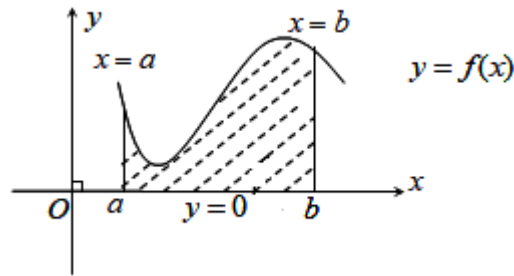


BÀI 3**ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN****1. Diện tích hình thang cong**

a. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$



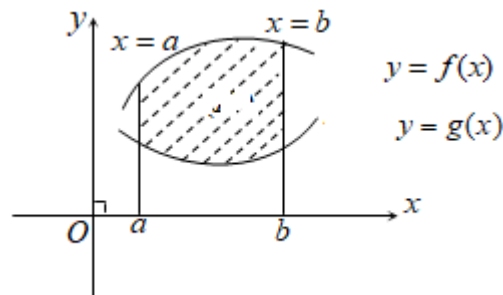
Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox ($y = 0$) và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ được tính bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

Chú ý: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a; b]$ thì:

$$\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

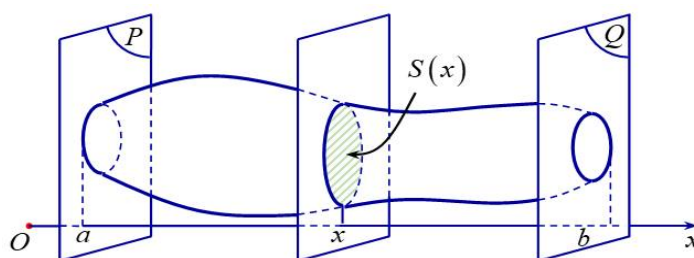
b. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$



Cho 2 hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ được tính bởi công thức:

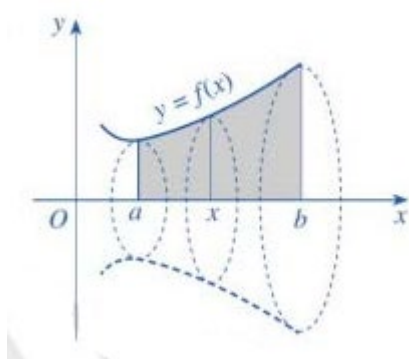
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

2. Thể tích hình khối

a. Thể tích của vật thể

Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b . Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x ($a \leq x \leq b$) cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$. Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$ thì thể tích của vật thể được tính bởi công thức:

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

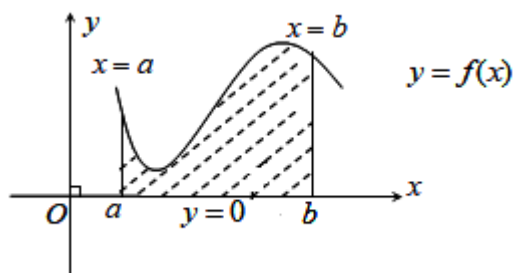
b. Thể tích khối tròn xoay

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $[a; b]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng:

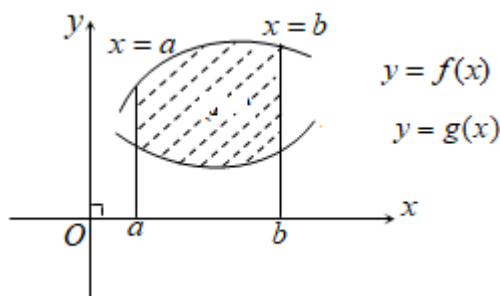
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

1. Dạng 1

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \Rightarrow S = \int_a^b |f(x)| dx$$

**2. Dạng 2**

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases} \Rightarrow S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

**Chú ý:**

- Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a; b]$ thì: $\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

- Khi đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số nằm dưới trục hoành thì mang giá trị âm, còn nằm trên trục hoành thì mang giá trị dương

DẠNG 1

TÍNH DIỆN TÍCH GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG CONG KHI BIẾT HÀM SỐ CÁC ĐƯỜNG CONG

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ bằng

A. $\left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$. B. $\int_a^b |f(x) + g(x)| dx$. C. $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$. D. $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

Câu 2. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \int_0^2 3^x dx$. B. $S = \pi \int_0^2 3^{2x} dx$. C. $S = \pi \int_0^2 3^x dx$. D. $S = \int_0^2 3^{2x} dx$.

Câu 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x - 2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{7}{3}$.

Câu 4. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1$, $x = -1$, $x = 2$ và trục hoành.

A. $S = 6$. B. $S = 16$. C. $S = \frac{13}{6}$. D. $S = 13$.

Câu 5. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 5$, $y = 6x$, $x = 0$, $x = 1$. Tính S .

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{7}{3}$ C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

Câu 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \ln x$, $y = 1$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = e$ bằng

A. e^2 . B. $e + 2$. C. $2e$. D. $e - 2$.

Câu 7. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 4x - x^2$, $y = 2x$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = e$ bằng

A. 4. B. $\frac{20}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{16}{3}$

Câu 8. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -10$, $x = 10$.

A. $S = \frac{2000}{3}$. B. $S = 2008$. C. $S = 2000$. D. $S = \frac{2008}{3}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 9. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $S = \int_0^2 2^x dx$

B. $S = \frac{3}{\ln 2}$

C. $S = \pi \int_0^2 2^x dx$

D. $S = \frac{3\pi}{\ln 2}$

Câu 10. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $S = \int_0^2 e^x dx$

B. $S = e^2$

C. $S = \pi \int_0^2 e^x dx$

D. $S = (e^2 - 1)\pi$

Câu 11. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

A. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, $y = 2x$, $x = 0$, $x = 1$ là $\frac{4}{3}$.

B. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = 2x^2 - 4x + 1$, $x = 0$, $x = 2$ là 4.

C. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$, trục hoành, $x = 0$, $x = 1$ là $2\ln 2 - 1$.

D. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^3 + 12x$, $y = -x^2$, $x = -3$, $x = 4$ là $\frac{937}{12}$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 12. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + x - 1$, $y = x^4 + x - 1$, $x = -1$, $x = 1$.

Trả lời:

Câu 13. Kí hiệu $S(t)$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = t$ ($t > 1$). Tìm t để $S(t) = 10$.

Trả lời:

Câu 14. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my = x^2$, $mx = y^2$ ($m > 0$). Tìm giá trị của m để $S = 3$.

Trả lời:

Câu 15. Giá trị dương của tham số m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 2x + 3$ và các đường thẳng $y = 0$, $x = 0$, $x = m$ bằng 10 là bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 7 - 4x^3 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - x^2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm

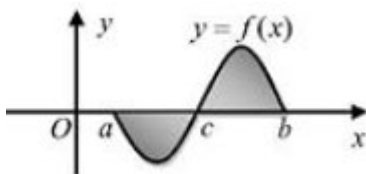
số $f(x)$ và các đường thẳng $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$.

Trả lời:

TÍNH DIỆN TÍCH GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG CONG KHI BIẾT ĐỒ THỊ HÀM SỐ CỦA CÁC ĐƯỜNG CONG

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 17. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = a, x = b$ (như hình vẽ bên). Hỏi cách tính S nào dưới đây đúng?



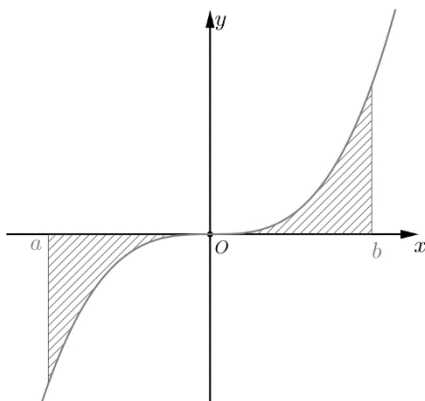
A. $S = \int_a^b f(x) dx$.

B. $S = \left| \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right|$.

C. $S = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

D. $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a, x = b$ (như hình vẽ dưới đây). Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D . đúng trong các phương án A, B, C, D cho dưới đây?



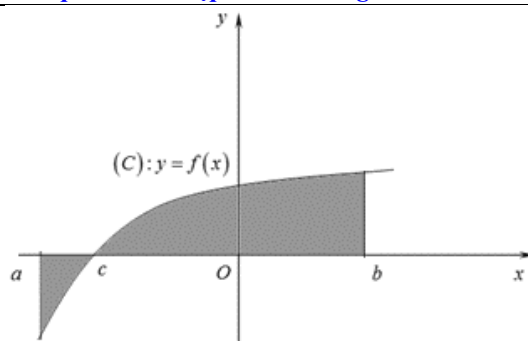
A. $S_D = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx$.

B. $S_D = -\int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx$.

C. $S_D = \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx$.

D. $S_D = -\int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx$.

Câu 19. Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$) (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức nào dưới đây ?



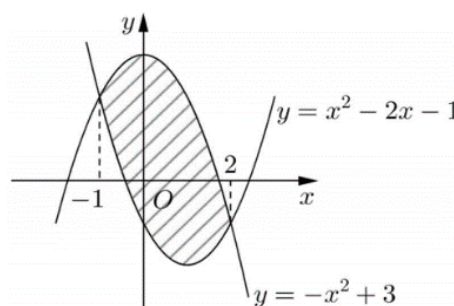
A. $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

B. $S = \int_a^b f(x) dx.$

C. $S = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

D. $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$

Câu 20. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



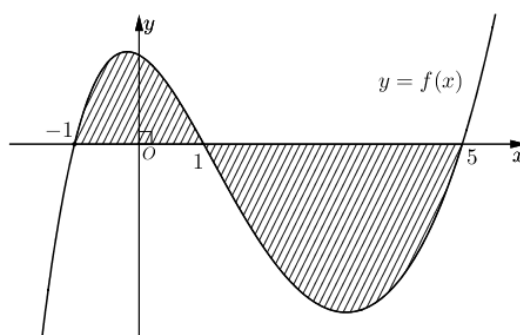
A. $\int_{-1}^2 (-2x + 2) dx$

B. $\int_{-1}^2 (2x - 2) dx$

C. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$

D. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = -1$ và $x = 5$ (như hình vẽ bên).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

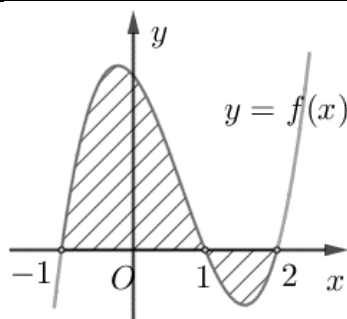
A. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^5 f(x) dx.$

B. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx.$

C. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^5 f(x) dx.$

D. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx.$

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = -1, x = 2$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$.

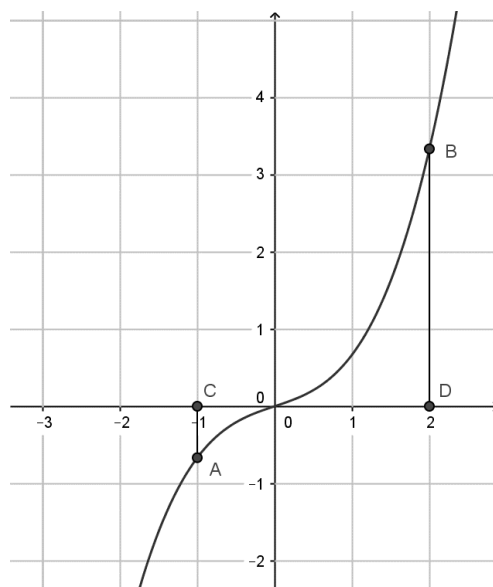
B. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$.

C. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$.

D. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$.

Câu 23. Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường

thẳng $x = -1$, $x = 2$. Đặt $a = \int_{-1}^0 f(x) dx$, $b = \int_0^2 f(x) dx$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S = b - a$

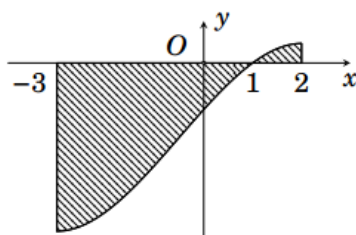
B. $S = b + a$

C. $S = -b + a$

D. $S = -b - a$

Câu 24. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng

$x = -3$, $x = 2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a = \int_{-3}^1 f(x) dx$, $b = \int_1^2 f(x) dx$. Mệnh đề nào sau đây là đúng.



A. $S = a + b$.

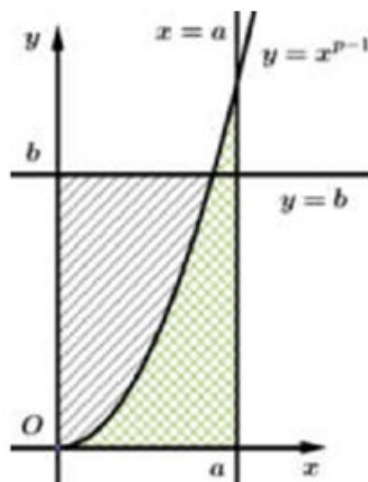
B. $S = a - b$.

C. $S = -a - b$.

D. $S = b - a$.

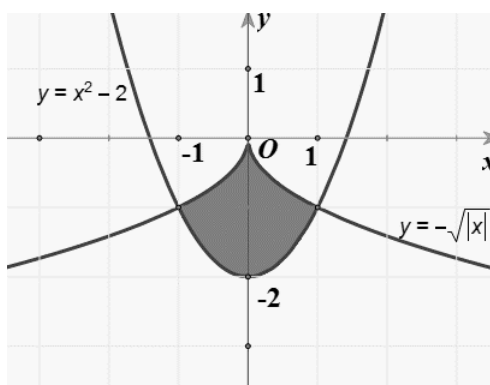
Câu 25. Cho các số p, q thỏa mãn các điều kiện: $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ và các số dương a, b . Xét hàm

số: $y = x^{p-1} (x > 0)$ có đồ thị là (C) . Gọi (S_1) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành, đường thẳng $x = a$, Gọi (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục tung, đường thẳng $y = b$, Gọi (S) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng $x = a, y = b$. Khi so sánh $S_1 + S_2$ và S ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?



- A. $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \leq ab$ B. $\frac{a^{p-1}}{p-1} + \frac{b^{q-1}}{q-1} \geq ab$ C. $\frac{a^{p+1}}{p+1} + \frac{b^{q+1}}{q+1} \leq ab$ D. $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$.

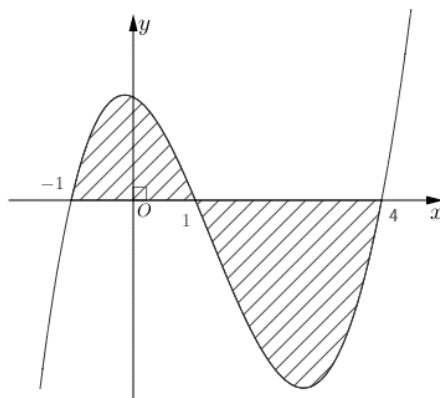
Câu 26. Diện tích phần hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



- A. $\int_{-1}^1 (x^2 - 2 + \sqrt{|x|}) dx$ B. $\int_{-1}^1 (x^2 - 2 - \sqrt{|x|}) dx$ C. $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2 + \sqrt{|x|}) dx$ D. $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2 - \sqrt{|x|}) dx$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 4$ (như hình vẽ bên). Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?



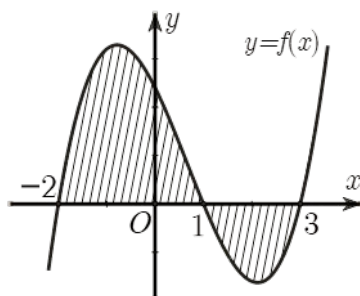
A. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx$.

B. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$.

C. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx$.

D. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -2$ và $x = 3$ (như hình vẽ). Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?



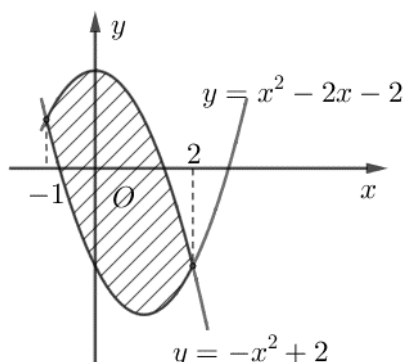
A. $S = -\int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx$.

B. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx$.

C. $S = -\int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx$.

D. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx$.

Câu 29. Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới được giới hạn các đồ thị.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

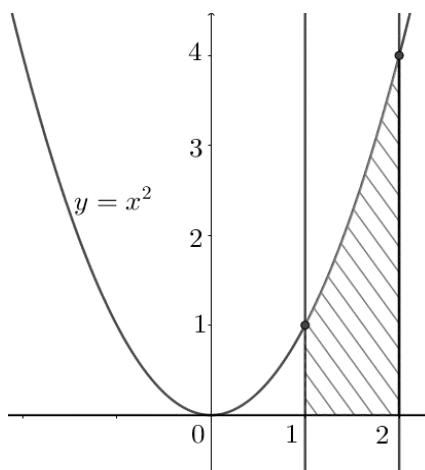
A. Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2 - 2x - 2$, $y = -x^2 + 2$, $x = -1, x = 2$.

B. Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$

C. Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_{-1}^2 |-2x^2 + 2x + 4| dx$

D. Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2 - 2x - 2$, $y = -x^2 + 2$, $x = 0, x = 2$.

Câu 30. Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới được giới hạn các đồ thị.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

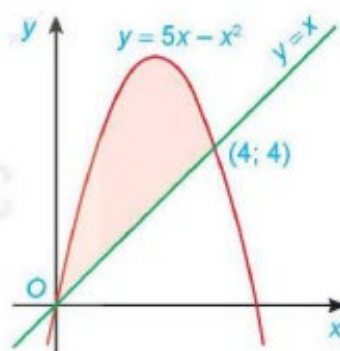
A. Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 2$.

B. Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $\int_1^2 x^2 dx$.

C. Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bằng $\frac{4}{3}$.

D. Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 2$.

Câu 31. Cho hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

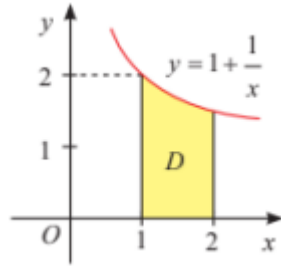
A. Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = 5x - x^2$; $y = x$; $x = 0$; $x = 4$.

B. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\int_1^4 (x^2 - 4x) dx$.

C. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\int_1^4 (-x^2 + 4x) dx$.

D. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\int_4^1 (x^2 - 4x) dx$.

Câu 32. Cho hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

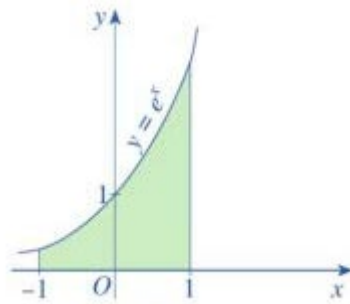
A. Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = 1 + \frac{1}{x}$; $x = 0$; $x = 1$; $x = 4$.

B. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$.

C. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ bằng $S = 1 + \ln 2$.

D. Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = 1 + \frac{1}{x}$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 4$.

