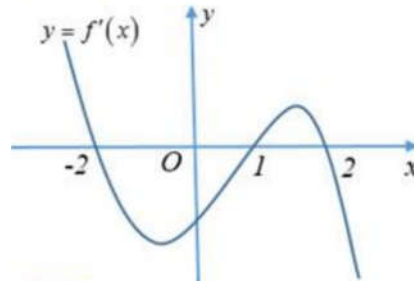


ĐƠN ĐIỆU, CỰC TRỊ HÀM CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

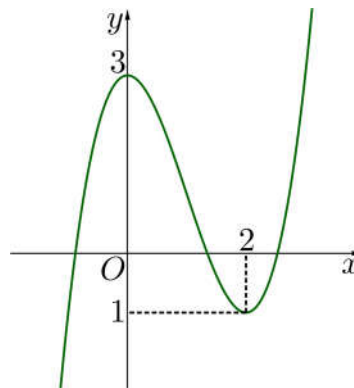
ĐỀ BÀI

Câu 1. Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(|x| + m)$ có 5 điểm cực trị?



- A. 2. B. 3. C. 4. D. Vô số.

Câu 2. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Xét hàm số $h(x) = f(|x - 1|)$. Chọn khẳng định đúng.

- A. Hàm số $h(x) = f(|x - 1|)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
 B. Hàm số $h(x) = f(|x - 1|)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ và $(3; +\infty)$.
 C. Hàm số $h(x) = f(|x - 1|)$ nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
 D. Hàm số $h(x) = f(|x - 1|)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

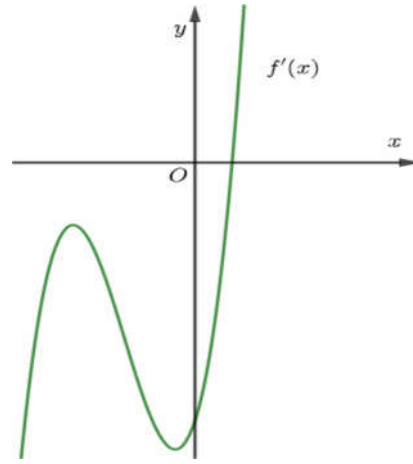
Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-3) = 0$ đồng thời có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $g(x) = \left| 2(x+1)^6 - 6(x+1)^2 - 3f(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2) \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 7. B. 6. C. 3. D. 5.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau:



Biết $f(0)=0$. Hỏi hàm số $g(x)=\left|\frac{1}{3}f(x^3)-2x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 5.

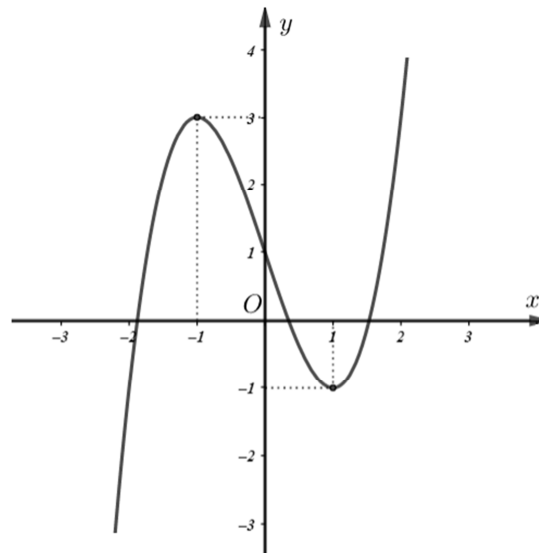
Câu 5. Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0)=0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-4	-1	$-\infty$

Hàm số $g(x)=\left|f(-x^2)+3x^2-x^4\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4. B. 5. C. 2. D. 3.

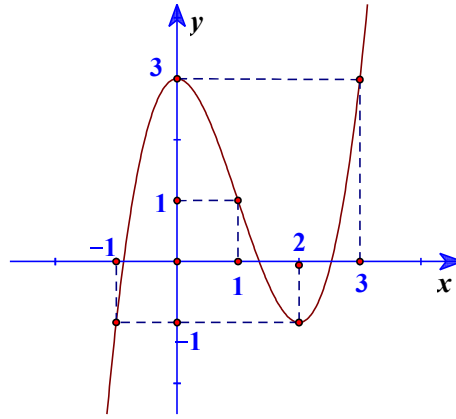
Câu 6. Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$ có đồ thị như hình bên



Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|[f(x)]^2-4f(x)+3\right|$ là?

- A. 11. B. 8. C. 9. D. 10.

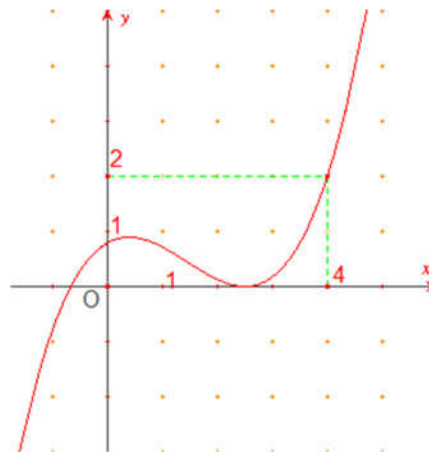
Câu 7. Cho hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ



Số cực trị của hàm số $y = |f(x) + 1| - 3$ là

- A. 4. B. 3. C. 5. D. 2.

Câu 8. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0) = 0$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



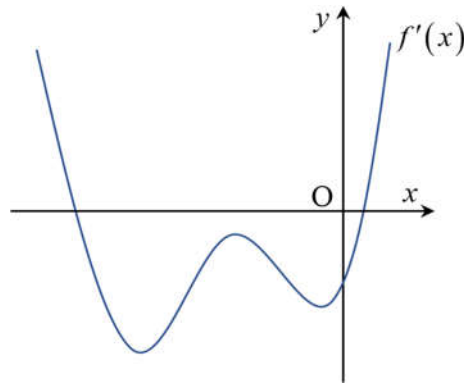
Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left| f(x^2) - \frac{2}{3}x^3 \right|$.

- A. 3. B. 7. C. 6 D. 5.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x) = \left| -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(2m+3)x^2 - (m^2+3m)x + \frac{2}{3} \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-9; 9]$ để hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$?

- A. 3. B. 2. C. 16. D. 9.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 0$ và có $y = f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left| f(|x|^3) - |x| \right|$ là

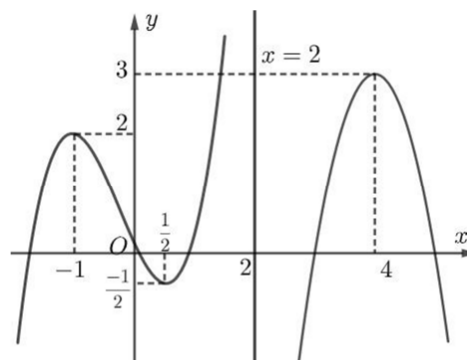


- A. 0. B. 3. C. 5. D. 2.

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$, để hàm số $y = |mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m|$ có 5 điểm cực trị.

- A. 9. B. 11. C. 7. D. 10.

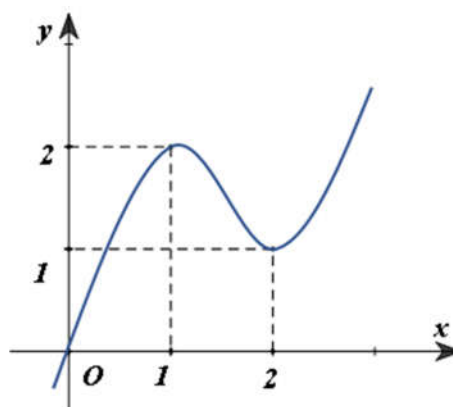
Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ và có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|2x - 1| + 2)$ là

- A. 5. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 13. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-100; 100]$ để hàm số $h(x) = |f^2(|x|) + 2f(|x|) - m|$ có đúng 7 điểm cực trị là:

A. 97.

B. 95.

C. 96.

D. 98.

Câu 14. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3m|$ có 7 điểm cực trị bằng

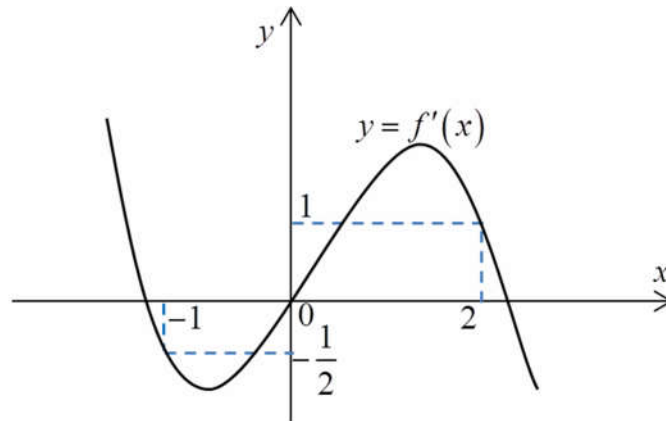
A. 2.

B. 5.

C. 3.

D. 1.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, ($ae < 0$). Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như bên. Hàm số $y = |4f(x) - x^2|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



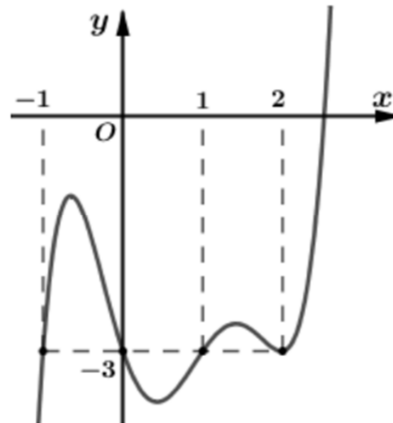
A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 2.

