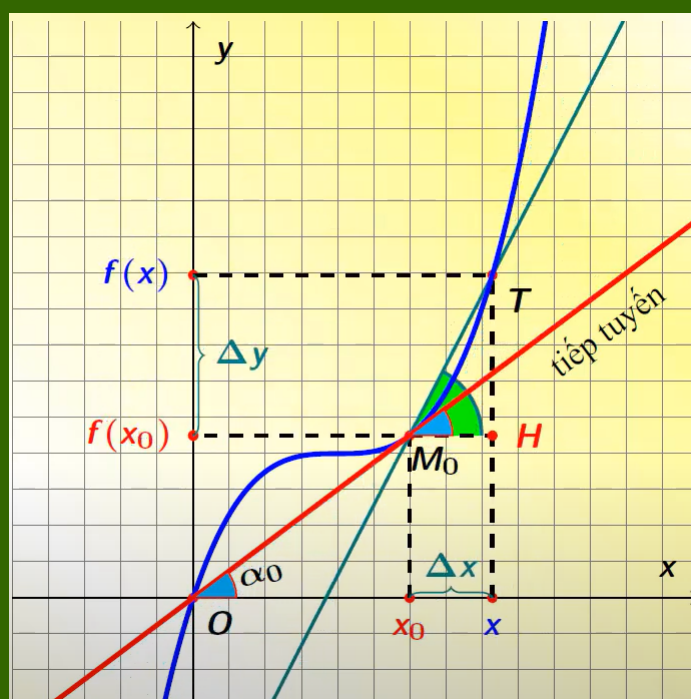


PHAN QUỐC CƯỜNG

TOÁN



ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH



TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

 <https://www.facebook.com/qcuongp>

ĐỨC HÒA, 3/09/2021

MỤC LỤC

MỤC LỤC

Chương 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC - PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC 1

§1 – HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC 1

- (A) Kiến thức cần nắm 1
- (B) Bài tập tự luận 3
 - ▮ Dạng 1.1: Tập Xác Định Của Hàm Số LG 3
 - ▮ Dạng 1.2: Tính Tuần Hoàn Của Hàm Số Lượng Giác 4
 - ▮ Dạng 1.3: Tính Chẵn, Lẻ Của Hàm Số Lượng Giác 4
 - ▮ Dạng 1.4: Tập Giá Trị, Min-Max Của Hàm Số Lượng Giác 5
- (C) Bài tập trắc nghiệm 5
 - Bảng đáp án 12

§2 – PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC 12

- (A) Kiến thức cần nắm 12
- (B) Bài tập tự luận 14
 - ▮ Dạng 2.1: Giải Phương Trình Lượng Giác Cơ Bản 14
 - ▮ Dạng 2.2: Phương Trình Lượng Giác Cơ Bản Có Điều Kiện Nghiệm 15
 - ▮ Dạng 2.3: Sử Dụng Công Thức Biến Đổi Đưa Về Phương Trình Lượng Giác Cơ Bản 15
- (C) Bài tập trắc nghiệm 16
 - Bảng đáp án 24

§3 – MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP 24

- (A) Kiến thức cần nắm 24
- (B) Bài tập tự luận 25
 - ▮ Dạng 3.1: Phương Trình Bậc Hai Đối Với Hàm Số Lượng Giác 25
 - ▮ Dạng 3.2: Phương Trình Bậc Nhất Đối Với Sin Và Cos 26
 - ▮ Dạng 3.3: Phương Trình Bậc Hai Đối Với $\sin x$ và $\cos x$ 27
 - ▮ Dạng 3.4: Phương trình chứa $\sin x \pm \cos x$ và $\sin x \cdot \cos x$ 27
 - ▮ Dạng 3.5: Phương Trình Tích 28
- (C) Bài tập trắc nghiệm 28
 - Bảng đáp án 35

Chương 2. TỔ HỢP - XÁC SUẤT 36

§1 – QUY TẮC ĐẾM.....	36
(A) Kiến thức cần nắm.....	36
(B) Bài tập tự luận.....	37
Dạng 1.1: Quy Tắc Cộng.....	37
Dạng 1.2: Quy Tắc Nhân.....	38
Dạng 1.3: Tổng hợp.....	39
(C) Bài tập trắc nghiệm.....	39
Bảng đáp án.....	43
§2 – HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP.....	43
(A) Kiến thức cần nắm.....	43
(B) Bài tập tự luận.....	45
Dạng 2.1: Hoán Vị.....	45
Dạng 2.2: Chỉnh Hợp.....	46
Dạng 2.3: Tổ Hợp.....	46
Dạng 2.4: Công thức hoán vị - chỉnh hợp - tổ hợp.....	48
(C) Bài tập trắc nghiệm.....	48
Dạng 2.5: Hoán Vị.....	48
Dạng 2.6: Chỉnh Hợp.....	49
Dạng 2.7: Tổ Hợp.....	50
Dạng 2.8: Tổng Hợp.....	51
Bảng đáp án.....	54
§3 – NHỊ THỨC NEWTON.....	55
(A) Kiến thức cần nắm.....	55
(B) Bài tập tự luận.....	56
(C) Bài tập trắc nghiệm.....	57
Bảng đáp án.....	58
§4 – BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ.....	59
(A) Kiến thức cần nắm.....	59
(B) Bài tập tự luận.....	61
Dạng 4.1: Mô tả không gian mẫu và xác định số kết quả có thể của phép thử.....	61
Dạng 4.2: Xác định biến cố của một phép thử.....	61
Dạng 4.3: Xác suất của biến cố.....	62
(C) Bài tập trắc nghiệm.....	63

Bảng đáp án.....	69
Chương 3. Dãy Số - Cấp Số Cộng - Cấp Số Nhân	70
§1 – Nhị Thức Niu-Ton.....	70
(A) Kiến thức cần nắm.....	70
(B) Bài tập tự luận.....	70
Dạng 1.1: Chứng minh đẳng thức.....	70
Dạng 1.2: Một số bài toán số học.....	71
Dạng 1.3: Chứng minh bất đẳng thức.....	72
(C) Bài tập trắc nghiệm.....	72
Bảng đáp án.....	73
§2 – Dãy Số	73
(A) Kiến thức cần nắm.....	73
(B) Bài tập tự luận.....	74
Dạng 2.1: Dự đoán công thức và chứng minh quy nạp công thức tổng quát của dãy số.....	74
Dạng 2.2: Xét sự tăng giảm của dãy số.....	76
Dạng 2.3: Xét tính bị chặn của dãy số.....	77
(C) Bài tập trắc nghiệm.....	78
Bảng đáp án.....	83
§3 – Cấp Số Cộng	84
(A) Kiến thức cần nắm.....	84
(B) Bài tập tự luận.....	85
Dạng 3.1: Chứng Minh Một Dãy Số u_n Là Cấp Số Cộng.....	85
Dạng 3.2: Số hạng tổng quát.....	86
Dạng 3.3: Tính tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng.....	86
(C) Bài tập trắc nghiệm.....	88
Bảng đáp án.....	95
§4 – CẤP SỐ NHÂN	96
(A) Kiến thức cần nắm.....	96
(B) Bài tập tự luận.....	97
Dạng 4.1: Chứng Minh Một Dãy Số Là Cấp Số Nhân Và Các Yếu Tố Liên Quan.....	97
Dạng 4.2: Xác định q, u_k của cấp số nhân.....	98
Dạng 4.3: Các bài toán thực tế liên quan cấp số nhân.....	99
(C) Bài tập trắc nghiệm.....	100

Bảng đáp án.....	107
Chương 4. GIỚI HẠN	108
§1 – GIỚI HẠN DÃY SỐ.....	108
(A) Kiến thức cần nắm.....	108
(B) Bài tập tự luận.....	109
Dạng 1.1: Dùng định nghĩa chứng minh giới hạn.....	109
Dạng 1.2: Tìm Giới Hạn Của Dãy Số Có Giới Hạn Hữu Hạn.....	109
Dạng 1.3: Dãy số có giới hạn vô hạn.....	111
(C) Bài tập trắc nghiệm.....	112
Bảng đáp án.....	119
§2 – GIỚI HẠN HÀM SỐ	120
(A) Kiến thức cần nắm.....	120
(B) Bài tập tự luận.....	121
Dạng 2.1: Giới Hạn Của Hàm Số Tại 1 Điểm.....	121
Dạng 2.2: Giới hạn của hàm số tại vô cực.....	122
(C) Bài tập trắc nghiệm.....	123
Bảng đáp án.....	133
§3 – GIỚI HẠN MỘT BÊN CỦA HÀM SỐ.....	134
(A) Kiến thức cần nắm.....	134
(B) Bài tập tự luận.....	134
Dạng 3.1: Giới Hạn Hữu Hạn.....	134
Dạng 3.2: Giới Hạn Vô Hạn.....	135
Dạng 3.3: Bài Toán Chứng Minh Sự Tồn Tại Của Giới Hạn Tại 1 Điểm.	135
(C) Bài tập trắc nghiệm.....	136
Bảng đáp án.....	139
§4 – HÀM SỐ LIÊN TỤC	140
(A) Kiến thức cần nắm.....	140
(B) Bài tập tự luận.....	141
Dạng 4.1: Xét Tính Liên Tục Của Hàm Số Tại Một Điểm.....	141
Dạng 4.2: Xét Tính Liên Tục Của Hàm Số Trên Khoảng, Nửa Khoảng, Đoạn.....	144
Dạng 4.3: Chứng minh phương trình có nghiệm.....	144
(C) Bài tập trắc nghiệm.....	145
Bảng đáp án.....	150

Chương 5. ĐẠO HÀM 151

§1 – ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM	151
(A) Kiến thức cần nắm	151
(B) Bài tập tự luận	152
Dạng 1.1: Tìm số gia của hàm số	152
Dạng 1.2: Tính Đạo Hàm Bằng Định Nghĩa Tại Điểm	152
Dạng 1.3: Tính Đạo Hàm Của Hàm Số Trên 1 Khoảng Bằng Định Nghĩa	153
Dạng 1.4: Mối Quan Hệ Giữa Liên Tục Và Đạo Hàm	153
(C) Bài tập trắc nghiệm	154
Bảng đáp án	156
§2 – QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM	157
(A) Kiến thức cần nắm	157
(B) Bài tập tự luận	157
Dạng 2.1: Quy tắc tính đạo hàm	157
Dạng 2.2: Chứng minh, giải phương trình và bất phương trình chứa đạo hàm	158
(C) Bài tập trắc nghiệm	159
Bảng đáp án	169
§3 – Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM	169
(A) Tóm tắt lý thuyết	169
(B) Các dạng toán thường gặp	170
Dạng 3.1: Viết phương trình tiếp tuyến tại một điểm	170
Dạng 3.2: Viết phương trình tiếp tuyến khi biết điểm đi qua	171
Dạng 3.3: Viết phương trình tiếp tuyến biết hệ số góc k	172
Dạng 3.4: Ý nghĩa vật lý của đạo hàm	173
(C) Bài tập trắc nghiệm	174
Bảng đáp án	181
§4 – ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC	182
(A) Kiến thức cần nắm	182
(B) Bài tập tự luận	182
Dạng 4.1: Đạo Hàm Của Hàm Số Lượng Giác	182
Dạng 4.2: Chứng minh, giải phương trình và bất phương trình	183
(C) Bài tập trắc nghiệm	184
Bảng đáp án	189

§5 – ĐẠO HÀM CẤP CAO	189
(A) Kiến thức cần nắm.....	189
(B) Bài tập tự luận.....	190
(C) Bài tập trắc nghiệm.....	191
Bảng đáp án.....	195
§6 – VI PHÂN	195
(A) Kiến thức cần nắm.....	195
(B) Bài tập tự luận.....	196
(C) Bài tập trắc nghiệm.....	196
Bảng đáp án.....	199

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC - PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI

1

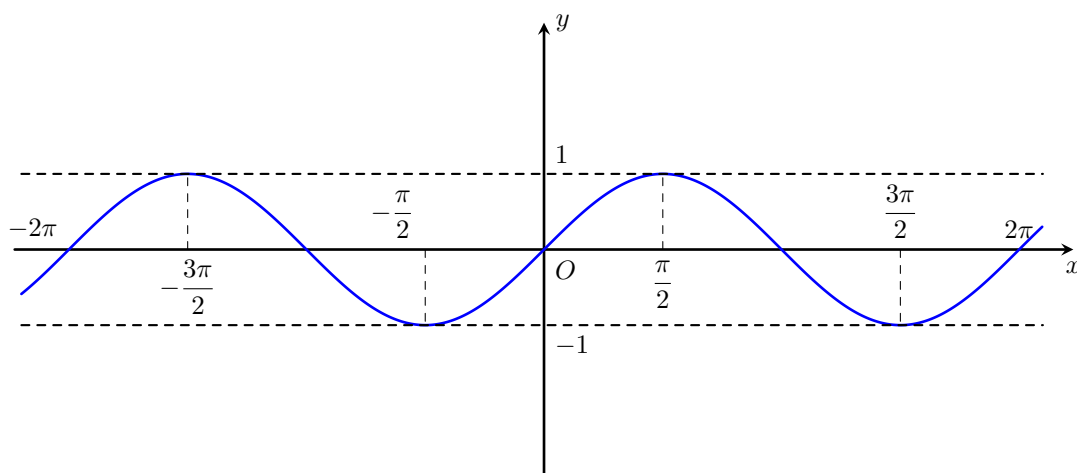
HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A

KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Hàm số $y = \sin x$

- ☑ Tập xác định $D = \mathbb{R}$;
- ☑ Tập giá trị $T = [-1; 1]$, tức là $-1 \leq \sin x \leq 1$;
- ☑ Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π , tức là $\sin(x + k2\pi) = \sin x$ với $k \in \mathbb{Z}$;
- ☑ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}$;
- ☑ Là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