Câu 33. Cho hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

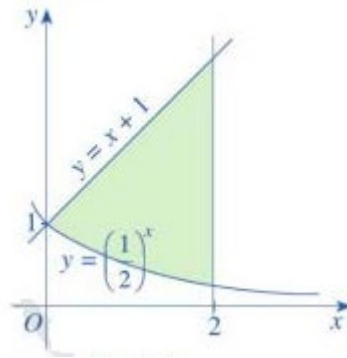
A. Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = e^x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$.

B. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\int_{-1}^1 e^x dx$.

C. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ bằng $\int_0^1 e^x dx$.

D. Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = e^x$; $y = 0$; $x = -1$; $x = 1$.

Câu 34. Cho hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

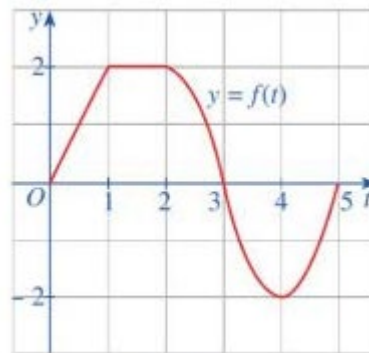
A. Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x + 1$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $x = 0$; $x = 2$.

B. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\int_0^2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x - x - 1 \right] dx$.

C. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ bằng $S = 4 - \frac{3}{4 \ln 2}$.

D. Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x + 1$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $x = 1$; $x = 2$.

Câu 35. Cho đồ thị hàm số $y = f(t)$ như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

A. Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng là: $t = 0$; $t = 1$ là $S = \frac{1}{2} \int_0^1 t dt = \frac{1}{4}$.

B. Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng là: $t = 1$; $t = 2$ là $S = \int_1^2 2 dt = 2$.

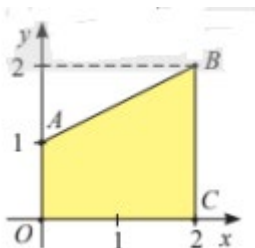
C. Tích phân $\int_2^3 f(x) dx$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng là: $t = 2$; $t = 3$.

D. Tích phân $\int_3^5 f(x)dx$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số

$y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng là: $t = 3; t = 5$.

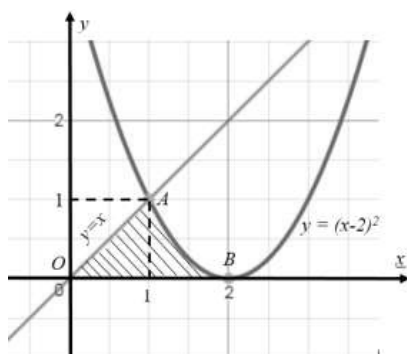
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 36. Tính diện tích hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.



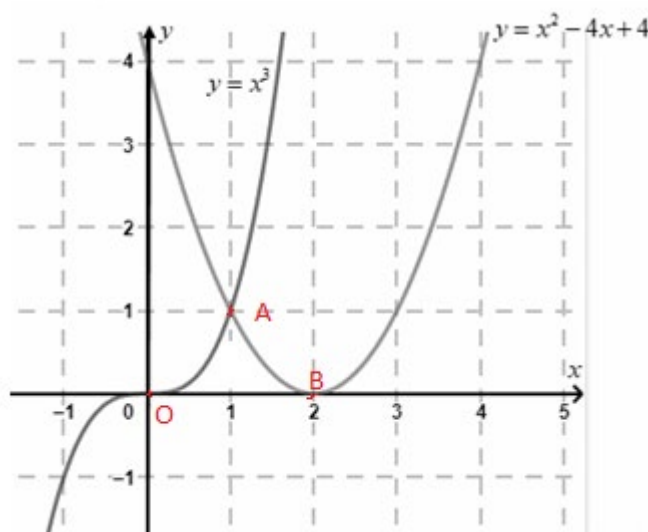
Trả lời:

Câu 37. Tính diện tích phần hình phẳng gạch chéo (tam giác cong OAB) trong hình vẽ bên.



Trả lời:

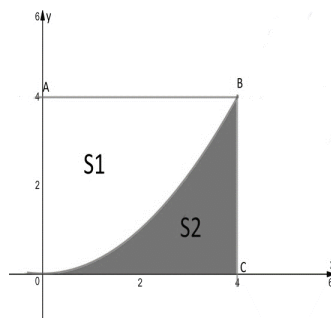
Câu 38. Tính diện tích phần hình phẳng là tam giác cong OAB trong hình vẽ bên.



Trả lời:

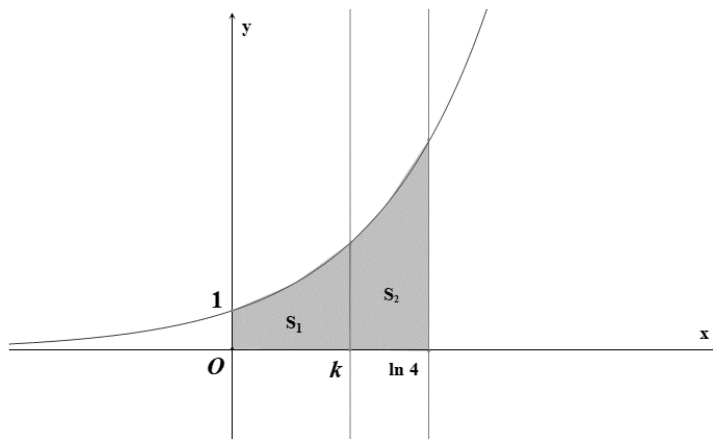
Câu 39. Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và bị gạch như hình vẽ bên dưới.

Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng bao nhiêu?



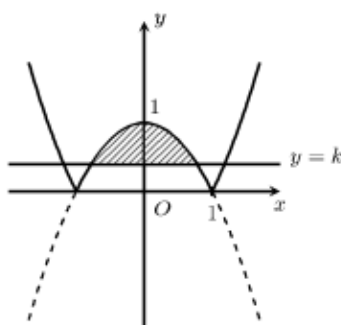
Trả lời:

Câu 40. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.

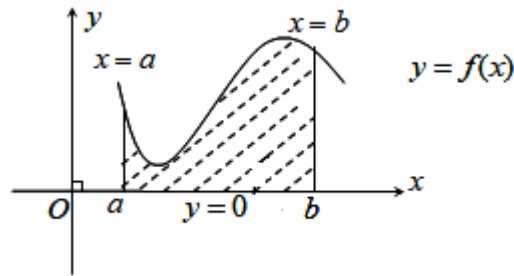


Trả lời:

Câu 41. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 1|$ và $y = k$, với $0 < k < 1$. Tìm k để diện tích hình phẳng (H) gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc ở hình vẽ bên.



Trả lời:

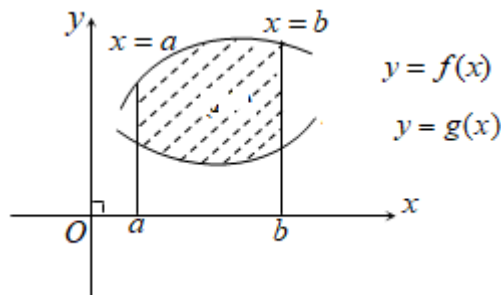
BÀI 3**ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN****1. Diện tích hình thang cong****a. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$** 

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox ($y = 0$) và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ được tính bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

Chú ý: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a; b]$ thì:

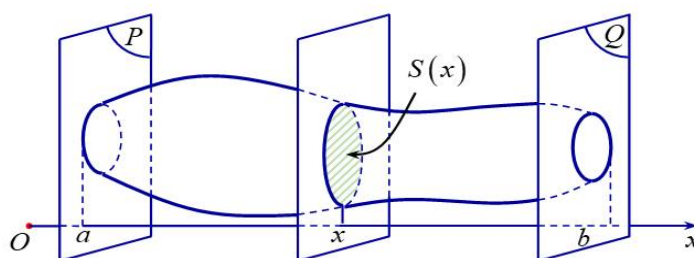
$$\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

b. Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ 

Cho 2 hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Khi đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ được tính bởi công thức:

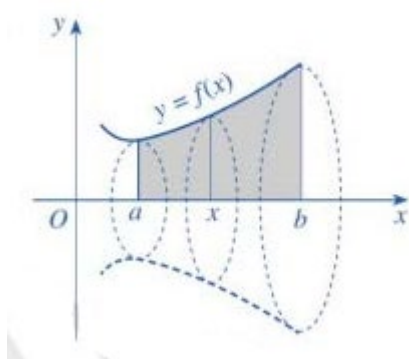
$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

2. Thể tích hình khối

a. Thể tích của vật thể

Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b . Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x ($a \leq x \leq b$) cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$. Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$ thì thể tích của vật thể được tính bởi công thức:

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

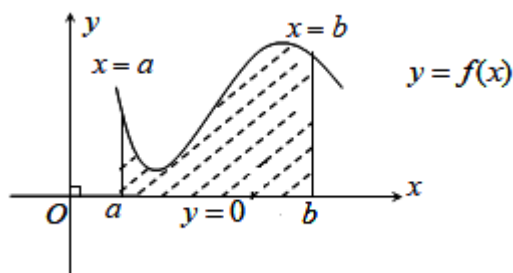
b. Thể tích khối tròn xoay

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $[a; b]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng:

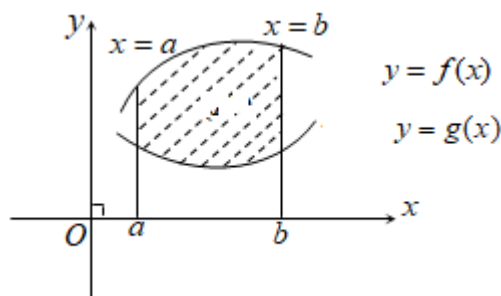
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

1. Dạng 1

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \Rightarrow S = \int_a^b |f(x)| dx$$

**2. Dạng 2**

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases} \Rightarrow S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

**Chú ý:**

- Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a; b]$ thì: $\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$
- Khi đó diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số nằm dưới trục hoành thì mang giá trị âm, còn nằm trên trục hoành thì mang giá trị dương

DẠNG 1

TÍNH DIỆN TÍCH GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG CONG KHI BIẾT HÀM SỐ CÁC ĐƯỜNG CONG

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ bằng

A. $\left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$. **B.** $\int_a^b |f(x) + g(x)| dx$. **C.** $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$. **D.** $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

Lời giải**Chọn C.**

Theo lý thuyết thì diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Câu 2. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = \int_0^2 3^x dx$. **B.** $S = \pi \int_0^2 3^{2x} dx$. **C.** $S = \pi \int_0^2 3^x dx$. **D.** $S = \int_0^2 3^{2x} dx$.

Lời giải**Chọn A.**

Diện tích hình phẳng đã cho được tính bởi công thức $S = \int_0^2 3^x dx$

Câu 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x - 2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải**Chọn A.**

Ta có: $S = \int_1^2 |(x - 2)^2 - 1| dx = \int_1^2 |x^2 - 4x + 3| dx = \left| \int_1^2 (x^2 - 4x + 3) dx \right| = \frac{2}{3}$.

Câu 4. Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1$, $x = -1$, $x = 2$ và trục hoành.

A. $S = 6$. **B.** $S = 16$. **C.** $S = \frac{13}{6}$. **D.** $S = 13$.

Lời giải**Chọn A.**

Ta có: $S = \int_{-1}^2 |x^2 + 1| dx = \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx = 6$.

Câu 5. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 5$, $y = 6x$, $x = 0$, $x = 1$. Tính S .

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{7}{3}$

C. $\frac{8}{3}$

D. $\frac{5}{3}$

Lời giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + 5 = 6x \Leftrightarrow x = 5; x = 1$.Diện tích hình phẳng cần tìm: $S = \int_0^1 |x^2 - 6x + 5| dx = \frac{7}{3}$.**Câu 6.** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \ln x$, $y = 1$ và hai đường thẳng $x = 1, x = e$ bằng

A. e^2 .

B. $e + 2$.

C. $2e$.

D. $e - 2$.

Lời giải

Chọn D.

$$S = \int_1^e |\ln x - 1| dx = \left| \int_1^e (\ln x - 1) dx \right| = \left| x(\ln x - 1) \Big|_1^e - \int_1^e dx \right| = |1 - x|_1^e = |1 - (e - 1)| = |2 - e| = e - 2$$

Câu 7. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 4x - x^2$, $y = 2x$ và hai đường thẳng $x = 1, x = e$ bằng

A. 4.

B. $\frac{20}{3}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{16}{3}$

Lời giải

Chọn C.

$$\text{diện tích hình phẳng cần tìm là } S = \int_0^2 |x^2 - 2x| dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Câu 8. Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -10$, $x = 10$.

A. $S = \frac{2000}{3}$.

B. $S = 2008$.

C. $S = 2000$.

D. $S = \frac{2008}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $(C): y = x^2 - 2x$ và $(d): y = 0$ là:

$$x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
VT	+	0	-	0	+

Diện tích cần tìm:

$$S = \int_{-10}^{10} |x^2 - 2x| dx = \int_{-10}^0 (x^2 - 2x) dx - \int_0^2 (x^2 - 2x) dx + \int_2^{10} (x^2 - 2x) dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-10}^0 - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_2^{10} = \frac{1300}{3} + \frac{4}{3} + \frac{704}{3} = \frac{2008}{3}.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 9. Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $S = \int_0^2 2^x dx$

B. $S = \frac{3}{\ln 2}$

C. $S = \pi \int_0^2 2^x dx$

D. $S = \frac{3\pi}{\ln 2}$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

$$S = \int_0^2 |2^x| dx = \int_0^2 2^x dx = \frac{3}{\ln 2} \text{ (do } 2^x > 0, \forall x \in [0; 2]).$$

Câu 10. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $S = \int_0^2 e^x dx$

B. $S = e^2$

C. $S = \pi \int_0^2 e^x dx$

D. $S = (e^2 - 1)\pi$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	SAI

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ là:

$$S = \int_0^2 e^x dx = e^2 - 1.$$

Câu 11. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

A. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, $y = 2x$, $x = 0, x = 1$ là $\frac{4}{3}$.

B. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = 2x^2 - 4x + 1$, $x = 0, x = 2$ là 4.

C. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$, trục hoành, $x = 0, x = 1$ là $2\ln 2 - 1$.

D. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^3 + 12x$, $y = -x^2$, $x = -3, x = 4$ là $\frac{937}{12}$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$, $y = 2x$, $x = 0, x = 1$ là

$$S = \int_0^1 |x^2 - x| dx = \left| \int_0^1 (x^2 - x) dx \right| = \frac{4}{3}$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = 2x^2 - 4x + 1$, $x = 0, x = 2$ là

$$\int_0^2 |2x^2 - 4x + 1 - (-x^2 + 2x + 1)| dx = \int_0^2 |3x^2 - 6x| dx = \int_0^2 (6x - 3x^2) dx = (3x^2 - x^3) \Big|_0^2 = 4.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$, trục hoành, $x = 0, x = 1$ là

$$S = \int_0^1 \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx = \left| \int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+1} \right) dx \right| = \left| \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+1} \right) dx \right| = \left| (x - 2 \ln|x+1|) \Big|_0^1 \right| = 2 \ln 2 - 1.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^3 + 12x$, $y = -x^2$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^4 |x^3 - x^2 - 12x| dx = \int_{-3}^0 |x^3 - x^2 - 12x| dx + \int_0^4 |x^3 - x^2 - 12x| dx \\ &= \left| \int_{-3}^0 (x^3 - x^2 - 12x) dx \right| + \left| \int_0^4 (x^3 - x^2 - 12x) dx \right| = \left| \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6x^2 \right) \Big|_{-3}^0 \right| + \left| \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6x^2 \right) \Big|_0^4 \right| \\ &= \left| \frac{-99}{4} \right| + \left| \frac{-160}{3} \right| = \frac{937}{12}. \end{aligned}$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 12. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + x - 1$, $y = x^4 + x - 1$, $x = -1, x = 1$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{4}{15}$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 + x - 1$, $y = x^4 + x - 1$, $x = -1, x = 1$ là

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 |x^2 - x^4| dx = \int_{-1}^0 |x^2 - x^4| dx + \int_0^1 |x^2 - x^4| dx \\ &= \left| \int_{-1}^0 (x^2 - x^4) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^0 \right| + \left| \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 \right| = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

Câu 13. Kí hiệu $S(t)$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x+1$, $y=0$, $x=1$, $x=t$ ($t>1$). Tìm t để $S(t)=10$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $t=3$

Cách 1. Ta có: $S(t) = \int_1^t |2x+1| dx = \int_1^t (2x+1) dx$.

Suy ra $S(t) = (x^2 + x) \Big|_1^t = t^2 + t - 2$.

Do đó $S(t)=10 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 10 \Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=-4 \end{cases} (L)$.

Vậy $t=3$.

Cách 2. Hình phẳng đã cho là hình thang có đáy nhỏ bằng $y(1)=3$, đáy lớn bằng $y(t)=2t+1$ và chiều cao bằng $t-1$.

Ta có $\frac{(3+2t+1)(t-1)}{2} = 10 \Leftrightarrow 2t^2 + 2t - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=-4 \end{cases}$. Vì $t>1$ nên $t=3$

Câu 14. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my=x^2$, $mx=y^2$ ($m>0$). Tìm giá trị của m để $S=3$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $m=3$

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} my=x^2 & (1) \\ mx=y^2 & (2) \end{cases}$

Thế (1) vào (2) ta được: $mx = \left(\frac{x^2}{m}\right)^2 \Leftrightarrow m^3x - x^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=m > 0 \end{cases}$

Vì $y = \frac{x^2}{m} > 0$ nên $mx = y^2 \xrightarrow{y>0} y = \sqrt{mx}$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là: $S = \int_0^m \left| \sqrt{mx} - \frac{x^2}{m} \right| dx = \left| \int_0^m \left(\sqrt{mx} - \frac{x^2}{m} \right) dx \right|$

$= \left| \left(\frac{2\sqrt{m}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3m} \right) \Big|_0^m \right| = \left| \frac{1}{3} m^2 \right| = \frac{1}{3} m^2$

Yêu cầu bài toán $S=3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} m^2 = 3 \Leftrightarrow m^2 = 9 \xrightarrow{m>0} m=3$

Câu 15. Giá trị dương của tham số m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=2x+3$ và các đường thẳng $y=0, x=0, x=m$ bằng 10 là bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải**Đáp án:** $m = 2$ Vì $m > 0$ nên $2x + 3 > 0, \forall x \in [0; m]$.Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2x + 3$ và các đường thẳng $y = 0, x = 0, x = m$ là:

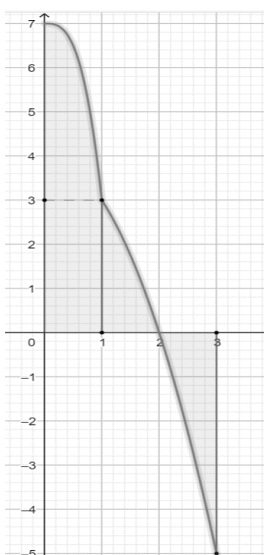
$$S = \int_0^m (2x + 3) \cdot dx = (x^2 + 3x) \Big|_0^m = m^2 + 3m.$$

Theo giả thiết ta có:

$$S = 10 \Leftrightarrow m^2 + 3m = 10 \Leftrightarrow m^2 + 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2 \text{ (do } m > 0 \text{)}.$$

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 7 - 4x^3 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - x^2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàmsố $f(x)$ và các đường thẳng $x = 0, x = 3, y = 0$.