Câu 16. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0) < 0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x) = |f(x) + 3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



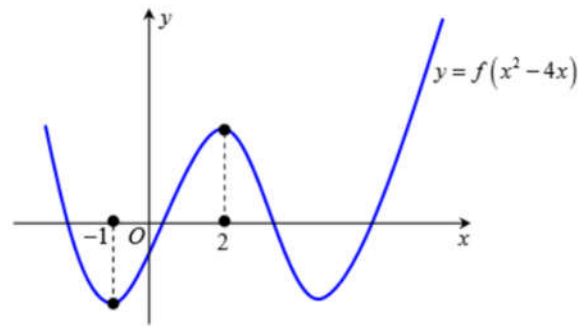
A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x^2 - 4x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 8|x| + 12)$ có tất cả bao nhiêu cực trị?



- A. 7. B. 3. C. 5. D. 1.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	m	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-1		$+\infty$

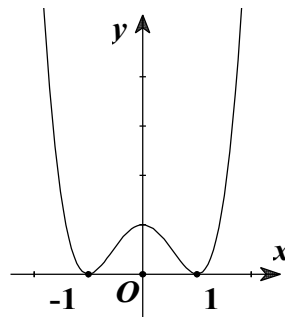
Hàm số $g(x) = |f(x^2) - x^2|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 3. C. 5. D. 7.

Câu 19 . Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x^2 - 4x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(2x^2 - 12x + m)$ có đúng 5 điểm cực trị?

- A. 17. B. 16. C. 19. D. 18.

Câu 20. Cho $f(x)$ là một hàm đa thức bậc năm thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên

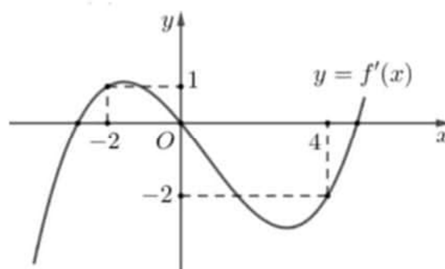


Hàm số $h(x) = \left| f(\cos x) - \frac{1}{3} \cos^3 x + \cos^2 x \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 2\pi)$?

- A. 13. B. 11. C. 9. D. 7

Lời giải

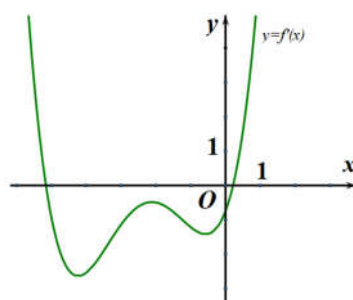
Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



giá trị của a để hàm số $g(x) = |4f(x) + x^2 - a|$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$ là

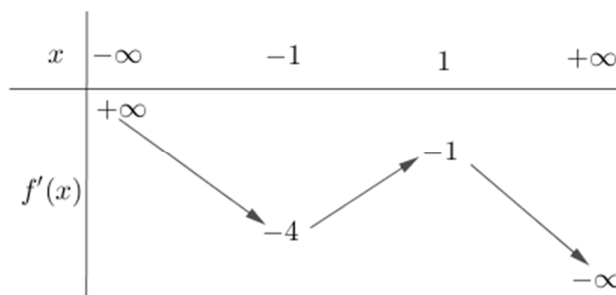
- A. $a \leq 4f(-2) + 4$. B. $a < 4f(4) + 16$. C. $a < 4f(-2) + 4$. D. $a \leq 4f(4) + 16$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$. Biết $y = f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^3) - x|$ là



- A. 5. B. 4. C. 6. D. 3.

Câu 23. Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $g(x) = |f(-x^2) + 3x^2 - x^4|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 4. B. 3. C. 5. D. 2.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	5	-3	$+\infty$	

Hàm số $y = |f(1-3x) + 1|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

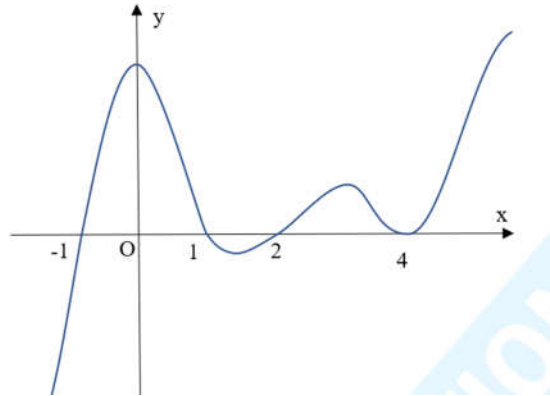
Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m \in [-2021; 2021]$ để hàm số $g(x) = |x^3 - 3mx^2 - 3(m+2)x - m + 1|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

- A. 4041. B. 4042. C. 2021. D. 4039

Câu 26. Cho hàm số $y = |x^2 - 2mx + 1| + 2x$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của $m \in [-10; 10]$ để hàm số có điểm cực đại. Số phần tử của tập S là:

- A. 20. B. 21. C. 19. D. 18.

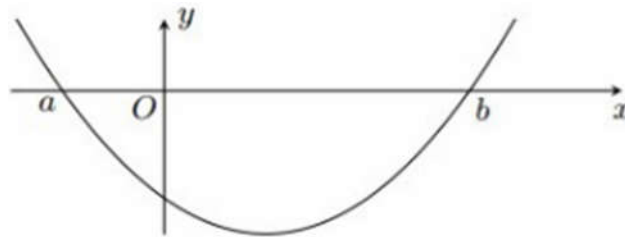
Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đúng 4 điểm chung với trục hoành như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(|x|^3 - 3|x| + m + 2021)$ có 11 điểm cực trị?

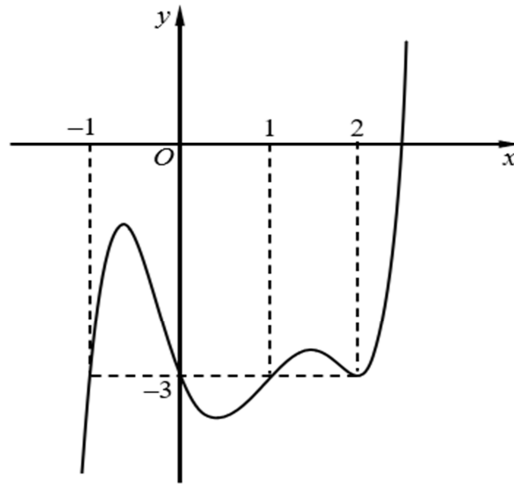
- A. 0. B. 2. C. 5. D. 1.

Câu 28. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị của hàm đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ và $f(b) > -1$. Với các giá trị nguyên dương của tham số m , số điểm cực trị nhiều nhất của hàm số $g(x) = |f^2(x) + 2f(x) + m|$ là



- A. 3. B. 6. C. 7. D. 5.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) < 0$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây.



Hàm số $g(x) = |f(|x|) + 3|x|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu ?

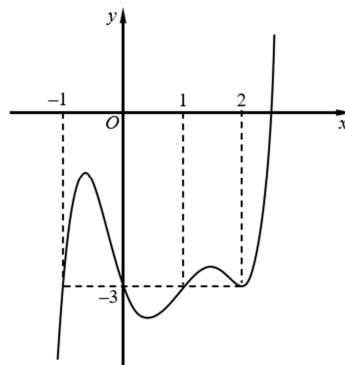
A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 30. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0) < 0$ và đồ thị bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x) = |f(x) + 3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

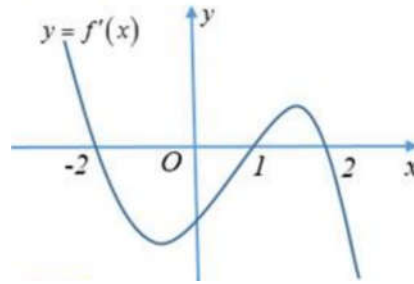
-----Hết-----

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B	B	D	B	B	C	B	D	B	C	D	D	C	D	A
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	A	C	A	D	D	A	C	D	A	D	D	A	B	B

LỜI GIẢI THAM KHẢO

Câu 1. Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(|x| + m)$ có 5 điểm cực trị?



A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. Vô số.

Lời giải

Hàm số $y = f(|x| + m)$ là hàm số chẵn.

Với $x > 0$, $y = f(|x| + m) = f(x + m)$ có $y' = f'(x + m)$.

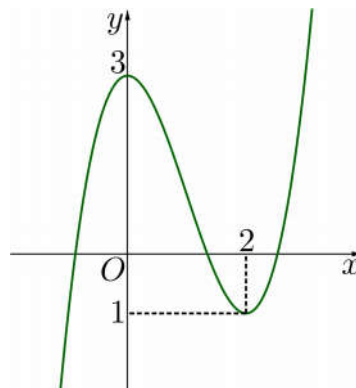
$$y' = f'(x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + m = -2 \\ x + m = 1 \\ x + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m - 2 \\ x = -m + 1 \\ x = -m + 2 \end{cases}.$$

Hàm số $y = f(|x| + m)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $y = f(|x| + m)$ có hai điểm cực trị dương hay:

$$\begin{cases} -m - 2 \leq 0 \\ -m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < 1.$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(|x| + m)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 2. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Xét hàm số $h(x) = f(|x - 1|)$. Chọn khẳng định đúng.

