^2 + 17x + 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^3-1}+\sqrt{x} &\geq \sqrt{x^3+2x^2+17x+8} \\ \Leftrightarrow x^3+x-1+2\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}x &\geq x^3+2x^2+17x+8 \Leftrightarrow 2\sqrt{x(x-1)}\cdot\sqrt{x^2+x+1} \geq 2x^2+16x+9 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-x}\cdot\sqrt{x^2+x+1} &\geq 9(1-x)-7(x^2-x) \Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2+x+1}} \geq 9-7\cdot\frac{x^2-x}{x^2+x+1} \quad [*] \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2+x+1}}=t$ ($t \geq 0$) thì $[*] \Leftrightarrow 2t \geq 9-7t^2 \Leftrightarrow (t-1)(7t+9) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 1 \Leftrightarrow x^2-x \geq x^2+x+1 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$.

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 124. Giải bất phương trình $\sqrt{3x^2-12x+5} \leq \sqrt{x^3-1}+\sqrt{x^2-2x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 3x^2-12x+5 \geq 0 \\ x \geq 1 \\ x(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3x^2-12x+5 &\leq x^3+x^2-2x-1+2\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}x(x-2) \\ \Leftrightarrow x^3-2x^2+10x-6+2\sqrt{(x-1)(x-2)}\cdot\sqrt{(x^2+x+1)}x &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x^3+x^2+x)-3(x^2-3x+2)+2\sqrt{x^2-3x+2}\cdot\sqrt{x^3+x^2+x} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 1-3\cdot\frac{x^2-3x+2}{x^3+x^2+x}+2\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^3+x^2+x}} &\geq 0 \quad [*] \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^3+x^2+x}}=t$ ($t \geq 0$) thì

$$[*] \Leftrightarrow 1-3t^2+2t \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq t \leq 1 \Rightarrow t \leq 1 \Leftrightarrow x^2-3x+2 \leq x^3+x^2+x \Leftrightarrow x^3+4x+2 \geq 0 \quad [1].$$

Nhận thấy [1] nghiệm đúng với $x \geq 2$. Kết luận nghiệm $S=[2;+\infty)$.

Bài toán 125. Giải phương trình $\sqrt{x^3+5x^2-7x-2}=\sqrt{x^3+x-2}+\sqrt{2x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3+5x^2-7x-2 \geq 0 \\ x^3+x-2 \geq 0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+5x^2-7x-2 \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^3+5x^2-7x-2 &= x^3+3x-3+2\sqrt{(x-1)(x^2+x+2)}(2x-1) \\ \Leftrightarrow 5x^2-10x+1 &= 2\sqrt{(x-1)(2x-1)}\cdot\sqrt{x^2+x+2} \\ \Leftrightarrow 3(2x^2-3x+1)-(x^2+x+2) &= 2\sqrt{2x^2-3x+1}\cdot\sqrt{x^2+x+2} \quad [1] \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{2x^2-3x+1}=u; \sqrt{x^2+x+2}=v$ ($u \geq 0; v > 0$) thì

$$\begin{aligned} [1] &\Leftrightarrow 3u^2 - v^2 = 2uv \Leftrightarrow (u-v)(3u+v) = 0 \Leftrightarrow u = v \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = \sqrt{x^2 + x + 2} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{5} \\ x = 2 + \sqrt{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \{2 + \sqrt{5}\}$.

Bài toán 126. Giải phương trình $\sqrt{x^3 + 2x^2 - 32x + 17} - \sqrt{x^3 - 2x - 4} = \sqrt{x - 3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^3 + 2x^2 - 32x + 17 \geq 0 \\ x^3 - 2x - 4 \geq 0 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 2x^2 - 32x + 17 \geq 0 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^3 + 2x^2 - 32x + 17} &= \sqrt{x^3 - 2x - 4} + \sqrt{x - 3} \\ \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 32x + 17 &= x^3 - 2x - 4 + x - 3 + 2\sqrt{(x-2)(x^2 + 2x + 2)(x-3)} \\ \Leftrightarrow 2x^2 - 31x + 24 &= 2\sqrt{(x-2)(x-3)} \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 2} \\ \Leftrightarrow 5(x^2 - 5x + 6) - 3(x^2 + 2x + 2) &= 2\sqrt{x^2 - 5x + 6} \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 2} \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2 - 5x + 6} = a; \sqrt{x^2 + 2x + 2} = b \quad (a \geq 0; b > 0)$ ta có phương trình

$$5a^2 - 3b^2 = 2ab \Leftrightarrow (a-b)(5a+3b) = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 5x + 6} = \sqrt{x^2 + 2x + 2} \Leftrightarrow x = \frac{3}{7}.$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 127. Giải bất phương trình $\sqrt{x^3 - 8} \leq \sqrt{x^3 - 2x^2 - 9} + \sqrt{x + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^3 - 8 \geq 0 \\ x^3 - 2x^2 - 9 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ (x-3)(x^2 + x + 3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 8 &\leq x^3 - 2x^2 - 9 + x - 1 + 2\sqrt{(x-3)(x^2 + x + 3)(x+1)} \\ \Leftrightarrow 2x^2 - x &\leq 2\sqrt{(x-3)(x+1)} \cdot \sqrt{x^2 + x + 3} \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 - 2\sqrt{x^2 - 2x - 3} \cdot \sqrt{x^2 + x + 3} &\leq x^2 + x + 3 \leq 0 \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 - 2x - 3} - \sqrt{x^2 + x + 3}\right)^2 &\leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x - 3} = \sqrt{x^2 + x + 3} \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 &= x^2 + x + 3 \Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 128. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{x^3 + 4x - 5} + 2\sqrt{x - 4} - 10}{\sqrt{x^3 + 4x^2 - 6x - 4} - 10} \geq 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

$$\text{Điều kiện ban đầu } \begin{cases} x^3 + 4x - 5 \geq 0 \\ x^3 + 4x^2 - 6x - 4 \neq 10 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2 + x + 5) \geq 0 \\ (x-4)(x^2 + 8x + 26) \neq 0 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 4 \Leftrightarrow x > 4 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(x) = x^3 + 4x^2 - 6x - 4$; $x \in (4; +\infty)$ ta có $f'(x) = 3x^2 + 8x - 6 > 0, \forall x \in (4; +\infty)$.

Suy ra hàm số liên tục, đồng biến trên miền $(4; +\infty)$. Do đó $f(x) > \min_{x \in (4; +\infty)} f(x) = f(4) = 100 \Rightarrow \sqrt{f(x)} > 10$.

Với điều kiện $x > 4$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^3 + 4x - 5} + 2\sqrt{x - 4} - 10 \geq \sqrt{x^3 + 4x^2 - 6x - 4} - 10 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 4x - 5} + 2\sqrt{x - 4} \geq \sqrt{x^3 + 4x^2 - 6x - 4} \\ & \Leftrightarrow x^3 + 4x - 5 + 4x - 16 + 4\sqrt{(x-1)(x^2 + x + 5)(x-4)} \geq x^3 + 4x^2 - 6x - 4 \\ & \Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 17 \leq 4\sqrt{(x-1)(x-4)(x^2 + x + 5)} \\ & \Leftrightarrow 3(x^2 - 5x + 4) + x^2 + x + 5 \leq 4\sqrt{x^2 - 5x + 4} \cdot \sqrt{x^2 + x + 5} \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x + 5} + 1 \leq 4\sqrt{\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x + 5}} \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x + 5}} = t \ (t \geq 0) \text{ thu được } 3t^2 + 1 \leq 4t \Leftrightarrow (t-1)(3t-1) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq t \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x + 5}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 5 \leq 9(x^2 - 5x + 4) \\ x^2 - 5x + 4 \leq x^2 + x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 - 46x + 29 \geq 0 \\ 6x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{23 + \sqrt{297}}{8} \\ x \leq \frac{23 - \sqrt{297}}{8} \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp điều kiện ta thu được tập hợp nghiệm } S = \left[\frac{23 + \sqrt{297}}{8}; +\infty \right).$$

Lời giải 2.

$$\text{Điều kiện ban đầu } \begin{cases} x^3 + 4x - 5 \geq 0 \\ x^3 + 4x^2 - 6x - 4 \neq 10 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2 + x + 5) \geq 0 \\ (x-4)(x^2 + 8x + 26) \neq 0 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 4 \Leftrightarrow x > 4 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } x^3 + 4x^2 - 6x - 4 = (x-4)(x^2 + 8x) + 26x - 4 > 26 \cdot 4 - 4 = 100 \Rightarrow \sqrt{x^3 + 4x^2 - 6x - 4} - 10 > 0.$$

Bất phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^3 + 4x - 5} + 2\sqrt{x - 4} - 10 \geq \sqrt{x^3 + 4x^2 - 6x - 4} - 10 \\ & \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + 4x - 5} + 2\sqrt{x - 4} \geq \sqrt{x^3 + 4x^2 - 6x - 4} \\ & \Leftrightarrow x^3 + 4x - 5 + 4x - 16 + 4\sqrt{(x-1)(x^2 + x + 5)(x-4)} \geq x^3 + 4x^2 - 6x - 4 \\ & \Leftrightarrow 4x^2 - 2x + 17 \leq 4\sqrt{(x-1)(x-4)(x^2 + x + 5)} \\ & \Leftrightarrow 3(x^2 - 5x + 4) + x^2 + x + 5 \leq 4\sqrt{x^2 - 5x + 4} \cdot \sqrt{x^2 + x + 5} \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x^2 - 5x + 4} = u; \sqrt{x^2 + x + 5} = v \ (u \geq 0; v > 0) \text{ ta có}$$

$$3u^2 + v^2 \leq 4uv \Leftrightarrow (u-v)(3u-v) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{u^2 - v^2}{u+v} \cdot \frac{9u^2 - v^2}{3u+v} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (u^2 - v^2)(9u^2 - v^2) \leq 0 \Leftrightarrow (6x+1)(8x^2 - 46x + 29) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{23 + \sqrt{297}}{8}$$

Kết luận nghiệm $S = \left[\frac{23 + \sqrt{297}}{8}; +\infty \right)$.

Nhận xét.

Bài toán 128 về hình thức có lẽ đã trở nên quen thuộc, bao gồm cả nhận xét mẫu thức luôn lớn hơn 10, dựa theo điều kiện xác định (ban đầu). Theo tác lập luận chứng minh mẫu thức lớn hơn 10 "nhất cử lưỡng tiện", không những giảm thiểu một trường hợp, đồng thời đây cũng là hướng xử lý điều kiện xác định một cách chặt chẽ (lưu ý bài toán là giải bất phương trình). Với điều kiện $x > 4$, lời giải 1 trình bày phương án xử lý bằng cách tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số (dành cho các bạn sau khi đã học kiến thức đạo hàm – tính đơn điệu hàm số, chương trình Giải tích lớp 11 – 12 THPT); lời giải 2 có hướng đi bằng việc tách nhân tử và đánh giá thông thường, phù hợp với các bạn học sinh THCS và lớp 10 THPT.

Ngoài ra các bạn có thể chứng minh tính đơn điệu theo định nghĩa: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến. Tuy theo hoàn cảnh và khả năng của bản thân, các bạn có thể lựa chọn cho mình cách giải hợp lý nhất.

Nội dung, cấu trúc đề thi tuyển sinh Đại học và cao đẳng của Bộ giáo dục hiện hành luôn theo phương châm cơ bản, bám sát chương trình sách giáo khoa, theo đúng chuẩn kỹ năng và khung kiến thức, phù hợp, vừa sức với mọi đối tượng dự thi đồng thời phải có tính phân loại thí sinh rất cao. Học, tìm hiểu, thực hành, vận dụng và đánh giá các kiến thức cấp cao hơn là một điều hết sức đáng quý nếu các bạn có khả năng, nhưng đôi khi điều này sẽ làm chúng ta mất đi những tư duy đột phá đáng có !

Bài toán 129. Giải phương trình $\sqrt{x^3 + 5x^2 - 11x + 3} \leq \sqrt{x^3 + x^2 - 3x - 6} + 2\sqrt{x-3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x^3 + 5x^2 - 11x + 3 \geq 0 \\ x^3 + x^2 - 3x - 6 \geq 0 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 5x^2 - 11x + 3 \geq 0 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x^2 + 8x) + 13x + 3 \geq 0 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x^3 + 5x^2 - 11x + 3} &\leq \sqrt{x^3 + x^2 - 3x - 6} + 2\sqrt{x-3} \\ x^3 + 5x^2 - 11x + 3 &\leq x^3 + x^2 - 3x - 6 + 4x - 12 + 4\sqrt{(x-2)(x^2 + 3x + 3)}(x-3) \\ \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 21 &\leq 4\sqrt{(x-2)(x-3)} \cdot \sqrt{x^2 + 3x + 3} \\ \Leftrightarrow 3(x^2 - 5x + 6) + x^2 + 3x + 3 &\leq 4\sqrt{x^2 - 5x + 6} \cdot \sqrt{x^2 + 3x + 3} \quad [1] \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^2 - 5x + 6} = a; \sqrt{x^2 + 3x + 3} = b$ ($a \geq 0; b > 0$) thì [1] trở thành

$$\begin{aligned} 3a^2 + b^2 &\leq 4ab \Leftrightarrow (a-b)(3a-b) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{a+b} \cdot \frac{9a^2 - b^2}{3a+b} \leq 0 \\ \Leftrightarrow (a^2 - b^2)(9a^2 - b^2) &\leq 0 \Leftrightarrow (3-8x)(8x^2 - 48x + 51) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12 - \sqrt{42}}{4} \leq x \leq \frac{3}{8} \\ x \geq \frac{12 + \sqrt{42}}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x \geq \frac{12 + \sqrt{42}}{4}$.

Bài toán 130. Giải bất phương trình $\sqrt{4x^3 - 8x^2 + 32x - 19} \geq 2\sqrt{x^3 - x^2 + x - 1} - \sqrt{x - 2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 4x^3 - 8x^2 + 32x - 19 \geq 0 \\ x^3 - x^2 + x - 1 \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2(x-2) + 32x - 19 \geq 0 \\ (x-1)(x^2+1) \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

$$\text{Nhận xét } 2\sqrt{x^3 - x^2 + x - 1} - \sqrt{x - 2} = \frac{4x^3 - 4x^2 + 3x - 2}{2\sqrt{x^3 - x^2 + x - 1} + \sqrt{x - 2}} = \frac{4x^2(x-1) + 3x - 2}{2\sqrt{x^3 - x^2 + x - 1} + \sqrt{x - 2}} > 0 \quad \forall x \geq 2.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{4x^3 - 8x^2 + 32x - 19} &\geq 2\sqrt{x^3 - x^2 + x - 1} - \sqrt{x - 2} \\ 4x^3 - 8x^2 + 32x - 19 &\geq 4(x^3 - x^2 + x - 1) + x - 2 - 4\sqrt{(x-1)(x^2+1)(x-2)} \\ \Leftrightarrow -4x^2 + 27x - 13 + 4\sqrt{(x-1)(x-2)} \cdot \sqrt{x^2+1} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 5(x^2+1) + 4\sqrt{x^2-3x+2} \cdot \sqrt{x^2+1} - 9(x^2-3x+2) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 5 + 4\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}} - 9 \cdot \frac{x^2-3x+2}{x^2+1} &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2+1}} = t \quad (t \geq 0) \text{ thu được } 5 + 4t - 9t^2 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(9t+5) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq x^2 + 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}.$$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 131. Giải bất phương trình $\sqrt{9x^3 - 6x^2 - 3x - 32} + \sqrt{x - 1} = 3\sqrt{x^3 - 3x - 2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 9x^3 - 6x^2 - 3x - 32 \geq 0 \\ x \geq 1 \\ (x-2)(x+1)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = -1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$(x-2)(9x^2 + 13x) + 23x - 32 \geq 0$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{9x^3 - 6x^2 - 3x - 32} &= 3\sqrt{x^3 - 3x - 2} - \sqrt{x - 1} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x^3 - 3x - 2} - \sqrt{x - 1} \geq 0 \\ 9x^3 - 6x^2 - 3x - 32 = 9(x^3 - 3x - 2) + x - 1 - 6\sqrt{(x-2)(x^2+2x+1)(x-1)} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x^3 - 3x - 2} \geq \sqrt{x - 1} \\ -6x^2 + 23x - 13 + 6(x+1)\sqrt{x^2 - 3x + 2} = 0 \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } (*) \Leftrightarrow (x+1)^2 + 6(x+1)\sqrt{x^2 - 3x + 2} - 7(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow 1 + 6\frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x+1} - 7\frac{x^2 - 3x + 2}{x+1} = 0.$$

$$\text{Đặt } \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x+1} = t \quad (t \geq 0) \text{ quy về } \begin{cases} 1+6t-7t^2=0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-\frac{1}{7} \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow x^2+2x+1=x^2-3x+2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}.$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 132. Giải bất phương trình $\sqrt{4x^3-x-12} > \sqrt{x^3-1} + \sqrt{x^3-x-6} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 4x^3-x-12 \geq 0 \\ x \geq 1 \\ x^3-x-6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-3)(2x^2+3x+4) \geq 0 \\ x \geq 1 \\ (x-2)(x^2+2x+3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 3 \\ x \geq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x^3-x-12 &> x^3-1+x^3-x-6+2\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)(x-2)(x^2+2x+3)} \\ \Leftrightarrow 2x^3-5 &> 2\sqrt{(x-1)(x^2+2x+3)} \cdot \sqrt{(x-2)(x^2+x+1)} \\ \Leftrightarrow x^3+x^2+x-3-2\sqrt{x^3+x^2+x-3} \cdot \sqrt{x^3-x^2-x-2} &+ x^3-x^2-x-2 > 0 \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^3+x^2+x-3}-\sqrt{x^3-x^2-x-2}\right)^2 &> 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^3+x^2+x-3} \neq \sqrt{x^3-x^2-x-2} \\ \Leftrightarrow x^3+x^2+x-3 \neq x^3-x^2-x-2 &\Leftrightarrow 2x^2+2x-1 \neq 0 \quad [1] \end{aligned}$$

Hệ thức [1] nghiệm đúng do $x \geq 2$. Kết luận bất phương trình đã cho có nghiệm $x \geq 2$.

Bài toán 133. Giải bất phương trình $\sqrt{4x^3-4x^2+8x-9} \geq \sqrt{x^3-2x^2+2x-4} + \sqrt{x^3-x^2+x-1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 4x^3-4x^2+8x-9 \geq 0 \\ x^3-2x^2+2x-4 \geq 0 \\ x^3-x^2+x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(4x^2+4x)+16x-9 \geq 0 \\ (x-2)(x^2+2) \geq 0 \\ (x-1)(x^2+1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x^3-4x^2+8x-9 &\geq x^3-2x^2+2x-4+x^3-x^2+x-1+2\sqrt{(x-2)(x^2+2)(x-1)(x^2+1)} \\ \Leftrightarrow 2x^3-x^2+5x-4 &\geq 2\sqrt{(x-2)(x^2+1)} \cdot \sqrt{(x-1)(x^2+2)} \\ \Leftrightarrow 3(x^3-x^2+2x-2) - (x^3-2x^2+x-2) &\geq 2\sqrt{x^3-2x^2+x-2} \cdot \sqrt{x^3-x^2+2x-2} \quad [*] \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^3-x^2+2x-2} = u; \sqrt{x^3-2x^2+x-2} = v \quad (u > 0; v \geq 0)$ thì [*] trở thành

$$\begin{aligned} 3u^2-v^2 &\geq 2uv \Leftrightarrow (u-v)(3u+v) \geq 0 \Leftrightarrow u \geq v \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^3-x^2+2x-2} &\geq \sqrt{x^3-2x^2+x-2} \Leftrightarrow x^2+x \geq 0 \quad [1] \end{aligned}$$

Dễ thấy [1] nghiệm đúng với mọi $x \geq 2$. Kết luận bất phương trình có nghiệm $S = [2; +\infty)$.

Bài toán 134. Giải bất phương trình $\sqrt{16x^3+8x^2+15x-43} \geq 3\sqrt{x^3-1} + \sqrt{x^3-8} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 2 \\ 16x^3 + 8x^2 + 15x - 43 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 16x^3 + 8x^2 + 15x - 43 &\geq 9(x^3 - 1) + x^3 - 8 + 6\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)(x-2)(x^2+2x+4)} \\ &\Leftrightarrow 6x^3 + 8x^2 + 15x - 26 \geq 6\sqrt{(x-1)(x^2+2x+4)} \cdot \sqrt{(x-2)(x^2+x+1)} \\ &\Leftrightarrow 7(x^3 + x^2 + 2x - 4) - (x^3 - x^2 - x - 2) \geq 6\sqrt{x^3 + x^2 + 2x - 4} \cdot \sqrt{x^3 - x^2 - x - 2} \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^3 + x^2 + 2x - 4} = u; \sqrt{x^3 - x^2 - x - 2} = v$ ($u > 0; v \geq 0$) ta thu được

$$\begin{aligned} 7u^2 - v^2 &\geq 6uv \Leftrightarrow (u-v)(7u+v) \geq 0 \Leftrightarrow u \geq v \Leftrightarrow \sqrt{x^3 + x^2 + 2x - 4} \geq \sqrt{x^3 - x^2 - x - 2} \\ &\Leftrightarrow x^3 + x^2 + 2x - 4 \geq x^3 - x^2 - x - 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = [2; +\infty)$.

Bài toán 135. Giải phương trình $\frac{x+1}{2} = \sqrt{\frac{x^2+1}{6}} + \sqrt{\frac{x}{6}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 &= \frac{x^2+x+1}{6} + \frac{\sqrt{x(x^2+1)}}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \frac{x^2+x+1}{6} = \frac{\sqrt{x(x^2+1)}}{3} \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 4\sqrt{x(x^2+1)} \Leftrightarrow x^2 + 1 - 4\sqrt{x(x^2+1)} + 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt{x})^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 4x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện ta thu được hai nghiệm $x = 2 + \sqrt{3}; x = 2 - \sqrt{3}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 0$. Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho bộ gồm ba cặp số ta có

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{\frac{x^2+1}{6}} + \sqrt{\frac{x}{6}}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+1}{6}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+1}{6}} + \sqrt{\frac{x}{6}}\right)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2) \left(\frac{x^2+1}{24} + \frac{x^2+1}{24} + \frac{x}{6}\right) \\ &\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{x^2+1}{6}} + \sqrt{\frac{x}{6}}\right)^2 \leq \frac{2x^2 + 4x + 2}{8} = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2+1}{6}} + \sqrt{\frac{x}{6}} \leq \frac{x+1}{2} \quad (*) \end{aligned}$$

Phương trình đề bài có nghiệm khi và chỉ khi (*) xảy ra dấu đẳng thức, nghĩa là

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+1}{6}} = \sqrt{\frac{x}{6}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 4x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Đổi chiều điều kiện đi đến tập nghiệm $S = \{2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\}$.

Bài toán 136. Giải phương trình $3\sqrt{x(x^2 - 6x + 12)} = 2(x^2 - 7x + 12)$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x[(x-3)^2+3] \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $3\sqrt{x}\sqrt{x^2-6x+12} = 2[(x^2-6x+12)-x]$.

Đặt $\sqrt{x^2-6x+12} = u; \sqrt{x} = v, (u > 0; v \geq 0)$ thu được

$$\begin{cases} 3uv = 2(u^2 - v^2) \\ u > 0; v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u-2v)(2u+v) = 0 \\ u > 0; v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = 2v \\ \Leftrightarrow x^2 - 6x + 12 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 10x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 5 + \sqrt{13}; x = 5 - \sqrt{13}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x = 5 + \sqrt{13}; x = 5 - \sqrt{13}$.

Bài toán 137. Giải bất phương trình $\sqrt{2x^2-6x+8} - \sqrt{x} \leq x-2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} 2x^2 - 6x + 8 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương $\sqrt{2(x^2-4x+4)+2x} \leq \sqrt{x} + x - 2 \Leftrightarrow \sqrt{2(x-2)^2+2x} \leq \sqrt{x} + x - 2$.

Đặt $\sqrt{x} = u; x - 2 = v$ thì ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{2u^2+2v^2} \leq u+v &\Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geq 0 \\ 2u^2+2v^2 \leq u^2+2uv+v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v \geq 0 \\ (u-v)^2 \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow u=v \Leftrightarrow x-2=\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4 \end{aligned}$$

Kết luận bất phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 4$.

Bài toán 138. Giải phương trình $\sqrt{x^8-14x^4+1} = x^4-12x^2+1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Nhận xét $x^8-14x^4+1 = (x^4+1)^2 - (4x^2)^2 = (x^4-4x^2+1)(x^4+4x^2+1)$ nên ta có điều kiện $(x^4-4x^2+1)(x^4+4x^2+1) \geq 0 \Leftrightarrow x^4-4x^2+1 \geq 0$.

Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{(x^4-4x^2+1)(x^4+4x^2+1)} &= x^4-12x^2+1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^4-4x^2+1} \cdot \sqrt{x^4+4x^2+1} &= 2(x^4-4x^2+1) - (x^4+4x^2+1) \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt{x^4-4x^2+1} = u; \sqrt{x^4+4x^2+1} = v, (u \geq 0; v > 0)$ ta thu được

$$\begin{aligned} \begin{cases} uv = 2u^2 - v^2 \\ u \geq 0; v > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (u-v)(2u+v) = 0 \\ u \geq 0; v > 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = v \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^4-4x^2+1} &= \sqrt{x^4+4x^2+1} \Leftrightarrow x^4-4x^2+1 = x^4+4x^2+1 \Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = 0$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $3\sqrt{x^2+4x-5}+\sqrt{x-3}\leq\sqrt{11x^2+25x+2}$.
2. $\sqrt{x(2x-5)}\leq\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x-3}$.
3. $\sqrt{4x^2-15x+7}\geq\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x-3}$.
4. $\sqrt{5x^2-13x+2}-\sqrt{x-3}\leq 2\sqrt{x^2-3x+2}$.
5. $\sqrt{(x+1)(3x-10)}\geq\sqrt{x^2-3x+2}+2\sqrt{x-4}$.
6. $\sqrt{5x^2-15x+3}\leq 2\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x-2}$.
7. $\sqrt{7x^2-23x+13}<\sqrt{x-2}+2\sqrt{x^2-4x+3}$.
8. $\sqrt{4x^2-7x-1}-\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x-2}<0$.
9. $\sqrt{x^2-2x}>\sqrt{2(2x^2-6x+3)}-2\sqrt{x-3}$.
10. $\sqrt{(x+1)(5x-14)}<\sqrt{x^2-2x}+2\sqrt{x-3}$.
11. $\sqrt{6x^2-x-19}\leq\sqrt{x^2-x}+3\sqrt{x-2}$.
12. $\sqrt{3x^2+8x-22}-3\sqrt{x-2}\geq\sqrt{x^2-x}$.
13. $\sqrt{6x^2+11x-14}\leq\sqrt{x^2+x}+3\sqrt{x-1}$.
14. $\sqrt{x^2+x}+3\sqrt{x-1}-\sqrt{3x^2+14x-11}>0$.
15. $\sqrt{5x^2+11x-12}\leq\sqrt{2x^2-x}+3\sqrt{x-1}$.
16. $\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}=2\sqrt{x^2-2x+6}$.
17. $\sqrt{x(4x-13)}+\sqrt{x-5}\geq 2\sqrt{x^2-x}$.
18. $\sqrt{5x^2-17x+5}\geq 2\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x-5}$.
19. $\sqrt{10x^2-57x+29}\leq 3\sqrt{x^2-5x}-\sqrt{x-6}$.
20. $\sqrt{2(10x^2-14x+3)}>3\sqrt{x(2x-1)}-\sqrt{x-2}$.
21. $\sqrt{5x^2+8x-42}\geq 2\sqrt{(x-2)(x+3)}+\sqrt{x-3}$.
22. $\sqrt{10x^2-37x+2}>3\sqrt{x(x-3)}-\sqrt{x-1}$.
23. $4\sqrt{x^2-x}>\sqrt{17x^2-26x-40}+3\sqrt{x-5}$.
24. $\sqrt{9x^2-31x+20}>2\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2-3x+2}$.
25. $\sqrt{4x^2-12x+5}=\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-3x}$.
26. $\sqrt{4x^2-24x+26}=\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-3x}$.
27. $\sqrt{9x^2-29x+11}=2\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{x^2-3x+2}$.
28. $\sqrt{25x^2-55x+12}=2\sqrt{x^2-3x+2}+3\sqrt{x^2-4x}$.
29. $\sqrt{x^3+2x^2+7x-2}\geq\sqrt{x^3-1}+\sqrt{x-2}$.
30. $\sqrt{x^3+2x^2-x-3}-\sqrt{x^3+1}>\sqrt{x-2}$.
31. $\sqrt{4x^3+4x^2+4x-19}<2\sqrt{x^3-8}+\sqrt{x-1}$.
32. $\sqrt{72x^3+24x^2-36x+4}=3\sqrt{8x^3-1}+\sqrt{2x-3}$.

33. $\sqrt{4x^3 - 4x^2 + 14x - 85} > 2\sqrt{x^3 - 27} - \sqrt{x - 1}$.
34. $\sqrt{x^3 + 4x^2 + 2x} \geq \sqrt{x^3 - 1} + 2\sqrt{x}$.
35. $\sqrt{9x^3 + 12x^2 + 14x - 4} \leq 3\sqrt{x^3 - 1} + 4\sqrt{x}$.
36. $\sqrt{2x^2 + 3x - 4} \leq \sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2\sqrt{x}$.
37. $\sqrt{4x^3 - 4x^2 + 3x - 7} \leq \sqrt{x^3 - 1} + \sqrt{x^3 - 2x}$.
38. $\sqrt{4x^3 - 8x^2 - 29x + 18} = \sqrt{x^3 + x - 2} + \sqrt{x^3 - 4x}$.
39. $\sqrt{4x^3 + 12x^2 + 3x + 4} > \sqrt{x^3 - 1} + \sqrt{x(x^2 + 1)}$.
40. $x + 2 = \sqrt{x^2 - 2x - 2} + 2\sqrt{x + 1}$.
41. $\sqrt{x^2 + 1} + 2\sqrt{3x} = \sqrt{3(x^2 + 6x + 1)}$.
42. $2\sqrt{x^2 - x + 3} + \sqrt{x + 6} = \sqrt{3(2x^2 - x + 12)}$.
43. $\sqrt{x^2 - 2x + 3} + 2\sqrt{x + 1} = \sqrt{3(x^2 + 5)}$.
44. $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x^2 + 7x + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{5x^2 + 42x + 61}$.
45. $3\sqrt{3x - 4} + \sqrt{x - 1} = \sqrt{5x^2 + 36x - 51}$.
46. $2\sqrt{3x + 5} + \sqrt{x^2 + x + 3} = \sqrt{3(x^2 + 7x + 13)}$.
47. $2\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{3x + 1} > \sqrt{3(2x^2 + x + 1)}$.
48. $2\sqrt{3x^2 - x + 1} + \sqrt{4x + 3} \leq \sqrt{3(6x^2 + 2x + 5)}$.
49. $\sqrt{4x^3 - 5x^2 + 11x - 6} = \sqrt{2x - 1} + 2\sqrt{(x - 2)(x^2 + 1)}$.
50. $\sqrt{4x^3 + x^2 + 18x - 1} - \sqrt{2x - 1} = 2\sqrt{x^3 - 1}$.
51. $\sqrt{9x^2 + 17x - 24} \leq \sqrt{3x^2 + 7x - 6} + 2\sqrt{x - 1}$.
52. $2\sqrt{x - 1} = \sqrt{3(3x^2 + x + 1)} - \sqrt{3x^2 - x + 3}$.
53. $\sqrt{2x^2 - 1} + \sqrt{2x} \geq \sqrt{3(2x^2 + x - 1)}$.
54. $\sqrt{5x^2 + x + 2} \geq \sqrt{3(5x^2 + 8x + 2)} - \sqrt{14x}$.
55. $\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{6x} = \sqrt{2(x^2 + 7x + 3)}$.
56. $\sqrt{x^3 + x + 1} + 3\sqrt{x^2 + 1} \leq \sqrt{4(x^3 + 3x^2 + x + 4)}$.
57. $3\sqrt{2x^2 - x + 2} + \sqrt{3x^2 + 2} = 2\sqrt{9x^2 - 3x + 8}$.
58. $\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{3x + 3} \leq 2\sqrt{x^2 + 4x + 1}$.
59. $2\sqrt{8x^2 - 6x + 1} + \sqrt{x - 1} = \sqrt{28x^2 - 8x - 3}$.
60. $\sqrt{37x^2 + 196x + 157} = 5\sqrt{x^2 + 5x + 4} + \sqrt{x + 5}$.
61. $\sqrt{x^2 + 5x} + 3\sqrt{x + 6} = 2\sqrt{x^2 + 8x + 18}$.
62. $2\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{1 + 3x^2} = \sqrt{3(5x^2 + 2x + 3)}$.

Bài toán 139. Giải phương trình $\sqrt{x + \frac{3}{x}} = \frac{x^2 + 7}{2(x+1)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2(x+1)\sqrt{x + \frac{3}{x}} = x^2 + 7 &\Leftrightarrow 2\left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x + \frac{3}{x}} = x + \frac{7}{x} \\ \Leftrightarrow x + \frac{3}{x} - 2\left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt{x + \frac{3}{x}} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 1 &= \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1 \\ \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{x} - \sqrt{x + \frac{3}{x}}\right)^2 &= \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x + \frac{3}{x}} - 2\right)\left(\sqrt{x + \frac{3}{x}} - \frac{2}{x}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } \sqrt{x + \frac{3}{x}} = 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \\ \text{➤ } \sqrt{x + \frac{3}{x}} = \frac{2}{x} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^3 + 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)(x^2 + x + 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm $S = \{1; 3\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $(2x+2)\sqrt{x^2+3} = (x^2+7)\sqrt{x}$.

Đặt $\sqrt{x^2+3} = u; \sqrt{x} = v$ ($u > 0; v > 0$) ta thu được $(2v^2+2)u = (u^2+4)v \Leftrightarrow uv(2v-u) = 2(2v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 2 \\ 2v = u \end{cases}$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad uv = 2 &\Leftrightarrow \sqrt{x^3+3x} = 2 \Leftrightarrow x^3+3x-4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 1. \\ \blacksquare \quad 2v = u &\Leftrightarrow x^2+3 = 4x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận tập nghiệm $S = \{1; 3\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x + \frac{3}{x}} - 2 = \frac{x^2 + 7}{2(x+1)} - 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x}(\sqrt{x^2 + 3} + 2\sqrt{x})} = \frac{x^2 - 4x + 3}{2(x+1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 & (1) \\ \sqrt{x^3 + 3x} = 2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{❖ } (1) &\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \\ \text{❖ } (2) &\Leftrightarrow x^3 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Lời giải 4.

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x + \frac{3}{x} = \frac{x^4 + 14x^2 + 49}{4(x^2 + 2x + 1)} &\Leftrightarrow 4(x^2 + 3)(x^2 + 2x + 1) = x(x^4 + 14x^2 + 49) \\ \Leftrightarrow 4(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 3) &= x^5 + 14x^3 + 49x \Leftrightarrow x^5 - 4x^4 + 6x^3 - 16x^2 + 25x - 12 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 3)(x^3 + 3x - 4) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-3)(x^2 + x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

Kết luận phương trình đã cho có tập hợp nghiệm $S = \{1; 3\}$.

Bài toán 140. Giải phương trình $\frac{x^2+1}{2+x} \leq \frac{1}{3}\sqrt{3x+\frac{1}{x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x > 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $(3x^2 + 3)\sqrt{x} \leq (x+2)\sqrt{3x^2+1}$.

Đặt $\sqrt{x} = a; \sqrt{3x^2+1} = b$ ($a > 0; b > 0$) thì thu được

$$\begin{aligned} (b^2 + 2)a &\leq (a^2 + 2)b \Leftrightarrow 2(a-b) \leq ab(a-b) \Leftrightarrow (a-b)(ab-2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a^2-b^2}{a+b} \cdot \frac{a^2b^2-4}{ab+2} \geq 0 \Leftrightarrow (3x^2-x+1)(3x^3+x-4) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(3x^2+3x+4) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện suy ra tập nghiệm $S = (0; 1]$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x > 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3 &\leq (x+2)\sqrt{3x+\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 3x + \frac{3}{x} \leq \left(1 + \frac{2}{x}\right)\sqrt{3x+\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 3x + \frac{1}{x} - \sqrt{3x+\frac{1}{x}} \leq \frac{2}{x}\sqrt{3x+\frac{1}{x}} - \frac{2}{x} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3x+\frac{1}{x}} \left(\sqrt{3x+\frac{1}{x}} - 1\right) \leq \frac{2}{x} \left(\sqrt{3x+\frac{1}{x}} - 1\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+\frac{1}{x}} - 1\right) \left(\sqrt{3x+\frac{1}{x}} - \frac{2}{x}\right) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{3x^2+1} - \sqrt{x})(\sqrt{3x^3+x} - 2) \leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $3x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 3x^2 + 1 > x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{3x^2+1} > \sqrt{x}, \forall x > 0$.

Do đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt{3x^3+x} \leq 2 \Leftrightarrow 3x^3+x-4 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2+3x+4) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. Kết luận nghiệm $S = (0; 1]$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x > 0$.

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{2+x} - \frac{1}{3} &\leq \frac{1}{3}\sqrt{3x+\frac{1}{x}} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3x^2-x+1}{3(x+2)} \leq \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{3x^2+1}{x}} - 1\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{3x^2-x+1}{x+2} \leq \frac{\sqrt{3x^2+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{3x^2-x+1}{x+2} \leq \frac{3x^2-x+1}{\sqrt{x}(\sqrt{3x^2+1} + \sqrt{x})} \quad (*) \end{aligned}$$

Dễ thấy $3x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $x > 0$ nên (*) trở thành

$$\begin{aligned} \sqrt{x}(\sqrt{3x^2+1} + \sqrt{x}) &\leq x+2 \Leftrightarrow \sqrt{3x^3+x} + x \leq x+2 \Leftrightarrow \sqrt{3x^3+x} \leq 2 \\ &\Leftrightarrow 3x^3+x-4 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2+3x+4) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \end{aligned}$$

Đối chiếu với điều kiện đi đến tập nghiệm $S = (0; 1]$.

Bài toán 141. Giải phương trình $\sqrt{x + \frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{3}(x^2 + 3)}{x + 3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải 1.

Điều kiện $x > 0$.

Đặt $\sqrt{x} = u; \sqrt{3x^2 + 6} = v, (u > 0; v > 0)$ thì phương trình đã cho trở thành

$$(v^2 + 3)u = (u^2 + 3)v \Leftrightarrow v^2u - u^2v + 3(u - v) = 0 \Leftrightarrow (u - v)(vu - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ uv = 3 \end{cases}$$

○ $u = v \Leftrightarrow 3x^2 - x + 6 = 0, \Delta < 0$, trường hợp này vô nghiệm.

$$\text{○ } uv = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x(3x^2 + 6)} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^3 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x - 1)(x^2 + x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Đổi chiều điều kiện đi đến nghiệm $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\sqrt{3x^2 + 6}}{\sqrt{x}} = \frac{3(x^2 + 3)}{x + 3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3x^2 + 6} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{3(x^2 + 3)}{x + 3} - 1 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - x + 6}{\sqrt{x}(\sqrt{3x^2 + 6} + \sqrt{x})} = \frac{3x^2 - x + 6}{x + 3} \quad [1].$$

Nhận xét $3x^2 - x + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Do đó } [1] \Leftrightarrow \sqrt{x(3x^2 + 6)} + x = x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^3 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x - 1)(x^2 + x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm $x = 1$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x > 0$.

Với điều kiện đó, phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{x + \frac{2}{x}} &= \frac{\sqrt{3}(x^2 + 3)}{x + 3} \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2}{x} = \frac{3(x^4 + 6x^2 + 9)}{x^2 + 6x + 9} \\ &\Leftrightarrow x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 12x + 18 = 3x^5 + 18x^3 + 27x \\ &\Leftrightarrow 3x^5 - x^4 + 12x^3 - 11x^2 + 15x - 18 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x^2(x^3 + 2x - 3) - x(x^3 + 2x - 3) + 6(x^3 + 2x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (3x^2 - x + 6)(x^3 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 142. Giải phương trình $\frac{2x^2 - x + 5}{2 + x} = \sqrt{2x + \frac{3}{x} - 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải 1.

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{x}(2x^2 - x + 5) = (2 + x)\sqrt{2x^2 - x + 3}$.

Đặt $\sqrt{x} = u; \sqrt{2x^2 - x + 3} = v, (u > 0; v > 0)$ ta thu được

$$u(v^2 + 2) = (v^2 + 2)u \Leftrightarrow uv^2 - v^2u + 2u - 2v = 0 \Leftrightarrow (u - v)(uv - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ uv = 2 \end{cases}$$

➤ $u = v \Leftrightarrow x = 2x^2 - x + 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 3 = 0, \Delta < 0$.

$$\triangleright uv = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x(2x^2 - x + 3)} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x^3 - x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)(2x^2 + x + 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x > 0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - x + 5}{2 + x} &= \frac{\sqrt{2x^2 - x + 3}}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{2x^2 - x + 5}{2 + x} - 1 = \frac{\sqrt{2x^2 - x + 3}}{\sqrt{x}} - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2x + 3}{x + 2} &= \frac{\sqrt{2x^2 - x + 3} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2x + 3}{x + 2} = \frac{2x^2 - 2x + 3}{\sqrt{x}(\sqrt{2x^2 - x + 3} + \sqrt{x})} \\ \Leftrightarrow x + 2 &= \sqrt{x(2x^2 - x + 3)} + x \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x^3 - x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)(2x^2 + x + 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x > 0$. Khi đó phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - x + 5}{2 + x} &= \sqrt{2x + \frac{3}{x}} - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 5 = (x + 2)\sqrt{\frac{2x^2 - x + 3}{x}} \\ \Leftrightarrow \frac{2x^2 - x + 5}{x} &= \left(1 + \frac{2}{x}\right)\sqrt{\frac{2x^2 - x + 3}{x}} \Leftrightarrow \frac{2x^2 - x + 3}{x} + \frac{2}{x} = \left(1 + \frac{2}{x}\right)\sqrt{\frac{2x^2 - x + 3}{x}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2x^2 - x + 3}{x}} \left(\sqrt{\frac{2x^2 - x + 3}{x}} - 1\right) &= \frac{2}{x} \left(\sqrt{\frac{2x^2 - x + 3}{x}} - 1\right) \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{2x^2 - x + 3}{x}} - 1\right) \left(\sqrt{\frac{2x^2 - x + 3}{x}} - \frac{2}{x}\right) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 - x + 3} = \sqrt{x} & (1) \\ \sqrt{x(2x^2 - x + 3)} = 2 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

- (1) $\Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 3 = 0, \Delta < 0$, trường hợp này vô nghiệm.
- (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x^3 - x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)(2x^2 + x + 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 143. Giải bất phương trình $\sqrt{x(x+2)} + \sqrt{x} \geq \sqrt{(x+1)^3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + x + 2x\sqrt{x+2} &\geq x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ \Leftrightarrow 2x\sqrt{x+2} &\geq x^3 + 2x^2 + 1 \Leftrightarrow (x\sqrt{x+2})^2 - 2x\sqrt{x+2} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x\sqrt{x+2} - 1)^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow x\sqrt{x+2} &= 1 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 + x - 1) = 0 \Rightarrow x \in \left\{-1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\} \end{aligned}$$

So sánh với điều kiện đi đến nghiệm $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Bài toán 144. Giải phương trình $2(2x^2 + 13)\sqrt{x} = (x + 5)\sqrt{4x^2 + 21}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x} = a; \sqrt{4x^2 + 21} = b$ ($a \geq 0; b > 0$) thì phương trình đã cho trở thành

$$(b^2 + 5)a = (a^2 + 5)b \Leftrightarrow (a - b)(ab - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ ab = 5 \end{cases}$$

- $a = b \Leftrightarrow 4x^2 - x + 21 = 0$ (Vô nghiệm).
- $ab = 5 \Leftrightarrow x(4x^2 + 21) = 25 \Leftrightarrow (x - 1)(4x^2 + 4x + 25) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \{1\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 0$.

Nhận xét $x = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình ban đầu. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{2(2x^2 + 13)}{x + 5} &= \frac{\sqrt{4x^2 + 21}}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{2(2x^2 + 13)}{x + 5} - 1 = \frac{\sqrt{4x^2 + 21}}{\sqrt{x}} - 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{4x^2 - x + 21}{x + 5} = \frac{4x^2 - x + 21}{\sqrt{x}(\sqrt{4x^2 + 21} + \sqrt{x})} \Leftrightarrow x + 5 = \sqrt{4x^3 + 21x} + x \\ &\Leftrightarrow 4x^3 + 21x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(4x^2 + 4x + 25) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \{1\}$.

Bài toán 145. Giải phương trình $(3 + x)\sqrt{2x + \frac{7}{x}} = 2(x^2 + 5)$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $(x + 3)\sqrt{2x^2 + 7} = 2(x^2 + 5)\sqrt{x}$.

Đặt $\sqrt{2x^2 + 7} = u; \sqrt{x} = v$ ($u > 0; v > 0$) ta có $(v^2 + 3)u = (u^2 + 3)v \Leftrightarrow (u - v)(uv - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ uv = 3 \end{cases}$

- $u = v \Leftrightarrow 2x^2 - x + 7 = 0$ (Vô nghiệm).
- $uv = 3 \Leftrightarrow 2x^3 + 7x - 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 + 2x + 9) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

So sánh điều kiện ta thu được nghiệm $S = \{1\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2x^2 + 7}}{\sqrt{x}} &= \frac{2(x^2 + 5)}{x + 3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x^2 + 7}}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{2(x^2 + 5)}{x + 3} - 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - x + 7}{\sqrt{x}(\sqrt{2x^2 + 7} + \sqrt{x})} = \frac{2x^2 - x + 7}{x + 3} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x^3 + 7x} + x = x + 3 \Leftrightarrow 2x^3 + 7x = 9 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 + 2x + 9) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x = 1$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{3}{x}\right)\sqrt{2x + \frac{7}{x}} &= 2x + \frac{10}{x} \Leftrightarrow 2x + \frac{7}{x} - \left(1 + \frac{3}{x}\right)\sqrt{2x + \frac{7}{x}} + \frac{1}{4}\left(\frac{9}{x^2} + \frac{6}{x} + 1\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{9}{x^2} + \frac{6}{x} + 1\right) - \frac{3}{x} \\
&\Leftrightarrow \left[\sqrt{2x + \frac{7}{x}} - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x} + 1\right)\right]^2 = \left(\frac{3}{2x} - \frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x + \frac{7}{x}} - 1\right)\left(\sqrt{2x + \frac{7}{x}} - \frac{3}{x}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x + \frac{7}{x}} = 1 \\ \sqrt{2x + \frac{7}{x}} = \frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x + 7 = 0 \\ 2x^3 + 7x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1
\end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm $x = 1$.

Bài toán 146. Giải phương trình $\frac{x+2}{3}\sqrt{3x+\frac{1}{x}} = x^2+1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $(3x^2+3)\sqrt{x} = (x+2)\sqrt{3x^2+1}$.

Đặt $\sqrt{x} = u; \sqrt{3x^2+1} = v \quad (u > 0; v > 0)$ quy về $(v^2+2)u = (u^2+2)v \Leftrightarrow (u-v)(uv-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ uv = 2 \end{cases}$

❖ $u = v \Leftrightarrow 3x^2 - x + 1 = 0$ (Vô nghiệm).

❖ $uv = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3x^3 + x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)(3x^2+3x+4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2+3}{x+2} &= \frac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{3x^2+3}{x+2} - 1 = \frac{\sqrt{3x^2+1}}{\sqrt{x}} - 1 \Leftrightarrow \frac{3x^2-x+1}{x+2} = \frac{3x^2-x+1}{\sqrt{x}(\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x})} \\
&\Leftrightarrow x+2 = \sqrt{3x^3+x}+x \Leftrightarrow 3x^3+x-4=0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2+3x+4)=0 \Leftrightarrow x=1
\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
(x+2)\sqrt{3x^3+x} &= 3(x^3+x) \Leftrightarrow 3x^3+x - (x+2)\sqrt{3x^3+x} + \frac{1}{4}(x^2+4x+4) = \frac{1}{4}(x^2+4x+4) - 2x \\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x^3+x} - \frac{x+2}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x^3+x} = 2 & [1] \\ \sqrt{3x^3+x} = -x & [2] \end{cases}
\end{aligned}$$

• $[1] \Leftrightarrow 3x^3+x-4=0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2+3x+4)=0 \Leftrightarrow x=1$.

• Phương trình [2] vô nghiệm do điều kiện $x > 0$.

Vậy ta có tập nghiệm $S = \{1\}$.

Bài toán 147. Giải phương trình $(5x^2+4x+3)\sqrt{x} = (x+3)\sqrt{5x^2+4x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 0$.

Nhận xét $x = 0$ là một nghiệm. Với $x > 0$ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5x^2+4x}}{\sqrt{x}} &= \frac{5x^2+4x+3}{x+3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5x^2+4x}}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{5x^2+4x+3}{x+3} - 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{5x^2+3x}{\sqrt{x}(\sqrt{5x^2+4x}+\sqrt{x})} = \frac{5x^2+3x}{x+3} \Leftrightarrow \frac{5x^2+3x}{\sqrt{x(5x^2+4x)}+x} = \frac{5x^2+3x}{x+3} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{5x^3+4x^2} = 3 \Leftrightarrow 5x^3+4x^2-9=0 \Leftrightarrow (x-1)(5x^2+9x+9)=0 \Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ hoặc $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x} = a; \sqrt{5x^2+4x} = b$ ($a \geq 0; b \geq 0$) thì phương trình đã cho trở thành

$$(b^2+3)a = (a^2+3)b \Leftrightarrow (a-b)(ab-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ ab=3 \end{cases}$$

- $a=b \Leftrightarrow 5x^2+4x=x \Leftrightarrow x(5x+3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{3}{5} \end{cases}$
- $ab=3 \Leftrightarrow \sqrt{5x^3+4x^2}=3 \Leftrightarrow 5x^3+4x^2-9=0 \Leftrightarrow (x-1)(5x^2+9x+9)=0 \Leftrightarrow x=1.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0$ hoặc $x = 1$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x=0 \\ 5x^2+4x+3=(x+3)\sqrt{5x+4} \end{cases} \quad (*)$

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow 5x^3+4x^2+3x=(x+3)\sqrt{5x^3+4x^2} \Leftrightarrow 4(5x^3+4x^2)+12x=4(x+3)\sqrt{5x^3+4x^2} \\ &\Leftrightarrow 4(5x^3+4x^2)-4(x+3)\sqrt{5x^3+4x^2}+x^2+6x+9=x^2-6x+9 \Leftrightarrow (x+3-2\sqrt{5x^3+4x^2})^2=(x-3)^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5x^3+4x^2}=3 \\ \sqrt{5x^3+4x^2}=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^3+4x^2-9=0 \\ x^2(5x+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(5x^2+9x+9)=0 \\ x^2(5x+3)=0 \end{cases} \Rightarrow x \in \{0;1\} \end{aligned}$$

Kết luận tập hợp nghiệm $S = \{0;1\}$.

Bài toán 148. Giải phương trình $(7x^2+5)\sqrt{x}=\sqrt{7x^2+2}(x+3)$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x} = u; \sqrt{7x^2+2} = v$ ($u \geq 0; v > 0$) thì phương trình đã cho trở thành

$$(b^2+3)a = b(a^2+3) \Leftrightarrow (a-b)(ab-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ ab=3 \end{cases}$$

- $a=b \Leftrightarrow 7x^2-x+2=0$ (Vô nghiệm).
- $ab=3 \Leftrightarrow 7x^3+2x-9=0 \Leftrightarrow (x-1)(7x^2+7x+9)=0 \Leftrightarrow x=1.$

Đổi chiếu điều kiện và kết luận tập nghiệm $S = \{1\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \geq 0$.

Nhận xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho. Do đó biến đổi

$$\frac{7x^2+5}{x+3} = \frac{\sqrt{7x^2+2}}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{7x^2+5}{x+3} - 1 = \frac{\sqrt{7x^2+2}}{\sqrt{x}} - 1 \Leftrightarrow \frac{7x^2-x+2}{x+3} = \frac{7x^2-x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{7x^2+2}+\sqrt{x})} \quad (*)$$

Dễ thấy $7x^2-x+2 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên

$$(*) \Leftrightarrow x+3 = \sqrt{7x^3+2x}+x \Leftrightarrow 7x^3+2x-9=0 \Leftrightarrow (x-1)(7x^2+7x+9)=0 \Leftrightarrow x=1.$$

Đổi chiều điều kiện và kết luận tập nghiệm $S = \{1\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \geq 0$.