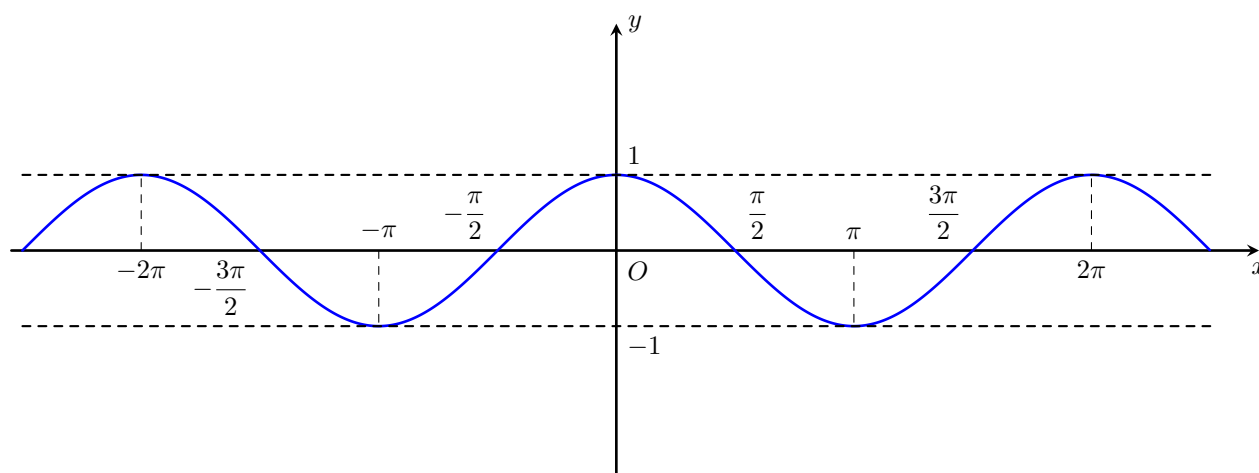


2. Hàm số $y = \cos x$

- ☑ Tập xác định $D = \mathbb{R}$;

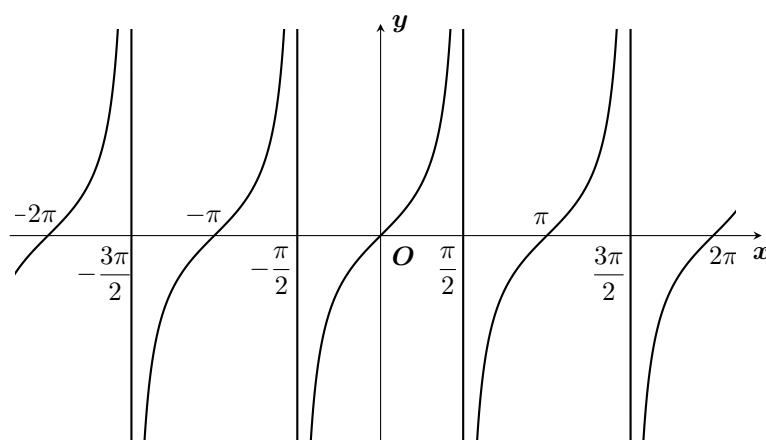
1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

- ☑ Tập giá trị $T = [-1; 1]$, tức là $-1 \leq \sin x \leq 1$;
- ☑ Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π , tức là $\cos(x + k2\pi) = \cos x$ với $k \in \mathbb{Z}$;
- ☑ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$;
- ☑ Là hàm số chẵn nên đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.



3. Hàm số $y = \tan x$

- ☑ Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$;
- ☑ Tập giá trị $T = \mathbb{R}$;
- ☑ Là hàm số tuần hoàn với chu kì π , tức là $\tan(x + k\pi) = \tan x$ với $k \in \mathbb{Z}$;
- ☑ Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ với $k \in \mathbb{Z}$;
- ☑ Là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.



4. Hàm số $y = \cot x$

- ✓ Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
- ✓ Tập giá trị $T = \mathbb{R}$;
- ✓ Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π , tức là $\tan(x + k\pi) = \tan x$ với $k \in \mathbb{Z}$;
- ✓ Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$;
- ✓ Là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

Chú ý

- 1) Hàm số $y = \sin(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$.
- 2) Hàm số $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$.
- 3) Hàm số $y = \tan(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$.
- 4) Hàm số $y = \cot(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T_0 = \frac{\pi}{|a|}$.

B

BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1

Tập Xác Định Của Hàm Số LG

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

b) $y = \cot\left(-2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

c) $y = \frac{2}{\sin 2x}$.

d) $y = 2 \cos \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

Bài 2. Tìm tập xác định các hàm số sau:

a) $y = \frac{1 - 2x^2}{1 - \cos 2x}$.

b) $y = \cos \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

c) $y = \sqrt{2 - 2 \sin x}$.

d) $y = \sqrt{\sin x - 1}$.

e) $y = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$.

f) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

g) $y = \cot\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) - \frac{2}{1 - \cos x}$.

Bài 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{1 - \sin 4x}$;

b) $y = \tan \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$;

c) $y = \frac{\sin x}{\sqrt{3} \sin x + \cos x}$

d) $y = \frac{\tan x + \cot x}{\cot^2 x - 1}$.

Bài 4. Tìm m để hàm số sau xác định trên $\mathbb{R}$.

a) $y = \sqrt{2m - 3 \cos x}$.

b) $y = \frac{2}{\sqrt{\sin^2 x - 2 \sin x + m - 1}}$

Bài 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{5 - m \sin x - (m + 1) \cos x}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

DẠNG
2

Tính Tuần Hoàn Của Hàm Số Lượng Giác

Bài 6. Tìm chu kì tuần hoàn các hàm số sau

a) $y = 1 - \sin 5x$

b) $y = 2 \cos^2 2x$

c) $y = \tan(-3x + 1)$

d) $y = 2 - 3 \cot(2x - 1)$

Bài 7. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = 1 - \sin 5x$.

b) $y = \cos^2 x - 1$.

c) $y = \sin \left(\frac{2}{5}x \right) \cdot \cos \left(\frac{2}{5}x \right)$.

d) $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$

Bài 8. Tìm chu kỳ của hàm số $y = \sin 3x + 3 \cos 2x$.

Bài 9. Chứng minh các hàm số sau đây là hàm số tuần hoàn, tìm chu kì của mỗi hàm số.

a) $y = \sin^2 2x + 1$;

b) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$;

c) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$.

DẠNG
3

Tính Chẵn, Lẻ Của Hàm Số Lượng Giác

Bài 10. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $y = 2 \cos 3x$;

b) $y = x + \sin x$;

c) $y = x \cdot \cot x + \cos x$;

d) $y = x^2 + \tan |x|$.

Bài 11. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $y = 2x \sin x$;

b) $y = \cos x + \sin 2x$;

c) $y = \frac{\cos 2x}{x}$;

d) $y = \tan^7 2x \cdot \sin 5x$.

Bài 12. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $y = |x| \sin x$;

b) $y = \frac{\tan x - \sin x}{2 + \cos x + \cot^2 x}$;

c) $y = \frac{\cos x + x^2 - 1}{\sin^4 x}$;

d) $y = \frac{\sin^4 x + 1}{2 + \cos^6 x}$.

Bài 13. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

1) $y = f(x) = \tan x + \cot x$;

2) $y = f(x) = \sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right)$;

3) $f(x) = \frac{\sin^{2020} x + 2020}{\cos x}, n \in \mathbb{Z}$

Bài 14. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = 3m \sin 4x + \cos 2x$ là hàm chẵn.

DẠNG
4

Tập Giá Trị, Min-Max Của Hàm Số Lượng Giác

Bài 15. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

a) $y = 2 \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) - 3$;

b) $y = -5 + 2 \cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;

c) $y = 2\sqrt{\cos 3x} - 1$;

d) $y = \frac{\sin^2(3x)}{2} - 3 \cos^2(3x)$.

Bài 16. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y = 4 - 2 \cos 2x$.

b) $y = \sqrt{3 + \sin^{2020} x}$.

c) $y = \sin x - \cos x + 3$.

d) $y = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x + 5$.

e) $y = 4 \cos^2 x - 4 \cos x + 3$ với $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$

f) $y = \cos 2x + 5 \sin x + 2$ với $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$

C

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tập xác định D của hàm số $y = 2 \sin x$ là

A. $D = [-2; 2]$.

B. $D = [-1; 1]$.

C. $D = [0; 2]$.

D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 2. Tập xác định D của hàm số $y = \cos \sqrt{x}$ là

A. $D = [-1; 1]$.

B. $D = [0; 1]$.

C. $D = [0; +\infty)$.

D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 3. Trên $[0; 2\pi]$ có bao nhiêu điểm mà hàm số $y = \cos x + \frac{2021}{\sin x}$ không xác định?

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. Vô số.

Câu 4. Tập xác định D của hàm số $y = \frac{2}{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 5. Tập xác định D của hàm số $y = \frac{2021 - \sin x}{\cos x - 1}$ là

- A. $D = \mathbb{R}$.
 B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
 D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 6. Trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ có bao nhiêu điểm mà hàm số $y = \frac{2021}{\sin^2 x - 1}$ không xác định?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 7. Tập xác định D của hàm số $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin 2x$ là

- A. $D = \emptyset$.
 B. $D = \mathbb{R}$.
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + K\pi, K \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 8. Tập xác định D của hàm số $y = 3 \tan^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 9. Tập xác định D của hàm số $y = 2020 \tan^{2021} 2x$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $D = \mathbb{R}$.
 D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 10. Tập xác định D của hàm số $y = \tan x - \cot 2x$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
 D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 11. Tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 12. Tập xác định D của hàm số $y = \frac{3 \tan x - 5}{1 - \sin^2 x}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \{K\pi, K \in \mathbb{Z}\}$.
 D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 13. Hàm số $y = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x}$ không xác định trong khoảng nào sau đây?

- A. $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{4} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
 B. $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
 C. $\left(\frac{3\pi}{4} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.
 D. $\left(\pi + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Câu 14. Tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$ là

- A. $D = \mathbb{R}$.
 B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 15. Tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\sin 2x + 1}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
 B. $D = \mathbb{R}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 16. Tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\sin x - 2}$ là

A. $D = \emptyset.$

B. $D = [-1; 1].$

C. $D = [2; 3].$

D. $D = \mathbb{R}.$

Câu 17. Tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{1 + \sin 2x}$ là

A. $D = \emptyset.$

B. $D = \mathbb{R}.$

C. $D = \left[\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi \right], k \in \mathbb{Z}.$

D. $D = \left[\frac{5\pi}{6} + k2\pi; \frac{13\pi}{6} + k2\pi \right], k \in \mathbb{Z}.$

Câu 18. Tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{\cos^2 x}}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

B. $D = \mathbb{R}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 19. Tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{\cos x - 4}}$ là

A. $D = \emptyset.$

B. $D = \mathbb{R}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 20. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y = \frac{2021}{1 + \tan^2 x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}.$

B. Hàm số $y = \frac{\sin x}{3 - \cos x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}.$

C. Hàm số $y = \sqrt{\cos x + 1}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}.$

D. Hàm số $y = \tan^2 x + \cot^2 x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}.$

Câu 21. Tập xác định D của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin x}}$ là

A. $D = \emptyset.$

B. $D = \mathbb{R}.$

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Câu 22. Tập xác định D của hàm số $y = \tan \left(\frac{\pi}{2} \cos x \right)$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $D = \mathbb{R}.$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

Câu 23. Tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{-\cos x}$ là

A. $D = [-\pi + k2\pi; k2\pi], k \in \mathbb{Z}.$

B. $D = [\pi + k2\pi; 2\pi + k2\pi], k \in \mathbb{Z}.$

C. $D = \left[\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi \right], k \in \mathbb{Z}.$

D. $D = \left[-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi \right], k \in \mathbb{Z}.$

Câu 24. Tìm m để hàm số $y = \frac{2 - \sin 2x}{\sqrt{m \cos x + 1}}$ xác định trên toàn trục số.

A. $-1 \leq m \leq 1.$

B. $-1 < m < 1.$

C. $m > 0.$

D. $0 < m < 1.$

Câu 25. Cho hàm số $y = \sqrt{2m - 3 \sin x}$ Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(0; 2022)$ để hàm số xác định trên $\mathbb{R}$?

A. 2018.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2021.

Câu 26. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = \sin x.$

B. $y = \cos x.$

C. $y = \tan x.$

D. $y = \cot x.$

Câu 27. Đồ thị của hàm số nào sau đây có trục đối xứng?

- A. $y = \sin 2x$. B. $y = x \cos x$. C. $y = \cos x \cdot \cot x$. D. $y = \frac{\tan x}{\sin x}$.

Câu 28. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = |\sin x|$. B. $y = x^2 \sin x$. C. $y = |x| \sin x$. D. $y = x + \sin x$.

Câu 29. Cho các hàm số $y = x \sin x$, $y = x^2 \cos x$, $y = 2x^3 \tan x$ và $y = \cot 4x$ Trong các hàm số đã cho có bao nhiêu hàm số là hàm số chẵn?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 30. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua trục tung?

- A. $y = \sin x \cos 2x$. B. $y = \sin^3 x \cdot \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
 C. $y = \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1}$. D. $y = \cos x \sin^3 x$.

Câu 31. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = -\sin x$. B. $y = \cos x - \sin x$. C. $y = \cos x + \sin^2 x$. D. $y = \cos x \sin x$.

Câu 32. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A. $y = \cos x + \sin^4 x$. B. $y = \sin x + \cos x$. C. $y = -\cos x$. D. $y = \sin x \cdot \cos 3x$.