Trả lời:

Lời giải**Đáp án:** 10

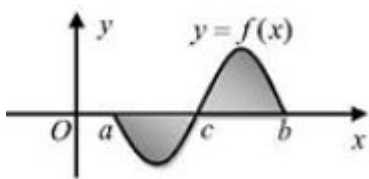
$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (7 - 4x^3) dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx + \int_2^3 (x^2 - 4) dx \\ &= (7x - x^4) \Big|_0^1 + \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_2^3 = 6 + 4 - \frac{7}{3} - 3 - \frac{8}{3} + 8 = 10. \end{aligned}$$

DẠNG 2

TÍNH DIỆN TÍCH GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG CONG KHI BIẾT ĐỒ THỊ HÀM SỐ CỦA CÁC ĐƯỜNG CONG

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 17. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = a, x = b$ (như hình vẽ bên). Hỏi cách tính S nào dưới đây đúng?



A. $S = \int_a^b f(x) dx$.

B. $S = \left| \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right|$.

C. $S = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

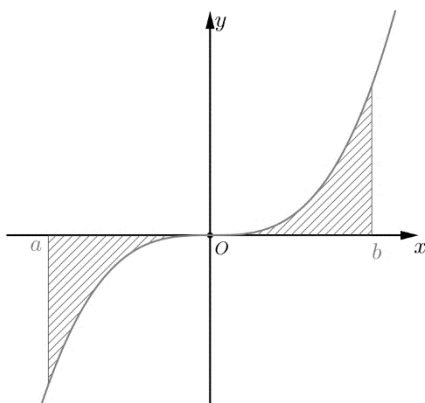
D. $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Lời giải

Chọn B.

$$S = \left| \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right|$$

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a, x = b$ (như hình vẽ dưới đây). Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D . đúng trong các phương án A, B, C, D cho dưới đây?



A. $S_D = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx$.

B. $S_D = -\int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx$.

C. $S_D = \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx$.

D. $S_D = -\int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx$.

Lời giải

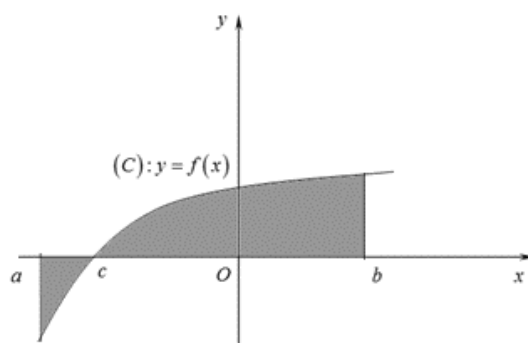
Chọn B.

Ta có $S_D = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^0 |f(x)| dx + \int_0^b |f(x)| dx$.

Vì $f(x) \leq 0, \forall x \in [a; 0], f(x) \geq 0, \forall x \in [0; b]$ nên:

$$S_D = \int_a^0 (-f(x)) dx + \int_0^b f(x) dx = -\int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$$

Câu 19. Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$) (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức nào dưới đây ?



A. $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

B. $S = \int_a^b f(x) dx.$

C. $S = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$

D. $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$

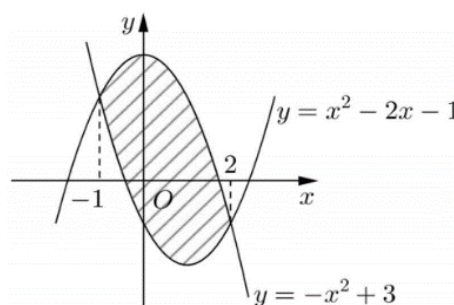
Lời giải

Chọn C.

Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng

$$x = a, x = b \text{ là } S = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b |f(x)| dx = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Câu 20. Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^2 (-2x + 2) dx$

B. $\int_{-1}^2 (2x - 2) dx$

C. $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$

D. $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx$

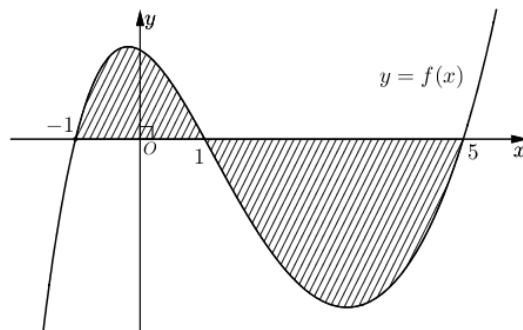
Lời giải

Chọn C.

Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là:

$$S = \int_{-1}^2 |(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1)| dx = \int_{-1}^2 |-2x^2 + 2x + 4| dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$$

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 5$ (như hình vẽ bên).



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^5 f(x)dx.$

B. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx.$

C. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^5 f(x)dx.$

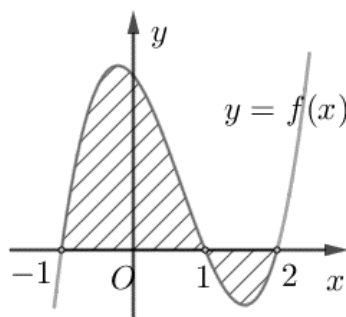
D. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $S = \int_{-1}^1 |f(x)|dx + \int_1^5 |f(x)|dx = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^5 f(x)dx.$

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx.$

B. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx.$

C. $S = -\int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx.$

D. $S = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx.$

Lời giải

Chọn D.

$$S = \int_{-1}^2 |f(x)|dx = \int_{-1}^1 |f(x)|dx + \int_1^2 |f(x)|dx$$

Nhìn hình ta thấy hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[-1; 1]$ nên

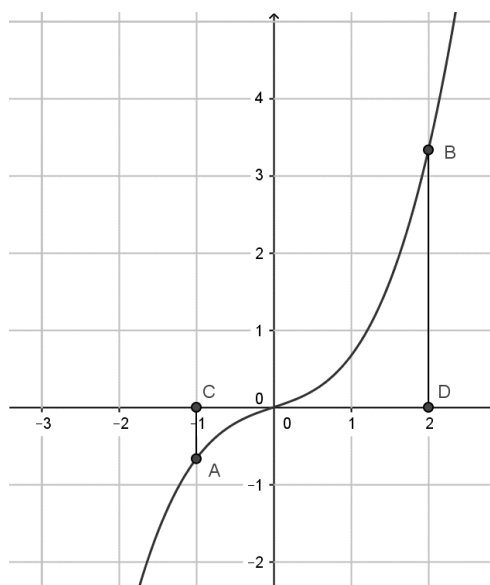
$$\int_{-1}^1 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 f(x) dx ; \text{ hàm số } f(x) \text{ liên tục và nhận giá trị âm trên đoạn } [1; 2] \text{ nên}$$

$$\int_1^2 |f(x)| dx = -\int_1^2 f(x) dx$$

$$\text{Vậy } S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx$$

Câu 23. Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường

thẳng $x = -1$, $x = 2$. Đặt $a = \int_{-1}^0 f(x) dx$, $b = \int_0^2 f(x) dx$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S = b - a$

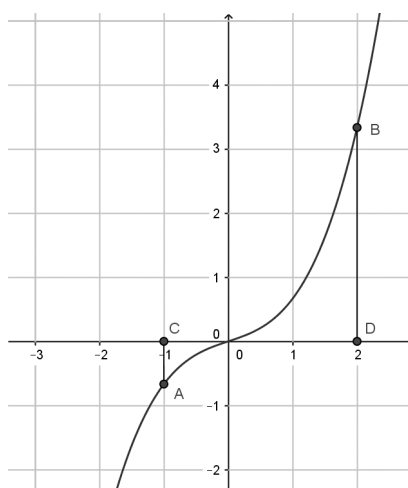
B. $S = b + a$

C. $S = -b + a$

D. $S = -b - a$

Lời giải

Chọn A.

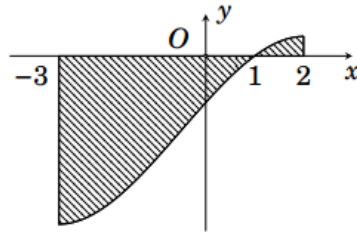


Ta có:

$$S = \int_{-1}^2 |f(x)| dx = \int_{-1}^0 |f(x)| dx + \int_0^2 |f(x)| dx = -\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = -a + b.$$

Câu 24. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng

$x = -3$, $x = 2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a = \int_{-3}^1 f(x) dx$, $b = \int_1^2 f(x) dx$. Mệnh đề nào sau đây là đúng.



A. $S = a + b$.

B. $S = a - b$.

C. $S = -a - b$.

D. $S = b - a$.

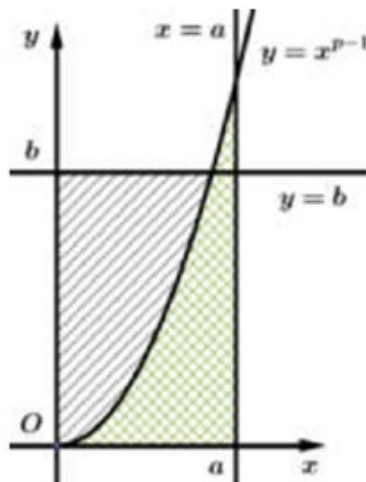
Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } S = \int_{-3}^2 |f(x)| dx = \int_{-3}^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx = -\int_{-3}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = -a + b.$$

Câu 25. Cho các số p, q thỏa mãn các điều kiện: $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ và các số dương a, b . Xét hàm

số: $y = x^{p-1}$ ($x > 0$) có đồ thị là (C) . Gọi (S_1) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành, đường thẳng $x = a$, Gọi (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục tung, đường thẳng $y = b$, Gọi (S) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng $x = a$, $y = b$. Khi so sánh $S_1 + S_2$ và S ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?



A. $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \leq ab$

B. $\frac{a^{p-1}}{p-1} + \frac{b^{q-1}}{q-1} \geq ab$.

C. $\frac{a^{p+1}}{p+1} + \frac{b^{q+1}}{q+1} \leq ab$.

D. $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$.

Lời giải

Chọn D.

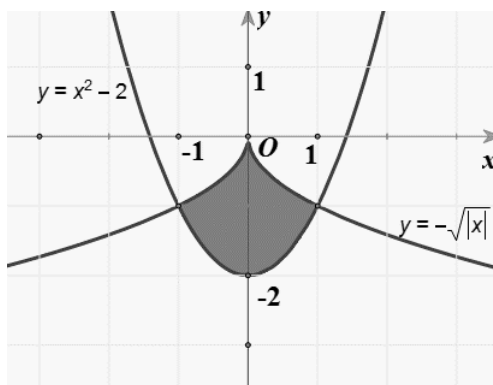
Ta có: $S \leq S_1 + S_2$.

$$S_1 = \int_0^a (x^{p-1}) dx = \left(\frac{x^p}{p} \right) \Big|_0^a = \frac{a^p}{p};$$

$$S_2 = \int_0^b \left(y^{\frac{1}{p-1}} \right) dy = \left(\frac{y^{\frac{1}{p-1}+1}}{\frac{1}{p-1}+1} \right) \bigg|_0^b = \left(\frac{y^q}{q} \right) \bigg|_0^b = \frac{b^q}{q}.$$

Vì: $\frac{1}{p-1}+1 = \frac{p}{p-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{q}} = q$. Vậy $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$.

Câu 26. Diện tích phần hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^1 (x^2 - 2 + \sqrt{|x|}) dx$.

B. $\int_{-1}^1 (x^2 - 2 - \sqrt{|x|}) dx$.

C. $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2 + \sqrt{|x|}) dx$.

D. $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2 - \sqrt{|x|}) dx$.

Lời giải

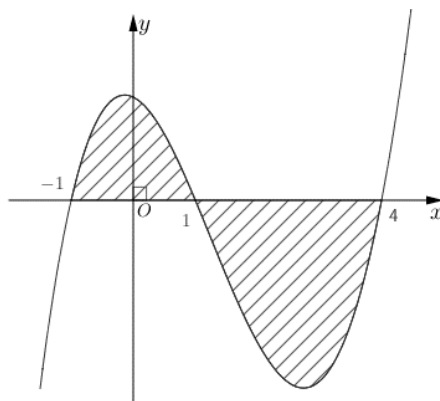
Chọn D.

Diện tích hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên là:

$$\int_{-1}^1 \left| x^2 - 2 - (-\sqrt{|x|}) \right| dx = \int_{-1}^1 (-\sqrt{|x|} - x^2 + 2) dx \quad (\text{vì } x \in [-1; 1] \Rightarrow -\sqrt{|x|} > x^2 - 2).$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 4$ (như hình vẽ bên). Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?



A. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx$.

B. $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$.

C. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx$.

D. $S = -\int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx$.

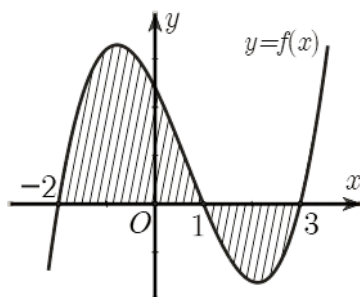
Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	SAI

Ta có: hàm số $f(x) \geq 0 \forall x \in [-1; 1]$; $f(x) \leq 0 \forall x \in [1; 4]$, nên:

$$S = \int_{-1}^4 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 |f(x)| dx + \int_1^4 |f(x)| dx = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx.$$

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -2$ và $x = 3$ (như hình vẽ). Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?



A. $S = -\int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx$.

B. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx$.

C. $S = -\int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx$.

D. $S = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx$.

Lời giải

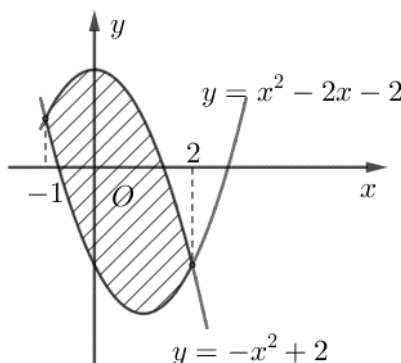
A.	B.	C.	D.
----	----	----	----

SAI	ĐÚNG	SAI	SAI
-----	------	-----	-----

Ta có $S = \int_{-2}^3 |f(x)| dx = S = \int_{-2}^1 |f(x)| dx + \int_1^3 |f(x)| dx.$

Do $f(x) \geq 0$ với $\forall x \in [-2; 1]$ và $f(x) \leq 0$ với $\forall x \in [1; 3]$ nên $S = \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx.$

Câu 29. Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

A. Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2 - 2x - 2$, $y = -x^2 + 2$, $x = -1, x = 2$.

B. Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx$.

C. Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $S = \int_{-1}^2 |2x^2 - 2x - 4| dx$.

D. Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2 - 2x - 2$, $y = -x^2 + 2$, $x = 0, x = 2$.

Lời giải

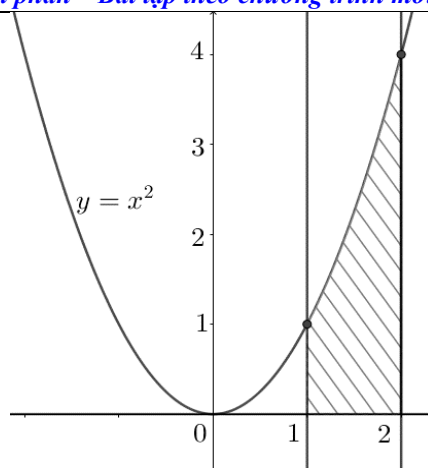
A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2 - 2x - 2$, $y = -x^2 + 2$, $x = -1, x = 2$.

Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là:

$$S = \int_{-1}^2 [(-x^2 + 2) - (x^2 - 2x - 2)] dx = \int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$$

Câu 30. Cho hình phẳng được gạch chéo trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

A. Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 2$.

B. Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ là $\int_1^2 x^2 dx$.

C. Diện tích hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bằng $\frac{4}{3}$.

D. Hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 2$.

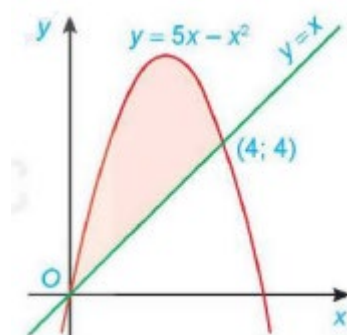
Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x^2$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 2$.

Ta có $S = \int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}$.

Câu 31. Cho hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

A. Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = 5x - x^2$; $y = x$; $x = 0$; $x = 4$.

B. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\int_1^4 (x^2 - 4x) dx$.

C. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\int_1^4 (-x^2 + 4x) dx$.

D. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\int_4^1 (x^2 - 4x) dx$.

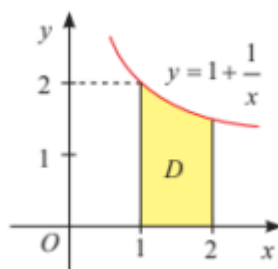
Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	ĐÚNG

Diện tích hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = 5x - x^2$; $y = x$; $x = 0$; $x = 4$.

$$\text{Ta có } S = \int_1^4 (5x - x^2 - x) dx = \int_1^4 (4x - x^2) dx$$

Câu 32. Cho hình phẳng (D) được tô màu trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

A. Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = 1 + \frac{1}{x}$; $x = 0$; $x = 1$; $x = 4$.

B. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$.

C. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ bằng $S = 1 + \ln 2$.

D. Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = 1 + \frac{1}{x}$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 4$.

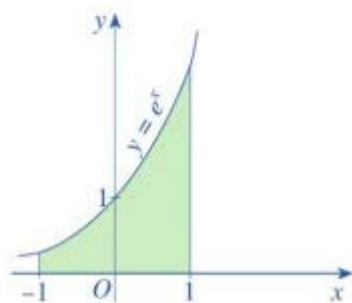
Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

Diện tích hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = 1 + \frac{1}{x}$; $x = 0$; $x = 1$; $x = 4$.

$$\text{Ta có } S = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = 1 + \ln 2$$

Câu 33. Cho hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

A. Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = e^x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$.

B. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\int_{-1}^1 e^x dx$.

C. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ bằng $\int_0^1 e^x dx$.

D. Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = e^x$; $y = 0$; $x = -1$; $x = 1$.

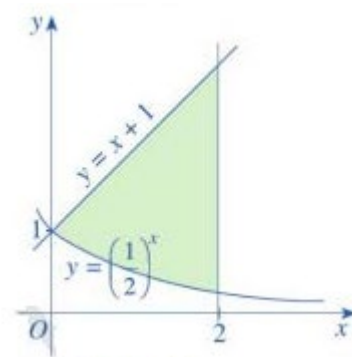
Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	SAI

Diện tích hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = e^x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$.

Ta có $S = \int_{-1}^1 e^x dx$

Câu 34. Cho hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

A. Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x + 1$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $x = 0$; $x = 2$.

B. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ là $\int_0^2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x - x - 1 \right] dx$.

C. Diện tích hình phẳng tô màu trong hình vẽ bằng $S = 4 - \frac{3}{4 \ln 2}$.

D. Hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị $y = x + 1$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $x = 1$; $x = 2$.