Nhận xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho. Ta biến đổi

$$\begin{aligned} (x+3)\sqrt{7x+\frac{2}{x}} &= 7x^2+5 \Leftrightarrow 7x+\frac{5}{x} - \left(1+\frac{3}{x}\right)\sqrt{7x+\frac{2}{x}} = 0 \Leftrightarrow 4\left(7x+\frac{5}{x}\right) - 4\left(1+\frac{3}{x}\right)\sqrt{7x+\frac{2}{x}} = 0 \\ &\Leftrightarrow 4\left(7x+\frac{2}{x}\right) - 4\left(1+\frac{3}{x}\right)\sqrt{7x+\frac{2}{x}} + 1 + \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} = 1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} \Leftrightarrow \left(1+\frac{3}{x} - 2\sqrt{7x+\frac{2}{x}}\right)^2 = \left(1-\frac{3}{x}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7x+\frac{2}{x}} = 1 \\ \sqrt{7x+\frac{2}{x}} = \frac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2-x+2=0 \\ 7x^3+2x-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27x^2+7}{4} = 0 \\ (x-1)(7x^2+7x+9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 149. Giải phương trình $(x^2+14)\sqrt{x} = (3+2x)\sqrt{x^2+8} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Đặt $\sqrt{x} = u; \sqrt{x^2+8} = v, (u \geq 0; v > 0)$ thì phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} (v^2+6)u &= (2u^2+3)v \Leftrightarrow uv^2 - 2u^2v = 3v - 6u \Leftrightarrow uv(v-2u) = 3(v-2u) \\ &\Leftrightarrow (u-2v)(uv-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v \\ uv = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2\sqrt{x^2+8} \\ \sqrt{x(x^2+8)} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-x+32=0 & (1) \\ x^3+8x-9=0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad (2) &\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+9)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2+x+9=0 \end{cases} \quad (3) \end{aligned}$$

$\blacksquare$ Các phương trình (1) và (3) đều vô nghiệm vì $\Delta < 0$.

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Bài toán 150. Giải phương trình $\frac{4x^2+1}{6x-1} = \sqrt{x+\frac{x-1}{2x-1}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \frac{2x^2-1}{2x-1} > 0 \\ 6x \neq 1 \end{cases}$$

Để thấy phương trình ban đầu có nghiệm khi $6x-1 > 0$. Khi đó ta có biến đổi

$$\frac{4x^2+1}{6x-1} = \sqrt{\frac{2x^2-1}{2x-1}} \Leftrightarrow \left(\frac{4x^2+1}{6x-1}\right)^2 = \frac{2x^2-1}{2x-1}.$$

Đặt $2x^2-1=u$; $2x-1=v \Rightarrow 4x^2+1=2u+3$; $6x-1=3v+2$. Ta thu được phương trình

$$\begin{aligned} \left(\frac{2u+3}{3v+2}\right)^2 &= \frac{u}{v} \Leftrightarrow \frac{4u^2+12u+9}{9v^2+12v+4} = \frac{u}{v} \Leftrightarrow 4u^2v+12uv+9v = 9v^2u+12uv+4u \\ &\Leftrightarrow uv(4u-9v) = 4u-9v \Leftrightarrow (4u-9v)(uv-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4(2x^2-1) = 9(2x-1) \\ (2x^2-1)(2x-1) = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2-18x+5=0 \\ 4x^3-2x^2-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2-18x+5=0 \\ x(2x^2-x-1)=0 \end{cases} \Rightarrow x \in \left\{ \frac{9+\sqrt{41}}{8}; \frac{9-\sqrt{41}}{8}; 0; 1; -\frac{1}{2} \right\} \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện $6x-1 > 0$ và $\frac{2x^2-1}{2x-1} > 0$ suy ra tập nghiệm $S = \left\{ \frac{9+\sqrt{41}}{8}; \frac{9-\sqrt{41}}{8}; 0; -\frac{1}{2}; 1 \right\}$.

Bài toán 151. Giải phương trình $\frac{8x^2-5}{x} = 3\sqrt{\frac{4x^2-3}{3x-2}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $\frac{4x^2-3}{3x-2} \geq 0$; $x \neq 0$.

Với $\frac{8x^2-5}{x} \geq 0$ thì phương trình đã cho có nghiệm. Lúc này phương trình ban đầu biến đổi về

$$\left(\frac{8x^2-5}{x}\right)^2 = 9 \cdot \frac{4x^2-3}{3x-2} \Leftrightarrow \left(\frac{8x^2-5}{3x}\right)^2 = \frac{4x^2-3}{3x-2} \quad [*].$$

Đặt $4x^2-3=a$; $3x-2=b \Rightarrow 8x^2-5=2a+1$; $3x=b+2$. Khi đó

$$\begin{aligned} [*] &\Leftrightarrow \left(\frac{2a+1}{b+2}\right)^2 = \frac{a}{b} \Leftrightarrow (4a^2+4a+1)b = (b^2+4b+4)a \\ &\Leftrightarrow 4a^2b-4ab = 4a-b \Leftrightarrow ab(4a-b) = 4a-b \Leftrightarrow (ab-1)(4a-b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ab=1 \\ 4a=b \end{cases} \end{aligned}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\checkmark \quad ab=1 \Leftrightarrow (4x^2-3)(3x-2)=1 \Leftrightarrow 12x^3-8x^2-9x+5=0 \Leftrightarrow (x-1)(2x-1)(6x+5)=0 \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{5}{6}; \frac{1}{2}; 1 \right\}.$$

$$\checkmark \quad 4a=b \Leftrightarrow 4(4x^2-3)=3x-2 \Leftrightarrow 16x^2-3x-10=0 \Rightarrow x = \frac{3+\sqrt{649}}{32}; x = \frac{3-\sqrt{649}}{32}.$$

Đối chiếu với các điều kiện ta thu được nghiệm $x=1$; $x = \frac{3+\sqrt{329}}{32}$; $x = \frac{3-\sqrt{329}}{32}$.

Bài toán 152. Giải phương trình $\frac{6x^2-2}{5x-1} = \sqrt{\frac{2x^2-1}{5x-4}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $\frac{2x^2-1}{5x-4} \geq 0; x \neq \frac{1}{5}$.

Với $\frac{6x^2-2}{5x-1} \geq 0$, phương trình đã cho trở thành $\left(\frac{6x^2-2}{5x-1}\right)^2 = \frac{2x^2-1}{5x-4}$.

Đặt $2x^2-1=a; 5x-4=b \Rightarrow 6x^2-2=3a+1; 5x-1=b+3$ ta thu được

$$\begin{aligned} \left(\frac{3a+1}{b+3}\right)^2 &= \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{9a^2+6a+1}{b^2+6b+9} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow 9a^2b+6ab+b=ab^2+6ab+9a \\ &\Leftrightarrow 9a^2b-9a=ab^2-b \Leftrightarrow 9a(ab-1)=b(ab-1) \Leftrightarrow (ab-1)(9a-b)=0 \end{aligned}$$

$$\circ \quad ab=1 \Leftrightarrow (2x^2-1)(5x-4)=1 \Leftrightarrow 10x^3-8x^2-5x+3=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(10x^2+2x-3)=0 \Rightarrow x=1; x=-\frac{1+\sqrt{31}}{10}; x=\frac{-1+\sqrt{31}}{10}.$$

$$\circ \quad 9a=b \Leftrightarrow 9(2x^2-1)=5x-4 \Leftrightarrow 18x^2-5x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5+\sqrt{385}}{36}; x=\frac{5-\sqrt{385}}{36}.$$

Kết hợp điều kiện ta thu được các nghiệm của bài toán.

Bài toán 153. Giải phương trình $\frac{2x^2-1}{8-3x} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{5x^2-4}{2-x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $\frac{5x^2-4}{2-x} \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{10x^2-5}{8-3x} = \sqrt{\frac{5x^2-4}{2-x}}$.

Đặt $5x^2-4=a; 2-x=b \Rightarrow 10x^2-5=2a+3; 8-3x=3b+2$. Ta thu được

$$\frac{2a+3}{3b+2} = \sqrt{\frac{a}{b}} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2a+3}{3b+2} \geq 0 \\ b(2a+3)^2 = a(3b+2)^2 \end{cases} \quad (*)$$

Chú ý rằng

$$(*) \Leftrightarrow b(4a^2+12a+9) = a(9b^2+12b+4) \Leftrightarrow 4a^2b-9ab^2 = 4a-9b$$

$$\Leftrightarrow ab(4a-9b) = 4a-9b \Leftrightarrow (4a-9b)(ab-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4a=9b \\ ab=1 \end{cases}$$

$$\blacksquare \quad 4a=9b \Leftrightarrow 4(5x^2-4) = 9(2-x) \Leftrightarrow 20x^2+9x-34=0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{-9+\sqrt{2801}}{40}; \frac{-9-\sqrt{2801}}{40} \right\}.$$

$$\blacksquare \quad ab=1 \Leftrightarrow (5x^2-4)(2-x)=1 \Leftrightarrow 5x^3-10x^2-4x+9=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(5x^2-5x-9)=0 \Leftrightarrow x=1; x=\frac{5+\sqrt{205}}{10}; x=\frac{5-\sqrt{205}}{10}.$$

Đối chiếu các điều kiện ta thu được nghiệm của bài toán.

Bài toán 154. Giải bất phương trình $\frac{x^2-x+6}{x+2} \geq 2\sqrt{\frac{x^2-x+2}{x+1}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} \Leftrightarrow x > -1. \\ x \neq -2 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với $(x^2 - x + 6)\sqrt{x + 1} \geq 2(x + 2)\sqrt{x^2 - x + 2}$.

Đặt $\sqrt{x^2 - x + 2} = u; \sqrt{x + 1} = v, (u > 0; v > 0)$ ta thu được

$$\begin{aligned} (u^2 + 4)v &\geq 2(v^2 + 1)u \Leftrightarrow u^2v - 2v^2u \geq 2u - 4v \Leftrightarrow uv(u - 2v) \geq 2(u - 2v) \\ &\Leftrightarrow (uv - 2)(u - 2v) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{u^2v^2 - 4}{uv + 2} \cdot \frac{u^2 - 4v^2}{u + 2v} \geq 0 \Leftrightarrow (u^2v^2 - 4)(u^2 - 4v^2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow [(x^2 - x + 2)(x + 1) - 4][x^2 - x + 2 - 4(x + 1)] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x^3 + x - 2)(x^2 - 5x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2)(x^2 - 5x - 2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 5x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5 + \sqrt{33}}{2} \vee \frac{5 - \sqrt{33}}{2} \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm $S = \left[\frac{5 - \sqrt{33}}{2}; 1 \right] \cup \left[\frac{5 + \sqrt{33}}{2}; +\infty \right)$.

Bài toán 155. Giải phương trình $5\sqrt{\frac{2x^2 + 1}{5x - 2}} = \frac{2x^2 + 13}{4x - 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x > \frac{2}{5}$. Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\frac{2x^2 + 1}{5x - 2}} = \frac{2x^2 + 13}{20x - 5}$.

Đặt $\sqrt{2x^2 + 1} = u; \sqrt{5x - 2} = v, (u > 0; v > 0) \Rightarrow 2x^2 + 13 = u^2 + 12; 5x + 1 = v^2 + 3$. Ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{u}{v} &= \frac{u^2 + 12}{4v^2 + 3} \Leftrightarrow 4uv^2 + 3u = u^2v + 12v \Leftrightarrow 4uv^2 - u^2v + 3u - 12v = 0 \\ &\Leftrightarrow uv(4v - u) + 3(u - 4v) = 0 \Leftrightarrow (uv - 3)(u - 4v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 3 \\ u = 4v \end{cases} \end{aligned}$$

$$\triangleright uv = 3 \Leftrightarrow (2x^2 + 1)(5x - 2) = 1 \Leftrightarrow 10x^3 - 4x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(10x^2 + 6x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\triangleright u = 4v \Leftrightarrow 2x^2 + 1 = 20x - 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 20x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10 + \sqrt{82}}{2}; x = \frac{10 - \sqrt{82}}{2}.$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm $x = 1; x = \frac{10 + \sqrt{82}}{2}; x = \frac{10 - \sqrt{82}}{2}$.

Bài toán 156. Giải phương trình $\frac{3(1 + x^2)}{5x - 2} = 2\sqrt{\frac{3x^2 - 1}{5x - 3}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{3x^2 - 1}{5x - 3} \geq 0$.

Đặt $3x^2 - 1 = u; 5x - 3 = v \Rightarrow 3x^2 + 3 = u + 4; 5x - 2 = v + 1$. Với $\frac{u + 4}{v + 1} \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$\frac{u+4}{v+1} = 2\sqrt{\frac{u}{v}} \Leftrightarrow (u^2 + 8u + 16)v = 4u(v^2 + 2v + 1) \Leftrightarrow u^2v - 4uv^2 = 4u - 16v$$

$$\Leftrightarrow uv(u - 4v) = 4(u - 4v) \Leftrightarrow (uv - 4)(u - 4v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 4 \\ u = 4v \end{cases}$$

$$\checkmark \quad uv = 4 \Leftrightarrow (3x^2 - 1)(5x - 3) = 4 \Leftrightarrow 15x^3 - 9x^2 - 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(15x^2 + 6x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\checkmark \quad u = 4v \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 4(5x - 3) \Leftrightarrow 3x^2 - 20x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10 + \sqrt{67}}{3}; x = \frac{10 - \sqrt{67}}{3}.$$

Đối chiếu điều kiện suy ra phương trình đã cho có các nghiệm $x = 1; x = \frac{10 + \sqrt{67}}{3}; x = \frac{10 - \sqrt{67}}{3}$.

Bài toán 157. Giải phương trình $\frac{x^3 + 14}{2 + x} = 2\sqrt{\frac{x^3 - 3x + 4}{1 + x}} + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \frac{x^3 - 3x + 4}{1 + x} \geq 0 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình đã cho tương đương với } \frac{x^3 + 14}{2 + x} - 3 = 2\sqrt{\frac{x^3 - 3x + 4}{1 + x}} \Leftrightarrow \frac{x^3 - 3x + 8}{2 + x} = 2\sqrt{\frac{x^3 - 3x + 4}{1 + x}} \quad (*).$$

Đặt $x^3 - 3x + 4 = u; 1 + x = v \Rightarrow x^3 - 3x + 8 = u + 4; 2 + x = v + 1$. Với $\frac{u+4}{v+1} \geq 0$ thì (*) trở thành

$$\frac{u+4}{v+1} = 2\sqrt{\frac{u}{v}} \Leftrightarrow (u^2 + 8u + 16)v = 4u(v^2 + 2v + 1) \Leftrightarrow u^2v - 4uv^2 = 4u - 16v$$

$$\Leftrightarrow uv(u - 4v) = 4(u - 4v) \Leftrightarrow (uv - 4)(u - 4v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 4 \\ u = 4v \end{cases}$$

$$\blacksquare \quad uv = 4 \Leftrightarrow (x^3 - 3x + 4)(1 + x) = 4 \Leftrightarrow x^4 + x^3 - 3x^2 + x = 0.$$

$$\Leftrightarrow x(x - 1)(x^2 + 2x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0; x = 1; x = -1 + \sqrt{2}; x = -1 - \sqrt{2}.$$

$$\blacksquare \quad u = 4v \Leftrightarrow x^3 - 3x + 4 = 4(1 + x) \Leftrightarrow x^3 - 7x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -\sqrt{7}; x = \sqrt{7}.$$

Kết hợp các điều kiện ta thu được tập nghiệm $S = \{0; 1; -1 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}; -\sqrt{7}; \sqrt{7}\}$.

Bài toán 158. Giải phương trình $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+15}{x^2-2x+2}} = \frac{x+21}{3(x-1)^2+11} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -15$.

$$\text{Phương trình đã cho tương đương với } \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+15}{x^2-2x+2}} = \frac{x+21}{3x^2-6x+14}.$$

Đặt $x+15 = u; x^2 - 2x + 2 = v \Rightarrow x+21 = u+6; 3x^2 - 6x + 14 = 3v+8$.

Chú ý rằng $x \geq -15 \Rightarrow u+6 > 0; 3v+8 > 0$. Khi đó ta có biến đổi

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} = \frac{u+6}{3v+8} \Leftrightarrow \frac{u}{4v} = \frac{u^2+12u+36}{9v^2+48v+64} \Leftrightarrow 9v^2u+48uv+64u = 4u^2v+48uv+144v$$

$$\Leftrightarrow 9v^2u - 4u^2v = 144v - 64u \Leftrightarrow uv(9v - 4u) = 16(9v - 4u) \Leftrightarrow (uv - 16)(9v - 4u) = 0$$

$$\diamond uv = 16 \Leftrightarrow (x+15)(x^2 - 2x + 2) = 16 \Leftrightarrow x^3 + 13x^2 - 28x + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 14x - 14) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -7 + 3\sqrt{7}; x = -7 - 3\sqrt{7}.$$

$$\diamond 9v = 4u \Leftrightarrow 9(x^2 - 2x + 2) = 4(x+15) \Leftrightarrow 9x^2 - 22x - 42 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11 + \sqrt{499}}{9}; x = \frac{11 - \sqrt{499}}{9}.$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được các nghiệm $x = 1; x = -7 + 3\sqrt{7}; x = -7 - 3\sqrt{7}; x = \frac{11 + \sqrt{499}}{9}; x = \frac{11 - \sqrt{499}}{9}$.

Bài toán 159. Giải phương trình $3\sqrt{\frac{x^2+2}{4x-1}} = \frac{2x^2+13}{8x-1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x > \frac{1}{4}$. Phương trình đã cho tương đương $3\sqrt{\frac{x^2+2}{4x-1}} = \frac{2(x^2+2)+9}{2(4x-1)+1}.$

Đặt $x^2 + 2 = u; 4x - 1 = v, (u > 0; v > 0)$ ta thu được

$$3\sqrt{\frac{u}{v}} = \frac{2u+9}{2v+1} \Rightarrow 9 \cdot \frac{u}{v} = \frac{4u^2+36u+81}{4v^2+4v+1} \Leftrightarrow 36uv^2 + 36uv + 9u = 4u^2v + 36uv + 81v$$

$$\Leftrightarrow 36uv^2 - 4u^2v = 81v - 9u \Leftrightarrow 4uv(9v-u) = 9(9v-u) \Leftrightarrow (4uv-9)(9v-u) = 0$$

$$\circ 4uv = 9 \Leftrightarrow 4(x^2+2)(4x-1) = 9 \Leftrightarrow 16x^3 - 4x^2 + 32x - 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(8x^2+2x+17) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=1 \\ (x+1)^2+7x^2=-16 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$\circ 9v = u \Leftrightarrow 9(4x-1) = x^2+2 \Leftrightarrow x^2-36x+11=0 \Rightarrow x = 18 + \sqrt{313}; x = 18 - \sqrt{313}.$$

Kết hợp điều kiện đi đến đáp số $S = \left\{ \frac{1}{2}; 18 - \sqrt{313}; 18 + \sqrt{313} \right\}.$

Bài toán 160. Giải phương trình $\sqrt{\frac{2x^2-x+4}{9-4x}} = \frac{6x^2-3x+22}{33-8x} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $9 - 4x > 0$.

Đặt $2x^2 - x + 4 = a; 9 - 4x = b, (a > 0; b > 0) \Rightarrow 6x^2 - 3x + 22 = 3a + 10; 33 - 8x = 2b + 15.$

Phương trình đã cho trở thành

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{3a+10}{2b+15} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{9a^2+60a+100}{4b^2+60b+225} \Leftrightarrow 4ab^2 + 60ab + 225a = 9a^2b + 60ab + 100b$$

$$\Leftrightarrow 4ab^2 - 9a^2b + 225a - 100b = 0 \Leftrightarrow ab(4b-9a) + 25(9a-4b) = 0 \Leftrightarrow (ab-25)(9a-4b) = 0$$

$$\checkmark ab = 25 \Leftrightarrow (2x^2 - x + 4)(9 - 4x) = 25 \Leftrightarrow 8x^3 - 22x^2 + 25x - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(8x^2-14x+11) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 8x^2-14x+11=0 \end{cases} \Rightarrow x = 1.$$

$$\checkmark 9a = 4b \Leftrightarrow 9(2x^2 - x + 4) = 4(9 - 4x) \Leftrightarrow 18x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -\frac{7}{18}.$$

Kết hợp các điều kiện đi đến đáp số $S = \left\{ -\frac{7}{18}; 0; 1 \right\}.$

Bài toán 161. Giải phương trình $\sqrt{x+5+\frac{12}{x-1}} = \frac{2(x+2)^2+11}{5x-3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x > 1$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{\frac{x^2+4x+7}{x-1}} = \frac{2x^2+8x+19}{x-1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+4x+7}}{\sqrt{x-1}} = \frac{2(x^2+4x+7)+5}{5(x-1)+2}.$$

Đặt $\sqrt{x^2+4x+7} = u; \sqrt{x-1} = v, (u > 0; v > 0)$ ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{u}{v} &= \frac{2u^2+5}{5v^2+2} \Leftrightarrow 5uv^2+2u = 2vu^2+5v \Leftrightarrow 5uv^2-5v = 2vu^2-2u \\ &\Leftrightarrow 5v(uv-1) = 2u(uv-1) \Leftrightarrow (5v-2u)(uv-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5v = 2u \\ uv = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp

- ✓ $5v = 2u \Leftrightarrow 25(x^2+4x+7) = 4(x-1) \Leftrightarrow 25x^2+96x+179 = 0$ (Vô nghiệm).
- ✓ $uv = 1 \Leftrightarrow (x^2+4x+7)(x-1) = 1 \Leftrightarrow x^3+3x^2+3x = 8 \Leftrightarrow (x+1)^3 = 9 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{9}-1.$

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x = \sqrt[3]{9}-1.$

Bài toán 162. Giải phương trình $\sqrt{\frac{2(x+1)}{2x^2-5x+5}} = \frac{2x+5}{2x^2-5x+8} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq -1.$

Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\frac{2(x+1)}{2x^2-5x+5}} = \frac{2(x+1)+3}{(2x^2-5x+5)+3}.$

Đặt $x+1 = u; 2x^2-5x+5 = v, (u \geq 0; v > 0)$ ta thu được

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2u}{v}} &= \frac{2u+3}{v+3} \Leftrightarrow 2u(v^2+6v+9) = v(4u^2+12u+9) \Leftrightarrow 2uv^2-4vu^2 = 9v-18u \\ &\Leftrightarrow 2uv(v-2u) = 9(v-2u) \Leftrightarrow (v-2u)(2uv-9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2u \\ 2uv = 9 \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp

- $v = 2u \Leftrightarrow 2x^2-5x+5 = 2(x+1) \Leftrightarrow 2x^2-7x+3 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}.$
- $2uv = 9 \Leftrightarrow 2(2x^2-5x+5)(x+1) = 9 \Leftrightarrow 4x^3-6x^2+1 = 0$
 $\Leftrightarrow (2x-1)(2x^2-2x-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{2}; \frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right\}.$

Kết luận phương trình ban đầu có tập nghiệm $S = \left\{\frac{1}{2}; 3; \frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right\}.$

Bài toán 163. Giải phương trình $\sqrt{\frac{3x-2}{2x-1}} = \frac{2(3x-2)\sqrt{2x-1}+1}{2+\sqrt{(2x-1)^3}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{2}{3}$.

Đặt $\sqrt{3x-2} = u; \sqrt{2x-1} = v, (u \geq 0; v > 0)$, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \frac{u}{v} &= \frac{2u^2v+1}{2+v^3} \Leftrightarrow 2u+uv^3 = 2u^2v^2+v \Leftrightarrow 2u-2uv^2 = v-uv^3 \\ &\Leftrightarrow 2u(1-uv^2) = v(1-uv^2) \Leftrightarrow (2u-v)(1-uv^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2u=v \\ uv^2=1 \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp sau

- $2u = v \Leftrightarrow 4(3x-2) = 2x-1 \Leftrightarrow 10x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{10}$.
- $uv^2 = 1 \Leftrightarrow u^2v^4 = 1 \Leftrightarrow (3x-2)(4x^2-4x+1) = 1 \Leftrightarrow 12x^3 - 20x^2 + 11x - 3 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)(12x^2-8x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 12x^2-8x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x = \frac{7}{10}; x = 1$.

Bài toán 164. Giải phương trình $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{x^2-3x+3}{x-2}} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-11} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x > 2$.

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{\sqrt{x^2-3x+3}}{3\sqrt{x-2}} = \frac{x^2-3x+2}{x-11}$.

Đặt $\sqrt{x^2-3x+3} = u; \sqrt{x-2} = v, (u > 0; v > 0)$ ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{u}{3v} &= \frac{u^2-1}{v^2-9} \Leftrightarrow uv^2-9u = 3u^2v-3v \Leftrightarrow uv^2-3u^2v+3v-9u = 0 \\ &\Leftrightarrow uv(v-3u)+3(v-3u) = 0 \Leftrightarrow (uv+3)(v-3u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} uv=-3 \\ v=3u \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp xảy ra

- $uv = -3$ (Vô nghiệm vì $u > 0; v > 0$).
- $v = 3u \Leftrightarrow x-2 = 9(x^2-3x+3) \Leftrightarrow 9x^2-28x+29 = 0$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 165. Giải phương trình $\sqrt{\frac{2x-1}{x}} = \frac{1+\sqrt{(2x-1)^3}}{1+x\sqrt{2x-1}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x}} = \frac{1+\sqrt{(2x-1)^3}}{1+x\sqrt{2x-1}}$.

Đặt $\sqrt{2x-1} = u; \sqrt{x} = v, (u \geq 0; v > 0)$ ta thu được

$$\begin{aligned}\frac{u}{v} &= \frac{u^3+1}{1+uv^2} \Leftrightarrow u+u^2v^2 = u^3v+v \Leftrightarrow u-v+u^2v(v-u)=0 \\ &\Leftrightarrow (u-v)(1-u^2v)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2v=1 \end{cases}\end{aligned}$$

Xét các trường hợp

- $u=v \Leftrightarrow 2x-1=x \Leftrightarrow x=1.$
- $u^2v=1 \Leftrightarrow u^4v^2=1 \Leftrightarrow (4x^2-4x+1)x=1 \Leftrightarrow (x-1)(4x^2+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 4x^2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 166. Giải phương trình $\sqrt{\frac{x}{4x-3}} = \frac{x\sqrt{x}+3}{1+3(4x-3)\sqrt{x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > \frac{3}{4}.$

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x-3}} = \frac{x\sqrt{x}+3}{1+3(4x-3)\sqrt{x}}.$

Đặt $\sqrt{x}=u; \sqrt{4x-3}=v, (u>0, v>0)$ ta thu được

$$\begin{aligned}\frac{u}{v} &= \frac{u^3+3}{1+3v^2u} \Leftrightarrow u+3u^2v^2 = u^3v+3v \Leftrightarrow u-3v+3u^2v^2-u^3v=0 \\ &\Leftrightarrow u-3v+u^2v(3v-u)=0 \Leftrightarrow (u-3v)(1-u^2v)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=3v \\ u^2v=1 \end{cases}\end{aligned}$$

Xét các trường hợp xảy ra

- ❖ $u=3v \Leftrightarrow x=9(4x-3) \Leftrightarrow x=\frac{27}{35}.$
- ❖ $u^2v=1 \Leftrightarrow x\sqrt{4x-3}=1 \Leftrightarrow x^2(4x-3)=1 \Leftrightarrow (x-1)(4x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 4x^2+x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 167. Giải phương trình $\sqrt{\frac{x}{2x^2-1}} = \frac{x\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3(2x^2-1)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Đặt $\sqrt{x}=u; \sqrt{2x^2-1}=v, (u>0; v>0)$, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}\frac{u}{v} &= \frac{u^3+3}{u+3v^2} \Leftrightarrow u^2+3uv^2 = u^3v+3v \Leftrightarrow u^2-3v=uv(u^2-3v) \\ &\Leftrightarrow (u^2-3v)(uv-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} u^2=3v \\ uv=1 \end{cases}\end{aligned}$$

Xét các trường hợp xảy ra

$$\triangleright u^2 = 3v \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2x^2 - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 9(2x^2 - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 17x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{\sqrt{17}}.$$

$$\triangleright uv = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x(2x^2 - 1)} = 1 \Leftrightarrow 2x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x = 1$.

Bài toán 168. Giải phương trình $\sqrt{\frac{2x-1}{3x^2-2}} = \frac{(2x-1)\sqrt{2x-1}+3}{\sqrt{2x-1}+3(3x^2-2)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Đặt $\sqrt{2x-1} = u; \sqrt{3x^2-2} = v, (u \geq 0; v > 0)$, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \frac{u}{v} &= \frac{u^3+3}{u+3v^2} \Leftrightarrow u^2+3uv^2 = u^3v+3v \Leftrightarrow u^2-3v = uv(u^2-3v) \\ &\Leftrightarrow (u^2-3v)(uv-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 = 3v \\ uv = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp xảy ra

- $u^2 = 3v \Leftrightarrow 2x-1 = 3\sqrt{3x^2-2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 1 \\ 4x^2-4x+1 = 9(3x^2-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 1 \\ 23x^2+4x-19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{19}{23}.$
- $uv = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)(3x^2-2)} = 1 \Leftrightarrow 6x^3-3x^2-4x+1 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)(6x^2+3x-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-3+\sqrt{33}}{12}; \frac{-3-\sqrt{33}}{12}\right\}.$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x = 1; x = \frac{19}{23}$.

Bài toán 169. Giải phương trình $2\sqrt{\frac{x^2+1}{3x-1}} = \frac{4\sqrt{3x-1}+3(x^2+1)}{(3x-1)\sqrt{3x-1}+3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x > \frac{1}{3}$.

Đặt $\sqrt{3x-1} = u, \sqrt{x^2+1} = v, (u > 0; v > 0)$. Phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned} \frac{2v}{u} &= \frac{4u+3v^2}{u^3+3} \Leftrightarrow 2vu^3+6v = 4u^2+3v^2u \Leftrightarrow 2u^2(uv-2) = 3v(uv-2) \\ &\Leftrightarrow (2u^2-3v)(uv-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2u^2 = 3v \\ uv = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Xét các trường hợp xảy ra

- ❖ $2u^2 = 3v \Leftrightarrow 2(3x-1) = 3\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 1 \\ 36x^2-24x+4 = 9x^2+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 1 \\ 27x^2-24x-5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{12+3\sqrt{31}}{27}.$
- ❖ $uv = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x^2+1)(3x-1)} = 2 \Leftrightarrow 3x^3-x^2+3x-5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2+2x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Đối chiếu điều kiện ta thu được nghiệm $x = 1; x = \frac{12 + 3\sqrt{31}}{27}$.

Bài toán 170. Giải phương trình $\frac{2x-1}{2\sqrt{2-x^2}} = \frac{2x^2-2x+1}{3-x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{2x-1}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{4x^2-4x+2}{3-x^2}$.

Đặt $2x-1=u; \sqrt{2-x^2}=v, v>0$ ta thu được

$$\begin{aligned} \frac{u}{v} &= \frac{u^2+1}{v^2+1} \Leftrightarrow uv^2+u=u^2v+v \Leftrightarrow uv^2-u^2v+u-v=0 \\ &\Leftrightarrow uv(v-u)+u-v=0 \Leftrightarrow (uv-1)(u-v)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} uv=1 \\ u=v \end{cases} \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad u=v \Leftrightarrow 2x-1=\sqrt{2-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 1 \\ 4x^2-4x+1=2-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 1 \\ 5x^2-4x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad uv=1 &\Leftrightarrow (2x-1)\sqrt{2-x^2}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 1 \\ (4x^2-4x+1)(x^2-2)+1=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 1 \\ 4x^4-4x^3-7x^2+8x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ (x-1)(4x^3-7x+1)=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Chú ý rằng phương trình $4x^3-7x+1=0$ có duy nhất một nghiệm α thỏa mãn $\alpha > \frac{1}{2}$.

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm $x=1; x=\alpha$.

Lưu ý: Quá trình tìm nghiệm α trong bài toán 170 cần sử dụng công thức nghiệm rất phức tạp, nó vượt qua khuôn khổ của bài toán nhỏ này, tác giả xin trình bày tại chuyên mục phương trình đại số bậc cao.

Bài toán 171. Giải phương trình $\frac{3x^2}{3+\sqrt{x}} + 6 + 2\sqrt{x} = 5x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \geq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{3x^2}{3+\sqrt{x}} + 2(3+\sqrt{x}) = 5x \Leftrightarrow \frac{3x^2}{(3+\sqrt{x})^2} + 2 = \frac{5x}{3+\sqrt{x}}$.

$$\text{Đặt } \frac{x}{3+\sqrt{x}} = t, t \geq 0 \text{ thu được } 3t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(3t-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=\sqrt{x} & (1) \\ 3x-6=2\sqrt{x} & (2) \end{cases}$$

$$\diamond (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2-6x+9=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2-7x+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7+\sqrt{13}}{2}.$$

$$\diamond (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 9x^2-36x+36=4x \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{20+2\sqrt{19}}{9}.$$

Đối chiếu điều kiện ta có hai nghiệm $x = \frac{20+2\sqrt{19}}{9}; x = \frac{7+\sqrt{13}}{2}$.

Bài toán 172. Giải phương trình $\frac{x^2}{4-3\sqrt{x}} + 8 = 3(x+2\sqrt{x}) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $0 \leq x \neq \frac{16}{9}$.

Phương trình đã cho tương đương với $\frac{x^2}{4-3\sqrt{x}} = 3x - 2(4-3\sqrt{x}) \Leftrightarrow \frac{x^2}{(4-3\sqrt{x})^2} = \frac{3x}{4-3\sqrt{x}} - 2$.

Đặt $\frac{x}{4-3\sqrt{x}} = t$ ta thu được $t^2 = 3t - 2 \Leftrightarrow (t-1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-3\sqrt{x} & (1) \\ x=2(4-3\sqrt{x}) & (2) \end{cases}$

Xét các trường hợp

- (1) $\Leftrightarrow 4-x=3\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ x^2-8x+16=9x \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.
- (2) $\Leftrightarrow 8-x=6\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 8 \\ x^2-16x+64=36x \end{cases} \Leftrightarrow x=26-6\sqrt{17}$.

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x=1; x=26-6\sqrt{17}$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình và bất phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $\sqrt{\frac{x+3}{x^2+2x+4}} = \frac{x+4}{x^2+2x+5}.$

2. $2\sqrt{\frac{x}{2x^2+3}} = \frac{x+1}{x^2+2}.$

3. $\sqrt{\frac{x}{2x^2-1}} \leq \frac{4x+1}{2x^2+3}.$

4. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2x+5}{2x^2+3x+1}} = \frac{x+3}{2x^2+3x+2}.$

5. $\sqrt{\frac{2-x}{x^2+3x+6}} = \frac{4-x}{x^2+3x+8}.$

6. $\sqrt{\frac{3-2x^2}{2-x}} > \frac{13-8x^2}{6-x}.$

7. $\sqrt{\frac{x}{x^2+x+4}} = \frac{x+5}{x^2+x+9}.$

8. $\sqrt{\frac{4-3x^2}{5-4x}} \leq \frac{17-12x^2}{9-4x}.$

9. $\sqrt{\frac{x+1}{2x^2+x+1}} = \frac{x+5}{2x^2+x+5}.$

10. $\sqrt{\frac{x-1}{x^2-5x+6}} = \frac{x+1}{x^2-5x+8}.$

11. $\sqrt{\frac{7x-6}{7x^2-6}} \geq \frac{35x-18}{21x^2+2}.$

12. $\sqrt{x+\frac{5}{x}} = \frac{x^2+9}{x+4}.$

13. $\sqrt{\frac{9-5x^2}{9-5x}} > \frac{57-25x^2}{47-15x}.$

14. $\sqrt{x+\frac{2}{x}}+3 = \frac{x^2+3x+4}{x+2}.$

15. $2\sqrt{\frac{x^2+7}{2x}}+1 = x+1+\frac{8}{x+1}.$

16. $3\sqrt{\frac{2x^2+4x-3}{x+2}} < \frac{2x^2+4x+6}{x+3}.$

17. $\sqrt{2x+\frac{6}{x}}+1 = \frac{2x^2}{x+3}+1.$

18. $\sqrt{x+3+\frac{1}{x+2}} = x+2+\frac{2}{x+3}.$

19. $2\sqrt{\frac{5x^2+1}{5x+1}} < \frac{x^2+5}{2x+1}.$

$$20. \sqrt{x+1-\frac{2}{x+3}} = \frac{(1+x)(3+x)}{x+5}.$$

$$21. \sqrt{\frac{4x^2+x+1}{2x+1}} = \frac{4x^2+x+3}{2x+3}.$$

$$22. 6\sqrt{\frac{3x^2-x+1}{2x+1}} > \frac{3x^2-x+10}{x+1}.$$

$$23. \sqrt{\frac{2x-1}{x^2+3x-3}} = \frac{4x-1}{x^2+3x-1}.$$

$$24. 3\sqrt{\frac{5x-2}{7x^2-4}} < \frac{5x+7}{7x^2-3}.$$

$$25. \sqrt{\frac{x-1}{2x^2+x-2}} = \frac{2x-1}{x(2x+1)}.$$

$$26. 3\sqrt{\frac{7x^2-4}{7x-4}} \geq \frac{7x^2+5}{7x-3}.$$

$$27. 3\sqrt{\frac{x-3}{3x^2+3x-5}} = \frac{2x-5}{x^2+x-1}.$$

$$28. 2\sqrt{\frac{5x-2}{2x^2-x+2}} = \frac{15x+2}{2x^2-x+8}.$$

$$29. \frac{8x+41}{10x^2+39} \leq \sqrt{\frac{4x+3}{2x^2+5}}.$$

$$30. 3\sqrt{\frac{x+2}{2x^2-x+2}} = \frac{2x+13}{2x^2-x+4}.$$

$$31. 3\sqrt{\frac{5x^2-1}{5x-1}} < x + \frac{4}{5x}.$$

$$32. 3\sqrt{\frac{x}{2x^2+x+6}} = \frac{2x+9}{2x^2+x+8}.$$

$$33. 3\sqrt{\frac{x^2+5x-3}{2x+1}} = \frac{2x^2+10x+3}{2x+3}.$$

$$34. 2\sqrt{\frac{3x+1}{3x^2-2x+3}} > \frac{9x+11}{3x^2-2x+9}.$$

$$35. 10\sqrt{\frac{x^2+4x-1}{5x-1}} = \frac{3x^2+12x+5}{x+1}.$$

$$36. \frac{8x+41}{25x^2+24} > \sqrt{\frac{4x+3}{5x^2+2}}.$$

$$37. \frac{3}{2}\sqrt{\frac{2x+1}{x^2+3x-1}} = \frac{5x+7}{x^2+3x+4}.$$

$$38. \frac{3}{4}\sqrt{\frac{4x-1}{3x^2+4x-4}} \leq \frac{5x+1}{(x+1)(3x+1)}.$$

$$39. 3\sqrt{\frac{5x^2-x-1}{3x}} \leq \frac{25x^2-5x+4}{3x+5}.$$

$$40. 2\sqrt{\frac{x^2+4x-3}{x+1}} = \frac{7x^2+28x-17}{x+8}.$$

$$41. 6\sqrt{\frac{3x^2+4x-5}{3x-1}} > \frac{21x^2+28x-31}{x+2}.$$

$$42. 2\sqrt{x-\frac{2}{x}}+5 = \frac{7x^2+35x-10}{7+x}.$$

$$43. 5\sqrt{\frac{3x+2}{x^2+7x-3}} = \frac{29+6x}{x^2+7x-1}.$$

$$44. \sqrt{\frac{4+x}{6x^2+x-2}} < \frac{2x+33}{5x(1+6x)}.$$

$$45. \sqrt{\frac{6-x}{x^2-x+5}} + \frac{2x-37}{x^2-x+7} = 0.$$

$$46. \sqrt{\frac{5x-1}{2x^2+5x-3}} > \frac{15x+17}{10x^2+25x-3}.$$

$$47. \sqrt{\frac{7x-3}{4x^2+7x-7}} = \frac{21x+11}{20x^2+35x-23}.$$

$$48. \sqrt{\frac{7-3x}{3x^2+2x-1}} = \frac{41-9x}{15x^2+10x+7}.$$

$$49. 3\sqrt{\frac{4-x}{x^2+10x-8}} \geq \frac{35-2x}{3x^2+30x-22}.$$

$$50. 3\sqrt{\frac{5-2x}{x^2+8x-6}} = \frac{-4x+37}{3x^2+24x-16}.$$

$$51. \sqrt{\frac{3x}{7x^2+x-5}} = \frac{2x+9}{21x^2+3x-13}.$$

$$52. \frac{1}{4}\sqrt{\frac{4x+3}{3x^2+4x}} \geq \frac{4+3x}{3x^2+4x+21}.$$

$$53. \frac{1}{18x^2+6x+4}\sqrt{\frac{6x^2+2x-1}{5x+2}} = \frac{1}{5x+23}.$$

$$54. \sqrt{\frac{x^2+6}{x+6}} \leq \frac{3x^2+25}{x+27}.$$

$$55. 2\sqrt{\frac{5x^2+2}{2x+5}} < \frac{15x^2+13}{x+13}.$$

$$56. 2\sqrt{\frac{7x-1}{x^2+6x-1}} = \frac{7x+23}{2x^2+12x+1}.$$

$$57. \frac{2}{5}\sqrt{\frac{5x+1}{x^2+5x}} \geq \frac{x+5}{2x^2+10x+3}.$$

$$58. 2\sqrt{\frac{7-x}{7-x^2}} = \frac{31-x}{17-2x^2}.$$

$$59. \sqrt{\frac{5-x^2}{5-x}} > \frac{37-5x^2}{35-3x}.$$

$$60. \sqrt{\frac{6-x-x^2}{6-2x}} = \frac{42-5x-5x^2}{38-6x}.$$

$$61. (3x+29)\sqrt{\frac{x^2+3}{x+3}} \leq 5x^2+27.$$

$$62. \sqrt{\frac{x^2+x+2}{3x+1}} < \frac{5x^2+5x+22}{9x+23}.$$

$$63. \sqrt{\frac{x^2+6x-3}{7x-3}} = \frac{5x^2+30x-3}{21x+11}.$$

$$64. (3x^2-x+3)\sqrt{\frac{3x-2}{3x^2-x-1}}+7=12x.$$

$$65. \frac{2x-9}{4x^2-2x+3} + \sqrt{\frac{2-x}{4x^2-2x-1}} \leq 0.$$

$$66. \frac{16x-21}{3x^2+3x-1} + \sqrt{\frac{5-4x}{3x^2+3x-5}} = 0.$$

$$67. \frac{1}{3}\sqrt{\frac{6-x}{6-x^2}} + \frac{17-x}{7x^2-57} > 0.$$

$$68. \sqrt{\frac{7-2x}{7-2x^2}} = \frac{56-6x}{64-14x^2}.$$

$$69. (7x+43)\sqrt{\frac{4+x^2}{4+x}} = 3x^2+47.$$

$$70. 2(7x+18) \geq \frac{9x^2+41}{\sqrt{\frac{2+3x^2}{3+2x}}}.$$

$$71. 2\sqrt{\frac{x^2+1}{5x-3}} = \frac{3x^2+20x-9}{(5x-3)\sqrt{5x-3}+3}.$$

$$72. \sqrt{\frac{3x-2}{2-x}} = \frac{\sqrt{(3x-2)^3+1}}{(2-x)\sqrt{3x-2}+1}.$$

$$73. \sqrt{\frac{2-x}{2-x^2}} = \frac{\sqrt{(2-x)^3+1}}{(2-x^2)\sqrt{2-x}+1}.$$

$$74. \frac{2x^2}{1-\sqrt{x}} = 5x-3(1-\sqrt{x}).$$

$$75. \sqrt{\frac{4-3x}{4-3x^2}} = \frac{\sqrt{(4-3x)^3+1}}{(4-3x^2)\sqrt{4-3x}+1}.$$

$$76. \frac{4x^2}{1-\sqrt{x+1}}+3=7x+3\sqrt{x+1}.$$

$$77. \frac{2x^2}{3-\sqrt{x}}=9x-7(3-\sqrt{x}).$$

$$78. \frac{4x^2}{4-2\sqrt{x}} + 4 = 2\sqrt{x} + 5x.$$

$$79. \sqrt{\frac{4-3x}{5-4x^2}} = \frac{2(4-3x)\sqrt{4-3x}+3}{3(5-4x^2)\sqrt{4-3x}+2}.$$

$$80. \frac{6x^2}{3-2\sqrt{x}} + 3 - 2\sqrt{x} = 7x.$$

$$81. \sqrt{\frac{2-x^2}{3-2x}} = \frac{(2-x^2)\sqrt{3-2x}+1}{2\sqrt{(3-2x)^3}+1}.$$

$$82. \sqrt{\frac{3-2x^2}{3-2x}} = \frac{(3-2x^2)\sqrt{3-2x}+1}{1+2\sqrt{(3-2x)^3}}.$$

$$83. \sqrt{\frac{5x^2-2x-2}{2x-1}} \leq \frac{10x^2-4x-1}{6x-1}.$$

$$84. \sqrt{\frac{2-x}{7-6x^2}} = \frac{3+2(2-x)\sqrt{2-x}}{2+3(7-6x^2)\sqrt{7-6x^2}}.$$

$$85. \frac{(3x-2)\sqrt{3x-2}+1}{3x^2-2+\sqrt{3x-2}} = \sqrt{\frac{3x-2}{3x^2-2}}.$$

$$86. \sqrt{4x-\frac{2}{x}}-1 < \frac{8x^2-2x-1}{3x+2}.$$

$$87. \frac{1}{\sqrt{2x-1}} = \frac{(2x^2-1)\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x^2-1}+(2x^2-1)\sqrt{(2x-1)^3}}.$$

$$88. \sqrt{3x-\frac{2}{x}} \leq \frac{3x^2+1}{3x+1}.$$

$$89. \frac{1}{2}\sqrt{2x-\frac{1}{x}} > \frac{x^2+1}{3x+1}.$$

$$90. \sqrt{\frac{x^2+x-1}{2x^2+3x-4}} = \frac{3(x^2+x-1)\sqrt{x^2+x-1}+4}{4(2x^2+3x-4)\sqrt{x^2+x-1}+3}.$$

$$91. \sqrt{x-\frac{3}{x}}+3 \leq \frac{2x^2+6x-3}{3x+2}.$$

$$92. \sqrt{\frac{3x-2}{2x^2+x-2}} = \frac{3(3x-2)\sqrt{3x-2}+4}{4(2x^2+x-2)\sqrt{3x-2}+3}.$$

$$93. \sqrt{\frac{2x-1}{3x^2+x-3}} \leq \frac{3(2x-1)\sqrt{2x-1}+4}{3+4(3x^2+x-3)\sqrt{2x-1}}.$$

III. MỘT SỐ TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 8.*
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
2. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 9.*
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
3. *Nâng cao và phát triển toán 8, tập 1 – tập 2.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
4. *Nâng cao và phát triển toán 9, tập 1 – tập 2.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
5. *Toán nâng cao Đại số 10.*
Nguyễn Huy Đoan; NXB Giáo dục Việt Nam; 1999.
6. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Đại số 10.*
Nguyễn Huy Đoan; Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2006.
7. *Tài liệu chuyên toán: Đại số 10 – Bài tập Đại số 10.*
Đoàn Quỳnh – Doãn Minh Cường – Trần Nam Dũng – Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2010.
8. *Một số chuyên đề Đại số bồi dưỡng học sinh giỏi THPT.*
Nguyễn Văn Mậu – Nguyễn Văn Tiến và một số tác giả; NXB Giáo dục Việt Nam; 2009.
9. *Tuyển tập các bài toán hay và khó Đại số 9.*
Nguyễn Đức Tấn – Đặng Đức Trọng – Nguyễn Cao Huynh – Vũ Minh Nghĩa – Bùi Ruy Tân – Lương Anh Văn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
10. *Một số phương pháp chọn lọc giải các bài toán sơ cấp, tập 1 – tập 3.*
Phan Đức Chính – Phạm Văn Điều – Đỗ Văn Hà – Phạm Văn Hạp – Phạm Văn Hùng – Phạm Đăng Long – Nguyễn Văn Mậu – Đỗ Thanh Sơn – Lê Đình Thịnh; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 1997.
11. *Bài giảng chuyên sâu Toán THPT: Giải toán Đại số 10.*
Lê Hồng Đức – Nhóm Cụ Môn; NXB Hà Nội; 2011.
12. *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình.*
Nguyễn Văn Mậu; NXB Giáo dục Việt Nam; 1994.
13. *Toán bồi dưỡng học sinh phổ thông trung học – quyển 1; Đại số.*
Hàn Liên Hải – Phan Huy Khải – Đào Ngọc Nam – Nguyễn Đạo Phương – Lê Tất Tôn – Đặng Quan Viễn; NXB Hà Nội; 1991.
14. *Phương trình và hệ phương trình không mẫu mực.*
Nguyễn Đức Tấn – Phan Ngọc Thảo; NXB Giáo dục Việt Nam; 1996.
15. *Chuyên đề bồi dưỡng Toán cấp ba; Đại số.*
Nguyễn Sinh Nguyên; NXB Đà Nẵng; 1997.
16. *Giải toán Đại số sơ cấp (Dùng cho học sinh 12 chuyên, luyện thi đại học).*
Trần Thành Minh – Vũ Thiện Căn – Võ Anh Dũng; NXB Giáo dục Việt Nam; 1995.
17. *Những dạng toán điển hình trong các kỳ thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng; Tập 3.*
Bùi Quang Trường; NXB Hà Nội; 2002.
18. *Ôn luyện thi môn Toán THPT theo chủ đề; Tập một: Đại số và lượng giác.*
Cung Thế Anh; NXB Giáo dục Việt Nam; 2011.
19. *Phương pháp giải toán trọng tâm.*
Phan Huy Khải; NXB Đại học Sư phạm; 2011.
20. *Các bài giảng luyện thi môn Toán; Tập 2.*
Phan Đức Chính – Vũ Dương Thụy – Đào Tam – Lê Thống Nhất; NXB Giáo dục Việt Nam; 1993.
21. *Hệ phương trình và phương trình chứa căn thức.*
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2006.

22. **Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT Chuyên trực thuộc đại học và THPT Chuyên các tỉnh thành.**
23. **Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT hệ đại trà các địa phương trên toàn quốc.**
24. **Đề thi học sinh giỏi môn toán khối 8 đến khối 12 các cấp.**
25. **Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán (chính thức – dự bị) qua các thời kỳ.**
26. **Đề thi Olympic 30 tháng 4 Toán học khối 10, khối 11 các tỉnh miền Trung và Nam bộ (1995 – 2013).**
27. **Các tạp chí toán học:** Tạp chí Toán học và tuổi trẻ; Tạp chí Toán tuổi thơ 2 THCS; Tạp chí Kvant...
28. **Các diễn đàn toán học:** Boxmath.vn; Math.net.vn; Mathscope.org; Onluyentoan.vn; Diendantoanhoc.net; Math.net.vn; K2pi.net; Mathlink.ro;...
29. **Một số trang mạng học tập thông qua facebook; twiter;...**



**THÂN THỂ TẠI NGỤC TRUNG
TINH THẦN TẠI NGỤC NGOẠI
DỤC THÀNH ĐẠI SỰ NGHIỆP
TINH THẦN CẢNH YẾU ĐẠI**

TÀI LIỆU CHÍNH THỨC

TÀI LIỆU THAM KHẢO TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

$$\Sigma \sqrt{xyz}$$

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

LÝ THUYẾT SỬ DỤNG ẨN PHỤ CĂN THỨC (PHẦN 9)

TRUNG ĐOÀN TRẦN KHÁT CHÂN – QUÂN ĐOÀN BỘ BINH

CHỦ ĐẠO: SỬ DỤNG HAI HAY NHIỀU ẨN PHỤ
QUY VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH (PHẦN THỨ 2)

- ĐẶT ẨN PHỤ QUY VỀ HỆ ĐỐI XỨNG – GẦN ĐỐI XỨNG (TIẾP THEO).
- BÀI TOÁN NHIỀU CÁCH GIẢI.

CREATED BY GIANG SƠN (FACEBOOK); XYZ1431988@GMAIL.COM (GMAIL)

THỦ ĐÔ HÀ NỘI – MÙA XUÂN 2015

“Non sông Việt Nam có trở nên tươi đẹp hay không, dân tộc Việt Nam có bước tới đài vinh quang để sánh vai với các cường quốc năm châu được hay không, chính là nhờ một phần lớn ở công học tập của các em”

(Trích thư Chủ tịch Hồ Chí Minh).



*“Những chàng trai sống chết trận này ơi
Máu đổ xuống ông trời tuôn nước mắt,
Ôn nhớ mãi thân người đi giữ đất,
Người trở về ăn, sống, ở ra sao...”*

[Bình độ 400 – Nguyễn Mạnh Hùng; 1981].

CHUYÊN ĐỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH**LÝ THUYẾT SỬ DỤNG ẮN PHỤ CĂN THỨC (PHẦN 9)****TRUNG ĐOÀN TRẦN KHÁT CHÂN – QUÂN ĐOÀN BỘ BINH**

Trong chương trình Toán học phổ thông nước ta, cụ thể là chương trình Đại số, phương trình và bất phương trình là một nội dung quan trọng, phổ biến trên nhiều dạng toán xuyên suốt các cấp học, cũng là bộ phận thường thấy trong các kỳ thi kiểm tra chất lượng học kỳ, thi tuyển sinh lớp 10 THPT, thi học sinh giỏi môn Toán các cấp và kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng với hình thức hết sức phong phú, đa dạng. Mặc dù đây là một đề tài quen thuộc, chính thống nhưng không vì thế mà giảm đi phần thú vị, nhiều bài toán cơ bản tăng dần đến mức khó thậm chí rất khó, với các biến đổi đẹp kết hợp nhiều kiến thức, kỹ năng vẫn làm khó nhiều bạn học sinh THCS, THPT. Ngoài phương trình đại số bậc cao, phương trình phân thức hữu tỷ thì phương trình chứa căn (còn gọi là phương trình vô tỷ) đang được đông đảo các bạn học sinh, các thầy cô giáo và các chuyên gia Toán phổ thông quan tâm sâu sắc. Chương trình Toán Đại số lớp 9 THCS bước đầu giới thiệu các phép toán với căn thức, kể từ đó căn thức xuất hiện hầu hết trong các vấn đề đại số, hình học, lượng giác và chạy dọc chiều dài chương trình Toán THPT. Sự đa dạng về hình thức của lớp bài toán căn thức đặt ra yêu cầu cấp thiết là làm thế nào để đơn giản hóa, thực tế các phương pháp giải, kỹ năng, mẹo mực đã hình thành, đi vào hệ thống. Về cơ bản để làm việc với lớp phương trình, bất phương trình vô tỷ chúng ta ưu tiên khử hoặc giảm các căn thức phức tạp của bài toán.