Câu 33. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A. $y = 1 - \sin^2 x$. B. $y = |\cot x| \cdot \sin^2 x$.
 C. $y = x^2 \tan 2x - \cot x$. D. $y = 1 + |\cot x + \tan x|$.

Câu 34. Cho các hàm số $y = 2022 + \tan 4x$, $y = \sin \left(x^2 - \frac{\pi}{2}\right)$, $y = \tan^2 x$ và $y = |\cot x|$ Trong các hàm số đã cho có bao nhiêu hàm số là hàm số chẵn?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4..

Câu 35. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Đồ thị hàm số $y = |\sin x|$ đối xứng qua gốc tọa độ O .
 B. Đồ thị hàm số $y = \cos x$ đối xứng qua trục Oy .
 C. Đồ thị hàm số $y = |\tan x|$ đối xứng qua trục Oy .
 D. Đồ thị hàm số $y = \tan x$ đối xứng qua gốc tọa độ O .

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = \sin 2x$ và $g(x) = \tan^2 x$ Mệnh đề nào sau đây đúng ?

- A. $f(x)$ lẻ và $g(x)$ chẵn. B. $f(x)$ chẵn, $g(x)$ lẻ.
 C. $f(x)$ và $g(x)$ cùng chẵn. D. $f(x)$ và $g(x)$ cùng lẻ.

Câu 37. Cho $f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin^2 3x}$ và $g(x) = \frac{|\sin 2x| - \cos 3x}{2 + \tan^2 x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f(x)$ lẻ và $g(x)$ chẵn. B. $f(x)$ chẵn, $g(x)$ lẻ.
 C. $f(x)$ và $g(x)$ cùng chẵn. D. $f(x)$ và $g(x)$ cùng lẻ.

Câu 38. Trong các hàm số sau, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ?

- A. $y = \frac{1}{\sin^3 x}$. B. $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
 C. $y = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. D. $y = \sqrt{\sin 2x}$.

Câu 39. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A. $y = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi - 2x)$. B. $y = \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

C. $y = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - \sin x.$

D. $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}.$

Câu 40. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y = x^4 + \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right).$

B. $y = x^{2021} + \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right).$

C. $y = 2023 + \cos x + \sin^{2022} x.$

D. $y = \tan^{2021} x + \sin^{2022} x.$

Câu 41. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì 2π .

B. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kì 2π .

C. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì 2π .

D. Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kì π .

Câu 42. Tìm chu kì T của hàm số $y = \cos \left(\frac{x}{2} + 2021 \right)$

A. $T = -2\pi.$

B. $T = \pi.$

C. $T = 2\pi.$

D. $T = 4\pi.$

Câu 43. Tìm chu kì T của hàm số $y = \tan(3\pi x + 2020)$

A. $T = \frac{1}{3}.$

B. $T = \frac{\pi}{3}.$

C. $T = \frac{4}{3}.$

D. $T = \frac{2\pi}{3}.$

Câu 44. Hai hàm số nào sau đây có chu kì khác nhau?

A. $y = \cos x$ và $y = \cot \frac{x}{2}.$

B. $y = \sin x$ và $y = \tan 2x.$

C. $y = \sin \frac{x}{2}$ và $y = \cos \frac{x}{2}.$

D. $y = \tan 2x$ và $y = \cot 2x.$

Câu 45. Trong các hàm số $y_1 = \sin x, y_2 = \sin 2x, y_3 = \tan x, y_4 = \cot x$ có bao nhiêu hàm số thỏa mãn tính chất $f(x + k\pi) = f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $k \in \mathbb{Z}$

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 46. Hàm số nào sau đây có chu kì khác 2π ?

A. $y = \cos^3 x.$

B. $y = \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}.$

C. $y = \sin^2(x + 2).$

D. $y = \cos^2 \left(\frac{x}{2} + 1 \right).$

Câu 47. Cho các hàm số $y = \sin x, y = x + \sin x, y = x \cos x$ và $y = \frac{\sin x}{x}$ Trong các hàm số đã cho có bao nhiêu hàm số có tính tuần hoàn?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 48. Cho hàm số $y = \sin x$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\pi; \frac{3\pi}{2} \right).$

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right).$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2} \right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0 \right).$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right).$

Câu 49. Hàm số nào sau đây có tính đơn điệu trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2} \right)$ khác với các hàm số còn lại?

A. $y = \sin x.$

B. $y = \cos x.$

C. $y = \tan x.$

D. $y = -\cot x.$

Câu 50. Với $x \in \left(\frac{31\pi}{4}; \frac{33\pi}{4} \right)$, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến.

B. Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến.

C. Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến.

D. Hàm số $y = \tan x$ nghịch biến.

Câu 51. Hàm số nào sau đây đồng biến trên nửa khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right)$?

A. $y = \tan x.$

B. $y = \cot x.$

C. $y = \sin 2x.$

D. $y = \cos 4x.$

Câu 52. Trong các hàm số sau, có bao nhiêu hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right)$? $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ và $y = \cot\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 53. Để hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ đồng biến, ta chọn x thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$. B. $(\pi + k2\pi; 2\pi + k2\pi)$.
 C. $\left(-\frac{3\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$. D. $\left(-\frac{3\pi}{4} + k2\pi; \frac{\pi}{4} + k2\pi\right)$.

Câu 54. Trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, hàm số $y = \sin x - \cos x$ là

A. hàm số đồng biến. B. hàm số nghịch biến.
 C. hàm hằng. D. hàm số không đơn điệu.

Câu 55. Cho hàm số $y = 4 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin 2x$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ và $\left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$.
 B. Hàm số đã cho đồng biến trên $(0; \pi)$.
 C. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0; \frac{3\pi}{4}\right)$.
 D. Hàm số đã cho đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ và nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}; \pi\right)$.

Câu 56. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 3 \sin x - 2$

A. $M = 1, m = -5$. B. $M = -3, m = -1$. C. $M = 2, m = -2$. D. $M = 0, m = -2$.

Câu 57. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 3 \cos 2x + 5$

A. $T = [-1; 1]$. B. $T = [-1; 11]$. C. $T = [2; 8]$. D. $T = [5; 8]$.

Câu 58. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 5 - 3 \sin x$

A. $T = [-1; 1]$. B. $T = [-3; 3]$. C. $T = [2; 8]$. D. $T = [5; 8]$.

Câu 59. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = -\sqrt{2} \sin\left(2021x + \frac{\pi}{3}\right)$

A. $m = -2017\sqrt{2}$. B. $m = -2016\sqrt{2}$. C. $m = -\sqrt{2}$. D. $m = -1$.

Câu 60. Hàm số $y = \cos |3x - 5|$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. 0. B. -1. C. 1. D. -2.

Câu 61. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = 1 - 2|\cos 3x|$

A. $M = 3, m = -1$. B. $M = 1, m = -1$. C. $M = 2, m = -2$. D. $M = 0, m = -2$.

Câu 62. Hàm số $y = (3 - 5 \sin x)^{2022}$ có giá trị lớn nhất là M và giá trị nhỏ nhất là m Giá trị của $M + m$ bằng

A. 2^{2022} . B. 2^{4044} . C. $2^{2022}(1 + 2^{4044})$. D. 2^{6066} .

Câu 63. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} |\sin x|\right)$ lần lượt là

A. -1 và 1. B. 0 và 1. C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. 0 và $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 64. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \frac{1}{\cos x + 1}$

A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$. C. $m = 1$. D. $m = \sqrt{2}$.

Câu 65. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $f(x) = 1 + 2\sqrt{4 + \cos 3x}$ lần lượt là

- A. $1 + 2\sqrt{3}; 1 + 2\sqrt{5}$.
 B. $2\sqrt{3}; 2\sqrt{5}$.
 C. $1 - 2\sqrt{3}; 1 + 2\sqrt{5}$.
 D. $-1 + 2\sqrt{3}; -1 + 2\sqrt{5}$.

Câu 66. Hàm số $y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 67. Tập giá trị của hàm số $y = \sin 2021x - \cos 2021x$ là

- A. $[-1; 1]$. B. $[-4042; 4042]$. C. $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. D. $[0; \sqrt{2}]$.

Câu 68. Hàm số $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = x_0$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $x_0 = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x_0 = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 69. Cho hàm số $y = \cos^4 x + \sin^4 x$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $y \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$. C. $y \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. D. $y \leq \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 70. Tập giá trị của hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x$ là

- A. $[0; 2]$. B. $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. C. $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$. D. $\left[0; \frac{1}{4}\right]$.

Câu 71. Hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 72. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{2}{1 + \tan^2 x}$

- A. $M = \frac{1}{2}$. B. $M = \frac{2}{3}$. C. $M = 1$. D. $M = 2$.

Câu 73. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 4 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

- A. $M = \sqrt{2}$. B. $M = \sqrt{2} - 1$. C. $M = \sqrt{2} + 2$. D. $M = \frac{7}{2}$.

Câu 74. Hàm số $y = 1 + 2 \cos^2 x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = x_0$ Chọn mệnh đề đúng:

- A. $x_0 = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x_0 = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 75. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sqrt{7 - 3 \cos^2 x}$

- A. $M = \sqrt{10}, m = 2$.
 B. $M = \sqrt{7}, m = 2$.
 C. $M = \sqrt{10}, m = \sqrt{7}$.
 D. $M = 0, m = 1$.

Câu 76. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = \frac{3}{1 + \sqrt{2 + \sin^2 x}}$ lần lượt là

- A. $\frac{-3}{1 + \sqrt{3}}$ và $\frac{3}{1 + \sqrt{2}}$. B. $\frac{3}{1 + \sqrt{3}}$ và $\frac{4}{1 + \sqrt{2}}$. C. $\frac{2}{1 + \sqrt{3}}$ và $\frac{3}{1 + \sqrt{2}}$. D. $\frac{3}{1 + \sqrt{3}}$ và $\frac{3}{1 + \sqrt{2}}$.

Câu 77. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = 8 \sin^2 x + 3 \cos 2x$ bằng

- A. 2. B. 8. C. 11. D. 15.

Câu 78. Hàm số $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\sin x_0 = -1$. B. $\sin x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\sin x_0 = -\frac{1}{2}$. D. $\sin x_0 = 0$.

Câu 79. Hàm số $y = \cos^2 x - \cos x$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 và có giá trị nhỏ nhất là m . Giá trị của $m + \sin^2 x_0$ bằng

A. 0.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. 1.

Câu 80. Hàm số $y = 4 \sin^4 x - \cos 4x - 4 \cos 2x - 8$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_1 và đạt giá trị lớn nhất tại x_2 . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cos 2x_1 - \cos 2x_2 = -2$.

B. $\cos 2x_1 - \cos 2x_2 = -1$.

C. $\cos 2x_1 - \cos 2x_2 = 0$.

D. $\cos 2x_1 - \cos 2x_2 = 2$.

Câu 81. Cho hàm số $y = \sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x}$ có giá trị lớn nhất là M và giá trị nhỏ nhất là m . Giá trị của biểu thức $M^2 + m^2$ bằng

A. $2\sqrt{2}$.

B. 4.

C. 6.

D. 8.

Câu 82. Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$. Mực nước của con kênh cao nhất khi

A. $t = 13$ (giờ).

B. $t = 14$ (giờ).

C. $t = 15$ (giờ).

D. $t = 16$ (giờ).

BẢNG ĐÁP ÁN

1. D	2. C	3. B	4. A	5. D	6. B	7. C	8. A	9. D	10. B
11. C	12. B	13. B	14. D	15. B	16. A	17. B	18. C	19. D	20. C
21. D	22. D	23. C	24. B	25. C	26. B	27. D	28. A	29. C	30. B
31. C	32. D	33. C	34. C	35. A	36. A	37. C	38. A	39. C	40. B
41. C	42. D	43. A	44. B	45. C	46. C	47. A	48. D	49. B	50. A
51. D	52. B	53. D	54. A	55. A	56. A	57. C	58. C	59. C	60. B
61. B	62. D	63. D	64. A	65. A	66. C	67. C	68. C	69. C	70. C
71. C	72. D	73. C	74. B	75. B	76. D	77. B	78. A	79. B	80. D
81. C	82. B								

BÀI

2

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A

KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Phương trình $\sin x = a$

☑ **Trường hợp 1:** $|a| > 1$. Phương trình vô nghiệm, vì $-1 \leq \sin x \leq 1$ với mọi x .

☑ **Trường hợp 2:** $|a| \leq 1$.

Đặt $a = \sin \alpha$ hoặc $a = \sin \beta^\circ$, phương trình tương đương với

$$\alpha \text{ đặc biệt} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\alpha \text{ không đặc biệt} \Rightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\textcircled{v} \sin x = \sin \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k.360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\Leftrightarrow \textbf{Tổng quát 2.1.} \sin f(x) = \sin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý

$$1) \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$2) \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$3) \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Phương trình $\cos x = a$

✓ **Trường hợp 1:** $|a| > 1 \Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

✓ **Trường hợp 2:** $|a| \leq 1$.

Đặt $a = \sin \alpha$ hoặc $a = \sin \beta^\circ$, phương trình tương đương với

✓ α đặc biệt

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\textcircled{v} \alpha \text{ không đặc biệt: } \cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\textcircled{v} \cos x = \cos \beta^\circ \Leftrightarrow x = \pm \beta^\circ + k.360^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\Leftrightarrow \textbf{Tổng quát 2.2.} \cos f(x) = \cos g(x) \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x) + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý

$$1) \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$2) \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$3) \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

3. Phương trình $\tan x = a$

Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Đặt $a = \tan \alpha$.

✓ α đặc biệt

$$\tan x = a \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$$

☑ α không đặc biệt

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

☑ $\tan x = \tan \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ (k \in \mathbb{Z}).$

🔗 **Tổng quát 2.3.** $\tan f(x) = \tan g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

4. Phương trình $\cot x = a$

Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$. Đặt $a = \cot \alpha$.