Lời giải

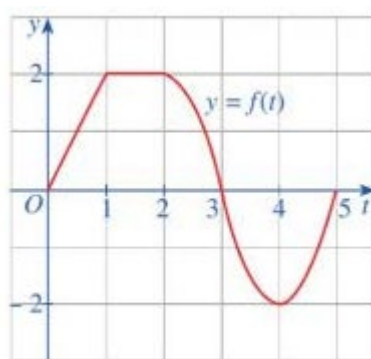
A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	ĐÚNG	SAI

Diện tích hình phẳng được tô màu trong hình trên được giới hạn các đồ thị

$$y = x + 1; y = \left(\frac{1}{2}\right)^x; x = 0; x = 2.$$

$$\text{Ta có } S = \int_0^2 \left[x + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \right] dx = \left(\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2^x \ln 2} \right) \Big|_0^2 = 4 - \frac{3}{4 \ln 2}$$

Câu 35. Cho đồ thị hàm số $y = f(t)$ như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

A. Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng

là: $t = 0$; $t = 1$ là $S = \frac{1}{2} \int_0^1 t dt = \frac{1}{4}$.

B. Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng

là: $t = 1$; $t = 2$ là $S = \int_1^2 2 dt = 2$.

C. Tích phân $\int_2^3 f(x) dx$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số

$y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng là: $t = 2$; $t = 3$.

D. Tích phân $\int_3^5 f(x) dx$ biểu thị cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ thị hàm số

$y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng là: $t = 3$; $t = 5$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

A. đồ thị hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[0;1]$ là $y = \frac{1}{2}t$. Do đó diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ

thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng là: $t = 0; t = 1$ là $S = \frac{1}{2} \int_0^1 t dt = \frac{1}{4}$.

B. Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng

là: $t = 1; t = 2$ là $y = 2, y = 0, t = 1; t = 2$ hay $S = \int_1^2 2 dt = 2$.

C. Tích phân $\int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 f(t) dt$ nên $\int_2^3 f(t) dt$ là cho phần diện tích của hình phẳng giới hạn các đồ

thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng là: $t = 2; t = 3$.

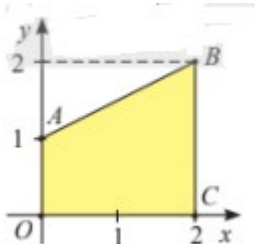
D. Tích phân $\int_3^5 f(x) dx = \int_3^5 f(t) dt$

Diện tích hình phẳng được giới hạn các đồ thị hàm số $y = f(t)$, trục Ot và hai đường thẳng

là: $t = 3; t = 5$ là $S = \int_3^5 |f(t)| dt$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 36. Tính diện tích hình phẳng được tô màu trong hình bên dưới.

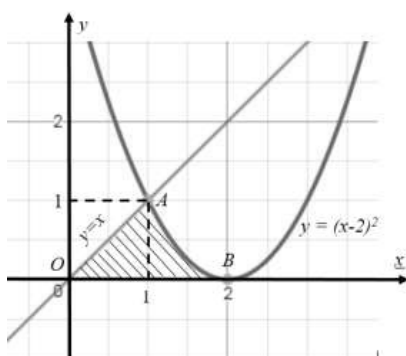


Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 37. Tính diện tích phần hình phẳng gạch chéo (tam giác cong OAB) trong hình vẽ bên.



Trả lời:

Lời giải

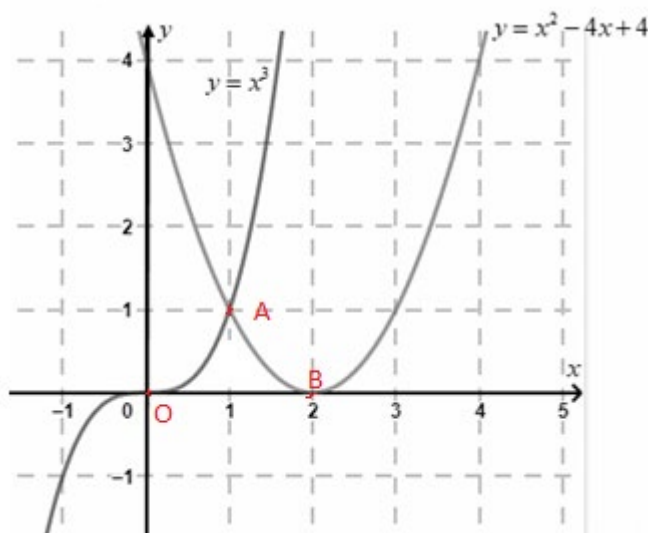
Đáp án: $S = \frac{5}{6}$

Dựa vào đồ thị, khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S = \int_0^1 x dx + \int_1^2 (x-2)^2 dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Vậy $S = \frac{5}{6}$.

Câu 38. Tính diện tích phần hình phẳng là tam giác cong OAB trong hình vẽ bên.



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $S = \frac{7}{12}$

Dựa vào hình vẽ ta thấy hình phẳng cần tính diện tích gồm 2 phần:

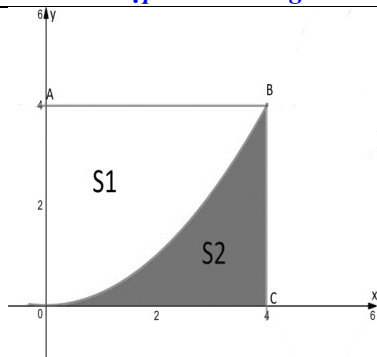
Phần 1: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục Ox , $x = 0$, $x = 1$.

Phần 2: Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 4$, trục Ox , $x = 1$, $x = 2$.

Do đó diện tích cần tính là $S = \int_0^1 |x^3| dx + \int_1^2 |x^2 - 4x + 4| dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \frac{7}{12}$.

Câu 39. Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1 , S_2 lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và bị gạch như hình vẽ bên dưới.

Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng bao nhiêu?



Trả lời:

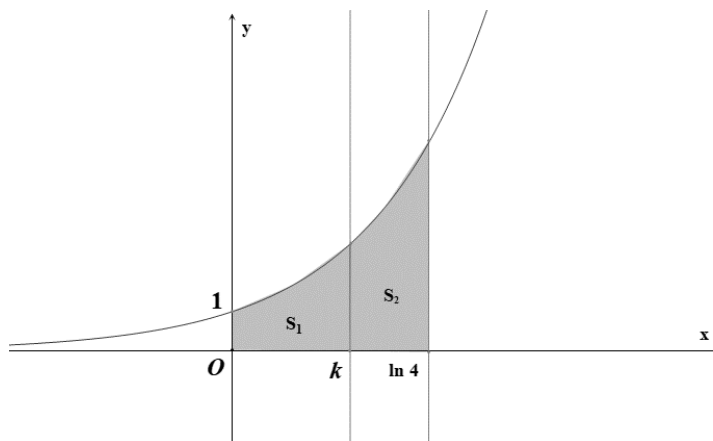
Lời giải

Đáp án: $\frac{S_1}{S_2} = 2$

Ta có diện tích hình vuông $OABC$ là 16 và bằng $S_1 + S_2$.

$$S_2 = \int_0^4 \frac{1}{4} x^2 dx = \frac{x^3}{12} \Big|_0^4 = \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{16 - S_2}{S_2} = \frac{16 - \frac{16}{3}}{\frac{16}{3}} = 2$$

Câu 40. Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $k = \ln 3$

Diện tích hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \ln 4$ là

$$S = \int_0^{\ln 4} e^x dx = e^x \Big|_0^{\ln 4} = e^{\ln 4} - e^0 = 4 - 1 = 3 \text{ (đvdt)}.$$

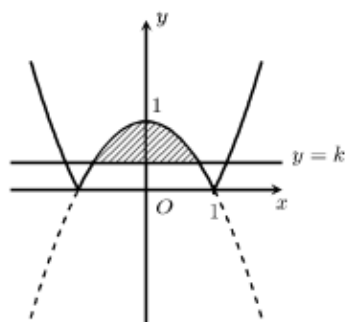
Ta có $S = S_1 + S_2 = S_1 + \frac{1}{2} S_1 = \frac{3}{2} S_1$. Suy ra $S_1 = \frac{2S}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3} = 2$ (đvdt).

Vì S_1 là phần diện tích được giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = k$ nên

$$2 = S_1 = \int_0^k e^x dx = e^x \Big|_0^k = e^k - e^0 = e^k - 1.$$

Do đó $e^k = 3 \Leftrightarrow k = \ln 3$.

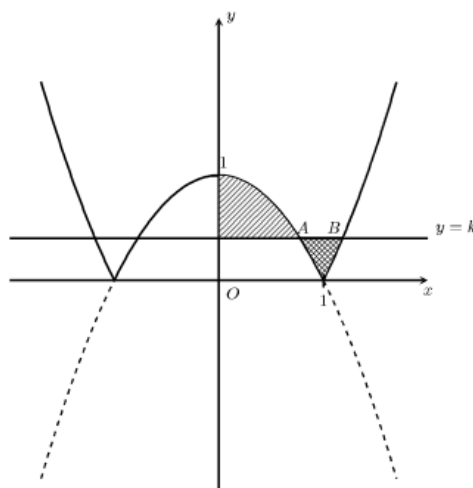
Câu 41. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 1|$ và $y = k$, với $0 < k < 1$. Tìm k để diện tích hình phẳng (H) gấp hai lần diện tích hình phẳng được kẻ sọc ở hình vẽ bên.



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $k = \sqrt[3]{4} - 1$



Gọi S là diện tích hình phẳng (H) . Lúc đó $S = 2S_1 + 2S_2$, trong đó S_1 là diện tích phần gạch sọc ở bên phải Oy và S_2 là diện tích phần gạch ca rô trong hình vẽ bên.

Gọi A, B là các giao điểm có hoành độ dương của đường thẳng $y = k$ và đồ thị hàm số $y = |x^2 - 1|$, trong đó $A(\sqrt{1-k}; k)$ và $B(\sqrt{1+k}; k)$.

Theo yêu cầu bài toán $S = 2 \cdot 2S_1 \Leftrightarrow S_1 = S_2$.

$$\Leftrightarrow \int_0^{\sqrt{1-k}} (1-x^2-k) dx = \int_{\sqrt{1-k}}^1 (k-1-x^2) dx + \int_1^{\sqrt{1+k}} (k-x^2+1) dx.$$

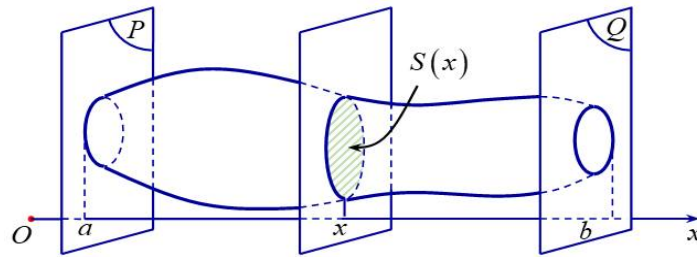
$$\Leftrightarrow (1-k)\sqrt{1-k} - \frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k} = \frac{1}{3} - (1-k) - \frac{1}{3}(1-k)\sqrt{1-k}.$$

$$+(1-k)\sqrt{1-k}+(1+k)\sqrt{1+k}-\frac{1}{3}(1+k)\sqrt{1+k}-(1+k)+\frac{1}{3}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}(1+k)\sqrt{1+k}=\frac{4}{3}$$

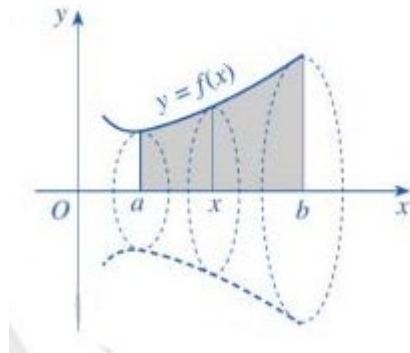
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1+k}\right)^3=2 \quad .$$

$$\Leftrightarrow k=\sqrt[3]{4}-1$$

CHỦ ĐỀ 2**THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY****1. Thể tích của vật thể**

Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b . Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x ($a \leq x \leq b$) cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$. Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$ thì thể tích của vật thể được tính bởi công thức:

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

2. Thể tích khối tròn xoay

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $[a; b]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b (a < b)$, xung quanh trục Ox .

A. $V = \int_a^b |f(x)| dx$ B. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ C. $V = \int_a^b f^2(x) dx$ D. $V = \pi \int_a^b f(x) dx$

Câu 2. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$ và $x = 2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 2$) cắt vật thể đó có diện tích $S(x) = 2024x$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

A. $V = 3036$ B. $V = 3036\pi$ C. $V = 1518$ D. $V = 1518\pi$

Câu 3. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$ và $x = 3$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) cắt vật thể đó theo thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $3x^2 - 2$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

A. $V = 156$ B. $V = 156\pi$ C. $V = 312$ D. $V = 312\pi$

Câu 4. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{3x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng:

A. $\pi \int_0^1 e^{3x} dx$. B. $\int_0^1 e^{6x} dx$. C. $\pi \int_0^1 e^{6x} dx$. D. $\int_0^1 e^{3x} dx$.

Câu 5. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{4x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\int_0^1 e^{4x} dx$. B. $\pi \int_0^1 e^{8x} dx$. C. $\pi \int_0^1 e^{4x} dx$. D. $\int_0^1 e^{8x} dx$.

Câu 6. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$ B. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$ C. $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$ D. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$

Câu 7. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$ B. $V = \frac{e^2 - 1}{2}$ C. $V = \frac{\pi e^2}{3}$ D. $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$

Câu 8. Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = 2$ B. $V = \frac{4\pi}{3}$ C. $V = 2\pi$ D. $V = \frac{4}{3}$

Câu 9. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng

$x = 0, x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = (\pi + 1)\pi$ B. $V = \pi - 1$ C. $V = \pi + 1$ D. $V = (\pi - 1)\pi$

Câu 10. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = 2\pi(\pi + 1)$ B. $V = 2\pi$ C. $V = 2(\pi + 1)$ D. $V = 2\pi^2$

Câu 11. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$, đường thẳng $d: y = 2x$ và đường thẳng $x = 0, x = 2$ quay xung quanh trục Ox .

- A. $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$. B. $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$. C. $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$. D. $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$

Câu 12. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. B. $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$. C. $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. D. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

Câu 13. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục Ox , trục Oy và đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$, xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ B. $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ C. $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ D. $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

Câu 14. Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$, trục hoành, đường thẳng $x = 0$ và $x = 1$ quanh trục hoành bằng

- A. $\frac{16\pi}{15}$. B. $\frac{2\pi}{3}$. C. $\frac{4\pi}{3}$. D. $\frac{8\pi}{15}$.

Câu 15. Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, hai đường thẳng $x = 1, x = 2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

- A. 3π . B. $\frac{3\pi}{2}$. C. $\frac{2\pi}{3}$. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 16. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2, y = 0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

- A. $\int_0^2 (2x - x^2) dx$ B. $\pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$ C. $\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$ D. $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$

Câu 17. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} - 2$, $y = 0$ và $x = 4, x = 9$ quay xung quanh trục Ox . Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

A. $V = \frac{7}{6}$.

B. $V = \frac{5\pi}{6}$.

C. $V = \frac{7\pi}{11}$.

D. $V = \frac{11\pi}{6}$.

Câu 18. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y = x^2 + 2, y = 0, x = 1, x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \int_1^2 (x^2 + 2) dx$

B. $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$

C. $V = \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$

D. $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2) dx$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 19. Cắt một vật thể (T) bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 0$ và $x = 2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (0 \leq x \leq 2)$ cắt vật thể đó có diện tích diện là một hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{x^3}$. Tính thể tích vật thể (T) .

Trả lời:

Câu 20. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1; x = 3$. Khi cắt một vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x (1 \leq x \leq 3)$, mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45° và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{4 - \frac{1}{2}x^2}$. Tính thể tích vật thể trên.

Trả lời:

Câu 21. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 3$ quanh trục Ox .

Trả lời:

Câu 22. Tính thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y = 2x - x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$.

Trả lời:

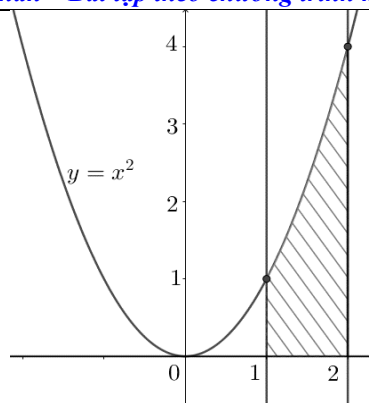
Câu 23. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \tan x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox . Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra.

Trả lời:

Câu 24. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Tính V .

Trả lời:

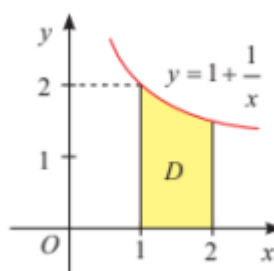
Câu 25. Cho hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình bên dưới.



Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox .

Trả lời:

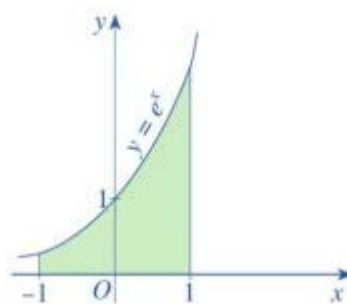
Câu 26. Cho hình phẳng (D) được tô màu trong hình bên dưới.



Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (D) khi quay (D) quanh trục Ox .

Trả lời:

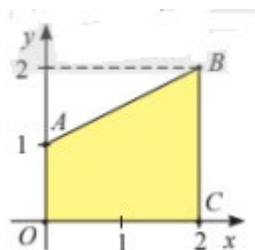
Câu 27. Cho hình phẳng (H) được tô màu trong hình bên dưới.



Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox .

Trả lời:

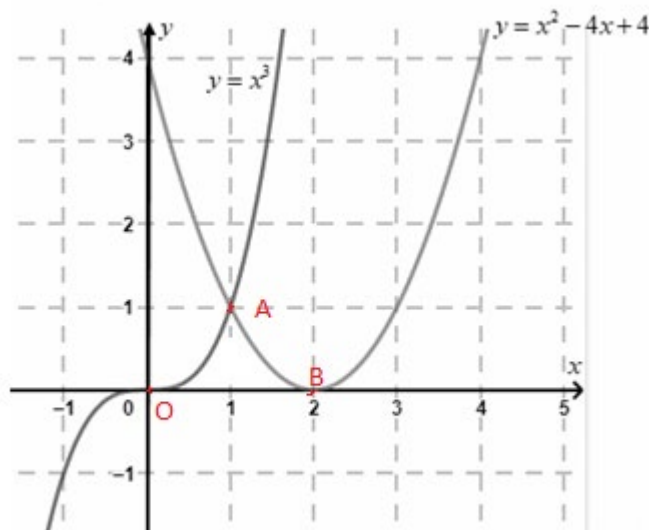
Câu 28. Cho hình phẳng (H) được tô màu trong hình bên dưới.



Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox .

Trả lời:

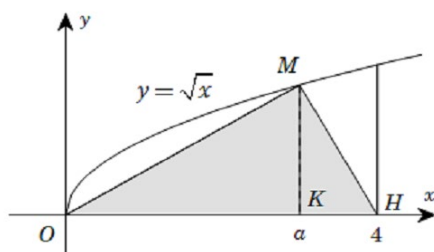
Câu 29. Cho hình phẳng (H) là tam giác cong OAB trong hình vẽ bên dưới.