A. Hàm số $h(x) = f(|x - 1|)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

B. Hàm số $h(x) = f(|x - 1|)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ và $(3; +\infty)$.

C. Hàm số $h(x) = f(|x - 1|)$ nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

D. Hàm số $h(x) = f(|x - 1|)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Lời giải

Ta có $h'(x) = \frac{x-1}{|x-1|} \cdot f'(|x-1|)$.

$$f'(|x-1|) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| = 0 \\ |x-1| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	$ $	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$								

Vậy hàm số $h(x) = f(|x-1|)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(-3) = 0$ đồng thời có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x) = \left| 2(x+1)^6 - 6(x+1)^2 - 3f(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2) \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 7.

B. 6.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Đặt $h(x) = 2(x+1)^6 - 6(x+1)^2 - 3f(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2)$

$$\Rightarrow h'(x) = 12(x+1)^5 - 12(x+1) - 3(-4x^3 - 12x^2 - 8x) \cdot f'(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2)$$

$$= 12(x+1)(x^2+2x)(x^2+2x+2) + 12(x+1)(x^2+2x) \cdot f'(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2)$$

$$= 12(x+1)(x^2+2x) \left[x^2+2x+2 + f'(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2) \right]$$

Mà $-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2 = -[x(x+2)]^2 - 2 \leq -2, \forall x \in \mathbb{R}$ nên dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ ta suy ra $f'(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2) \geq 0$.

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 2 + f'(-x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

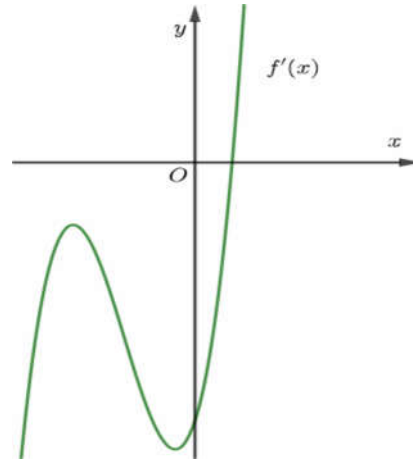
Do đó dấu của $h'(x)$ cùng dấu với $u(x) = 12(x+1)(x^2+2x)$, tức là đổi dấu khi đi qua các điểm $x = -2; x = -1; x = 0$.

Vậy hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị.

Ta có $h(-1) = -3f(-3) = 0$ nên đồ thị hàm số $y = h(x)$ tiếp xúc Ox tại $x = -1$ và cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt.

Vậy $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau:



Biết $f(0) = 0$. Hỏi hàm số $g(x) = \left| \frac{1}{3}f(x^3) - 2x \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

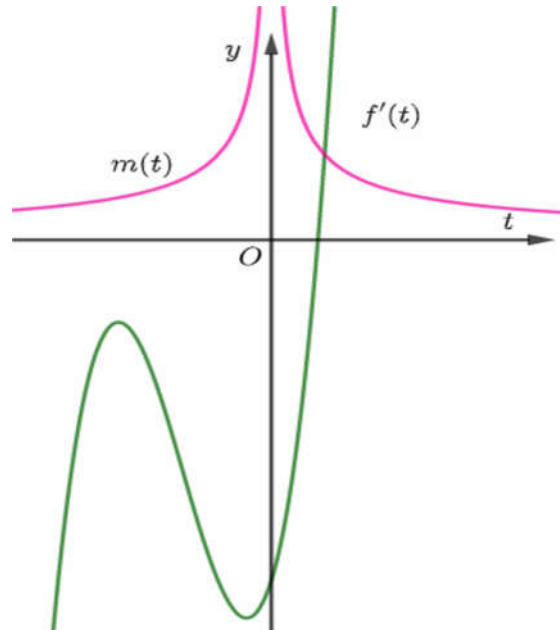
$$\text{Đặt } h(x) = \frac{1}{3}f(x^3) - 2x \Rightarrow h'(x) = x^2 f'(x^3) - 2$$

$$\text{Ta có } h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3) = \frac{2}{x^2}, (x \neq 0), (1)$$

$$\text{Đặt } t = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{t}. \text{ Từ (1) ta có: } f'(t) = \frac{2}{\sqrt[3]{t^2}}, (2)$$

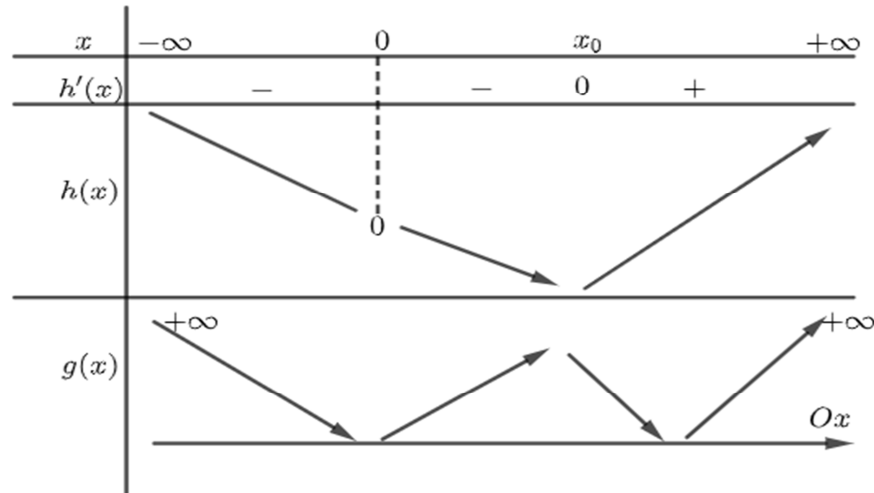
$$\text{Xét } m(t) = \frac{2}{\sqrt[3]{t^2}} \Rightarrow m'(t) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{t^5}}$$

Lúc này ta có hình vẽ 2 đồ thị như sau



Suy ra pt (2) có 1 nghiệm $t = t_0 > 0 \Rightarrow$ pt (1) có nghiệm $x = \sqrt[3]{t_0} = x_0 > 0$

Bảng biến thiên của $h(x), g(x) = |h(x)|$ như sau



Vậy hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 5. Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-4	-1	$-\infty$

Hàm số $g(x) = |f(-x^2) + 3x^2 - x^4|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 5.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Xét hàm số $h(x) = f(-x^2) + 3x^2 - x^4$, $x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $h'(x) = -2xf'(-x^2) + 6x - 4x^3$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(-x^2) = 3 - 2x^2 \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $t = -x^2$, khi đó phương trình (1) trở thành: $f'(t) = 3 + 2t$ (2).

Vì $3 + 2t > -1$, $\forall t \geq -1$ nên: (2) $\Leftrightarrow t = a$ với $a < -1$.

$$\text{Suy ra } -x^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{-a} \\ x = \sqrt{-a} \end{cases}.$$

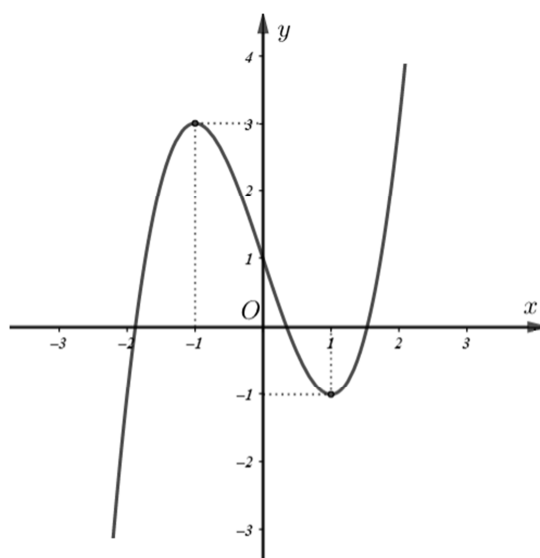
Lại có: $h(0) = f(0) + 3 \cdot 0^2 - 0^4 = 0$ (vì $f(0) = 0$).

Ta có bảng biến thiên sau đây:

x	$-\infty$	$-\sqrt{-a}$	0	$\sqrt{-a}$	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	0	-
$h(x)$	$-\infty$	$h(-\sqrt{-a})$	0	$h(\sqrt{-a})$	$-\infty$

Vậy hàm số $g(x) = |h(x)| = |f(x^2) + 3x^2 - x^4|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có đồ thị như hình bên



Số điểm cực trị của hàm số $y = [f(x)]^2 - 4f(x) + 3$ là?

A. 11.

B. 8.

C. 9.

D. 10.

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = f^2(x) - 4f(x) + 3$, suy ra $g'(x) = 2[f(x) - 2]f'(x)$

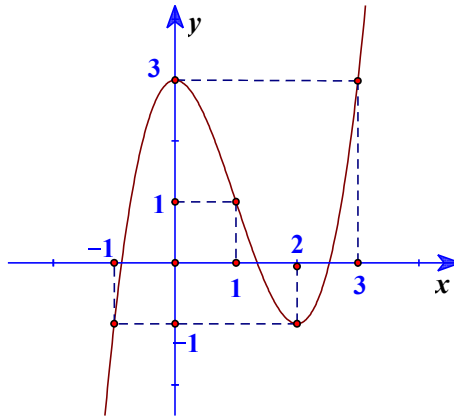
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha, \alpha < -1 \\ x = \beta, -1 < \beta < 0 \\ x = \gamma, \gamma > 1 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Ta có BBT:

x	$-\infty$	α	-1	β	1	γ	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	-1	0	-1	8	-1	$+\infty$

Vậy hàm số $y = |g(x)|$ có $5 + 4 = 9$ điểm cực trị.