☑ α đặc biệt

$$\cot x = a \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$$

☑ α không đặc biệt

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arc} \cot a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

☑ $\cot x = \cot \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ (k \in \mathbb{Z}).$

🔗 **Tổng quát 2.4.** $\cot f(x) = \cot g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

B

BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG
1

Giải Phương Trình Lượng Giác Cơ Bản

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$

b) $\sin(3x - 30^\circ) = \sin 45^\circ.$

c) $\sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right).$

d) $\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$

e) $\cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = 1.$

f) $\cos\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{4} - 2x\right).$

g) $\cos(2x + 25^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

h) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -\frac{1}{4}.$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\tan(2x - 1) = \tan\left(-x + \frac{\pi}{3}\right).$

b) $\tan(3x - 10^\circ) = \sqrt{3}.$

c) $3 \tan\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -1.$

d) $\cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1.$

e) $2 \cot(3x) = 3.$

f) $\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(-2x + \frac{\pi}{6}\right).$

DẠNG
2

Phương Trình Lượng Giác Cơ Bản Có Điều Kiện
Nghiem

Bài 3. Giải các phương trình sau, biết nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$.

a) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = -1$.

b) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

c) $\tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Bài 4. Giải các phương trình sau, biết nghiệm thuộc khoảng $[-\pi; \pi]$.

a) $\cot\left(-x + \frac{3\pi}{4}\right) = 0$.

b) $2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$.

c) $\tan(-x) = \tan(2x + 1)$.

DẠNG
3

Sử Dụng Công Thức Biến Đổi Đưa Về Phương Trình
Lượng Giác Cơ Bản

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

b) $\tan 3x + \tan x = 0$.

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $\cos^2\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin^2\left(2x + \frac{4\pi}{5}\right)$.

b) $4\cos^2(2x - 1) = 1$.

Bài 7. Giải các phương trình sau:

a) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

b) $8\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = \sqrt{2}$.

c) $\cos 3x - \cos 5x = \sin x$.

d) $\sin 7x - \sin 3x = \cos 5x$.

Bài 8. Giải các phương trình sau:

a) $\cot\left(\frac{5\pi}{3} - 3x\right) - \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

b) $\cot x \cdot \cot 2x = -1$.

Bài 9. Giải các phương trình: $\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 3\sin x + \cos x + 2$

Bài 10. Tìm m để:

a) Phương trình $\sin x = m$ có đúng hai nghiệm thuộc $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

b) Phương trình $(2\cos x - 1)(\sin 2x - m) = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

C

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Phương trình $\sin x = \sin \alpha$ có nghiệm là

A. $\begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}.$

C. $\begin{cases} x = \alpha + k\pi \\ x = -\alpha + k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}.$

B. $\begin{cases} x = \alpha + k\pi \\ x = \pi - \alpha + k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}.$

D. $\begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}.$

Câu 2. Chọn đáp án đúng trong các câu sau:

A. $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 3. Nghiệm của phương trình $\sin x = -1$ là:

A. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi.$

B. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$

C. $x = k\pi.$

D. $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi.$

Câu 4. Phương trình $\sin x = 0$ có nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

B. $x = k\pi.$

C. $x = k2\pi.$

D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

Câu 5. Nghiệm đặc biệt nào sau đây là sai

A. $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$

C. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi.$

B. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$

D. $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

Câu 6. Nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ là:

A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi.$

B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi.$

C. $x = k\pi.$

D. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi.$

Câu 7. Phương trình $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ (với $k \in \mathbb{Z}$) có nghiệm là

A. $x = k\pi.$

B. $x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k3\pi}{2}.$

C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$

D. $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k3\pi}{2}.$

Câu 8. Phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ có nghiệm thỏa mãn $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ là :

A. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi.$

B. $x = \frac{\pi}{6}.$

C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi.$

D. $x = \frac{\pi}{3}.$

Câu 9. Nghiệm phương trình $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ là:

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{8} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 10. Nghiệm của phương trình $\sin(x + 10^\circ) = -1$ là

A. $x = -100^\circ + k360^\circ.$

C. $x = 100^\circ + k360^\circ.$

B. $x = -80^\circ + k180^\circ.$

D. $x = -100^\circ + k180^\circ.$

Câu 11. Phương trình $\sin\left(\frac{x + \pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$ có tập nghiệm là

A.
$$\begin{cases} x = \frac{11\pi}{6} + k10\pi \\ x = -\frac{29\pi}{6} + k10\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

C.
$$\begin{cases} x = -\frac{11\pi}{6} + k10\pi \\ x = -\frac{29\pi}{6} + k10\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

B.
$$\begin{cases} x = -\frac{11\pi}{6} + k10\pi \\ x = \frac{29\pi}{6} + k10\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

D.
$$\begin{cases} x = \frac{11\pi}{6} + k10\pi \\ x = \frac{29\pi}{6} + k10\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 12. Số nghiệm của phương trình $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ trong khoảng $(0; 3\pi)$ là

- A. 1. B. 2. C. 6. D. 4.

Câu 13. Nghiệm phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ là

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$ B. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$ C. $x = k\pi.$ D. $x = k2\pi.$

Câu 14. Phương trình: $1 + \sin 2x = 0$ có nghiệm là:

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$ B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$ C. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi.$ D. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi.$

Câu 15. Số nghiệm của phương trình: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ với $\pi \leq x \leq 5\pi$ là

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 16. Nghiệm của phương trình $2 \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}; x = \frac{7\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}.$ B. $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$
- C. $x = k\pi; x = \pi + k2\pi.$ D. $x = \pi + k2\pi; x = k\frac{\pi}{2}.$

Câu 17. Phương trình $\sqrt{3} + 2 \sin x = 0$ có nghiệm là:

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi.$ B. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi.$
- C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi.$ D. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi.$

Câu 18. Nghiệm của phương trình $\sin 3x = \sin x$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$ B. $x = k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}.$
- C. $x = k2\pi.$ D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k = k2\pi.$

Câu 19. Phương trình $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm thỏa $0 < x < \pi.$

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 20. Số nghiệm của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ với $\pi \leq x \leq 3\pi$ là:

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 21. Nghiệm của phương trình $\cos x = 1$ là

- A. $x = k\pi.$ B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$ C. $x = k2\pi.$ D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

Câu 22. Giá trị đặc biệt nào sau đây là đúng

- A. $\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$ B. $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$
- C. $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi.$ D. $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

Câu 23. Phương trình: $\cos 2x = 1$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$ B. $x = k\pi.$ C. $x = k2\pi.$ D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

Câu 24. Nghiệm của phương trình $\cos x = -1$ là

- A. $x = \pi + k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$. C. $x = \pi + k2\pi$. D. $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi$.

Câu 25. Nghiệm phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.
 C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 26. Nghiệm của phương trình $2 \cos 2x + 1 = 0$ là

- A. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$.
 C. $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi$. D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Câu 27. Phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}$. B. $x = \pi + k\pi$. C. $x = k\pi$. D. $x = k2\pi$.

Câu 28. Nghiệm phương trình $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$. C. $x = k\pi$. D. $x = k2\pi$.

Câu 29. Phương trình lượng giác: $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$ có nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$.

Câu 30. Nghiệm phương trình: $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{8} + k2\pi \end{cases}$.

Câu 31. Nghiệm của phương trình $\cos x = -\frac{1}{2}$ là:

- A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$. B. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$. C. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$. D. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$.

Câu 32. Nghiệm của phương trình $\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ là:

- A. $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$. C. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$. D. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

Câu 33. Số nghiệm của phương trình: $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ với $0 \leq x \leq 2\pi$ là

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 34. Phương trình $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$ có họ nghiệm là

- A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
 C. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. D. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 35. Giải phương trình lượng giác: $2 \cos 2x - \sqrt{3} = 0$ có nghiệm là

- A. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$. B. $x = \pm \frac{\pi}{12} + k2\pi$. C. $x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi$. D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$.

Câu 36. Giải phương trình lượng giác: $2 \cos \frac{x}{2} + \sqrt{3} = 0$ có nghiệm là

- A. $x = \pm \frac{5\pi}{6} + k4\pi$. B. $x = \pm \frac{5\pi}{3} + k4\pi$. C. $x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi$. D. $x = \pm \frac{5\pi}{3} + k2\pi$.

Câu 37. Giải phương trình $\cos x = \cos \frac{\sqrt{3}}{2}$

- A. $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \pm \arccos \frac{\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Câu 38. Nghiệm của phương trình $\cos \frac{x}{3} = \cos \sqrt{2}$ (với $k \in \mathbb{Z}$) là

- A. $x = \pm \sqrt{2} + k\pi$. B. $x = 3\sqrt{2} + k6\pi$. C. $x = \pm \sqrt{2} + k4\pi$. D. $x = \pm 3\sqrt{2} + k6\pi$.

Câu 39. Nghiệm của phương trình $\cos 3x = \cos x$ là:

- A. $x = k2\pi$. B. $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.
 C. $x = k\frac{\pi}{2}$. D. $x = k\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 40. Phương trình $2\sqrt{2} \cos x + \sqrt{6} = 0$ có các nghiệm là:

- A. $x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
 C. $x = \pm \frac{5\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 41. Phương trình $\cos 4x = \cos \frac{\pi}{5}$ có nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{5} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{20} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$.
 C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{5} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 42. Giải phương trình lượng giác $2 \cos \left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{3} = 0$ có nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. B. $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.
 C. $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + k4\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k4\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. D. $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{3} + k4\pi \\ x = -\frac{5\pi}{3} + k4\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 43. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$ với $0 \leq x \leq 2\pi$ là

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 44. Số nghiệm của phương trình $\cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ thuộc khoảng $(\pi, 8\pi)$ là

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Câu 45. Nghiệm của phương trình $2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{2} = 0$ trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là

- A. $\left\{\frac{-\pi}{12}; \frac{-7\pi}{12}\right\}$. B. $\left\{\frac{7\pi}{12}\right\}$. C. $\left\{\frac{\pi}{12}\right\}$. D. $\left\{\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{12}\right\}$.

Câu 46. Phương trình $2 \cos^2 x = 1$ có nghiệm là

- A. $x = k\frac{\pi}{4}$. B. $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$. C. $x = k\frac{\pi}{2}$. D. vô nghiệm.

Câu 47. Tìm tổng các nghiệm của phương trình: $2 \cos(x - \frac{\pi}{3}) = 1$ trên $(-\pi; \pi)$

- A. $\frac{2\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{4\pi}{3}$. D. $\frac{7\pi}{3}$.

Câu 48. Tìm số nghiệm nguyên dương của phương trình: $\cos \pi(3 - \sqrt{3 + 2x - x^2}) = -1$.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 49. Giải phương trình $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$.

- A. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \pm\frac{2\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \pm\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Câu 50. Nghiệm phương trình: $1 + \tan x = 0$ là

- A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$. D. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$.

Câu 51. Họ nghiệm của phương trình $\tan(x + \frac{\pi}{5}) + \sqrt{3} = 0$ là

- A. $\frac{8\pi}{15} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$. B. $-\frac{8\pi}{15} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.
 C. $-\frac{8\pi}{15} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$. D. $\frac{8\pi}{15} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Câu 52. Phương trình $\tan x = \tan \frac{x}{2}$ có họ nghiệm là

- A. $x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
 C. $x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. D. $x = -\pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 53. Nghiệm của phương trình $\sqrt{3} + 3 \tan x = 0$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. C. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Câu 54. Phương trình $\sqrt{3} + \tan x = 0$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.
 C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$. D. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi$.

Câu 55. Phương trình lượng giác: $\sqrt{3} \cdot \tan x + 3 = 0$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$. C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. D. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Câu 56. Phương trình $\tan \frac{x}{2} = \tan x$ có nghiệm là

- A. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. Cả A, B, C đều đúng.

Câu 57. Nghiệm của phương trình $\sqrt{3} \tan 3x - 3 = 0$ (với $k \in \mathbb{Z}$) là

- A. $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{9}$. B. $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}$. C. $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{9}$. D. $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$.

Câu 58. Nghiệm của phương trình $\tan x = 4$ là

- A. $x = \arctan 4 + k\pi$. B. $x = \arctan 4 + k2\pi$.
 C. $x = 4 + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Câu 59. Họ nghiệm của phương trình $\tan 2x - \tan x = 0$ là:

- A. $-\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 60. Phương trình lượng giác: $\sqrt{3} \cdot \tan x - 3 = 0$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$. C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. D. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Câu 61. Giải phương trình $\sqrt{3} \tan \left(3x + \frac{3\pi}{5} \right) = 0$.

- A. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = -\frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$. D. $x = -\frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$.

Câu 62. Nghiệm của phương trình $3 \tan \frac{x}{4} - \sqrt{3} = 0$ trong nửa khoảng $[0; 2\pi)$ là

- A. $\left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}$. B. $\left\{ \frac{3\pi}{2} \right\}$. C. $\left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\}$. D. $\left\{ \frac{2\pi}{3} \right\}$.

Câu 63. Phương trình $\tan(2x + 12^\circ) = 0$ có nghiệm là

- A. $x = -6^\circ + k90^\circ, (k \in \mathbb{Z})$. B. $x = -6^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z})$.
 C. $x = -6^\circ + k360^\circ, (k \in \mathbb{Z})$. D. $x = -12^\circ + k90^\circ, (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 64. Nghiệm của phương trình $\tan(2x - 15^\circ) = 1$, với $-90^\circ < x < 90^\circ$ là

- A. $x = -30^\circ$. B. $x = -60^\circ$. C. $x = 30^\circ$. D. $x = -60^\circ, x = 30^\circ$.