Phép sử dụng ắnn phụ là một trong những phương pháp cơ bản nhằm mục đích đó, ngoài ra bài toán còn trở nên gọn gàng, sáng sủa và giúp chúng ta định hình hướng đi một cách ổn định nhất. Đôi khi đây cũng là phương pháp tối ưu cho nhiều bài toán công kênh. Tiếp theo lý thuyết sử dụng ắnn phụ căn thức (các phần 1 đến 8), phần 9 mang tính kế thừa và phát huy với phương châm chủ đạo là dùng hai ắnn phụ đưa phương trình cho trước về hệ phương trình, bao gồm hệ cơ bản, hệ đối xứng và gần đối xứng (tiếp theo), xoay quanh các bài toán với căn bậc ba. Đây vẫn là một trong những phương án hữu tỷ hóa phương trình chứa căn, giảm thiểu đại bộ phận sự công kênh và sai sót trong tính toán. Kỹ năng này đồng hành cùng việc giải hệ phương trình hữu tỷ đồng bậc – đẳng cấp, hệ phương trình chứa căn quy về đẳng cấp, ngày một nâng cao kỹ năng giải phương trình – hệ phương trình cho các bạn học sinh.

Lý do tài liệu có sử dụng kiến thức về hệ phương trình nên đòi hỏi một nền tảng nhất định của các bạn đọc, thiết nghĩ nó phù hợp với các bạn học sinh lớp 9 THCS ôn thi vào lớp 10 THPT đại trà, lớp 10 hệ THPT Chuyên, các bạn chuẩn bị bước vào các kỳ thi học sinh giỏi Toán các cấp và dự thi kỳ thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán trên toàn quốc, cao hơn là tài liệu tham khảo dành cho các thầy cô giáo và các bạn trẻ yêu Toán khác.

I. KIẾN THỨC – KỸ NĂNG CHUẨN BỊ

1. Nắm vững các phép biến đổi đại số cơ bản (nhân, chia đa thức, phân tích đa thức thành nhân tử, biến đổi phân thức đại số và căn thức).
2. Kỹ năng biến đổi tương đương, nâng lũy thừa, phân tích hằng đẳng thức, thêm bớt.
3. Nắm vững lý thuyết bất phương trình, dấu nhị thức bậc nhất, dấu tam thức bậc hai.
4. Nắm vững kiến thức về đa thức đồng bậc, các thao tác cơ bản với phương trình một ắnn phụ.
5. Bước đầu thực hành giải và biện luận các bài toán phương trình bậc hai, bậc cao với tham số, giải hệ phương trình bằng phương pháp thế, phương pháp cộng đại số, giải hệ phương trình đối xứng loại 1, loại 2; hệ phương trình đồng bậc; hệ phương trình đa ắnn.
6. Sử dụng thành thạo các ký hiệu logic trong phạm vi toán phổ thông.

II. MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH VÀ KINH NGHIỆM THAO TÁC

Bài toán 1. Giải phương trình $x^3 - 6 = \sqrt[3]{x+6} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt[3]{x+6} = y \Rightarrow y^3 = x+6$. Phương trình đã cho trở thành $x^3 - 6 = y$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3 = x+6 \\ x^3 = y+6 \end{cases} \Rightarrow y^3 - x^3 = x - y \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad x = y \Rightarrow x^3 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 + 2x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2.$$

$$\bullet \quad x^2 + xy + y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -1 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + x = x + 6 + \sqrt[3]{x+6} \quad (1)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t; t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = f(\sqrt[3]{x+6}) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x+6} \Leftrightarrow x^3 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 3) = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + x = x + 6 + \sqrt[3]{x+6}$

$$\text{Đặt } \sqrt[3]{x+6} = t \text{ thu được phương trình } x^3 + x = t^3 + t \Leftrightarrow (x-t)(x^2 + xt + t^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ x^2 + xt + t^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad x = t \Rightarrow x^3 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 + 2x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2.$$

$$\bullet \quad x^2 + xt + t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}t\right)^2 + \frac{3}{4}t^2 = -1.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Nhận xét.

- Phương trình ban đầu có chứa căn thức bậc ba, lời giải 1 sử dụng ắnn phụ đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2 bậc ba. Dạng tổng quát của bài toán $(mx+n)^3 + b = a\sqrt[3]{a(mx+n)-b}$ trong đó các biểu thức vẫn thuộc dạng đơn giản, cụ thể là $a=1; b=-6; mx+n \equiv x$.
- Lời giải 2 và 3 có cùng ý tưởng, tuy nhiên cách trình bày và kiến thức sử dụng khác nhau. Với phép đặt ắnn phụ $\sqrt[3]{x+6} = t$ lời giải 3 sử dụng biến đổi hằng đẳng thức thuần túy để phân tích đa thức thành nhân tử, hệ quả cho ta hai trường hợp rất đẹp, trong đó có một trường hợp vô nghiệm. Lời giải 2 rất độc đáo, ngắn gọn và đầy bất ngờ, có sử dụng kiến thức đạo hàm và tính đơn điệu hàm số thuộc phạm vi chương trình giải tích lớp 11 – 12 THPT, hoặc có thể chỉ sử dụng kiến thức hàm số lớp 9 THCS. Về vấn đề này, tác giả xin trình bày tại Lý thuyết sử dụng đánh giá – bất đẳng thức – hàm số.

Bài toán 2. Giải phương trình $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt[3]{2x-1} = y \Rightarrow 2x-1 = y^3 \Leftrightarrow y^3 + 1 = 2x$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = 2y - 2x \Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0.$$

Xét hai trường hợp

- $x = y \Rightarrow x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.
- $x^2 + xy + y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -2$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + 2x = 2x - 1 + 2\sqrt[3]{2x-1}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ liên tục, đồng biến.

Khi đó (1) trở thành $f(x) = f(\sqrt[3]{2x-1}) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2x-1}$

$$\Rightarrow x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + 2x = 2x - 1 + 2\sqrt[3]{2x-1}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t; t \in \mathbb{R}$.

Với $t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}; t_1 \neq t_2$ ta có

$$\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{t_1^3 - t_2^3 + 2(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{(t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2 + 2)}{t_1 - t_2} = \left(t_1 + \frac{1}{2}t_2\right)^2 + \frac{3}{4}t_2^2 + 2 > 0, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Do đó hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó (1) trở thành $f(x) = f(\sqrt[3]{2x-1})$.

Nếu $x > \sqrt[3]{2x-1} \Rightarrow f(x) > f(\sqrt[3]{2x-1})$ và nếu $x < \sqrt[3]{2x-1} \Rightarrow f(x) < f(\sqrt[3]{2x-1})$.

Nếu $x = \sqrt[3]{2x-1} \Rightarrow f(x) = f(\sqrt[3]{2x-1})$.

$$\text{Suy ra } x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Nhận xét.

Lời giải 3 sử dụng kiến thức hàm số bậc trung học cơ sở, kèm theo đánh giá cơ bản. Lưu ý lớp 9 THCS các em học sinh chưa được học đạo hàm nên thao tác chứng minh tính đơn điệu hàm số bắt buộc phải làm theo định nghĩa, đảm bảo nội dung bám sát chương trình sách giáo khoa, nâng cao năng lực. Đôi khi chúng ta vô tình làm mất đi những tư duy đột phá, thân thương bằng cách lạm dụng những công cụ mạnh, những thứ mang tính “mới lạ” chưa xứng với tầm với thực tế. Tuổi nhỏ làm việc nhỏ, tùy theo sức của mình!

Bài toán 3. Giải phương trình $x = \sqrt[3]{2+3\sqrt[3]{2+3x}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 = 2 + 3\sqrt[3]{2+3x}$ (*)

Đặt $\sqrt[3]{2+3x} = y \Rightarrow 2+3x = y^3$. Phương trình (*) trở thành $x^3 = 2+3y$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2+3x = y^3 \\ 2+3y = x^3 \end{cases} \Rightarrow 3x-3y = y^3-x^3 \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2+xy+y^2+3 = 0 \end{cases}$$

- $x = y \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 2\}$.
- $x^2 + xy + y^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -3$ (Vô nghiệm).

Thử lại các giá trị đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-1; 2\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 = 2 + 3\sqrt[3]{2+3x} \Leftrightarrow x^3 + 3x = 2 + 3x + 3\sqrt[3]{2+3x}$ (*)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t; t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$(*) \Leftrightarrow f(x) = f(\sqrt[3]{2+3x}) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2+3x} \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 2\}.$$

Thử lại các giá trị đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-1; 2\}$.

Bài toán 4. Giải phương trình $x^3 + x + 5 = 7\sqrt[3]{6x-5}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + (x+5) = 7\sqrt[3]{7x-(x+5)}$.

Đặt $x+5 = t$ thu được phương trình $x^3 + t = 7\sqrt[3]{7x-t}$ (*)

Đặt $\sqrt[3]{7x-t} = y \Rightarrow 7x-t = y^3$. Phương trình (*) trở thành $x^3 + t = 7y$.

Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + t = 7y \\ y^3 + t = 7x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = 7y - 7x \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2+7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2+xy+y^2+7 = 0 \end{cases}$$

- $x = y \Rightarrow x^3 + x + 5 = 7x \Leftrightarrow x^3 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-5) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-1+\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right\}$.
- $x^2 + xy + y^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -7$ (Vô nghiệm).

Thử lại các giá trị đều thỏa mãn phương trình ban đầu.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{1; \frac{-1+\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + 7x = 6x - 5 + 7\sqrt[3]{6x-5}$ (*).

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 7t; t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 3t^2 + 7 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$(*) \Leftrightarrow f(x) = f(\sqrt[3]{6x-5}) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{6x-5} \Leftrightarrow x^3 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 5) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-1+\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right\}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{1; \frac{-1+\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right\}$.

Bài toán 5. Giải phương trình $8x^3 - 5x + 1 = 2\sqrt[3]{9x-1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$8x^3 + 4x = 9x - 1 + 2\sqrt[3]{9x-1} \Leftrightarrow (2x)^3 + 2.2x = (\sqrt[3]{9x-1})^3 + 2\sqrt[3]{9x-1} \quad (*).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t; t \in \mathbb{R}$.

Với $t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}; t_1 \neq t_2$ ta có

$$\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{t_1^3 - t_2^3 + 2(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{(t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2 + 2)}{t_1 - t_2} = \left(t_1 + \frac{1}{2}t_2\right)^2 + \frac{3}{4}t_2^2 + 2 > 0 \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Do đó hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (*) \Leftrightarrow f(2x) &= f(\sqrt[3]{9x-1}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{9x-1} \Leftrightarrow 8x^3 - 9x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(8x^2 + 8x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{\sqrt{6}-2}{4}; -\frac{\sqrt{6}+2}{4}\right\} \end{aligned}$$

Thử lại các giá trị đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Kết luận tập nghiệm $S = \left\{1; \frac{\sqrt{6}-2}{4}; -\frac{\sqrt{6}+2}{4}\right\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $(2x)^3 - (5x-1) = 2\sqrt[3]{2.2x+5x-1}$.

Đặt $2x = t; \sqrt[3]{9x-1} = y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^3 = 5x - 1 + 2y \\ y^3 = 2t + 5x - 1 \end{cases} \Rightarrow t^3 - y^3 = 2y - 2t \Leftrightarrow (t-y)(t^2 + yt + t^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = y \\ t^2 + yt + t^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

- $t = y \Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{9x-1} \Leftrightarrow 8x^3 - 9x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(8x^2 + 8x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{\sqrt{6}-2}{4}; -\frac{\sqrt{6}+2}{4}\right\}.$

- $t^2 + yt + y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -2$ (Vô nghiệm).

Thử lại các giá trị đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Kết luận tập nghiệm $S = \left\{1; \frac{\sqrt{6}-2}{4}; -\frac{\sqrt{6}+2}{4}\right\}$.

Bài toán 6. Giải phương trình $x^3 + 7x = 5 + 3\sqrt[3]{5-4x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + 7x - 5 = 3\sqrt[3]{3x - (7x - 5)}$.

Đặt $x = u; \sqrt[3]{5 - 4x} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 + 7x - 5 = 3v \\ v^3 + 7x - 5 = 3u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 3v - 3u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 3) = 0.$$

Xét các trường hợp xảy ra

- $u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5 - 4x} \Leftrightarrow x^3 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- $u^2 + uv + v^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -2$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 7. Giải phương trình $2x^3 + 11x = 8 + 5\sqrt[3]{4 - 3x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8x^3 + 44x &= 32 + 20\sqrt[3]{4 - 3x} \Leftrightarrow 8x^3 + 44x - 32 = 10\sqrt[3]{32 - 24x} \\ &\Leftrightarrow (2x)^3 + 44x - 32 = 10\sqrt[3]{10 \cdot 2x - 44x + 32} \end{aligned}$$

Đặt $2x = u; \sqrt[3]{32 - 24x} = v$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 + 44x - 32 = 10v \\ v^3 + 44x - 32 = 10u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 10v - 10u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 10) = 0.$$

Xét hai trường hợp

- $u = v \Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{32 - 24x} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4 - 3x} \Leftrightarrow x^3 + 3x - 4 = 0$
 $\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$
- $u^2 + uv + v^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -10$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $2x^3 + 5x = 2(4 - 3x) + 5\sqrt[3]{4 - 3x}$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + 5t \Rightarrow f'(t) = 6t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số liên tục, đồng biến.

Khi đó thu được

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\sqrt[3]{4 - 3x}) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4 - 3x} \Leftrightarrow x^3 + 3x - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Nhận xét.

Đối với bài toán số 7, các bạn dễ dàng nhận thấy sử dụng phương pháp đánh giá – hàm số, cách nhìn nhận và các bước thao tác trở nên dễ dàng. Kỹ thuật này rất cơ bản, các vấn đề liên quan tác giả xin trình bày sau. Nếu sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ quy về hệ phương trình, quy trình thực hiện có vẻ khó khăn hơn một chút.

Các bạn chú ý dạng thức $(mx+n)^3 - g(x) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n)+g(x)}$.

Đây chỉ là dạng cơ bản khi các biểu thức ở dạng bậc nhất, bậc không quá cao. Rõ ràng biểu thức phía ngoài căn thường có dạng lũy thừa bậc ba “đẹp đẽ” sẽ thuận lợi cho chúng ta, nhưng trong bài toán 7 lại là $2x^3$. Có nhiều cách để biến đổi phá bỏ sự xấu xí này, bằng cách nhân hoặc chia hằng số đưa về $x^3, 8x^3, 64x^3, 81x^3, \dots$. Tất nhiên chúng ta chọn $8x^3$ đảm bảo cho gần “thánh giáo”, và thực tế là thành công đã mỉm cười. Tùy theo hướng tư duy, để giải quyết một bài toán có thể có rất nhiều phương án, có phương án hay, độc đáo, có phương án rủi ro và thất bại cao. Trong cái rủi vẫn có cái may, đôi khi chúng ta nhận ra những sai lầm nghiêm trọng và bắt phá ý tưởng trong quá trình giải, phản biện bài toán. Thiết nghĩ, chúng ta làm toán, dù chỉ là những lĩnh vực toán sơ cấp nhẹ nhàng, nhằm bước đầu tăng cường động não, tư duy, hoàn toàn không giống một cái máy, lúc nào cũng chính xác và gọn gàng được. Sự đời vẫn thay đổi không ngừng, tính lộn xộn vô tổ chức khởi phát từ đó, mục tiêu chẳng phải sắp xếp lại nó, vì vô cùng khó, mà trước tiên là giữ lấy cái nguyên bản, cái căn cơ, và nhiệm vụ đấu tranh cho sự trường tồn giá trị ban đầu.

Bài toán 8. Giải phương trình $4x^3 - 9x + 8 = 3\sqrt[3]{3x-2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho biến đổi về $4x^3 + 3x = 4(3x-2) + 3\sqrt[3]{3x-2}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = 4t^3 + 3t, t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 12t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, suy ra hàm liên tục, đồng biến.

Phương trình (1) trở thành

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\sqrt[3]{3x-2}) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3x-2} \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho biến đổi về

$$\begin{aligned} 8x^3 - 18x + 16 &= 6\sqrt[3]{3x-2} \Leftrightarrow (2x)^3 - 18x + 16 = 3\sqrt[3]{24x-16} \\ &\Leftrightarrow (2x)^3 - 18x + 16 = 3\sqrt[3]{3 \cdot 2x + 18x - 16} \end{aligned}$$

Đặt $2x = u; \sqrt[3]{24x-16} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 18x + 16 = 3v \\ v^3 - 18x + 16 = 3u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 3v - 3u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 3) = 0.$$

Xét các trường hợp

$$\begin{aligned} \checkmark \quad u = v &\Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{24x-16} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3x-2} \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 1. \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -3 \text{ (Loại)}.$$

Kết luận phương trình đề bài có hai nghiệm.

Bài toán 9. Giải phương trình $6x^3 - 17x + 12 = \sqrt[3]{3x-2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 (6x)^3 - 612x + 432 &= 36\sqrt[3]{3x-2} \\
 \Leftrightarrow (6x)^3 - 612x + 432 &= 6\sqrt[3]{3 \cdot 216x - 432} \\
 \Leftrightarrow (6x)^3 - 612x + 432 &= 6\sqrt[3]{6 \cdot 6x + 612x - 432}
 \end{aligned}$$

Đặt $6x = u; \sqrt[3]{3 \cdot 216x - 432} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 612x + 432 = 6v \\ v^3 - 612x + 432 = 6u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 6(v - u) \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 6) = 0.$$

Xét hai khả năng xảy ra

$$\begin{aligned}
 \diamond u = v &\Leftrightarrow 6x = \sqrt[3]{3 \cdot 216x - 432} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3x - 2} \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 1.
 \end{aligned}$$

$$\diamond u^2 + uv + v^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -6 \text{ (Vô nghiệm)}.$$

Kết luận phương trình đề bài có hai nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $6x^3 + x = 6(3x - 2) + \sqrt[3]{3x - 2}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = 6t^3 + t, t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 18t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số liên tục, đồng biến.

Phương trình (1) khi đó trở thành

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(\sqrt[3]{3x - 2}) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3x - 2} \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 1
 \end{aligned}$$

Vậy bài toán ban đầu có hai nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Hai bài toán 8 và 9 lại lặp lại tương tự, để dễ dàng đưa được về hệ phương trình, các bạn phải nhân thêm hệ số, ví dụ bài toán 9 nhân hai vế với hằng số 36, cốt yếu tạo ra $(6x)^3$. Cụ thể thu được $(6x)^3 - 612x + 432 = 36\sqrt[3]{3x - 2}$.

Sau bước đó, tác giả xin trình bày quá trình tách ghép như sau

- Để đưa được về hệ phương trình đối xứng loại 2, phía trong căn cần xuất hiện biểu thức $612x - 432$, chú ý số tự do -432 , suy ra thừa số đưa vào căn phải là 6 vì $6^3 \cdot (-2) = -432$. Tất yếu ngoài căn còn lại thừa số 6.
- Lúc này chúng ta đã có $(6x)^3 - 612x + 432 = 6\sqrt[3]{3 \cdot 216x - 432}$. Tiếp tục tách ghép làm xuất hiện biểu thức $612x - 432$, suy ra rằng $(6x)^3 - 612x + 432 = 6\sqrt[3]{36x + 612x - 432}$, và hiển nhiên đã thành công với thừa số 6 bên ngoài khi $(6x)^3 - 612x + 432 = 6\sqrt[3]{6 \cdot 6x + 612x - 432}$.
- Đặt $6x = u; \sqrt[3]{3 \cdot 216x - 432} = v$ ta có ngay hệ phương trình với các bước giải thông thường

$$\begin{cases} u^3 - 612x + 432 = 6v \\ v^3 - 612x + 432 = 6u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 6(v - u) \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 6) = 0.$$

Ngoài ra để phức tạp thêm một chút, các bạn có thể tham khảo thêm các bài toán sau

Bài toán 10. Giải phương trình $2x^3 = 2x + 10 + \sqrt[3]{\frac{3x + 10}{2}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - (x+5) = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}x + x + 5}$.

Đặt $x = u; \sqrt[3]{\frac{3x+10}{2}} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - x - 5 = \frac{1}{2}v \\ v^3 - x - 5 = \frac{1}{2}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}u \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ 2(u^2 + uv + v^2) + 1 = 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

- $u = v \Leftrightarrow 2x^3 = 3x + 10 \Leftrightarrow (x-2)(2x^2 + 4x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2(x+1)^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$
- $2(u^2 + uv + v^2) + 1 = 0 \Leftrightarrow (u+v)^2 + u^2 + v^2 = -1$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Bài toán 11. Giải phương trình $3x^3 = 12x + 42 + \sqrt[3]{\frac{13x+42}{3}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $3x^3 - 12x - 42 = \sqrt[3]{\frac{13x+42}{3}} \Leftrightarrow x^3 - 4x - 14 = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{3}x + 4x + 14}$.

Đặt $x = u; \sqrt[3]{\frac{13x+42}{3}} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 4x - 14 = \frac{1}{3}v \\ v^3 - 4x - 14 = \frac{1}{3}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{1}{3}(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ 3(u^2 + uv + v^2) + 1 = 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

- $3(u^2 + uv + v^2) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{1}{3}$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{13x+42}{3}} \Leftrightarrow 3x^3 - 13x - 42 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(3x^2 + 9x + 14) = 0 \Leftrightarrow x = 3.$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất.

Bài toán 12. Giải phương trình $3x^3 - 21x - 12 = 2\sqrt[3]{\frac{23x+12}{3}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - 7x - 4 = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3}x + 7x + 4}$.

Đặt $x = u; \sqrt[3]{\frac{23x+12}{3}} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 7x - 4 = \frac{2}{3}v \\ v^3 - 7x - 4 = \frac{2}{3}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{2}{3}(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ 3(u^2 + uv + v^2) + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\diamond u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{23x+12}{3}} \Leftrightarrow 3x^3 - 23x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(3x^2 + 9x + 4) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ 3; \frac{-9+\sqrt{33}}{6}; \frac{-9-\sqrt{33}}{6} \right\}.$$

$$\diamond 3(u^2 + uv + v^2) + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{2}{3} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 13. Giải phương trình $2x^3 + 2x = 14 + 3\sqrt[3]{\frac{x+14}{2}}$ ($x \in \mathbb{R}$)

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + x - 7 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}x - x + 7}$.

Đặt $x = u; \sqrt[3]{\frac{x+14}{2}}$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 + x - 7 = \frac{3}{2}v \\ v^3 + x - 7 = \frac{3}{2}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{3}{2}(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ 2(u^2 + uv + v^2) + 3 = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp

$$\diamond u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{x+14}{2}} \Leftrightarrow 2x^3 - x - 14 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x^2 + 2x + 7) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

$$\diamond 2(u^2 + uv + v^2) + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{3}{2} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = 2$.

Bài toán 14. Giải phương trình $2x^3 + 2 = 4x + 5\sqrt[3]{\frac{9x-2}{2}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - 2x + 1 = \frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{2}x + 2x - 1}$.

Đặt $x = u; \sqrt[3]{\frac{9x-2}{2}} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 2x + 1 = \frac{5}{2}v \\ v^3 - 2x + 1 = \frac{5}{2}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{5}{2}(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Xét các khả năng sau

- $u^2 + uv + v^2 = -\frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{5}{2}$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9x-2}{2}} \Leftrightarrow 2x^3 - 9x + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-2)(2x^2 + 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{2; \frac{-1+\sqrt{3}}{4}; \frac{-1-\sqrt{3}}{4}\right\}.$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm, $S = \left\{2; \frac{-1+\sqrt{3}}{4}; \frac{-1-\sqrt{3}}{4}\right\}.$

Bài toán 15. Giải phương trình $3x^3 + 14x - 15 = 2\sqrt[3]{5-4x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Đặt $\sqrt[3]{5-4x} = y$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x^3 + 14x - 15 = 2y \\ 5 - 4x = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3 + 14x - 15 = 2y \\ 15 - 12x = 3y^3 \end{cases} \Rightarrow 3x^3 + 2x = 3y^3 + 2x$$

$$\Leftrightarrow 3(x^3 - y^3) + 2(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(3x^2 + 3xy + 3y^2 + 2) = 0.$$

- $x = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5-4x} \Leftrightarrow x^3 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- $3x^2 + 3xy + 3y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 3\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{9}{4}y^2 = -2$ (Vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1.$

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$27x^3 + 126x - 135 = 18\sqrt[3]{5-4x} \Leftrightarrow (3x)^3 - (135 - 126x) = 6\sqrt[3]{6.3x + (135 - 126x)}.$$

Đặt $3x = u; \sqrt[3]{5-4x} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (135 - 126x) = 6v \\ v^3 = 6u + (135 - 126x) \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 6v - 6u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 6 = 0 \end{cases}$$

- $u^2 + uv + v^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -6$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5-4x} \Leftrightarrow x^3 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1.$

Bài toán 16. Giải phương trình $2x^3 + 9x - 24 = 5\sqrt[3]{12-2x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Phương trình đã cho tương đương với $2x^3 + 5x = 2(12 - 2x) + 5\sqrt[3]{12 - 2x}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + 5t; t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 6t^2 + 5 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(\sqrt[3]{12 - 2x}) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{12 - 2x} \Leftrightarrow x^3 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Thử lại thấy thỏa mãn phương trình ban đầu. Kết luận $x = 2$ là nghiệm duy nhất.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $8x^3 + 36x - 96 = 20\sqrt[3]{12 - 2x} \Leftrightarrow 8x^3 - (96 - 36x) = 10\sqrt[3]{10.2x + (96 - 36x)}$.

Đặt $u = 2x; v = \sqrt[3]{96 - 16x}$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (96 - 36x) = 10v \\ v^3 = 10u + (96 - 36x) \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 10v - 10u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 10 = 0 \end{cases}$$

- $u^2 + uv + v^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -10$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{96 - 16x} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{12 - 2x} \Leftrightarrow x^3 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Thử lại ta thu được tập nghiệm phương trình ban đầu: $S = \{2\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Đặt $\sqrt[3]{12 - 2x} = y \Rightarrow y^3 = 12 - 2x$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^3 + 9x - 24 = 5y \\ 12 - 2x = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + 9x - 24 = 5y \\ 24 - 4x = 2y^3 \end{cases}$$

Thực hiện cộng từng vế (cộng vế với vế) hai phương trình của hệ ta có

$$2x^3 + 5x = 2y^3 + 5y \Leftrightarrow 2(x^3 - y^3) + 5(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(2x^2 - 2xy + 2y^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x^2 - 2xy + 2y^2 + 5 = 0 \end{cases}$$

- $x = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{12 - 2x} \Leftrightarrow x^3 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 6) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.
- $2x^2 - 2xy + 2y^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + y^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 + x^2 + y^2 = -5$ (Vô nghiệm).

Thử lại ta thu được tập nghiệm của phương trình đã cho: $S = \{2\}$.

Bài toán 17. Giải phương trình $x(x^2 + 3x + 3) = 1 + 3\sqrt[3]{3x + 5}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 3x^2 + 3x = 1 + 3\sqrt[3]{3x + 5} \Leftrightarrow (x + 1)^3 + 3(x + 1) = 3x + 5 + 3\sqrt[3]{3x + 5} \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t; t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow f(x + 1) = f(\sqrt[3]{3x + 5}) \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{3x + 5} \\ &\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 1\} \end{aligned}$$

Thử lại các giá trị đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Vậy phương trình đã cho có tập hợp nghiệm $S = \{-2; 1\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 3x^2 + 3x = 1 + 3\sqrt[3]{3x+5} \Leftrightarrow (x+1)^3 - 2 = 3\sqrt[3]{3(x+1)+2}.$$

Đặt $x+1=t$; $\sqrt[3]{3x+5}=y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^3 - 2 = 3y \\ y^3 = 3t + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 = 3y + 2 \\ y^3 = 3t + 2 \end{cases} \Rightarrow t^3 - y^3 = 3y - 3t \Leftrightarrow (t-y)(t^2 + yt + t^2 + 3) = 0$$

- $t = y \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{3x+5} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 1\}.$
- $t^2 + yt + y^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -3$ (Vô nghiệm).

Thử lại các giá trị đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Vậy phương trình đã cho có tập hợp nghiệm $S = \{-2; 1\}.$

Bài toán 18. Giải phương trình $x^3 + 3x^2 + x + 3 = 4\sqrt[3]{2(3x+1)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+1)^3 - 2x + 2 = 4\sqrt[3]{4(x+1) + 2x - 2}.$$

Đặt $x+1=u$; $\sqrt[3]{6x+2}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 2x + 2 = 4v \\ v^3 - 2x + 2 = 4u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 4v - 4u \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 = -4 \end{cases}$$

Xét các trường hợp

- ✓ $u = v \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{6x+2} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 6x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 4x + 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; -2 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3}\}.$
- ✓ $u^2 + uv + v^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -4$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đề bài có các nghiệm kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 4x + 4 &= 6x + 2 + 4\sqrt[3]{6x+2} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 + 4(x+1) &= 6x + 2 + 4\sqrt[3]{6x+2} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 4t$ thì $f'(t) = 3t^2 + 4 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, hàm số liên tục và đồng biến.

Ta thu được $f(x+1) = f(\sqrt[3]{6x+2}) \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{6x+2}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 &= 6x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 4x + 1) &= 0 \Leftrightarrow x \in \{1; -2 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3}\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm, $S = \{1; -2 + \sqrt{3}; -2 - \sqrt{3}\}.$

Bài toán 19. Giải phương trình $x^3 + 6x^2 + 11x + 8 = 4\sqrt[3]{5x+8}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x = 4\sqrt[3]{4x + 8 + x}$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^3 - x = 4\sqrt[3]{4(x + 2) + x}$$

Đặt $x + 2 = u$; $\sqrt[3]{5x + 8} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - x = 4v \\ v^3 - x = 4u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 4(v - u) \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 4) = 0.$$

Xét các trường hợp

$$\checkmark \quad u = v \Leftrightarrow x + 2 = \sqrt[3]{5x + 8} \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 5x + 8$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 6x + 7) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; -3 + \sqrt{2}; -3 - \sqrt{2}\}.$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -4 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có tập nghiệm $S = \{0; -3 + \sqrt{2}; -3 - \sqrt{2}\}.$

Bài toán 20. Giải phương trình $8x^3 + 12x^2 + x + 2 = 2\sqrt[3]{1 + 9x} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - 5x + 1 = 2\sqrt[3]{4x + 2 + 5x - 1}$$

$$\Leftrightarrow (2x + 1)^3 - 5x + 1 = 2\sqrt[3]{2(2x + 1) + 5x - 1}$$

Đặt $2x + 1 = u$; $\sqrt[3]{1 + 9x} = v$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 5x + 1 = 2v \\ v^3 - 5x + 1 = 2u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 2v - 2u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 2) = 0.$$

Xét các trường hợp

$$\blacksquare \quad u = v \Leftrightarrow 2x + 1 = \sqrt[3]{1 + 9x} \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 1 + 9x \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(8x^2 + 12x - 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{-6 + 2\sqrt{15}}{8}; \frac{-6 - 2\sqrt{15}}{8}\right\}.$$

$$\blacksquare \quad u^2 + uv + v^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -2 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm, $S = \left\{0; \frac{-6 + 2\sqrt{15}}{8}; \frac{-6 - 2\sqrt{15}}{8}\right\}.$

Bài toán 21. Giải phương trình $3(x^3 + 6x^2 + 7x - 3) = \sqrt[3]{\frac{46x + 35}{3}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$ Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 15x - 11 = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x + 2}{3} + 15x + 11}$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)^3 - 15x - 11 = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{3}(x + 2) + 15x + 11}$$

Đặt $x+2=u; \sqrt[3]{\frac{46x+35}{3}}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 15x - 11 = \frac{1}{3}v \\ v^3 - 15x - 11 = \frac{1}{3}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{1}{3}(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp sau

$$\diamond u=v \Leftrightarrow x+2=\sqrt[3]{\frac{46x+35}{3}} \Leftrightarrow 3(x^3+6x^2+12x+8)=46x+35 \Leftrightarrow 3x^3+18x^2-10x-11=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(3x^2+21x+11)=0 \Rightarrow x \in \left\{1; \frac{-21+\sqrt{309}}{6}; \frac{-21-\sqrt{309}}{6}\right\}.$$

$$\diamond u^2+uv+v^2+\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow \left(u+\frac{1}{2}v\right)^2+\frac{3}{4}v^2=-\frac{1}{3} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có tập nghiệm $S=\left\{1; \frac{-21+\sqrt{309}}{6}; \frac{-21-\sqrt{309}}{6}\right\}.$

Bài toán 22. Giải phương trình $5(x^3-3x^2+x+1)=\sqrt[3]{\frac{11x-11}{5}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3-3x^2+3x-1-2x+2 &= \frac{1}{5}\sqrt[3]{\frac{x-1+10x-10}{5}} \\ \Leftrightarrow (x-1)^3-2x+2 &= \frac{1}{5}\sqrt[3]{\frac{1}{5}(x-1)+2x-2} \end{aligned}$$

Đặt $x-1=u; \sqrt[3]{\frac{11x-11}{5}}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 2x + 2 = \frac{1}{5}v \\ v^3 - 2x + 2 = \frac{1}{5}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{1}{5}(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{5} = 0 \end{cases}$$

Xét hai khả năng

$$\bullet u=v \Leftrightarrow x-1=\sqrt[3]{\frac{11x-11}{5}} \Leftrightarrow 5(x-1)^3=11(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 5(x-1)^2=11 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{1; \sqrt{\frac{11}{5}}+1; -\sqrt{\frac{11}{5}}+1\right\}.$$

$$\bullet u^2+uv+v^2+\frac{1}{5}=0 \Leftrightarrow \left(u+\frac{1}{2}v\right)^2+\frac{3}{4}v^2=-\frac{1}{5} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 23. Giải phương trình $24x^3+36x^2-3x+2=2\sqrt[3]{\frac{25x}{3}}+1 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - 7x - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2(2x+1) + 21x+1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^3 - 7x - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3}(2x+1) + 7x + \frac{1}{3}}$$

Đặt $2x+1 = u; \sqrt[3]{\frac{25x}{3}} + 1 = v$ ta thu được hệ $\begin{cases} u^3 - 7x - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}v \\ v^3 - 7x - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{2}{3}(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + \frac{2}{3} = 0 \end{cases}$

Xét các trường hợp

- $u = v \Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt[3]{\frac{25x}{3}} + 1 \Leftrightarrow 3(2x+1)^3 = 25x+3 \Leftrightarrow 3(8x^3 + 12x^2 + 6x + 1) = 25x+3$
 $\Leftrightarrow 24x^3 + 36x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(24x^2 + 36x - 7) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{-9-\sqrt{123}}{12}; \frac{-9+\sqrt{123}}{12}\right\}.$
- $u^2 + uv + v^2 + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{2}{3}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 24. Giải phương trình $54x^3 - 54x^2 + 16x - 6 = 5\sqrt[3]{\frac{17x-1}{2}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 - x - 2 = \frac{5}{2} \sqrt[3]{\frac{5(3x-1) + 2x+4}{2}}$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)^3 - x - 2 = \frac{5}{2} \sqrt[3]{\frac{5}{2}(3x-1) + x + 2}$$

Đặt $3x-1 = u; \sqrt[3]{\frac{17x-1}{2}} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - x - 2 = \frac{5}{2}v \\ v^3 - x - 2 = \frac{5}{2}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{5}{2}v - \frac{5}{2}u \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + \frac{5}{2} = 0 \end{cases}$$

- $u = v \Leftrightarrow 3x-1 = \sqrt[3]{\frac{17x-1}{2}} \Leftrightarrow 2(3x-1)^3 = 17x-1 \Leftrightarrow 2(27x^3 - 27x^2 + 9x - 1) = 17x-1$
 $\Leftrightarrow 54x^3 - 54x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(54x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- $u^2 + uv + v^2 + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{5}{2}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 25. Giải phương trình $2x^3 + 6x^2 + 6x + 1 = \sqrt[3]{\frac{x+2}{2}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
8x^3 + 24x^2 + 24x + 4 &= 2\sqrt[3]{4x+8} \\
\Leftrightarrow 8x^3 + 24x^2 + 24x + 8 + 4x + 4 &= 4x + 8 + 2\sqrt[3]{4x+8} \\
\Leftrightarrow (2x+2)^3 + 2(2x+2) &= 4x + 8 + 2\sqrt[3]{4x+8} \quad (1)
\end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t; t \in \mathbb{R}$.

Với $t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}; t_1 \neq t_2$ ta có

$$\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{t_1^3 - t_2^3 + 2(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{(t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2 + 2)}{t_1 - t_2} = \left(t_1 + \frac{1}{2}t_2\right)^2 + \frac{3}{4}t_2^2 + 2 > 0, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Do đó hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Phương trình (1) trở thành

$$\begin{aligned}
f(2x+3) &= f(\sqrt[3]{4x+8}) \Leftrightarrow 2x+2 = \sqrt[3]{4x+8} \\
\Leftrightarrow 8(x+1)^3 &= 4(x+2) \Leftrightarrow 2x^3 + 6x^2 + 6x + 2 = x + 2 \\
\Leftrightarrow 2x^3 + 6x^2 + 5x &= 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + 6x + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0
\end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 0$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
x^3 + 3x^2 + 3x + \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{x+2}{2}} \\
\Leftrightarrow (x+1)^3 - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Đặt $x+1 = u; \sqrt[3]{\frac{x+2}{2}} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}v \\ v^3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{1}{2}(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

$$\checkmark \quad u = v \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{\frac{x+2}{2}} \Leftrightarrow 2(x+1)^3 = (x+2) \Leftrightarrow 2x^3 + 6x^2 + 6x + 2 = x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 6x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + 6x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 + 6x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{1}{2} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 0$.

Bài toán 26. Giải phương trình $3x^3 + 9x^2 - 10 = \sqrt[3]{\frac{10x+14}{3}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 3x^2 - \frac{10}{3} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{10x+14}{3}} \Leftrightarrow (x+1)^3 - 3x - \frac{13}{3} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{3}(x+1) + 3x + \frac{13}{3}}.$$

Đặt $x+1=u$; $\sqrt[3]{\frac{10x+14}{3}}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 3x - \frac{13}{3} = \frac{1}{3}v \\ v^3 - 3x - \frac{13}{3} = \frac{1}{3}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{1}{3}(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

- $u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{1}{3}$ (Vô nghiệm).
- $u=v \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{\frac{10x+14}{3}} \Leftrightarrow 3(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = 10x + 14 \Leftrightarrow 3x^3 + 9x^2 - x - 11 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 12x + 11) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-6+\sqrt{3}}{3}; \frac{-6-\sqrt{3}}{3}\right\}.$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 27. Giải phương trình $54x^3 - 54x^2 + 18x - 16 = \sqrt[3]{\frac{3x+13}{2}}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2(27x^3 - 27x^2 + 9x - 1) - 14 = \sqrt[3]{\frac{3x-1+14}{2}} \Leftrightarrow (3x-1)^3 - 7 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}(3x-1)+7}$$

Đặt $3x-1=u$; $\sqrt[3]{\frac{3x+13}{2}}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 7 = \frac{1}{2}v \\ v^3 - 7 = \frac{1}{2}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{1}{2}(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp sau

- $u=v \Leftrightarrow 3x-1 = \sqrt[3]{\frac{3x+13}{2}} \Leftrightarrow 2(27x^3 - 27x^2 + 9x - 1) = 3x + 13$
 $\Leftrightarrow 54x^3 - 54x^2 + 15x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(54x^2 + 15) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- $u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{1}{2}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 28. Giải phương trình $2x^3 - 18x^2 + 56x - 42 + \sqrt[3]{\frac{x+15}{2}} = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2(x^3 - 9x^2 + 27x - 27) + 2(x + 6) + \sqrt[3]{\frac{x+15}{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-3)^3 + x + 6 + \sqrt[3]{\frac{x+15}{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-x)^3 - x - 6 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{3-x}{2}} + x + 6$$

Đặt $3-x=u; \sqrt[3]{\frac{x+15}{2}}=v$ ta thu được $\begin{cases} u^3 - x - 6 = \frac{1}{2}v \\ v^3 - x - 6 = \frac{1}{2}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{1}{2}(v-u) \Leftrightarrow (u-v)\left(u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{2}\right) = 0.$

Xét các khả năng sau đây

- $u=v \Leftrightarrow 3-x = \sqrt[3]{\frac{x+15}{2}} \Leftrightarrow 2(x^3 - 9x^2 + 27x - 27) + x + 15 = 0$
 $\Leftrightarrow 2x^3 - 18x^2 + 55x - 39 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 - 16x + 39) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2(x-4)^2 = -7 \end{cases} \Rightarrow x=1.$
- $u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{1}{2}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=1$.

Bài toán 29. Giải phương trình $3(x^3 - 3x^2 + 7) = 7\sqrt[3]{\frac{13x-23}{2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 7 &= \frac{7}{3} \sqrt[3]{\frac{13x-23}{2}} \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 3x + 8 &= \frac{7}{3} \sqrt[3]{\frac{13x-23}{2}} \\ \Leftrightarrow (x-1)^3 - 3x + 8 &= \frac{7}{3} \sqrt[3]{\frac{7(x-1)}{2}} + 3x - 8 \end{aligned}$$

Đặt $x-1=u; \sqrt[3]{\frac{13x-23}{2}}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 3x + 8 = \frac{7}{3}v \\ v^3 - 3x + 8 = \frac{7}{3}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{7}{3}(v-u) \Leftrightarrow (u-v)\left(u^2 + uv + v^2 + \frac{7}{3}\right) = 0.$$

Xét các trường hợp

- $u=v \Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{\frac{13x-23}{2}} \Leftrightarrow 2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 13x - 23$
 $\Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 - 7x + 21 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(2x^2 - 7) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{7\sqrt{2}}{2}; \frac{7\sqrt{2}}{2}; 3\right\}.$

$$\circ \quad u^2 + uv + v^2 + \frac{7}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{7}{3} \text{ (Vô nghiệm)}.$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 30. Giải phương trình $2(x^3 - 6x^2 + 10x - 7) = \sqrt[3]{\frac{5x-4}{2}} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 10x - 7 &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{5x-4}{2}} \\ \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 2x + 1 &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{5x-4}{2}} \\ \Leftrightarrow (x-2)^3 - 2x + 1 &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(x-2) + 2x - 1} \end{aligned}$$

Đặt $x-2 = u; \sqrt[3]{\frac{5x-4}{2}} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 2x + 1 = \frac{1}{2}v \\ v^3 - 2x + 1 = \frac{1}{2}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{1}{2}(v-u) \Leftrightarrow (u-v) \left(u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{➤} \quad u = v &\Leftrightarrow x-2 = \sqrt[3]{\frac{5x-4}{2}} \Leftrightarrow 2(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) = 5x - 4 \Leftrightarrow 2x^3 - 12x^2 + 19x - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-4)(2x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x-4)[2(x-1)^2 + 1] = 0 \Leftrightarrow x = 4. \end{aligned}$$

$$\text{➤} \quad u^2 + uv + v^2 + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{1}{2} \text{ (Vô nghiệm)}.$$

Kết luận phương trình đề bài có nghiệm duy nhất $x = 4$.

Nhận xét.

Thông qua 30 bài toán mở đầu, xin nhắc lại dạng thức đơn giản đã được đề cập

$$(mx+n)^3 - g(x) = f(x) \sqrt[3]{f(x)(mx+n) + g(x)}.$$

Trong đó $f(x) \equiv \text{const}$ (hằng số), tăng dần từ hằng số nguyên đến hằng số hữu tỷ, độ phức tạp của đa thức $g(x)$ cũng tăng dần từ hằng số đến nhị thức bậc nhất. Rõ ràng mọi thứ còn rất cơ bản, chưa đào sâu, chưa nâng cấp, và phát triển nhiều. Phía bên ngoài căn thức thường có dạng đa thức bậc ba, các bạn học sinh lưu ý cố gắng quy về dạng hằng đẳng thức lập phương (tổng – hiệu), chú ý thông thường chia hai vế cho hệ số của hạng tử chứa x^3 (hoặc tăng lên nếu hợp gu trình bày...), nhằm đơn giản hóa các chương ngại xấu xí. Bên ngoài phương pháp đặt ẩn phụ quy về hệ đối xứng, các bạn hoàn toàn có thể sử dụng đại lượng liên hợp hay kiến thức hàm số, đồ thị (Giải tích lớp 10 THPT hoặc Giải tích lớp 12 THPT). Lớp bài toán này để thành thạo cần xử lý nhiều bài tập, tính toán chính xác, cẩn thận, logic, và tất nhiên kiến thức không nên nằm ngoài sách giáo khoa, đồng thời phù hợp lứa tuổi. Sau đây là các bài tập tương tự, dành cho quý độc giả luyện tập.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $x^3 + 2 = 3\sqrt[3]{3x-2}$.
2. $x^3 + 6 = 7\sqrt[3]{7x-6}$.
3. $x^3 + 4 = 5\sqrt[3]{5x-4}$.
4. $x^3 + 7 = 8\sqrt[3]{8x-7}$.
5. $x^3 + 5 = 6\sqrt[3]{6x-5}$.
6. $x = \sqrt[3]{10\sqrt[3]{10x-9}-9}$.
7. $x = \sqrt[3]{11\sqrt[3]{11x-10}-10}$.
8. $x = \sqrt[3]{20\sqrt[3]{10x-19}-19}$.
9. $x = \sqrt[3]{16\sqrt[3]{16x-15}-15}$.
10. $x = \sqrt[3]{17\sqrt[3]{17x-16}-16}$.
11. $x = \sqrt[3]{15+4\sqrt[3]{4x+15}}$.
12. $x = \sqrt[3]{12+5\sqrt[3]{5x+12}}$.
13. $x = \sqrt[3]{4+2\sqrt[3]{2x+4}}$.
14. $x = \sqrt[3]{5\sqrt[3]{5x-2}-2}$.
15. $x = \sqrt[3]{7\sqrt[3]{7x-6}-6}$.
16. $(x+1)^3 - 2 = 3\sqrt[3]{3(x+1)+2}$.
17. $(x+1)^3 + 6 = 7\sqrt[3]{7(x+1)-6}$.
18. $(2x-1)^3 + 8 = 9\sqrt[3]{9(2x-1)-8}$.
19. $(4x-3)^3 + 4 = 5\sqrt[3]{20x-195}$.
20. $(3x-2)^3 + 3 = 4\sqrt[3]{12x-11}$.
21. $x^3 - 3x + 3 = \sqrt[3]{4x-3}$.
22. $x^3 - x + 2 = 2\sqrt[3]{3x-2}$.
23. $x^3 - 4x + 8 = 5\sqrt[3]{9x-8}$.
24. $x^3 + 12x - 7 = 6\sqrt[3]{7-6x}$.
25. $x^3 - 11x + 13 = 3\sqrt[3]{14x-13}$.
26. $x^3 - x + 7 = 7\sqrt[3]{8x-7}$.
27. $x^3 + 12 = 3x + 10\sqrt[3]{13x-12}$.
28. $x^3 - x + 4 = 5\sqrt[3]{6x-4}$.
29. $x^3 + 2x + 2 = 7\sqrt[3]{5x-2}$.
30. $x^3 - 3x + 14 = 8\sqrt[3]{11x-14}$.
31. $3x^3 + 18 = 19x + 2\sqrt[3]{7x-6}$.
32. $x^3 + 25 = 7x + 4\sqrt[3]{11x-25}$.
33. $x^3 - x + 44 = 12\sqrt[3]{13x-44}$.
34. $x^3 - 4x + 19 = 5\sqrt[3]{9x-19}$.

$$35. x^3 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}} + \frac{1}{2}.$$

$$36. x^3 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{2x+1}{3}}.$$

$$37. 5x^3 = 4 \sqrt[3]{\frac{4x+1}{5}} + 1.$$

$$38. 7x^3 = 3 \sqrt[3]{\frac{3x+4}{7}} + 4.$$

$$39. 5x^3 = 4 \sqrt[3]{\frac{4x+32}{5}} - 32.$$

$$40. 7x^3 = 6 \sqrt[3]{\frac{6x+44}{7}} - 44.$$

$$41. 5x^3 + 34 = \sqrt[3]{\frac{3x+34}{5}}.$$

$$42. (x+1)^3 - 7 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}} + 7.$$

$$43. 3(x+1)^3 - 22 = \sqrt[3]{\frac{x+23}{3}}.$$

$$44. 5(x+1)^3 - 38 = \sqrt[3]{\frac{x+39}{5}}.$$

$$45. 3(2x-1)^3 - 2 = \sqrt[3]{\frac{2x+1}{3}}.$$

$$46. 5(3x-2)^3 - 4 = \sqrt[3]{\frac{3x+2}{5}}.$$

$$47. 7(4x-3)^3 - 6 = \sqrt[3]{\frac{4x+3}{7}}.$$

$$48. 4(2x-1)^3 - 3 = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}.$$

$$49. x^3 + 3x^2 + 3x - \frac{61}{9} = \frac{1}{9} \sqrt[3]{\frac{x+70}{9}}.$$

$$50. x^3 + 3x^2 + 3x - \frac{47}{7} = \sqrt[3]{\frac{x+55}{7}}.$$

$$51. 80x^3 - 120x^2 + 60x - 19 = \sqrt[3]{\frac{x+4}{5}}.$$

$$52. 7x^3 + 21x^2 + 21x - 47 = \sqrt[3]{\frac{x+55}{7}}.$$

$$53. x^3 + 3x^2 + 3x = \frac{7}{2} \sqrt[3]{\frac{7x+9}{2}}.$$

$$54. 3x^3 + 9x^2 + 9x + 1 = 11 \sqrt[3]{\frac{11x+13}{3}}.$$

$$55. 4x^3 + 12x^2 + 12x - 14 = 7\sqrt[3]{\frac{7x+25}{4}}.$$

$$56. 4x^3 + 12x^2 + 12x + 6 = 17\sqrt[3]{\frac{17x+15}{4}}.$$

$$57. 2x^3 + 6x^2 + 6x + 8 = 11\sqrt[3]{\frac{11x+15}{2}}.$$

$$58. (x+1)^3 - 3x + 2 = 2\sqrt[3]{2(x+1) + 3x - 2}.$$

$$59. (2x-1)^3 + x = 3\sqrt[3]{3(2x-1) - x}.$$

$$60. (3x-2)^3 + 5x - 2 = 4\sqrt[3]{4(3x-2) - 5x + 2}.$$

$$61. (x+1)^3 + 8x + 18 = 17\sqrt[3]{17(x+1) - 8x - 18}.$$

$$62. (x+1)^3 + 3x + 1 = 6\sqrt[3]{6(x+1) - 3x - 1}.$$

$$63. x^3 + 3x^2 + x = \sqrt[3]{3x+5}.$$

$$64. x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = \sqrt[3]{4x+4}.$$

$$65. x^3 + 3x^2 + 4 = 2\sqrt[3]{9x-1}.$$

$$66. x^3 + 3x^2 + 2 = 3\sqrt[3]{6x+2}.$$

$$67. x^3 + 3x^2 = 4\sqrt[3]{11x-3}.$$

$$68. 8x^3 - 12x^2 + 9x = 5\sqrt[3]{7x-6}.$$

$$69. 8x^3 - 12x^2 + 12x - 1 = 7\sqrt[3]{8x-7}.$$

$$70. 8x^3 - 12x^2 + 7x = 3\sqrt[3]{5x-4}.$$

$$71. x^3 - 3x^2 - 2x + 14 = 6\sqrt[3]{11x-21}.$$

$$72. x^3 - 3x^2 + 8 = 4\sqrt[3]{7x-13}.$$

$$73. x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = 3\sqrt[3]{x-1}.$$

$$74. 2(x^3 - 3x^2 - 2x + 9) = 3\sqrt[3]{\frac{13x-23}{2}}.$$

$$75. 2(x^3 - 3x^2 + 9x - 10) = 17\sqrt[3]{\frac{5x+1}{2}}.$$

$$76. 2(x^3 + 3x^2 - 3x + 6) = \sqrt[3]{\frac{19x-3}{2}}.$$

$$77. x^3 + 3x^2 + 8x - 3 = \frac{9}{2}\sqrt[3]{\frac{17-x}{2}}.$$

$$78. x^3 + 3x^2 + 6x + 1 = \frac{11}{2}\sqrt[3]{\frac{5x+11}{2}}.$$

$$79. x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = \frac{13}{2}\sqrt[3]{\frac{7x-5}{2}}.$$

$$80. x^3 - 6x^2 + 11x - 9 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{5x-4}{2}}.$$

$$81. x^3 - 3x^2 + 2x + 5 = \frac{9}{2}\sqrt[3]{\frac{11x-17}{2}}.$$

Bài toán 31. Giải phương trình $x^3 + 3 = x(x+1) + 2\sqrt[3]{x^2 + 3x - 3} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - x^2 - x + 3 = 2\sqrt[3]{2x + x^2 + x - 3}$.