Câu 7. Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Số cực trị của hàm số $y = |f(x) + 1| - 3$ là

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

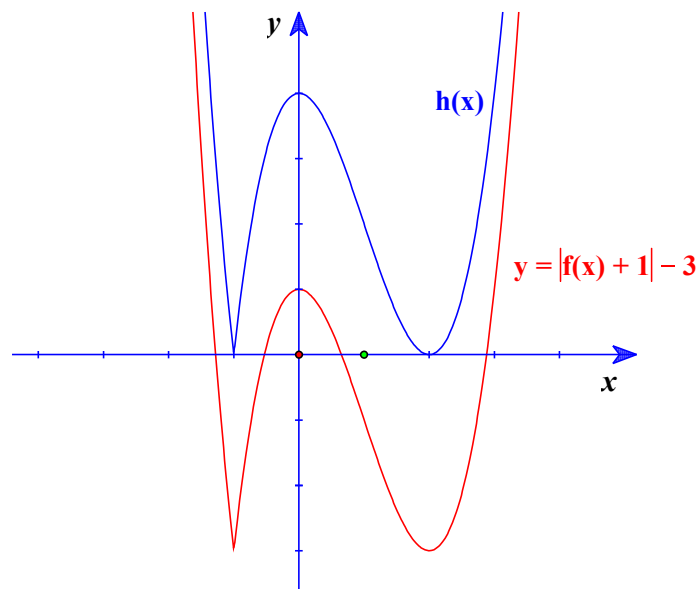
Lời giải

Đầu tiên ta nhận được đồ thị hàm số $g(x) = f(x) + 1$ bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ lên trên 1 đơn vị.

Kế tiếp, ta vẽ được đồ thị hàm số $h(x) = |f(x) + 1|$ bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành của đồ thị hàm số $g(x)$ qua trục hoành.

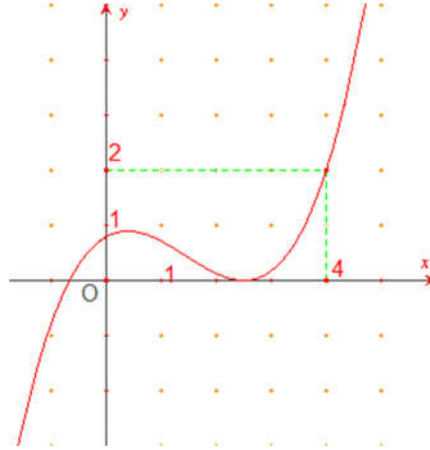
Cuối cùng, ta nhận được đồ thị hàm số $y = |f(x) + 1| - 3$ bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $h(x)$ xuống dưới 3 đơn vị.

Ta có hình vẽ sau



Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 8. Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(0)=0$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x^2)-\frac{2}{3}x^3\right|$.

A. 3.

B. 7.

C. 6

D. 5.

Lời giải

Đặt $h(x)=f(x^2)-\frac{2}{3}x^3$, ta có $h(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có:

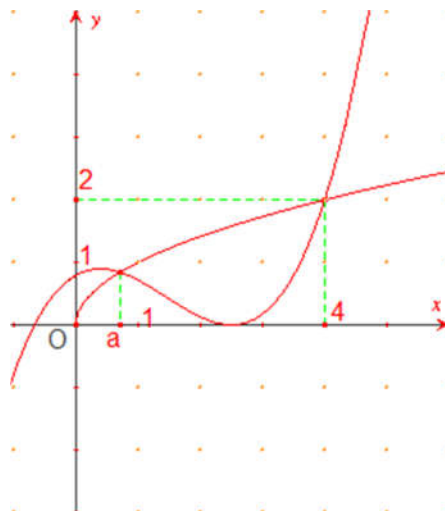
$$h'(x)=f'(x^2).2x-2x^2=2x[f'(x^2)-x].$$

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ f'(x^2)-x=0(*) \end{cases}$$

+ Nếu $x < 0$ thì $x^2 > 0$. Ta có: $f'(x^2) \geq 0$; $-x > 0$. Suy ra $(*)$ vô nghiệm.

+ Nếu $x \geq 0$ thì $(*) \Leftrightarrow f'(t)=\sqrt{t}$ (đặt $t=x^2$ với $t \geq 0$)

Xét đồ thị hàm số $y=f'(t)$; $y=\sqrt{t}$



Ta thấy: $f'(t) = \sqrt{t}$ có 2 nghiệm dương phân biệt là a và 4.

Suy ra (*) có 2 nghiệm dương phân biệt $\sqrt{a}$; 2.

Do đó $h'(x)$ có 3 nghiệm phân biệt ($h'(x)$ đổi dấu khi x qua 3 nghiệm đó) là 0; $\sqrt{a}$; 2.

Từ giả thiết $f(x)$ là hàm số bậc bốn, kết hợp đồ thị $f'(x)$ suy ra $f(x)$ có dạng

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, a > 0.$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = +\infty$, $h(0) = f(0) - 0 = 0$.

Nhìn vào lưới ô vuông và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy: Diện tích hình phẳng giới hạn

bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$, trục Ox , Oy và đường thẳng $x = 4$ nhỏ hơn 4. Do đó ta có:

$$\int_0^4 f'(x)dx < 4 \Leftrightarrow f(4) - f(0) < 4 \Leftrightarrow f(4) < 4.$$

$$\text{Suy ra } h(2) = f(4) - \frac{16}{3} < 0.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0	a	2	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+	0	+
$h(x)$	$+\infty$	0		$h(2) < 0$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $y = h(x)$ có 2 điểm cực trị không thuộc Ox và đồ thị

$y = h(x)$ cắt Ox tại 3 điểm phân biệt nên hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x) = \left| -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(2m+3)x^2 - (m^2+3m)x + \frac{2}{3} \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-9; 9]$ để hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$?

A. 3.

B. 2.

C. 16.

D. 9.

Lời giải

$$\text{Xét } g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(2m+3)x^2 - (m^2+3m)x + \frac{2}{3}.$$

$$g'(x) = -x^2 + (2m+3)x - (m^2+3m).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	m	$m+3$	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$				$-\infty$

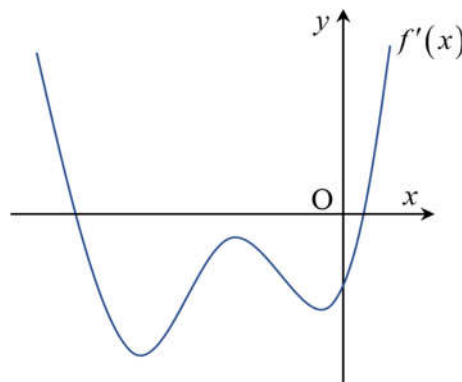
Hàm số $|g(x)|$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} g'(x) \geq 0, \forall x \in (1;2) \\ g(x) \leq 0, \forall x \in (1;2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 < 2 \leq m+3 \\ g(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 1 \\ -2m^2 - 2m + 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 1 \\ m \in (-\infty; -2] \cup [1; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+3 \leq 1 \\ g(2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ -2m^2 - 2m + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \in [-2; 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 1 \end{cases}$$

Vậy $m \in \{-2; 1\}$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 0$ và có $y = f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left| f(|x|^3) - |x| \right|$ là



- A. 0. B. 3. **C. 5.** D. 2.

Lời giải

Xét hàm số $h(x) = f(x^3) - x$

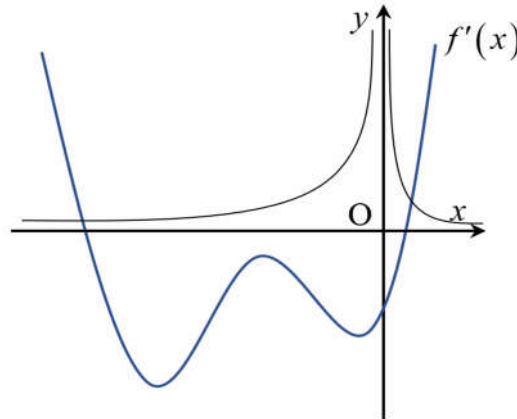
Ta có $h'(x) = 3x^2 f'(x^3) - 1$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3) = \frac{1}{3x^2} \quad (x \neq 0) \quad (1)$$

$$\text{Đặt } x^3 = t \Rightarrow x = \sqrt[3]{t} \Rightarrow x^2 = \sqrt[3]{t^2}.$$

$$\text{Khi đó (1) trở thành: } f'(t) = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \quad (2)$$

Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $y = f'(x)$ trên cùng hệ trục tọa độ Oxy , ta được:



Từ đồ thị suy ra phương trình (2) có hai nghiệm $t_1 = a < 0$ và $t_2 = b > 0$.

$\Rightarrow$ (1) có hai nghiệm $x = \sqrt[3]{a} < 0$ và $x = \sqrt[3]{b} > 0$.

Bảng biến thiên của $h(x)$, chú ý: $h(0) = f(0) = 0$

Của hàm số $h(|x|)$, $g(x) = |h(|x|)|$.

x	$-\infty$	$\sqrt[3]{a}$	0	$\sqrt[3]{b}$	$+\infty$	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-\infty$	$h(\sqrt[3]{a})$	0	$h(\sqrt[3]{b})$	$+\infty$	
$h(x)$	$+\infty$	0	0	0	$+\infty$	
$g(x) = h(x) $	$+\infty$	0	0	0	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x) = |h(|x|)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$, để hàm số $y = |mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m|$ có 5 điểm cực trị.

A. 9.

B. 11.

C. 7.

D. 10.

Lời giải

TH1: $m = 0$

Thay vào hàm số y ta được: $y = |-2x + 2|$ có 1 điểm cực trị nên $m = 0$ loại.