Câu 65. Số nghiệm của phương trình $\tan x = \tan \frac{3\pi}{11}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; 2\pi \right)$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 66. Giải phương trình: $\tan^2 x = 3$ có nghiệm là

- A. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$. B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$. C. vô nghiệm. D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Câu 67. Nghiệm phương trình $1 + \cot x = 0$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$. D. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$.

Câu 68. Nghiệm của phương trình $\cot x + \sqrt{3} = 0$ là:

- A. $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. D. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

Câu 69. Phương trình lượng giác: $3 \cot x - \sqrt{3} = 0$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. D. Vô nghiệm.

Câu 70. Phương trình lượng giác: $2 \cot x - \sqrt{3} = 0$ có nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$. B. $x = \arccot \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi$.
 C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

Câu 71. Nghiệm của phương trình $\cot \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{3}$ là

- A. $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. C. $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

Câu 72. Giải phương trình $\sqrt{3} \cot \left(5x - \frac{\pi}{8} \right) = 0$.

- A. $x = \frac{\pi}{8} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{5}; k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$.

Câu 73. Nghiệm của phương trình $\cot \left(\frac{x}{4} + 10^\circ \right) = -\sqrt{3}$ (với $k \in \mathbb{Z}$) là

- A. $x = -200^\circ + k360^\circ$. B. $x = -200^\circ + k720^\circ$.

C. $x = -20^\circ + k360^\circ$.

D. $x = -160^\circ + k720^\circ$.

Câu 74. Giải phương trình $\tan x = \cot x$

A. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$.

Câu 75. Phương trình $\tan x \cdot \cot x = 1$ có tập nghiệm là

A. $T = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $T = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $T = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $T = \mathbb{R}$.

Câu 76. Giải phương trình $\tan 3x \tan x = 1$.

A. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{8}; k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$.

Câu 77. Nghiệm của phương trình $\tan 3x \cdot \cot 2x = 1$ là

A. $k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

B. $-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. Vô nghiệm.

Câu 78. Nghiệm của phương trình $\tan 4x \cdot \cot 2x = 1$ là

A. $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

D. Vô nghiệm.

Câu 79. Phương trình nào sau đây vô nghiệm

A. $\tan x = 3$.

B. $\cot x = 1$.

C. $\cos x = 0$.

D. $\sin x = \frac{4}{3}$.

Câu 81. Phương trình $(\sin x + 1)(\sin x - \sqrt{2}) = 0$ có nghiệm là:

A. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

D. $x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 82. Phương trình $\sin 2x \cdot (2 \sin x - \sqrt{2}) = 0$ có nghiệm là

A. $\begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$

Câu 83. Nghiệm của phương trình $2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 1$ là:

A. $x = k2\pi$.

B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

C. $x = k\frac{\pi}{2}$.

D. $x = k\pi$.

Câu 84. Giải phương trình $4 \sin x \cos x \cos 2x + 1 = 0$

A. $x = -\frac{\pi}{8} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$.

Câu 85. Giải phương trình $\cos x(2 \cos x + \sqrt{3}) = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pm \frac{5\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Câu 86. Nghiệm của phương trình $\sin^4 x - \cos^4 x = 0$ là

A. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

B. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

C. $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

D. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi$.

Câu 87. Phương trình nào tương đương với phương trình $\sin^2 x - \cos^2 x - 1 = 0$

- A. $\cos 2x = 1.$ B. $\cos 2x = -1.$
 C. $2\cos^2 x - 1 = 0.$ D. $(\sin x - \cos x)^2 = 1.$

Câu 88. Phương trình $3 - 4\cos^2 x = 0$ tương đương với phương trình nào sau đây?

- A. $\cos 2x = \frac{1}{2}.$ B. $\cos 2x = -\frac{1}{2}.$ C. $\sin 2x = \frac{1}{2}.$ D. $\sin 2x = -\frac{1}{2}.$

Câu 89. Nghiệm của phương trình $\sin x \cdot (2\cos x - \sqrt{3}) = 0$ là:

- A. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$ B. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$
 C. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$ D. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 90. Phương trình $(\sin x + 1)(2\cos 2x - \sqrt{2}) = 0$ có nghiệm là

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$ B. $x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
 C. $x = \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$ D. Cả A, B, C đều đúng.

Câu 91. Nghiệm của phương trình $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = 0$ là:

- A. $x = k\pi.$ B. $x = k\frac{\pi}{2}.$ C. $x = k\frac{\pi}{8}.$ D. $x = k\frac{\pi}{4}.$

Câu 92. Cho phương trình $\cos x \cdot \cos 7x = \cos 3x \cdot \cos 5x$ (1) Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình (1)

- A. $\sin 5x = 0.$ B. $\cos 4x = 0.$ C. $\sin 4x = 0.$ D. $\cos 3x = 0.$

Câu 93. Số nghiệm của phương trình $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ thuộc đoạn $[2\pi; 4\pi]$ là

- A. 2. B. 6. C. 5. D. 4.

Câu 94. Tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{\sin 2x - 1}{\sqrt{2} \cdot \cos x - 1} = 0$ là

- A. $x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$ B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$
 C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$ D. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 95. Giải phương trình $4(\sin^6 x + \cos^6 x) + 2(\sin^4 x + \cos^4 x) = 8 - 4\cos^2 2x$

- A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$ B. $x = \pm \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$
 C. $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$ D. $x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 96. Số nghiệm $x \in [0; 14]$ nghiệm đúng phương trình: $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 97. Giải phương trình $\sin x \cdot \cos x(1 + \tan x)(1 + \cot x) = 1.$

- A. Vô nghiệm. B. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$ C. $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$ D. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 98. Nghiệm của phương trình $\cos x \cos 5x = \frac{1}{2} \cos 6x$ (với $k \in \mathbb{Z}$) là

- A. $x = \frac{\pi}{8} + k\pi.$ B. $x = \frac{k\pi}{2}.$ C. $x = \frac{k\pi}{4}.$ D. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}.$

3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

Câu 99. Phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$ có nghiệm là:

- A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$. B. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. C. $x = \pm \frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{2}$. D. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$.

Câu 100. Phương trình $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$ có các nghiệm là:

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = 3\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. A	4. B	5. C	6. D	7. D	8. B	9. C	10. A
11. B	12. C	13. D	14. B	15. D	16. A	17. D	18. D	19. B	20. A
21. C	22. B	23. B	24. C	25. D	26. D	27. A	28. B	29. B	30. C
31. C	32. D	33. B	34. C	35. C	36. B	37. A	38. D	39. C	40. A
41. D	42. D	43. B	44. C	45. C	46. B	47. A	48. C	49. C	50. A
51. A	52. B	53. D	54. C	55. B	56. B	57. A	58. A	59. D	60. D
61. C	62. B	63. A	64. C	65. D	66. A	67. D	68. D	69. A	70. A
71. B	72. C	73. D	74. B	75. D	76. A	77. D	78. D	79. B	80. A
81. B	82. C	83. D	84. B	85. D	86. A	87. D	88. D	89. B	90. A
91. B	92. C	93. D	94. B	95. D	96. A	97. D	98. D	99. A	100. A

BÀI

3

MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

A

KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác là phương trình có dạng

$$at^2 + bt + c = 0$$

trong đó a, b, c là các hằng số ($a \neq 0$) và t là một hàm số lượng giác.

Cách giải. Đặt biểu thức lượng giác làm ẩn phụ và đặt điều kiện cho ẩn phụ (nếu có) rồi giải phương trình theo ẩn phụ này. Cuối cùng, ta đưa về việc giải các phương trình lượng giác cơ bản.

2. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình có dạng

$$a \sin x + b \cos x = c$$

Cách giải. Điều kiện để phương trình có nghiệm: $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$, ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Do $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ nên đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \alpha \rightarrow \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \alpha$.
 Khi đó phương trình trở thành

$$\cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

3. Phương trình bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$

Định nghĩa. Phương trình bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$ là phương trình có dạng

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$$

Cách giải.

- Kiểm tra $\cos x = 0$ có là nghiệm của phương trình.
- Khi $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta thu được phương trình $a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$.

Đây là phương trình bậc hai đối với $\tan x$ mà ta đã biết cách giải.

Đặc biệt. Phương trình dạng $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$ ta làm như sau:

$$\begin{aligned} \text{Phương trình } &\Leftrightarrow a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d \\ &\Leftrightarrow a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &\Leftrightarrow (a-d) \sin^2 x + b \sin x \cos x + (c-d) \cos^2 x = 0 \end{aligned}$$

4. Phương trình chứa $\sin x \pm \cos x$ và $\sin x \cdot \cos x$

Phương trình chứa $\sin x \pm \cos x$ và $\sin x \cdot \cos x$

$$a(\sin x \pm \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$$

Cách giải. Đặt $t = \sin x \pm \cos x$ (điều kiện $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$)

Biểu diễn $\sin x \cdot \cos x$ theo t ta được phương trình cơ bản.

B

BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG
1

Phương Trình Bậc Hai Đối Với Hàm Số Lượng Giác

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $2 \sin^2 x - (2 + \sqrt{3}) \sin x + \sqrt{3} = 0$.

b) $\sqrt{3} \cot^2 x - 4 \cot x + \sqrt{3} = 0$.

c) $6 \sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$.

d) $4 \cos^2 x - 11 \cos x + 7 = 0$

Bài 2. Giải các phương trình sau :

a) $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$;

b) $2 \cos 2x - 4 \cos x = 1$;

3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

c) $2 \sin^2 2x + \sqrt{3} \cos 2x + 1 = 0$;

d) $2 \cos 2x + 2 \cos x - \sqrt{2} = 0$.

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $5 \tan x - 2 \cot x - 3 = 0$;

b) $\cot^4 x - 4 \cot^2 x + 3 = 0$;

c) $\tan^2 x - \frac{4}{\cos x} + 5 = 0$;

d) $2 \cos^2 x + \cot^2 x = \frac{1 + \sin^3 x}{\sin^2 x}$.

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{1}{\sin^2 2x} - \cot 2x + 1 = 0$;

b) $\tan x - \frac{1}{\tan x} + 2 = 0$;

c) $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + \sin 2x = 0$;

d) $(2 \tan x - \cot x) \sin 2x = 2 \sin^2 x + 2$.

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$;

b) $\sin^4 2x + \cos^4 2x = 1 - 2 \sin 4x$.

Bài 6. Cho phương trình $2 \cos 2x + (m + 4) \sin x - (m + 2) = 0$.

a) giải phương trình với $m = 2$.

b) Tìm các giá trị m để phương trình đã cho có 2 nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Bài 7. Định m để phương trình $\cos^2 x - \cos x + 1 - m = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Bài 8. Giải các phương trình sau :

a) $\frac{2}{\cos 2x} - \cos 2x - 1 = 0$.

b) $\sin x^2 + \cos 2x + \sin x + 1 = 0$.

Bài 9. Giải phương trình sau: $\sin^6 x + \cos^4 x = \cos 2x$.

Bài 10. Giải phương trình sau: $\cos^2 x - 4 \cos x - 2x \sin x + x^2 + 3 = 0$

DẠNG 2

Phương Trình Bậc Nhất Đối Với Sin Và Cos

Bài 11. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2} \sin x - \cos x = \sqrt{2}$.

b) $\sin 7x + \sqrt{3} \cos 7x = \sqrt{2}$.

c) $5 \cos 2x - 12 \sin x = 13$.

d) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

e) $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 2$;

f) $\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{3}$;

g) $2 \sin x + 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 + \sqrt{5}$;

h) $\cos^2 x - \sqrt{3} \sin 2x = 1 + \sin^2 x$.

Bài 12. Giải các phương trình sau:

a) $2 \cos^2 x + \frac{\sin 2x}{\sqrt{3}} = 1$.

b) $2 \sin^2 x - 2 \cos x \cdot \sin x + 1 = 0$.

Bài 13. Định m để các phương trình sau có nghiệm:

- a) $m \sin x + 2 \cos x = 1$; b) $m \sin x \cos x + \sin^2 x = m$;
 c) $m \cos 2x + (m + 1) \sin 2x = m + 2$; d) $\sin x - \sqrt{5} \cos x + 1 = m(2 + \sin x)$.

Bài 14. Cho phương trình $m \sin x - \cos x = -2$

- 1) Giải phương trình khi $m = \sqrt{3}$.
 2) Định m để phương trình trên vô nghiệm.

Bài 15. Giải các phương trình sau:

- a) $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin 2x$; b) $\sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2 \sin x = \sqrt{3} \cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Bài 16. Giải các phương trình sau:

- a) $(1 + \sin x)(1 + \cos x) = 2$; b) $\cos x + \frac{1}{\cos x} + \sin x + \frac{1}{\sin x} = \frac{10}{3}$.

Bài 17. Giải các phương trình sau: $\cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3 \sin 2x - 3 = 0$

DẠNG
3

Phương Trình Bậc Hai Đối Với $\sin x$ và $\cos x$

Bài 18. Giải các phương trình sau:

- a) $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0$; b) $4 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x = 4$;
 c) $4 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x - 6 \cos^2 x = 0$; d) $\sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 1$;
 e) $\cos^2 x + 3 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 1 = 0$; f) $3 \cos^4 x - 4 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x = 0$

Bài 19. Định m để phương trình $3 \sin^2 x + m \sin 2x - 4 \cos^2 x = 0$ có nghiệm.

Bài 20. Cho phương trình $(m + 2) \cos^2 x + m \sin 2x + (m + 1) \sin^2 x = m - 2$.

- 1) Giải phương trình với $m = -1$.
 2) Định m để phương trình đã cho có nghiệm.

DẠNG
4

Phương trình chứa $\sin x \pm \cos x$ và $\sin x \cdot \cos x$

Bài 21. Giải các phương trình sau:

- a) $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$; b) $\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$;
 c) $\sin x + \cos x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{1 + \sin x \cos x}$; d) $\sin x - \cos x + 7 \sin 2x = 1$.