Đặt $x = u; \sqrt[3]{x^2 + 3x - 3} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - x^2 - x + 3 = 2v \\ v^3 - x^2 - x + 3 = 2u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 2v - 2u \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 = -2 \end{cases}$$

Xét các trường hợp

- $u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 3} \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; -\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.
- $u^2 + uv + v^2 = -2 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -2$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 - x^2 - x + 3 = 2\sqrt[3]{x^2 + 3x - 3} \Leftrightarrow x^3 + 2x = x^2 + 3x - 3 + 2\sqrt[3]{x^2 + 3x - 3}.$$

Đặt $\sqrt[3]{x^2 + 3x - 3} = y$ ta thu được

$$x^3 + 2x = y^3 + 2y \Leftrightarrow x^3 - y^3 + 2(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0.$$

Xét các trường hợp sau đây

- $x = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 3} \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; -\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$.
- $x^2 + xy + y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -2$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm như trên.

Bài toán 32. Giải phương trình $x^3 + 6 = x^2 + 3x + 3\sqrt[3]{x^2 + 6x - 6} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - x^2 - 3x + 6 = 3\sqrt[3]{3x + x^2 + 3x - 6}$.

Đặt $x = u; \sqrt[3]{x^2 + 6x - 6} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - x^2 - 3x - 6 = 3v \\ v^3 - x^2 - 3x + 6 = 3u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 3v - 3u \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 = -3 \end{cases}$$

- $u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 + 6x - 6} \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 6) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; -\sqrt{6}; \sqrt{6}\}$.
- $u^2 + uv + v^2 = -3 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -3$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đề bài có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 33. Giải phương trình $x^3 - x^2 + x + 2 = 3\sqrt[3]{x^2 + 2x - 2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - x^2 + x + 2 = 3\sqrt[3]{3x + x^2 - x - 2}$.

Đặt $x = u; \sqrt[3]{x^2 + 2x - 2} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - x^2 + x + 2 = 3v \\ v^3 - x^2 + x + 2 = 3u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 3v - 3u \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 = -3 \end{cases}$$

$$\circ \quad u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 2} \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\}.$$

$$\circ \quad u^2 + uv + v^2 = -3 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -3 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đề bài có ba nghiệm kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + 3x = x^2 + 2x - 2 + 3\sqrt[3]{x^2 + 2x - 2}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t; t \in \mathbb{R}$. Với $t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}; t_1 \neq t_2$ ta có

$$\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{t_1^3 - t_2^3 + 3(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{(t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2 + 3)}{t_1 - t_2} = \left(t_1 + \frac{1}{2}t_2\right)^2 + \frac{3}{4}t_2^2 + 3 > 0, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Do đó hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow f(x) = f\left(\sqrt[3]{x^2 + 2x - 2}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 2} \\ &\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có ba nghiệm kể trên, $x \in \{0; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.

Bài toán 34. Giải phương trình $x^3 - x^2 + 7x - 5 = 2\sqrt[3]{x^2 - 5x + 5}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - x^2 + 7x - 5 = 2\sqrt[3]{2x + x^2 - 7x + 5}$.

Đặt $x = u; \sqrt[3]{x^2 - 5x + 5} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - x^2 + 7x - 5 = 2v \\ v^3 - x^2 + 7x - 5 = 2u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 2v - 2u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 2) = 0.$$

Xét các trường hợp sau

$$\checkmark \quad u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 5} \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 5x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 = -2 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -2 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + 2x = x^2 - 5x + 5 + 2\sqrt[3]{x^2 - 5x + 5}$ (1).

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$, ta có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ liên tục, đồng biến.

$$\text{Do đó } f(x) = f\left(\sqrt[3]{x^2 - 5x + 5}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 5} \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 5x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Nhận xét.

Các bạn đọc giả dễ dàng quan sát thấy các bài toán từ 31 đến 34, vẫn không nằm ngoài phạm vi lớp bài toán giải được bằng cách đặt ẩn phụ quy về hệ phương trình. Nhắc lại dạng thức

$$(mx+n)^3 - g(x) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n)+g(x)}.$$

Mức độ khó các bài toán đã bước đầu tăng lên, khi đa thức $g(x)$ của chúng ta đã có dạng tam thức bậc hai, mặc dù $f(x)$ vẫn có dạng hằng số. Như vậy phía trong căn xuất hiện dạng tam thức bậc hai, để nhìn nhận hệ phương trình thuận lợi các bạn chú ý đặc biệt đến $f(x)$. Ngoài phương án đưa về hệ, những bài toán này bao giờ cũng có những cách làm khác, nhẹ nhàng hơn, như sử dụng hai ẩn phụ quy về phân tích nhân tử theo hằng đẳng thức (lời giải 2 bài toán 31), sử dụng tính chất đơn điệu hàm số thuộc chương trình lớp 10 THPT (lời giải 2 bài toán 33) hay lớp 12 THPT (lời giải 2 bài toán 34). Xin lưu ý với trình độ kiến thức đại số 10, các em học sinh vẫn có thể sử dụng kiến thức hàm số nhanh chóng, yêu cầu cơ bản, phù hợp lứa tuổi, không vượt quá nội dung sách giáo khoa. Nói tới vấn đề này, tác giả nhớ đến một bài toán bất đẳng thức, nằm trong chuyên mục Đề ra kỳ này, T2/253, Tạp chí Toán học và tuổi trẻ, tháng 7 năm 1998.

Đó là một bài toán đã quen thuộc với nhiều bạn học sinh, nguyên văn nằm trong Đề số 26 Bộ đề luyện thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng, trong cơ chế thi cử hiện hành thập niên 1990, nội dung như sau

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Chứng minh $\frac{x}{y^2 + z^2} + \frac{y}{z^2 + x^2} + \frac{z}{x^2 + y^2} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Với bài toán này, chúng ta có rất nhiều cách, đặc biệt với các bạn học sinh 12 THPT, khi đã có trong tay công cụ đạo hàm, có thể khảo sát trực tiếp hàm số $f(t) = \frac{x}{1-x^2}; x \in (0;1]$. Tạp chí THPT khi đó muốn giới thiệu đến bạn đọc THCS, mong muốn các em học sinh nhỏ tuổi tiến bộ, mà không sử dụng kiến thức lớp trên quá tầm với. Trong Giải đề kỳ trước, Số 257, Tháng 11 năm 1998, chuyên viên toà soạn, TS.Lê Thống Nhất phụ trách bài toán khi đó đã có lời bình luận rất hóm hỉnh: Tuy nhiên rất nhiều bạn các lớp 7, 8, 9 đã chơi rất ngon lành bằng công cụ đạo hàm, nên khen hay chê những lời giải như vậy?

Rõ ràng trong trường hợp này, công cụ đạo hàm là quá tầm với, đi trước chương trình, đã vô tình làm thui chột tư duy, làm gia tăng sự ỷ lại, giảm thiểu sự bứt phá của các em học sinh nhỏ tuổi, nói khác là vô hình chung phản giáo dục. Tác giả thiết nghĩ trong quá trình làm những bài toán nhẹ nhàng như thế này hoặc cao hơn, mà còn trong cư xử, trong cuộc sống, làm điều gì chúng ta cũng nên nhìn nhận lại, suy nghĩ kỹ, làm sao giữ được lẽ, giữ đúng căn nguyên đạo lý, chân lý lẽ phải, tuân theo một khuôn phép đúng đắn nào đó, tránh xảy ra những trường hợp đáng tiếc không cứu vãn nổi!

Bài toán 35. Giải phương trình $x^3 - 2x^2 + 10x - 2 = 7\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + 7x = 2x^2 - 3x + 2 + 7\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2} \quad (1)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 7t; t \in \mathbb{R}$. Với $t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}; t_1 \neq t_2$ ta có

$$\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{t_1^3 - t_2^3 + 7(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{(t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2 + 7)}{t_1 - t_2} = \left(t_1 + \frac{1}{2}t_2\right)^2 + \frac{3}{4}t_2^2 + 7 > 0, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Do đó hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow f(x) = f\left(\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2} \\ &\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - (2x^2 - 10x + 2) = 7\sqrt[3]{7x + 2x^2 - 10x + 2}$.

Đặt $x = u; \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^2 - 10x + 2) = 7v \\ v^3 - (2x^2 - 10x + 2) = 7u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 7v - 7u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 7) = 0.$$

Xét các trường hợp

$$\diamond u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2} \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\diamond u^2 + uv + v^2 = -7 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -7 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 36. Giải phương trình $x^3 - 3x^2 + 13x - 3 = 8\sqrt[3]{3x^2 - 5x + 3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 + 8x = 3x^2 - 5x + 3 + 8\sqrt[3]{3x^2 - 5x + 3}$ (1)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 8t; t \in \mathbb{R}$. Với $t_1 \in \mathbb{R}, t_2 \in \mathbb{R}; t_1 \neq t_2$ ta có

$$\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{t_1^3 - t_2^3 + 8(t_1 - t_2)}{t_1 - t_2} = \frac{(t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2 + 8)}{t_1 - t_2} = \left(t_1 + \frac{1}{2}t_2\right)^2 + \frac{3}{4}t_2^2 + 8 > 0, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Do đó hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = f\left(\sqrt[3]{3x^2 - 5x + 3}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3x^2 - 5x + 3} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)\left[(x - 1)^2 + 2\right] = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - 3x^2 + 13x - 3 = 8\sqrt[3]{8x + 3x^2 - 13x + 3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Đặt $x = u; \sqrt[3]{3x^2 - 5x + 3} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (3x^2 - 13x + 3) = 8v \\ v^3 - (3x^2 - 13x + 3) = 8u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 8(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 8 = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp

$$\bullet u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3x^2 - 5x + 3} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)\left[(x - 1)^2 + 2\right] = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\bullet u^2 + uv + v^2 = -8 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -8 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Bài toán 37. Giải phương trình $x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $(x+1)^3 - (7x^2 + 8x - 5) = \sqrt[3]{x+1 + (7x^2 + 8x - 5)}$.

Đặt $x+1 = u$; $\sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 + (7x^2 + 8x - 5) = v \\ v^3 = u + (7x^2 + 8x - 5) \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = v - u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 1) = 0.$$

$$\bullet \quad u^2 + uv + v^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -1 \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\bullet \quad u = v \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4} \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x^2 + x - 1) = 0 \Rightarrow x \in \left\{5; \frac{\sqrt{5}-1}{2}; -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}.$$

Thử lại, kết luận phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{5; \frac{\sqrt{5}-1}{2}; -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$.

Bài toán 38. Giải phương trình $2x^3 - 4x^2 + 9x - 4 = 3\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $2x^3 + 3x = 2(2x^2 - 3x + 2) + 3\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}$.

Đặt $\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2} = y$ ta thu được

$$2x^3 + 3x = 2y^3 + 3y \Leftrightarrow 2(x^3 - y^3) + 3(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)[2(x^2 + xy + y^2) + 3] = 0.$$

Xét các trường hợp sau

$$\diamondsuit \quad x = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2} \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\diamondsuit \quad 2(x^2 + xy + y^2) + 3 = 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 + x^2 + y^2 = -3 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 39. Giải phương trình $3x^3 - 12x^2 + 5x + 6 = 2\sqrt[3]{4x^2 - x - 2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $3x^3 + 2x = 3(4x^2 - x - 2) + 2\sqrt[3]{4x^2 - x - 2}$.

Xét hàm số $f(t) = 3t^3 + 2t$; $t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 9t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, hàm số liên tục và đồng biến.

Khi đó thu được

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sqrt[3]{4x^2 - x - 2}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4x^2 - x - 2} \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{3+\sqrt{17}}{2}; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 - 4x^2 + \frac{5}{3}x + 2 = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4x^2 - x - 2} \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + \frac{5}{3}x + 2 = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}x + 4x^2 - \frac{5}{3}x - 2}.$$

Đặt $x = u; \sqrt[3]{4x^2 - x - 2} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - 4x^2 + \frac{5}{3}x + 2 = \frac{2}{3}v \\ v^3 - 4x^2 + \frac{5}{3}x + 2 = \frac{2}{3}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{2}{3}(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + \frac{2}{3} = 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

- $u^2 + uv + v^2 + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{2}{3}$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4x^2 - x - 2} \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{3+\sqrt{17}}{2}; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right\}.$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 27x^3 - 108x^2 + 45x + 54 &= 18\sqrt[3]{4x^2 - x - 2} \\ \Leftrightarrow (3x)^3 - (108x^2 - 45x - 54) &= 6\sqrt[3]{27(4x^2 - x - 2)} \\ \Leftrightarrow (3x)^3 - (108x^2 - 45x - 54) &= 6\sqrt[3]{6 \cdot 3x + 108x^2 - 45x - 54} \end{aligned}$$

Đặt $3x = u; \sqrt[3]{27(4x^2 - x - 2)} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (108x^2 - 45x - 54) = 6v \\ v^3 - (108x^2 - 45x - 54) = 6u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 6v - 6u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 6) = 0.$$

Xét hai khả năng

- ❖ $u = v \Leftrightarrow 3x = \sqrt[3]{27(4x^2 - x - 2)} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4x^2 - 3x + 2}$
 $\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{3+\sqrt{17}}{2}; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right\}.$
- ❖ $u^2 + uv + v^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -6$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Các bạn đọc giả có thể thấy bài toán 39 nếu sử dụng phương pháp đánh giá – hàm số, cụ thể sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số, cho chúng ta lời giải 1 hết sức ngắn gọn và dễ hiểu. Tuy nhiên lời giải sử dụng đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2 tỏ ra khá khó khăn, thực tế đối với những bài toán hệ số không đẹp như thế này, khi các điều kiện hội tụ đầy đủ, luôn có hai phương án đặt ẩn phụ đưa về hệ đối xứng loại 2, dù rằng bản chất của chúng là như nhau.

Tác giả xin đi sâu phân tích hai phương án này như sau

Phương án 1.

Để ý rằng đa thức phía bên ngoài căn là đa thức bậc ba nhưng các hệ số khá xấu xí. Nhớ lại dạng thức

$$(mx + n)^3 - g(x) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx + n) + g(x)}.$$

Để thuận tiện quy về hằng đẳng thức lập phương, chúng ta sẽ tạo ra hệ số 1

$$x^3 - 4x^2 + \frac{5}{3}x + 2 = \frac{2}{3}\sqrt[3]{4x^2 - x - 2} \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + \frac{5}{3}x + 2 = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}x + 4x^2 - \frac{5}{3}x - 2}.$$

Trực quan dễ thấy $f(x) \equiv \frac{2}{3}$ và $g(x) = 4x^2 - \frac{5}{3}x - 2$ nên dễ dàng quy về hệ phương trình.

Phương án 2.

Chú ý hệ số hạng tử lập phương thường là 1, 8, 27, 64,... và các số đối của chúng. Ngoài ngã rẽ đưa về hệ số 1, chúng ta có thể nâng lên để tạo ra hệ số đẹp dễ, rõ ràng bội số của 3 nên là 27. Như vậy

$$27x^3 - 108x^2 + 45x + 54 = 18\sqrt[3]{4x^2 - x - 2}.$$

Trước hết chọn trường hợp đơn giản nhất, tức là $mx + n \equiv 3x$; $g(x) = (108x^2 - 45x - 54)$. Phía ngoài căn lúc này có dạng $(mx + n)^3 - g(x)$, trong căn thức bắt buộc xuất hiện $+g(x)$, tức là $(108x^2 - 45x - 54)$, như vậy hệ số cần

đưa vào trong căn thức phải là, $\sqrt[3]{\frac{-54}{-2}} = 3$, và ta thu được hệ quả

$$\begin{aligned}(3x)^3 - (108x^2 - 45x - 54) &= 6\sqrt[3]{27(4x^2 - x - 2)} \\ \Leftrightarrow (3x)^3 - (108x^2 - 45x - 54) &= 6\sqrt[3]{6 \cdot 3x + 108x^2 - 45x - 54}\end{aligned}$$

Đến đây có thể dễ dàng lắp ghép để thiết lập hệ phương trình đối xứng loại 2.

Bài toán 40. Giải phương trình $4x^3 - 8x^2 + 29x - 24 = \sqrt[3]{2x^2 - 7x + 6}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $4x^3 + x = 4(2x^2 - 7x + 6) + \sqrt[3]{2x^2 - 7x + 6}$.

Xét hàm số $f(t) = 4t^3 + t$; $t \in \mathbb{R}$. Ta có $f'(t) = 12t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, hàm số liên tục và đồng biến.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}f(x) &= f(\sqrt[3]{2x^2 - 7x + 6}) \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2x^2 - 7x + 6} \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 7x - 6 = 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x + 6) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (2x-1)^2 = -23 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1\end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}8x^3 - 16x^2 + 58x - 48 &= 2\sqrt[3]{2x^2 - 7x + 6} \\ \Leftrightarrow (2x)^3 - (16x^2 - 58x + 48) &= \sqrt[3]{2x + (16x^2 - 58x + 48)}\end{aligned}$$

Đặt $2x = u$; $2\sqrt[3]{2x^2 - 7x + 6} = v$ ta thu được

$$\begin{cases} u^3 - (16x^2 - 58x + 48) = v \\ v^3 - (16x^2 - 58x + 48) = u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = v - u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 1) = 0.$$

Xét các trường hợp

$$\begin{aligned}\blacksquare \quad u = v &\Leftrightarrow 2x = 2\sqrt[3]{2x^2 - 7x + 6} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2x^2 - 7x + 6} \\ \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 7x - 6 &= 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (2x-1)^2 = -23 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.\end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad u^2 + uv + v^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -1 \text{ (Vô nghiệm)}.$$

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Bài toán 41. Giải phương trình $5x^3 - 85x^2 + 33x + 50 = 3\sqrt[3]{17x^2 - 6x - 10}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $5x^3 + 3x = 5(17x^2 - 6x - 10) + 3\sqrt[3]{17x^2 - 6x - 10}$

Xét hàm số $f(t) = 5t^3 + 3t; t \in \mathbb{R}$ thì ta có $f'(t) = 15t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, hàm số liên tục và đồng biến.

Thu được

$$\begin{aligned} f(x) = f\left(\sqrt[3]{17x^2 - 6x - 10}\right) &\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{17x^2 - 6x - 10} \Leftrightarrow x^3 - 17x^2 + 6x + 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 16x - 10) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{8 - \sqrt{104}}{2}; \frac{8 + \sqrt{104}}{2}\right\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - 17x^2 + \frac{33}{5}x + 10 = \frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{3}{5}x + 17x^2 - \frac{33}{5}x + 10}$.

Đặt $\sqrt[3]{17x^2 - 6x - 10} = y$, ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - \left(17x^2 - \frac{33}{5}x + 10\right) = \frac{3}{5}y \\ y^3 - \left(17x^2 - \frac{33}{5}x + 10\right) = \frac{3}{5}x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = \frac{3}{5}y - \frac{3}{5}x \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2 + xy + y^2 + \frac{3}{5}\right) = 0.$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \diamond \quad x = y &\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{17x^2 - 6x - 10} \Leftrightarrow x^3 - 17x^2 + 6x + 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 16x - 10) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{8 - \sqrt{104}}{2}; \frac{8 + \sqrt{104}}{2}\right\}. \end{aligned}$$

$$\diamond \quad x^2 + xy + y^2 + \frac{3}{5} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -\frac{3}{5} \text{ (Vô nghiệm)}.$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm.

Bài toán 42. Giải phương trình $\sqrt[3]{x-2} = 8x^3 - 60x^2 + 151x - 128$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt[3]{x-2} = (2x-5)^3 + x-3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x-5-(x-3)} = (2x-5)^3 + x-3.$$

Đặt $2x-5 = t; \sqrt[3]{x-2} = y$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} y = t^3 + x - 3 \\ y^3 = t - (x - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = t^3 + x - 3 \\ t = y^3 + x - 3 \end{cases} \Rightarrow t^3 - y^3 = y - t \Leftrightarrow (t-y)(t^2 + yt + y^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = y \\ t^2 + yt + y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

- $t = y \Leftrightarrow 2x - 5 = \sqrt[3]{x-2} \Leftrightarrow 8x^3 - 60x^2 + 149x - 123 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(8x^2 - 36x + 41) = 0 \Leftrightarrow x = 3$.
- $t^2 + yt + y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -1$ (Vô nghiệm).

Thử lại các $x = 3$ thỏa mãn phương trình ban đầu. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương đương với $\sqrt[3]{x-2} = (2x-5)^3 + x - 3$.

Đặt $\sqrt[3]{x-2} = 2y - 5 \Rightarrow x - 2 = (2y - 5)^3$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x - 2 = (2y - 5)^3 \\ 2y - 5 = (2x - 5)^3 + x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = (2y - 5)^3 \\ 2y - x - 2 = (2x - 5)^3 \end{cases} \Rightarrow 2x - 2y = (2y - 5)^3 - (2x - 5)^3$$

$$\Leftrightarrow 2(x - y) + 2(x - y)\left[(2x - 5)^2 + (2x - 5)(2y - 5) + (2y - 5)^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)\left[(2x - 5)^2 + (2x - 5)(2y - 5) + (2y - 5)^2 + 1\right] = 0$$

- $x = y \Leftrightarrow 2x - 5 = \sqrt[3]{x-2} \Leftrightarrow 8x^3 - 60x^2 + 149x - 123 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(8x^2 - 36x + 41) = 0 \Leftrightarrow x = 3$.
- $(2x - 5)^2 + (2x - 5)(2y - 5) + (2y - 5)^2 + 1 \Leftrightarrow \left(2x - 5 + \frac{2y - 5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(2y - 5)^2 = -1$ (Vô nghiệm).

Thử lại các $x = 3$ thỏa mãn phương trình ban đầu.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương đương với

$$\sqrt[3]{x-2} = (2x-5)^3 + x - 3 \Leftrightarrow x - 2 + \sqrt[3]{x-2} = (2x-5)^3 + 2x - 5 \quad (1).$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t; t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$(1) \Leftrightarrow f(\sqrt[3]{x-2}) = f(2x-5) \Leftrightarrow 2x-5 = \sqrt[3]{x-2}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 60x^2 + 149x - 123 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(8x^2 - 36x + 41) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Thử lại $x = 3$ thỏa mãn phương trình ban đầu. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Bài toán 43. Giải phương trình $6x^3 - 6x^2 + 13x - 6 = 7\sqrt[3]{x^2 - x + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương đương với

$$x^3 - x^2 + \frac{13}{6}x - 1 = \frac{7}{6}\sqrt[3]{\frac{7}{6}x + x^2 - \frac{13}{6}x + 1}.$$

Đặt $\sqrt[3]{x^2 - x + 1} = y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - \left(x^2 - \frac{13}{6}x + 1\right) = \frac{7}{6}y \\ y^3 - \left(x^2 - \frac{13}{6}x + 1\right) = \frac{7}{6}x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = \frac{7}{6}y - \frac{7}{6}x \Leftrightarrow (x - y)\left(x^2 + xy + y^2 + \frac{7}{6}\right) = 0.$$

- $x = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- $6(x^2 + xy + y^2) + 7 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -\frac{7}{6}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Đặt $\sqrt[3]{x^2 - x + 1} = y$ ta thu được $6x^3 + 7x = 6(x^2 - x + 1) + 7\sqrt[3]{x^2 - x + 1}.$

$$6x^3 + 7x = 6y^3 + 7y \Leftrightarrow 6(x^3 - y^3) + 7(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)[6(x^2 + xy + y^2) + 7] = 0.$$

- $x = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- $6(x^2 + xy + y^2) + 7 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -\frac{7}{6}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x = 1.$

Bài toán 44. Giải phương trình $11x^3 - 11x^2 + 25x - 22 = 3\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Phương trình đã cho tương đương đương với $11x^3 + 3x = 11(x^2 - 2x + 2) + 3\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2}.$

Đặt $\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} = y$ ta thu được hệ

$$11x^3 + 3x = 11y^3 + 3y \Leftrightarrow 11(x^3 - y^3) + 3(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)[11(x^2 + xy + y^2) + 3] = 0.$$

- ✓ $x = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- ✓ $11(x^2 + xy + y^2) + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -\frac{3}{11}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1.$

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Phương trình đã cho tương đương đương với

$$x^3 - x^2 + \frac{25}{11}x - 2 = \frac{3}{11}\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} \Leftrightarrow x^3 - x^2 + \frac{25}{11}x - 11 = \frac{3}{11}\sqrt[3]{\frac{3}{11}x + x^2 - \frac{25}{11}x + 2}.$$

Đặt $\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} = y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - \left(x^2 - \frac{25}{11}x + 2\right) = \frac{3}{11}y \\ y^3 - \left(x^2 - \frac{25}{11}x + 2\right) = \frac{3}{11}x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = \frac{3}{11}y - \frac{3}{11}x \Leftrightarrow (x - y)\left(x^2 + xy + y^2 + \frac{3}{11}\right) = 0.$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $x = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 2} \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- $x^2 + xy + y^2 + \frac{3}{11} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -\frac{3}{11}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1.$

Bài toán 45. Giải phương trình $x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 4\sqrt[3]{x^2 + 3x + 4}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 4x + 4 &= x^2 + 3x + 4 + 4\sqrt[3]{x^2 + 3x + 4} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 + 4(x+1) &= x^2 + 3x + 4 + 4\sqrt[3]{x^2 + 3x + 4} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 4t; t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 4 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Hàm số liên tục, đồng biến.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} f(x+1) &= f(\sqrt[3]{x^2 + 3x + 4}) \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{x^2 + 3x + 4} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^2 + 3x + 4 \\ \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 3 &= 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + 3x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^2 + x &= 4\sqrt[3]{x^2 + 3x + 4} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 - x^2 + x &= 4\sqrt[3]{4(x+1) + x^2 - x} \end{aligned}$$

Đặt $x+1 = u; \sqrt[3]{x^2 + 3x + 4} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2 - x^2 + x = 4v \\ v^2 - x^2 + x = 4u \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = 4v - 4u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 4) = 0.$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad u = v &\Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{x^2 + 3x + 4} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^2 + 3x + 4 \\ \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 3 &= 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 3x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + 3x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -1 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 46. Giải phương trình $x^3 - 5x^2 + 10x - 6 = 2\sqrt[3]{2x^2 - 5x + 3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2x - 2 &= 2x^2 - 5x + 3 + 2\sqrt[3]{2x^2 - 5x + 3} \\ \Leftrightarrow (x-1)^3 + 2(x-1) &= 2x^2 - 5x + 3 + 2\sqrt[3]{2x^2 - 5x + 3} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t; t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, hàm số liên tục và đồng biến.

$$\begin{aligned} f(x-1) &= f(\sqrt[3]{2x^2 - 5x + 3}) \Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{2x^2 - 5x + 3} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 2x^2 - 5x + 3 \\ \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 8x - 4 &= 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 2\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm như trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 2x^2 + 7x - 5 &= 2\sqrt[3]{2x - 2 + 2x^2 - 7x + 5} \\ \Leftrightarrow (x-1)^3 - (2x^2 - 7x + 5) &= 2\sqrt[3]{2(x-1) + 2x^2 - 7x + 5} \end{aligned}$$

Đặt $x-1=u$; $\sqrt[3]{2x^2 - 5x + 3} = v$ ta thu được

$$\begin{cases} u^3 - (2x^2 - 7x + 5) = 2v \\ v^3 - (2x^2 - 7x + 5) = 2u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 2v - 2u \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \circ \quad u = v &\Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{2x^2 - 5x + 3} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 2x^2 - 5x + 3 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 2\}. \end{aligned}$$

$$\circ \quad u^2 + uv + v^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -2 \quad (\text{Vô nghiệm}).$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Nhận xét.

Lưu ý để dễ dàng tạo dạng thức hàm số đơn điệu $f(u) = f(v)$ các bạn có thể sử dụng mẹo mực nho nhỏ, ký hiệu căn thức về phải là $\sqrt[3]{P}$. Nếu về trái quy có chứa $t(mx+n)^3$, thực hiện cộng cả hai vế của phương trình với một đại lượng tP , tất yếu thu được hàm số $t(mx+n)^3 + l(mx+n) = tP + l\sqrt[3]{P}$.

Bài toán 47. Giải phương trình $x^3 + x^2 + 11x - 3 = 5\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 9} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 5x + 5 &= 2x^2 - 3x + 9 + 5\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 9} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 + 5(x+1) &= 2x^2 - 3x + 9 + 5\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 9} \quad (1) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 5t; t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Hàm số đang xét liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta thu được

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow f(x+1) = f(\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 9}) \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 9} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 2x^2 - 3x + 9 \\ &\Leftrightarrow x^3 + x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 2x + 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (x+1)^2 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 2x^2 + 8x - 4 &= 5\sqrt[3]{5(x+1) + 2x^2 - 8x + 4} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 - (2x^2 - 8x + 4) &= 5\sqrt[3]{5(x+1) + 2x^2 - 8x + 4} \end{aligned}$$

Đặt $x+1=u$; $\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 9} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^2 - 8x + 4) = 5v \\ v^3 - (2x^2 - 8x + 4) = 5u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 5v - 5u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 5) = 0.$$

Xét hai khả năng xảy ra

$$\begin{aligned} \diamond u = v &\Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 9} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 2x^2 - 3x + 9 \\ &\Leftrightarrow x^3 + x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 2x + 8) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (x + 1)^2 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \\ \diamond u^2 + uv + v^2 + 5 = 0 &\Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -5 \text{ (Vô nghiệm)}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Nhận xét.

Các bạn đọc giả dễ dàng nhận thấy từ bài toán 45, mức độ ẩn giấu bản chất của bài toán đã dần tăng lên, nguyên do có sự chuyển dịch đa thức từ $x \rightarrow mx + n$, trong dạng thức

$$(mx + n)^3 - g(x) = f(x) \sqrt[3]{f(x)(mx + n) + g(x)}.$$

Dù rằng phương pháp sử dụng tính chất đơn điệu hàm số là đơn giản hơn cả, nhưng rõ ràng việc phán đoán đa thức và thêm bớt, lắp ghép đã trở nên khó khăn hơn trước, nhiều khi mất thời gian, đặc biệt khi cố gắng sử dụng ẩn phụ quy về hệ phương trình đối xứng loại 2.

$$\text{Cụ thể là } \begin{cases} 45: mx + n \equiv x + 1 \\ 46: mx + n \equiv x - 1; \\ 47: mx + n \equiv x + 1 \end{cases} g(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c \\ ax^3 + bx^2 + cx + d \end{cases}; f(x) = \text{const}.$$

Tuy nhiên chúng ta có thể xử lý như sau, để ý số hạng tự do phía trong và ngoài căn thức.

Trong trường hợp $g(x) = ax^2 + bx + c$ và $f(x)$ có hệ số tự do k , ta có các hệ số tự do là $\begin{cases} n^3 - c \\ nk + c \end{cases}$

$$\text{Bài toán 45, } k = 4; \begin{cases} n^3 - c = 1 \\ nk + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 - c = 1 \\ 4n + c = 4 \end{cases} \Rightarrow n^3 + 4n = 5 \Leftrightarrow n = 1.$$

$$\text{Bài toán 46, } k = 2; \begin{cases} n^3 - c = -6 \\ nk + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 - c = -6 \\ 2n + c = 3 \end{cases} \Rightarrow n^3 + 2n = -3 \Leftrightarrow n = -1.$$

$$\text{Bài toán 47, } k = 5; \begin{cases} n^3 - c = -3 \\ nk + c = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 - c = -3 \\ 5n + c = 9 \end{cases} \Rightarrow n^3 + 5n = 6 \Leftrightarrow n = -1.$$

Cũng dễ dàng nhận thấy phía trong căn thức dạng tam thức bậc hai nên $m = 1$ là phù hợp hơn cả. Từ đây đi đến phép đặt ẩn phụ quy về hệ thích hợp.

Bài toán 48. Giải phương trình $x^3 + x^2 + 16x + 6 = 8\sqrt[3]{5x^2 + 4x + 18}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + 8x + 16 &= 5x^2 + 4x + 18 + 8\sqrt[3]{5x^2 + 4x + 18} \\ \Leftrightarrow (x + 2)^3 + 8(x + 2) &= 5x^2 + 4x + 18 + 8\sqrt[3]{5x^2 + 4x + 18} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = t^3 + 8t$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 8 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Dễ dàng thấy

$$f(x+2) = f\left(\sqrt[3]{5x^2+4x+18}\right) \Leftrightarrow x+2 = \sqrt[3]{5x^2+4x+18} \Leftrightarrow x^3+6x^2+12x+8 = 5x^2+4x+18$$

$$\Leftrightarrow x^3+x^2+8x-10=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+10)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (x+1)^2=-9 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x=1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3+6x^2+12x+8-5x^2+4x-2 = 8\sqrt[3]{8(x+2)+5x^2-4x+2}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^3 - (5x^2-4x+2) = 8\sqrt[3]{8(x+2)+5x^2-4x+2}$$

Đặt $x+2=u$; $\sqrt[3]{5x^2+4x+18}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (5x^2-4x+2) = 8v \\ v^3 - (5x^2-4x+2) = 8u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 8v - 8u \Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+8) = 0.$$

- $u=v \Leftrightarrow x+2 = \sqrt[3]{5x^2+4x+18} \Leftrightarrow x^3+6x^2+12x+8 = 5x^2+4x+18$
 $\Leftrightarrow x^3+x^2+8x-10=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+10)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ (x+1)^2=-9 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$
- $u^2+uv+v^2+8=0 \Leftrightarrow \left(u+\frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -8$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đề bài có nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

Ngoài ra, đối với bài toán 48 và lớp bài toán tương tự, các bạn học sinh có thể phán đoán được nhị thức $mx+n \equiv x+2$ không theo hệ số tự do, mà theo hệ số của hạng tử chứa x^2 , hoặc đồng nhất đồng bộ cũng rất nhanh chóng. Để ý rằng đa thức trong căn là tam thức bậc hai, bên ngoài căn là đa thức bậc ba (không phải bậc 6) nên nhị thức $mx+n$ là tất yếu (loại bỏ trường hợp phức tạp ax^2+bx+c).

$$\text{Tức là ta có } (x+n)^3 - (5x^2-4x+18-8n) = 8\sqrt[3]{8(x+n)+5x^2-4x+18-8n} \Rightarrow \begin{cases} n^3+8n-18=6 \\ 3n-5=1 \\ 3n^2+4=16 \end{cases} \Leftrightarrow n=2. \text{ Do đó}$$

$$(x+2)^3 - (5x^2-4x+2) = 8\sqrt[3]{8(x+2)+5x^2-4x+2}$$

$$\Leftrightarrow x^3+6x^2+12x+8-5x^2+4x-2 = 8\sqrt[3]{8(x+2)+5x^2-4x+2}$$

Bài toán 49. Giải phương trình $2x^3+4x^2+11x+3 = 3\sqrt[3]{x^2-x+1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2(x^3+3x^2+3x+1)+3x+3 = 2x^2-2x+2+3\sqrt[3]{x^2-x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^3+3(x+1) = 2(x^2-x+1)+3\sqrt[3]{x^2-x+1}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3+3t$ thì $f'(t) = 6t^2+3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Thu được

$$f(x+1) = f(\sqrt[3]{x^2 - x + 1}) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^2 - x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x+1)^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = 0$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 2x^2 + \frac{11}{2}x + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2 - x + 1}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - \left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} + x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 - \left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}(x+1) + x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}}$$

Đặt $x+1 = u$; $\sqrt[3]{x^2 - x + 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - \left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}v \\ v^3 - \left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{3}{2}v - \frac{3}{2}u \Leftrightarrow (u-v)\left(u^2 + uv + v^2 + \frac{3}{2}\right) = 0.$$

Xét các trường hợp xảy ra

$$\checkmark \quad u = v \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^2 - x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x+1)^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{3}{2} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đề bài có duy nhất nghiệm $x = 0$.

Nhận xét.

Phân tích lời giải 2. Để tạo ra hằng đẳng thức các bạn chia hai vế cho hệ số của hạng tử chứa x^3 .

$$2x^3 + 4x^2 + 11x + 3 = 3\sqrt[3]{x^2 - x + 1} \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 + \frac{11}{2}x + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2 - x + 1}$$

$$\Leftrightarrow (x+n)^3 - \left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1 - \frac{3}{2}n\right) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}(x+n) + x^2 - \frac{5}{2}x + 1 - \frac{3}{2}n}$$

$$\text{Sử dụng đồng nhất hệ số đồng bộ} \begin{cases} n^3 + \frac{3}{2}n - 1 = \frac{3}{2} & (i) \\ 3n - 1 = 2 & (ii) \\ 3n^2 + \frac{5}{2} = \frac{11}{2} & (iii) \end{cases} \Leftrightarrow n = 1.$$

Chú ý có thể sử dụng một trong ba hệ thức (i), (ii), (iii), trừ khi phương trình đề bài không thể quy về hệ đối xứng loại 2! Ba hệ thức kiểm tra lẫn nhau đảm bảo bài toán khả thi đưa về hệ đối xứng loại 2. Để tự nhiên các bạn nên phân tích tuần tự

$$\begin{aligned}(x+1)^3 - \left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}\right) &= \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{3}{2}(x+1) + x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - \left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}\right) &= \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} + x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Bài toán 50. Giải phương trình $3x^3 - 12x^2 + 28x - 28 = 4\sqrt[3]{x^2 - 5x + 7}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}3(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 4x - 4 &= 3(x^2 - 5x + 7) + 4\sqrt[3]{x^2 - 5x + 7} \\ \Leftrightarrow 3(x-1)^3 + 4(x-1) &= 3(x^2 - 5x + 7) + 4\sqrt[3]{x^2 - 5x + 7} \quad (1)\end{aligned}$$

Đặt $x-1 = u$; $\sqrt[3]{x^2 - 5x + 7} = v$ ta thu được

$$(1) \Leftrightarrow 3u^3 + 4u = 3v^3 + 4v \Leftrightarrow 3(u^3 - v^3) + 4(u - v) = 0 \Leftrightarrow (u - v)[3(u^2 + uv + v^2) + 4] = 0.$$

Xét hai khả năng xảy ra

- $u = v \Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 7} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 - 5x + 7$
 $\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 8x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$
- $3(u^2 + uv + v^2) + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{4}{3}$ (Vô nghiệm).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}x^3 - 4x^2 + \frac{28}{3}x - \frac{28}{3} &= \frac{4}{3} \sqrt[3]{x^2 - 5x + 7} \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - \left(x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{25}{3}\right) &= \frac{4}{3} \sqrt[3]{\frac{4}{3}(x-1) + x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{25}{3}} \\ \Leftrightarrow (x-1)^3 - \left(x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{25}{3}\right) &= \frac{4}{3} \sqrt[3]{\frac{4}{3}(x-1) + x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{25}{3}}\end{aligned}$$

Đặt $x-1 = u$; $\sqrt[3]{x^2 - 5x + 7} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - \left(x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{25}{3}\right) = \frac{4}{3}v \\ v^3 - \left(x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{25}{3}\right) = \frac{4}{3}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{4}{3}v - \frac{4}{3}u \Leftrightarrow (u - v)\left(u^2 + uv + v^2 + \frac{4}{3}\right) = 0.$$

Xét hai khả năng xảy ra

- $u = v \Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 7} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 - 5x + 7$
 $\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 8x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$
- $u^2 + uv + v^2 + \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{4}{3}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Nhận xét.

Để xuất hiện ắn phụ đưa về hệ chúng ta tìm hệ số n .

$$x^3 - 4x^2 + \frac{28}{3}x - \frac{28}{3} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x^2 - 5x + 7}$$

$$\Leftrightarrow (x+n)^3 - \left(x^2 - \frac{19}{3}x + 7 - \frac{4}{3}n\right) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{3}(x+n) + x^2 - \frac{19}{3}x + 7 - \frac{4}{3}n}$$

Đồng nhất hệ số $\begin{cases} n^3 + \frac{4}{3}n - 7 = -\frac{28}{3} \\ 3n - 1 = -4 \\ 3n^2 + \frac{19}{3} = \frac{28}{3} \end{cases} \Leftrightarrow n = -1.$

Bài toán 51. Giải phương trình $24x^3 - 42x^2 + 37x - 14 = 5\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$3(8x^3 - 12x^2 + 6x - 1) + 10x - 5 = 3(2x^2 - 3x + 2) + 5\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}$$

$$\Leftrightarrow 3(2x - 1)^3 + 5(2x - 1) = 3(2x^2 - 3x + 2) + 5\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}$$

Xét hàm số $f(t) = 3t^3 + 5t; t \in \mathbb{R}$ thì $f'(t) = 9t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta thu được

$$f(2x - 1) = f(\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}) \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 2x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow 8x^3 - 14x^2 + 9x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(8x^2 - 6x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 8x^2 - 6x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$8x^3 - 14x^2 + \frac{37}{3}x - \frac{14}{3} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - 2x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{11}{3} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{3}(2x - 1) + 2x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{11}{3}}$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)^3 - \left(2x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{11}{3}\right) = \frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{3}(2x - 1) + 2x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{11}{3}}$$

Đặt $2x - 1 = u; \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - \left(2x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{11}{3}\right) = \frac{5}{3}v \\ v^3 - \left(2x^2 - \frac{19}{3}x + \frac{11}{3}\right) = \frac{5}{3}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{5}{3}v - \frac{5}{3}u \Leftrightarrow (u - v)\left(u^2 + uv + v^2 + \frac{5}{3}\right) = 0.$$

$$\text{➤ } u^2 + uv + v^2 + \frac{5}{3} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{5}{3} \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\text{➤ } u = v \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2} \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 2x^2 - 3x + 2$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 14x^2 + 9x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(8x^2 - 6x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 8x^2 - 6x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Nhận xét.

Để xuất hiện ẩn số phụ đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2, chúng ta tìm hệ số n .

$$8x^3 - 14x^2 + \frac{37}{3}x - \frac{14}{3} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{2x^2 - 3x + 2}$$

$$\Leftrightarrow (2x+n)^3 - \left(2x^2 - \frac{19}{3}x + 2 - \frac{5}{3}n\right) = \frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{3}(2x+n) + 2x^2 - \frac{19}{3}x + 2 - \frac{5}{3}n}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số} \begin{cases} n^3 + \frac{5}{3}n - 2 = -\frac{14}{3} \\ 12n - 2 = -14 \\ 6n^2 + \frac{19}{3} = \frac{37}{3} \end{cases} \Leftrightarrow n = -1.$$

Bài toán 52. Giải phương trình $54x^3 - 60x^2 + 35x - 19 = 5\sqrt[3]{3x^2 - x + 6}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2(27x^3 - 27x^2 + 9x - 1) + 15x - 5 = 2(3x^2 - x + 6) + 5\sqrt[3]{3x^2 - x + 6}$$

$$\Leftrightarrow 2(3x-1)^3 + 5(3x-1) = 2(3x^2 - x + 6) + 5\sqrt[3]{3x^2 - x + 6}$$

Đặt $3x-1=u$; $\sqrt[3]{3x^2 - x + 6}=v$ ta thu được

$$2u^3 + 5u = 2v^3 + 5v \Leftrightarrow 2(u^3 - v^3) + 5(u-v) = 0 \Leftrightarrow (u-v)[2(u^2 + uv + v^2) + 5] = 0.$$

Xét các trường hợp

- $u=v \Leftrightarrow 3x-1=\sqrt[3]{3x^2 - x + 6} \Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = 3x^2 - x + 6$
 $\Leftrightarrow 27x^3 - 30x^2 + 10x - 7 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(27x^2 - 3x + 7) = 0 \Leftrightarrow x=1.$
- $2(u^2 + uv + v^2) + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{5}{2}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x=1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$27x^3 - 30x^2 + \frac{35}{2}x - \frac{19}{2} = \frac{5}{2}\sqrt[3]{3x^2 - x + 6}$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 - \left(3x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{17}{2}\right) = \frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{2}(3x-1) + 3x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{17}{2}}$$

Đặt $3x-1=u$; $\sqrt[3]{3x^2 - x + 6}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - \left(3x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{17}{2}\right) = \frac{5}{2}v \\ v^3 - \left(3x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{17}{2}\right) = \frac{5}{2}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{5}{2}v - \frac{5}{2}u \Leftrightarrow (u-v)\left(u^2 + uv + v^2 + \frac{5}{2}\right) = 0.$$

Xét các trường hợp

- $u^2 + uv + v^2 + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{5}{2}$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow 3x - 1 = \sqrt[3]{3x^2 - x + 6} \Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = 3x^2 - x + 6$
 $\Leftrightarrow 27x^3 - 30x^2 + 10x - 7 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(27x^2 - 3x + 7) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Kết luận phương trình ban đầu có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Nhận xét.

Quy trình đưa về hệ phương trình đối xứng

$$27x^3 - 30x^2 + \frac{35}{2}x - \frac{19}{2} = \frac{5}{2}\sqrt[3]{3x^2 - x + 6}$$

$$\Leftrightarrow (3x + n)^3 - \left(3x^2 - \frac{17}{2}x + 6 - \frac{5}{2}n\right) = \frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{2}(3x + n) + 3x^2 - \frac{17}{2}x + 6 - \frac{5}{2}n}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số} \begin{cases} n^3 + \frac{5}{2}n - 6 = -\frac{19}{2} \\ 27n - 3 = -30 \\ 9n^2 + \frac{17}{2} = \frac{35}{2} \end{cases} \Leftrightarrow n = -1 \Rightarrow (3x - 1)^3 - \left(3x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{17}{2}\right) = \frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{2}(3x - 1) + 3x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{17}{2}}.$$

Các bài toán từ 53 trở đi, vẫn nằm trong dạng thức $(mx + n)^3 - g(x) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx + n) + g(x)}$ trong đó $f(x)$ vẫn có dạng hằng số, tuy nhiên mức độ khó đã nâng lên nguyên do $g(x)$ sẽ có dạng đa thức bậc ba, bậc bốn và cao hơn. Mời quý độc giả theo dõi các thí dụ điển hình tiếp theo

Bài toán 53. Giải phương trình $4x^2 - 3 = \sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + x + 3} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + x + 3 + 4x^2 - 3 &= x^3 - 4x^2 + x + 3 + \sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + x + 3} \\ \Leftrightarrow x^3 + x &= x^3 - 4x^2 + x + 3 + \sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + x + 3} \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + x + 3} = y$ ta thu được

$$x^3 + x = y^3 + y \Leftrightarrow x^3 - y^3 + x - y = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 1) = 0.$$

Xét hai khả năng

- ❖ $x^2 + xy + y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -1$ (Vô nghiệm).
- ❖ $x = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x^3 - 4x^2 + x + 3} \Leftrightarrow x^3 = x^3 - 4x^2 + x + 3$
 $\Leftrightarrow 4x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(4x + 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{3}{4}; 1\right\}.$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 54. Giải phương trình $x^3 + x^2 + 2\sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 4x + 2} + 2 = 6x \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$-x^3 - x^2 + 6x - 2 = 2\sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 4x + 2}$$

$$\Leftrightarrow -x^3 - x^2 + 6x - 2 + 2x^3 + x^2 - 4x + 2 = 2x^3 + x^2 - 4x + 2 + 2\sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 4x + 2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 2x = 2x^3 + x^2 - 4x + 2 + 2\sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 4x + 2}$$

Đặt $\sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 4x + 2} = y$ ta thu được

$$x^3 + 2x = y^3 + 2y \Leftrightarrow x^3 - y^3 + 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0.$$

Xét các trường hợp

- $x = y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 4x + 2} \Leftrightarrow x^3 = 2x^3 + x^2 - 4x + 2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right\}$
- $x^2 + xy + y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -2$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$-x^3 - x^2 + 6x - 2 = 2\sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 4x + 2}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - (2x^3 + x^2 - 6x + 2) = 2\sqrt[3]{2x + 2x^3 + x^2 - 6x + 2}$$

Đặt $x = u; \sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 4x + 2} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^3 + x^2 - 6x + 2) = 2v \\ v^3 - (2x^3 + x^2 - 6x + 2) = 2u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 2v - 2u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 2) = 0.$$

Xét các trường hợp sau

- ✓ $u = v \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 4x + 2} \Leftrightarrow x^3 = 2x^3 + x^2 - 4x + 2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 2x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right\}.$
- ✓ $u^2 + uv + v^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -2$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 55. Giải phương trình $7x^3 + 3x^2 - 8 = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x + 8}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$7x^3 + 3x^2 - 8 + x^3 - 3x^2 + 2x + 8 = x^3 - 3x^2 + 2x + 8 + \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x + 8}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 + 2x = x^3 - 3x^2 + 2x + 8 + \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x + 8}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t; t \in \mathbb{R}$ thì $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta thu được

$$f(2x) = f\left(\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x + 8}\right) \Leftrightarrow 8x^3 = x^3 - 3x^2 + 2x + 8$$

$$\Leftrightarrow 7x^3 + 3x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(7x^2 + 10x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Kết luận phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{1\}$.

Bài toán 56. Giải phương trình $5x^3 + x^2 + 10x - 2 = 7\sqrt[3]{3x^3 - x^2 + 4x + 2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(2x)^3 - (3x^3 + x^2 - 10x + 2) = 7\sqrt[3]{7.2x + 3x^3 + x^2 - 10x + 2}.$$

Đặt $2x = u; 3x^3 + x^2 - 10x + 2 = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (3x^3 + x^2 - 10x + 2) = 7v \\ v^3 - (3x^3 + x^2 - 10x + 2) = 7u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 7v - 7u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 7) = 0.$$

Xét các khả năng

- $u = v \Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{3x^3 - x^2 + 4x + 2} \Leftrightarrow 8x^3 = 3x^3 - x^2 + 4x + 2$
 $\Leftrightarrow 5x^3 + x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(5x^2 + 6x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- $u^2 + uv + v^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -7$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $S = \{1\}$.

Nhận xét.

Trong trường hợp $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ta có dạng thức phức tạp hơn một chút

$$(mx+n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}.$$

Để ý rằng vẫn có sự đơn giản $f(x) \equiv 7$ nên

$$(mx+n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = 7\sqrt[3]{7(mx+n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}.$$

$$\text{Rõ ràng } a=3; b=1 \Rightarrow \begin{cases} m^3 - 3 = 5 \\ 7m + c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ c = -10 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó thu được } (2x+n)^3 - (3x^3 + x^2 - 10x + d) = 7\sqrt[3]{7(2x+n) + (3x^3 + x^2 - 10x + d)}.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} n^3 - d = -2 \\ 7n + d = 2 \end{cases} \Rightarrow n^3 + 7n = 0 \Leftrightarrow n = 0 \Rightarrow (2x)^3 - (3x^3 + x^2 - 10x + 2) = 7\sqrt[3]{7.2x + 3x^3 + x^2 - 10x + 2}.$$

Bài toán 57. Giải phương trình $46x^3 - 14x^2 - 9x - 8 = 5\sqrt[3]{4x^3 + 7x^2 + 12x + 4} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$2(3x)^3 + 5.3x = 4x^3 + 7x^2 + 12x + 4 + 5\sqrt[3]{4x^3 + 7x^2 + 12x + 4}.$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + 5t$ ta có $f'(t) = 6t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, hàm số liên tục và đồng biến. Ta thu được

$$\begin{aligned} f(3x) &= f\left(\sqrt[3]{4x^3 + 7x^2 + 12x + 4}\right) \Leftrightarrow 27x^3 = 4x^3 + 7x^2 + 12x + 4 \\ &\Leftrightarrow 23x^3 - 7x^2 - 12x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(23x^2 + 16x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$23x^3 - 7x^2 - \frac{9}{2}x - 4 = \frac{5}{2}\sqrt[3]{4x^3 + 7x^2 + 12x + 4}$$

$$\Leftrightarrow (3x)^3 - \left(4x^3 + 7x^2 + \frac{9}{2}x + 4\right) = \frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{2} \cdot 3x + 4x^3 + 7x^2 + \frac{9}{2}x + 4}$$

Đặt $3x = u$; $\sqrt[3]{4x^3 + 7x^2 + 12x + 4} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - \left(4x^3 + 7x^2 + \frac{9}{2}x + 4\right) = \frac{5}{2}v \\ v^3 - \left(4x^3 + 7x^2 + \frac{9}{2}x + 4\right) = \frac{5}{2}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{5}{2}v - \frac{5}{2}u \Leftrightarrow (u-v)\left(u^2 + uv + v^2 + \frac{5}{2}\right) = 0.$$

Xét các trường hợp

- $u = v \Leftrightarrow 3x = \sqrt[3]{4x^3 + 7x^2 + 12x + 4} \Leftrightarrow 27x^3 = 4x^3 + 7x^2 + 12x + 4$
 $\Leftrightarrow 23x^3 - 7x^2 - 12x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(23x^2 + 16x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
- $u^2 + uv + v^2 + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{5}{2}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Nhận xét.

Bài toán số 57, thao tác đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình cần chú ý một chút.

Dạng thức $(mx+n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}.$

Do $f(x) \equiv 5 \Rightarrow (mx+n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = 5\sqrt[3]{5(mx+n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}.$

Các phương án đưa ra như sau

Phương án 1.

$$\text{Đồng nhất } a=4; b=7 \Rightarrow \begin{cases} m^3 - 4 = 46 \\ 5m + c = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 = 50 \\ 5m + c = 12 \end{cases} \text{ (Loại, hệ số } m \notin \mathbb{Z}).$$

Phương án 2.