TH2: $m \neq 0$

Hàm số $y = |mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $f(x) = mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt

Xét phương trình: $f(x) = 0 \Leftrightarrow mx^3 - 3mx^2 + (3m - 2)x + 2 - m = 0$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(mx^2 - 2mx + m - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ mx^2 - 2mx + m - 2 = 0 (*) \end{cases}$$

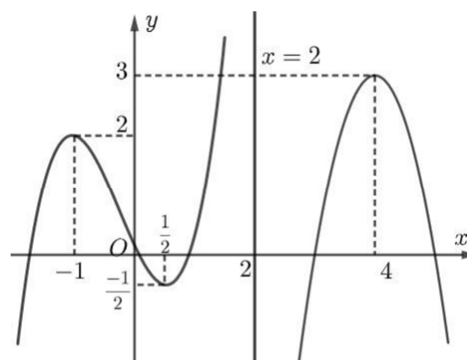
Để $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt thì $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ m - 2m + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 2m > 0 \Leftrightarrow m > 0 \\ -2 \neq 0 \end{cases}$$

Do $m \in [-10; 10]$ nên $m \in (0; 10]$

Vậy có 10 giá trị m thỏa mãn.

Câu 12. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ và có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(|2x - 1| + 2)$ là

A. 5.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

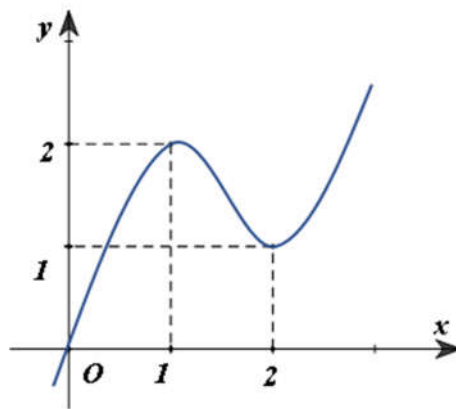
Hàm số $g(x) = f(|2x-1|+2)$ xác định khi $|2x-1|+2 \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$

$$g'(x) = (f(|2x-1|+2))' = 2 \cdot \frac{2x-1}{|2x-1|} \cdot f'(|2x-1|+2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(|2x-1|+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |2x-1|+2 = -1 \\ |2x-1|+2 = \frac{1}{2} \\ |2x-1|+2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow |2x-1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Hai nghiệm này là hai nghiệm bội lẻ, vậy hàm số $g(x) = f(|2x-1|+2)$ có đúng 2 điểm cực trị.

Câu 13. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-100; 100]$ để hàm số $h(x) = |f^2(|x|) + 2f(|x|) - m|$ có đúng 7 điểm cực trị là:

A. 97.

B. 95.

C. 96.

D. 98.

Lời giải

Đặt $g(x) = f^2(|x|) + 2f(|x|) - m$.

$$\Rightarrow g'(x) = 2f(|x|) \cdot f'(|x|) \cdot \frac{x}{|x|} + 2f'(|x|) \cdot \frac{x}{|x|} = 2 \cdot \frac{x}{|x|} \cdot f'(|x|) (f(|x|) + 1).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(|x|) = 0 \\ f(|x|) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$g'(x)$ không xác định tại $x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$+\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	+
$g(x)$	$+\infty$	$3-m$	$8-m$	$-m$	$8-m$	$3-m$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $h(x) = |g(x)|$ có đúng 7 điểm cực trị

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8-m \leq 0 \\ 3-m \geq 0 \\ -m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 8 \\ 0 < m \leq 3 \end{cases}$$

$$\text{mà } m \in [-100; 100] \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 8; 9; \dots; 100\}$$

Vậy có 96 giá trị m thỏa mãn.

Câu 14. Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3m|$ có 7 điểm cực trị bằng

A. 2.

B. 5.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3m$.

TXĐ $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Có } y' = 12x^3 - 12x^2 - 24x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	$3m-5$	$3m$	$3m-32$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy: Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

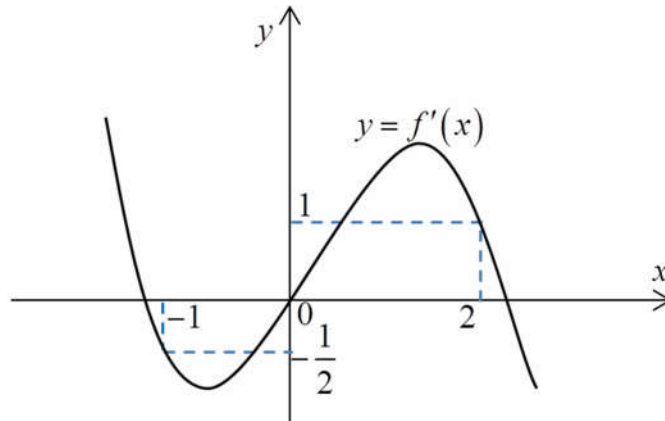
Khi đó, hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị khi phương trình $f(x) = 0$ có 4 nghiệm phân biệt bội lẻ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3m-5 < 0 \\ 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{5}{3}$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 1$.

Vậy tổng các giá trị nguyên của m bằng 1.

Câu 15 . Cho hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, ($ae < 0$). Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như bên.

Hàm số $y = |4f(x) - x^2|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



A. 3.

B. 5.

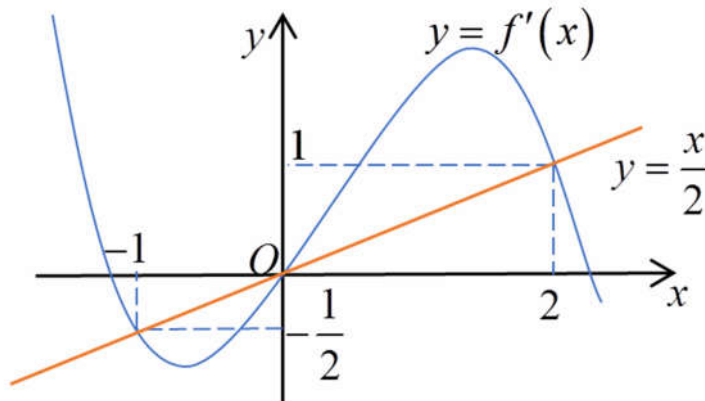
C. 4.

D. 2.

Lời giải

Xét hàm số: $h(x) = 4f(x) - x^2 \Rightarrow h'(x) = 4f'(x) - 2x$.

Xét: $h(x) = 0 \Leftrightarrow 4f'(x) - 2x = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{x}{2}$ (1).



Từ đồ thị ta thấy phương trình (1) có ba nghiệm: $x = -1; x = 0; x = 2$

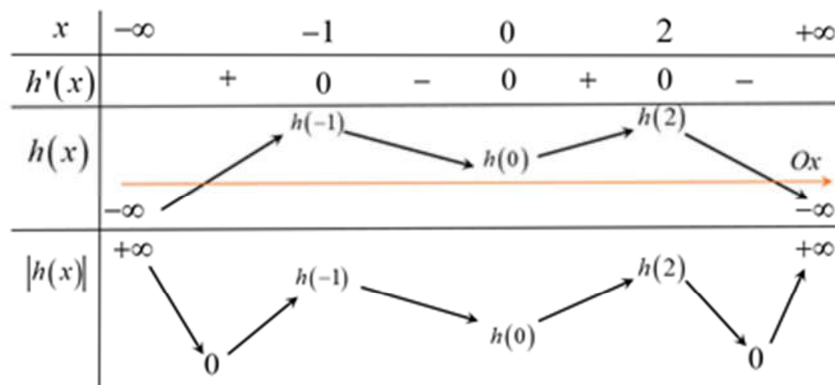
Ta có: $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$.

Từ đồ thị ta thấy $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = +\infty \Rightarrow 4a < 0 \Leftrightarrow a < 0$.

Theo đề bài: $ae < 0 \Rightarrow e > 0$.

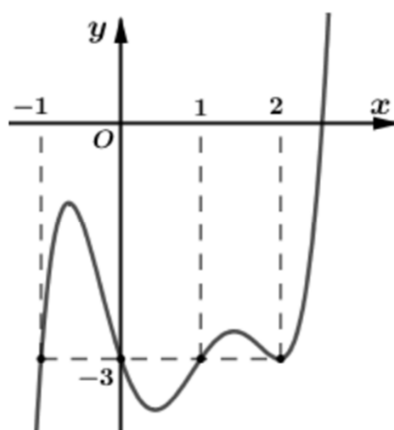
Mà: $h(0) = 4f(0) = 4e \Rightarrow h(0) > 0$.

Ta có bảng biến thiên:



Vậy hàm số $y = |4f(x) - x^2|$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 16. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f'(0) < 0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x) = |f(x) + 3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Xét hàm số $h(x) = f(x) + 3x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$h'(x) = f'(x) + 3, x \in \mathbb{R}.$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Với $x = 2$ là nghiệm kép vì qua nghiệm $x = 2$ thì $h'(x)$ không đổi dấu.

Dựa vào đồ thị của hàm số $f'(x)$, ta có:
$$\begin{cases} f'(x) < -3, \forall x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \\ f'(x) > -3, \forall x \in (-1; 0) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty) \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $h(x) = f(x) + 3x$:

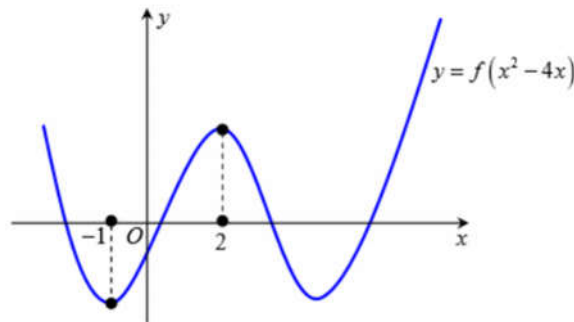
x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$				$h(0)$						$+\infty$

Từ bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ và $h(0) = f(0) + 3 \cdot 0 < 0$ suy ra bảng biến thiên của hàm số $g(x) = |h(x)|$:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$		$g(-1)$		$g(0)$		$g(1)$		$+\infty$
		0						0	

Vậy hàm số $g(x) = |f(x) + 3x| = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết đồ thị hàm số $y = f(x^2 - 4x)$ được cho như hình vẽ dưới đây. Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 8|x| + 12)$ có tất cả bao nhiêu cực trị?