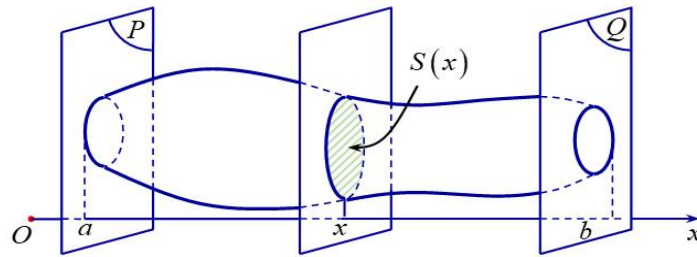
Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox .

Trả lời:

Câu 30. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M (hình vẽ). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó

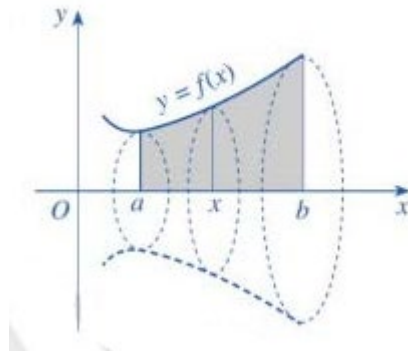


Trả lời:

CHỦ ĐỀ 2**THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY****1. Thể tích của vật thể**

Trong không gian, cho một vật thể nằm trong khoảng không gian giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b . Mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x ($a \leq x \leq b$) cắt vật thể theo mặt cắt có diện tích $S(x)$. Khi đó, nếu $S(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$ thì thể tích của vật thể được tính bởi công thức:

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

2. Thể tích khối tròn xoay

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $[a; b]$. Hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$), xung quanh trục Ox .

A. $V = \int_a^b |f(x)| dx$ B. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ C. $V = \int_a^b f^2(x) dx$ D. $V = \pi \int_a^b f(x) dx$

Lời giải**Chọn B.**

Lý thuyết

Câu 2. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$ và $x = 2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 2$) cắt vật thể đó có diện tích $S(x) = 2024x$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

A. $V = 3036$ B. $V = 3036\pi$ C. $V = 1518$ D. $V = 1518\pi$

Lời giải**Chọn A.**

Thể tích vật thể là: $V = \int_1^2 2024x dx = 3036$

Câu 3. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$ và $x = 3$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) cắt vật thể đó theo thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $3x^2 - 2$. Tính thể tích của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng trên.

A. $V = 156$ B. $V = 156\pi$ C. $V = 312$ D. $V = 312\pi$

Lời giải**Chọn A.**

Diện tích thiết diện là: $S(x) = 3x \cdot (3x^2 - 2) = 9x^3 - 6x$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể là: $V = \int_1^3 (9x^3 - 6x) dx = 156$

Câu 4. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{3x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng:

A. $\pi \int_0^1 e^{3x} dx$. B. $\int_0^1 e^{6x} dx$. C. $\pi \int_0^1 e^{6x} dx$. D. $\int_0^1 e^{3x} dx$.

Lời giải**Chọn C.**Ta có thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng:

$\pi \int_0^1 (e^{3x})^2 dx = \pi \int_0^1 e^{6x} dx$.

Câu 5. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{4x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\int_0^1 e^{4x} dx$.

B. $\pi \int_0^1 e^{8x} dx$.

C. $\pi \int_0^1 e^{4x} dx$.

D. $\int_0^1 e^{8x} dx$.

Lời giải

Chọn B.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_0^1 (e^{4x})^2 dx = \pi \int_0^1 e^{8x} dx.$$

Câu 6. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$

B. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$

C. $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$

D. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$

Lời giải

Chọn D.

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là: $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.

Câu 7. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}$

B. $V = \frac{e^2 - 1}{2}$

C. $V = \frac{\pi e^2}{3}$

D. $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$

Lời giải

Chọn D.

$$V = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \pi \left. \frac{e^{2x}}{2} \right|_0^1 = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$$

Câu 8. Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V = 2$

B. $V = \frac{4\pi}{3}$

C. $V = 2\pi$

D. $V = \frac{4}{3}$

Lời giải

Chọn B.

Thể tích khối tròn xoay được tính theo công thức:

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x^2 + 1})^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2 + 1) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3}.$$

Câu 9. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng

$x = 0, x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = (\pi + 1)\pi$ B. $V = \pi - 1$ C. $V = \pi + 1$ D. $V = (\pi - 1)\pi$

Lời giải

Chọn A.

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{2 + \cos x} \right)^2 dx = \pi \left(2x + \sin x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi(\pi + 1).$$

Câu 10. Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng

$x = 0, x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A. $V = 2\pi(\pi + 1)$ B. $V = 2\pi$ C. $V = 2(\pi + 1)$ D. $V = 2\pi^2$

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có: } V = \pi \int_0^{\pi} \left(\sqrt{2 + \sin x} \right)^2 dx = \pi \int_0^{\pi} (2 + \sin x) dx = \pi (2x - \cos x) \Big|_0^{\pi} = 2\pi(\pi + 1).$$

Câu 11. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2$, đường thẳng $d: y = 2x$ và đường thẳng $x = 0, x = 2$ quay xung quanh trục Ox .

- A. $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$. B. $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$. C. $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$. D. $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Vậy thể tích khối tròn xoay được tính } V = \pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx.$$

Câu 12. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. B. $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$. C. $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$. D. $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Thể tích của vật thể được tạo nên là } V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx.$$

Câu 13. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục Ox , trục Oy và đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$, xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

B. $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

C. $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

D. $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

Lời giải

Chọn C.

Công thức tính: $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

Câu 14. Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$, trục hoành, đường thẳng $x = 0$ và $x = 1$ quanh trục hoành bằng

A. $\frac{16\pi}{15}$.

B. $\frac{2\pi}{3}$.

C. $\frac{4\pi}{3}$.

D. $\frac{8\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - 2x)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3} \right) = \frac{8\pi}{15}.$$

Câu 15. Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

A. 3π .

B. $\frac{3\pi}{2}$.

C. $\frac{2\pi}{3}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

$$V = \pi \int_1^2 x dx = \frac{\pi x^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{3\pi}{2}.$$

Câu 16. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$, $y = 0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

A. $\int_0^2 (2x - x^2) dx$

B. $\pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$

C. $\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$

D. $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$

Lời giải

Chọn B.

Theo công thức ta chọn $V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$

Câu 17. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} - 2$, $y = 0$ và $x = 4, x = 9$ quay xung quanh trục Ox . Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

A. $V = \frac{7}{6}$.

B. $V = \frac{5\pi}{6}$.

C. $V = \frac{7\pi}{11}$.

D. $V = \frac{11\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn D.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là:

$$V = \pi \int_4^9 (\sqrt{x} - 2)^2 dx = \pi \int_4^9 (x - 4\sqrt{x} + 4) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{8x\sqrt{x}}{3} + 4x \right) \Big|_4^9$$

$$= \pi \left(\frac{81}{2} - 72 + 36 \right) - \pi \left(\frac{16}{2} - \frac{64}{3} + 16 \right) = \frac{11\pi}{6}.$$

Câu 18. Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y = x^2 + 2, y = 0, x = 1, x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V = \int_1^2 (x^2 + 2) dx$

B. $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$

C. $V = \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$

D. $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2) dx$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 19. Cắt một vật thể (T) bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 0$ và $x = 2$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 2$) cắt vật thể đó có diện tích diện là một hình vuông có cạnh bằng $\sqrt{x^3}$. Tính thể tích vật thể (T) .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{128}{7}$

Diện tích thiết diện là $S(x) = \sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x^3} = x^3$.

Thể tích của vật thể (T) là $V = \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 x^3 dx = \frac{128}{7}$.

Câu 20. Cắt một vật thể bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1; x = 3$. Khi cắt một vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$), mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45° và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{4 - \frac{1}{2}x^2}$. Tính thể tích vật thể trên.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{11}{6}$

Diện tích tam giác vuông cân là: $S(x) = \frac{1}{2} \sqrt{4 - \frac{1}{2}x^2} \cdot \sqrt{4 - \frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{2} \left(4 - \frac{1}{2}x^2 \right)$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể là: $V = \int_1^3 \frac{1}{2} \left(4 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \frac{11}{6}$

Câu 21. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 3$ quanh trục Ox .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $V = \frac{81\pi}{35}$

Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox là :

$$V = \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left(\frac{1}{9}x^6 - \frac{2}{3}x^5 + x^4 \right) dx = \frac{81\pi}{35}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là : $V = \frac{81\pi}{35}$.

Câu 22. Tính thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y = 2x - x^2$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $V = \frac{16\pi}{15}$

Khi đó:

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \pi \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{15}\pi.$$

Câu 23. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \tan x, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox .

Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $V = \frac{4\pi - \pi^2}{4}$

Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra là

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \cdot dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \cdot dx = \pi \left(\tan x - x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4\pi - \pi^2}{4}.$$

Câu 24. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương

trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Tính V .

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $V = \frac{320\pi}{3}$

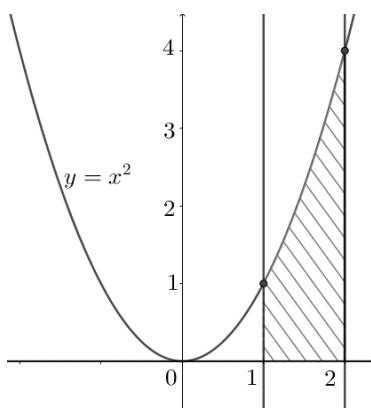
Quay elip đã cho xung quanh trục hoành chính là quay hình phẳng:

$$H = \left\{ y = 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}, y = 0, x = -5, x = 5 \right\}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi H khi quay xung quanh trục hoành là:

$$V = \pi \int_{-5}^5 \left(16 - \frac{16x^2}{25} \right) dx = \pi \left(16x - \frac{16x^3}{75} \right) \Big|_{-5}^5 = \frac{320\pi}{3}$$

Câu 25. Cho hình phẳng (H) được gạch chéo trong hình bên dưới.

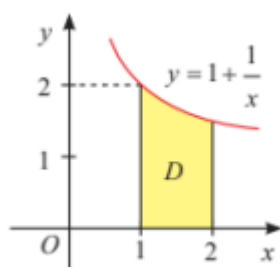


Tính thể tích hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox .

Trả lời:

Lời giải

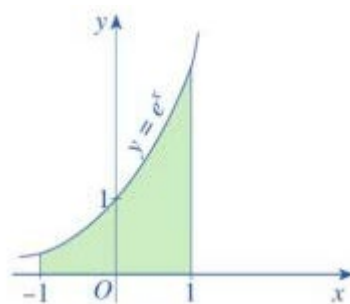
Câu 26. Cho hình phẳng (D) được tô màu trong hình bên dưới.



Tính thể tích hình tròn xoay sinh ra bởi (D) khi quay (D) quanh trục Ox .

Trả lời:

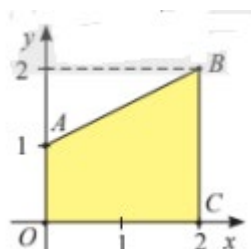
Câu 27. Cho hình phẳng (H) được tô màu trong hình bên dưới.



Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox .

Trả lời:

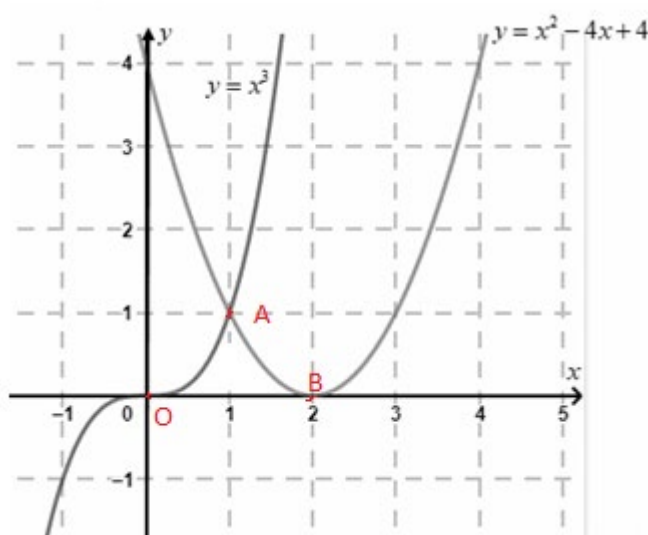
Câu 28. Cho hình phẳng (H) được tô màu trong hình bên dưới.



Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox .

Trả lời:

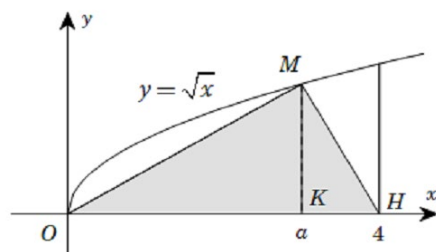
Câu 29. Cho hình phẳng (H) là tam giác cong OAB trong hình vẽ bên dưới.



Tính thể hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox .

Trả lời:

Câu 30. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M (hình vẽ). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó



Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $a = 3$

Ta có: $V = \pi \int_0^4 x dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8\pi$. Mà $V = 2V_1 \Rightarrow V_1 = 4\pi$.

Gọi K là hình chiếu của M trên $Ox \Rightarrow OK = a, KH = 4 - a, MK = \sqrt{a}$.

Khi xoay tam giác OMH quanh Ox ta được khối tròn xoay là sự lắp ghép của hai khối nón sinh bởi các tam giác OMK, MHK , hai khối nón đó có cùng mặt đáy và có tổng chiều cao là $OH = 4$ nên thể tích của

khối tròn xoay đó là $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot (\sqrt{a})^2 = \frac{4\pi a}{3}$, từ đó suy ra $a = 3$.

CHỦ ĐỀ 4

ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN

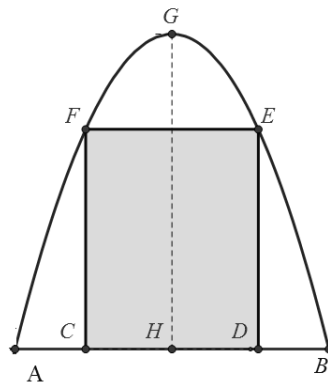
DẠNG 1

ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Câu 1. Trường Nguyễn Văn Trỗi muốn làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền nhà trường phải trả là:

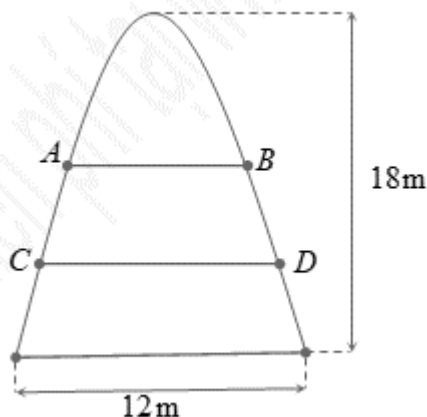
- A. 33750000 đồng. B. 3750000 đồng. C. 12750000 đồng. **D. 6750000 đồng.**

Câu 2. Chị Minh Hiền muốn làm một cái cổng hình Parabol như hình vẽ bên dưới. Chiều cao $GH = 4m$, chiều rộng $AB = 4m$, $AC = BD = 0,9m$. Chị Minh Hiền làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là 1200000 đồng/ m^2 , còn các phần để trống làm xiên hoa có giá là 900000 đồng/ m^2 . Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?



- A. 11445000 đồng.** B. 4077000 đồng. C. 7368000 đồng. D. 11370000 đồng.

Câu 3. Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB , CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng



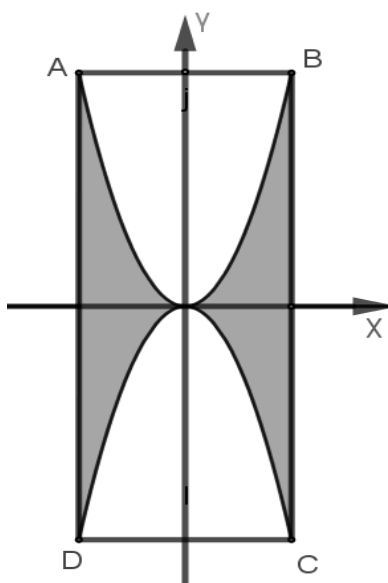
A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $\frac{4}{5}$.

C. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

D. $\frac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Câu 4. Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên.



Phần tô đậm được đánh đá với giá thành $500.000\text{đ}/\text{m}^2$. Phần còn lại được tô màu với giá thành $250.000\text{đ}/\text{m}^2$.

Cho $AB = 4\text{dm}$; $BC = 8\text{dm}$. Hỏi để trang trí 1000 họa tiết như vậy cần số tiền gần nhất với số nào sau đây.

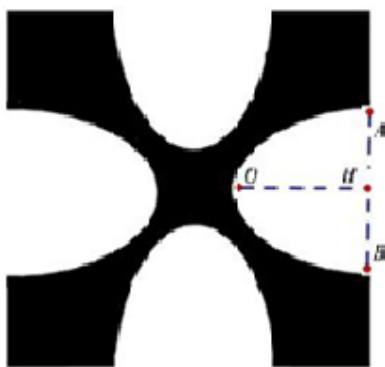
A. 105660667đ.

B. 106666667đ.

C. 107665667đ.

D. 108665667đ.

Câu 5. Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5\text{ cm}$, $OH = 4\text{ cm}$. Biết giá trang trí hoa văn 1cm^2 là 50.000 đồng, tính số tiền cần bỏ ra để trang trí hoa văn đó.



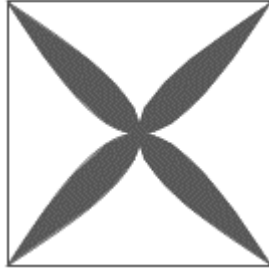
A. 2553333 đồng.

B. 2333333 đồng.

C. 2780333 đồng.

D. 2123333 đồng.

Câu 6. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô đen như hình vẽ dưới).



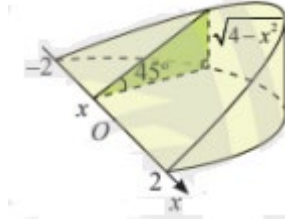
Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

- A. 800 cm^2 . B. $\frac{800}{3}\text{ cm}^2$. C. $\frac{400}{3}\text{ cm}^2$. D. 250 cm^2 .

DẠNG 2

ỨNG DỤNG THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Câu 7. Khi cắt một vật thể hình chếc niêm bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-2 \leq x \leq 2$), mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45° và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{14-3x^2}$ (như hình vẽ). Tính thể tích vật thể hình chếc niêm trên.



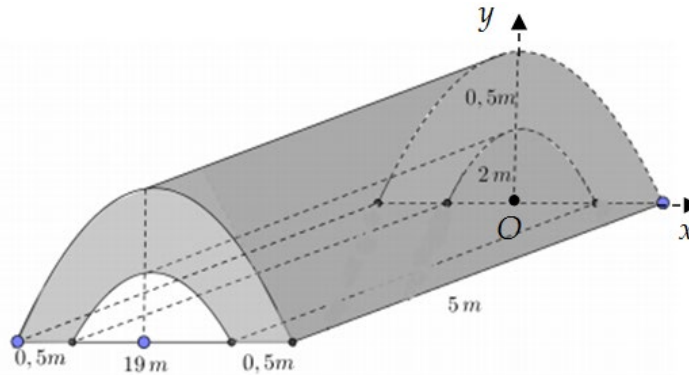
A. $V = 20$

B. $V = 20\pi$

C. $V = 10$

D. $V = 10\pi$

Câu 8. Trong chương trình nông thôn mới của tỉnh Phú Yên, tại xã Hòa Mỹ Tây có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ (đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol). Biết 1 m^3 khối bê tông để đổ cây cầu có giá 5 triệu đồng. Tính số tiền mà tỉnh Phú Yên cần bỏ ra để xây cây cầu trên.