Chia hai vế cho các ước của 46, chẳng hạn đơn giản giản ước cho 2 thu được

$$23x^3 - 7x^2 - \frac{9}{2}x - 4 = \frac{5}{2}\sqrt[3]{4x^3 + 7x^2 + 12x + 4}.$$

$$\text{Để ý } f(x) \equiv \frac{5}{2} \Rightarrow (mx+n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = \frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{2}(mx+n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}.$$

$$\text{Đồng nhất } a=4; b=7 \Rightarrow \begin{cases} m^3 - 4 = 23 \\ \frac{5}{2}m + c = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ c = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\text{Thu được } (3x+n)^3 - \left(4x^3 + 7x^2 + \frac{9}{2}x + d\right) = \frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{2}(3x+n) + \left(4x^3 + 7x^2 + \frac{9}{2}x + d\right)}.$$

$$\text{Tiếp tục tìm } n \text{ và } d, \text{ đồng nhất } \begin{cases} n^3 - d = -4 \\ \frac{5}{2}n + d = 4 \end{cases} \Rightarrow n^3 + \frac{5}{2}n = 0 \Rightarrow n = 0.$$

$$\text{Do đó ta có lắp ghép } (3x)^3 - \left(4x^3 + 7x^2 + \frac{9}{2}x + 4\right) = \frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{5}{2} \cdot 3x + 4x^3 + 7x^2 + \frac{9}{2}x + 4}.$$

Bài toán 58. Giải phương trình $21x^3 - 15x^2 + 11x - 3 = 7\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + x + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$3(2x)^3 + 7.2x = 3(x^3 + 5x^2 + x + 1) + 7\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + x + 1}.$$

Đặt $2x = u; \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + x + 1} = v$ ta thu được

$$3u^3 + 7u = 3v^3 + 7v \Leftrightarrow 3(u^3 - v^3) + 7(u - v) = 0 \Leftrightarrow (u - v)[3(u^2 + uv + v^2) + 7] = 0.$$

- $3(u^2 + uv + v^2) + 7 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{7}{3}$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + x + 1} \Leftrightarrow 8x^3 = x^3 + 5x^2 + x + 1 \Leftrightarrow 7x^3 - 5x^2 - x - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)(7x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 6x^2 + (x+1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 7x^3 - 5x^2 + \frac{11}{3}x - 1 &= \frac{7}{3}\sqrt[3]{\frac{7}{3}.2x + x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x + 1} \\ \Leftrightarrow (2x)^3 - \left(x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x + 1\right) &= \frac{7}{3}\sqrt[3]{\frac{7}{3}.2x + x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x + 1} \end{aligned}$$

Đặt $2x = u; \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + x + 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - \left(x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x + 1\right) = \frac{7}{3}v \\ v^3 - \left(x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x + 1\right) = \frac{7}{3}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{7}{3}(v - u) \Leftrightarrow (u - v)[3(u^2 + uv + v^2) + 7] = 0.$$

- $3(u^2 + uv + v^2) + 7 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{7}{3}$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + x + 1} \Leftrightarrow 8x^3 = x^3 + 5x^2 + x + 1 \Leftrightarrow 7x^3 - 5x^2 - x - 1 = 0$
 $\Leftrightarrow (x-1)(7x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 6x^2 + (x+1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

Để xuất hiện ắn phụ ta xử lý tương tự bài toán số 57.

$$\text{Dạng thức } (mx + n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx + n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}$$

$$\text{Do } f(x) \equiv 7 \Rightarrow (mx + n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = 7\sqrt[3]{7(mx + n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}.$$

Các phương án đưa ra như sau

Phương án 1.

$$\text{Đồng nhất } a = 1; b = 5 \Rightarrow \begin{cases} m^3 - 1 = 21 \\ 7m + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^3 = 22 \\ 7m + c = 1 \end{cases} (m \notin \mathbb{Z}).$$

Phương án 2.

Chia hai vế cho các ước của 21, chẳng hạn đơn giản giản ước cho 3 thu được

$$7x^3 - 5x^2 + \frac{11}{3}x - 1 = \frac{7}{3} \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + x + 1}.$$

$$\text{Để ý rằng } f(x) \equiv \frac{7}{3} \Rightarrow (mx+n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = \frac{7}{3} \sqrt[3]{\frac{7}{3}(mx+n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}.$$

$$\text{Đồng nhất } a=1; b=5 \Rightarrow \begin{cases} m^3 - 1 = 7 \\ \frac{7}{3}m + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ c = -\frac{11}{3} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó thay vào, ta có } (2x+n)^3 - \left(x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x + d\right) = \frac{7}{3} \sqrt[3]{\frac{7}{3}(2x+n) + x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x + d}.$$

$$\text{Tìm } n \text{ và } d, \text{ đồng nhất } \begin{cases} n^3 - d = -1 \\ \frac{7}{3}n + d = 1 \end{cases} \Rightarrow n^3 + \frac{7}{3}n = 0 \Leftrightarrow n = 0. \text{ Do đó có biến đổi}$$

$$\begin{aligned} 7x^3 - 5x^2 + \frac{11}{3}x - 1 &= \frac{7}{3} \sqrt[3]{\frac{7}{3} \cdot 2x + x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x + 1} \\ \Leftrightarrow (2x)^3 - \left(x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x + 1\right) &= \frac{7}{3} \sqrt[3]{\frac{7}{3} \cdot 2x + x^3 + 5x^2 - \frac{11}{3}x + 1} \end{aligned}$$

Bài toán 59. Giải phương trình $24x^3 + 4x^2 + 10x - 16 = 11\sqrt[3]{2x^3 - x^2 + 3x + 4}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 6x^3 + x^2 + \frac{5}{2}x - 4 &= \frac{11}{4} \sqrt[3]{2x^3 - x^2 + 3x + 4} \\ \Leftrightarrow (2x)^3 - \left(2x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 4\right) &= \frac{11}{4} \sqrt[3]{\frac{11}{4} \cdot 2x + 2x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 4} \end{aligned}$$

Đặt $2x = u$; $\sqrt[3]{2x^3 - x^2 + 3x + 4} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - \left(2x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 4\right) = \frac{11}{4}v \\ v^3 - \left(2x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 4\right) = \frac{11}{4}u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \frac{11}{4}v - \frac{11}{4}u \Leftrightarrow (u-v) \left(u^2 + uv + v^2 + \frac{11}{4}\right) = 0.$$

$$\text{➤ } u^2 + uv + v^2 + \frac{11}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -\frac{11}{4} \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } u = v &\Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{2x^3 - x^2 + 3x + 4} \Leftrightarrow 8x^3 = 2x^3 - x^2 + 3x + 4 \\ &\Leftrightarrow 6x^3 + x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(6x^2 + 7x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Nhận xét.

Đối với bài toán này, để xuất hiện ắn phụ, chúng ta thao tác tương tự bài toán 58

$$(mx+n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = f(x) \sqrt[3]{f(x)(mx+n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}.$$

$$\text{Do } f(x) \equiv 11 \Rightarrow (mx+n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = 11 \sqrt[3]{11(mx+n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}.$$

Phương án 1. Đồng nhất $a = 2; b = -1 \Rightarrow \begin{cases} m^3 - a = 24 \\ 11m + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 - 2 = 24 \\ 11m + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 = 26 \\ 11m + c = 3 \end{cases} (m \notin \mathbb{Z}).$

Phương án 2.

Thực hiện chia cả hai vế cho ước dương (khác 1 và 24) của số 24. Tuy nhiên 24 có khá nhiều ước dương bao gồm 2; 4; 6; 8; 12. Tuy nhiên thông qua một số bài toán điển hình có lẽ chúng ta đã mạnh nha được ý đồ nào đó. Để ý rằng luôn có $a = 2; m^3 - a = k \Rightarrow m^3 = k + 2$. Do đó định hình hướng đi xác định số nguyên k sao cho $k + 2$ là lập phương của một số tự nhiên và k là ước dương của 24. Rõ ràng thấy ngay $k = 6$. Do đó chia hai vế của phương trình cho 4 ta có

$$6x^3 + x^2 + \frac{5}{2}x - 4 = \frac{11}{4} \sqrt[3]{2x^3 - x^2 + 3x + 4}.$$

Do $f(x) \equiv \frac{11}{4} \Rightarrow (mx + n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = \frac{11}{4} \sqrt[3]{\frac{11}{4}(mx + n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}.$

Như vậy $\begin{cases} m = 2; a = 2 \\ \frac{11}{4}m + c = 3 \\ n^3 - d = -4 \\ \frac{11}{4}n + d = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2; a = 2 \\ c = -\frac{5}{2} \\ n = 0; d = 4 \end{cases} \Rightarrow (2x)^3 - \left(2x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 4\right) = \frac{11}{4} \sqrt[3]{\frac{11}{4} \cdot 2x + 2x^3 - x^2 - \frac{5}{2}x + 4}.$

Bài toán 60. Giải phương trình $x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2(x + 1) = -x^3 + 9x^2 - 19x + 11 + 2\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^3 + 2(x - 1) = -x^3 + 9x^2 - 19x + 11 + 2\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 2 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$.

Do vậy hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow f(x - 1) = f\left(\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}\right) \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = -x^3 + 9x^2 - 19x + 11 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3\}.$$

Thử lại ba giá trị trên đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Kết luận tập hợp nghiệm $S = \{1; 2; 3\}$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} = y \Rightarrow -x^3 + 9x^2 - 19x + 11 = y^3$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = y \\ -x^3 + 9x^2 - 19x + 11 = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 12x^2 + 24x - 14 = 2y \\ -x^3 + 9x^2 - 19x + 11 = y^3 \end{cases}$$

Thực hiện cộng từng vế hai phương trình của hệ ta có

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2(x + 1) = y^3 + 2y \Leftrightarrow (x - 1)^3 + 2(x - 1) = y^3 + 2y \quad (1).$$

$$\text{Đặt } x - 1 = t : (1) \Leftrightarrow t^3 + 2t = y^3 + 2y \Leftrightarrow (t^3 - y^3) + 2(t - y) = 0 \Leftrightarrow (t - y)(t^2 + ty + y^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = y \\ t^2 + ty + y^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad t = y \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3\}.$$

$$\bullet \quad t^2 + ty + y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -2 \quad (\text{Vô nghiệm}).$$

Thử lại ba giá trị trên đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Kết luận tập hợp nghiệm $S = \{1; 2; 3\}$.

Lời giải 3.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2x^3 - 12x^2 + 24x - 14 = 2\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} \\ &\Leftrightarrow (x-1)^3 - (-x^3 + 9x^2 - 21x + 13) = 2\sqrt[3]{2(x-1) + (-x^3 + 9x^2 - 21x + 13)} \end{aligned}$$

Đặt $x-1 = u$; $\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (-x^3 + 9x^2 - 21x + 13) = 2v \\ v^3 = 2u + (-x^3 + 9x^2 - 21x + 13) \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 2v - 2u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 - uv + v^2 + 2) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 - uv + v^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad u = v &\Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x \in \{1; 2; 3\}. \\ \bullet \quad u^2 + uv + v^2 + 2 &= 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -2 \quad (\text{Vô nghiệm}). \end{aligned}$$

Thử lại ba giá trị trên đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Kết luận tập hợp nghiệm $S = \{1; 2; 3\}$.

Nhận xét.

- Lời giải 3 dựa theo motip sử dụng ắnn phụ đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2, trước đó có nhân hai về phương trình ban đầu với hằng số 2, có sự khác biệt so với các phương trình tương tự trước, mặc dù về trái là đa thức có thể phân tích về dạng lập phương! Vì sao lại thế?

Thêm một lần các bạn chú ý dạng tổng quát $(mx+n)^3 - g(x) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n) + g(x)}$.

Liên hệ với bài toán gốc $x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}$.

Ở đây $f(x) \equiv 1$ là một hằng số, giảm nhẹ tính toán cho chúng ta, nhưng thực tế có đơn giản hay không?

Giả dụ về trái phân tích dạng $(x+m)^3 - (ax^2 + bx + c)$. Suy ra trong căn cần có $1\sqrt[3]{1(x+m) + (ax^2 + bx + c)}$.

Như vậy không thể xuất hiện được đa thức bậc ba trong căn!

Điều này chứng tỏ rằng phương án $g(x)$ là một tam thức $ax^2 + bx + c$ bất khả thi, hợp lý hơn là một đa thức bậc ba, và $f(x)$ vẫn là nhị thức bậc nhất.

Để ý một chút biểu thức phía trong căn (đề bài), tối thiểu ta cần có $k\sqrt[3]{k(mx+n) + (-x^3 + ax^2 + bx + c)}$.

Trong đó k là hệ số nguyên sẽ nhân vào hai vế của phương trình gốc.

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $k > 0$, cụ thể $k \neq 1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \geq 2$

Tiếp tục liên hệ về trái: $(mx+n)^3 - (-x^3 + ax^2 + bx + c)$.

Rõ ràng nếu $m \leq 0$ thì hệ số của hạng tử chứa x^3 nhỏ hơn 1, trong khi đó với $k \geq 2$ thì hệ số của hạng tử chứa x^3 bên vế trái tối thiểu bằng 2. Suy ra rằng $m \geq 1$, cũng tương đương với $k \geq 2$.

Sử dụng đồng nhất

$$(mx+n)^3 - (-x^3 + ax^2 + bx + c) = k\sqrt[3]{k(mx+n) + (-x^3 + ax^2 + bx + c)} = k(x^3 - 6x^2 + 12x - 7)$$

Ta thiết lập được hệ thức $m^3 + 1 = k$. Thử chọn lần lượt các giá trị $k = 2, 9, 28, \dots$ thấy ngay $k = 2$ thỏa mãn.

Kết quả là thu được lời giải 3 như trên.

- Nếu sử dụng đồng nhất tương tự các lời giải trước thì

$$(mx+n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}$$

$$f(x) \equiv 1; a = -1; b = 9 \Rightarrow (mx + n)^3 - (-x^3 + 9x^2 + cx + d) = \sqrt[3]{(mx + n) + (-x^3 + 9x^2 + cx + d)}.$$

Để thấy rằng $m^3 + 1 = 1 \Rightarrow m = 0$ (Loại). Do vậy cần nhân hai vế của phương trình với hệ số k , tức là

$$k(x^3 - 6x^2 + 12x - 7) = k\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}$$

$$\Rightarrow (mx + n)^3 - (-x^3 + 9x^2 + cx + d) = k\sqrt[3]{k(mx + n) + (-x^3 + 9x^2 + cx + d)}$$

$$\text{Thiết lập đồng nhất thức} \begin{cases} m^3 + 1 = k \\ n^3 - d = -7k \\ km + c = -19 \\ kn + d = 11 \end{cases} \text{ tương tự ta thu được lời giải 3 phía trên.}$$

Tài liệu nhỏ này trọng tâm đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình và một số kiến thức cơ bản liên quan, một bài toán tất yếu còn nhiều hướng giải độc đáo và bất ngờ khác, các bạn tùy nghi lựa chọn và sáng tạo phù hợp cho mình, vì kho tàng kiến thức luôn luôn vô tận, chân trời khoa học mãi là bao la !

Bài toán 61. Giải phương trình $52x^3 + 61x - 107 = 3\sqrt[3]{x^3 - 27x^2 - 17x + 51}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$54x^3 - 54x^2 + 27x - 5 = 2(x^3 - 27x^2 - 17x + 51) + 3\sqrt[3]{x^3 - 27x^2 - 17x + 51}$$

$$\Leftrightarrow 2(3x - 1)^3 + 3(3x - 1) = 2(x^3 - 27x^2 - 17x + 51) + 3\sqrt[3]{x^3 - 27x^2 - 17x + 51} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + 3t; t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 6t^2 + 3 > 0 \forall t \in \mathbb{R}$. Suy ra hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$(*) \Leftrightarrow f(3x - 1) = f(\sqrt[3]{x^3 - 27x^2 - 17x + 51}) \Leftrightarrow 3x - 1 = \sqrt[3]{x^3 - 27x^2 - 17x + 51}$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = x^3 - 27x^2 - 17x + 51 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Thử lại, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $\sqrt[3]{x^3 - 27x^2 - 17x + 51} = y \Rightarrow x^3 - 27x^2 - 17x + 51 = y^3$. Ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} 52x^3 + 61x - 107 = 3y \\ x^3 - 27x^2 - 17x + 51 = y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 52x^3 + 61x - 107 = 3y \\ 2x^3 - 54x^2 - 34x + 102 = 2y^3 \end{cases}$$

Thực hiện cộng từng vế hai phương trình của hệ ta có

$$54x^3 - 54x^2 + 27x - 5 = 3y + 2y^3 \Leftrightarrow 2(3x - 1)^3 + 3(3x - 1) = 2y^3 + 3y$$

Đặt $3x - 1 = t$ thì

$$2t^3 + 3t = 2y^3 + 3y \Leftrightarrow 2(t^3 - y^3) + 3(t - y) = 0 \Leftrightarrow (t - y)(2t^2 - 2ty + 2y^2 + 3) \Leftrightarrow \begin{cases} t = y \\ 2t^2 - 2ty + 2y^2 + 3 = 0 \end{cases}$$

- $t = y \Leftrightarrow 3x - 1 = \sqrt[3]{x^3 - 27x^2 - 17x + 51} \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0 \Rightarrow x = 1.$
- $2t^2 - 2ty + 2y^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2ty + y^2 + t^2 + y^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (t - y)^2 + t^2 + y^2 = -3$ (Vô nghiệm).

Thử lại, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Nhận xét.

Bài toán số 61 nếu để xuất hiện ẩn phụ đưa về hệ phương trình, chúng ta cần chia hệ số

$$(mx + n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx + n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}.$$

Do $a=1; m^3 - a = 52 \Rightarrow m^3 = 52 + 1 = 53$ (Loại).

Giả định $a=1; m^3 - a = k, k|52 \Rightarrow m^3 = k + 1$. Vì $k|52, k \in \mathbb{N} \Rightarrow k \in \{2; 4; 13; 26\}$, dễ thấy $k = 26 \Rightarrow m = 3$. Như vậy chia hai vế cho hằng số 2 thu được

$$52x^3 + 61x - 107 = 3\sqrt[3]{x^3 - 27x^2 - 17x + 51}$$

$$\Leftrightarrow 26x^3 + \frac{61}{2}x - \frac{107}{2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^3 - 27x^2 - 17x + 51}$$

$$\Leftrightarrow (3x+n)^3 - (x^3 + 27x^2 + cx + d) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}(3x+n) + (x^3 - 27x^2 + cx + d)}$$

Đồng nhất hệ số $\begin{cases} n^3 - d = -\frac{107}{2} \\ \frac{3}{2}n + d = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 + \frac{3}{2}n = -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2}n + d = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \\ d = \frac{105}{2} \end{cases} \Rightarrow c = -\frac{43}{2}$. Suy ra

$$(3x-1)^3 - \left(x^3 - 27x^2 - \frac{43}{2}x + \frac{105}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}(3x-1) + \left(x^3 - 27x^2 - \frac{43}{2}x + \frac{105}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 - x^3 + 27x^2 + \frac{43}{2}x - \frac{105}{2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{3}{2}(3x-1) + x^3 - 27x^2 - \frac{43}{2}x + \frac{105}{2}}$$

Bài toán 62. Giải phương trình $2x^3 + 3x^2 + 2x - 4 = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$6x^3 + 9x^2 + 6x - 12 = 3\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - (2x^3 + 3x^2 + 13) = 3\sqrt[3]{3(2x+1) + 2x^3 + 3x^2 + 13}$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^3 - (2x^3 + 3x^2 + 13) = 3\sqrt[3]{3(2x+1) + 2x^3 + 3x^2 + 13}$$

Đặt $2x+1 = u; \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^3 + 3x^2 + 13) = 3v \\ v^3 - (2x^3 + 3x^2 + 13) = 3u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 3v - 3u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 3) = 0.$$

▪ $u = v \Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 16$
 $\Leftrightarrow 6x^3 + 9x^2 - 17 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(6x^2 + 15x + 17) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

▪ $u^2 + uv + v^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -3$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Nhận xét.

Bài toán số 62 chúng ta vẫn sử dụng đồng nhất thức như thường lệ

$$(mx+n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)}$$

$$\Rightarrow (mx+n)^3 - (2x^3 + 3x^2 + cx + d) = \sqrt[3]{(mx+n) + (2x^3 + 3x^2 + cx + d)}$$

Rõ ràng $\begin{cases} m^3 - 2 = 2 \\ m + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 = 4 \\ m + c = 6 \end{cases} (m \notin \mathbb{Z})$. Trường hợp giữ nguyên bị loại.

Như vậy là có nguy cơ phải nhân thêm hằng số, sẽ phức tạp đây, cần hết sức bình tĩnh nhé, bình tĩnh nhé.

$$k(2x^3 + 3x^2 + 2x - 4) = k\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}$$

$$\Rightarrow (mx + n)^3 - (2x^3 + 3x^2 + cx + d) = k\sqrt[3]{k(mx + n) + (2x^3 + 3x^2 + cx + d)}$$

Ta có $m^3 - 2 = 2k \Rightarrow m^3 = 2k + 2$ nên m phải là số lập phương chẵn. Chọn $k = 3 \Rightarrow m = 2$. Thu được

$$6x^3 + 9x^2 + 6x - 12 = 3\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}$$

$$\Leftrightarrow (2x + n)^3 - (2x^3 + 3x^2 + d) = 3\sqrt[3]{3(2x + n) + 2x^3 + 3x^2 + d}$$

$$\text{Đồng nhất thức } \begin{cases} n^3 - d = -12 \\ 3n + d = 16 \\ 3 \cdot 4 \cdot n - 3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 + 3n = 4 \\ 12n = 12 \\ 3n + d = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ d = 13 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } (2x + 1)^3 - (2x^3 + 3x^2 + 13) = 3\sqrt[3]{3(2x + 1) + 2x^3 + 3x^2 + 13}.$$

Bài toán 63. Giải phương trình $x^3 + 2x^2 + x - 1 = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 13x + 15}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$7x^3 + 14x^2 + 7x - 7 = 7\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 13x + 15}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - (x^3 - 2x^2 - x + 8) = 7\sqrt[3]{7(2x + 1) + (x^3 - 2x^2 - x + 8)}$$

$$\Leftrightarrow (2x + 1)^3 - (x^3 - 2x^2 - x + 8) = 7\sqrt[3]{7(2x + 1) + (x^3 - 2x^2 - x + 8)}$$

Đặt $2x + 1 = u$; $\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 13x + 15} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^3 - 2x^2 - x + 8) = 7v \\ v^3 - (x^3 - 2x^2 - x + 8) = 7u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 7v - 7u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 7) = 0.$$

$$\checkmark \quad u = v \Leftrightarrow 2x + 1 = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 13x + 15} \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = x^3 - 2x^2 + 13x + 15 \\ \Leftrightarrow 7x^3 + 14x^2 - 7x - 14 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x - 2) = 0.$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -7 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Nhận xét.

Bài toán số 63 chúng ta vẫn sử dụng đồng nhất thức như thường lệ

$$(mx + n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx + n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)} \\ \Rightarrow (mx + n)^3 - (x^3 - 2x^2 + cx + d) = \sqrt[3]{(mx + n) + (x^3 - 2x^2 + cx + d)}.$$

$$\text{Ta có đồng nhất } a = 1; b = -2 \Rightarrow \begin{cases} m^3 - 1 = 1 \\ m + c = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 = 2 \\ m + c = 13 \end{cases} (m \notin \mathbb{Z}). \text{ Phương án thất bại.}$$

Xoay chuyển theo phương án nhân thêm hệ số k , $k(x^3 + 2x^2 + x - 1) = k\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 13x + 15}$. Đưa về

$$(mx + n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = k\sqrt[3]{k(mx + n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)} \\ \Rightarrow (mx + n)^3 - (x^3 - 2x^2 + cx + d) = k\sqrt[3]{k(mx + n) + (x^3 - 2x^2 + cx + d)}$$

Rõ ràng $a=1; b=-2; m^3-1=k \Leftrightarrow m^3=k+1$. Chọn lập phương nhỏ nhất bằng 8 (Loại trường hợp 0) thì

$$k=7 \Rightarrow m=2 \Rightarrow 7x^3+14x^2+7x-7=7\sqrt[3]{x^3-2x^2+13x+15}$$

$$\Leftrightarrow (2x+n)^3-(x^3-2x^2+cx+d)=7\sqrt[3]{7(2x+n)+(x^3-2x^2+cx+d)}$$

$$\text{Đồng nhất} \begin{cases} n^3-d=-7 \\ 7n+d=15 \\ 3.4.n+2=14 \\ 14+c=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3+7n=8 \\ n=1 \\ c=-1 \\ 7n+d=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=1 \\ c=-1 \\ d=8 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } (2x+1)^3-(x^3-2x^2-x+8)=7\sqrt[3]{7(2x+1)+(x^3-2x^2-x+8)}.$$

Bài toán 64. Giải phương trình $4x^3-4x^2+x+1=\sqrt[3]{3x^3-3x^2+21x-13}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$24x^3-24x^2+6x+6=6\sqrt[3]{3x^3-3x^2+21x-13}$$

$$\Leftrightarrow 27x^3-27x^2+9x-1-(3x^3-3x^2+3x-7)=6\sqrt[3]{18x-6+(3x^3-3x^2+3x-7)}$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)^3-(3x^3-3x^2+3x-7)=6\sqrt[3]{6(3x-1)+(3x^3-3x^2+3x-7)}$$

Đặt $3x-1=u; \sqrt[3]{3x^3-3x^2+21x-13}=v$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3-(3x^3-3x^2+3x)=6v \\ v^3-(3x^3-3x^2+3x)=6u \end{cases} \Rightarrow u^3-v^3=6v-6u \Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+6)=0.$$

$$\begin{aligned} \diamond u=v &\Leftrightarrow 3x-1=\sqrt[3]{3x^3-3x^2+21x-13} \Leftrightarrow 27x^3-27x^2+9x-1=3x^3-3x^2+21x-13 \\ &\Leftrightarrow 24x^3-24x^2-12x+12=0 \Leftrightarrow 2x^3-2x^2-x+1=0 \Leftrightarrow (2x^2+1)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=1. \end{aligned}$$

$$\diamond u^2+uv+v^2+6=0 \Leftrightarrow \left(u+\frac{1}{2}v\right)^2+\frac{3}{4}v^2=-6 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=1$.

Nhận xét.

Bài toán số 64 này, phương án nhân thêm hằng số cũng được lựa chọn

$$(mx+n)^3-(ax^3+bx^2+cx+d)=f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n)+(ax^3+bx^2+cx+d)}.$$

$$\text{Áp dụng } (mx+n)^3-(3x^3-3x^2+cx+d)=\sqrt[3]{(mx+n)+(3x^3-3x^2+cx+d)}.$$

Dễ thấy $m^3-3=4 \Leftrightarrow m^3=7, m \notin \mathbb{Z}$. Nhân thêm hệ số ta có $k(4x^3-4x^2+x+1)=k\sqrt[3]{3x^3-3x^2+21x-13}$, quy về

$$(mx+n)^3-(3x^3-3x^2+cx+d)=k\sqrt[3]{k(mx+n)+(3x^3-3x^2+cx+d)}.$$

Ta có $m^3-3=4k \Rightarrow m^3=4k+3$. Như vậy m là số lập phương lẻ, dễ thấy đơn giản nhất

$$k=6 \Rightarrow m=3 \Rightarrow \begin{cases} 24x^3-24x^2+6x+6=6\sqrt[3]{3x^3-3x^2+21x-13} \\ (3x+n)^3-(3x^3-3x^2+cx+d)=6\sqrt[3]{6(3x+n)+(3x^3-3x^2+cx+d)} \end{cases}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số} \begin{cases} n^3 - d = 6 \\ 6n + d = -13 \\ 3.9n + 3 = -24 \\ 3.3n^2 - c = 6 \\ 18 + c = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 + 6n = -7 \\ c = 3 \\ 6n + d = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \\ c = 3 \\ d = -7 \end{cases}$$

Bài toán 65. Giải phương trình $x^3 + 7x^2 + 11x + 6 = \sqrt[3]{3x^3 + x^2 + 9x + 12}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 5x^3 + 35x^2 + 55x + 30 &= 5\sqrt[3]{3x^3 + x^2 + 9x + 12} \\ \Leftrightarrow 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 - (3x^3 + x^2 - x - 3) &= 5\sqrt[3]{10x + 15 + 3x^3 + x^2 - x - 3} \\ \Leftrightarrow (2x + 3)^3 - (3x^3 + x^2 - x - 3) &= 5\sqrt[3]{5(2x + 3) + 3x^3 + x^2 - x - 3} \end{aligned}$$

Đặt $2x + 3 = u$; $\sqrt[3]{3x^3 + x^2 + 9x + 12} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (3x^3 + x^2 - x - 3) = 5v \\ v^3 - (3x^3 + x^2 - x - 3) = 5u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 5v - 5u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 5) = 0.$$

Xét các trường hợp

- $u = v \Leftrightarrow 2x + 3 = \sqrt[3]{3x^3 + x^2 + 9x + 12} \Leftrightarrow 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27 = 3x^3 + x^2 + 9x + 12$
 $\Leftrightarrow 5x^3 + 35x^2 + 45x + 15 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 7x^2 + 9x + 3 = 0$
 $\Leftrightarrow (x + 1)(x^2 + 6x + 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; -3 + \sqrt{6}; -3 - \sqrt{6}\}$
- $u^2 + uv + v^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -5$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm như trên.

Nhận xét.

$$\begin{aligned} k(x^3 + 7x^2 + 11x + 6) &= k\sqrt[3]{3x^3 + x^2 + 9x + 12} \\ \Leftrightarrow (mx + n)^3 - (3x^3 + x^2 + cx + d) &= k\sqrt[3]{k(mx + n) + (3x^3 + x^2 + cx + d)} \end{aligned}$$

Ta có $m^3 - 3 = k \Rightarrow m^3 = k + 3 \Rightarrow k \in \{-2; 5; 24; \dots\}$ nên chọn $k = 5 \Rightarrow m = 2$.

Bài toán 66. Giải phương trình $x^3 + x^2 + 1 = \sqrt[3]{4x^3 - 12x^2 + 252x + 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 60x^3 + 60x^2 + 60 &= 60\sqrt[3]{4x^3 - 12x^2 + 252x + 1} \\ \Leftrightarrow 64x^3 + 48x^2 + 12x + 1 - (4x^3 - 12x^2 + 12x - 59) &= 60\sqrt[3]{60(4x + 1) + (4x^3 - 12x^2 + 12x - 59)} \\ \Leftrightarrow (4x + 1)^3 - (4x^3 - 12x^2 + 12x - 59) &= 60\sqrt[3]{60(4x + 1) + (4x^3 - 12x^2 + 12x - 59)} \end{aligned}$$

Đặt $4x + 1 = u$; $\sqrt[3]{4x^3 - 12x^2 + 252x + 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (4x^3 - 12x^2 + 12x - 59) = 60v \\ v^3 - (4x^3 - 12x^2 + 12x - 59) = 60u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 60v - 60u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 60) = 0.$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad u = v &\Leftrightarrow 4x + 1 = \sqrt[3]{4x^3 - 12x^2 + 252x + 1} \Leftrightarrow 64x^3 + 48x^2 + 12x + 1 = 4x^3 - 12x^2 + 252x + 1 \\ &\Leftrightarrow 60x^3 + 60x^2 - 240x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 4) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}\right\}. \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + 60 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -60 \text{ (Vô nghiệm)}.$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 67. Giải phương trình $x^3 - x^2 + x + 1 = \sqrt[3]{11x^3 - 11x^2 + 41x - 33}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 16x^3 - 16x^2 + 16x + 16 &= 16\sqrt[3]{11x^3 - 11x^2 + 41x - 33} \\ &\Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 - (11x^3 - 11x^2 - 7x - 17) = 16\sqrt[3]{48x - 16 + 11x^3 - 11x^2 - 7x - 17} \\ &\Leftrightarrow (3x - 1)^3 - (11x^3 - 11x^2 - 7x - 17) = 16\sqrt[3]{16(3x - 1) + 11x^3 - 11x^2 - 7x - 17} \end{aligned}$$

Đặt $3x - 1 = u$; $\sqrt[3]{11x^3 - 11x^2 + 41x - 33} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (11x^3 - 11x^2 - 7x - 17) = 16v \\ v^3 - (11x^3 - 11x^2 - 7x - 17) = 16u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 16v - 16u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 16) = 0.$$

$$\begin{aligned} \circ \quad u = v &\Leftrightarrow 3x - 1 = \sqrt[3]{11x^3 - 11x^2 + 41x - 33} \Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = 11x^3 - 11x^2 + 41x - 33 \\ &\Leftrightarrow 16x^3 - 16x^2 - 32x + 32 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{2}; 1; \sqrt{2}\}. \\ \circ \quad u^2 + uv + v^2 + 16 &= 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -16 \text{ (Vô nghiệm)}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có tập nghiệm $S = \{-\sqrt{2}; 1; \sqrt{2}\}$.

Nhận xét.

Trong bài toán 66, để xuất hiện ắ phụ đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2 chúng ta đã nhân hai vế của phương trình ban đầu với hằng số 11. Chắc chắn các bạn học sinh đã rất quen thuộc.

$$m^3 - 11 = k \Leftrightarrow m^3 = k + 11 \Rightarrow k \in \{-10; -3; 16; \dots\} \Rightarrow k = 16.$$

Có thể nói nên ưu tiên chọn hằng số nguyên dương để giảm thiểu sự phức tạp tính toán.

Bài toán 68. Giải phương trình $x^3 + x^2 + x = \sqrt[3]{4x^2 + 14x + 9}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8x^3 + 8x^2 + 8x &= 8\sqrt[3]{4x^2 + 14x + 9} \\ &\Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - (4x^2 - 2x + 1) = 8\sqrt[3]{8(2x + 1) + 4x^2 - 2x + 1} \\ &\Leftrightarrow (2x + 1)^3 - (4x^2 - 2x + 1) = 8\sqrt[3]{8(2x + 1) + 4x^2 - 2x + 1} \end{aligned}$$

Đặt $2x+1=u$; $\sqrt[3]{4x^2+14x+9}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (4x^2 - 2x + 1) = 8v \\ v^3 - (4x^2 - 2x + 1) = 8u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 8v - 8u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 8) = 0.$$

$$\diamond u = v \Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt[3]{4x^2+14x+9} \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 4x^2 + 14x + 9$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 + 8x^2 - 8x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}.$$

$$\diamond u^2 + uv + v^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -8 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1; x = 1$.

Nhận xét.

Bài toán này được đề cập nhằm nhắc lại dạng đơn giản khi đa thức trong căn thức có dạng tam thức bậc hai, tuy nhiên có kết hợp nhân hai vế với hằng số 8. Chú ý đồng nhất hệ số $m^3 = k \Rightarrow m^3 = k \Rightarrow k \in \{-8; 1; 8; \dots\}$. Rõ ràng trường hợp $k = 1$ trùng bài toán, thử với $k = 8$ thì $m = 2$ nên thu được

$$\begin{aligned} 8(x^3 + x^2 + x) &= 8\sqrt[3]{4x^2 + 14x + 9} \\ \Leftrightarrow (2x+n)^3 - (4x^2 + cx + d) &= 8\sqrt[3]{8(2x+n) + (4x^2 + cx + d)} \end{aligned}$$

$$\text{Đồng nhất } \begin{cases} n^3 - d = 0 \\ 8n + d = 9 \end{cases} \Rightarrow n = d = 1; \begin{cases} 3 \cdot 2n^2 - c = 8 \\ 16 + c = 14 \end{cases} \Rightarrow c = -2.$$

Bài toán 69. Giải phương trình $(x-1)(3x^2-4x-1) = \sqrt[3]{9x^2+36x-44} - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3x^3 - 7x^2 + 3x + 2 &= \sqrt[3]{9x^2 + 36x - 44} \\ \Leftrightarrow 27x^3 - 63x^2 + 27x + 18 &= 9\sqrt[3]{9x^2 + 36x - 44} \\ \Leftrightarrow 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 - (9x^2 + 9x - 26) &= 9\sqrt[3]{17x - 18 + 9x^2 + 9x - 26} \\ \Leftrightarrow (3x-2)^3 - (9x^2 + 9x - 26) &= 9\sqrt[3]{9(3x-2) + 9x^2 + 9x - 26} \end{aligned}$$

Đặt $3x-2=u$; $\sqrt[3]{9x^2+36x-44}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (9x^2 + 9x - 26) = 9v \\ v^3 - (9x^2 + 9x - 26) = 9u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 9v - 9u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 9) = 0.$$

$$\circ u = v \Leftrightarrow 3x-2 = \sqrt[3]{9x^2+36x-44} \Leftrightarrow 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 = 9x^2 + 36x - 44$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 - 63x^2 + 36 = 0 \Leftrightarrow 9(x-1)(3x^2-4x-4) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{2}{3}; 1; 2\right\}.$$

$$\circ u^2 + uv + v^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -9 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 70. Giải phương trình $\frac{(x-1)(4x^2-3x+1)}{3\sqrt[3]{2x^2+10x-11}-1} = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $\sqrt[3]{2x^2+10x-11} \neq \frac{1}{3}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 4x^3 - 7x^2 + 4x - 1 &= 3\sqrt[3]{2x^2+10x-11} - 1 \\ \Leftrightarrow 4x^3 - 7x^2 + 4x + 3 &= 3\sqrt[3]{2x^2+10x-11} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 14x^2 + 8x + 6 &= 6\sqrt[3]{2x^2+10x-11} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - (2x^2 - 2x - 5) &= 6\sqrt[3]{12x - 6 + 2x^2 - 2x - 5} \\ \Leftrightarrow (2x-1)^3 - (2x^2 - 2x - 5) &= 6\sqrt[3]{6(2x-1) + 2x^2 - 2x - 5} \end{aligned}$$

Đặt $2x-1=u$; $\sqrt[3]{2x^2+10x-11}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^2 - 2x - 5) = 6v \\ v^3 - (2x^2 - 2x - 5) = 6u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 6v - 6u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 6) = 0.$$

- $u = v \Leftrightarrow 2x-1 = \sqrt[3]{2x^2+10x-11} \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 2x^2 + 10x - 11$
 $\Leftrightarrow 8x^3 - 14x^2 - 4x + 10 = 0 \Leftrightarrow 2(x-1)(4x^2 - 3x - 5) \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{3+\sqrt{89}}{8}; \frac{3-\sqrt{89}}{8}\right\}.$
- $u^2 + uv + v^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -6$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 71. Giải phương trình $-x^3 - x^2 + x + 2 = 3\sqrt[3]{2x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$ ($x \in \mathbb{R}$)

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (2x^3 + 4x^2 + 2x - 1) &= 3\sqrt[3]{3x + 3 + 2x^3 + 4x^2 + 2x - 1} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 - (2x^3 + 4x^2 + 2x - 1) &= 3\sqrt[3]{3(x+1) + 2x^3 + 4x^2 + 2x - 1} \end{aligned}$$

Đặt $x+1=u$; $\sqrt[3]{2x^3+4x^2+5x+2}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^3 + 4x^2 + 2x - 1) = 3v \\ v^3 - (2x^3 + 4x^2 + 2x - 1) = 3u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 3v - 3u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 3) = 0.$$

- $u = v \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{2x^3+4x^2+5x+2} \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x^3 + 4x^2 + 5x + 2$
 $\Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 = -x^3 \Leftrightarrow x+1 = -x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$

- $u^2 + uv + v^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -3$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 72. Giải phương trình $8x^3 + 9x^2 + 21x + 9 = 6\sqrt[3]{3x^2 - 3x - 2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - (3x^2 - 15x - 8) = 6\sqrt[3]{12x + 6 + 3x^2 - 15x - 8}$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)^3 - (3x^2 - 15x - 8) = 6\sqrt[3]{6(2x+1) + 3x^2 - 15x - 8}$$

Đặt $2x+1=u$; $\sqrt[3]{3x^2+9x+4}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (3x^2 - 15x - 8) = 6v \\ v^3 - (3x^2 - 15x - 8) = 6u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 6v - 6u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 6) = 0.$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad u = v &\Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt[3]{3x^2+9x+4} \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 3x^2 - 3x - 2 \Leftrightarrow 8x^3 + 9x^2 + 9x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{8}{3}x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 = -\frac{5}{3}x^3 \Leftrightarrow x+1 = -x\sqrt[3]{\frac{5}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{5}}. \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad u^2 + uv + v^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -6 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 73. Giải phương trình $x^3 + x^2 + x + \frac{4}{3} = \sqrt[3]{x(5x^2 + 9x + 3)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3x^3 + 3x^2 + 3x + 4 &= 3\sqrt[3]{5x^3 + 9x^2 + 3x} \\ \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - (5x^3 + 9x^2 + 3x - 3) &= 3\sqrt[3]{6x + 3 + 5x^3 + 9x^2 - 3x - 3} \\ \Leftrightarrow (2x+1)^3 - (5x^3 + 9x^2 + 3x - 3) &= 3\sqrt[3]{3(2x+1) + 5x^3 + 9x^2 - 3x - 3} \end{aligned}$$

Đặt $2x+1=u$; $\sqrt[3]{5x^3+9x^2+3x}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (5x^3 + 9x^2 + 3x - 3) = 3v \\ v^3 - (5x^3 + 9x^2 + 3x - 3) = 3u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 3v - 3u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 3) = 0.$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad u = v &\Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt[3]{5x^3+9x^2+3x} \Leftrightarrow (2x+1)^3 = 5x^3 + 9x^2 + 3x \\ &\Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 5x^3 + 9x^2 + 3x \Leftrightarrow 3x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^3 = -2x^3 \Leftrightarrow x+1 = -x\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad u^2 + uv + v^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -3 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài toán 74. Giải phương trình $13x^3 - 3x^2 + 12x - 6 = 2\sqrt[3]{x^3 - 21x^2 - 3x + 7}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 26x^3 - 6x^2 + 24x - 12 &= 4\sqrt[3]{x^3 - 21x^2 - 3x + 7} \\ \Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 - (x^3 - 21x^2 - 15x + 11) &= 4\sqrt[3]{4(3x-1) + x^3 - 21x^2 - 15x + 11} \\ \Leftrightarrow (3x-1)^3 - (x^3 - 21x^2 - 15x + 11) &= 4\sqrt[3]{4(3x-1) + x^3 - 21x^2 - 15x + 11} \end{aligned}$$

Đặt $3x-1=u$; $\sqrt[3]{x^3-21x^2-3x+7}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^3 - 21x^2 - 3x + 7) = 4v \\ v^3 - (x^3 - 21x^2 - 3x + 7) = 4u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 4v - 4u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 4) = 0.$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad u=v &\Leftrightarrow 3x-1=\sqrt[3]{x^3-21x^2-3x+7} \Leftrightarrow 27x^3-27x^2+9x-1=x^3-21x^2-3x+7 \\ &\Leftrightarrow 26x^3-6x^2+12x-8=0 \Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-8=-25x^3 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^3=-25x^3 \Leftrightarrow x-2=-x\sqrt[3]{25} \Leftrightarrow x=\frac{2}{1+\sqrt[3]{25}} \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -4 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{2}{1+\sqrt[3]{25}}$.

Bài toán 75. Giải phương trình $5x^3 + 3x^2 + 13x + 6 = 5\sqrt[3]{3x(x^2 + x + 3)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8x^3 + 6x^2 + 12x + 1 - (3x^3 + 3x^2 - x - 5) &= 5\sqrt[3]{10x + 5 + 3x^3 + 3x^2 - x - 5} \\ \Leftrightarrow (2x+1)^3 - (3x^3 + 3x^2 - x - 5) &= 5\sqrt[3]{5(2x+1) + 3x^3 + 3x^2 - x - 5} \end{aligned}$$

Đặt $2x+1=u$; $\sqrt[3]{3x(x^2+x+3)}=v$ ta thu được

$$\begin{cases} u^3 - (3x^3 + 3x^2 - x - 5) = 5v \\ v^3 - (3x^3 + 3x^2 - x - 5) = 5u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 5v - 5u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 5) = 0.$$

$$\begin{aligned} \circ \quad u=v &\Leftrightarrow 2x+1=\sqrt[3]{3x(x^2+x+3)} \Leftrightarrow 8x^3 + 6x^2 + 12x + 1 = 3x^3 + 3x^2 + 9x \\ &\Leftrightarrow 5x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 = -4x^3 \Leftrightarrow x+1 = -x\sqrt[3]{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{4}}. \end{aligned}$$

$$\circ \quad u^2 + uv + v^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -5 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Nhận xét.

Trong các bài toán 72 đến 75, dễ thấy vẫn không nằm ngoài dạng thức sử dụng ắnn phụ đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2, tuy nhiên ngoài việc nhân thêm hằng số, tách ghép, thao tác giải phương trình hệ quả cũng hết sức lưu ý. Các phương trình đa thức bậc ba thu được không có nghiệm hữu tỷ nên sử dụng máy tính trở nên khó khăn, tác giả đã lưu ý tới quý độc giả phương án sử dụng hằng đẳng thức lập phương như các bài toán trên. Về sự đẹp đẽ và mức độ tư duy thì chưa cao, nhưng có thể nói nó rất cơ bản, rất đối thân thương, kiểu xấu xí gây sự chú ý.

Bài toán 76. Giải phương trình $x^3 - 6x^2 + 29x + 3 = 17\sqrt[3]{9x^2 - 9x + 15}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (9x^2 - 26x - 2) &= 17\sqrt[3]{17x + 17 + 9x^2 - 26x - 2} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 - (9x^2 - 26x - 2) &= 17\sqrt[3]{17(x+1) + 9x^2 - 26x - 2} \end{aligned}$$

Đặt $x+1=u$; $\sqrt[3]{9x^2-9x+15}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (9x^2 - 26x - 2) = 17v \\ v^3 - (9x^2 - 26x - 2) = 17u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 17v - 17u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 17) = 0.$$

$$\begin{aligned} \diamond u = v &\Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{9x^2-9x+15} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 9x^2 - 9x + 15 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x = 14 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 6 \Leftrightarrow (x-2)^3 = 6 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{6} + 2. \end{aligned}$$

$$\diamond u^2 + uv + v^2 + 17 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -17 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \sqrt[3]{6} + 2$.

Bài toán 77. Giải phương trình $x^3 - 3x^2 + 16x + 40 = 13\sqrt[3]{9x^2 + 9x - 6}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - (9x^2 - 4x - 32) &= 13\sqrt[3]{13x + 26 + 9x^2 - 4x - 32} \\ \Leftrightarrow (x+2)^3 - (9x^2 - 4x - 32) &= 13\sqrt[3]{13(x+2) + 9x^2 - 4x - 32} \end{aligned}$$

Đặt $x+2=u$; $\sqrt[3]{9x^2+9x-6}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (9x^2 - 4x - 32) = 13v \\ v^3 - (9x^2 - 4x - 32) = 13u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 13v - 13u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 13) = 0.$$

$$\begin{aligned} \triangleright u = v &\Leftrightarrow x+2 = \sqrt[3]{9x^2+9x-6} \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 9x^2 + 9x - 6 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 14 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = -15 \Leftrightarrow (x-1)^3 = -15 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt[3]{15}. \end{aligned}$$

$$\triangleright u^2 + uv + v^2 + 13 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -13 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1 - \sqrt[3]{15}$.

Bài toán 78. Giải phương trình $x(x^2 + 5x + 7) = \sqrt[3]{7x^3 + 8x^2 + 64x + 144}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 20x^3 + 100x^2 + 140x &= 20\sqrt[3]{7x^3 + 8x^2 + 64x + 144} \\ \Leftrightarrow 27x^3 + 108x^2 + 144x + 64 - (7x^3 + 8x^2 + 4x + 64) &= 20\sqrt[3]{60x + 80 + (7x^3 + 8x^2 + 4x + 64)} \\ \Leftrightarrow (3x+4)^3 - (7x^3 + 8x^2 + 4x + 64) &= 20\sqrt[3]{20(3x+4) + 7x^3 + 8x^2 + 4x + 64} \end{aligned}$$

Đặt $3x+4=u$; $\sqrt[3]{7x^3+8x^2+64x+144}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (7x^3 + 8x^2 + 4x + 64) = 20v \\ v^3 - (7x^3 + 8x^2 + 4x + 64) = 20u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 20v - 20u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 20) = 0.$$

$$\begin{aligned} \blacksquare u = v &\Leftrightarrow 3x+4 = \sqrt[3]{7x^3+8x^2+64x+144} \Leftrightarrow 27x^3 + 108x^2 + 144x + 64 = 7x^3 + 8x^2 + 64x + 80 \\ &\Leftrightarrow 20x^3 + 100x^2 + 80x - 80 = 0 \Leftrightarrow 20(x+2)(x^2 + 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-2; \frac{-3+\sqrt{17}}{2}; \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right\}. \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad u^2 + uv + v^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -20 \text{ (Vô nghiệm)}.$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Thao tác nhân thêm hằng số 20 trong bài toán 78 có lẽ các bạn đã khá quen thuộc với nhiều bạn

$$k(x^3 + 5x^2 + 7x) = k\sqrt[3]{7x^3 + 8x^2 + 64x + 144}$$

$$\Leftrightarrow (mx + n)^3 - (7x^3 + 8x^2 + cx + d) = k\sqrt[3]{k(mx + n) + (7x^3 + 8x^2 + cx + d)}$$

Rõ ràng $m^3 - 7 = k \Rightarrow m^3 = k + 7 \Rightarrow k \in \{1; 20; 57; \dots\}$, $k = 1$ thì trùng bài toán. Chọn giá trị liền kề $k = 20$, $m = 3$ và tiếp tục xông pha chiến hào, kéo pháo lên Điện Biên Phủ, lần lượt thay thế và sử dụng đồng nhất thức

$$20(x^3 + 5x^2 + 7x) = 20\sqrt[3]{7x^3 + 8x^2 + 64x + 144}$$

$$\Leftrightarrow (3x + n)^3 - (7x^3 + 8x^2 + cx + d) = 20\sqrt[3]{20(3x + n) + (7x^3 + 8x^2 + cx + d)}$$

$$\text{Ta có hệ thức } \begin{cases} n^3 - d = 0 \\ 20n + d = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^3 + 20n = 144 \\ 20 + n = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 \\ d = 64 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3.3n^2 - c = 140 \\ 20.3 + c = 64 \end{cases} \Leftrightarrow c = 4.$$

Bài toán 79. Giải phương trình $x^2 + 1 = \frac{\sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 57x + 1}}{x + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x^2 + 1)(x + 1) = \sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 57x + 1} \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x + 1 = \sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 57x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 24x^3 + 24x^2 + 24x + 24 = 24\sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 57x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 - (3x^3 + 3x^2 - 15x - 23) = 24\sqrt[3]{24.3x + 24 + 3x^3 + 3x^2 - 15x - 23}$$

$$\Leftrightarrow (3x + 1)^3 - (3x^3 + 3x^2 - 15x - 23) = 24\sqrt[3]{24(3x + 1) + 3x^3 + 3x^2 - 15x - 23}$$

Đặt $3x + 1 = u$; $\sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 57x + 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (3x^3 + 3x^2 - 15x - 23) = 24v \\ v^3 - (3x^3 + 3x^2 - 15x - 23) = 24u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 24v - 24u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 24) = 0.$$

Xét các khả năng xảy ra

$$\blacksquare \quad u = v \Leftrightarrow 3x + 1 = \sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 57x + 1} \Leftrightarrow 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = 3x^3 + 3x^2 + 57x + 1 \\ \Leftrightarrow 24x^3 + 24x^2 - 48x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 0; 1\}.$$

$$\blacksquare \quad u^2 + uv + v^2 + 24 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -24 \text{ (Vô nghiệm)}.$$

Đôi chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm, $S = \{-2; 0; 1\}$.

Nhận xét.

Phép nhân hai vế của phương trình đã cho với hằng số 24 cũng không mấy khó khăn nhưng hết sức lưu ý

$$k(x^3 + x^2 + x + 1) = k\sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 57x + 1}$$

$$\Leftrightarrow (mx + n)^3 - (3x^3 + 3x^2 + cx + d) = k\sqrt[3]{k(mx + n) + (3x^3 + 3x^2 + cx + d)}$$

Rõ ràng $m^3 - 3 = k \Rightarrow m^3 = k + 3 \Rightarrow k \in \{-11; -2; 5; 24; 61; \dots\}$. Chọn các hằng số dương

Phương án 1. Với $k = 5 \Rightarrow m = 2$, quy về

$$5(x^3 + x^2 + x + 1) = 5\sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 57x + 1}$$

$$\Leftrightarrow (2x + n)^3 - (3x^3 + 3x^2 + cx + d) = 5\sqrt[3]{5(2x + n) + (3x^3 + 3x^2 + cx + d)}$$

Đồng nhất hệ số $\begin{cases} n^3 - d = 5 \\ 5n + d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ d = -4 \end{cases}$ và $\begin{cases} 3.2n^2 - c = 5 \\ 10 + c = 57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c = 47 \end{cases} \Rightarrow c \in \emptyset$ (Trường hợp bị loại).

Phương án 2. Với $k = 24 \Rightarrow m = 3$, quy về

$$24(x^3 + x^2 + x + 1) = 24\sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 57x + 1}$$

$$\Leftrightarrow (3x + n)^3 - (3x^3 + 3x^2 + cx + d) = 24\sqrt[3]{24(3x + n) + (3x^3 + 3x^2 + cx + d)}$$

Đồng nhất hệ số $\begin{cases} n^3 - d = 24 \\ 24n + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ d = -23 \end{cases}$ và $\begin{cases} 3.3n^2 - c = 24 \\ 24.3 + c = 57 \end{cases} \Leftrightarrow c = -15$.