Bài 22. Giải các phương trình sau:

- a) $\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $(1 - \sin x \cos x)(\sin x + \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
 c) $(\sin x + \cos x)^3 + \sin x \cos x - 1 = 0$; d) $1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin x$.

Bài 23. Giải các phương trình sau:

- a) $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$; b) $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$;
 c) $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$; d) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

Bài 24. Giải các phương trình sau

- a) $\sin 2x - \cos 2x = 7 \sin x + 2 \cos x - 4$; b) $2 \cos^6 x + \sin^4 x + \cos 2x = 0$;
 c) $4 \sin 2x - 3 \cos 2x = 3(4 \sin x - 1)$; d) $\cos 2x + 3 \sin 2x + 5 \sin x - 3 \cos x = 3$.

Bài 25. Giải các phương trình sau:

- a) $\frac{\sin 3x}{3} = \frac{\sin 5x}{5}$; b) $\frac{\sin 5x}{5 \sin x} = 1$.

Bài 26. Giải các phương trình sau:

- a) $\tan x + \cot x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$; b) $\tan^2 x + \tan x \cdot \tan 3x = 2$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc 2 theo 1 hàm số lượng giác

- A. $2 \sin^2 x + \sin 2x - 1 = 0$. B. $2 \sin^2 2x - \sin 2x = 0$.
 C. $\cos^2 x + \cos 2x - 7 = 0$. D. $\tan^2 x + \cot x - 5 = 0$.

Câu 2. Phương trình $\sin^2 x + 3 \sin x - 4 = 0$ có nghiệm là:

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3. Phương trình: $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 2$ có nghiệm là:

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 4. Nghiệm của phương trình $\sin^2 x - 4 \sin x + 3 = 0$ là:

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 5. Nghiệm của phương trình $5 - 5 \sin x - 2 \cos^2 x = 0$ là

- A. $k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 6. Tìm tất cả các họ nghiệm của phương trình: $\sin^2 x - 2 \sin x + \frac{3}{4} = 0$.

- A. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
 B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
 C. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
 D. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 7. Các họ nghiệm của phương trình $\cos 2x - \sin x = 0$ là

- A. $\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.
 B. $-\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.
 C. $\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.
 D. $-\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Câu 8. Nghiệm của pt $\sin^2 x = \sin x + 2$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.
 B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
 C. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.
 D. $x = k\pi$.

Câu 9. Nghiệm của phương trình $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$ là

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = \mp \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 10. Nghiệm của phương trình $\sin^2 x = -\sin x + 2$ là

- A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 11. Phương trình $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$ có nghiệm là

- A. $k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 12. Nghiệm của phương trình $1 - 5 \sin x + 2 \cos^2 x = 0$ là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 13. Một họ nghiệm của phương trình $\cos^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$ là

- A. $\frac{\pi}{2} + k\pi$.
 B. $k\frac{\pi}{3}$.
 C. $-\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}$.
 D. $k\frac{\pi}{2}$.

Câu 14. Một họ nghiệm của phương trình $2 \cos 2x + 3 \sin x - 1 = 0$ là

- A. $\pi + \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi$.
 B. $\pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi$.
 C. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi$.
 D. $\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi$.

Câu 15. Phương trình: $\sin^2 \frac{x}{3} - 2 \cos \frac{x}{3} + 2 = 0$ có nghiệm là:

- A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = k3\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = k6\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 16. Giải phương trình $\sqrt{3} \tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + 1 = 0$

- A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 17. Phương trình $\tan x + 3 \cot x = 4$ (với $k \in \mathbb{Z}$) có nghiệm là:

- A. $\frac{\pi}{4} + k2\pi, \arctan 3 + k2\pi$.
 B. $\frac{\pi}{4} + k\pi$.
 C. $\arctan 4 + k\pi$.
 D. $\frac{\pi}{4} + k\pi, \arctan 3 + k\pi$.

Câu 18. Nghiệm của phương trình $\sin^2 x \sin x = 0$ thỏa điều kiện: $0 < x < \pi$

- A. $x = \frac{\pi}{2}$.
 B. $x = \pi$.
 C. $x = 0$.
 D. $x = -\frac{\pi}{2}$.

Câu 19. Nghiệm của phương trình lượng giác: $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$ thỏa điều kiện $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ là:

- A. $x = \frac{\pi}{3}$.
 B. $x = \frac{\pi}{2}$.
 C. $x = \frac{\pi}{6}$.
 D. $x = \frac{5\pi}{6}$.

Câu 20. Nghiệm của phương trình $\sin^2 x + \sin x = 0$ thỏa điều kiện: $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

- A. $x = 0$.
 B. $x = \pi$.
 C. $x = \frac{\pi}{3}$.
 D. $x = \frac{\pi}{2}$.

Câu 21. Trong $[0; 2\pi)$, phương trình $\sin x = 1 - \cos^2 x$ có tập nghiệm là

- A. $\left\{\frac{\pi}{2}; \pi; 2\pi\right\}$.
 B. $\{0; \pi\}$.
 C. $\left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi\right\}$.
 D. $\left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; 2\pi\right\}$.

Câu 22. Nghiệm của phương trình $\sin^2 2x + 2 \sin 2x + 1 = 0$ trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là:

- A. $\left\{-\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right\}$.
 B. $\left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$.
 C. $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$.
 D. $\left\{\frac{\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right\}$.

Câu 23. Giải phương trình lượng giác $4 \sin^4 x + 12 \cos^2 x - 7 = 0$ có nghiệm là:

- A. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi$.
 B. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.
 C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
 D. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Câu 24. Họ nghiệm của phương trình $3 \tan 2x + 2 \cot 2x - 5 = 0$ là

- A. $-\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.
 B. $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.
 C. $-\frac{1}{2} \arctan \frac{2}{3} + k\frac{\pi}{2}$.
 D. $\frac{1}{2} \arctan \frac{2}{3} + k\frac{\pi}{2}$.

Câu 25. Trong các nghiệm sau, nghiệm âm lớn nhất của phương trình $2 \tan^2 x + 5 \tan x + 3 = 0$ là:

- A. $-\frac{\pi}{3}$.
 B. $-\frac{\pi}{4}$.
 C. $-\frac{\pi}{6}$.
 D. $-\frac{5\pi}{6}$.

Câu 26. Số nghiệm của phương trình $2 \tan x - 2 \cot x - 3 = 0$ trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ là:

- A. 2.
 B. 1.
 C. 4.
 D. 3.

Câu 27. Phương trình $\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4 \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{5}{2}$ có nghiệm là:

- A. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$.
 B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$.
 C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$.
 D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$.

Câu 28. Cho phương trình $\cos 5x \cos x = \cos 4x \cos 2x + 3 \cos^2 x + 1$. Các nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ của phương trình là:

- A. $-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$.
 B. $-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$.
 C. $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$.
 D. $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.

Câu 29. Phương trình: $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{4}$ có nghiệm là:

- A. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$.
 B. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.
 C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
 D. $x = \pi + k2\pi$.

Câu 30. Tìm m để phương trình $2 \sin^2 x - (2m + 1) \sin x + m = 0$ có nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

- A. $-1 < m < 0$.
 B. $1 < m < 2$.
 C. $-1 < m < 0$.
 D. $0 < m < 1$.

Câu 31. Cho phương trình $\frac{1}{2} \cos 4x + \frac{4 \tan x}{1 + \tan^2 x} = m$. Để phương trình vô nghiệm, các giá trị của tham số m phải thỏa mãn điều kiện:

A. $-\frac{5}{2} \leq m \leq 0$.

C. $1 < m \leq \frac{3}{2}$.

B. $0 < m \leq 1$.

D. $m < -\frac{5}{2}$ hay $m > \frac{3}{2}$.

Câu 32. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình bậc nhất theo $\sin x$ và $\cos x$

A. $\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$.

C. $2 \cos x + 3 \sin x = 1$.

B. $\sin 2x - \cos x = 0$.

D. $2 \cos x + 3 \sin 3x = -1$.

Câu 33. Trong các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm:

A. $2 \cos x - 3 = 0$.

C. $\cos^2 x - \cos x - 6 = 0$.

B. $3 \sin 2x - \sqrt{10} = 0$.

D. $3 \sin x + 4 \cos x = 5$.

Câu 34. Phương trình nào sau đây vô nghiệm

A. $\sin x = \frac{1}{3}$.

C. $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2$.

B. $\sqrt{3} \sin x - \cos x = -3$.

D. $3 \sin x - 4 \cos x = 5$.

Câu 35. Phương trình nào sau đây vô nghiệm:

A. $\cos x = \frac{1}{3}$.

C. $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2$.

B. $\sqrt{3} \sin x + \cos x = -1$.

D. $3 \sin x - 4 \cos x = 6$.

Câu 36. Phương trình nào sau đây vô nghiệm:

A. $2 \sin x - \cos x = 3$.

C. $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2$.

B. $\tan x = 1$.

D. $3 \sin x - 4 \cos x = 5$.

Câu 37. Trong các phương trình sau phương trình nào có nghiệm?

A. $\sqrt{3} \sin x = 2$.

C. $2 \sin x + 3 \cos x = 1$.

B. $\frac{1}{4} \cos 4x = \frac{1}{2}$.

D. $\cot^2 x - \cot x + 5 = 0$.

Câu 38. Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

A. $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2$.

C. $\sin x = \cos \frac{\pi}{4}$.

B. $3 \sin x - 4 \cos x = 5$.

D. $\sqrt{3} \sin x - \cos x = -3$.

Câu 39. Phương trình nào sau đây vô nghiệm:

A. $\sin x - \cos x = 3$.

C. $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2$.

B. $\cos x + 3 \sin x = -1$.

D. $2 \sin x + 3 \cos x = 1$.

Câu 40. Nghiệm của phương trình $\cos x + \sin x = 1$ là:

A. $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi; x = k2\pi$.

B. $x = k\pi; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = k\pi$.

Câu 41. Nghiệm của phương trình $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ là:

A. $x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi$.

C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

B. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

D. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi; x = -\frac{5\pi}{4} + k2\pi$.

Câu 42. Phương trình lượng giác: $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$ có nghiệm là

A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

B. Vô nghiệm.

C. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$.

D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Câu 43. Số nghiệm của phương trình $\sin x + \cos x = 1$ trên khoảng $(0; \pi)$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 44. Phương trình $(\sqrt{3} - 1) \sin x - (\sqrt{3} + 1) \cos x + \sqrt{3} - 1 = 0$ có các nghiệm là

A. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{9} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

D. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 45. Nghiệm của phương trình $\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 0$ là

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 46. Phương trình: $\sqrt{3} \cdot \sin 3x + \cos 3x = -1$ tương đương với phương trình nào sau đây:

A. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$

B. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}.$

C. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$

D. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$

Câu 47. Phương trình $\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1$ có nghiệm là

A. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B. $x = \frac{5}{6}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 48. Phương trình $3 \cos x + 2|\sin x| = 2$ có nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{8} + k\pi.$

B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi.$

C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$

D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

Câu 49. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m + 1) \sin x + \cos x = \sqrt{5}$ có nghiệm.

A. $-3 \leq m \leq 1.$

B. $0 \leq m \leq 2.$

C. $\begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -3 \end{cases}.$

D. $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}.$

Câu 50. Điều kiện để phương trình $m \sin x - 3 \cos x = 5$ có nghiệm là:

A. $m \geq 4.$

B. $-4 \leq m \leq 4.$

C. $m \geq \sqrt{34}.$

D. $\begin{cases} m \leq -4 \\ m \geq 4 \end{cases}.$

Câu 51. Với giá trị nào của m thì phương trình $\sin x + \cos x = m$ có nghiệm:

A. $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}.$

B. $m \geq \sqrt{2}.$

C. $-1 \leq m \leq 1.$

D. $m \leq 2.$

Câu 52. Cho phương trình: $(m^2 + 2) \cos^2 x - 2m \sin 2x + 1 = 0$. Để phương trình có nghiệm thì giá trị thích hợp của tham số m là

A. $-1 \leq m \leq 1.$

B. $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}.$

C. $-\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{1}{4}.$

D. $|m| \geq 1.$

Câu 53. Tìm m để pt $\sin 2x + \cos^2 x = \frac{m}{2}$ có nghiệm là

A. $1 - \sqrt{3} \leq m \leq 1 + \sqrt{3}.$

B. $1 - \sqrt{2} \leq m \leq 1 + \sqrt{2}.$

C. $1 - \sqrt{5} \leq m \leq 1 + \sqrt{5}.$

D. $0 \leq m \leq 2.$

Câu 54. Điều kiện có nghiệm của pt $a \sin 5x + b \cos 5x = c$ là

A. $a^2 + b^2 < c^2.$

B. $a^2 + b^2 \leq c^2.$

C. $a^2 + b^2 \geq c^2.$

D. $a^2 + b^2 > c^2.$

Câu 55. Điều kiện để phương trình $m \sin x + 8 \cos x = 10$ vô nghiệm là

A. $m > 6.$

B. $\begin{cases} m \leq -6 \\ m \geq 6 \end{cases}.$

C. $m < -6.$

D. $-6 < m < 6.$

Câu 56. Cho phương trình $m \sin x - \sqrt{1 - 3m} \cos x = m - 2$. Tìm m để phương trình có nghiệm.

- A. $\frac{1}{3} \leq m \leq 3$.
 B. $m \leq \frac{1}{3}$.
 C. Không có giá trị nào của m .
 D. $m \geq 3$.

Câu 57. Tìm m để phương trình $2 \sin^2 x + m \sin 2x = 2m$ vô nghiệm

- A. $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$.
 B. $\begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq \frac{4}{3} \end{cases}$.
 C. $0 < m < \frac{4}{3}$.
 D. $\begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{4}{3} \end{cases}$.