A. 110 triệu đồng.

B. 250 triệu đồng.

C. 180 triệu đồng.

D. 200 triệu đồng.

Câu 9. Để kỷ niệm ngày 26-3. Chi đoàn 12A dự định dựng một lều trại có dạng parabol, với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích phần không gian phía bên trong trại để lợp 12A cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp.

A. 30 m^3

B. 36 m^3

C. 40 m^3

D. 41 m^3

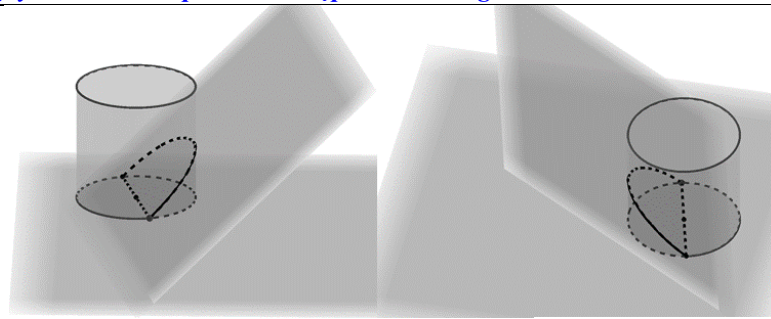
Câu 10. Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng R . Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc 30° ta thu được hai khối gỗ có thể tích là V_1 và V_2 , với $V_1 < V_2$. Thể tích V_1 bằng?

A. $V_1 = \frac{2\sqrt{3}R^3}{9}$.

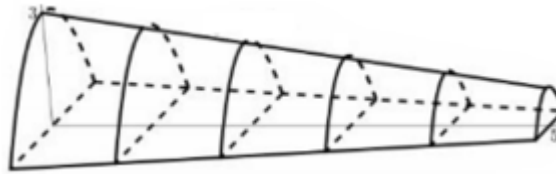
B. $V_1 = \frac{\sqrt{3}\pi R^3}{27}$.

C. $V_1 = \frac{\sqrt{3}\pi R^3}{18}$.

D. $V_1 = \frac{\sqrt{3}R^3}{27}$.



Câu 11. Cho một mô hình 3-D mô phỏng một đường hàm như hình vẽ bên. Biết rằng đường hàm mô hình có chiều dài 5 (cm); khi cắt hình này bởi mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y = 3 - \frac{2}{5}x$ (cm), với x (cm) là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hàm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hàm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



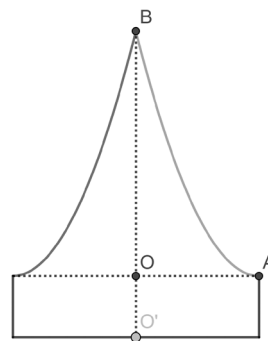
A. 29.

B. 27.

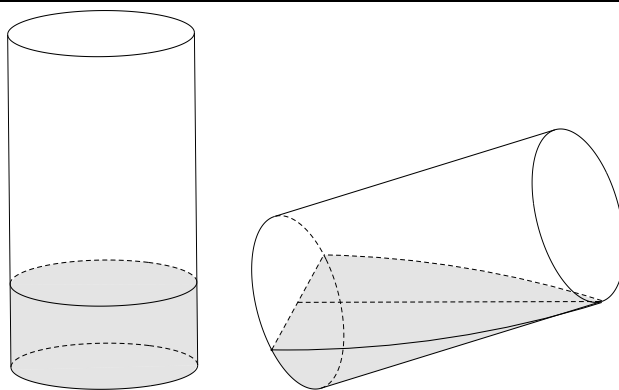
C. 31.

D. 33.

Câu 12. Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn Minh Hiền đã làm một chiếc mũ “cách điệu” cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO' = 5$ cm, $OA = 10$ cm, $OB = 20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A . Thể tích của chiếc mũ bằng

A. $\frac{2750\pi}{3} (\text{cm}^3)$ B. $\frac{2500\pi}{3} (\text{cm}^3)$ C. $\frac{2050\pi}{3} (\text{cm}^3)$ D. $\frac{2250\pi}{3} (\text{cm}^3)$

Câu 13. Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên.



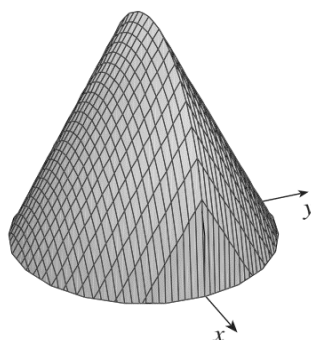
A. 240 cm^3 .

B. $240\pi \text{ cm}^3$.

C. 120 cm^3 .

D. $120\pi \text{ cm}^3$.

Câu 17. Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) thì được thiết diện là một tam giác đều. Thể tích V của vật thể đó là



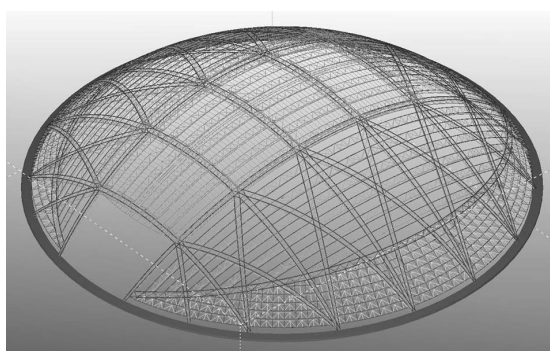
A. $V = \sqrt{3}$.

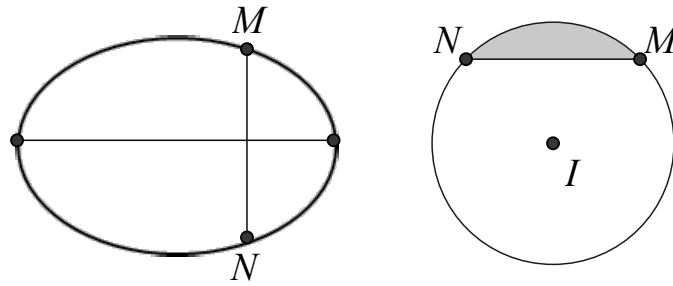
B. $V = 3\sqrt{3}$.

C. $V = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

D. $V = \pi$.

Câu 18. Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$ (hình vẽ). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M, N (hình vẽ) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN} = 90^\circ$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích xấp xỉ bao nhiêu?





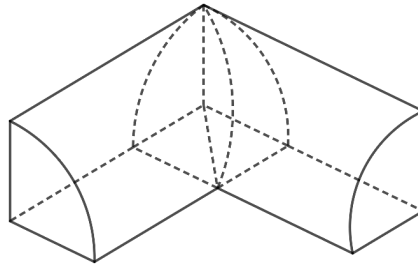
A. $57793m^3$.

B. $115586m^3$.

C. $32162m^3$.

D. $101793m^3$.

Câu 19. Gọi (H) là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a , hai trục hình trụ vuông góc với nhau như hình vẽ sau. Tính thể tích của khối (H) .



A. $V_{(H)} = \frac{a^3}{2}$.

B. $V_{(H)} = \frac{3a^3}{4}$.

C. $V_{(H)} = \frac{2a^3}{3}$.

D. $V_{(H)} = \frac{\pi a^3}{4}$.

Câu 20. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90m^3$, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

A. $1458m^3$.

B. $600m^3$.

C. $2200m^3$.

D. $4200m^3$.

Câu 21. Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là 280 cm. Giả sử $h(t)$ là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t) = \frac{1}{500}\sqrt[3]{t}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi (làm tròn đến giây)?

A. 2 giờ 36 giây.

B. 2 giờ 48 giây.

C. 2 giờ 38 giây.

D. 2 giờ 46 giây.

CHỦ ĐỀ 4**ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG VÀ THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN****DẠNG 1****ỨNG DỤNG DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN**

Câu 1. Trường Nguyễn Văn Trỗi muốn làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng.

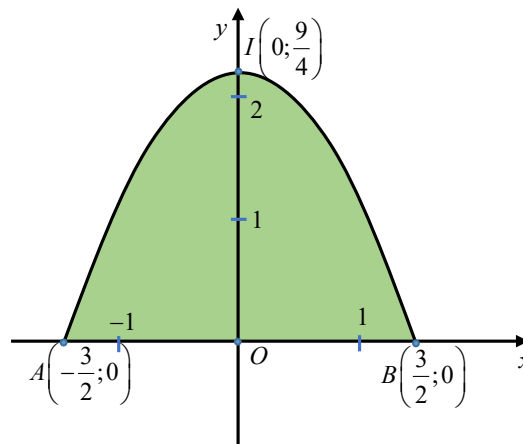
Vậy số tiền nhà trường phải trả là:

- A. 33750000 đồng. B. 3750000 đồng. C. 12750000 đồng. **D. 6750000 đồng.**

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Do tính đối xứng của parabol nên ta có thể chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (P) có đỉnh $I \in Oy$ (như hình vẽ).



$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} \frac{9}{4} = c, (I \in (P)) \\ \frac{9}{4}a - \frac{3}{2}b + c = 0 (A \in (P)) \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = 0 (B \in (P)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{9}{4} \\ a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$$

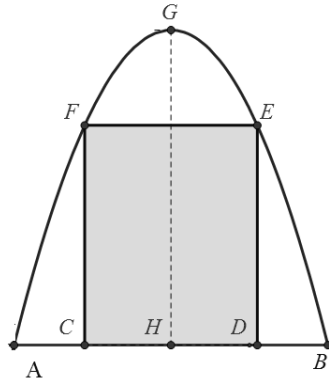
$$\text{Vậy } (P): y = -x^2 + \frac{9}{4}.$$

Dựa vào đồ thị, diện tích cửa parabol là:

$$S = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) dx = 2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{9}{4} \right) dx = 2 \left(\frac{-x^3}{3} + \frac{9}{4}x \right) \Big|_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{2} \text{ m}^2.$$

$$\text{Số tiền phải trả là: } \frac{9}{2} \cdot 1500000 = 6750000 \text{ đồng.}$$

Câu 2. Chị Minh Hiền muốn làm một cái cổng hình Parabol như hình vẽ bên dưới. Chiều cao $GH = 4\text{m}$, chiều rộng $AB = 4\text{m}$, $AC = BD = 0,9\text{m}$. Chị Minh Hiền làm hai cánh cổng khi đóng lại là hình chữ nhật $CDEF$ tô đậm có giá là $1200000 \text{ đồng}/\text{m}^2$, còn các phần để trống làm xiên hoa có giá là $900000 \text{ đồng}/\text{m}^2$. Hỏi tổng số tiền để làm hai phần nói trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

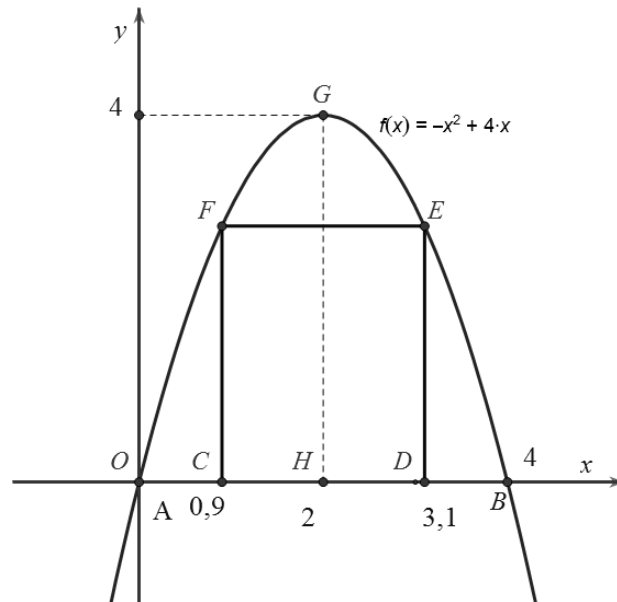


- A. 11445000 đồng. B. 4077000 đồng. C. 7368000 đồng. D. 11370000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Gắn hệ trục tọa độ Oxy sao cho AB trùng Ox , A trùng O khi đó parabol có đỉnh $G(2;4)$ và đi qua gốc tọa độ.



Giả sử phương trình của parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

$$\text{Vì parabol có đỉnh là } G(2;4) \text{ và đi qua điểm } O(0;0) \text{ nên ta có } \begin{cases} c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Suy ra phương trình parabol là $y = f(x) = -x^2 + 4x$.

$$\text{Diện tích của cả cổng là } S = \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3} (\text{m}^2).$$

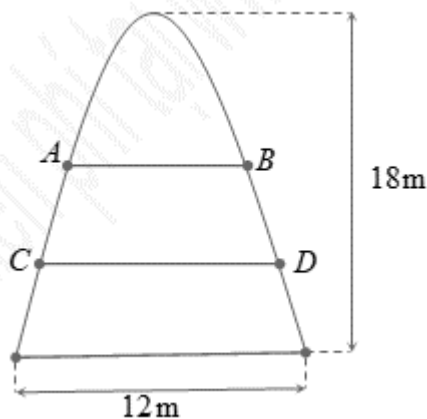
Mặt khác chiều cao $CF = DE = f(0,9) = 2,79(\text{m})$; $CD = 4 - 2 \cdot 0,9 = 2,2 (\text{m})$.

Diện tích hai cánh cổng là $S_{CDEF} = CD.CF = 6,138 \text{ (m}^2\text{)}$.

Diện tích phần xiên hoa là $S_{xh} = S - S_{CDEF} = \frac{32}{3} - 6,14 = \frac{6793}{1500} \text{ (m}^2\text{)}$.

Vậy tổng số tiền để làm cổng là $6,138.1200000 + \frac{6793}{1500}.900000 = 11441400$ đồng.

Câu 3. Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m, chiều rộng chân đế 12 m. Người ta căng hai sợi dây trang trí AB , CD nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau (xem hình vẽ bên). Tỉ số $\frac{AB}{CD}$ bằng



A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $\frac{4}{5}$.

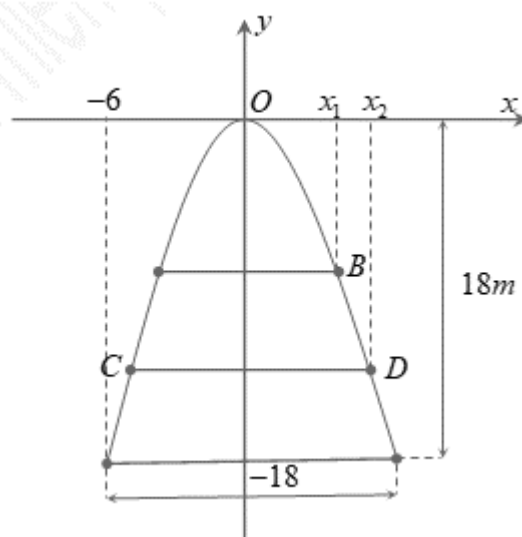
C. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

D. $\frac{3}{1+2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn C

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Phương trình Parabol có dạng $y = a.x^2 \text{ (P)}$.

(P) đi qua điểm có tọa độ $(-6; -18)$ suy ra: $-18 = a.(-6)^2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow (P): y = -\frac{1}{2}x^2$.

Từ hình vẽ ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng $AB: y = -\frac{1}{2}x_1^2$ là

$$S_1 = 2 \int_0^{x_1} \left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_1^2 \right) \right] dx = 2 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_1^2 x \right) \Big|_0^{x_1} = \frac{2}{3}x_1^3.$$

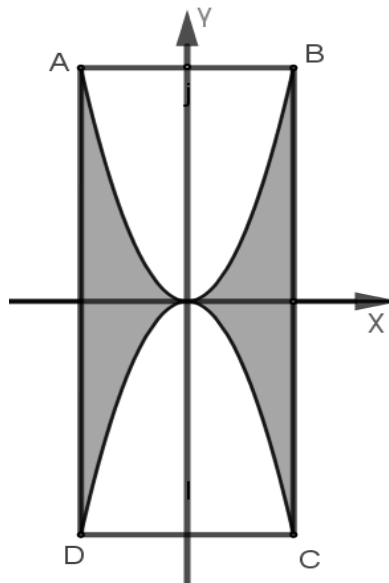
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol và đường thẳng $CD: y = -\frac{1}{2}x_2^2$ là

$$S_2 = 2 \int_0^{x_2} \left[-\frac{1}{2}x^2 - \left(-\frac{1}{2}x_2^2 \right) \right] dx = 2 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x_2^2 x \right) \Big|_0^{x_2} = \frac{2}{3}x_2^3$$

Từ giả thiết suy ra $S_2 = 2S_1 \Leftrightarrow x_2^3 = 2x_1^3 \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$

$$\text{Vậy } \frac{AB}{CD} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Câu 4. Một họa tiết hình cánh bướm như hình vẽ bên.



Phần tô đậm được đánh giá với giá thành $500.000\text{đ}/\text{m}^2$. Phần còn lại được tô màu với giá thành $250.000\text{đ}/\text{m}^2$.

Cho $AB = 4\text{dm}$; $BC = 8\text{dm}$. Hỏi để trang trí 1000 họa tiết như vậy cần số tiền gần nhất với số nào sau đây.

- A. 105660667đ. **B. 106666667đ.** C. 107665667đ. D. 108665667đ.

Lời giải

Chọn B

Vì $AB = 4\text{dm}$; $BC = 8\text{dm}$. $\Rightarrow A(-2; 4)$, $B(2; 4)$, $C(2; -4)$, $D(-2; -4)$.

parabol là: $y = x^2$ hoặc $y = -x^2$

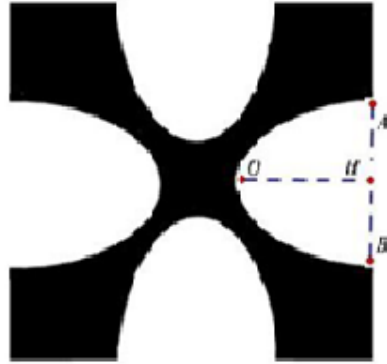
Diện tích phần tô đậm là $S_1 = 4 \int_0^2 x^2 dx = \frac{32}{3} \text{ (dm}^2\text{)}$

Diện tích hình chữ nhật là $S = 4.8 = 32 \text{ (m}^2\text{)}$

Diện tích phần trắng là $S_2 = S - S_1 = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3} \text{ (dm}^2\text{)}$

Tổng chi phí trang trí là: $T = \left(\frac{32}{3} \cdot 5000 + \frac{64}{3} \cdot 2500 \right) \cdot 1000 \approx 106666667 \text{ đ}$

Câu 5. Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa mỏng hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình bên. Biết $AB = 5 \text{ cm}$, $OH = 4 \text{ cm}$. Biết giá trang trí hoa văn 1 cm^2 là 50.000 đồng, tính số tiền cần bỏ ra để trang trí hoa văn đó.