A. 7.

B. 3.

C. 5.

D. 1.

Lời giải

Đặt $g(x) = f(x^2 - 4x)$.

Ta có $y = f(x^2 - 8|x| + 12) = f(x^2 - 4|x| + 4 - 4|x| + 8) = f((|x| - 2)^2 - 4(|x| - 2)) = g(|x| - 2)$.

Từ đồ thị, ta thấy hàm số $y = g(x)$ có các điểm cực trị là $x = -1$; $x = 2$ và $x = a > 2$.

Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = g(x)$ sang phải hai đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = g(x - 2)$. Suy ra hàm số $y = g(x - 2)$ có các điểm cực trị là $x = 1$; $x = 4$ và $x = a + 2 > 4$ (3 điểm cực trị dương).

Từ đó số điểm cực trị của hàm số $y = g(|x| - 2)$ là $2 \cdot 3 + 1 = 7$ điểm.

Chú ý: Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$ bằng $2N + 1$, trong đó N là số điểm cực trị dương của hàm số $y = f(x)$.

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	m	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-1		$+\infty$

Hàm số $g(x) = |f(x^2) - x^2|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- B. 1. B. 3. **C. 5.** D. 7.

Lời giải

Đặt $h(x) = f(x^2) - x^2$.

Suy ra $h'(x) = 2x \cdot f'(x^2) - 2x = 2x(f'(x^2) - 1)$.

Cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(f'(x^2) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = a \ (a > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{a}, \ (a > 0) \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{a}$	0	$\sqrt{a}$	$+\infty$				
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$			0			0		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 19 . Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x^2 - 4x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(2x^2 - 12x + m)$ có đúng 5 điểm cực trị?

- A. 17.** B. 16. C. 19. D. 18.

Lời giải

Ta có $g'(x) = (4x - 12) \cdot f'(2x^2 - 12x + m)$

$$= (4x - 12)(2x^2 - 12x + m + 1)^2(2x^2 - 12x + m)(2x^2 - 12x + m - 4)$$

Hàm số $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow g'(x)$ đổi dấu 5 lần

$\Leftrightarrow g'(x) = 0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $2x^2 - 12x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 3 và phương trình $2x^2 - 12x + m - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 3 và các nghiệm này khác nhau

Phương trình $2x^2 - 12x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 3 và phương trình $3x^2 - 12x + m - 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 3.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_1 > 0 \\ \Delta'_2 > 0 \\ 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + m \neq 0 \\ 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + m - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 - 2m > 0 \\ 36 - 2(m - 4) > 0 \\ m \neq 18 \\ m \neq 22 \end{cases} \Leftrightarrow m < 18$$

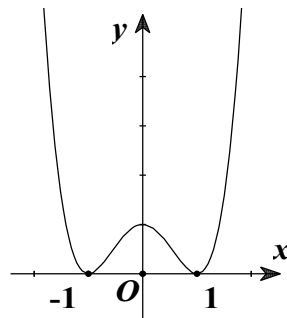
Với điều kiện $m < 18$, giả sử hai phương trình có nghiệm chung là a

$$\text{Thay } x = a \text{ vào hai phương trình đã cho ta được } \begin{cases} 2a^2 - 12a + m = 0 \\ 2a^2 - 12a + m - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow -4 = 0 \text{ (vô lí)}$$

Do đó các nghiệm của hai phương trình $2x^2 - 12x + m = 0$ và $2x^2 - 12x + m - 4 = 0$ luôn khác nhau.

Mà m là số nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3; 4; \dots; 17\}$. Do đó có 17 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 20. Cho $f(x)$ là một hàm đa thức bậc năm thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



Hàm số $h(x) = \left| f(\cos x) - \frac{1}{3} \cos^3 x + \cos^2 x \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 2\pi)$?

A. 13.

B. 11.

C. 9.

D. 7

Lời giải

Do $f(x)$ là một hàm đa thức bậc năm nên $f'(x)$ là một hàm đa thức bậc bốn.

Dựa vào đồ thị ta nhận thấy $f'(x)$ có dạng $f'(x) = ax^4 + bx^2 + c$, đồ thị đi qua các điểm $A(0; 1)$, $B(1; 0)$ và có điểm cực tiểu $x_{CT} = 1$. Từ đó ta có:

$$\begin{cases} f'(0) = 1 \\ f'(1) = 0 \\ f''(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x + c.$$

$$\text{Do } f(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x.$$

$$\text{Xét hàm số } h(x) = \left| f(\cos x) - \frac{1}{3} \cos^3 x + \cos^2 x \right|, \text{ ta đặt } h(x) = f(\cos x) - \frac{1}{3} \cos^3 x + \cos^2 x.$$

⊙ Tìm số cực trị của hàm số $y = h(x)$.

$$h'(x) = -\sin x \cdot f'(\cos x) + \cos^2 x \cdot \sin x - 2 \sin x \cdot \cos x.$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ f'(\cos x) = \cos^2 x - 2 \cos x \end{cases}$$

+) Với $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ nên phương trình $\sin x = 0$ có 1 nghiệm đơn thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ (1).

+) Với $f'(\cos x) = \cos^2 x - 2 \cos x$.

$$\text{Đặt } t = \cos x, t \in [-1; 1] \Rightarrow f'(t) = t^2 - 2t$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2t = t^4 - 2t^2 + 1 \Leftrightarrow t^4 - 3t^2 + 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \alpha \ (\alpha \approx -1,9403) \text{ (l)} \\ t = \beta \ (\beta \approx -0,3365) \text{ (n)} \end{cases}$$

Với $t = \beta \in (0; 1)$ thì $\cos x = \beta$, khi đó $f'(\cos x) = \cos^2 x - 2 \cos x$ có 2 nghiệm đơn thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ (2).

Từ (1), (2) suy ra hàm số $y = h(x)$ có 3 cực trị trên khoảng $(0; 2\pi)$ (*).

⊙ Tìm số nghiệm của phương trình $h(x) = 0$.

$$t = \cos x \Rightarrow f(t) + \frac{1}{3}t^3 - t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + t + \frac{1}{3}t^3 - t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \frac{1}{5}t^4 - \frac{1}{3}t^2 - t + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = a \ (a \approx 1,69) \text{ (l)} \\ t = b \ (b \approx 0,86) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = b \ (b \approx 0,86) \end{cases}$$

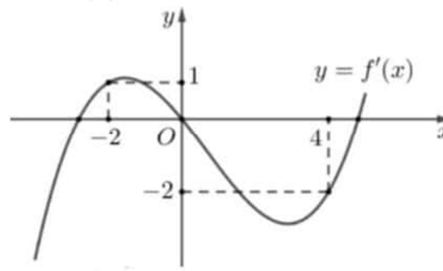
+ $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ phương trình $h(x) = 0$ có 2 nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ (3).

+ $\cos x = b \ (b \approx 0,86) \Rightarrow$ phương trình $h(x) = 0$ có 2 nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ (4).

Từ (3), (4), suy ra $h(x) = 0$ có 4 nghiệm đơn trên khoảng $(0; 2\pi)$ (**).

Từ (*), (**) ta kết luận được hàm số $y = g(x)$ đã cho có 7 điểm cực trị.

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



giá trị của a để hàm số $g(x) = |4f(x) + x^2 - a|$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$ là

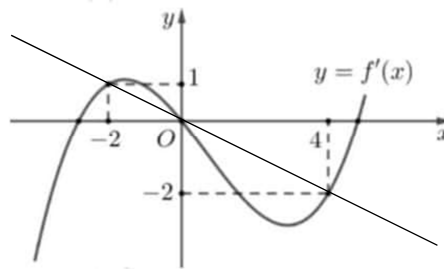
- A. $a \leq 4f(-2) + 4$. B. $a < 4f(4) + 16$. C. $a < 4f(-2) + 4$. **D. $a \leq 4f(4) + 16$.**

Lời giải

Xét hàm số $h(x) = 4f(x) + x^2 - a$

Ta có, $h'(x) = 4\left[f'(x) + \frac{x}{2}\right] \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + \frac{x}{2} = 0$

Khi đó, nghiệm phương trình $f'(x) + \frac{x}{2} = 0$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{x}{2}$ (hình vẽ)



Từ đây ta có $f'(x) + \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	4	$+\infty$
h'	$-$	0	$+$	0	$-$
h	$+\infty$				$+\infty$

$4f(-2) + 4 - a$ $4f(4) + 16 - a$

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = -\frac{x}{2}$ trên đoạn $[-2; 0]$ và $[0; 4]$, ta có

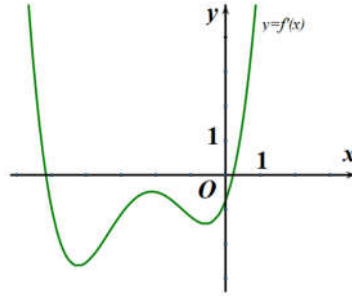
$$\left| \int_{-2}^0 \left(f'(x) - \frac{x}{2} \right) dx \right| = \left[f(x) - \frac{x^2}{4} \right]_{-2}^0 = S_1 \Rightarrow 4 \left[f(x) - \frac{x^2}{4} \right]_{-2}^0 = 4S_1 \Rightarrow h(0) - h(-2) = 4S_1 \quad (1)$$

$$\left| \int_0^4 \left(f'(x) - \frac{x}{2} \right) dx \right| = \left[-f(x) + x^2 \right]_0^4 = S_2 \Rightarrow 4 \left[-f(x) + x^2 \right]_0^4 = 4S_2 \Rightarrow h(0) - h(4) = 4S_2 \quad (2)$$