Từ đây có biến đổi tuần tự để đảm bảo tính chất logic, tự nhiên

$$x^3 + x^2 + x + 1 = \sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 57x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 24x^3 + 24x^2 + 24x + 24 = 24\sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 57x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 - (3x^3 + 3x^2 - 15x - 23) = 24\sqrt[3]{24.3x + 24 + 3x^3 + 3x^2 - 15x - 23}$$

$$\Leftrightarrow (3x + 1)^3 - (3x^3 + 3x^2 - 15x - 23) = 24\sqrt[3]{24(3x + 1) + 3x^3 + 3x^2 - 15x - 23}$$

Đặt ẩn phụ quy về hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (3x^3 + 3x^2 - 15x - 23) = 24v \\ v^3 - (3x^3 + 3x^2 - 15x - 23) = 24u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 24v - 24u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 24) = 0.$$

Bài toán 80. Giải phương trình $x + 1 = \frac{\sqrt[3]{10x^3 + 10x^2 + 43x + 1}}{1 + x^2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + x^2 + x + 1 = \sqrt[3]{10x^3 + 10x^2 + 43x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 17x^3 + 17x^2 + 17x + 17 = 17\sqrt[3]{10x^3 + 10x^2 + 43x + 1}$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 - (10x^3 + 10x^2 - 8x - 16) = 17\sqrt[3]{17.3x + 17 + (10x^3 + 10x^2 - 8x - 16)}$$

$$\Leftrightarrow (3x + 1)^3 - (10x^3 + 10x^2 - 8x - 16) = 17\sqrt[3]{17(3x + 1) + (10x^3 + 10x^2 - 8x - 16)}$$

Đặt $3x + 1 = u$; $\sqrt[3]{10x^3 + 10x^2 + 43x + 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (10x^3 + 10x^2 - 8x - 16) = 17v \\ v^3 - (10x^3 + 10x^2 - 8x - 16) = 17u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 17v - 17u \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 17) = 0.$$

$$\begin{aligned} \diamondsuit \quad u = v &\Leftrightarrow 3x + 1 = \sqrt[3]{10x^3 + 10x^2 + 43x + 1} \Leftrightarrow 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = 10x^3 + 10x^2 + 43x + 1 \\ &\Leftrightarrow 17x^3 + 17x^2 - 34x = 0 \Leftrightarrow 17x(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2; 0; 1\}. \end{aligned}$$

$$\diamondsuit \quad u^2 + uv + v^2 + 17 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -17 \quad (\text{Vô nghiệm}).$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 81. Giải phương trình $x^4 + \sqrt[3]{x^4 + x^2 + x - 2} = x^3 - x^2 - 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải 1.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^4 + x^2 + x - 2 + \sqrt[3]{x^4 + x^2 + x - 2} = x^3 + x \quad [1]$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t; t \in \mathbb{R}$ thì $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Thu được

$$\begin{aligned} [1] &\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{x^4 + x^2 + x - 2}\right) = f(x) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^4 + x^2 + x - 2} = x \Leftrightarrow x^4 - x^3 + x^2 + x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3(x-1) + (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Lời giải 2.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - (x^4 + x^2 + 2) = \sqrt[3]{x + x^4 + x^2 - 2}$.

Đặt $\sqrt[3]{x + x^4 + x^2 - 2} = y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - (x^4 + x^2 + 2) = y \\ y^3 - (x^4 + x^2 + 1) = x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = y - x \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 1) = 0$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad x = y &\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x + x^4 + x^2 - 2} \Leftrightarrow x^4 - x^3 + x^2 + x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3(x-1) + (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x^2 - x + 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}. \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad x^2 + xy + y^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -1 \quad (\text{Vô nghiệm}).$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm.

Bài toán 82. Giải phương trình $x^4 + 1 + 4\sqrt[3]{x^4 + x^3 + x + 1} = 3x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^4 + x^3 + x + 1 + 4\sqrt[3]{x^4 + x^3 + x + 1} = x^3 + 4x \quad (1)$.

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 4t; t \in \mathbb{R}$ thì $f'(t) = 3t^2 + 4 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Thu được

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{x^4 + x^3 + x + 1}\right) = f(x) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^4 + x^3 + x + 1} = x \\ &\Leftrightarrow x^4 + x^3 + x + 1 = x^3 \Leftrightarrow x^4 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^4 + 4x + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x^4 - 4x^2 + 1 + 4x^2 + 4x + 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow (2x^2 - 1)^2 + (2x + 1)^2 = -2 \quad (2) \end{aligned}$$

Dễ thấy phương trình (2) vô nghiệm nên phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 83. Giải phương trình $x^3 + \sqrt[3]{2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 4} = 2x^4 - x^2 + 3x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x^3 + 2\sqrt[3]{2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 4} &= 4x^4 - 2x^2 + 6x - 2 \\ \Leftrightarrow x^3 - (2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x + 2) &= 2\sqrt[3]{2x + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x + 2} \end{aligned}$$

Đặt $\sqrt[3]{2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 4} = y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - (2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x + 2) = 2y \\ y^3 - (2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x + 2) = 2x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = 2y - 2x \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0.$$

$$\begin{aligned} \circ \quad x = y &\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 4} \Leftrightarrow x^3 = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 2 \\ &\Leftrightarrow 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (1). \end{aligned}$$

Nhận xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình (1). Với $x \neq 0$ thì

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0.$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2. \text{ Ta thu được } t^2 - 2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t \in \{1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\}.$$

$$\text{Nếu } t = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 - (1 + \sqrt{2})x + 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}; \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \right\}.$$

$$\text{Nếu } t = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 1 - \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 - (1 - \sqrt{2})x + 1 = 0, \Delta = -1 - 2\sqrt{2} < 0 \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\circ \quad x^2 + xy + y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = -2 \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 84. Giải phương trình $4x^4 + 3\sqrt[3]{4x^4 + x^3 + 2x^2 + x} = x^2 + 5x + 4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 3x + 3 &= 4x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 3\sqrt[3]{4x^4 + x^3 + 2x^2 + x} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 + 3(x+1) &= 4x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 3\sqrt[3]{4x^4 + x^3 + 2x^2 + x} \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 3t; t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 3t^2 + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Hàm số liên tục và đồng biến. Thu được

$$\begin{aligned} f(x+1) &= f\left(\sqrt[3]{4x^4 + x^3 + 2x^2 + x}\right) \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{4x^4 + x^3 + 2x^2 + x} \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 &= 4x^4 + x^3 + 2x^2 + x \Leftrightarrow 4x^4 = x^2 + 2x + 1 \\ \Leftrightarrow (2x^2)^2 &= (x+1)^2 \Leftrightarrow (2x^2 - x - 1)(2x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 85. Giải phương trình $2x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 13x + 13 + 5\sqrt[3]{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 3} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 5x - 5 = 2(x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 3) + 5\sqrt[3]{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 3}$$

$$2(x-1)^3 + 5(x-1) = 2(x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 3) + 5\sqrt[3]{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 3}$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + 5t; t \in \mathbb{R}$ thì $f'(t) = 3t^2 + 5 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta thu được

$$f(x-1) = f\left(\sqrt[3]{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 3}\right) \Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 3}$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 3 \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + x^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x)^2 = (x+2)^2 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 86. Giải phương trình $5x^4 + 14x + 6\sqrt[3]{x^4 + x^3 + 7x - 2} = 15x^2 + 21 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$5(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 6(x+1) = 5(x^4 + x^3 + 7x - 2) + 6\sqrt[3]{x^4 + x^3 + 7x - 2}$$

$$\Leftrightarrow 5(x+1)^3 + 6(x+1) = 5(x^4 + x^3 + 7x - 2) + 6\sqrt[3]{x^4 + x^3 + 7x - 2}$$

Xét hàm số $f(t) = 5t^3 + 6t; t \in \mathbb{R}$ ta có $f'(t) = 15t^2 + 6 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Hàm số liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta thu được

$$f(x+1) = f\left(\sqrt[3]{x^4 + x^3 + 7x - 2}\right) \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{x^4 + x^3 + 7x - 2}$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^4 + x^3 + 7x - 2 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 = (x-2)^2 \Leftrightarrow (x^2 + x - 3)(x^2 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right\}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $7x^3 - 42x^2 - 5x + 49 = 9\sqrt[3]{6x^2 + 2x - 7}$.

2. $x^3 + 2x^2 + 7x = 5\sqrt[3]{x^2 + x + 6}$.

3. $8x^3 - 55 = 3\sqrt[3]{-12x^2 + 12x + 51}$.

4. $x^3 - x^2 + 3x - 1 = 2\sqrt[3]{x^2 - x + 1}$.

5. $x^3 + 7x^2 + 10x - 6 = 4\sqrt[3]{x^2 - 2x + 2}$.

6. $x^3 + x^2 - 3x = 6\sqrt[3]{-2x^2 + 6x - 7}$.

7. $3x^3 - 24x^2 + 16x + 12 = 7\sqrt[3]{8x^2 - 3x - 4}$.

8. $27x^3 + 9x - 28 = 4\sqrt[3]{-27x^2 + 12x + 23}$.

9. $x^3 + 4x^2 + 12x + 11 = 2\sqrt[3]{2x^2 + 2x + 1}$.

10. $x^3 + 6x - 1 = 3\sqrt[3]{3x^2 + 5}$.

11. $x^3 + 3x + 10 = 7\sqrt[3]{3x^2 + 7x - 2}$.

12. $x^3 + x + 8 = 5\sqrt[3]{3x^2 + 7x - 2}$.

13. $x^3 + 5x^2 + 12x + 1 = \sqrt[3]{x^2 + x + 8}$.

14. $\frac{3}{2}x^2 + \sqrt[3]{3x - \frac{63}{8}} = \frac{1}{3}x^3 + \frac{9}{4}x$.

15. $\sqrt[3]{81x - 8} = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2$.

16. $2x^3 + 13x = 15 + 3\sqrt[3]{5 - 2x - 3x^2}$.

17. $2x^3 - 8x^2 - 5x + 16 = 5\sqrt[3]{4x^2 + 5x - 8}$.

18. $x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 6\sqrt[3]{3x^2 + 2x - 4}$.

19. $4x^3 + 17x^2 + 28x + 2 = \sqrt[3]{2x^2 + 2x + 23}$.

20. $x^3 - 9x^2 - 7x - 5 = 2\sqrt[3]{6x^2 + 12x + 2}$.

21. $2x^3 - 6x^2 + 9x + 15 = 3\sqrt[3]{6x^2 - 5}$.

22. $x^3 - 3x^2 + 2 = 3\sqrt[3]{2(3x^2 + 3x + 1)}$.

23. $x^3 + 5x^2 + 6x + 9 = 7\sqrt[3]{x^2 + 13x + 13}$.

24. $2x^3 + 2x^2 - 1 = \sqrt[3]{4x^2 + 14x + 9}$.

25. $5x + 2 = x^3 + x^2 + 5\sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 2}$.

26. $3x^2 + 8x + 11 = 2\sqrt[3]{x^3 - 3x + 12}$.

27. $-2x^2 + 12x - 6 = 3\sqrt[3]{x^3 - 4x - 8}$.

28. $9x^2 - 18x + 5 + 2\sqrt[3]{27x^3 - 9x^2 - 15x + 5} = 0$.

29. $3x^3 - 6x + 7 + 5\sqrt[3]{8x^3 + 15x^2 + 10x + 13}$.

30. $4x^2 - 28x + 36 + 3\sqrt[3]{8x^3 - 16x^2 - 20x + 52}$.

31. $3x^3 - x - 2 = 2\sqrt[3]{x^3 + 6x + 7}$.

32. $6x^2 + 5x + 1 = \sqrt[3]{8x^3 + 1}$.

33. $x^2 + 3x = 2\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 2x + 3}$.
34. $\frac{(x-1)(7x-5)}{5\sqrt[3]{x^3 + 11x - 7} - 1} = \frac{1}{x}$.
35. $-x^4 + x^3 + 6x^2 - 6x + 33 = 2\sqrt[3]{x^4 + 20x - 21}$.
36. $x^3 - 27x^2 + 18x - 2 = \sqrt[3]{25x^3 + 6x - 8}$.
37. $2x^3 + 13x + 3 = 6\sqrt[3]{6x^3 + 12x^2 + 5x + 4}$.
38. $\frac{10x^3 - x - 3}{\sqrt[3]{7x^3 + 14x + 6}} = 2$.
39. $-x^3 + 3x + 4 = 4\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 4x + 1}$.
40. $-2x^3 + 4x^2 + 9x + 3 = 3\sqrt[3]{2x^3 + x^2 + 1}$.
41. $-x^3 + 5x^2 + 15x + 6 = \sqrt[3]{2x^3 + x^2 + 8}$.
42. $-2x^3 - 3x^2 + x + 3 = 4\sqrt[3]{3x^3 + 6x^2 + 6x + 2}$.
43. $-2x^3 - 9x^2 - 7x - 5 = 2\sqrt[3]{3x^3 + 6x^2 + 12x + 2}$.
44. $-x^3 - 3x^2 + x - 2 = 4\sqrt[3]{2x^3 + 6x^2 + 6x + 7}$.
45. $-x^3 - 3x^2 - 2x - 1 = 3\sqrt[3]{4x^3 + 12x^2 + 12x + 7}$.
46. $\frac{-5x^3 + 3x^2 + 2x + 21}{\sqrt[3]{6x^3 + 3x^2 + 15x + 7}} = 5$.
47. $-6x^3 + 3x^2 + 7 = 3\sqrt[3]{7x^3 + 3x^2 + 15x + 7}$.
48. $5x^3 + 6x^2 + 16x + 7 = 5\sqrt[3]{3x^3 + 6x^2 - 1}$.
49. $2x^3 + 3x^2 + 7x + 3 = 2\sqrt[3]{4x^3 + 6x^2 - 1}$.
50. $\frac{x^3 + (x+1)^2}{\sqrt[3]{3x^3 + 7x^2 + 6x + 1}} = 1$.
51. $(x+1)^3 - x = \sqrt[3]{(x+1)^3 + 4x^3 + 3x}$.
52. $x^3 + (x+1)^2 = \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 6x + 1}$.
53. $\frac{\sqrt[3]{x^3 + 14x^2 - 4x + 1}}{2x^3 + x^2 + 7x + 2} = \frac{1}{2}$.
54. $6x^2(x+1) + 5x + 1 = \sqrt[3]{(x+1)(3x^2 + 1)}$.
55. $x^3 + x^2 + 4x + 1 = \sqrt[3]{2x^3 + 2x^2 - 16x + 1}$.
56. $x^2(1+x) + 4x + 1 = \sqrt[3]{3x^2(1+x) - 15x + 1}$.
57. $-x^4 - x^3 + 9x + 3 = 3\sqrt[3]{x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 1}$.
58. $\frac{x^4 - 6x - 3}{\sqrt[3]{x^4 + x^3 + 3x^2 + 1}} + 3 = 0$.
59. $-x^4 + 3x - 5 = 4\sqrt[3]{x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x}$.
60. $-x^4 - 3x^2 + 2x + 2 = 2\sqrt[3]{x^4 + x^3 + 3x - 5}$.
61. $-2x^3 + 3x^2 + 5x + 5 = 2\sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 + 9x + 7}$.

Bài toán 87. Giải phương trình $x^3 - 3x^2 - 1 = (x+1)\sqrt[3]{x^2 + 3x - 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $(x-1)^3 - 3x = (x+1)\sqrt[3]{(x+1)(x-1) + 3x}$.

Đặt $x-1=t$; $\sqrt[3]{x^2 + 3x - 1} = y$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^3 - 3x = (x+1)y \\ (x+1)t + 3x = y^3 \end{cases} \Rightarrow t^3 + (x+1)t = y^3 + (x+1)y \Leftrightarrow (t-y)(t^2 + yt + t^2 + x+1) = 0$$

Xét hai trường hợp

- $t = y \Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 1} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 + 3x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 4\}$.
- $t^2 + yt + y^2 + x+1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}t^2 + x+1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{5}{3}$ (Vô nghiệm).

Thử lại các giá trị đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{0; 4\}$.

Nhận xét.

Đối với lớp bài toán này, chúng ta sử dụng đồng nhất thức như thường lệ. Lưu ý mức độ bài toán đã phức tạp hơn nguyên do dạng thức $(mx+n)^3 - g(x) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n) + g(x)}$ xuất hiện với $f(x)$ có dạng đa thức thay vì hằng số, do đó phương án sử dụng hàm số tỏ ra vô hiệu. Phía trong căn thức tam thức bậc hai có hệ số x^2 là 1 nên giả định

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - 1 &= (x+1)\sqrt[3]{x^2 + 3x - 1} \\ \Leftrightarrow (x+m)^3 - (ax+b) &= (x+1)\sqrt[3]{(x+1)(x+m) + ax+b} \\ \Rightarrow \begin{cases} m^3 - b = -1 \\ m+b = -1 \end{cases} &\Rightarrow m^3 + m + 2 = 0 \Rightarrow m = -1; b = 0; a = -3 \end{aligned}$$

Bài toán 88. Giải phương trình $\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x+3} = \sqrt[3]{(x-2)(x+4)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 &= (x+3)\sqrt[3]{x^2 + 2x - 8} \\ \Leftrightarrow (x-2)^3 - x + 2 &= (x+3)\sqrt[3]{(x+3)(x-2) + x-2} \end{aligned}$$

Đặt $x-2=u$; $\sqrt[3]{x^2 + 2x - 8} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - x + 2 = (x+3)v \\ v^3 - x + 2 = (x+3)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x+3)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x + 3 = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp sau

$$\begin{aligned} \text{➤ } u^2 + uv + v^2 + x + 3 &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 = -\frac{8}{3} \\ u = v &\Leftrightarrow x-2 = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 8} \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^2 + 2x - 8 \\ \Leftrightarrow x^3 - 7x^2 + 10x &= 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 2; 5\}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Thao tác đồng nhất hệ số khá đơn giản, chú ý hệ số của hạng tử chứa x^2 bằng 1 nên

$$\begin{aligned}x^3 - 6x^2 + 11x - 6 &= (x+3)\sqrt[3]{x^2 + 2x - 8} \\ \Leftrightarrow (x+m)^3 - (ax+b) &= (x+3)\sqrt[3]{(x+3)(x+m) + ax+b}\end{aligned}$$

Đồng nhất đa thức gắn với căn $\begin{cases} m^3 - b = -6 \\ 3m + b = -8 \end{cases} \Rightarrow m^3 + 3m = -14 \Leftrightarrow (m+2)(m^2 + 2m + 7) = 0 \Leftrightarrow m = -2.$

Khi đó $m = -2 \Rightarrow b = -2; m+3+a = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow (x-2)^3 - x + 2 = (x+3)\sqrt[3]{(x+3)(x-2) + x - 2}.$

Bài toán 89. Giải phương trình $x^3 + 5x^2 + 11x + 10 = (x+5)\sqrt[3]{2x^2 + 8x + 8} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}.$

Phương trình đã cho tương đương với $(x+2)^3 - (x^2 + x - 2) = (x+5)\sqrt[3]{(x+5)(x+2) + x^2 + x - 2}.$

Đặt $x+2 = t; \sqrt[3]{2x^2 + 8x + 8} = y$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^3 - (x^2 + x - 2) = (x+5)y \\ (x+5)t + x^2 + x - 2 = y^3 \end{cases} \Rightarrow t^3 + (x+5)t = (x+5)y + y^3 \Leftrightarrow (t-y)(t^2 + yt + y^2 + x+5) = 0.$$

Xét các trường hợp xảy ra

- $t = y \Leftrightarrow x+2 = \sqrt[3]{2x^2 + 5x + 8} \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 2x^2 + 5x + 8$
 $\Leftrightarrow x^3 + 4x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 4x + 7) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
- $t^2 + yt + y^2 + x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}t^2 + x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}(x+2)^2 + x + 5 = 0$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{8}{3}\right)^2 = -\frac{8}{3} \text{ (Vô nghiệm).}$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0.$

Nhận xét.

- Lưu ý hệ số của hạng tử chứa x^2 của tam thức trong căn thức bằng 2 nên ta sử dụng đồng nhất thức theo hướng

$$\begin{aligned}x^3 + 5x^2 + 11x + 10 &= (x+5)\sqrt[3]{2x^2 + 8x + 8} \\ \Leftrightarrow (x+m)^3 - (x^2 + ax + b) &= (x+5)\sqrt[3]{(x+5)(x+m) + (x^2 + ax + b)}\end{aligned}$$

Đồng nhất thức $\begin{cases} m^3 - b = 10 \\ 5m + b = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^3 + 5m = 18 \\ b = 8 - 5m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ b = -2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3m^2 - a = 11 \\ m + 5 + a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$

Suy ra $(x+2)^3 - (x^2 + x - 2) = (x+5)\sqrt[3]{(x+5)(x+2) + x^2 + x - 2}.$

- Bài toán 89 sau khi quy về hệ phương trình thu được hai hệ quả, trong đó hệ quả thứ hai tỏ ra khó khăn cho không ít bạn học sinh. Lưu ý biến đổi theo hai phương án đưa về tổng của các bình phương để chứng minh tính vô nghiệm

Phương án 1.

$$t^2 + yt + y^2 + x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 + x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(t + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}\sqrt[3]{(2x^2 + 8x + 8)^2} + x + 5 = 0 \quad (1).$$

Phương án 2

$$\begin{aligned} t^2 + yt + y^2 + x + 5 = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}t^2 + x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}(x+2)^2 + x + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + 4x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{8}{3}\right)^2 = -\frac{8}{3} \quad (2). \end{aligned}$$

Rõ ràng ẩn y là hàm số theo x , hai phương án đều là phân tích hằng đẳng thức nhưng có thể thấy việc chứng minh phương trình (1) vô nghiệm khó khăn, thậm chí bất khả thi, trong khi phương án 2 tỏ ra hiệu quả khi (2) dễ thấy vô nghiệm do vậy chúng ta chọn con đường ngắn hơn với ẩn t .

Bài toán 90. Giải phương trình $\frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 8}{x + 8} = \sqrt[3]{2x^2 + 9x + 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -8$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 8 = (x + 8)\sqrt[3]{2x^2 + 9x + 1} \Leftrightarrow (x + 1)^3 - (x^2 - 7) = (x + 8)\sqrt[3]{(x + 8)(x + 1) + (x^2 - 7)}.$$

Đặt $x + 1 = t$; $\sqrt[3]{2x^2 + 9x + 1} = y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^3 - (x^2 - 7) = (x + 8)y \\ (x + 8)t + x^2 - 7 = y^3 \end{cases} \Rightarrow t^3 + (x + 8)t = (x + 8)y + y^3 \Leftrightarrow (t - y)(t^2 + ty + y^2 + x + 8) = 0.$$

- $t = y \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt[3]{2x^2 + 9x + 1} \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2)(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3; 0; 2\}$.
- $t^2 + yt + y^2 + x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}t^2 + x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}(x + 1)^2 + x + 8 = 0$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{35}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 = -\frac{20}{3}$ (Vô nghiệm).

Thử lại các giá trị đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-3; 0; 2\}$.

Nhận xét.

Bài toán số 90 này tương tự bài toán 89, quy trình xử lý đồng nhất thức

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 + 3x + 8 &= (x + 8)\sqrt[3]{2x^2 + 9x + 1} \\ &\Leftrightarrow (x + m)^3 - (x^2 + ax + b) = (x + 8)\sqrt[3]{(x + 8)(x + m) + x^2 + ax + b} \end{aligned}$$

$$\text{Đồng nhất } \begin{cases} m^3 - b = 8 \\ 8m + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 + 8m = 9 \\ b = 1 - 8m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ b = -7 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3m^2 - a = 3 \\ m + 8 + a = 9 \end{cases} \Rightarrow a = 0.$$

Do đó ta thu được $(x + 1)^3 - (x^2 - 7) = (x + 8)\sqrt[3]{(x + 8)(x + 1) + (x^2 - 7)}$.

Bài toán 91. Giải phương trình $x(x^2 + 2) = 4x^2 + 11 + (2x + 11)\sqrt[3]{3x^2 + 10x - 1} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 2x - 11 &= (2x + 11)\sqrt[3]{3x^2 + 10x - 1} \\ &\Leftrightarrow (x - 1)^3 - (x^2 + x + 10) = (2x + 11)\sqrt[3]{(2x + 11)(x - 1) + x^2 + x + 10} \end{aligned}$$

Đặt $x - 1 = t$; $\sqrt[3]{3x^2 + 10x - 1} = y$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^3 - (x^2 + x + 10) = (2x + 11)y \\ y^3 = (2x + 11)t + x^2 + x + 10 \end{cases} \Rightarrow t^3 - y^3 = (2x + 11)(y - t) \Leftrightarrow (t - y)(t^2 + yt + y^2 + 2x + 11) = 0$$

$$\bullet \quad t^2 + yt + y^2 + 2x + 11 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}t^2 + 2x + 11 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{35}{3} \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\bullet \quad t = y \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt[3]{3x^2 + 10x - 1} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 3x^2 + 10x - 1 \Leftrightarrow x(x + 1)(x - 7) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 0; 7\}.$$

Thử lại các giá trị đều thỏa mãn phương trình ban đầu. Kết luận tập hợp nghiệm $S = \{-1; 0; 7\}$.

Nhận xét.

Do hệ số hạng tử chứa x^2 của tam thức bậc hai phía trong căn bằng 3 nên ta định hướng

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 2x - 11 &= (2x + 11)\sqrt[3]{3x^2 + 10x - 1} \\ &\Leftrightarrow (x + m)^3 - (x^2 + ax + b) = (2x + 11)\sqrt[3]{(2x + 11)(x + m) + x^2 + ax + b} \end{aligned}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số } \begin{cases} m^3 - b = -11 \\ 11m + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 + 11m = -12 \\ b = -1 - 11m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ b = 10 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3m^2 - a = 2 \\ 2m + 11 + a = 10 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1.$$

Thu được $(x - 1)^3 - (x^2 + x + 10) = (2x + 11)\sqrt[3]{(2x + 11)(x - 1) + x^2 + x + 10}$. Thao tác đặt ẩn phụ là cơ bản.

Bài toán 92. Giải phương trình $x^3 + 7x^2 + 16x + 5 = (1 - 2x)\sqrt[3]{-3x^2 - 7x + 5} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + x^2 + 4x - 3 &= (1 - 2x)\sqrt[3]{-3x^2 - 7x + 5} \\ &\Leftrightarrow (x + 2)^3 + x^2 + 4x - 3 = (1 - 2x)\sqrt[3]{(1 - 2x)(x + 2) - x^2 - 4x + 3} \end{aligned}$$

Đặt $x + 2 = u; \sqrt[3]{-3x^2 - 7x + 5} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 + x^2 + 4x - 3 = (1 - 2x)v \\ v^3 + x^2 + 4x - 3 = (1 - 2x)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (1 - 2x)(v - u) \Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 1 - 2x) = 0.$$

Xét các khả năng

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad u = v &\Leftrightarrow x + 2 = \sqrt[3]{-3x^2 - 7x + 5} \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = -3x^2 - 7x + 5 \\ &\Leftrightarrow x^3 + 9x^2 + 19x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x^2 + 6x + 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3; -3 + 2\sqrt{2}; -2 - 2\sqrt{2}\}. \\ \blacksquare \quad u^2 + uv + v^2 + 1 - 2x &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x + 2)^2 + 1 - 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{11}{3} \text{ (Vô nghiệm).} \end{aligned}$$

Nhận xét.

Sử dụng phương án đồng nhất thức

$$\begin{aligned} x^3 + 7x^2 + 16x + 5 &= (1 - 2x)\sqrt[3]{-3x^2 - 7x + 5} \\ &\Leftrightarrow (x + m)^3 + x^2 - ax - b = (1 - 2x)\sqrt[3]{(1 - 2x)(x + m) - x^2 + ax + b} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} m^3 - b = 5 \\ m + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 + m = 10 \\ b = 5 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ b = 3 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3m^2 - a = 16 \\ -2m + 1 + a = -7 \end{cases} \Rightarrow a = -4.$$

Từ đó thu được phép ẩn đặt ẩn phụ như trên.

Bài toán 93. Giải phương trình $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{3x^2 - 2} = 8x^2 - 13x + 7 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8x^3 - 13x^2 + 7x &= (x+1)\sqrt[3]{3x^2 - 2} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - x^2 + x + 1 &= (x+1)\sqrt[3]{2x^2 + x - 1 + x^2 - x - 1} \\ \Leftrightarrow (2x-1)^3 - (x^2 - x - 1) &= (x+1)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1) + x^2 - x - 1} \end{aligned}$$

Đặt $2x-1 = u; \sqrt[3]{3x^2 - 2}$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^2 - x - 1) = (x+1)v \\ v^3 - (x^2 - x - 1) = (x+1)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x+1)(v-u) \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + x+1) = 0.$$

Xét hai khả năng xảy ra

$$\begin{aligned} \diamond u = v &\Leftrightarrow 2x-1 = \sqrt[3]{3x^2 - 2} \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 3x^2 - 2 \\ &\Leftrightarrow 8x^3 - 15x^2 + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(8x+1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{8}; 1\right\}. \\ \diamond u^2 + uv + v^2 + x+1 = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + x+1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(2x-1)^2 + x+1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + 3x^2 - 2x + \frac{7}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + (x-1)^2 + 2x^2 = -\frac{3}{4} \text{ (Vô nghiệm)}. \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm $x = 1; x = -\frac{1}{8}$.

Nhận xét.

Thao tác xử lý ắnn phụ như sau

$$\begin{aligned} 8x^3 - 13x^2 + 7x &= (x+1)\sqrt[3]{3x^2 - 2} \\ \Leftrightarrow (2x+m)^3 - (x^2 + ax + b) &= (x+1)\sqrt[3]{(x+1)(2x+m) + x^2 + ax + b} \end{aligned}$$

$$\text{Đồng nhất theo thứ tự } \begin{cases} m^3 - b = 0 \\ m + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 + m = -2 \\ b = m^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ b = -1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 6m^2 - a = 7 \\ m + 2 + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1.$$

Do đó thu được $(2x-1)^3 - (x^2 - x - 1) = (x+1)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1) + x^2 - x - 1}$.

Bài toán 94. Giải phương trình $9x^2 + \frac{12}{x} + 1 = 12x + \left(1 + \frac{4}{x}\right)\sqrt[3]{(x-1)(18x+57)+8} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 9x^3 - 12x^2 + x + 12 &= (x+4)\sqrt[3]{18x^2 + 39x - 49} \\ \Leftrightarrow 27x^3 - 36x^2 + 3x + 36 &= 3(x+4)\sqrt[3]{18x^2 + 39x - 49} \\ \Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 - (9x^2 + 6x - 37) &= 3(x+4)\sqrt[3]{3(3x^2 + 11x - 4) + 9x^2 + 6x - 37} \\ \Leftrightarrow (3x-1)^3 - (9x^2 + 6x - 37) &= 3(x+4)\sqrt[3]{3(x+4)(3x-1) + 9x^2 + 6x - 37} \end{aligned}$$

Đặt $3x-1 = u; \sqrt[3]{18x^2 + 39x - 49} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (9x^2 + 6x - 37) = 3(x+4)v \\ v^3 - (9x^2 + 6x - 37) = 3(x+4)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 3(x+4)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 3x + 12 = 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \circ \quad u = v &\Leftrightarrow 3x - 1 = \sqrt[3]{18x^2 + 39x - 49} \Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = 18x^2 + 39x - 49 \\ &\Leftrightarrow 27x^3 - 45x^2 - 30x + 48 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(9x^2 - 6x - 16) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{3-3\sqrt{17}}{9}; \frac{3+3\sqrt{17}}{9}; 1 \right\}. \\ \circ \quad u^2 + uv + v^2 + 3x + 12 = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v \right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + 2x + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v \right)^2 + \frac{3}{4}(3x-1)^2 + 3x + 12 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v \right)^2 + \frac{27}{4} \left(x - \frac{10}{9} \right)^2 = -\frac{53}{12} \text{ (Vô nghiệm)}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Bài toán này đã xuất hiện thao tác nhân hai vế của phương trình với hằng số 3. Sở dĩ như vậy để làm xuất hiện hằng đẳng thức lập phương đẹp hơn với số 27. Ta chú ý

$$\begin{aligned} 9x^3 - 12x^2 + x + 12 &= (x+4)\sqrt[3]{18x^2 + 39x - 49} \\ \Leftrightarrow 27x^3 - 36x^2 + 3x + 36 &= 3(x+4)\sqrt[3]{18x^2 + 39x - 49} \\ \Leftrightarrow (3x+m)^3 - (9x^2 + ax + b) &= 3(x+4)\sqrt[3]{3(x+4)(3x+m) + 9x^2 + ax + b} \end{aligned}$$

$$\text{Đồng nhất } \begin{cases} m^3 - b = 36 \\ 12m + b = -49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 + 12m = -13 \\ b = -49 - 12m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ b = -37 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 9m^2 - a = 3 \\ 3(m+12) + a = 39 \end{cases} \Leftrightarrow a = 6$$

Do đó ta thu được

$$\begin{aligned} 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 - (9x^2 + 6x - 37) &= 3(x+4)\sqrt[3]{3(3x^2 + 11x - 4) + 9x^2 + 6x - 37} \\ \Leftrightarrow (3x-1)^3 - (9x^2 + 6x - 37) &= 3(x+4)\sqrt[3]{3(x+4)(3x-1) + 9x^2 + 6x - 37} \end{aligned}$$

Bài toán 95. Giải phương trình $3x^3 - 12x^2 + 2x + 11 = \sqrt[3]{36x^2 + 117x - 145}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 27x^3 - 36x^2 + 18x + 99 &= 9\sqrt[3]{36x^2 + 117x - 145} \\ \Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 - (9x^2 - 9x - 100) &= 9(x+5)\sqrt[3]{9(3x^2 + 10x - 5) + 9x^2 - 9x - 100} \\ \Leftrightarrow (3x-1)^3 - (9x^2 - 9x - 100) &= 9(x+5)\sqrt[3]{9(x+5)(3x-1) + 9x^2 - 9x - 100} \end{aligned}$$

Đặt $3x-1 = u$; $\sqrt[3]{36x^2 + 117x - 145} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (9x^2 - 9x - 100) = 9(x+5)v \\ v^3 - (9x^2 - 9x - 100) = 9(x+5)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 9(x+5)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 9(x+5) = 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\bullet \quad u^2 + uv + v^2 + 9(x+5) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v \right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 9(x+5) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v \right)^2 + \frac{3}{4}(3x-1)^2 + 9x + 45 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{183}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}(x+3)^2 = -39 \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad u=v &\Leftrightarrow 3x-1=\sqrt[3]{36x^2+117x-145} \Leftrightarrow 27x^3-27x^2+9x-1=36x^2+117x-145 \\ &\Leftrightarrow 27x^3-63x^2-108x+144=0 \Leftrightarrow 3x^3-7x^2-12x+16=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(3x^2-4x-16)=0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{2+2\sqrt{13}}{3}; \frac{2-2\sqrt{13}}{3}\right\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 96. Giải phương trình $x(x-1)^2 = \sqrt[3]{4x^2+14x-17} - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + x + 1 &= \sqrt[3]{4x^2+14x-17} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 16x^2 + 8x + 8 &= 8\sqrt[3]{4x^2+14x-17} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - (4x^2 - 2x - 9) &= 8\sqrt[3]{16x-8+(4x^2-2x-9)} \\ \Leftrightarrow (2x-1)^3 - (4x^2 - 2x - 9) &= 8\sqrt[3]{8(2x-1)+(4x^2-2x-9)} \end{aligned}$$

Đặt $2x-1=u$; $\sqrt[3]{4x^2+14x-17}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (4x^2 - 2x + 7) = 8v \\ v^3 - (4x^2 - 2x + 7) = 8u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 8v - 8u \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 8 = 0 \end{cases}$$

Xét các khả năng xảy ra

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad u^2 + uv + v^2 + 8 &= 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 = -8 \text{ (Vô nghiệm).} \\ \blacksquare \quad 2x-1 &= \sqrt[3]{4x^2+14x-17} \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 4x^2 + 14x - 17 \\ &\Leftrightarrow 8x^3 - 16x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1; 2\}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm $x=-1; x=1; x=2$.

Bài toán 97. Giải phương trình $(x+7)(x^2-9x+1-\sqrt[3]{20x^2+102x-121})+63x+1=0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (x+7)(x^2-9x+1) + 63x + 1 &= (x+7)\sqrt[3]{20x^2+102x-121} \\ \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x + 8 &= (x+7)\sqrt[3]{20x^2+102x-121} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 16x^2 + 8x + 64 &= 8(x+7)\sqrt[3]{20x^2+102x-121} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - (4x^2 - 2x - 65) &= 8(x+7)\sqrt[3]{8(2x^2+13x-7)+4x^2-2x-65} \\ \Leftrightarrow (2x-1)^3 - (4x^2 - 2x - 65) &= 8(x+7)\sqrt[3]{8(x+7)(2x-1)+4x^2-2x-65} \end{aligned}$$

Đặt $2x-1=u$; $\sqrt[3]{20x^2+102x-121}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (4x^2 - 2x - 65) = 8(x+7)v \\ v^3 - (4x^2 - 2x - 65) = 8(x+7)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 8(x+7)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 8(x+7) = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned} \text{➤ } u = v &\Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt[3]{20x^2 + 102x - 121} \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 20x^2 + 102x - 121 \Leftrightarrow 8x^3 - 32x^2 - 96x + 120 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 12x + 15 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 3x - 15) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{3+\sqrt{69}}{2}; \frac{3-\sqrt{69}}{2}\right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } u^2 + uv + v^2 + 8(x+7) &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 8(x+7) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(2x-1)^2 + 8(x+7) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + 3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{164}{3} \text{ (Vô nghiệm)}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Thoạt tiên bài toán số 97 hình thức đôi chút mù mịt, khủng bố, mất định hướng. Tuy nhiên các bạn học sinh nên mạnh dạn, xông pha khai triển thu được

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + x + 8 &= (x+7)\sqrt[3]{20x^2 + 102x - 121} \\ &\Leftrightarrow (x+m)^3 - (19x^2 + ax + b) = (x+7)\sqrt[3]{(x+7)(x+m) + 19x^2 + ax + b} \end{aligned}$$

$$\text{Trước hết đồng nhất } \begin{cases} m^3 - b = 8 \\ 7m + b = -121 \end{cases} \Rightarrow m \notin \mathbb{Z} \text{ (Loại)}.$$

Thoái chuyển qua phương án 2, nhân thêm hằng số k

$$\begin{aligned} k(x^3 - 2x^2 + x + 8) &= k(x+7)\sqrt[3]{20x^2 + 102x - 121} \\ &\Leftrightarrow (mx+n)^3 - (ax^2 + bx + c) = k(x+7)\sqrt[3]{k(x+7)(mx+n) + ax^2 + bx + c} \end{aligned}$$

$$\text{Rõ ràng } m^3 = k \Rightarrow (mx+n)^3 - (ax^2 + bx + c) = m^3(x+7)\sqrt[3]{m^3(x+7)(mx+n) + ax^2 + bx + c}.$$

Nếu $m=1$ thì trở lại biến đổi ban đầu. Thử nghiệm với m tăng dần ta có

$$\begin{aligned} m=2 &\Rightarrow 8x^3 - 16x^2 + 8x + 64 = 8(x+7)\sqrt[3]{20x^2 + 102x - 121} \\ &\Leftrightarrow (2x+n)^3 - (ax^2 + bx + c) = 8(x+7)\sqrt[3]{8(x+7)(mx+n) + ax^2 + bx + c} \end{aligned}$$

$$\text{Đồng nhất } \begin{cases} n^3 - c = 64 \\ 56n + c = -121 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 + 56n = -57 \\ c = n^3 - 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \\ c = -65 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3.4n^2 - a = -16 \\ 3.2n - b = 8 \\ 8m + a = 20 \\ 8(n+7m) + b = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } (2x-1)^3 - (4x^2 - 2x - 65) = 8(x+7)\sqrt[3]{8(x+7)(2x-1) + 4x^2 - 2x - 65}.$$

Bài toán 98. Giải phương trình $(x-1)^3 + 9 = 2x + (x+6)\sqrt[3]{108x^2 + 441x - 548}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + x + 8 &= (x+6)\sqrt[3]{108x^2 + 441x - 548} \\ &\Leftrightarrow 27x^3 - 81x^2 + 27x + 216 = 27\sqrt[3]{108x^2 + 441x - 548} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 - (27x^2 + 9x - 224) = 27(x+6)\sqrt[3]{27(3x^2 + 16x - 12) + 27x^2 + 9x - 224}$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)^3 - (27x^2 + 9x - 224) = 27(x+6)\sqrt[3]{27(x+6)(3x-2) + 27x^2 + 9x - 224}$$

Đặt $3x-2=u$; $\sqrt[3]{108x^2 + 441x - 548} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (27x^2 + 9x - 224) = 27(x+6)v \\ v^3 - (27x^2 + 9x - 224) = 27(x+6)u \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^3 - v^3 = 27(x+6)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 27(x+6) = 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

- $u = v \Leftrightarrow 3x-2 = \sqrt[3]{108x^2 + 441x - 548} \Leftrightarrow 27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 = 108x^2 + 441x - 548$
 $\Leftrightarrow 27x^3 - 162x^2 - 405x + 540 = 0 \Leftrightarrow 27(x-1)(x^2 - 5x - 20) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{5+\sqrt{105}}{2}; \frac{5-\sqrt{105}}{2}\right\}$
- $u^2 + uv + v^2 + 27(x+6) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}(3x-2)^2 + 27(x+6) = 0$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{27}{4}x^2 - 9x + 165 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{27}{4}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 = -162$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có tập hợp nghiệm $S = \left\{1; \frac{5+\sqrt{105}}{2}; \frac{5-\sqrt{105}}{2}\right\}$.

Bài toán 99. Giải phương trình $(x-1)(2x^2+1)+24=(x+7)\sqrt[3]{144x^2+844x-961}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2x^3 - 2x^2 + x + 23 &= (x+7)\sqrt[3]{144x^2 + 844x - 961} \\ \Leftrightarrow 64x^3 - 64x^2 + 32x + 736 &= 32(x+7)\sqrt[3]{144x^2 + 844x - 961} \\ \Leftrightarrow 64x^3 - 48x^2 + 12x - 1 - (16x^2 - 20x - 737) &= 32(x+7)\sqrt[3]{32(4x^2 + 27x - 7) + 16x^2 - 20x - 737} \\ \Leftrightarrow (4x-1)^3 - (16x^2 - 20x - 737) &= 32(x+7)\sqrt[3]{32(x+7)(4x-1) + 16x^2 - 20x - 737} \end{aligned}$$

Đặt $4x-1=u$; $\sqrt[3]{144x^2 + 844x - 961} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (16x^2 - 20x - 737) = 32(x+7)v \\ v^3 - (16x^2 - 20x - 737) = 32(x+7)u \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^3 - v^3 = 32(x+7)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 32(x+7) = 0 \end{cases}$$

- $u = v \Leftrightarrow 4x-1 = \sqrt[3]{144x^2 + 844x - 961} \Leftrightarrow 64x^3 - 48x^2 + 12x - 1 = 144x^2 + 844x - 961$
 $\Leftrightarrow 64x^3 - 192x^2 - 832x + 960 = 0 \Leftrightarrow 32(x-1)(x+3)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3; 1; 5\}$.
- $u^2 + uv + v^2 + 32(x+7) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}(4x-1)^2 + 32(x+7) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + 12x^2 + 26x + \frac{899}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + 12\left(x + \frac{13}{12}\right)^2 = -\frac{632}{3} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình ban đầu có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 100. Giải phương trình $8x^2 - 45x + 187 = \frac{773}{x+4} + 4\sqrt[3]{9x^2 + 27x + 8}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -4$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (x+4)(8x^2 - 45x + 187) - 773 &= 4(x+4)\sqrt[3]{9x^2 + 27x + 8} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 13x^2 + 7x - 25 &= 4(x+4)\sqrt[3]{9x^2 + 27x + 8} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - (x^2 - x + 24) &= 4(x+4)\sqrt[3]{4(2x^2 + 7x - 4) + x^2 - x + 24} \\ \Leftrightarrow (2x-1)^3 - (x^2 - x + 24) &= 4(x+4)\sqrt[3]{4(x+4)(2x-1) + (x^2 - x + 24)} \end{aligned}$$

Đặt $2x-1 = u$; $\sqrt[3]{9x^2 + 27x + 8} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^2 - x + 24) = 4(x+4)v \\ v^3 - (x^2 - x + 24) = 4(x+4)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 4(x+4)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 4(x+4) = 0 \end{cases}$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + 4(x+4) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 4(x+4) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(2x-1)^2 + 4(x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + x + \frac{67}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{197}{12} \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad 2x-1 &= \sqrt[3]{9x^2 + 27x + 8} \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 9x^2 + 27x + 8 \\ \Leftrightarrow 8x^3 &= 21x^2 + 21x + 7 \Leftrightarrow \frac{8}{3}x^3 = 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow \frac{11}{3}x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ \Leftrightarrow \frac{11}{3}x^3 &= (x+1)^3 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{\frac{11}{3}} = x+1 \Leftrightarrow x\left(\sqrt[3]{\frac{11}{3}} - 1\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{11} - \sqrt[3]{3}} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đề bài có nghiệm duy nhất kể trên.

Bài toán 101. Giải phương trình $2(2x^2 - 13x + 86) = 3\sqrt[3]{12x^2 + 18x + 1} + \frac{876}{x+5}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -5$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2(x+5)(2x^2 - 13x + 86) - 876 &= 3(x+5)\sqrt[3]{12x^2 + 18x + 1} \\ \Leftrightarrow 4x^3 - 6x^2 + 21x - 16 &= 3(x+5)\sqrt[3]{12x^2 + 18x + 1} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 42x - 32 &= 6(x+5)\sqrt[3]{12x^2 + 18x + 1} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 + 36x - 31 &= 6(x+5)\sqrt[3]{6(2x^2 + 9x - 5) - 36x + 31} \\ \Leftrightarrow (2x-1)^3 + 36x - 31 &= 6(x+5)\sqrt[3]{6(x+5)(2x-1) - 36x + 31} \end{aligned}$$

Đặt $2x-1=u$; $\sqrt[3]{12x^2+12x+1}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3+6x-13=6(x+5)v \\ v^3+6x-13=6(x+5)u \end{cases} \Rightarrow u^3-v^3=6(x+5)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2+uv+v^2+6(x+5)=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \diamond u=v &\Leftrightarrow 2x-1=\sqrt[3]{12x^2+12x+1} \Leftrightarrow 8x^3-12x^2+6x-1=12x^2+18x+1 \\ &\Leftrightarrow 8x^3=24x^2+12x+2 \Leftrightarrow 4x^3=12x^2+6x+1 \Leftrightarrow 12x^3=8x^3+12x^2+6x+1 \\ &\Leftrightarrow 12x^3=(2x+1)^3 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{12}=2x+1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt[3]{12}-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \diamond u^2+uv+v^2+6(x+5)=0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2+\frac{3}{4}v^2+6(x+5)=0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2+\frac{3}{4}(2x-1)^2+6(x+5)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2+3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-30 \text{ (Vô nghiệm).} \end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện, kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{\sqrt[3]{12}-2}$.

Bài toán 102. Giải phương trình $\frac{x^3-6x^2+21x+50}{\sqrt[3]{18x^2+24x+12}}=3(2x+9) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $18x^2+24x+12 \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3-6x^2+21x+50 &= 3(2x+9)\sqrt[3]{18x^2+24x+12} \\ \Leftrightarrow x^3+6x^2+12x+8-(12x^2-9x-42) &= 3(2x+9)\sqrt[3]{3(2x^2+13x+18)+12x^2-9x-42} \\ \Leftrightarrow (x+2)^3-(12x^2-9x-42) &= 3(2x+9)\sqrt[3]{3(2x+9)(x+2)+12x^2-9x-42} \end{aligned}$$

Đặt $x+2=u$; $\sqrt[3]{18x^2+24x+12}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3-(12x^2-9x-30)=3(2x+9)v \\ v^3-(12x^2-9x-30)=3(2x+9)u \end{cases} \Rightarrow u^3-v^3=3(2x+9)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2+uv+v^2+3(2x+9)=0 \end{cases}$$

Xét các khả năng xảy ra

$$\begin{aligned} \blacksquare u^2+uv+v^2+3(2x+9)=0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2+\frac{3}{4}v^2+3(2x+9)=0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2+\frac{3}{4}(x+2)^2+3(2x+9)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2+\frac{3}{4}(x+6)^2=-3 \text{ (Vô nghiệm).} \\ \blacksquare u=v &\Leftrightarrow x+2=\sqrt[3]{18x^2+24x+12} \Leftrightarrow x^3+6x^2+12x+8=18x^2+24x+12 \Leftrightarrow x^3=12x^2+12x+4 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3=3x^2+3x+1 \Leftrightarrow \frac{4}{3}x^3=(x+1)^3 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{\frac{4}{3}}=x+1 \Leftrightarrow x\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}-1\right)=1 \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x=\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}$.

Bài toán 103. Giải phương trình $x^2-7x+36-\sqrt{x^3+16x^2+62x-78}=\frac{174}{x+5} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -5$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}(x+5)(x^2-7x+36)-174 &= (x+5)\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78} \\ \Leftrightarrow x^3-2x^2+x+6 &= (x+5)\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78} \\ \Leftrightarrow 7x^3-14x^2+7x+42 &= 7(x+5)\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78} \\ \Leftrightarrow 8x^3-12x^2+6x-1-(x^3+2x^2-x-43) &= 7(x+5)\sqrt[3]{7(2x^2+9x-5)+(x^3+2x^2-x-43)} \\ \Leftrightarrow (2x-1)^3-(x^3+2x^2-x-43) &= 7(x+5)\sqrt[3]{7(x+5)(2x-1)+(x^3+2x^2-x-43)}\end{aligned}$$

Đặt $2x-1=u$; $\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3-(x^3+2x^2-x-43)=7(x+5)v \\ v^3-(x^3+2x^2-x-43)=7(x+5)u \end{cases} \Rightarrow u^3-v^3=7(x+5)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2+uv+v^2+7(x+5)=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\circ \quad u=v &\Leftrightarrow 2x-1=\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78} \Leftrightarrow 8x^3-12x^2+6x-1=x^3+16x^2+62x-78 \\ &\Leftrightarrow 7x^3-28x^2-56x+77=0 \Leftrightarrow x^3-4x^2-8x+11=0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-3x-11)=0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{3+\sqrt{53}}{2}; \frac{3-\sqrt{53}}{2}\right\}$$

$$\circ \quad u^2+uv+v^2+7(x+5)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2+\frac{3}{4}v^2+7(x+5)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2+\frac{3}{4}(2x-1)^2+7(x+5)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2+3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{413}{12} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm như trên.

Nhận xét.

Nhắc lại dạng thức $(mx+n)^3-(ax^3+bx^2+cx+d)=f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n)+(ax^3+bx^2+cx+d)}$.

Bài toán số 103 mở đầu cho sự xuất hiện của $g(x)$ dưới dạng đa thức bậc ba, $f(x)$ vẫn có dạng nhị thức bậc nhất.