A. 2553333 đồng.

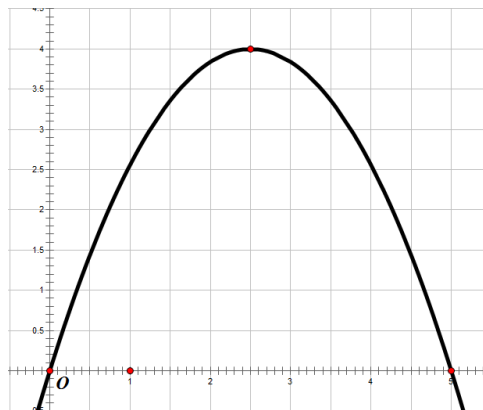
B. 2333333 đồng.

C. 2780333 đồng.

D. 2123333 đồng.

Lời giải

Chọn B



Đưa parabol vào hệ trục Oxy ta tìm được phương trình là: $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $(P): y = -\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 5$

là: $S = \int_0^5 \left(-\frac{16}{25}x^2 + \frac{16}{5}x \right) dx = \frac{40}{3}$.

Tổng diện tích phần bị khoét đi: $S_1 = 4S = \frac{160}{3} \text{ cm}^2$.

Diện tích của hình vuông là: $S_{hv} = 100 \text{ cm}^2$.

diện tích bề mặt hoa văn là: $S_2 = S_{hv} - S_1 = 100 - \frac{160}{3} = \frac{140}{3} \text{ cm}^2$.

Vậy số tiền cần bỏ ra để trang trí hoa văn đó là: $\frac{140}{3} \cdot 50000 \approx 2333333$ đồng

Câu 6. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô đen như hình vẽ dưới).

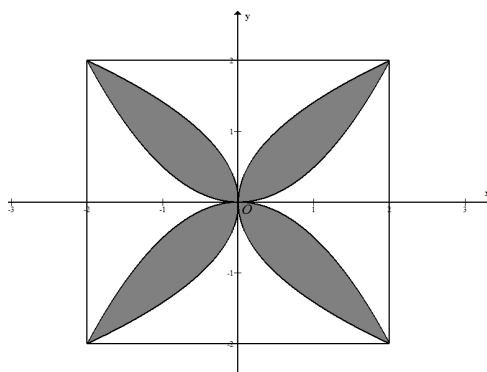


Diện tích mỗi cánh hoa của viên gạch bằng

- A. 800cm^2 . B. $\frac{800}{3}\text{cm}^2$. C. $\frac{400}{3}\text{cm}^2$. D. 250cm^2 .

Lời giải

Chọn C



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng $10\text{cm} = 1\text{dm}$), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y = \frac{x^2}{2}$, $y = -\frac{x^2}{2}$, $x = -\frac{y^2}{2}$, $x = \frac{y^2}{2}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{2}$, $y = \sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x = 0$; $x = 2$.

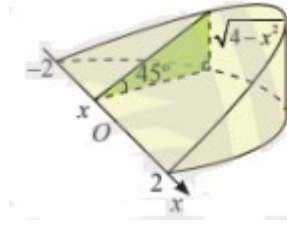
Do đó diện tích một cánh hoa bằng

$$\int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{(2x)^3} - \frac{x^3}{6} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{4}{3} (\text{dm}^2) = \frac{400}{3} (\text{cm}^2) = \frac{4}{3} (\text{dm}^2) = \frac{400}{3} (\text{cm}^2).$$

DẠNG 2

ỨNG DỤNG THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY TRONG BÀI TOÁN THỰC TIỄN

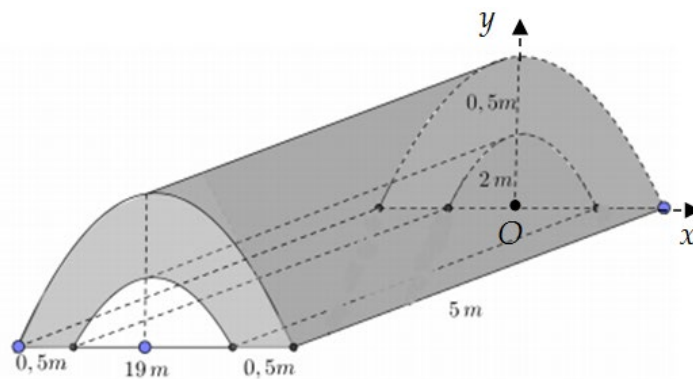
Câu 7. Khi cắt một vật thể hình chóp nêm bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-2 \leq x \leq 2$), mặt cắt là tam giác vuông có một góc 45° và độ dài một cạnh góc vuông là $\sqrt{14-3x^2}$ (như hình vẽ). Tính thể tích vật thể hình chóp nêm trên.

A. $V = 20$ B. $V = 20\pi$ C. $V = 10$ D. $V = 10\pi$ **Lời giải****Chọn A.**

Diện tích tam giác vuông cân là: $S(x) = \frac{1}{2} \sqrt{14-3x^2} \cdot \sqrt{14-3x^2} = \frac{1}{2}(14-3x^2)$

$\Rightarrow$ Thể tích vật thể là: $V = \int_{-2}^2 \frac{1}{2}(14-3x^2) dx = 20$

Câu 8. Trong chương trình nông thôn mới của tỉnh Phú Yên, tại xã Hòa Mỹ Tây có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ (đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol). Biết 1 m^3 khối bê tông để đổ cây cầu có giá 5 triệu đồng. Tính số tiền mà tỉnh Phú Yên cần bỏ ra để xây cây cầu trên.



A. 110 triệu đồng.

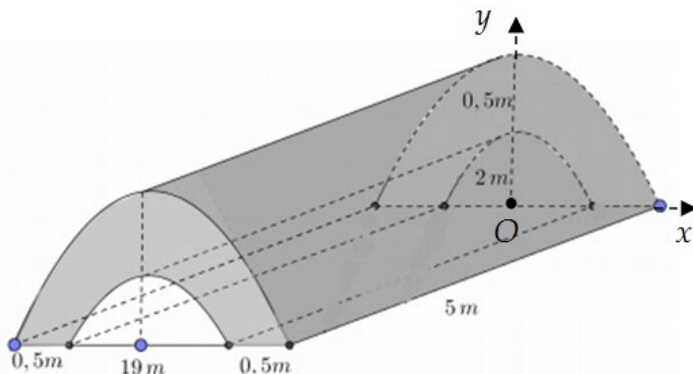
B. 250 triệu đồng.

C. 180 triệu đồng.

D. 200 triệu đồng.

Lời giải**Chọn D**

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Gọi $(P_1): y = a_1x^2 + b_1$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2}; 0\right), B(0; 2)$

$$\text{Nên ta có hệ phương trình sau: } \begin{cases} 0 = a_1 \cdot \left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{8}{361} \\ b_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2.$$

Gọi $(P_2): y = a_2x^2 + b_2$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10; 0), D\left(0; \frac{5}{2}\right)$

$$\text{Nên ta có hệ phương trình sau: } \begin{cases} 0 = a_2 \cdot (10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{40} \\ b_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}.$$

$$\text{Ta có thể tích của bê tông là: } V = 5.2 \left[\int_0^{10} \left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2} \right) dx - \int_0^{\frac{19}{2}} \left(-\frac{8}{361}x^2 + 2 \right) dx \right] = 40 \text{ m}^3.$$

Số tiền mà tỉnh Phú Yên cần bỏ ra để xây cây cầu là: $5.40 = 200$ triệu đồng

Câu 9. Để kỷ niệm ngày 26-3. Chi đoàn 12A dự định dựng một lều trại có dạng parabol, với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích phần không gian phía bên trong trại để lớp 12A cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp.

A. 30 m^3

B. 36 m^3

C. 40 m^3

D. 41 m^3

Lời giải

Chọn B

Giả sử nền trại là hình chữ nhật ABCD có $AB = 3$ mét, $BC = 6$ mét, đỉnh của parabol là I. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho: O là trung điểm của cạnh AB, A, B và I, phương trình của parabol có dạng

$$y = ax^2 + b, a \neq 0. \text{ Do I, A, B thuộc nên ta có } y = -\frac{4}{3}x^2 + 3$$

Vậy thể tích phần không gian phía trong trại là

$$V = 6.2 \int_0^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{4}{3}x^2 + 3 \right) dx = 36$$

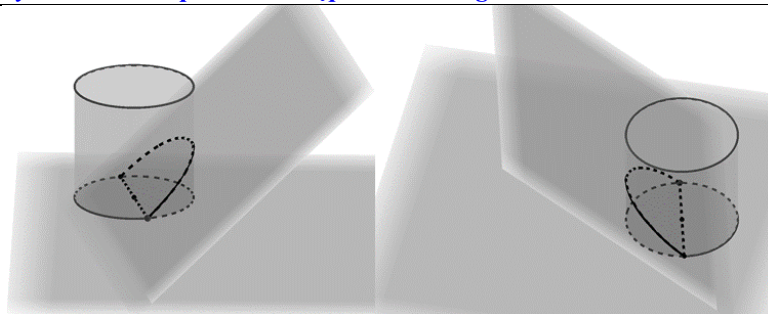
Câu 10. Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng R . Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc 30° ta thu được hai khối gỗ có thể tích là V_1 và V_2 , với $V_1 < V_2$. Thể tích V_1 bằng?

A. $V_1 = \frac{2\sqrt{3}R^3}{9}$.

B. $V_1 = \frac{\sqrt{3}\pi R^3}{27}$.

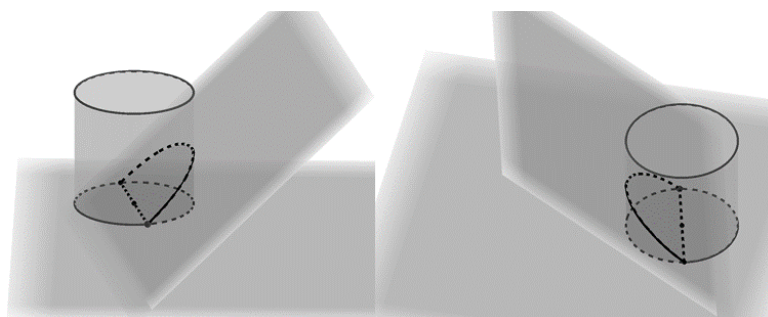
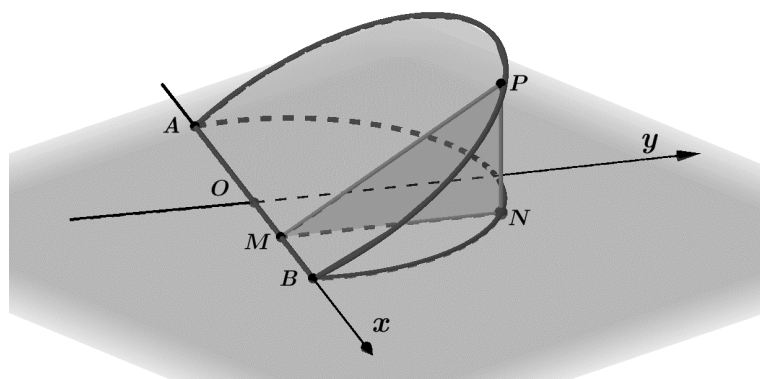
C. $V_1 = \frac{\sqrt{3}\pi R^3}{18}$.

D. $V_1 = \frac{\sqrt{3}R^3}{27}$.



Lời giải

Chọn A



Khi cắt khối gỗ hình trụ ta được một hình nêm có thể tích V_1 như hình vẽ.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Nửa đường tròn đường kính AB có phương trình là $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [-R; R]$.

Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm M có hoành độ x , cắt hình nêm theo thiết diện là $\triangle MNP$ vuông tại N và có $\widehat{PMN} = 30^\circ$.

Ta có $NM = y = \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow NP = NM \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{3}}$.

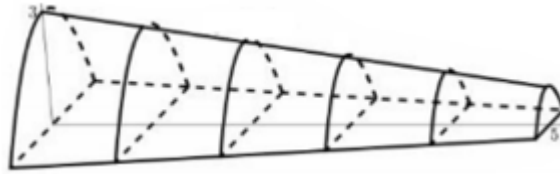
$\triangle MNP$ có diện tích $S(x) = \frac{1}{2} NM \cdot NP = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2 - x^2}{\sqrt{3}}$.

Thể tích hình nêm là $V_1 = \int_{-R}^R S(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{R^2 - x^2}{\sqrt{3}} dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-R}^R = \frac{2\sqrt{3}R^3}{9}$.

* **Chú ý:** Có thể ghi nhớ công thức tính thể tích hình nêm:

$V_1 = \frac{2}{3} R^2 h = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha$, trong đó $R = \frac{AB}{2}$, $\alpha = \widehat{PMN}$.

Câu 11. Cho một mô hình 3-D mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên. Biết rằng đường hầm mô hình có chiều dài 5 (cm); khi cắt hình này bởi mặt phẳng vuông góc với đáy của nó, ta được thiết diện là một hình parabol có độ dài đáy gấp đôi chiều cao parabol. Chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y = 3 - \frac{2}{5}x$ (cm), với x (cm) là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Tính thể tích (theo đơn vị cm^3) không gian bên trong đường hầm mô hình (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



A. 29.

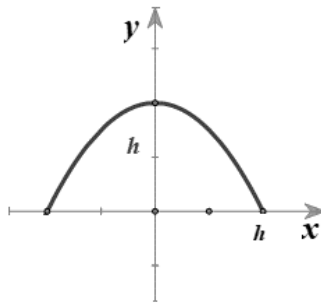
B. 27.

C. 31.

D. 33.

Lời giải

Chọn A



Xét một thiết diện parabol có chiều cao là h và độ dài đáy $2h$ và chọn hệ trục Oxy như hình vẽ trên.

Parabol (P) có phương trình $(P): y = ax^2 + h, (a < 0)$

Có $B(h; 0) \in (P) \Leftrightarrow 0 = ah^2 + h \Leftrightarrow a = -\frac{1}{h} (do h > 0)$

Diện tích S của thiết diện: $S = \int_{-h}^h \left(-\frac{1}{h}x^2 + h \right) dx = \frac{4h^2}{3}, h = 3 - \frac{2}{5}x$

$$\Rightarrow S(x) = \frac{4}{3} \left(3 - \frac{2}{5}x \right)^2$$

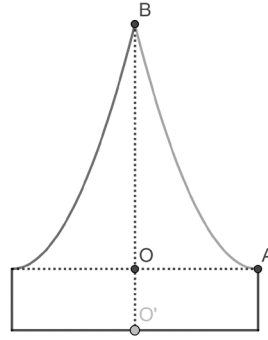
Suy ra thể tích không gian bên trong của đường hầm mô hình:

$$\Rightarrow V = \int_0^5 S(x) dx = \int_0^5 \frac{4}{3} \left(3 - \frac{2}{5}x \right)^2 dx \approx 28,888$$

$$\Rightarrow V \approx 29 (\text{cm}^3)$$

Câu 12. Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, bạn Minh Hiền đã làm một chiếc mũ “cách điệu” cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên

dưới. Biết rằng $OO' = 5$ cm, $OA = 10$ cm, $OB = 20$ cm, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm A . Thể tích của chiếc mũ bằng



A. $\frac{2750\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$

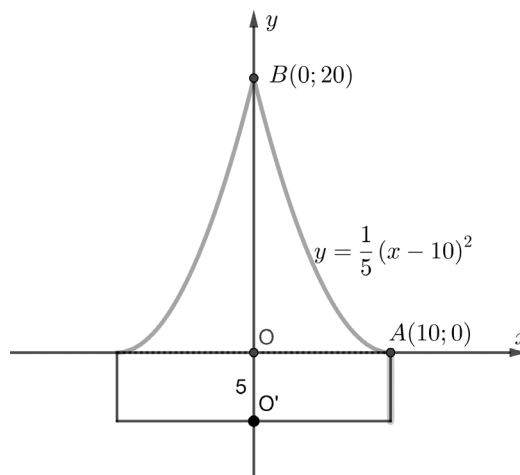
B. $\frac{2500\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$

C. $\frac{2050\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$

D. $\frac{2250\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$

Lời giải

Chọn B



Ta gọi thể tích của chiếc mũ là V .

Thể tích của khối trụ có bán kính đáy bằng $OA = 10$ cm và đường cao $OO' = 5$ cm là V_1 .

Thể tích của vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong AB và hai trục tọa độ quanh trục Oy là V_2 .

Ta có $V = V_1 + V_2$

$$V_1 = 5 \cdot 10^2 \pi = 500\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Do parabol có đỉnh A nên nó có phương trình dạng $(P): y = a(x - 10)^2$.

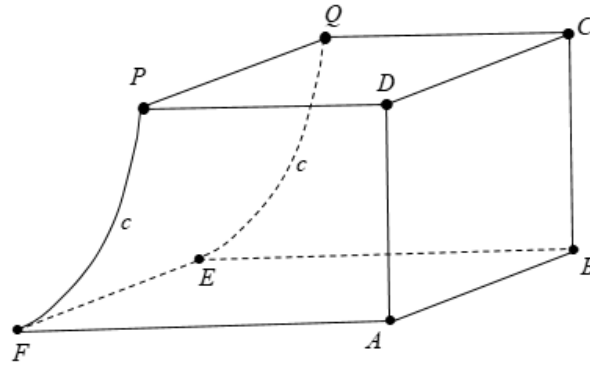
Vì (P) qua điểm $B(0; 20)$ nên $a = \frac{1}{5}$.

Do đó, $(P): y = \frac{1}{5}(x - 10)^2$. Từ đó suy ra $x = 10 - \sqrt{5y}$ (do $x < 10$).

$$\text{Suy ra } V_2 = \pi \int_0^{20} (10 - \sqrt{5y})^2 dy = \pi \left(3000 - \frac{8000}{3} \right) = \frac{1000}{3} \pi \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Do đó $V = V_1 + V_2 = \frac{1000}{3}\pi + 500\pi = \frac{2500}{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)}.$

Câu 13. Một chi tiết máy được thiết kế như hình vẽ bên.

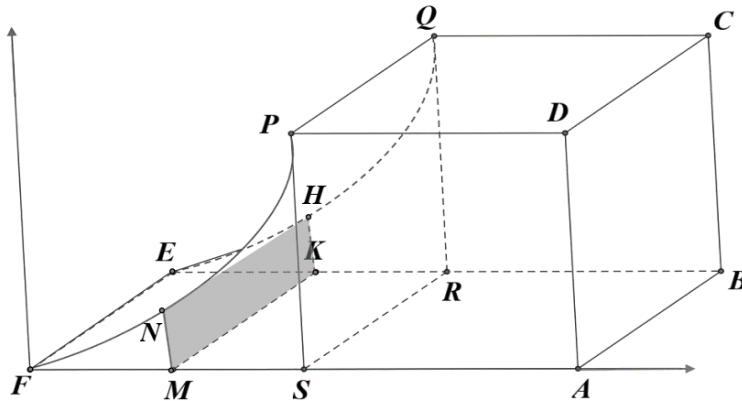


Các tứ giác $ABCD, CDPQ$ là các hình vuông cạnh $2,5\text{ cm}$. Tứ giác $ABEF$ là hình chữ nhật có $BE = 3,5\text{ cm}$. Mặt bên $PQEF$ được mài nhẵn theo đường parabol (P) có đỉnh parabol nằm trên cạnh EF . Thể tích của chi tiết máy bằng

- A. $\frac{395}{24}\text{ cm}^3$. B. $\frac{50}{3}\text{ cm}^3$. C. $\frac{125}{8}\text{ cm}^3$. **D. $\frac{425}{24}\text{ cm}^3$.**

Lời giải

Chọn D



Gọi hình chiếu của P, Q trên AF và BE là R và S .