Từ (1), (2) và $S_2 > S_1 \Rightarrow h(-2) > h(4)$

Khi đó, yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi $h(4) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 4f(4) + 16$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$. Biết $y = f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^3) - x|$ là



A. 5.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Xét $h(x) = f(x^3) - x$

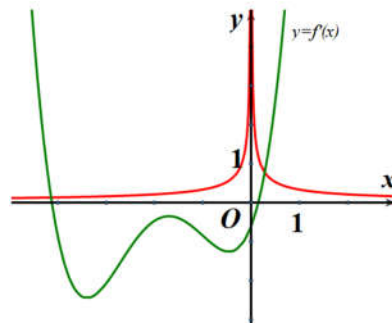
Có $h'(x) = 3x^2 f'(x^3) - 1$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 f'(x^3) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x^3) = \frac{1}{3x^2} \quad (x \neq 0) \quad (1).$$

Đặt $x^3 = t \Rightarrow x^2 = \sqrt[3]{t^2}$ phương trình (1) trở thành:

$$f'(t) = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \quad (t \neq 0) \quad (2).$$

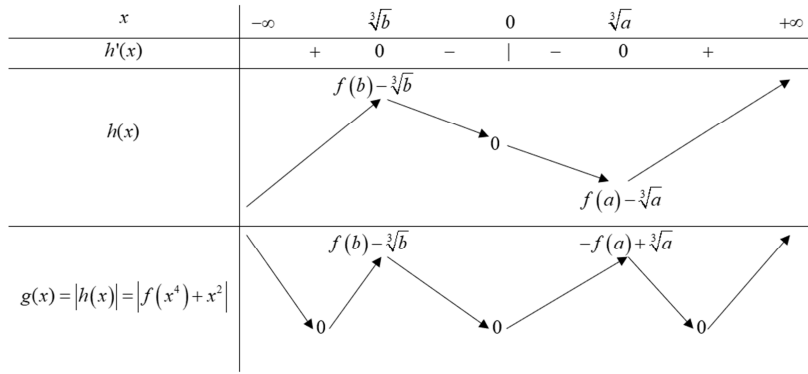
Vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ trên cùng hệ trục tọa độ với đồ thị hàm số $y = f'(x)$.



Dựa vào đồ thị ta có:

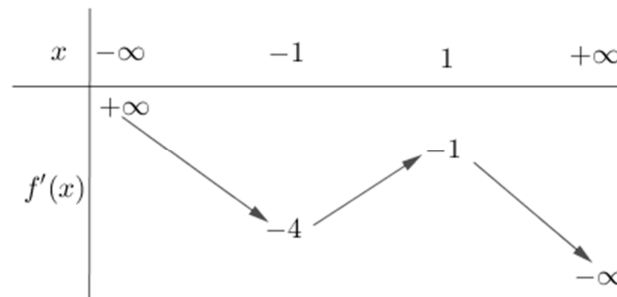
$$f'(t) = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} t = b < 0 \\ t = a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = b < 0 \\ x^3 = a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{b} < 0 \\ x = \sqrt[3]{a} > 0 \end{cases}$$

Bảng biến thiên



Dựa vào BBT ta thấy hàm số $g(x)=|f(x^3)+x^2|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 23. Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0)=0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $g(x)=|f(-x^2)+3x^2-x^4|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4.

B. 3.

C. 5.

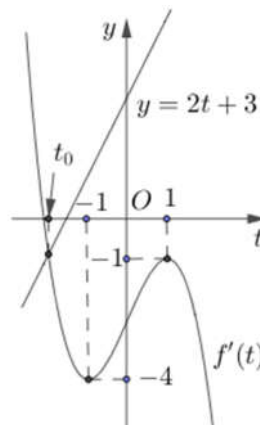
D. 2.

Lời giải

Xét hàm số $h(x)=f(-x^2)+3x^2-x^4$

$$\Rightarrow h'(x)=-2x \cdot [f'(-x^2)-3+2x^2]; h'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ f'(-x^2)=3-2x^2 \end{cases}$$

Ta có: $f'(-x^2)=3-2x^2 \Rightarrow f'(t)=2t+3$ (với $t=-x^2 \leq 0$)



Dựa vào bảng biến thiên, phác họa hình dáng $f'(t)$ và đường thẳng $y=2t+3$ như hình vẽ.

Suy ra phương trình $f'(t)=2t+3$ có duy nhất nghiệm $t_0 < -1 \Rightarrow x^2 = -t_0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-t_0}$.

Theo giả thiết $h(0)=f(0)=0$

Bảng biến thiên của $h(x)$

x	$-\infty$	$-\sqrt{-t_0}$	0	$\sqrt{-t_0}$	$+\infty$			
$h'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$h(x)$								

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $h(x)$ có 3 điểm cực trị, $h(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt (không trùng với điểm cực trị).

Vậy hàm số $g(x)=|h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 24. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

Hàm số $y=|f(1-3x)+1|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Đặt $g(x)=f(1-3x)+1$.

$$\Rightarrow g'(x)=-3.f'(1-3x) \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(1-3x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x=-1 \\ 1-3x=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ x=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

Suy ra bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	-2	6	$-\infty$		
$ g(x) $	$+\infty$	0	2	0	6	$+\infty$

Vậy hàm số $y=|g(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m \in [-2021; 2021]$ để hàm số $g(x)=|x^3-3mx^2-3(m+2)x-m+1|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

A. 4041.

B. 4042.

C. 2021.

D. 4039.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 - 3(m+2)x - m + 1$ có

$$f'(x) = 3x^2 - 6mx - 3(m+2) = 3(x^2 - 2mx - m - 2)$$

$$\text{Để hàm số } g(x) \text{ đồng biến trên } (0;2) \text{ thì } \begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f'(x) = 3(x^2 - 2mx - m - 2) \geq 0, \forall x \in (0;2) \\ f(0) \leq 0 \\ f'(x) = 3(x^2 - 2mx - m - 2) \leq 0, \forall x \in (0;2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m+1 \geq 0 \\ m \leq \frac{x^2-2}{2x+1}, \forall x \in (0;2) \\ -m+1 \leq 0 \\ m \geq \frac{x^2-2}{2x+1}, \forall x \in (0;2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ m \leq -2 \\ m \geq 1 \\ m \geq \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 1 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}, m \in [-2021;2021]} \begin{cases} -2021 \leq m \leq -2 \\ 1 \leq m \leq 2021 \end{cases}$$

Vậy có tất cả 4041 giá trị m nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 26. Cho hàm số $y = |x^2 - 2mx + 1| + 2x$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của $m \in [-10;10]$ để hàm số có điểm cực đại. Số phần tử của tập S là:

A. 20.

B. 21.

C. 19.

D. 18.

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2mx + 1$, $\Delta'_g = m^2 - 1$

+ Nếu $\Delta'_g \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$, khi đó $g(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, hàm số trở thành $y = x^2 - 2(m-1)x + 1$. Hàm số này luôn có cực tiểu, không có cực đại nên không thỏa điều kiện bài toán.

+ Nếu $\Delta'_g > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ thì $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - 1}. \text{ Khi đó hàm số trở thành } y = \begin{cases} x^2 - 2(m-1)x + 1, x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty) \\ -x^2 + 2(m+1)x - 1, x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases} (2)$$

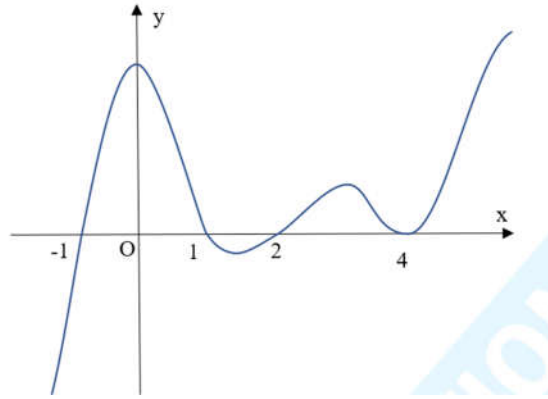
Để hàm số có cực đại thì hàm số (2) phải có cực đại trong khoảng $(x_1; x_2)$.

$$\text{Suy ra } m - \sqrt{m^2 - 1} < m + 1 < m + \sqrt{m^2 - 1} \Leftrightarrow \sqrt{m^2 - 1} > 1 \Leftrightarrow m^2 > 2 \Leftrightarrow m > \sqrt{2} \text{ hoặc } m < -\sqrt{2}$$

Kết hợp điều kiện m nguyên và $m \in [-10;10]$ nên suy ra $m \in \{-10, \dots, -2, 2, \dots, 10\}$.

Vậy có 18 giá trị nguyên $m \in [-10;10]$ thỏa điều kiện bài toán.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đúng 4 điểm chung với trục hoành như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = f(|x|^3 - 3|x| + m + 2021)$ có 11 điểm cực trị ?