Câu 58. Giải phương trình $5 \sin 2x - 6 \cos^2 x = 13$.

- A. Vô nghiệm.
 B. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 59. Phương trình $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 5x$ có nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 60. Phương trình $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 3$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{4\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = \frac{5\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 61. Phương trình $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$ có các họ nghiệm là:

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{7} \end{cases}$.
 B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$.
 C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{7} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}$.
 D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}$.

Câu 62. Phương trình: $3 \sin 3x + \sqrt{3} \cos 9x = 1 + 4 \sin^3 3x$ có các nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{9} \\ x = \frac{7\pi}{6} + k\frac{2\pi}{9} \end{cases}$.
 B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{9} \\ x = \frac{7\pi}{9} + k\frac{2\pi}{9} \end{cases}$.
 C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{9} \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\frac{2\pi}{9} \end{cases}$.
 D. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{54} + k\frac{2\pi}{9} \\ x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{9} \end{cases}$.

Câu 63. Phương trình $8 \cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$ có nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{4\pi}{3} + k\pi \end{cases}$.
 B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$.
 C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$.
 D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}$.

Câu 64. Phương trình: $2\sqrt{3} \sin \left(x - \frac{\pi}{8}\right) \cos \left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{3} + 1$ có nghiệm là:

- A. $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{24} + k\pi \end{cases}$.
 B. $\begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}$.
 C. $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{16} + k\pi \end{cases}$.
 D. $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{24} + k\pi \end{cases}$.

Câu 65. Phương trình: $4 \sin x \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin \left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos 3x = 1$ có các nghiệm là:

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$
 B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\frac{\pi}{3} \end{cases}$
 C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = k\pi \end{cases}$
 D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k\frac{\pi}{4} \end{cases}$

Câu 66. Giải phương trình $\sin 3x - 4 \sin x \cos 2x = 0$

A. $\begin{cases} x = \frac{k2\pi}{3} \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}$
 B. $\begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$
 C. $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$
 D. $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}$

Câu 67. Tập tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 2x + 2 \sin^2 x - 6 \sin x - 2 \cos x + 4 = 0$ là

A. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 68. Biểu diễn tập nghiệm của phương trình $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ trên đường tròn lượng giác ta được số điểm cuối là

A. 6. B. 5. C. 4. D. 2.

Câu 69. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 5x \cos 7x = \cos 4x \sin 8x$ trên $(0; 2\pi)$ bằng

A. $\frac{19\pi}{3}$. B. $\frac{9\pi}{2}$. C. 5π . D. 7π .

Câu 70. Phương trình $\sin 2x + 3 \cos x = 0$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0; \pi)$

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 71. Khi đặt $t = \tan x$ thì phương trình $2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 1$ trở thành phương trình nào sau đây?

A. $2t^2 - 3t - 1 = 0$. B. $3t^2 - 3t - 1 = 0$. C. $2t^2 + 3t - 3 = 0$. D. $t^2 + 3t - 3 = 0$.

Câu 72. Giải phương trình $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 3$.

A. $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. C. $x = \frac{4\pi}{3} + k\pi$. D. $x = \frac{5\pi}{3} + k\pi$.

Câu 73. Phương trình: $3 \cos^2 4x + 5 \sin^2 4x = 2 - 2\sqrt{3} \sin 4x \cos 4x$ có nghiệm là:

A. $x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}$. B. $x = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4}$. C. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$. D. $x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$.

Câu 74. Cho phương trình $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 1 = 0$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Nếu chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ thì ta được phương trình $\tan^2 x - 3 \tan x + 2 = 0$.
 B. Nếu chia 2 vế của phương trình cho $\sin^2 x$ thì ta được phương trình $2 \cot^2 x + 3 \cot x + 1 = 0$.
 C. Phương trình đã cho tương đương với $\cos 2x - 3 \sin 2x + 3 = 0$.
 D. $x = k\pi$ không là nghiệm của phương trình.

Câu 75. Phương trình: $(\sqrt{3} + 1) \sin^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + (\sqrt{3} - 1) \cos^2 x = 0$ có các nghiệm là:

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{cases}$ (Với $\tan \alpha = 2 - \sqrt{3}$).
 B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{cases}$ (Với $\tan \alpha = -1 + \sqrt{3}$).
 C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{cases}$ (Với $\tan \alpha = 1 - \sqrt{3}$).
 D. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \alpha + k\pi \end{cases}$ (Với $\tan \alpha = -2 + \sqrt{3}$).

Câu 76. Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình

$$\sin^2 x - (\sqrt{3} + 1) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = \sqrt{3}$$

A. $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$

B. $(\cos x - 1) \left(\tan x - \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \right) = 0.$

C. $(\tan x + 2 + \sqrt{3})(\cos^2 x - 1) = 0.$

D. $\sin x = 0.$

Câu 77. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos^2 x = 2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{12}\right\} \subset S..$

B. $\left\{\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right\} \subset S..$

C. $\left\{\frac{\pi}{3}; \pi\right\} \subset S..$

D. $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right\} \subset S..$

Câu 78. Cho phương trình $(\sqrt{2} - 1)\sin^2 x + \sin 2x + (\sqrt{2} + 1)\cos^2 x - \sqrt{2} = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Nếu chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ thì ta được phương trình $\tan^2 x - 2\tan x - 1 = 0$.

B. Nếu chia hai vế của phương trình cho $\sin^2 x$ thì ta được phương trình $\cot^2 x + 2\cot x - 1 = 0$.

C. Phương trình đã cho tương đương với $\cos 2x - \sin 2x = 1$.

D. $x = \frac{7\pi}{8}$ là một nghiệm của phương trình.

Câu 79. Phương trình $\sin x + \cos x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$ có nghiệm là:

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \\ x = k\frac{\pi}{4} \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = k\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Câu 80. Giải phương trình $\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) = 2$.

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

B. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

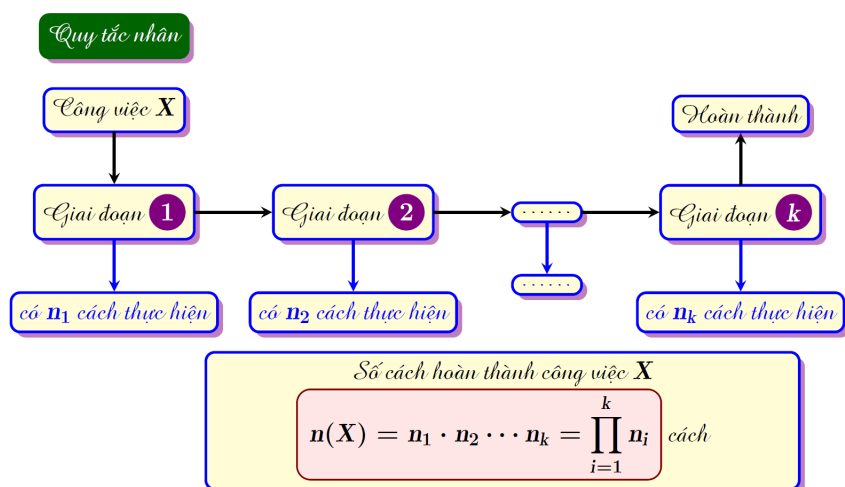
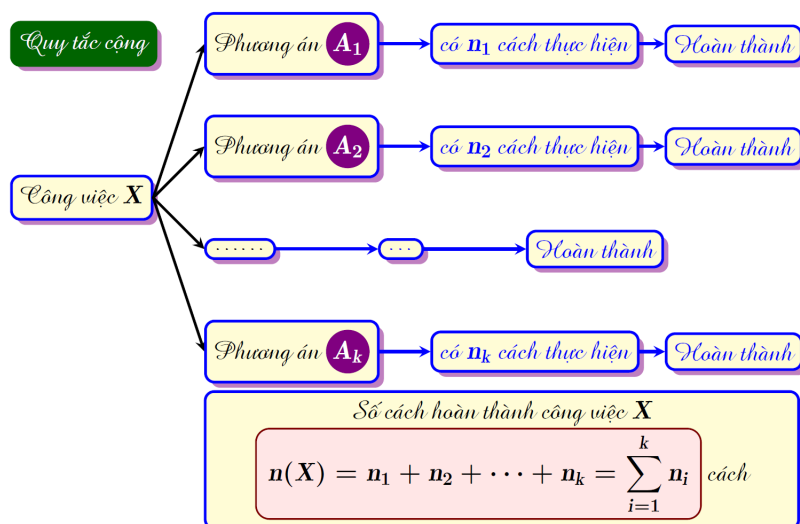
BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. B	4. C	5. C	6. C	7. C	8. A	9. C	10. B
11. D	12. B	13. D	14. B	15. D	16. A	17. D	18. A	19. C	20. A
21. C	22. B	23. B	24. D	25. B	26. D	27. A	28. D	29. B	30. C
31. D	32. C	33. D	34. B	35. D	36. A	37. C	38. D	39. A	40. A
41. A	42. A	43. B	44. B	45. D	46. C	47. A	48. D	49. C	50. D
51. A	52. D	53. C	54. C	55. D	56. C	57. D	58. A	59. C	60. A
61. A	62. D	63. B	64. B	65. A	66. D	67. C	68. A	69. D	70. B
71. D	72. B	73. B	74. B	75. A	76. C	77. D	78. C	79. B	80. A

QUY TẮC ĐẾM

A

KIẾN THỨC CẦN NHỚ



B

BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG
1

Quy Tắc Cộng

Bài 1. Một lớp có 20 học sinh nam và 24 học sinh nữ. Giáo viên chủ nhiệm cần chọn ra 1 em tham gia đội cờ đỏ của trường. Hỏi giáo viên có bao nhiêu cách chọn?

Bài 2. Một đội văn nghệ có 5 nam và 10 nữ. Trong đêm diễn chào mừng ngày 20/10 có 1 tiết mục múa bị hủy vì lý do đột xuất, đội cần thay thế bằng tiết mục đơn ca. Hỏi đội có bao nhiêu cách chọn 1 bạn trong đội để biểu diễn tiết mục đó, biết rằng khả năng biểu diễn của các bạn là như nhau?

Bài 3. Bạn Nam có 6 cuốn sách tham khảo Toán, 5 cuốn sách tham khảo Lý và 7 cuốn sách tham khảo Hóa. Mỗi buổi tối thứ 2 hàng tuần Nam đều giành thời gian để đọc 1 cuốn sách tham khảo trên. Hỏi Nam có bao nhiêu cách chọn 1 cuốn sách để đọc?

Bài 4. Trong siêu thị A có 10 loại nước ngọt không có ga khác nhau và 10 loại nước suối khác nhau. An chỉ đủ tiền mua 1 chai nước ngọt hoặc nước suối. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn mua 1 chai nước?

Bài 5. Trên tour du lịch Đà Lạt, đơn vị tổ chức thông báo có 6 địa danh vui chơi ở cung đường chạy ra phía đèo và 8 địa danh vui chơi nằm ở cung đường nhà thờ con gà. Do thời gian không cho phép nên tour chỉ đi đến được 1 địa danh. Hỏi có bao nhiêu cách để tour chọn 1 địa danh để vui chơi?

Bài 6. Một du khách nước ngoài đi du lịch ở Việt Nam muốn đi từ Thành phố Hồ Chí Minh đến Vũng Tàu. Biết rằng, trong 1 ngày có 7 chuyến xe và 3 chuyến tàu cao tốc từ Sài Gòn đi Vũng Tàu. Hỏi du khách đó có bao nhiêu cách lựa chọn 1 phương tiện để đi Vũng Tàu?

Bài 7. Trong kỳ thi vấn đáp có 40 câu hỏi khoa học xã hội, 45 câu hỏi khoa học tự nhiên và 30 câu hỏi về khoa học thường thức được gấp bỏ trong 1 hộp. Học sinh phải chọn 1 câu hỏi trong hộp để trả lời. Hỏi có bao nhiêu cách học sinh lựa chọn 1 câu hỏi?

Bài 8. Mẫn đi nhà sách để chọn mua chì màu, trong nhà sách có 10 loại chì màu loại sáp và 12 loại chì màu loại nước. Hỏi Mẫn có bao nhiêu cách chọn mua 1 loại chì màu loại sáp hoặc chì màu loại nước?

Bài 9. Trong năm học vừa qua Nam đạt danh hiệu học sinh giỏi nên được ba đưa đi mua 1 chiếc điện thoại. Trong tiệm có 12 dòng máy nhãn hiệu *SAMSUNG* và 22 dòng máy nhãn hiệu *APPLE* đều có giá nằm trong giới hạn mà ba Nam có thể mua được cho Nam. Hỏi Nam có bao nhiêu cách chọn mua 1 chiếc điện thoại?

Bài 10. Trong một ngày, từ thành phố A đến thành phố B có 4 chuyến xe ô tô, 7 chuyến tàu và 6 chuyến bay. Hỏi có bao nhiêu cách để 1 du khách đi từ thành phố A đến thành phố B?

Bài 11. Một hộp chứa 10 viên bi màu xanh, 8 viên bi màu đỏ và 12 viên bi màu vàng. Hỏi có bao nhiêu cách lấy 1 viên bi từ hộp?

Bài 12. Trong một cửa hàng có 10 loại bóng đèn dây tóc, 12 loại bóng đèn Nê-ông và 20 loại bóng đèn led. Vì lý do tiết kiệm năng lượng nên An không chọn mua bóng đèn dây tóc. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn mua 1 bóng đèn?

Bài 13. Một người có 5 cái quần và 7 cái áo. Người đó cần một bộ đồ đi dự tiệc gồm một quần và một áo, hỏi có bao nhiêu cách chọn khác nhau?