Vật thể được chia thành hình lập phương $ABCD.PQRS$ có cạnh $2,5\text{ cm}$, thể tích $V_1 = \frac{125}{8}\text{ cm}^3$ và phần

còn lại có thể tích V_2 . Khi đó thể tích vật thể $V = V_1 + V_2 = \frac{125}{8} + V_2$.

Đặt hệ trục $Oxyz$ sao cho O trùng với F , Ox trùng với FA , Oy trùng với tia Fy song song với AD .

Khi đó Parabol (P) có phương trình dạng $y = ax^2$, đi qua điểm $P\left(1; \frac{5}{2}\right)$ do đó $a = \frac{5}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}x^2$.

Cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với Ox và đi qua điểm $M(x; 0; 0)$, $0 \leq x \leq 1$ ta được thiết diện là

hình chữ nhật $MNHK$ có cạnh là $MN = \frac{5}{2}x^2$ và $MK = \frac{5}{2}$ do đó diện tích $S(x) = \frac{25}{4}x^2$

Áp dụng công thức thể tích vật thể ta có $V_2 = \int_0^1 \frac{25}{4} x^2 dx = \frac{25}{12}$

$$\text{Từ đó } V = \frac{125}{8} + \frac{25}{12} = \frac{425}{24} \text{ cm}^3$$

Câu 14. Bỏ dọc một quả dưa hấu ta được thiết diện là hình elip có trục lớn 28 cm, trục nhỏ 25 cm. Biết cứ 1000 cm^3 dưa hấu sẽ làm được cốc sinh tố giá 20000 đồng. Hỏi từ quả dưa hấu trên có thể thu được bao nhiêu tiền từ việc bán nước sinh tố? Biết rằng bề dày vỏ dưa không đáng kể.

- A.** 183000 đồng. **B.** 180000 đồng. **C.** 185000 đồng. **D.** 190000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Đường elip có trục lớn 28 cm, trục nhỏ 25 cm có phương trình

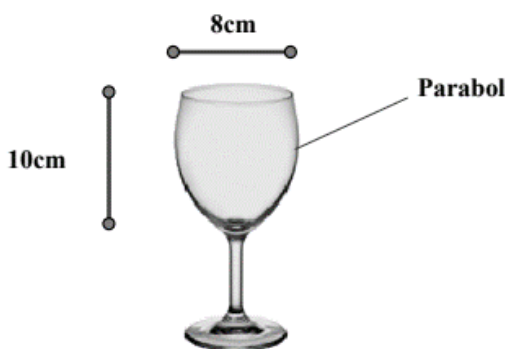
$$+\frac{y^2}{\left(\frac{25}{2}\right)^2}=1 \Leftrightarrow y^2=\left(\frac{25}{2}\right)^2\left(1-\frac{x^2}{14^2}\right) \Leftrightarrow y=\pm \frac{25}{2} \sqrt{1-\frac{x^2}{14^2}} .$$

Do đó thể tích quả dưa là

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-14}^{14} \left(\frac{25}{2} \sqrt{1-\frac{x^2}{14^2}}\right)^2 dx = \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \int_{-14}^{14} \left(1-\frac{x^2}{14^2}\right) dx = \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 14^2}\right) \Bigg|_{-14}^{14} = \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \frac{56}{3} \\ &= \frac{8750\pi}{3} \text{ cm}^3 . \end{aligned}$$

Do đó tiền bán nước thu được là $\frac{8750\pi \cdot 20000}{3 \cdot 1000} \approx 183259$ đồng.

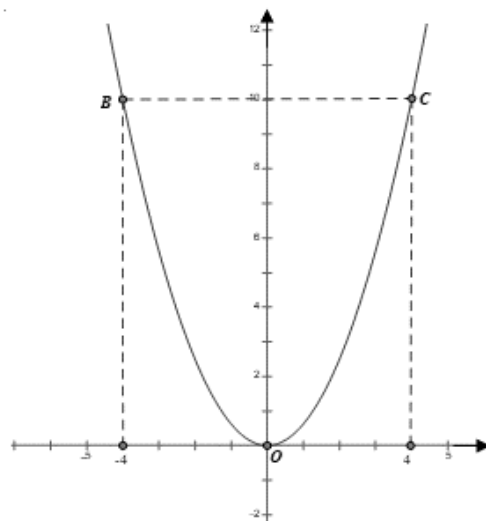
Câu 15. Một cốc rượu có hình dạng tròn xoay và kích thước như hình vẽ, thiết diện dọc của cốc (bỏ dọc cốc thành 2 phần bằng nhau) là một đường Parabol. Tính thể tích tối đa mà cốc có thể chứa được (làm tròn 2 chữ số thập phân)



- A.** $V \approx 320 \text{ cm}^3$. **B.** $V \approx 1005,31 \text{ cm}^3$. **C.** $V \approx 251,33 \text{ cm}^3$. **D.** $V \approx 502,65 \text{ cm}^3$.

Lời giải

Chọn C

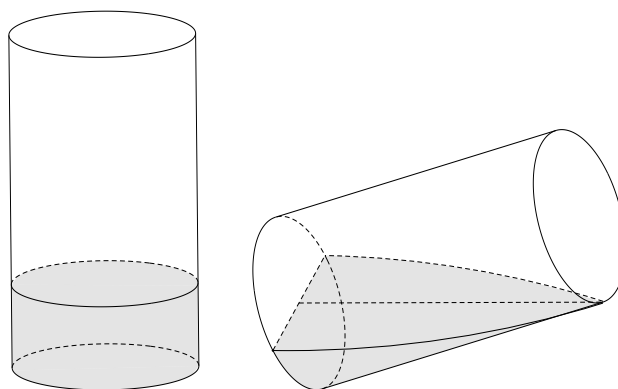


Parabol có phương trình $y = \frac{5}{8}x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{5}y$

Thể tích tối đa cốc:

$$V = \pi \int_0^{10} \left(\frac{8}{5}y \right) dy \approx 251,33.$$

Câu 16. Có một cốc nước thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 6 cm, chiều cao lòng cốc là 10 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì đáy mực nước trùng với đường kính đáy.



A. 240 cm^3 .

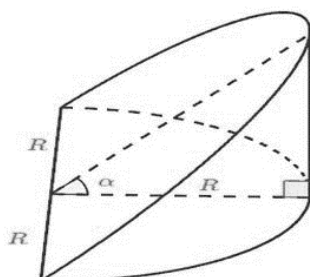
B. $240\pi\text{ cm}^3$.

C. 120 cm^3 .

D. $120\pi\text{ cm}^3$.

Lời giải

Chọn A



Cách 1. Xét thiết diện cắt góc thủy tinh vuông góc với đường kính tại vị trí bất kỳ có:

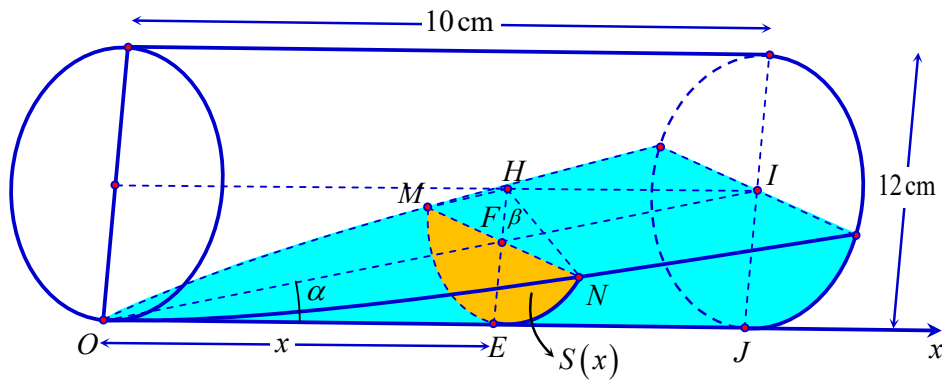
$$S(x) = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \tan \alpha \Rightarrow S(x) = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \tan \alpha.$$

$$\text{Thể tích hình cái nêm là: } V = \frac{1}{2} \tan \alpha \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha.$$

$$\text{Thể tích khối nước tạo thành khi nguyên cốc có hình dạng cái nêm nên } V_{kn} = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha.$$

$$\Rightarrow V_{kn} = \frac{2}{3} R^3 \cdot \frac{h}{R} = 240 \text{ cm}^3.$$

Cách 2. Dựng hệ trục tọa độ $Oxyz$



Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện do mặt phẳng có phương vuông góc với trục Ox với khối nước, mặt phẳng này cắt trục Ox tại điểm có hoành độ $h \geq x \geq 0$.

Gọi $\widehat{IOJ} = \alpha, \widehat{FHN} = \beta, OE = x$

$$\tan \alpha = \frac{IJ}{OJ} = \frac{6}{10} = \frac{EF}{OE} \Rightarrow EF = \frac{6x}{10} \Rightarrow HF = 6 - \frac{6x}{10}.$$

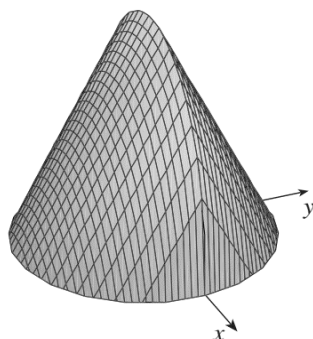
$$\cos \beta = \frac{HF}{HN} = \frac{6 - \frac{6x}{10}}{6} = 1 - \frac{x}{10}; \quad \beta = \arccos\left(1 - \frac{x}{10}\right)$$

$$S(x) = S_{(\text{hình quạt})} - S_{HMN} = \frac{1}{2} HN^2 \cdot 2\beta - \frac{1}{2} HM \cdot HN \cdot \sin 2\beta$$

$$\Rightarrow S(x) = 6^2 \arccos\left(1 - \frac{x}{10}\right) - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 \left(1 - \frac{x}{10}\right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{10}\right)^2}$$

$$\Rightarrow V = \int_0^{10} S(x) dx = \int_0^{10} \left(36 \arccos\left(1 - \frac{x}{10}\right) - 36 \left(1 - \frac{x}{10}\right) \sqrt{1 - \left(1 - \frac{x}{10}\right)^2} \right) dx = 240.$$

Câu 17. Cho vật thể đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) thì được thiết diện là một tam giác đều. Thể tích V của vật thể đó là



A. $V = \sqrt{3}$.

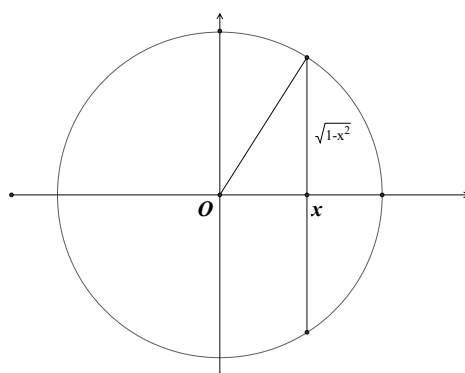
B. $V = 3\sqrt{3}$.

C. $V = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

D. $V = \pi$.

Lời giải

Chọn C



Do vật thể có đáy là đường tròn và khi cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox được thiết diện là tam giác đều do đó vật thể đối xứng qua mặt phẳng vuông góc với trục Oy tại điểm O .

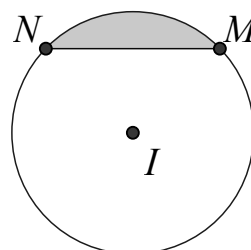
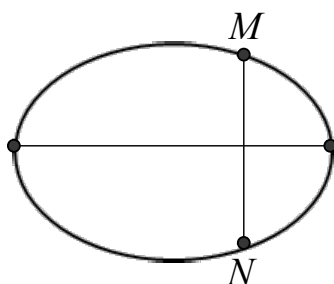
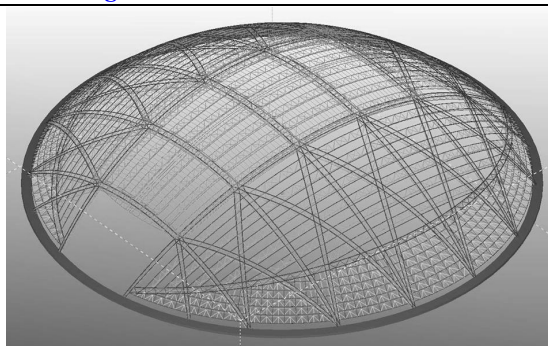
Cạnh của tam giác đều thiết diện là: $a = 2\sqrt{1-x^2}$.

Diện tích tam giác thiết diện là: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = (1-x^2)\sqrt{3}$.

Thể tích khối cần tìm là:

$$V = 2 \int_0^1 S dx = 2 \int_0^1 \sqrt{3} (1-x^2) = 2\sqrt{3} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 18. Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$ (hình vẽ). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M, N (hình vẽ) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN} = 90^\circ$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Hỏi thể tích xấp xỉ bao nhiêu?



A. $57793m^3$.

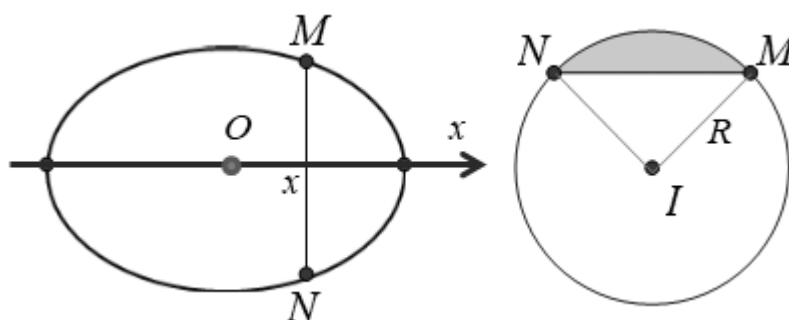
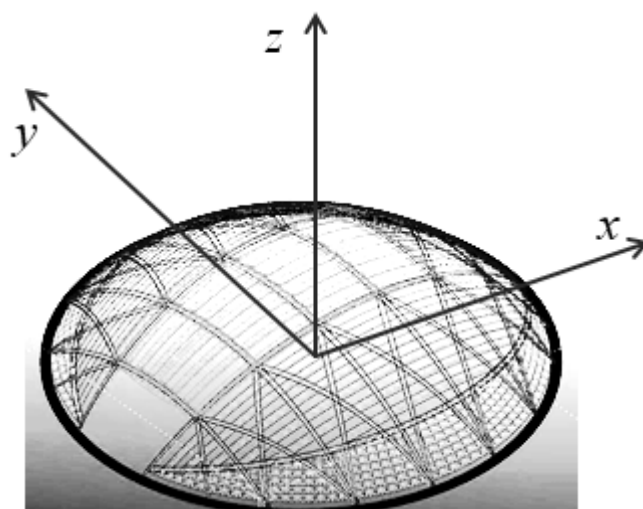
B. $115586m^3$.

C. $32162m^3$.

D. $101793m^3$.

Lời giải

Chọn B



Chọn hệ trục như hình vẽ

Ta cần tìm diện tích của $S(x)$ thiết diện.Gọi $d(O, MN) = x$

$$(E): \frac{x^2}{75^2} + \frac{y^2}{45^2} = 1.$$

$$\text{Lúc đó } MN = 2y = 2\sqrt{45^2 \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right)} = 90\sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}}$$

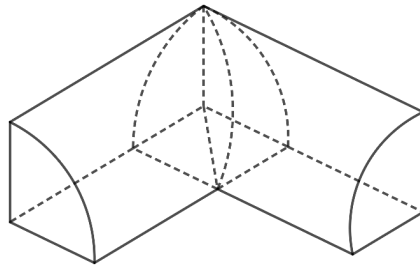
$$\Rightarrow R = \frac{MN}{\sqrt{2}} = \frac{90}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{75^2}} \Rightarrow R^2 = \frac{90^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right)$$

$$S(x) = \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\right)R^2 = (\pi - 2)\frac{2025}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right).$$

Thể tích khoảng không cần tìm là

$$V = \int_{-75}^{75} (\pi - 2)\frac{2025}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{75^2}\right) dx \approx 115586 m^3.$$

Câu 19. Gọi (H) là phần giao của hai khối $\frac{1}{4}$ hình trụ có bán kính a , hai trục hình trụ vuông góc với nhau như hình vẽ sau. Tính thể tích của khối (H) .



A. $V_{(H)} = \frac{a^3}{2}.$

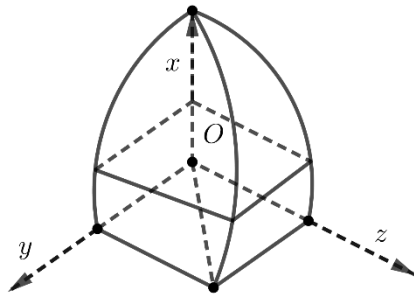
B. $V_{(H)} = \frac{3a^3}{4}.$

C. $V_{(H)} = \frac{2a^3}{3}.$

D. $V_{(H)} = \frac{\pi a^3}{4}.$

Lời giải

Chọn C



• Đặt hệ toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ, xét mặt cắt song song với mp (Oyz) cắt trục Ox tại x : thiết diện mặt cắt luôn là hình vuông có cạnh $\sqrt{a^2 - x^2}$ ($0 \leq x \leq a$).

• Do đó thiết diện mặt cắt có diện tích: $S(x) = a^2 - x^2$.

• Vậy $V_{(H)} = \int_0^a S(x) dx = \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^a = \frac{2a^3}{3}.$

Câu 20. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây.

Cho $h'(t) = 6at^2 + 2bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 3 giây thì thể tích nước trong bể là $90m^3$, sau 6 giây thì thể tích nước trong bể là $504m^3$. Tính thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây.

- A. $1458m^3$. B. $600m^3$. C. $2200m^3$. D. $4200m^3$.

Lời giải

Chọn A

$$\int_0^3 (6at^2 + 2bt) dt = 90 \Leftrightarrow (2at^3 + bt^2) \Big|_0^3 = 90 \Leftrightarrow 54a + 9b = 90 \quad (1)$$

$$\int_0^6 (6at^2 + 2bt) dt = 504 \Leftrightarrow (2at^3 + bt^2) \Big|_0^6 = 504 \Leftrightarrow 432a + 36b = 504 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = 6 \end{cases}. \text{ Sau khi bơm 9 giây thì thể tích nước trong bể là:}$$

$$V = \int_0^9 (4t^2 + 12t) dt = \left(\frac{4}{3}t^3 + 6t^2 \right) \Big|_0^9 = 1458(m^3).$$

Câu 21. Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là 280 cm. Giả sử $h(t)$ là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t) = \frac{1}{500}\sqrt[3]{t}$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao lâu thì bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi (làm tròn đến giây)?

- A. 2 giờ 36 giây. B. 2 giờ 48 giây. C. 2 giờ 38 giây. D. 2 giờ 46 giây.

Lời giải

Chọn C

Gọi x là thời điểm bơm được số nước bằng $\frac{3}{4}$ độ sâu của bể (x tính bằng giây).

Ta có:

$$\int_0^x \frac{1}{500}\sqrt[3]{t} dt = \frac{3}{4} \cdot 280$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} \Big|_0^x = 105000$$

$$\Rightarrow x\sqrt[3]{x} = 140000$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{x^4} = 140000$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[4]{140000^3}$$

$$\Rightarrow x \approx 7237,6242 \text{ giây}$$

$\Rightarrow$ 2 giờ 38 giây.