Ngoài ra thao tác đặt ẩn phụ còn thông qua việc nhân hai vế với hằng số 7. Tác giả xin đi sâu phân tích cụ thể Trước hết biến đổi và do trong căn là đa thức bậc ba nên ta giả định

$$\begin{aligned}(x+5)(x^2-7x+36)-174 &= (x+5)\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78} \\ \Leftrightarrow x^3-2x^2+x+6 &= (x+5)\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78} \\ \Leftrightarrow (mx+n)^3-(x^3+bx^2+cx+d) &= (x+5)\sqrt[3]{(x+5)(mx+n)+(x^3+bx^2+cx+d)}\end{aligned}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số } \begin{cases} n^3-d=6 \\ 5n+d=-78 \end{cases} \Rightarrow n^3+5n=-72 \Rightarrow n \notin \mathbb{Z} \text{ (Loại).}$$

Thoái chuyển qua phương án nhân thêm hằng số k

$$\begin{aligned}k(x^3-2x^2+x+6) &= k(x+5)\sqrt[3]{x^3+16x^2+62x-78} \\ \Leftrightarrow (mx+n)^3-(x^3+bx^2+cx+d) &= k(x+5)\sqrt[3]{k(x+5)(mx+n)+(x^3+bx^2+cx+d)}\end{aligned}$$

Để ý hệ số của hạng tử chứa x^3 phía ngoài căn thì $m^3-1=k \Rightarrow m^3=k+1$. Nếu $k=1$ thì trùng lặp biến đổi ban đầu. Thử nghiệm với các giá trị k tiếp theo, nếu $k=7 \Rightarrow m=2$. Khi đó ta có

$$7(x^3 - 2x^2 + x + 6) = 7(x+5)\sqrt[3]{x^3 + 16x^2 + 62x - 78}$$

$$\Leftrightarrow (2x+n)^3 - (x^3 + bx^2 + cx + d) = 7(x+5)\sqrt[3]{7(x+5)(2x+n) + (x^3 + bx^2 + cx + d)}$$

$$\text{Đồng nhất hệ số } \begin{cases} n^3 - d = 42 \\ 35n + d = -78 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 + 35n = -36 \\ d = n^3 - 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \\ d = -43 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3.4n - b = -14 \\ 3.2n^2 - c = 7 \\ 14 + b = 16 \\ 7(n+10) + c = 62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

Do đó ta quy về

$$7x^3 - 14x^2 + 7x + 42 = 7(x+5)\sqrt[3]{x^3 + 16x^2 + 62x - 78}$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - (x^3 + 2x^2 - x - 43) = 7(x+5)\sqrt[3]{7(2x^2 + 9x - 5) + (x^3 + 2x^2 - x - 43)}$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^3 - (x^3 + 2x^2 - x - 43) = 7(x+5)\sqrt[3]{7(x+5)(2x-1) + (x^3 + 2x^2 - x - 43)}$$

Bài toán 104. Giải phương trình $\frac{6x^2 + 11x + 13}{x + 13} = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 15x + 8} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -13$. Phương trình đã cho tương đương với

$$6x^2 + 11x + 13 = (x+13)\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 15x + 8} \Leftrightarrow (x+2)^3 - (x^3 + x - 5) = (x+13)\sqrt[3]{(x+13)(x+1) + x^3 + x - 5}.$$

Đặt $x+2=t$; $\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 15x + 8} = y$ ta thu được phương trình

$$\begin{cases} t^3 - (x^3 + x - 5) = (x+13)y \\ (x+13)t + x^3 + x - 5 = y^3 \end{cases} \Rightarrow t^3 + (x+13)t = (x+13)y + y^3 \Leftrightarrow (t-y)(t^2 + ty + y^2 + x+13) = 0$$

$$\bullet \quad t^2 + yt + y^2 + x + 13 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}t^2 + x + 13 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{8}{3}\right)^2 = -\frac{32}{3} \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\bullet \quad t = y \Leftrightarrow x+2 = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 15x + 8} \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + x^2 + 15x + 8 \Leftrightarrow 5x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Thử lại thấy không có giá trị nào thỏa mãn. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 105. Giải phương trình $\frac{x^2 - x + 2}{x + 6} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{1 + x(x^2 + x + 13)} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -6$. Phương trình đã cho tương đương với

$$3x^2 - 3x + 6 = (x+6)\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 13x + 1}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^3 + 6x - 5) = (x+6)\sqrt[3]{x^2 + 7x + 6 + x^3 + 6x - 5}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 - (x^3 + 6x - 5) = (x+6)\sqrt[3]{(x+6)(x+1) + x^3 + 6x - 5}$$

Đặt $x+1=u$; $\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 13x + 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^3 + 6x - 5) = (x+6)v \\ v^3 - (x^3 + 6x - 5) = (x+6)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x+6)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } u = v &\Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 13x + 1} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + x^2 + 13x + 1 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0; 5\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } u^2 + uv + v^2 + x + 6 = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x+1)^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 = -\frac{14}{3} \text{ (Vô nghiệm)}. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có hai nghiệm $x = 0; x = 5$.

Nhận xét.

Biến đổi

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3x + 6 &= (x+6)\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 13x + 1} \\ &\Leftrightarrow (mx+n)^3 - (x^3 + bx^2 + cx + d) = (x+6)\sqrt[3]{(x+6)(mx+n) + x^3 + bx^2 + cx + d} \end{aligned}$$

Để thấy phía ngoài căn thức có dạng tam thức bậc hai nên $m=1$. Ta có

$$(x+n)^3 - (x^3 + bx^2 + cx + d) = (x+6)\sqrt[3]{(x+6)(x+n) + x^3 + bx^2 + cx + d}.$$

$$\text{Đồng nhất thức } \begin{cases} n^3 - d = 6 \\ 6n + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 + 6n = 7 \\ d = 1 - 6n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ d = -5 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3n - b = 3 \\ 3n^2 - c = -3 \\ 1 + b = 1 \\ n + 6 + c = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 6 \end{cases}$$

$$\text{Do đó quy về } (x+1)^3 - (x^3 + 6x - 5) = (x+6)\sqrt[3]{(x+6)(x+1) + x^3 + 6x - 5}.$$

Bài toán 106. Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 5x - 6}} = \frac{6x+17}{(x+6)^2 - 72} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x^3 - x^2 + 5x - 6 \neq 0 \\ |x+6| \neq 6\sqrt{2} \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^2 + 12x - 36 &= (6x+17)\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 5x - 6} \\ &\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - (x^3 - 7x^2 + 28) = (6x+17)\sqrt[3]{6x^2 + 5x - 34 + x^3 - 7x^2 + 28} \\ &\Leftrightarrow (x-2)^3 - (x^3 - 7x^2 + 28) = (6x+17)\sqrt[3]{(6x+17)(x-2) + x^3 - 7x^2 + 28} \end{aligned}$$

Đặt $x-2 = u; \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 5x - 6} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^3 - 7x^2 + 28) = (6x+17)v \\ v^3 - (x^3 - 7x^2 + 28) = (6x+17)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (6x+17)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 6x + 17 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad x-2 &= \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 5x - 6} \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = x^3 - x^2 + 5x - 6 \\ &\Leftrightarrow 5x^2 - 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(5x-2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{2}{5}; 1\right\}. \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad u^2 + uv + v^2 + 6x + 17 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + 6x + 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}(x-2)^2 + 6x+17=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}(x-2)^2 = -17 \text{ (Vô nghiệm)}.$$

Kết luận phương trình đề bài có hai nghiệm $x = \frac{2}{5}; x = 1$.

Bài toán 107. Giải phương trình $\frac{3x^3 - 4x^2 - 3x - 1}{\sqrt[3]{2x(x^2 + 6)}} = \frac{1}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 6x^3 - 8x^2 - 6x - 2 &= (2x+1)\sqrt[3]{2x(x^2+6)} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - (2x^3 - 4x^2 + 12x + 1) &= (2x+1)\sqrt[3]{4x^2 - 1 + 2x^3 - 4x^2 + 12x + 1} \\ \Leftrightarrow (2x-1)^3 - (2x^3 - 4x^2 + 12x + 1) &= (2x+1)\sqrt[3]{(2x+1)(2x-1) + 2x^3 - 4x^2 + 12x + 1} \end{aligned}$$

Đặt $2x-1=u; \sqrt[3]{2x(x^2+6)}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^3 - 4x^2 + 12x + 1) = (2x+1)v \\ v^3 - (2x^3 - 4x^2 + 12x + 1) = (2x+1)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (2x+1)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2 + uv + v^2 + 2x+1=0 \end{cases}$$

$$\circ \quad u^2 + uv + v^2 + 2x+1=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + 2x+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}(2x-1)^2 + 2x+1=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + 3\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 = -\frac{5}{3} \text{ (Vô nghiệm)}.$$

$$\circ \quad u=v \Leftrightarrow 2x-1=\sqrt[3]{2x(x^2+6)} \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 2x^3 + 12x \Leftrightarrow 6x^3 = 12x^2 + 6x + 1$$

$$\Leftrightarrow 14x^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 \Leftrightarrow 14x^3 = (2x+1)^3 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{14} = 2x+1 \Leftrightarrow x(\sqrt[3]{14}-2)=1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{14}-2}.$$

Đổi chiếu điều kiện và thử trực tiếp ta thu được nghiệm duy nhất như trên.

Bài toán 108. Giải phương trình $\frac{x^3 - 27x + 41}{2x+13} + 3\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 9x + 1} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x \neq -13$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} -x^3 + 27x - 41 &= 3(2x+13)\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 9x + 1} \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (2x^3 - 3x^2 - 24x + 40) &= 3(2x+13)\sqrt[3]{3(2x^2 + 11x - 13) + 2x^3 - 3x^2 - 24x + 40} \\ &= 3(2x+13)\sqrt[3]{3(2x+13)(x-1) + (2x^3 - 3x^2 - 24x + 40)} \\ \Leftrightarrow (x-1)^3 - (2x^3 - 3x^2 - 24x + 40) &= 3(2x+13)\sqrt[3]{3(2x+13)(x-1) + (2x^3 - 3x^2 - 24x + 40)} \end{aligned}$$

Đặt $x-1=u; \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 9x + 1}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^3 - 3x^2 - 24x + 40) = 3(2x+13)v \\ v^3 - (2x^3 - 3x^2 - 24x + 40) = 3(2x+13)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 3(2x+13)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2 + uv + v^2 + 3(2x+13)=0 \end{cases}$$

- $u^2 + uv + v^2 + 3(2x+13) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 3(2x+13) = 0$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x-1)^2 + 3(2x+13) = 0$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{159}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x+3)^2 = -33$ (Vô nghiệm).
- $x-1 = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 9x + 1} \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 2x^3 + 3x^2 + 9x + 1 \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 6x + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = \frac{1}{2}x^3 \Leftrightarrow (x+1)^3 = \frac{1}{2}x^3 \Leftrightarrow x+1 = \frac{x}{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt[3]{2}}{1-\sqrt[3]{2}}.$

Đổi chiều điều kiện ta kết luận nghiệm duy nhất $x = \frac{\sqrt[3]{2}}{1-\sqrt[3]{2}}.$

Bài toán 109. Giải phương trình $\frac{5x^3 + 13x^2 + 47x + 21}{2\sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 - 3x - 2}} = x + 9 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $3x^3 + 3x^2 - 3x - 2 \neq 0.$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 5x^3 + 13x^2 + 47x + 21 &= 2(x+9)\sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 - 3x - 2} \\ \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - 3x^3 + x^2 + 41x + 20 &= 2(x+9)\sqrt[3]{2(2x^2 + 19x + 9) + 3x^3 - x^2 - 41x - 20} \\ \Leftrightarrow (2x+1)^3 - 3x^3 + x^2 + 41x + 20 &= 2(x+9)\sqrt[3]{2(x+9)(2x+1) + 3x^3 - x^2 - 41x - 20} \end{aligned}$$

Đặt $2x+1 = \sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 - 3x - 2} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (3x^3 - x^2 - 41x - 20) = 2(x+9)v \\ v^3 - (3x^3 - x^2 - 41x - 20) = 2(x+9)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 2(x+9)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 2(x+9) = 0 \end{cases}$$

- $u = v \Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt[3]{3x^3 + 3x^2 - 3x - 2} \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 3x^3 + 3x^2 - 3x - 2$
 $\Leftrightarrow 5x^3 + 9x^2 + 9x + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 = -\frac{2}{3}x^3 \Leftrightarrow x+1 = -x\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}}.$$

- $u^2 + uv + v^2 + 2(x+9) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 2x+18 = 0$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(2x+1)^2 + 2x+18 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + 3\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{50}{3}$ (Vô nghiệm).

Kết hợp điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = -\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}}.$

Bài toán 110. Giải phương trình $x(8x^2 + x + 12) = \frac{32}{3} + (x+8)\sqrt[3]{(x-1)(3x^2 - 18x + 3)} - 6 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
8x^3 + x^2 + 12x &= \frac{32}{3} + (x+8)\sqrt[3]{3x^3 - 21x^2 + 21x - 9} \\
\Leftrightarrow 24x^3 + 3x^2 + 36x - 32 &= 3(x+8)\sqrt[3]{3x^3 - 21x^2 + 21x - 9} \\
\Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 - (3x^3 - 30x^2 - 27x + 31) \\
&= 3(x+8)\sqrt[3]{3(3x^2 + 16x - 8) + 3x^3 - 30x^2 - 27x + 31} \\
&\Leftrightarrow (3x-1)^3 - (3x^3 - 30x^2 - 27x + 31) = 3(x+8)\sqrt[3]{3(x+8)(3x-1) + 3x^3 - 30x^2 - 27x + 31}
\end{aligned}$$

Đặt $3x-1=u$; $\sqrt[3]{3x^3 - 21x^2 + 21x + 7} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (3x^3 - 30x^2 - 27x + 15) = 3(x+8)v \\ v^3 - (3x^3 - 30x^2 - 27x + 15) = 3(x+8)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 3(x+8)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 3(x+8) = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp xảy ra

$$\begin{aligned}
\checkmark \quad u = v &\Leftrightarrow 3x-1 = \sqrt[3]{3x^3 - 21x^2 + 21x + 7} \Leftrightarrow 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1 = 3x^3 - 21x^2 + 21x + 7 \\
&\Leftrightarrow 24x^3 = 6x^2 + 12x + 8 \Leftrightarrow 25x^3 = (x+2)^3 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{25} = x+2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt[3]{25}-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + 3(x+8) &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 3x + 24 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(3x-1)^2 + 3x + 24 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{27}{4}\left(x - \frac{1}{9}\right)^2 = -\frac{74}{3} \text{ (Vô nghiệm)}.
\end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{2}{\sqrt[3]{25}-1}$.

Bài toán 111. Giải phương trình $\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 19x + 1} + \frac{17}{x^2 + x + 17} = 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
(x^2 + x + 17)\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 19x + 1} + 17 &= 2(x^2 + x + 17) \\
\Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 17 &= (x^2 + x + 17)\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 19x + 1} \\
\Leftrightarrow (x+1)^3 - (x^3 + x^2 + x - 16) &= (x^2 + x + 17)\sqrt[3]{(x^2 + x + 17)(x+1) + x^3 + x^2 + x - 16}
\end{aligned}$$

Đặt $x+1=t$; $\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 19x + 1} = y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^3 - (x^3 + x^2 + x - 16) = (x^2 + x + 17)y \\ y^3 = (x^2 + x + 17)t + (x^3 + x^2 + x - 16) \end{cases} \Rightarrow t^3 - y^3 = (x^2 + x + 17)(y-t) \Leftrightarrow (t-y)(t^2 + yt + y^2 + x^2 + x + 17) = 0$$

$$\bullet \quad t^2 + yt + y^2 + x^2 + x + 17 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}t^2 + x^2 + x + 17 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}t + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{5}{7}\right)^2 = -\frac{118}{7}.$$

$$\bullet \quad t = y \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 19x + 1} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 2x^3 + 3x^2 + 19x + 1 \Leftrightarrow x^3 + 16x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Thử lại ta có $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Bài toán 112. Giải phương trình $\frac{x^3 + 3x^2 + x - 3}{\sqrt[3]{2x^3 + x^2 + x + 4}} = x(2x-1) \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^3 + x^2 + x + 4 \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + x - 3 &= (2x^2 - x) \sqrt[3]{2x^3 + x^2 + x + 4} \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 2x - 4 &= (2x^2 - x) \sqrt[3]{2x^3 + x^2 - x + 2x + 4} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 - (2x+4) &= (2x^2 - x) \sqrt[3]{(2x^2 - x)(x+1) + 2x + 4} \end{aligned}$$

Đặt $x+1 = u$; $\sqrt[3]{2x^3 + x^2 + x + 4} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x+4) = (2x^2 - x)v \\ v^3 - (2x+4) = (2x^2 - x)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (2x^2 - x)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 2x^2 - x = 0 \end{cases}$$

Xét hai khả năng xảy ra

- $u = v \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{2x^3 + x^2 + x + 4} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 2x^3 + x^2 + x + 4$
 $\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right\}.$
- $u^2 + uv + v^2 + 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x+1)^2 + 2x^2 - x = 0$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{11}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{11}{4}\left(x + \frac{1}{11}\right)^2 = -\frac{8}{11}$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 113. Giải phương trình $x^2 + 3x + 5 = \frac{1}{x} + (3x+1)\sqrt[3]{3x^3 + 4x^2 - x + 2} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 5x - 1 &= (3x^2 + x) \sqrt[3]{3x^3 + 4x^2 - x + 2} \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 2x - 2 &= (3x^2 + x) \sqrt[3]{3x^3 + 4x^2 + x - 2x + 2} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 + 2x - 2 &= (3x^2 + x) \sqrt[3]{(3x^2 + x)(x+1) - 2x + 2} \end{aligned}$$

Đặt $x+1 = u$; $\sqrt[3]{3x^3 + 4x^2 - x + 2} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 + 2x - 2 = (3x^2 + x)v \\ v^3 + 2x - 2 = (3x^2 + x)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (3x^2 + x)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 3x^2 + x = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp

- $u = v \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{3x^3 + 4x^2 - x + 2} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 3x^3 + 4x^2 - x + 2$
 $\Leftrightarrow 2x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 3x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{-3+\sqrt{17}}{4}; \frac{-3-\sqrt{17}}{4}\right\}.$
- $u^2 + uv + v^2 + 3x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + 3x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x+1)^2 + 3x^2 + x = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{15}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{15}{4}\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{1}{3} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Đối chiếu điều kiện ta thu được ba nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Các bạn đọc giả lưu ý phép phân tích hằng đẳng thức, lập luận vô nghiệm trong trường hợp thứ hai (đối với lớp bài toán này nói chung). Do các bài toán sau khi biến đổi hệ quả thường xuất hiện phân thức nên khả năng nhầm lẫn, sai sót rất dễ xảy ra. Ví dụ để kiểm tra biến đổi

$$\left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}(x+1)^2 + 3x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{15}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{15}{4}\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{1}{3}.$$

Chú ý các đa thức $f(x) = \frac{3}{4}(x+1)^2 + 3x^2 + x$ và $g(x) = \frac{15}{4}\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$. Rõ ràng là $f(x) \equiv g(x)$.

Từ đó có thể thử nghiệm $f(1) = g(1), f(0) = g(0), \dots$ Trái điều này tức là bạn đã biến đổi sai !

Bài toán 114. Giải phương trình $\frac{x^3+3x^2+3}{\sqrt[3]{x^3+3x^2+6x-1}} = (x+1)^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x^3+3x^2+6x-1 \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3+3x^2+3 &= (x+1)^2 \sqrt[3]{x^3+3x^2+6x-1} \\ \Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1-3x+2 &= (x+1)^2 \sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1+3x-2} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3-3x+2 &= (x+1)^2 \sqrt[3]{(x+1)^2(x+1)+3x-2} \end{aligned}$$

Đặt $x+1=u; \sqrt[3]{x^3+3x^2+6x-1}=v$ thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3-3x+2=(x+1)^2 v \\ v^3-3x+2=(x+1)^2 u \end{cases} \Rightarrow u^3-v^3=(x+1)^2(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2+uv+v^2+(x+1)^2=0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp

$$\begin{aligned} \circ \quad u=v &\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{(x+1)^2(x+1)+3x-2} \Leftrightarrow (x+1)^3=(x+1)^3+3x-2 \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}. \\ \circ \quad u^2+uv+v^2+(x+1)^2 &=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u=v=0 \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=0 \\ v=\sqrt[3]{-5} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x=\frac{2}{3}$.

Bài toán 115. Giải phương trình $\frac{32x^3+48x^2+9}{4x^2+20x+13} = \sqrt[3]{2x^3+11x^2+\frac{31}{2}x+1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $4x^2+20x+13 \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 32x^3+48x^2+9 &= (4x^2+20x+13) \sqrt[3]{2x^3+11x^2+\frac{31}{2}x+1} \\ \Leftrightarrow 8x^3+12x^2+\frac{9}{4} &= \left(x^2+5x+\frac{13}{4}\right) \sqrt[3]{2x^3+11x^2+\frac{31}{2}x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - \left(6x - \frac{5}{4}\right) = \left(x^2 + 5x + \frac{13}{4}\right) \sqrt[3]{2x^3 + 11x^2 + \frac{19}{2}x + \frac{9}{4} + 6x - \frac{5}{4}} \\ &\Leftrightarrow (2x+1)^3 - \left(6x - \frac{5}{4}\right) = \left(x^2 + 5x + \frac{13}{4}\right) \sqrt[3]{\left(x^2 + 5x + \frac{9}{4}\right)(2x+1) + 6x - \frac{5}{4}} \end{aligned}$$

Đặt $2x+1=u$; $\sqrt[3]{2x^3 + 11x^2 + \frac{31}{2}x + 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - \left(6x - \frac{5}{4}\right) = \left(x^2 + 5x + \frac{13}{4}\right)v \\ v^3 - \left(6x - \frac{5}{4}\right) = \left(x^2 + 5x + \frac{13}{4}\right)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = \left(x^2 + 5x + \frac{13}{4}\right)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^2 + 5x + \frac{13}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\diamond u = v \Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt[3]{2x^3 + 11x^2 + \frac{31}{2}x + 1} \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 2x^3 + 11x^2 + \frac{31}{2}x + 1$$

$$\Leftrightarrow 6x^3 + x^2 - \frac{19}{2}x = 0 \Leftrightarrow x(12x^2 + 2x - 19) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{-1 + \sqrt{229}}{12}; \frac{-1 - \sqrt{229}}{12}\right\}.$$

$$\diamond u^2 + uv + v^2 + x^2 + 5x + \frac{13}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + x^2 + 5x + \frac{13}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(2x+1)^2 + x^2 + 5x + \frac{13}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + 4(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ v = \sqrt[3]{-\frac{11}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Thử lại trực tiếp, kết luận phương trình có hai nghiệm $S = \left\{\frac{-1 + \sqrt{229}}{12}; \frac{-1 - \sqrt{229}}{12}\right\}$.

Bài toán 116. Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 15x + 17}} = \frac{x(2x-3)}{x^2(x+4) - 9(x+1)} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 + 15x + 17 \neq 0 \\ x^2(x+4) - 9(x+1) \neq 0 \end{cases}$$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} &x^3 + 4x^2 - 9x - 9 = (2x^2 - 3x) \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 15x + 17} \\ &\Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - (2x^2 + 21x + 17) = (2x^2 - 3x) \sqrt[3]{2x^3 + x^2 - 6x + 2x^2 + 21x + 17} \\ &\Leftrightarrow (x+2)^3 - (2x^2 + 21x + 17) = (2x^2 - 3x) \sqrt[3]{(2x^2 - 3x)(x+2) + 2x^2 + 21x + 17} \end{aligned}$$

Đặt $x+2=u$; $\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 15x + 17} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^2 + 21x + 17) = (2x^2 - 3x)v \\ v^3 - (2x^2 + 21x + 17) = (2x^2 - 3x)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (2x^2 - 3x)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 2x^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

- $u = v \Leftrightarrow x + 2 = u; \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 15x + 17} \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 2x^3 + 3x^2 + 15x + 17$
 $\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = -10 \Leftrightarrow (x-1)^3 = -10 \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt[3]{10}$.
- $u^2 + uv + v^2 + 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow u^2 + uv + v^2 + 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 2x^2 - 3x = 0$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x+2)^2 + 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{11}{4}x^2 = -3$ (Vô nghiệm).

Kết luận phương trình đã cho có duy nhất nghiệm.

Bài toán 117. Giải phương trình $x^2 + 5x + \frac{1}{x} = 4 + (3x-1)\sqrt[3]{3x(x^2+2)}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 5x^2 - 4x + 1 &= (3x^2 - x)\sqrt[3]{3x^3 + 6x} \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 2x^2 - 7x &= (3x^2 - x)\sqrt[3]{3x^3 + 6x} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 + 2x^2 - 7x &= (3x^2 - x)\sqrt[3]{(3x^2 - x)(x+1) - 2x^2 + 7x} \end{aligned}$$

Đặt $x+1 = u; \sqrt[3]{3x^3 + 6x} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 + 2x^2 - 7x = (3x^2 - x)v \\ v^3 + 2x^2 - 7x = (3x^2 - x)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (3x^2 - x)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 3x^2 - x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad u = v &\Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{3x^3 + 6x} \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 3x^3 + 6x \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = -x^3 \Leftrightarrow (x-1)^3 = -x^3 \Leftrightarrow x-1 = -x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + 3x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x+1)^2 + 3x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{15}{4}\left(x + \frac{1}{15}\right)^2 = -\frac{11}{15}.$$

Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài toán 118. Giải phương trình $\frac{4x^3 + 5x^2 + 2x + 1}{\sqrt[3]{4x^3 - 8x^2 + 1}} + 3x = 1 + x^2$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $4x^3 - 8x^2 + 1 \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 8x^3 + 10x^2 + 4x + 2 &= 2(x^2 - 3x + 1)\sqrt[3]{4x^3 - 8x^2 + 1} \\ \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - (2x^2 + 2x - 1) &= 2(x^2 - 3x + 1)\sqrt[3]{2(2x^3 - 5x^2 - x + 1) + 2x^2 + 2x - 1} \\ \Leftrightarrow (2x+1)^3 - (2x^2 + 2x - 1) &= 2(x^2 - 3x + 1)\sqrt[3]{2(x^2 - 3x + 1)(2x+1) + 2x^2 + 2x - 1} \end{aligned}$$

Đặt $2x+1 = u; \sqrt[3]{4x^3 - 8x^2 + 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^2 + 2x - 1) = 2(x^2 - 3x + 1)v \\ v^3 - (2x^2 + 2x - 1) = 2(x^2 - 3x + 1)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 2(x^2 - 3x + 1)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 2(x^2 - 3x + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\circ \quad u = v \Leftrightarrow 2x+1 = \sqrt[3]{4x^3 - 8x^2 + 1} = v \Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 4x^3 - 8x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 + 20x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(2x^2 + 10x + 3) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ 0; \frac{-5 + \sqrt{19}}{2}; \frac{-5 - \sqrt{19}}{2} \right\}.$$

$$\begin{aligned} \circ \quad u^2 + uv + v^2 + 2(x^2 - 3x + 1) = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 2(x^2 - 3x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(2x+1)^2 + 2(x^2 - 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + 5\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 = -\frac{23}{10} \text{ (Vô nghiệm).} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Nhận xét.

Không nằm ngoài phạm vi dạng thức sử dụng hai ẩn phụ đưa về hệ phương trình

$$(mx + n)^3 - g(x) = f(x) \sqrt[3]{f(x)(mx + n) + g(x)}.$$

Trong đó đa thức $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$. Rõ ràng mức độ phức tạp đã tăng cao so với các bài toán trước đây. Hơn nữa đối với bài toán số 118 này còn có sự xuất hiện thao tác nhân thêm hằng số. Vì bên ngoài căn thức là đa thức bậc ba nên trường hợp xấu nhất $g(x)$ là đa thức bậc ba. Giả định

$$\begin{aligned} 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1 &= (x^2 - 3x + 1) \sqrt[3]{4x^3 - 8x^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow (mx + n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = (x^2 - 3x + 1) \sqrt[3]{(x^2 - 3x + 1)(mx + n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)} \end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số của x^3 ta có $\begin{cases} m^3 - a = 4 \\ m + a = 4 \end{cases} \Rightarrow m^3 + m = 8 \Rightarrow m \notin \mathbb{Z}.$

Do đó bắt buộc nhân thêm hằng số k . Ta thử nghiệm

$$\begin{aligned} k(4x^3 + 5x^2 + 2x + 1) &= k(x^2 - 3x + 1) \sqrt[3]{4x^3 - 8x^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow (mx + n)^3 - (ax^3 + bx^2 + cx + d) = k(x^2 - 3x + 1) \sqrt[3]{k(x^2 - 3x + 1)(mx + n) + (ax^3 + bx^2 + cx + d)} \end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số của x^3 ta có $\begin{cases} m^3 - a = 4k \\ mk + a = 4 \end{cases} \Rightarrow m^3 + mk = 4k + 4.$

Phương trình hai ẩn trên khó có thể có cách nào khác ngoài thử chọn hằng số nguyên.

Nếu $k = 2 \Rightarrow m^3 + 2m = 12 \Rightarrow m = 2$. Nếu $k = 3 \Rightarrow m^3 + 3m = 16 \Rightarrow m \notin \mathbb{Z}.$

Xử lý ngay trường hợp đẹp đẽ $m = k = 2 \Rightarrow a = 0$, thu được

$$\begin{aligned} 8x^3 + 10x^2 + 4x + 2 &= 2(x^2 - 3x + 1) \sqrt[3]{4x^3 - 8x^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow (2x + n)^3 - (bx^2 + cx + d) = 2(x^2 - 3x + 1) \sqrt[3]{2(x^2 - 3x + 1)(2x + n) + (bx^2 + cx + d)} \end{aligned}$$

Tiếp tục đồng nhất các hạng tử với số mũ bé hơn

$$\begin{cases} n^3 - d = 2 \\ 2n + d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^3 + 2n = 3 \\ d = 1 - 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ d = -1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 12n - b = 10 \\ 2(n - 6) + b = -8 \\ 6n^2 - c = 4 \\ 2(-3n + 2) + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Do đó ta có biến đổi

$$\begin{aligned} 8x^3 + 10x^2 + 4x + 2 &= 2(x^2 - 3x + 1) \sqrt[3]{4x^3 - 8x^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - (2x^2 + 2x - 1) = 2(x^2 - 3x + 1) \sqrt[3]{2(2x^3 - 5x^2 - x + 1) + 2x^2 + 2x - 1} \\ &\Leftrightarrow (2x + 1)^3 - (2x^2 + 2x - 1) = 2(x^2 - 3x + 1) \sqrt[3]{2(x^2 - 3x + 1)(2x + 1) + 2x^2 + 2x - 1} \end{aligned}$$

Bài toán 119. Giải phương trình $x^2 + 2 + \frac{2}{x-2} = (x-1)\sqrt[3]{14x^3 - 42x^2 + 36x - 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 2$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + 2x - 2 &= (x-1)(x-2)\sqrt[3]{14x^3 - 42x^2 + 36x - 1} \\ \Leftrightarrow 6x^3 - 12x^2 + 12x - 12 &= 6(x^2 - 3x + 2)\sqrt[3]{12x^3 - 42x^2 + 42x - 12 + 2x^3 - 6x + 11} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - (2x^3 - 6x + 11) &= 6(x^2 - 3x + 2)\sqrt[3]{6(2x^3 - 7x^2 + 7x - 2) + 2x^3 - 6x + 11} \\ \Leftrightarrow (2x-1)^3 - (2x^3 - 6x + 11) &= 6(x^2 - 3x + 2)\sqrt[3]{6(x^2 - 3x + 2)(2x-1) + 2x^3 - 6x + 11} \end{aligned}$$

Đặt $2x-1=u$; $\sqrt[3]{14x^3 - 42x^2 + 36x - 1}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^3 - 6x + 11) = 6(x^2 - 3x + 2)v \\ v^3 - (2x^3 - 6x + 11) = 6(x^2 - 3x + 2)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 6(x^2 - 3x + 2)(v - u)$$

$$\Leftrightarrow (u-v)[u^2 + uv + v^2 + 6(x^2 - 3x + 2)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 6(x^2 - 3x + 2) = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp

- $u^2 + uv + v^2 + 6(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 6(x^2 - 3x + 2) = 0$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(2x-1)^2 + 6(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + 9\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 = -\frac{1}{2}$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow 2x-1 = \sqrt[3]{14x^3 - 42x^2 + 36x - 1} \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 14x^3 - 42x^2 + 36x - 1$
 $\Leftrightarrow 6x^3 - 30x^2 + 30x = 0 \Leftrightarrow 6x(x^2 - 5x + 5) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0; \frac{5+\sqrt{5}}{2}; \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right\}.$

Đối chiếu điều kiện ta thu được hai nghiệm, $x \in \left\{\frac{5+\sqrt{5}}{2}; \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right\}.$

Bài toán 120. Giải phương trình $\sqrt[3]{12x^3 - 36x^2 + 54x - 29} + \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = x$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \notin \{2; 3\}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (x-2)(x-3)\sqrt[3]{12x^3 - 36x^2 + 54x - 29} + x-1 &= x(x-2)(x-3) \\ \Leftrightarrow (x^2 - 5x + 6)\sqrt[3]{12x^3 - 36x^2 + 54x - 29} &= x(x^2 - 5x + 6) - x + 1 \\ \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 5x + 1 &= (x^2 - 5x + 6)\sqrt[3]{12x^3 - 36x^2 + 54x - 29} \\ \Leftrightarrow 4x^3 - 20x^2 + 20x + 4 &= 4(x^2 - 5x + 6)\sqrt[3]{12x^3 - 36x^2 + 54x - 29} \\ \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - (4x^3 + 8x^2 - 14x - 5) & \\ = 4(x^2 - 5x + 6)\sqrt[3]{4(2x^3 - 11x^2 + 17x - 6) + 4x^3 + 8x^2 - 14x - 5} & \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^3 - (4x^3 + 8x^2 - 14x - 5) = 4(x^2 - 5x + 6)\sqrt[3]{4(x^2 - 5x + 6)(2x-1) + 4x^3 + 8x^2 - 14x - 5}$$

Đặt $2x-1=u$; $\sqrt[3]{12x^3 - 36x^2 + 54x - 29} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (4x^3 + 8x^2 - 14x - 5) = 4(x^2 - 5x + 6)v \\ v^3 - (4x^3 + 8x^2 - 14x - 5) = 4(x^2 - 5x + 6)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 4(x^2 - 5x + 6)(v - u)$$

$$\Leftrightarrow (u-v)[u^2 + uv + v^2 + 4(x^2 - 5x + 6)] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 4(x^2 - 5x + 6) = 0 \end{cases}$$

$$\diamondsuit u^2 + uv + v^2 + 4(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + 4(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(2x-1)^2 + 4(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + 7\left(x - \frac{23}{14}\right)^2 = -\frac{41}{7} \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\begin{aligned} \diamondsuit u = v &\Leftrightarrow 2x-1 = \sqrt[3]{12x^3 - 36x^2 + 54x - 29} \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 12x^3 - 36x^2 + 54x - 29 \\ &\Leftrightarrow 4x^3 - 24x^2 + 48x - 28 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = -1 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^3 = -1 \Leftrightarrow x-2 = -1 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Đổi chiều điều kiện ta thu được nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 121. Giải phương trình $x^3 = x^4 + 2 + (x^2 + x + 1)\sqrt[3]{x^4 + x^3 + x^2 + x + 2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - x^4 - 2 = (x^2 + x + 1)\sqrt[3]{(x^2 + x + 1)x + x^4 + 2}$.

Đặt $\sqrt[3]{x^4 + x^3 + x^2 + x + 2} = y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - (x^4 + 2) = (x^2 + x + 1)y \\ y^3 - (x^4 + 2) = (x^2 + x + 1)x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = (x^2 + x + 1)(y - x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 + x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet x = y \Leftrightarrow x^3 = y^3 \Leftrightarrow x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = x^3 \Leftrightarrow x^4 + x^2 + x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 + 3x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 + 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = -\frac{11}{12} \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\bullet x^2 + xy + y^2 + x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{2}{3} \text{ (Vô nghiệm).}$$

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 122. Giải phương trình $2(x+1) = x^4 + (x+2)\sqrt[3]{x^4 + x^3 + x^2 - 2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - (x^4 + x^3 - 2x - 2) = (x+2)\sqrt[3]{(x+2)x + x^4 + x^3 - 2x - 2}$.

Đặt $\sqrt[3]{x^4 + x^3 + x^2 - 2} = y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - (x^4 + x^3 - 2x - 2) = (x+2)y \\ y^3 - (x^4 + x^3 - 2x - 2) = (x+2)x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = (x+2)(y-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 + x + 2 = 0 \end{cases}$$

- $x^2 + xy + y^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{5}{3}$ (Vô nghiệm).
- $x = y \Leftrightarrow x^3 = y^3 \Leftrightarrow x^3 = x^4 + x^3 + x^2 - 2 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}$.

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1; x = 1$.

Bài toán 123. Giải phương trình $(x+1)\sqrt[3]{x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1} + x^4 + x^3 + 1 = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - (x^4 + 2x^3 + 1) = (x+1)\sqrt[3]{(x+1)x + x^4 + 2x^3 + 1}$.

Đặt $\sqrt[3]{x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1} = y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - (x^4 + 2x^3 + 1) = (x+1)y \\ y^3 - (x^4 + 2x^3 + 1) = (x+1)x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = (x+1)(y-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$$

- ❖ $x^2 + xy + y^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{2}{3}$ (Vô nghiệm).
- ❖ $x = y \Leftrightarrow x^3 = y^3 \Leftrightarrow x^3 = x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \quad (1)$

Xét $x = 1$ không thỏa mãn phương trình (1), do đó $x \neq 1 \Rightarrow x - 1 \neq 0$. Biến đổi

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^5 - x^4 + x^4 - x^3 + x^3 - x^2 + x^2 + x - x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad (2) \end{aligned}$$

Rõ ràng (2) mâu thuẫn. Vậy (1) vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 124. Giải phương trình $2x^4 + x^3 - 7x^2 - 2x + 2 + (x+3)\sqrt[3]{2x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x + 2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 - (2x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 2x + 2) = (x+3)\sqrt[3]{(x+3)x + 2x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 2x + 2}.$$

Đặt $\sqrt[3]{2x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x + 2} = y$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - (2x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 2x + 2) = (x+3)y \\ y^3 - (2x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 2x + 2) = (x+3)x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = (x+3)(y-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 + x + 3 = 0 \end{cases}$$

- $x^2 + xy + y^2 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{8}{3}$ (Vô nghiệm).
- $x = y \Leftrightarrow x^3 = y^3 \Leftrightarrow 2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$

Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình trên.

Xét trường hợp $x \neq 0$, biến đổi phương trình về dạng

$$2x^2 + x - 6 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + x + \frac{1}{x} - 6 = 0 \quad [1].$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, khi đó

$$[1] \Leftrightarrow 2t^2 + t - 10 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(2t+5) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(2x^2+5x+2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{1}{2}; 1; -2\right\}.$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x \in \left\{-\frac{1}{2}; 1; -2\right\}$.

Bài toán 125. Giải phương trình $2x^4 + 1 + (2x+3)\sqrt[3]{2x^4+2x^2+1} = x^3 + 3x \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $x^3 - (2x^4 - 3x + 1) = (2x+3)\sqrt[3]{x(2x+3) + 2x^4 - 3x + 1}$.

Đặt $\sqrt[3]{2x^4+2x^2+1} = y$ ta thu được

$$\begin{cases} x^3 - (2x^4 - 3x + 1) = (2x+3)y \\ y^3 - (2x^4 - 3x + 1) = (2x+3)x \end{cases} \Rightarrow x^3 - y^3 = (2x+3)(y-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + xy + y^2 + 2x + 3 = 0 \end{cases}$$

- $x^2 + xy + y^2 + x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 = -\frac{5}{3}$ (Vô nghiệm).
- $x = y \Leftrightarrow x^3 = y^3 \Leftrightarrow x^3 = 2x^4 + 2x^2 + 1 \Leftrightarrow 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2(2x^2 + x + 1) - x(2x^2 + x + 1) + (2x^2 + x + 1) = 0$
 $\Leftrightarrow (2x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x + 1 = 0 & (1) \\ x^2 - x + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Các phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm do $\Delta < 0$.

Kết luận phương trình ban đầu vô nghiệm.

Bài toán 126. Giải phương trình $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 5x - 1 + (x+2)\sqrt[3]{x^4+3x^3+x^2+x+2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với $(x+1)^3 - (x^4 + 3x^3 - 2x) = (x+2)\sqrt[3]{(x+1)(x+2) + x^4 + 3x^3 - 2x}$.

Đặt $x+1 = u; \sqrt[3]{x^4+3x^3+x^2+x+2} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^4 + 3x^3 - 2x) = (x+2)v \\ v^3 - (x^4 + 3x^3 - 2x) = (x+2)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x+2)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x + 2 = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp xảy ra

- $u^2 + uv + v^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x+1)^2 + x + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{11}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 = -\frac{2}{3}$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^4 + 3x^3 + x^2 + x + 2 \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$
 Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình trên.

Xét $x \neq 0$; biến đổi $x^2 + 2x - 2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x - \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$.

Đặt $x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$. Thu được phương trình

$$t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow t(t+2) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1; -1 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}\}.$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm kể trên, hay $S = \{-1; 1; -1 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}\}$.

Bài toán 127. Giải phương trình $x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x + 2 + (x+4)\sqrt[3]{x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 4x + 7} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+1)^3 - (x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 3) = (x+4)\sqrt[3]{(x+4)(x+1) + x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 3}.$$

Đặt $x+1 = u; \sqrt[3]{x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 4x + 7} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 3) = (x+4)v \\ v^3 - (x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 3) = (x+4)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x+4)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\triangleright u^2 + uv + v^2 + x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x+1)^2 + x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{19}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 = -\frac{8}{3} \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\begin{aligned} \triangleright u = v &\Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 4x + 7 \\ &\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 5x^3 + 6x^2 + x^3 - 5x^2 + 6x + x^2 - 5x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(x^2 - 5x + 6) + x(x^2 - 5x + 6) + (x^2 - 5x + 6) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x^2 - 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x + 1)(x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; x = 3 \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{cases} \quad [*]$$

Phương trình [*] vô nghiệm do $\Delta < 0$, nên phương trình ban đầu có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 128. Giải phương trình $x^4 + x^2 - 2x + (x^2 + 10)\sqrt[3]{x^4 + x^3 + 5x^2 + 11x + 5} = 6 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+1)^3 - (x^4 + 4x^2 + x - 5) = (x^2 + 10)\sqrt[3]{(x^2 + 10)(x+1) + x^4 + 4x^2 + x - 5}.$$

Đặt $x+1 = u; \sqrt[3]{x^4 + x^3 + 5x^2 + 11x + 5} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^4 + 4x^2 + x - 5) = (x^2 + 10)v \\ v^3 - (x^4 + 4x^2 + x - 5) = (x^2 + 10)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x^2 + 10)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^2 + 10 = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp sau

$$\blacksquare u^2 + uv + v^2 + x^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + x^2 = -10 \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare u = v &\Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^4 + x^3 + 5x^2 + 11x + 5 \\ &\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 + 4 = 2x^2 - 8x + 8 \Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 = 2(x-2)^2 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - \sqrt{2}x + 2 + 2\sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2}x + 2 - 2\sqrt{2}) = 0 \end{aligned}$$

Xét $x^2 - \sqrt{2}x + 2 + 2\sqrt{2} = 0, \Delta < 0$, phương trình này vô nghiệm.

$$\text{Xét } x^2 - \sqrt{2}x + 2 - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{8\sqrt{2} - 2}}{2}; x = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{8\sqrt{2} - 2}}{2}.$$

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm.

Bài toán 129. Giải phương trình $x^4 + (5x^2 + 1)\sqrt[3]{x^4 + 5x^3 - 11x - 6} = x^3 + 8x^2 + 15x + 8 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+1)^3 - (x^4 - 5x^2 - 12x - 7) = (5x^2 + 1)\sqrt[3]{(5x^2 + 1)(x+1) + x^4 - 5x^2 - 12x - 7}.$$

Đặt $x+1 = u; \sqrt[3]{x^4 + 5x^3 - 11x - 6} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^4 - 5x^2 - 12x - 7) = (5x^2 + 1)v \\ v^3 - (x^4 - 5x^2 - 12x - 7) = (5x^2 + 1)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (5x^2 + 1)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 5x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\diamond u^2 + uv + v^2 + 5x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 5x^2 = -1 \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\begin{aligned} \diamond u = v &\Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^4 + 5x^3 - 11x - 6 \Leftrightarrow x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 14x - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 7x^2 + 14x + 7 \Leftrightarrow (x^2 + 2x)^2 = 7(x+1)^2 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 2x + \sqrt{7}x + \sqrt{7})(x^2 + 2x - \sqrt{7}x - \sqrt{7}) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Xét } x^2 + 2x + \sqrt{7}x + \sqrt{7} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(2 + \sqrt{7}) + \sqrt{11}}{2}; x = \frac{-(2 + \sqrt{7}) - \sqrt{11}}{2}.$$

$$\text{Xét } x^2 + 2x - \sqrt{7}x - \sqrt{7} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{7} - 2 + \sqrt{11}}{2}; x = \frac{\sqrt{7} - 2 - \sqrt{11}}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm.

Bài toán 130. Giải phương trình $x^4 + (x^2 - x + 1)\sqrt[3]{x(x^3 + x^2 + 3x - 1)} = x^3 + 4x + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x+1)^3 - (x^4 + 3x^2 - x - 1) = (x^2 - x + 1)\sqrt[3]{(x^2 - x + 1)(x+1) + x^4 + 3x^2 - x - 1}.$$

Đặt $x+1 = u; \sqrt[3]{x(x^3 + x^2 + 3x - 1)} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^4 + 3x^2 - x - 1) = (x^2 - x + 1)v \\ v^3 - (x^4 + 3x^2 - x - 1) = (x^2 - x + 1)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x^2 - x + 1)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^2 - x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\checkmark u^2 + uv + v^2 + x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\begin{aligned} \checkmark u = v &\Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^4 + x^3 + 3x^2 - x \Leftrightarrow x^4 = 4x + 1 \\ &\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2 + 4x + 2 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = 2(x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} = 0 \\ x^2 + 1 + \sqrt{2}x + \sqrt{2} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Xét } x^2 - \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}; x = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}.$$

Xét $x^2 + 1 + \sqrt{2}x + \sqrt{2} = 0, \Delta < 0$ nên trường hợp này vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 131. Giải phương trình $x^2(x^2 + 3) + (x^2 - 2x + 3)\sqrt[3]{x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 8} = x^3 + 13x + 4 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^4 - 10x - 5) &= (x^2 - 2x + 3)\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 5x - 3 + x^4 - 10x - 5} \\ \Leftrightarrow (x-1)^3 - (x^4 - 10x - 5) &= (x^2 - 2x + 3)\sqrt[3]{(x^2 - 2x + 3)(x-1) + x^4 - 10x - 5} \end{aligned}$$

Đặt $x-1 = u; \sqrt[3]{x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 8} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^4 - 10x - 5) = (x^2 - 2x + 3)v \\ v^3 - (x^4 - 10x - 5) = (x^2 - 2x + 3)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x^2 - 2x + 3)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^2 - 2x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\triangleright u^2 + uv + v^2 + x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + (x-1)^2 = -2 \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\begin{aligned} \triangleright u = v &\Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 8 \Leftrightarrow x^4 = 8x + 7 \\ \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 &= 2x^2 + 8x + 8 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = 2(x+2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} \\ x^2 + \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} + 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Xét } x^2 + 1 = \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{8\sqrt{2} - 2}}{2}; x = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{8\sqrt{2} - 2}}{2}.$$

Xét $x^2 + \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} + 1 = 0, \Delta < 0$ nên trường hợp này vô nghiệm.

$$\text{Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm } x = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{8\sqrt{2} - 2}}{2}; x = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{8\sqrt{2} - 2}}{2}.$$

Bài toán 132. Giải phương trình $x^4 + (x-2)^2\sqrt[3]{x^4 + x^3 - 7x - 3} = x^3 + 10x + 8 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^4 + 3x^2 - 7x - 7) &= (x-2)^2\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 4 + x^4 + 3x^2 - 7x - 7} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 - (x^4 + 3x^2 - 7x - 7) &= (x^2 - 4x + 4)\sqrt[3]{(x^2 - 4x + 4)(x+1) + x^4 + 3x^2 - 7x - 7} \end{aligned}$$

Đặt $x+1 = u; \sqrt[3]{x^4 + x^3 - 7x - 3} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^4 + 3x^2 - 7x - 7) = (x^2 - 4x + 4)v \\ v^3 - (x^4 + 3x^2 - 7x - 7) = (x^2 - 4x + 4)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x-2)^2(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + (x-2)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\diamond u^2 + uv + v^2 + (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$\diamond u = v \Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^4 + x^3 - 7x - 3 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 10x = 4$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 5x^2 + 10x + 5 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 = 5(x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = \sqrt{5}(x+1) \\ x^2 + 1 = -\sqrt{5}(x+1) \end{cases}$$

$$\text{Xét } x^2 + 1 = \sqrt{5}(x+1) \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{5}x - \sqrt{5} + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{1+4\sqrt{5}}}{2}; x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{1+4\sqrt{5}}}{2}.$$

Xét $x^2 + \sqrt{5}x + \sqrt{5} + 1 = 0, \Delta < 0$ nên trường hợp này vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Bài toán 133. Giải phương trình

$$6x^4 + x^3 + 3x^2 + 11x = 5x^5 + 2 + (2x^2 + 2x + 3)\sqrt[3]{5x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 3x + 6} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (5x^5 - 6x^4 - 8x + 3) &= (2x^2 + 2x + 3)\sqrt[3]{(2x^3 + 4x^2 + 5x + 3) + 5x^5 - 6x^4 - 8x + 3} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 - (5x^5 - 6x^4 - 8x + 3) &= (2x^2 + 2x + 3)\sqrt[3]{(2x^2 + 2x + 3)(x+1)5x^5 - 6x^4 - 8x + 3} \end{aligned}$$

Đặt $x+1 = u; \sqrt[3]{5x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 3x + 6} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (5x^5 - 6x^4 - 8x + 3) = (2x^2 + 2x + 3)v \\ v^3 - (5x^5 - 6x^4 - 8x + 3) = (2x^2 + 2x + 3)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (2x^2 + 2x + 3)(v - u)$$

$$\Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 2x^2 + 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 2x^2 + 2x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\blacksquare u^2 + uv + v^2 + 2x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + (x+1)^2 + x^2 = -2 \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\begin{aligned} \blacksquare u = v &\Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 5x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 3x + 6 \\ &\Leftrightarrow 5x^5 - 6x^4 + x^3 + x^2 - 6x + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x^4(x+1) - 11x^3(x+1) + 12x^2(x+1) - 11x(x+1) + 5(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(5x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 11x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 5x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 11x + 5 = 0 \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1). Xét trường hợp $x \neq 0$ thì

$$(*) \Leftrightarrow 5x^2 - 11x + 12 - \frac{11}{x} + \frac{5}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 11\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12 = 0.$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t$ ta có $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Thu được

$$5t^2 - 11t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(5t-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(5x^2 - x + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 5x^2 - x + 5 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình (1) vô nghiệm vì $\Delta < 0$. Kết luận tập hợp nghiệm $S = \{1\}$.

Bài toán 134. Giải phương trình

$$8x^4 + x^3 + 5x = 3x^5 + 7x^2 + 1 + 3(6x^2 + 4x + 1)\sqrt[3]{3x^5 - 8x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 5x + 2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$(x-1)^3 - (3x^5 - 8x^4 + 4x^2 - 2x + 3) = (6x^2 + 4x + 1) \sqrt[3]{(6x^2 + 4x + 1)(x-1) + 3x^5 - 8x^4 + 4x^2 - 2x + 3}.$$

Đặt $x-1=u$; $\sqrt[3]{3x^5 - 8x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 5x + 2} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (3x^5 - 8x^4 + 4x^2 - 2x + 3) = (6x^2 + 4x + 1)v \\ v^3 - (3x^5 - 8x^4 + 4x^2 - 2x + 3) = (6x^2 + 4x + 1)u \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^3 - v^3 = (6x^2 + 4x + 1)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 6x^2 + 4x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\circ \quad u^2 + uv + v^2 + 6x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + (2x+1)^2 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$\begin{aligned} \circ \quad u = v &\Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 3x^5 - 8x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 5x + 2 \\ &\Leftrightarrow 3x^5 - 8x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 8x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x^4(x+1) - 11x^3(x+1) + 16x^2(x+1) - 11x(x+1) + 3(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(3x^4 - 11x^3 + 16x^2 - 11x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 3x^4 - 11x^3 + 16x^2 - 11x + 3 = 0 \end{cases} \quad (1) \end{aligned}$$

Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1).

$$\text{Xét trường hợp } x \neq 0 \text{ thì } (1) \Leftrightarrow 3x^2 - 11x + 16 - \frac{11}{x} + \frac{3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 11\left(x + \frac{1}{x}\right) + 16 = 0.$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{x} = t \text{ thu được } 3t^2 - 11t + 10 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(3t-5) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(3x^2 - 5x + 3) = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1; x = 1$.

Bài toán 135. Giải phương trình $4x^4 + x^3 + 3x = x^5 + 3x^2 + 4 + (4x^2 + 4x + 3) \sqrt[3]{x^5 - 4x^4 + 4x^3 - x}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^5 - 4x^4 + 3) &= (4x^2 + 4x + 3) \sqrt[3]{4x^3 - x - 3 + x^5 - 4x^4 + 3} \\ &\Leftrightarrow (x-1)^3 - (x^5 - 4x^4 + 3) = (4x^2 + 4x + 3) \sqrt[3]{(4x^2 + 4x + 3)(x-1) + x^5 - 4x^4 + 3} \end{aligned}$$

Đặt $x-1=u$; $\sqrt[3]{x^5 - 4x^4 + 4x^3 - x} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^5 - 4x^4 + 3) = (4x^2 + 4x + 3)v \\ v^3 - (x^5 - 4x^4 + 3) = (4x^2 + 4x + 3)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (4x^2 + 4x + 3)(v - u)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 4x^2 + 4x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 = v^3 \\ \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + (2x+1)^2 = -2 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (2) rõ ràng vô nghiệm.

$$u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^5 - 4x^4 + 4x^3 - x \Leftrightarrow x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4(x+1) - 5x^3(x+1) + 8x^2(x+1) - 5x(x+1) + x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1).
- Xét trường hợp $x \neq 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$.

Đặt $x + \frac{1}{x} = y$ thu được phương trình

$$\begin{aligned} y^2 - 2 - 5y + 8 &= 0 \Leftrightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow (y-3)(y-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}; x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Vậy phương trình ban đầu có bốn nghiệm.