A. 0.

B. 2.

C. 5.

D. 1.

Lời giải

Đặt $g(x) = f(x^3 - 3x + m + 2021)$

$y = g(|x|)$ là hàm chẵn

Ta có các nhận xét sau :

- Hàm số $g(|x|)$ luôn nhận $x = 0$ là cực trị.
- Mỗi cực trị dương của hàm số $g(x)$ sẽ tương ứng 2 cực trị của hàm số $g(|x|)$
- Các cực trị âm của hàm số $g(x)$ không có ý nghĩa gì đối với số cực trị của hàm số $g(|x|)$

Vậy yêu cầu bài toán tương đương với : Tìm m để $g(x) = f(x^3 - 3x + m + 2021)$ có 5 điểm cực trị dương.

Ta có $g'(x) = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x + m + 2021)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ f'(x^3 - 3x + m + 2021) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow g'(x) = 0$ có 5 nghiệm dương phân biệt

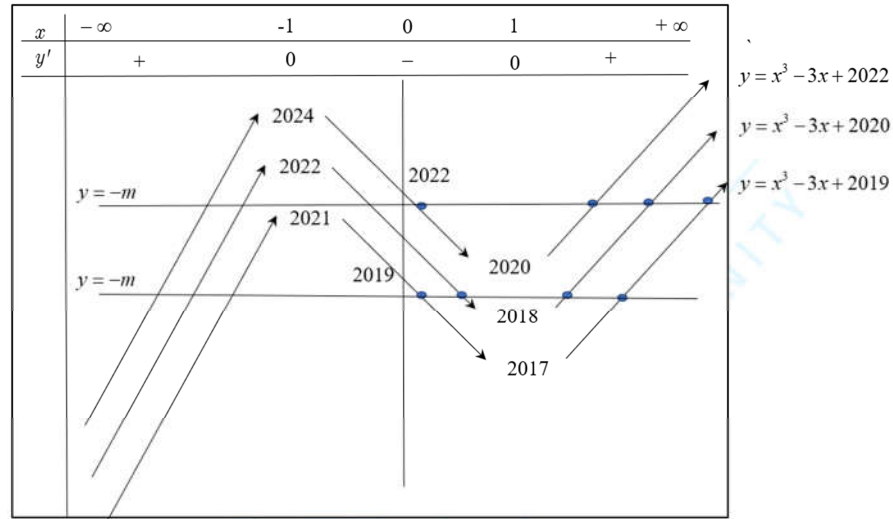
$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 4 nghiệm dương phân biệt khác 1

Xét phương trình (1), ta được

$$\begin{cases} x^3 - 3x + m + 2021 = -1 \\ x^3 - 3x + m + 2021 = 1 \\ x^3 - 3x + m + 2021 = 2 \\ x^3 - 3x + m + 2021 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x + 2022 = -m \\ x^3 - 3x + 2020 = -m \\ x^3 - 3x + 2019 = -m \end{cases} \quad (\text{phương trình cuối là nghiệm kép nên})$$

loại)

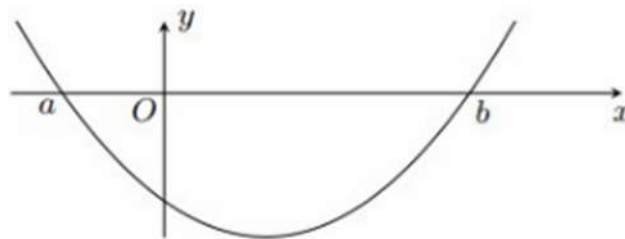
Ta xét bảng biến thiên của đồ thị của 3 hàm số trên



Để phương trình (1) có 4 nghiệm dương khác 1 thì $-m \in (2020; 2022)$ hoặc $-m \in (2018; 2019)$.

Suy ra $m \in (-2022; -2020) \cup (-2019; -2018)$. $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = -2021$.

Câu 28. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị của hàm đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ và $f(b) > -1$. Với các giá trị nguyên dương của tham số m , số điểm cực trị nhiều nhất của hàm số $g(x) = |f^2(x) + 2f(x) + m|$ là



A. 3.

B. 6.

C. 7.

D. 5.

Lời giải

Với m nguyên dương ta có

$$g(x) = |f^2(x) + 2f(x) + m| = |(f(x) + 1)^2 + m - 1| = f^2(x) + 2f(x) + m$$

$$\text{Vì } \begin{cases} (f(x) + 1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ m - 1 \geq 0, \forall m \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Rightarrow (f(x) + 1)^2 + m - 1 \geq 0; \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z}^+.$$

$$g'(x) = 2f(x)f'(x) + 2f'(x) \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 & (1) \\ f(x) = -1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = b \end{cases}$$

Xét phương trình (2) ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

Diagram illustrating the behavior of the function $f(x)$ based on the sign of the derivative $f'(x)$:

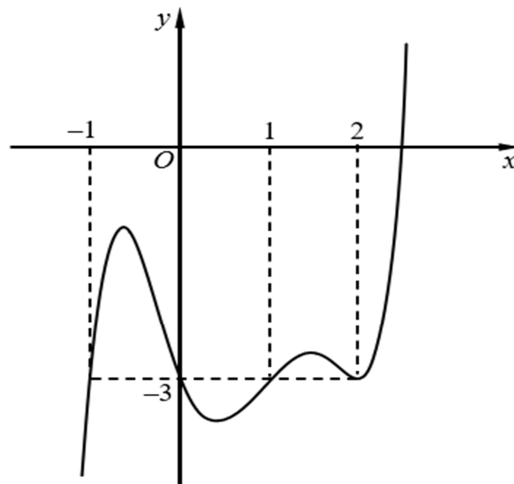
- As $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$.
- At $x = a$, $f'(x) = 0$ and $f(x) = f(a)$. This is a local maximum.
- At $x = b$, $f'(x) = 0$ and $f(x) = f(b)$. This is a local minimum.
- As $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$.

The function increases from $-\infty$ to $f(a)$, decreases from $f(a)$ to $f(b)$, and then increases from $f(b)$ to $+\infty$.

Từ bảng biến thiên của $f(x)$ ta thấy phương trình $f(x) = -1$ có nhiều nhất một nghiệm $x = c < a$.

Do đó phương trình $g'(x) = 0$ có nhiều nhất 3 nghiệm đơn phân biệt nên hàm số $y = g(x)$ có nhiều nhất ba cực trị.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) < 0$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây.



Hàm số $g(x) = |f(|x|) + 3|x|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Xét $g(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R} \Rightarrow x \in D$ thì $-x \in D$ và $g(-x) = g(x)$ nên $g(x)$ là hàm chẵn.

Với $x > 0 \Rightarrow g(x) = |f(x) + 3x| = |h(x)|$

Xét $h(x) = f(x) + 3x$ ta có $h'(x) = f'(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3$. Dựa vào đồ thị hàm số

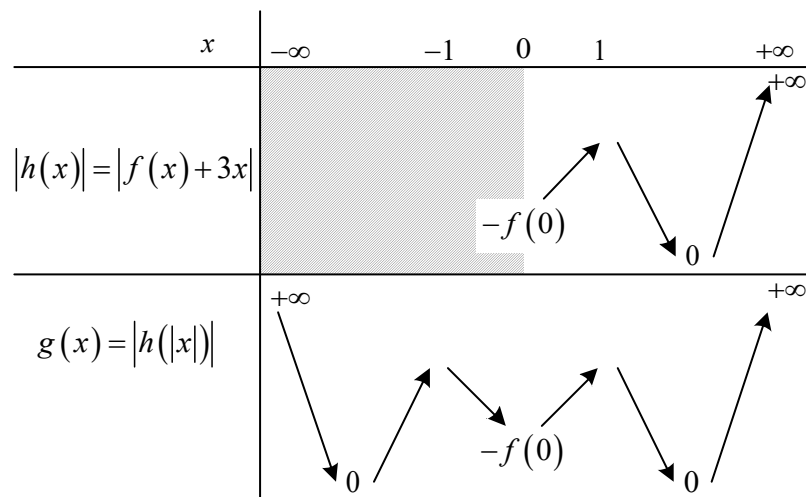
$$f'(x) \text{ ta có: } f'(x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (L)} \\ x = 0 \text{ (L)} \\ x = 1 \text{ (TM)} \\ x = 2 \text{ (TM)} \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$		
$h'(x)$			-	0	+	0	+
$h(x)$							$+\infty$

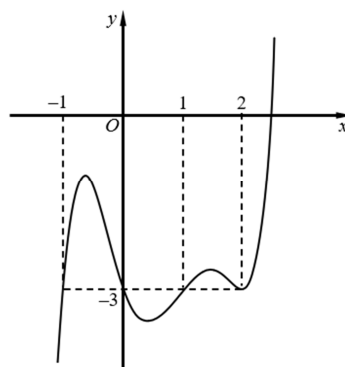
Ta có: $h(0) = f(0) + 3 \cdot 0 = f(0) < 0$

Dựa vào bảng trên ta suy ra được:



Dựa vào bảng trên ta thấy $g(x)$ có tất cả là 3 điểm cực tiểu.

Câu 30. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0) < 0$ và đồ thị bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x) = |f(x) + 3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị ?



A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Xét hàm số $h(x) = f(x) + 3x, x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = f'(x) + 3, \quad h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Với $x = 2$ là nghiệm kép vì qua nghiệm $x = 2$ thì $h'(x)$ không đổi dấu.

Dựa vào đồ thị, ta có: $\begin{cases} f'(x) < -3 \forall x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \\ f'(x) > -3 \forall x \in (-1; 0) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty) \end{cases}$

Ta có:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$+\infty$		$h(0)$			$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $h(x)$ có 3 điểm cực trị.

Hơn nữa, vì $h(0) = f(0) + 3.0 < 0$ nên phương trình $h(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\neq \pm 1; 0$

Vậy hàm số $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

-----HẾT-----