Bài toán 136. Giải phương trình

$$x^6 + 5x^4 + 4x^2 + (x+2)\sqrt[3]{x^6 + 5x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 3x + 2} = 3x^3 + 3x + 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^6 + 5x^4 - 2x^3 + 7x^2) &= (x+2)\sqrt[3]{x^2 + 3x + 2 + x^6 + 5x^4 - 2x^3 + 7x^2} \\ &\Leftrightarrow (x+1)^3 - (x^6 + 5x^4 - 2x^3 + 7x^2) = (x+2)\sqrt[3]{(x+2)(x+1) + x^6 + 5x^4 - 2x^3 + 7x^2} \end{aligned}$$

Đặt $x+1 = u; \sqrt[3]{x^6 + 5x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 3x + 2} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^6 + 5x^4 - 2x^3 + 7x^2) = (x+2)v \\ v^3 - (x^6 + 5x^4 - 2x^3 + 7x^2) = (x+2)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x+2)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \diamond u^2 + uv + v^2 + x + 2 = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x+1)^2 + x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{11}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 = -\frac{2}{3} \text{ (Vô nghiệm).} \end{aligned}$$

$$\diamond u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^6 + 5x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow x^6 + 5x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 1 = 0$$

Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.

$$\text{Xét } x \neq 0; \text{ biến đổi về } x^3 + 5x^2 - 3 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0.$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t; \text{ thu được}$$

$$t^3 - 3t + 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow t^3 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + t + 3 = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

Với $t^2 + t + 3 = 0, \Delta < 0$, trường hợp này vô nghiệm.

Với $t = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0, \Delta < 0$, trường hợp này vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 137. Giải phương trình

$$x^6 + 3x^5 + x^4 = 7x^3 + 6x^2 + 19 + (x^2 + 3x + 9)\sqrt[3]{x^6 + 3x^5 + x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 15x + 7} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - (x^6 + 3x^5 + x^4 - 6x^3 - 11) \\
 &= (x^2 + 3x + 9) \sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + 15x + 18 + x^6 + 3x^5 + x^4 - 6x^3 - 11} \\
 &\Leftrightarrow (x+2)^3 - (x^6 + 3x^5 + x^4 - 6x^3 - 11) \\
 &= (x^2 + 3x + 9) \sqrt[3]{(x^2 + 3x + 9)(x+2) + x^6 + 3x^5 + x^4 - 6x^3 - 11}
 \end{aligned}$$

Đặt $x+2=u$; $\sqrt[3]{x^6 + 3x^5 + x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 15x + 7} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^6 + 3x^5 + x^4 - 6x^3 - 11) = (x^2 + 3x + 9)v \\ v^3 - (x^6 + 3x^5 + x^4 - 6x^3 - 11) = (x^2 + 3x + 9)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x^2 + 3x + 9)(v - u)$$

$$\Leftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2 + x^2 + 3x + 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^2 + 3x + 9 = 0 \end{cases}$$

✓ $u^2 + uv + v^2 + x^2 + 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{27}{4}$ (Vô nghiệm).

✓ $u = v \Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^6 + 3x^5 + x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 15x + 7$

Đưa về $x^6 + 3x^5 + x^4 - 6x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$. Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình này.

Xét $x \neq 0$; phương trình trên trở thành

$$x^3 + 3x^2 + x - 6 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right) - 6 = 0.$$

Đặt $x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2; t^3 = x^3 - \frac{1}{x^3} - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2; x^3 - \frac{1}{x^3} = t^3 + 3t$.

Khi đó

$$\begin{aligned}
 & (t^3 + 3t) + 3t^2 + 6 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t^3 + 3t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow t(t^2 + 3t + 4) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t^2 + 3t + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\}
 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1; x = 1$.

Bài toán 138. Giải phương trình

$$5x^3 - 11x^2 - 4x + 1 + (x+2) \sqrt[3]{x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 2x + 1} = x^4 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 & x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3 - (x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 4x + 1) \\
 &= (x+2) \sqrt[3]{(x^3 + 3x^2 + 2x) + x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 4x + 1} \\
 &\Leftrightarrow (x^2 + x)^3 - (3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 4x + 1) \\
 &= (x+2) \sqrt[3]{(x+2)(x^2 + x) + x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 4x + 1}
 \end{aligned}$$

Đặt $x^2 + x = u$; $\sqrt[3]{8x^3 - 7x^2 - 2x + 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (7x^3 - 8x^2 - 3x) = (x+2)v \\ v^3 - (7x^3 - 8x^2 - 3x) = (x+2)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x+2)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \diamondsuit \quad u^2 + uv + v^2 + x + 2 = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x^2 + x)^2 + x + 2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{1}{2}(x^2 + x)^2 + \frac{1}{4}(x^2 + x)^2 + 1 + x + 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{1}{2}(x^2 + x)^2 + \frac{1}{4}(x^2 + x)^2 - (x^2 + x) + 1 + x^2 + 2x + 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{1}{2}(x^2 + x)^2 + \frac{1}{4}(x^2 + x - 2)^2 + (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{-2; 1\} \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset \\
 \diamondsuit \quad u = v &\Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3 = x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 2x = 1 \\
 &\Leftrightarrow x^4 - 6x^3 + 9x^2 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow (x^2 - 3x)^2 = (x - 1)^2 \\
 &\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\}
 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có bốn nghiệm kể trên.

Bài toán 139. Giải phương trình $\frac{x^6 + x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 2x + 2}{x^2 + 1} = \sqrt[3]{2x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 5x^2 + 2x} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
 x^6 + x^5 + 2x^4 + 3x^2 + 2x + 2 &= (x^2 + 1)\sqrt[3]{2x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 5x^2 + 2x} \\
 &\Leftrightarrow x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3 + 3(x^4 + 2x^3 + x^2) + 3(x^2 + x) + 1 - (2x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 3x^2 + x - 1) \\
 &= (x^2 + 1)\sqrt[3]{x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 + 2x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 3x^2 + x - 1} \\
 &\Leftrightarrow (x^2 + x + 1)^3 - (2x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 3x^2 + x - 1) \\
 &= (x^2 + 1)\sqrt[3]{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1) + 2x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 3x^2 + x - 1}
 \end{aligned}$$

Đặt $x^2 + x + 1 = u$; $\sqrt[3]{2x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 5x^2 + 2x} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (2x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 3x^2 + x - 1) = (x^2 + 1)v \\ v^3 - (2x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 3x^2 + x - 1) = (x^2 + 1)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x^2 + 1)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

- $u^2 + uv + v^2 + x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + x^2 = -1$ (Vô nghiệm).
- $x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1 = 2x^5 + 5x^4 + 8x^3 + 5x^2 + 2x \Leftrightarrow x^6 + x^5 + x^4 - 6x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.

Xét $x \neq 0$; phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + x^2 + x - 6 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0.$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \text{ và } t^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$; $x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$. Ta có phương trình

$$t^3 - 3t + t^2 - 2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t^3 + t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2 + 3t + 4) = 0.$$

Phương trình $t^2 + 3t + 4 = 0, \Delta < 0$ nên vô nghiệm. Với $t = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 140. Giải phương trình

$$\frac{x^6 + x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 2x^2}{2x^2 + 1} = \sqrt[3]{-x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^6 + x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 2x^2 &= (2x^2 + 1)\sqrt[3]{-x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2} \\ \Leftrightarrow x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 - (-x^5 + 8x^3 + x^2 + 1) &= (2x^2 + 1)\sqrt[3]{2x^4 + 3x^2 + 1 - x^5 + 8x^3 + x^2 + 1} \\ \Leftrightarrow (x^2 + 1)^3 - (-x^5 + 8x^3 + x^2 + 1) &= (2x^2 + 1)\sqrt[3]{(2x^2 + 1)(x^2 + 1) - x^5 + 8x^3 + x^2 + 1} \end{aligned}$$

Đặt $x^2 + 1 = u; \sqrt[3]{-x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2} = v$ ta thu được

$$\begin{cases} u^3 - (-x^5 + 8x^3 + x^2 + 1) = (2x^2 + 1)v \\ v^3 - (-x^5 + 8x^3 + x^2 + 1) = (2x^2 + 1)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (2x^2 + 1)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 2x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

- $u^2 + uv + v^2 + 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 2x^2 = -1$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 = -x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2 \Leftrightarrow x^6 + x^5 + x^4 - 8x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.

Xét $x \neq 0$; phương trình đã cho tương đương với

$$x^3 + x^2 + x - 8 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right) - 8 = 0$$

$$\text{Đặt } x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2; t^3 = x^3 - \frac{1}{x^3} - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2; x^3 - \frac{1}{x^3} = t^3 + 3t.$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} (t^3 + 3t) + t^2 + 2 + t - 8 &= 0 \Leftrightarrow t^3 + t^2 + 4t - 6 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + 2t + 6) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ (t+1)^2 = -5 \end{cases} &\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài toán 141. Giải phương trình $\frac{x^6 + 3x^5 + 3x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1} = \sqrt[3]{-3x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 3x + 2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^6 + 3x^5 + 3x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 3x + 1 &= (x^2 + 1)\sqrt[3]{-3x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 3x + 2} \\ \Leftrightarrow x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 - (-3x^5 + 6x^3 + x^2 - 3x) &= (x^2 + 1)\sqrt[3]{x^4 + 3x^2 + 2 - 3x^5 + 6x^3 + x^2 - 3x} \\ \Leftrightarrow (x^2 + 1)^3 - (-3x^5 + 6x^3 + x^2 - 3x) &= (x^2 + 1)\sqrt[3]{(x^2 + 1)(x^2 + 1) + (-3x^5 + 6x^3 + x^2 - 3x)} \end{aligned}$$

Đặt $x^2 + 1 = u$; $\sqrt[3]{x^4 + 3x^2 + 2 - 3x^5 + 6x^3 + x^2 - 3x} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (-3x^5 + 6x^3 + x^2 - 3x) = (x^2 + 2)v \\ v^3 - (-3x^5 + 6x^3 + x^2 - 3x) = (x^2 + 2)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x^2 + 2)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp xảy ra

- $u^2 + uv + v^2 + x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + x^2 = -2$ (Vô nghiệm).
- $x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 = -3x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow x^6 + 3x^5 + x^4 - 6x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$.

Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình trên.

Xét $x \neq 0$; phương trình đã cho trở thành

$$x^3 + 3x^2 + x - 6 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right) - 6 = 0.$$

$$\text{Đặt } x - \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2; t^3 = x^3 - \frac{1}{x^3} - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2; x^3 - \frac{1}{x^3} = t^3 + 3t.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} (t^3 + 3t) + 3t^2 + 6 + t - 6 &= 0 \Leftrightarrow t^3 + 3t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow t(t^2 + 3t + 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t^2 + 3t + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1; x = 1$.

Bài toán 142. Giải phương trình $\frac{x^6 + 6x^4 + x^3 + 8x^2 + 4x + 3}{(x+1)^2} = \sqrt[3]{x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 7} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^6 + 6x^4 + x^3 + 8x^2 + 4x + 3 &= (x^2 + 2x + 1)\sqrt[3]{x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 7} \\ &\Leftrightarrow x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8 - (x^3 + 4x^2 - 4x + 5) \\ &= (x^2 + 2x + 1)\sqrt[3]{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 2 + x^3 + 4x^2 - 4x + 5} \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 2)^3 - (x^3 + 4x^2 - 4x + 5) = (x^2 + 2x + 1)\sqrt[3]{(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2) + x^3 + 4x^2 - 4x + 5} \end{aligned}$$

Đặt $x^2 + 2 = u$; $\sqrt[3]{x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 7} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^3 + 4x^2 - 4x + 5) = (x^2 + 2x + 1)v \\ v^3 - (x^3 + 4x^2 - 4x + 5) = (x^2 + 2x + 1)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x+1)^2(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + (x+1)^2 = 0 \end{cases}$$

Xét hai trường hợp xảy ra

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

$$\checkmark \quad x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8 = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 7 \Leftrightarrow x^6 + 5x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 1 = 0$$

Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình đã cho.

$$\text{Xét } x \neq 0; \text{ biến đổi về } x^3 + 5x^2 - 3 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0.$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$; thu được

$$t^3 - 3t + 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow t^3 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + t + 3 = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

Nếu $t^2 + t + 3 = 0, \Delta < 0$, trường hợp này vô nghiệm.

Nếu $t = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0, \Delta < 0$, trường hợp này vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 143. Giải phương trình $x^6 + x^3 + 2x^2 + x + (x^4 - x + 1)\sqrt[3]{x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4x + 2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $x^4 - x + 1 \neq 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} -x^6 - x^3 - 2x^2 - x &= (x^4 - x + 1)\sqrt[3]{x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4x + 2} \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^6 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1) &= (x^4 - x + 1)\sqrt[3]{x^5 + x^4 - x^2 + 1 + x^6 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 - (x^6 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1) &= (x^4 - x + 1)\sqrt[3]{(x^4 - x + 1)(x+1) + x^6 + 2x^3 + 5x^2 + 4x + 1} \end{aligned}$$

Đặt $x+1 = u; \sqrt[3]{x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4x + 2} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^6 + 2x^3 - x^2 + 4x - 1) = (x^4 - x + 1)v \\ v^3 - (x^6 + 2x^3 - x^2 + 4x - 1) = (x^4 - x + 1)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x^4 - x + 1)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^4 - x + 1 = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp xảy ra

$$\diamond u^2 + uv + v^2 + x^4 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + \frac{4x^4 - 4x^2 + 1 + 4x^2 - 4x + 1 + 2}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + \frac{(2x^2 - 1)^2 + (2x - 1)^2}{4} = -\frac{1}{2} \quad (\text{Vô nghiệm}).$$

$$\diamond u = v \Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 4x + 2 \Leftrightarrow x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \quad (1)$$

Nhận xét $x = 1$ không thỏa mãn phương trình (1). Do đó $x \neq 1 \Rightarrow x - 1 \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^7 + x^6 - x^6 + x^5 - x^5 + x^4 - x^4 + x^3 - x^3 + x^2 - x^2 + x - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^7 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad (2)$$

Rõ ràng (2) mâu thuẫn. Suy ra phương trình (1) vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 144. Tìm nghiệm dương của phương trình sau

$$\frac{1+3x}{1+x^4} = \sqrt[3]{x^5 + x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x > 0$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= (x^4 + 1)\sqrt[3]{x^5 + x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1} \\ \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^3 + 3x^2) &= (x^4 + 1)\sqrt[3]{x^5 + x^4 + x + 1 + (x^3 + 3x^2)} \\ \Leftrightarrow (x+1)^3 - (x^3 + 3x^2) &= (x^4 + 1)\sqrt[3]{(x^4 + 1)(x+1) + x^3 + 3x^2} \end{aligned}$$

Đặt $x+1=u$; $\sqrt[3]{x^5+x^4+x^3+3x^2+x+1}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^3 + 3x^2) = (x^4 + 1)v \\ v^3 - (x^3 + 3x^2) = (x^4 + 1)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x^4 + 1)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^4 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\checkmark \quad u^2 + uv + v^2 + x^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + x^4 = -1 \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\begin{aligned} \checkmark \quad u = v &\Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^5 + x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^5 + x^4 - 2x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x(x^4 + x^3 - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^4 + x^3 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)(x^3 + 2x^2 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Kết luận phương trình ban đầu có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài toán 145. Giải phương trình $\frac{11x^4 - x^3 - 2x^2 + 7x - 3}{5x^4 - x + 2} = \sqrt[3]{5x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 3x + 6} \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải.

Điều kiện $5x^4 - x + 2 \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 11x^4 - x^3 - 2x^2 + 7x - 3 &= (5x^4 - x + 2)\sqrt[3]{5x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 3x + 6} \\ &\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (-11x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4) \\ &= (5x^4 - x + 2)\sqrt[3]{5x^5 + 5x^4 - x^2 + x + 2 - 11x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4} \\ &\Leftrightarrow (x+1)^3 - (-11x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4) \\ &= (5x^4 - x + 2)\sqrt[3]{(5x^4 - x + 2)(x+1) - 11x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4} \end{aligned}$$

Đặt $x+1=u$; $\sqrt[3]{5x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 3x + 6}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (-11x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4) = (5x^4 - x + 2)v \\ v^3 - (-11x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4) = (5x^4 - x + 2)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (5x^4 - x + 2)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 5x^4 - x + 2 = 0 \end{cases}$$

Xét các trường hợp

$$\triangleright \quad u^2 + uv + v^2 + 5x^4 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 4x^4 + \frac{4x^4 - 4x^2 + 1 + 4x^2 - 4x + 1 + 2}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 4x^4 + \frac{(2x^2 - 1)^2 + (2x - 1)^2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\triangleright \quad u = v \Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 5x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 3x + 6$$

$$\Leftrightarrow 5x^5 - 6x^4 + x^3 + x^2 - 6x + 5 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 5x^4(x+1) - 11x^3(x+1) + 12x^2(x+1) - 11x(x+1) + 5(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(5x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 11x + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 5x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 11x + 5 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Nhận xét $x = 0$ không là nghiệm của phương trình (1). Xét trường hợp $x \neq 0$ thì

$$(*) \Leftrightarrow 5x^2 - 11x + 12 - \frac{11}{x} + \frac{5}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 5\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 11\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12 = 0.$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t$ ta có $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Thu được

$$5t^2 - 11t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(5t-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(5x^2 - x + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 5x^2 - x + 5 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình (1) vô nghiệm vì $\Delta < 0$. Kết luận tập hợp nghiệm $S = \{1\}$.

Nhận xét.

Đến đây là bài toán số 145 của tài liệu, một số thứ tự thí dụ không nhỏ, tất nhiên hông nằm ngoài dạng thức sử dụng ắnn phụ chứa căn bậc ba đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2. Sau đây tác giả cùng độc giả điểm lại một số cấp độ chúng ta đã trải nghiệm

1. $1.(mx+n)^3 - (ax+b) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n)+(ax+b)}.$
2. $(mx+n)^3 - (ax^2+bx+c) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n)+(ax^2+bx+c)}.$
3. $(mx+n)^3 - (ax^3+bx^2+cx+d) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n)+(ax^3+bx^2+cx+d)}.$
4. $(mx+n)^3 - (ax^4+bx^3+cx^2+dx+e) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n)+(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)}.$
5. $(mx+n)^3 - (ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx+n)+(ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f)}.$
6. $(mx^2+nx+p)^3 - (ax+b) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx^2+nx+p)+(ax+b)}.$
7. $(mx^2+nx+p)^3 - (ax^2+bx+c) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx^2+nx+p)+(ax^2+bx+c)}.$
8. $(mx^2+nx+p)^3 - (ax^3+bx^2+cx+d) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx^2+nx+p)+(ax^3+bx^2+cx+d)}.$
9. $(mx^2+nx+p)^3 - (ax^4+bx^3+cx^2+dx+e) = f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx^2+nx+p)+(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)}.$
10. $(mx^2+nx+p)^3 - (ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f)$
 $= f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx^2+nx+p)+(ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f)}.$
11. $(mx^2+nx+p)^3 - (ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+fx+g)$
 $= f(x)\sqrt[3]{f(x)(mx^2+nx+p)+(ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+fx+g)}.$

Trong đó đa thức $f(x)$ của chúng ta tăng dần độ phức tạp theo thứ tự

$$f(x) \equiv \text{const} \rightarrow f(x) \equiv ax+b \rightarrow f(x) \equiv ax^2+bx+c \rightarrow f(x) \equiv ax^4+bx+c.$$

Lưu ý sau khi đặt hai ắnn phụ u với v , ta thường quy về tuyển phương trình
$$\begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + f(x) = 0 \end{cases}$$

Giả định u là ắn phụ gọn gàng hơn (đa thức) còn v là ắn phụ phức tạp hơn (căn thức).

Trường hợp $u = v$ đã bước đầu được lòng ghép các phương trình đại số bậc cao điển hình, trong đó cao nhất là phương trình đối xứng bậc 6, đòi hỏi các bạn cần nắm vững lý thuyết, rèn luyện kỹ năng thành thạo mới có thể xử lý trọn vẹn được bài toán đưa ra.

$$\text{Hơn thế nữa } u^2 + uv + v^2 + f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(u + \frac{1}{2}v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + f(x) = 0 & (1) \\ \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 + f(x) = 0 & (2) \end{cases}$$

Thông qua quan sát, một số bạn độc giả đã có thể linh hoạt sử dụng một trong hai phương án (1) hoặc (2).

Để ý kỹ lưỡng có thể thấy phương án (1) đơn giản hơn phương án 2, các bạn đừng có đại dột tung tóe $\frac{3}{4}v^2$ theo căn thức, không giải quyết vấn đề gì, bởi khi đó ta thường gặp may mắn

$$\begin{cases} f(x) \equiv \text{const} > 0 \\ f(x) \equiv ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ f(x) \equiv ax^4 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Việc đánh giá ước lượng các biểu thức trên đã được trình bày chi tiết thông qua các thí dụ, trường hợp cuối cùng là khó khăn hơn cả.

Phương án (2) cũng đã xảy ra với nhiều bài toán, đặc thù của nó là phải “tung tóe, kết hợp tổng thể”, thậm chí tinh tế hơn, bởi thường gặp các tình huống không xác định được rõ ràng dấu của $f(x)$, một phần cũng vì căn thức bậc ba không cần điều kiện xác định, còn nếu không chúng ta đã dùng đánh giá căn bản, bất đẳng thức, công cụ đạo hàm – khảo sát hàm số, nói chung khi đó về “hỏa lực” là không thiếu. Cụ thể các bạn cần lập luận $\frac{3}{4}u^2 + f(x) \geq 0$ bằng cách quy về hằng đẳng thức hoặc dùng công cụ hàm số (mặc dù là trên tập số thực).

$$\text{Các trường hợp thường gặp tương tự phương án (1), đó là } \begin{cases} f(x) \equiv \text{const} \\ f(x) \equiv ax^2 + bx + c \\ f(x) \equiv ax^4 + bx + c \geq 0 \end{cases}$$

Xây dựng điều này bằng cách chọn $f(x)$ sao cho phương trình bậc hai ẩn x : $\frac{3}{4}u^2 + f(x) = 0$ vô nghiệm. Hoặc nếu bậc 4 thì $\frac{3}{4}u^2 + f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nếu không lập luận được $\frac{3}{4}u^2 + f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ có nghiệm thì thao tác giải bài toán sẽ rất phức tạp, không muốn nói là đi vào ngõ cụt. Nếu $f(x)$ là đa thức bậc ba kết hợp với u dạng nhị thức bậc nhất thì $\frac{3}{4}u^2 + f(x) \geq 0$ vẫn có dạng thức bậc ba, và tất yếu không tồn tại sự kiện $\frac{3}{4}u^2 + f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Liệu $f(x)$ có dạng đa thức bậc ba được hay không? Câu trả lời là có, và khi đó muốn có $\frac{3}{4}u^2 + f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ thì phải có $u \equiv mx^2 + nx + p$, nhằm tạo ra đa thức bậc bốn, quy về hằng đẳng thức sẽ thuận lợi hơn. Sau đây tác giả xin kết thúc tài liệu bằng lớp bài toán với $f(x)$ có dạng đa thức bậc ba, trước khi chuyển sang Lý thuyết sử dụng ắn phụ phần 10, nâng cao và phát triển mở rộng các phần 8 – 9.

Bài toán 146. Giải phương trình

$$x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 5x + 1 = (x^3 + 1)\sqrt[3]{x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x - 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 - (x^3 - 5x^2 + 5x - 1) &= (x^3 + 1)\sqrt[3]{x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x - 1} \\ \Leftrightarrow (x^2 - x)^3 - (x^3 - 5x^2 + 5x - 1) &= (x^3 + 1)\sqrt[3]{(x^3 + 1)(x^2 - x) + x^3 - 5x^2 + 5x - 1} \end{aligned}$$

Đặt $x^2 - x = u$; $\sqrt[3]{x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x - 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^3 - 5x^2 + 5x - 1) = (x^3 + 1)v \\ v^3 - (x^3 - 5x^2 + 5x - 1) = (x^3 + 1)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (x^3 + 1)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^3 + 1 = 0 \end{cases}$$

- $u^2 + uv + v^2 + x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x^4 - 2x^3 + x^2) + x^3 + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2\left(x^2 - \frac{1}{3}x + 1\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{35}{48}x^2 = -1$ (Vô nghiệm).
- $u = v \Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^3 = x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 + 4x - 1 \Leftrightarrow x^6 - 4x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 1 = 0$
 Xét $x = 0$ không thỏa mãn phương trình trên. Xét $x \neq 0$; biến đổi về

$$x^3 - 4x^2 + 4x - 2 + \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \text{ và } t^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Suy ra $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$; $x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$. Ta có phương trình

$$\begin{aligned} t^3 - 3t - 4(t^2 - 2) + 4t - 2 &= 0 \Leftrightarrow t^3 - 4t^2 + t + 6 = 0 \Leftrightarrow (t - 3)(t + 1)(t - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 1)(x^2 + x + 1)(x - 1)^2 &= 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; 1 \right\} \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có ba nghiệm kể trên.

Bài toán 147. Giải phương trình $x^6 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (1 - x^3)\sqrt[3]{2x^5 + 2x^4 - x^2 - x - 1}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3 - (3x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 2x - 1) &= (1 - x^3)\sqrt[3]{x^2 + x - x^5 - x^4 + 3x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 2x - 1} \\ \Leftrightarrow (x^2 + x)^3 - (3x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 2x - 1) &= (1 - x^3)\sqrt[3]{(1 - x^3)(x^2 + x) + 3x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 2x - 1} \end{aligned}$$

Đặt $x^2 + x = u$; $\sqrt[3]{2x^5 + 2x^4 - x^2 - x - 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (3x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 2x - 1) = (1 - x^3)v \\ v^3 - (3x^5 + 3x^4 - 2x^2 - 2x - 1) = (1 - x^3)u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = (1 - x^3)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 1 - x^3 = 0 \end{cases}$$

$$\circ \quad u^2 + uv + v^2 - x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}u^2 - x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x^4 + 2x^3 + x^2) - x^3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2\left(x+\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{35}{48}x^2 = -1 \text{ (Vô nghiệm).}$$

- $u=v \Leftrightarrow u^3=v^3 \Leftrightarrow x^6+3x^5+3x^4+x^3=2x^5+2x^4-x^2-x-1 \Leftrightarrow x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$
 Nhận xét $x=1$ không thỏa mãn phương trình (1). Do đó $x \neq 1 \Rightarrow x-1 \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x^7+x^6-x^6+x^5-x^5+x^4-x^4+x^3-x^3+x^2-x^2+x-x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x^7-1=0 \Leftrightarrow x=1 \quad (2)$$

Rõ ràng (2) mâu thuẫn. Suy ra phương trình (1) vô nghiệm.
 Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 148. Giải phương trình

$$x^6+7x^5+20x^4+26x^3+16x^2+8x+1=\left(x^3+3x^2+1\right)\sqrt[3]{-3x^4-12x^3-15x^2-6x-1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & x^6+6x^5+12x^4+8x^3-\left(-x^5-8x^4-18x^3-16x^2-8x-1\right) \\ &= \left(x^3+3x^2+1\right)\sqrt[3]{\left(x^5+5x^4+6x^3+x^2+2x\right)-x^5-8x^4-18x^3-16x^2-8x-1} \\ &\Leftrightarrow \left(x^2+2x\right)^3-\left(-x^5-8x^4-18x^3-16x^2-8x-1\right) \\ &= \left(x^3+3x^2+1\right)\sqrt[3]{\left(x^3+3x^2+1\right)\left(x^2+2x\right)-x^5-8x^4-18x^3-16x^2-8x-1} \end{aligned}$$

Đặt $x^2+2x=u$; $\sqrt[3]{-3x^4-12x^3-15x^2-6x-1}=v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3-\left(-x^5-8x^4-18x^3-16x^2-8x-1\right)=\left(x^3+3x^2+1\right)v \\ v^3-\left(-x^5-8x^4-18x^3-16x^2-8x-1\right)=\left(x^3+3x^2+1\right)u \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^3-v^3=\left(x^3+3x^2+1\right)(v-u) \Leftrightarrow \begin{cases} u=v \\ u^2+uv+v^2+x^3+3x^2+1=0 \end{cases}$$

$$\diamondsuit \quad u^2+uv+v^2+x^3+3x^2+1=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2+\frac{3}{4}u^2+x^3+3x^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2+\frac{3}{4}\left(x^2+2x\right)^2+x^3+3x^2+1=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2+\frac{3}{4}x^4+4x^3+6x^2+1=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u+v\right)^2+\frac{3}{4}x^2\left(x+\frac{8}{3}\right)^2+\frac{2}{3}x^2=-1 \text{ (Vô nghiệm).}$$

$$\diamondsuit \quad u=v \Leftrightarrow u^3=v^3 \Leftrightarrow x^6+6x^5+12x^4+8x^3=-3x^4-12x^3-15x^2-6x-1$$

$$\Leftrightarrow x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^6=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=-1$.

Bài toán 149. Giải phương trình $\frac{x^6+2x^5+6x^4+5x^3+2x^2+2x+1}{x^3+4x^2+1}=\sqrt[3]{2x^5+2x^4-x^2-x-1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải.

Điều kiện $x^3+4x^2+1 \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
x^6 + 2x^5 + 6x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 2x + 1 &= (x^3 + 4x^2 + 1)\sqrt[3]{2x^5 + 2x^4 - x^2 - x - 1} \\
&\Leftrightarrow x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3 - (x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 2x - 1) \\
&= (x^3 + 4x^2 + 1)\sqrt[3]{x^5 + 5x^4 + 4x^3 + x^2 + x + x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 2x - 1} \\
&\Leftrightarrow (x^2 + x)^3 - (x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 2x - 1) \\
&= (x^3 + 4x^2 + 1)\sqrt[3]{(x^3 + 4x^2 + 1)(x^2 + x) + x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 2x - 1}
\end{aligned}$$

Đặt $x^2 + x = u$; $\sqrt[3]{2x^5 + 2x^4 - x^2 - x - 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 - (x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 2x - 1) = (x^3 + 4x^2 + 1)v \\ v^3 - (x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 2x - 1) = (x^3 + 4x^2 + 1)u \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^3 - v^3 = (x^3 + 4x^2 + 1)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^3 + 4x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\circ \quad u^2 + uv + v^2 + x^3 + 4x^2 + 1 = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + x^3 + 4x^2 + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x^2 + x)^2 + x^3 + 4x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^3 + \frac{19}{4}x^2 + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2\left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{1}{16}x^2 = -1 \text{ (Vô nghiệm).}
\end{aligned}$$

$$\circ \quad u = v \Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3 = 2x^5 + 2x^4 - x^2 - x - 1 \Leftrightarrow x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \quad (1).$$

Nhận xét $x = 1$ không thỏa mãn phương trình (1). Do đó $x \neq 1 \Rightarrow x - 1 \neq 0$.

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow (x - 1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow x^7 + x^6 - x^6 + x^5 - x^5 + x^4 - x^4 + x^3 - x^3 + x^2 - x^2 + x - x - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^7 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad (2)
\end{aligned}$$

Rõ ràng (2) mâu thuẫn. Suy ra phương trình (1) vô nghiệm.

Kết luận phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài toán 150. Giải phương trình

$$x^6 + 9x^5 + 41x^4 + 71x^3 + 21x^2 + 24x + 1 = (3x^3 + 17x^2 + 6)\sqrt[3]{3x^5 + 12x^4 + 7x^3 - 15x^2 - 6x - 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Điều kiện $x \in \mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned}
&x^6 + 9x^5 + 27x^4 + 27x^3 + (14x^4 + 44x^3 + 21x^2 + 24x + 1) \\
&= (3x^3 + 17x^2 + 6)\sqrt[3]{3x^5 + 26x^4 + 51x^3 + 6x^2 + 18x - 14x^4 - 44x^3 - 21x^2 - 24x - 1} \\
&\Leftrightarrow (x^2 + 3x)^3 + (14x^4 + 44x^3 + 21x^2 + 24x + 1) \\
&= (3x^3 + 17x^2 + 6)\sqrt[3]{(3x^3 + 17x^2 + 6)(x^2 + 3x) - 14x^4 - 44x^3 - 21x^2 - 24x - 1}
\end{aligned}$$

Đặt $x^2 + 3x = u$; $\sqrt[3]{3x^5 + 12x^4 + 7x^3 - 15x^2 - 6x - 1} = v$ ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^3 + (14x^4 + 44x^3 + 21x^2 + 24x + 1) = (3x^3 + 17x^2 + 6)v \\ v^3 + (14x^4 + 44x^3 + 21x^2 + 24x + 1) = (3x^3 + 17x^2 + 6)u \end{cases}$$

$$\Rightarrow u^3 - v^3 = (3x^3 + 17x^2 + 6)(v - u) \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + 3x^3 + 17x^2 + 6 = 0 \end{cases}$$

Xét hai khả năng xảy ra

$$\begin{aligned} \diamondsuit \quad u^2 + uv + v^2 + 3x^3 + 17x^2 + 6 = 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + 3x^3 + 17x^2 + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}(x^2 + 3x)^2 + 3x^3 + 17x^2 + 6 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{15}{2}x^3 + \frac{95}{4}x^2 + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}u + v\right)^2 + \frac{3}{4}x^2(x + 5)^2 + 5x^2 = -6 \text{ (Vô nghiệm)}. \\ \diamondsuit \quad u = v &\Leftrightarrow u^3 = v^3 \Leftrightarrow x^6 + 9x^5 + 27x^4 + 27x^3 = 3x^5 + 12x^4 + 7x^3 - 15x^2 - 6x - 1 \\ &\Leftrightarrow x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

Kết luận phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$.

Bài tập tương tự.

Giải các phương trình sau trên tập hợp số thực

1. $(x-1)^3 - 7x = (x+1)\sqrt[3]{(x+1)(x-1)+7x}.$

2. $(x+1)(x^2-4x-1) = (x+1)\sqrt[3]{x^2+8x-1}.$

3. $x^3+2 = (x+1)\sqrt[3]{x^2+9x-1}+3(x+1)^2.$

4. $\frac{x^3-6x^2+11x-10}{\sqrt[3]{x^2+4x-8}} = x+5.$

5. $x^3-6x^2+11x-14 = (x+7)\sqrt[3]{x^2+6x-8}.$

6. $x^3+3x = (x+1)\sqrt[3]{4x^2-1}+6x^2+1.$

7. $\frac{x^3-12x^2+12x-6}{\sqrt[3]{(x-1)(7x+8)}} = 3+x.$

8. $\frac{(x+3)\sqrt[3]{x^2+13x-8}+6x^2+6}{x^3} = 1.$

9. $x^3+5x^2+11x+12 = (x+6)\sqrt[3]{2x^2+9x+8}.$

10. $\frac{x^3+5x^2+11x+14}{\sqrt[3]{2(x+1)(x+4)}} - x - 7 = 0.$

11. $(x+1)^3 - (x^2-8) = (x+9)\sqrt[3]{(x+9)(x+1)+(x^2-8)}.$

12. $\frac{x^3+2x^2+3x+8}{2+x} = \sqrt[3]{(x+1)(2x+1)}.$

13. $x^3+2x^2+3x+10 = (x+10)\sqrt[3]{2x^2+11x+1}.$

14. $\frac{x^3+7x^2+16x+3}{2x-1} + \sqrt[3]{-3x^2-7x+7} = 0.$

15. $\frac{8x^3-13x^2+7x-1}{\sqrt[3]{3x^2-1}} = x+1.$

16. $x^3+7x^2+16x+2 = (1-2x)\sqrt[3]{-3x^2-7x+8}.$

17. $x^2+7x+16 = \left(\frac{1}{x}-2\right)\sqrt[3]{-3x^2-7x+10}.$

18. $\frac{8x^3-13x^2+7x-8}{\sqrt[3]{3x^2+6}} = x+1.$

19. $9x^3-12x^2+x-4 = (x+4)\sqrt[3]{18x^2+39x-1}.$

20. $\frac{3x^3-12x^2+2x-5}{\sqrt[3]{36x^2+117x-1}} = 1.$

21. $8x^2-13x+7 = \frac{4}{x} + \left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{3x^2+6x-1}.$

22. $9x^3-15x^2+x-4 = (x+4)\sqrt[3]{27x^2+39x-49}.$

23. $x^3-2x^2+x-1 = \sqrt[3]{4x^2+14x-1}.$

24. $2x^2 - 9x^2 + 4x - 4 = 2\sqrt[3]{6x^2 + 14x - 1}$.
25. $(x-1)(x^2+1) = 2\sqrt[3]{-4x^2 + 14x - 1}$.
26. $\frac{8x^3 - 29x^2 + 8x - 8}{8} = \sqrt[3]{17x^2 + 14x - 1}$.
27. $3x^2 - 3x + 14 = (x+6)\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 13x - 7}$.
28. $\frac{3x^2 - 3x + 37}{x+6} = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 13x - 30}$.
29. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 5x - 8}} = \frac{6x+17}{(x+6)^2 - 70}$.
30. $\frac{x^3 + 3x^2 - 7x + 1}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 13x + 1}} = (x+1)^2$.
31. $x^3 + 3x^2 - 5x + 1 = (x+1)^2 \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 11x + 1}$.
32. $\frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x+1)^2} = \sqrt[3]{x^3 + 9x^2 + 3x + 1}$.
33. $\frac{x^6 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{1 - x^3} = \sqrt[3]{2x^5 + 2x^4 - x^2 - x - 1}$.
34. $\frac{x^3 + 4x^2 - 9x - 10}{2x^2 - 3x} = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 15x + 18}$.
35. $\frac{x^6 + 7x^5 + 20x^4 + 26x^3 + 16x^2 + 8x + 1}{x^3 + 3x^2 + 1} = \sqrt[3]{-3x^4 - 12x^3 - 15x^2 - 6x - 1}$.
36. $\frac{6x^3 - 8x^2 - 6x - 1}{2x + 1} = \sqrt[3]{2x(x^2 + 6) - 1}$.
37. $x^3 + 4x^2 - 9x - 11 = (2x^2 - 3x)\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 15x + 19}$.
38. $\frac{x^3 + 3x^2 + 7}{(x+1)^2} = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 6x - 5}$.
39. $\frac{8x^3 + x^2 + 14x + 4}{3x^2 - x + 7} = \sqrt[3]{6x^3 + 12x^2 + 5x + 4}$.
40. $\frac{x^3 + 4x^2 - 9x - 6}{2x - 3} = x\sqrt[3]{(x+1)(2x^2 + x + 14)}$.
41. $8x^3 - 15x^2 + 11x - 8 = 8\sqrt[3]{3x^2 + 11x - 1}$.
42. $8x^2 - 45x + 187 = \frac{764}{x+4} + \sqrt[3]{9x^2 + 27x - 1}$.
43. $5x^2 - 4x + 1 = (3x^2 - x)\sqrt[3]{4x^3 + 6x}$.
44. $\frac{x^3 - 4x^2 + x - 5}{\sqrt[3]{x^4 + 8x^2 + 3x + 17}} = 1$.
45. $\frac{6x^2 + 11x + 1}{13 + x} = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 15x + 20}$.
46. $-4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = (3x^2 - x)\sqrt[3]{4x^3 + 6x}$.

$$47. x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{x}\right) \sqrt[3]{x^4 + 3x^2 + 3x + 1}.$$

$$48. x^3 - 2x^2 + x - 4 = (x^2 + 1) \sqrt[3]{x^4 + 6x^2 + 3x + 6}.$$

$$49. x^3 + x - 1 = \sqrt[3]{x^4 + 4x^2 + 3x + 3}.$$

$$50. x^3 + 3x^2 - 4x + 4 = (x + 1)^2 \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 10x - 2}.$$

$$51. \frac{x^3 + 2x^2 - 5x + 11}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 6x - 1}} = (x + 1)^2.$$

$$52. x^3 + 3x^2 + 9x - 5 = (3x^2 + x) \sqrt[3]{3x^3 + 4x^2 - 5x + 6}.$$

$$53. \frac{x^3 + 3x^2 + 10x - 7}{3x + 1} - x \sqrt[3]{3x^3 + 4x^2 - 7x + 8} = 0.$$

$$54. x^3 + 3x^2 - x - 1 = (2x^2 - x) \sqrt[3]{2x^3 + x^2 + 3x + 2}.$$

$$55. \frac{x^3 + 3x^2 - 5x + 3}{2x^2 - x} = \sqrt[3]{2x^3 + x^2 + 7x - 2}.$$

$$56. \frac{1}{\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 + 19x + 1}} = \frac{x^2 + x + 17}{x^3 + 3x^2 + 3x - 4}.$$

$$57. x + \frac{2}{x^2 + x + 17} = \sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 32x + 16}.$$

$$58. \frac{5}{x^2 + x + 17} = \sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 32x + 13} - x.$$

$$59. \sqrt[3]{x(x^2 + 4x + 32)} - x = \frac{18}{x(1 + x) + 17}.$$

$$60. 5x^3 + 7x + 3x + 1 = (4x^2 - x + 5) \sqrt[3]{3x^2 + 5}.$$

$$61. \frac{x}{x^2 - x + 1} = \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 2}}{x^2 + 2x + 2}.$$

$$62. \frac{x}{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + x + 2}} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

$$63. \frac{(x-1)(x^2 + x + 9)}{x^2 - x + 1} = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 5x + 10}.$$

$$64. x^3 + x - 2 = (x^2 - x + 1) \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 2x + 3}.$$

$$65. \sqrt[3]{x^3 + x - 9} = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 7}{(x+1)^2 + 3}.$$

$$66. (x^2 + 2x + 4) \sqrt[3]{x^3 + 6x - 6} = x^3 - 6x^2 + 6x - 3.$$

$$67. (x+1)^2 + 3 = \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt[3]{x^3 + x - 10}}.$$

$$68. (x^2 - 2x + 4) \sqrt[3]{x^3 + x + 11} = x^3 - 6x^2 + 11x - 11.$$

$$69. \sqrt[3]{x^3 + 7x + 11} = \frac{x^3 - 6x^2 + 5x - 11}{x^2 - 2x + 4}.$$

Lời kết.

Bài toán số 150 cũng là bài toán cuối cùng của tài liệu Lý thuyết sử dụng ắnn phụ căn phần thứ 9, chủ đạo tập hợp và hướng dẫn về lớp bài toán sử dụng căn thức với phương trình chứa căn bậc ba đưa được về hệ phương trình. Trong quá trình hoàn thiện bài toán các bạn cần kết hợp phép thế, đặt ắnn phụ, kỹ thuật giải phương trình bằng phép nâng lũy thừa, phân tích hằng đẳng thức và nhằm nghiệm đối với phương trình bậc cao tuy nhiên nó chỉ là chút chia sẻ phần nào của tác giả ! Mong muốn các bạn độc giả chú ý kỹ lưỡng và rút được nhiều kinh nghiệm quý báu cho bản thân mình.

Tác giả chúc các bạn học sinh, các thầy cô giáo và toàn thể các bạn độc giả sức khỏe, vui vẻ, bình tĩnh, tự tin, bí quyết, đánh bật đề thi, đạt kết quả cao trong các kỳ thi tương lai sắp tới, chúc các em học sinh lớp 12 THPT đạt điểm tối đa môn Toán trong kỳ thi THPT Quốc gia năm 2015 và hơn thế nữa.

Tôi còn nhớ đã đọc trong một tài liệu, tại Đại hội Châu ngoan Bác Hồ Thành phố Hồ Chí Minh, năm 1977, có một vị đại biểu trong Đoàn chủ tịch đã từng nói

“Thành phố soi thấy tương lai rất sáng của mình trên vầng trán các cháu”

Đó là câu nói nổi tiếng của Nguyễn Bội thư Thành ủy Thành phố Hồ Chí Minh, Cố Thủ tướng Chính phủ Nước Cộng hòa Xã hội Chủ nghĩa Việt Nam, đồng chí Sáu Dân – Võ Văn Kiệt. Câu nói hàm súc chứa rất nhiều tâm tư và nguyện vọng của một người chiến sĩ cộng sản kiên trung, vào sinh ra tử cùng nhịp đập trái tim Tổ quốc suốt hai cuộc kháng chiến. Thế hệ hậu sinh chúng ta sinh ra và lớn lên trên dải đất hình chữ S nhiều đau thương, còn chưa hàn gắn hết, mỗi người chúng ta đều sục sôi dòng máu chảy trong mình không thay đổi được, từ bé đến lớn nghiêm nhiên thừa hưởng chế độ y tế và giáo dục để phát triển toàn diện, đó là ân huệ của cha mẹ, của thế hệ trước, của non sông ban tặng cho mỗi công dân. Tư tưởng cá nhân luôn tồn tại trong mỗi người, đó là sự phân công xã hội và tất yếu nảy sinh do bản năng, vì thế nó thường vượt qua ngưỡng cửa tập thể, nó cứ đi sâu mãi để làm đường lạc lối. Dù rằng quyền sống, quyền hưởng thụ, và nhiều quyền khác nữa là bất di bất dịch, nhưng điều gì cũng cần có mức độ, điều gì cũng cần phù hợp đạo lý, giữ vững bản sắc và truyền thống vốn có lâu đời của nó, làm sao để khi nhìn vào chúng ta còn nhận ra mình. Thiết nghĩ sống tốt, hữu ích, đúng đạo lý, khoan dung, không dẫm đạp đồng bào, diệt trừ ác độc, hơn nữa để an toàn và thoải mái cần chiếm lĩnh khoa học, cùng nhau vững bước làm chủ tri thức, làm chủ tương lai, chỉ cần làm được chiếc ốc vít, làm được súng đại liên, chiến xa, tên lửa, tàu ngầm, tiêm kích, cường kích chúng ta sẽ hoàn toàn xây dựng được bức tường thành bảo vệ mẹ già, vợ đại, con thơ trước sự dòm ngó của ngoại bang. Thế hệ trẻ mình cần nhiều thứ thật đấy, và chưa mất mát thứ gì, vì thế cần có trách nhiệm giữ gìn bản sắc và quyết tâm xây dựng tổ quốc Việt Nam hòa bình, công chính, dân chủ, vững bền, giàu mạnh, sánh vai cùng các nước Xã hội Chủ nghĩa trong khu vực và trên thế giới, như đất nước Cu Ba, Liên Bang Nga, Cộng hòa Hồi giáo Iran, CHDCND Triều Tiên, hay ít nhất là CHND Trung Hoa láng giềng chẳng hạn.

Facebook Vị Xuyên – Ác Liệt.
Thủ đô Hà Nội, ngày 17 tháng 02 năm 2015.

-----HẾT-----

III. MỘT SỐ TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 8.*
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
2. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 9.*
Bùi Văn Tuyên; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
3. *Nâng cao và phát triển toán 8, tập 1 – tập 2.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2004.
4. *Nâng cao và phát triển toán 9, tập 1 – tập 2.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2005.
5. *Toán nâng cao Đại số 10.*
Nguyễn Huy Đoan; NXB Giáo dục Việt Nam; 1999.
6. *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Đại số 10.*
Nguyễn Huy Đoan; Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2006.
7. *Tài liệu chuyên toán: Đại số 10 – Bài tập Đại số 10.*
Đoàn Quỳnh – Doãn Minh Cường – Trần Nam Dũng – Đặng Hùng Thắng; NXB Giáo dục Việt Nam; 2010.
8. *Một số chuyên đề Đại số bồi dưỡng học sinh giỏi THPT.*
Nguyễn Văn Mậu – Nguyễn Văn Tiến và một số tác giả; NXB Giáo dục Việt Nam; 2009.
9. *Tuyển tập các bài toán hay và khó Đại số 9.*
Nguyễn Đức Tấn – Đặng Đức Trọng – Nguyễn Cao Huynh – Vũ Minh Nghĩa – Bùi Ruy Tân – Lương Anh Văn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
10. *Một số phương pháp chọn lọc giải các bài toán sơ cấp, tập 1 – tập 3.*
Phan Đức Chính – Phạm Văn Điều – Đỗ Văn Hà – Phạm Văn Hạp – Phạm Văn Hùng – Phạm Đăng Long – Nguyễn Văn Mậu – Đỗ Thanh Sơn – Lê Đình Thịnh; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 1997.
11. *Bài giảng chuyên sâu Toán THPT: Giải toán Đại số 10.*
Lê Hồng Đức – Nhóm Cụ Môn; NXB Hà Nội; 2011.
12. *Phương pháp giải phương trình và bất phương trình.*
Nguyễn Văn Mậu; NXB Giáo dục Việt Nam; 1994.
13. *Toán bồi dưỡng học sinh phổ thông trung học – quyển 1; Đại số.*
Hàn Liên Hải – Phan Huy Khải – Đào Ngọc Nam – Nguyễn Đạo Phương – Lê Tất Tôn – Đặng Quan Viễn; NXB Hà Nội; 1991.
14. *Phương trình và hệ phương trình không mẫu mực.*
Nguyễn Đức Tấn – Phan Ngọc Thảo; NXB Giáo dục Việt Nam; 1996.
15. *Chuyên đề bồi dưỡng Toán cấp ba; Đại số.*
Nguyễn Sinh Nguyên; NXB Đà Nẵng; 1997.
16. *Giải toán Đại số sơ cấp (Dùng cho học sinh 12 chuyên, luyện thi đại học).*
Trần Thành Minh – Vũ Thiện Căn – Võ Anh Dũng; NXB Giáo dục Việt Nam; 1995.
17. *Những dạng toán điển hình trong các kỳ thi tuyển sinh Đại học và Cao đẳng; Tập 1;2;3;4.*
Bùi Quang Trường; NXB Hà Nội; 2002.
18. *Ôn luyện thi môn Toán THPT theo chủ đề; Tập một: Đại số và lượng giác.*
Cung Thế Anh; NXB Giáo dục Việt Nam; 2011.
19. *Phương pháp giải toán trọng tâm.*
Phan Huy Khải; NXB Đại học Sư phạm; 2011.
20. *Các bài giảng luyện thi môn Toán; Tập 2.*
Đức Chính – Vũ Dương Thụy – Đào Tam – Lê Thống Nhất; NXB Giáo dục Việt Nam; 1993.
21. *500 Bài toán chọn lọc Đại số - Hình học 10.*
Lê Hoàng Phò; NXB Đại học Quốc gia Hà Nội; 2012.
22. *Tam thức bậc hai và ứng dụng.*

- Lê Sĩ Đồng – Lê Minh Tâm; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.
23. *Chuyên đề Bất đẳng thức và ứng dụng trong Đại số.*
Nguyễn Đức Tấn; NXB Giáo dục Việt nam; 2003.
24. *23 Chuyên đề giải 1001 bài toán sơ cấp ; Quyển 1.*
Nguyễn Văn Vĩnh – Nguyễn Đức Đồng
và một số đồng nghiệp (NKTH); NXB Giáo dục Việt Nam; 2002.
25. *Phương pháp giải toán bất đẳng thức và cực trị.*
Nguyễn Văn Dũng – Võ Quốc Bá Cẩn – Trần Quốc Anh; NXB ĐHQG Hà Nội; 2011.
26. *Các bài giảng về bất đẳng thức Cauchy.*
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2008.
27. *Cẩm nang luyện thi Đại học Ứng dụng hàm số Giải toán Đại số và Giải tích.*
Huỳnh Nguyễn Luân Lưu – Nguyễn Thị Duy An; NXB ĐHQG Hà Nội ;2014.
28. *Tư duy logic tìm tòi lời giải Hệ phương trình.*
Mai Xuân Vinh – Phạm Kim Chung – Phạm Chí Tuấn
– Đào Văn Chung – Dương Văn Sơn ; NXB ĐHQG Hà Nội; 2015.
29. *Bồi dưỡng học sinh giỏi toán Trung học cơ sở, Đại số.*
Nguyễn Thị Thanh Thủy – Phạm Minh Phương
– Trần Văn Tấn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2014.
30. *9 Chuyên đề Đại số Trung học cơ sở.*
Vũ Hữu Bình; NXB Giáo dục Việt Nam; 2014.
31. *Hệ phương trình và phương trình chứa căn thức.*
Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng; NXB ĐHQG Hà Nội; 2006.
32. *Tam thức bậc hai và ứng dụng.*
Lê Sĩ Đồng – Lê Minh Tâm; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.
33. *Chuyên đề Bất đẳng thức và ứng dụng trong Đại số.*
Nguyễn Đức Tấn; NXB Giáo dục Việt Nam; 2003.
34. *Ôn thi vào lớp 10 THPT Chuyên; Môn Toán.*
Doãn Minh Cường – Trịnh Hoài Dương
– Trần Văn Khải – Đỗ Thanh Sơn ; NXB Giáo dục Việt Nam ; 2013.
35. *Tài liệu chuyên toán THCS; Toán 9; Tập 1: Đại số.*
Vũ Hữu Bình – Phạm Thị Bạch Ngọc – Đàm Văn Nhĩ ; NXB Giáo dục Việt Nam ; 2012.
36. *Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT Chuyên trực thuộc đại học và THPT Chuyên các tỉnh thành.*
37. *Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 hệ THPT hệ đại trà các địa phương trên toàn quốc.*
38. *Đề thi học sinh giỏi môn toán khối 8 đến khối 12 các cấp.*
39. *Đề thi tuyển sinh Đại học – Cao đẳng môn Toán (chính thức – dự bị) qua các thời kỳ.*
40. *Đề thi Olympic 30 tháng 4 Toán học khối 10, khối 11 các tỉnh miền Trung và Nam bộ (1995 – 2013).*
41. *Các tạp chí toán học:* Tạp chí Toán học và tuổi trẻ; Tạp chí Toán tuổi thơ 2 THCS; Tạp chí Kvant...
42. *Các diễn đàn toán học:* Boxmath.vn; Math.net.vn; Mathscope.org; Onluyentoan.vn; Diendantoanhoc.net; Math.net.vn; K2pi.net; Mathlink.ro;...
43. *Một số trang mạng học tập thông qua facebook; twiter;...*



THÂN THỂ TẠI NGỰC TRUNG
TINH THẦN TẠI NGỰC NGOẠI
DỤC THÀNH ĐẠI SỰ NGHIỆP
TINH THẦN CẢNH YẾU ĐẠI

TÀI LIỆU CHÍNH THỨC