Bài 14. Một giá sách có 3 quyển sách tham khảo Toán khác nhau, 2 quyển sách tham khảo Lý khác nhau và 4 quyển sách tham khảo Hóa khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 3 quyển sách tham khảo trong đó có đầy đủ ba môn?

Bài 15. Một hộp có chứa 5 quả cầu đỏ được đánh số từ 1 đến 5 và 10 quả cầu trắng được đánh số từ 1 đến 10. Hỏi có bao nhiêu cách để chọn ra hai quả cầu sao cho tổng các số trên hai quả cầu là số lẻ?

Bài 16. Có 50 cặp vợ chồng đi dự tiệc. Tính số cách chọn một người đàn ông và một người phụ nữ trong bữa tiệc để tham gia một trò chơi, sao cho:

- 1) Hai người đó là vợ chồng?
- b) Hai người đó không phải là vợ chồng?

Bài 17. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Từ các phần tử thuộc tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau?

Bài 18. Cho tập hợp $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Từ các phần tử thuộc tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau?

Bài 19. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Từ các phần tử của tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số khác nhau?

Bài 20. Cho các số tự nhiên: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

- a) Hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số?
- b) Hỏi lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau?
- c) Hỏi lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số khác nhau?

Bài 21. Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau trong đó phải có mặt chữ số 5?

Bài 22. Có 8 quả cầu xanh đánh số từ 1 đến 8, 7 quả cầu vàng đánh số từ 1 đến 7 và 11 quả cầu đỏ đánh số từ 1 đến 11. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu vừa khác màu vừa khác số?

Bài 23. Xếp 4 quyển sách Toán, 3 quyển sách Lý, 6 quyển sách Hóa vào kệ sách theo từng môn. Tất cả các quyển sách đều khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp?

Bài 24. Một văn phòng cần chọn mua một tờ nhật báo mỗi ngày. Có 5 loại nhật báo. Hỏi có mấy cách chọn mua báo cho một tuần gồm 6 ngày làm việc để cả 5 loại nhật báo đều được mua?

Bài 25. Một giải đấu Liên Minh Huyền Thoại có 8 đội trong đó có 2 đội Việt Nam tham gia là YG và GAM. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 8 đội này thành một hàng ngang để khai mạc sao cho hai đội Việt Nam luôn đứng cạnh nhau?

Bài 26. Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có 5 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 5 học sinh trường A và 5 học sinh trường B vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp thỏa mãn điều kiện:

- Bất kỳ 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau đều khác trường?
- Bất kỳ 2 học sinh nào ngồi đối diện nhau đều khác trường?

Bài 27. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên:

- Gồm 5 chữ số trong đó các chữ số cách đều chữ số đứng giữa thì giống nhau?
- Gồm 5 chữ số trong đó hai chữ số kề nhau phải khác nhau?

DẠNG

3

Tổng hợp

Bài 28. Bạn An có 5 bông hoa hồng khác nhau, 4 bông hoa cúc khác nhau, 3 bông hoa lan khác nhau, bạn cần chọn ra 4 bông để cắm vào một lọ hoa. Hỏi bạn có bao nhiêu cách chọn hoa để cắm sao cho hoa trong lọ phải có đủ các loại?

Bài 29. Một tổ học sinh gồm 7 nam và 3 nữ. Giáo viên cần chọn ra 4 học sinh để đi lao động. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu trong 4 học sinh được chọn:

- Có duy nhất 1 học sinh nam.
- Có nhiều nhất 2 học sinh nam.
- Có số nam luôn nhiều hơn số nữ.

Bài 30. Một bàn dài gồm 6 ghế, có bao nhiêu cách xếp 3 người Nam và 3 người nữ vào 6 ghế này sao cho Nam và Nữ ngồi xen kẽ nhau?

Bài 31. Một giá sách có 12 cuốn sách Toán khác nhau; 10 cuốn sách Vật Lý khác nhau và 8 cuốn sách Hoá Học khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 2 cuốn sách có môn khác nhau?

Bài 32. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 4 chữ số khác nhau?

Bài 33. Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau và bé hơn 345?

Bài 34. Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 6 chữ số khác nhau lớn hơn 600.000?

Bài 35. Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, lập được bao nhiêu số có 6 chữ số đôi một khác nhau sao cho một trong hai chữ số đầu tiên là 3 và chia hết cho 5?

C

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Từ A đến B có 3 con đường, từ B đến C có 4 con đường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn đường từ A đến C (qua B)?

- A. 7. B. 12. C. 81. D. 64.

Câu 2. Từ A đến B có 3 con đường, từ B đến C có 4 con đường. Hỏi có bao nhiêu cách chọn đường từ A đến C (qua B) và trở về C đến A (qua B) và không đi lại các con đường đã đi rồi?

- A. 72. B. 132. C. 18. D. 23.

Câu 3. Một hộp có chứa 8 bóng đèn màu đỏ và 5 bóng đèn màu xanh. Số cách chọn được một bóng đèn trong hộp đó là:

- A. 13. B. 5. C. 8. D. 40.

Câu 4. Giả sử một công việc có thể được tiến hành theo hai phương án A và B . Phương án A có thể thực hiện bằng n cách, phương án B có thể thực hiện bằng m cách không trùng với cách nào của phương án A . Khi đó:

- A. Công việc có thể được thực hiện bằng $m.n$ cách.
 B. Công việc có thể được thực hiện bằng $\frac{1}{2} \cdot m \cdot n$ cách.
 C. Công việc có thể được thực hiện bằng $m + n$ cách.
 D. Công việc có thể thực hiện bằng $\frac{1}{2}(m + n)$ cách.

Câu 5. Có 8 quyển sách khác nhau và 6 quyển vở khác nhau. Số cách chọn một trong các quyển đó là

- A. 6. B. 8. C. 14. D. 48.

Câu 6. Giả sử một công việc có thể tiến hành theo hai công đoạn A và B . Công đoạn A có thể thực hiện bằng n cách, công đoạn B có thể thực hiện bằng m cách. Khi đó:

- A. Công việc có thể được thực hiện bằng $m.n$ cách.
 B. Công việc có thể được thực hiện bằng $\frac{1}{2} \cdot m \cdot n$ cách.
 C. Công việc có thể được thực hiện bằng $m + n$ cách.
 D. Công việc có thể thực hiện bằng $\frac{1}{2}(m + n)$ cách.

Câu 7. Từ tỉnh A tới tỉnh B có thể đi bằng ô tô, tàu hỏa, tàu thủy hoặc máy bay. Từ tỉnh B tới tỉnh C có thể đi bằng ô tô hoặc tàu hỏa. Muốn đi từ tỉnh A đến tỉnh C bắt buộc phải đi qua. Số cách đi từ tỉnh A đến tỉnh C là:

- A. 4. B. 2. C. 6. D. 8.

Câu 8. Một quán tạp hóa có 6 loại rượu, 4 loại bia và 3 loại nước ngọt. Ông Ba cần chọn mua đúng một loại đồ uống

- A. 13. B. 72. C. 30. D. 42.

Câu 9. Đi vào một khu di tích nọ có bốn cửa Đông, Tây, Nam, Bắc. Một người đi vào tham quan rồi đi ra phải đi hai cửa khác nhau. Số cách đi vào và đi ra của người đó là:

- A. 8. B. 12. C. 14. D. 64.

Câu 10. Một lớp học có 18 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Nếu muốn chọn một học sinh nam và một học sinh nữ đi dự một cuộc thi nào đó thì số cách chọn là:

- A. 38. B. 18. C. 20. D. 360.

Câu 11. Một du khách đến thành phố Huế, anh ta muốn tiêu khiển nhưng chỉ đủ thời gian đi đến một địa điểm. Có hai phòng trà ca hát, ba vũ trường và một rạp chiếu bóng. Vậy anh ta có bao nhiêu cách lựa chọn?

- A. 2. B. 3. C. 5. D. 6.

Câu 12. Cho tập hợp $A = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Có thể lập bao nhiêu số gồm 3 chữ số được thành lập từ các chữ số thuộc A ?

- A. 360. B. 216. C. 27. D. 120.

Câu 13. Cho tập hợp $A = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Có thể lập bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau được thành lập từ các chữ số thuộc A ?

- A. 256. B. 216. C. 180. D. 120.

Câu 14. Cho tập hợp $A = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Có thể lập bao nhiêu số lẻ có 4 chữ số khác nhau từ A ?

- A. 360. B. 180. C. 27. D. 18.

Câu 15. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Có thể lập bao nhiêu số chẵn có 3 chữ số khác nhau từ A ?

- A. 8. B. 12. C. 18. D. 24.

Câu 16. Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số?

- A. 899. B. 900. C. 901. D. 999.

Câu 17. Bạn muốn mua một cây bút chì và một cây bút mực. Bút mực có 8 màu, bút chì cũng có 8 màu khác nhau. Vậy bạn có bao nhiêu cách chọn?

- A. 64. B. 32. C. 20. D. 16.

Câu 18. Cho tập hợp $A = \{2; 3; 5; 8\}$. Có thể lập bao nhiêu số tự nhiên x sao cho $400 < x < 600$?

- A. 3^2 . B. 4^4 . C. $4!$. D. 4^2 .

Câu 19. Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Có thể lập bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 4 chữ số khác nhau?

- A. 752. B. 160. C. 156. D. 240.

Câu 20. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm hai chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5?

- A. 5. B. 15. C. 13. D. 22.

Câu 21. Số các chữ số tự nhiên có hai chữ số mà hai chữ số đó đều là hai số chẵn là:

- A. 15. B. 16. C. 18. D. 20.

Câu 22. Có bao nhiêu số có 2 chữ số, mà tất cả các chữ số đều lẻ:

- A. 25. B. 20. C. 30. D. 10.

Câu 23. Cho các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số lấy từ 7 chữ số trên sao cho chữ số đầu tiên bằng 3 là

- A. 7^5 . B. $7!$. C. 240. D. 2401.

Câu 24. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số đôi một khác nhau sao cho chữ số đầu chẵn chữ số đứng cuối lẻ.

- A. 11523. B. 11520. C. 11346. D. 22311.

Câu 25. Có 100000 vé được đánh số từ 00000 đến 99999. Hỏi số vé gồm 5 chữ số khác nhau.

- A. 30240. B. 32212. C. 23460. D. 32571.

Câu 26. Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 100 chia hết cho 2 và 3.

- A. 12. B. 16. C. 17. D. 20.

Câu 27. Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số gồm 8 chữ số đôi một khác nhau sao cho các số này lẻ không chia hết cho 5.

- A. 15120. B. 23523. C. 16862. D. 23145.

Câu 28. Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và là số chia hết cho 5

- A. 360. B. 120. C. 480. D. 347.

Câu 29. Cho tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số và chia hết cho 5.

- A. 660. B. 432. C. 679. D. 523.

Câu 30. Số các số tự nhiên gồm 5 chữ số chia hết cho 10 là

- A. 3260. B. 3168. C. 9000. D. 12070.

Câu 31. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số chia hết cho 2?

- A. 1792. B. 2240. C. 2304. D. 2048.

Câu 32. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau và chia hết cho 5?

- A. 60. B. 280. C. 78. D. 55.

Câu 33. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau và không chia hết cho 2?

- A. 2048. B. 2560. C. 1680. D. 2304.

Câu 34. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số có bốn chữ số khác nhau và không chia hết cho 5?

- A. 3584. B. 1900. C. 2240. D. 1680.

Câu 35. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số và chia hết cho 9? Kết quả cần tìm là:

- A. 930. B. 120. C. 150. D. 81.

Câu 36. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau từng đôi một, đồng thời chia hết cho 4? Kết quả cần tìm là:

- A. 30. B. 20. C. 50. D. 74.

Câu 37. Cho tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho số đó không bắt đầu bởi 125?

- A. 265. B. 262. C. 6702. D. 6705.

Câu 38. Cho tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 7 chữ số sao cho chữ số 1 đứng ở vị trí chính giữa?

- A. 360. B. 9375. C. 3125. D. 120.

Câu 39. Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Hỏi từ tập A lập được tất cả bao nhiêu số có 5 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 2?

- A. 360. B. 312. C. 288. D. 336.

Câu 40. Có bao nhiêu chữ số có 5 chữ số khác nhau chia hết cho 5 mà trong biểu diễn thập phân của nó không có các chữ số 7, 8, 9?

A. 660 số.

B. 500 số.

C. 626 số.

D. 520 số.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. A	4. C	5. C	6. A	7. D	8. A	9. B	10. D
11. D	12. B	13. D	14. B	15. D	16. B	17. A	18. D	19. C	20. C
21. D	22. A	23. D	24. B	25. A	26. C	27. A	28. B	29. A	30. C
31. A	32. B	33. C	34. D	35. D	36. D	37. D	38. B	39. B	40. A

BÀI

2

HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

A

KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Hoán vị

Định nghĩa 2.1 (Giai thừa). Cho số tự nhiên $n \geq 1$, ta định nghĩa n giai thừa, ký hiệu bởi $n!$, là $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$.

⇒ **Tính chất 2.1.** Giai thừa có các tính chất sau đây:

1) $n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! = \dots$

2) $1! = 1$ và quy ước $0! = 1$

Định nghĩa 2.2 (Hoán vị).

- Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$). Ta nói mỗi cách sắp xếp thứ tự của n phần tử tập hợp A là một hoán vị của n phần tử này.
- Số các hoán vị của n phần tử tập hợp A được ký hiệu bởi P_n .

Chú ý

Các hoán vị khác nhau chỉ khác nhau về thứ tự sắp xếp các phần tử. Hoán vị của 3 phần tử a, b, c gồm: $a, b, c; a, c, b; b, a, c; \dots$

Định lý 2.1

[Số các hoán vị] Số các hoán vị của n phần tử được tính theo công thức:

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

2. Chỉnh hợp

Định nghĩa 2.3. Cho tập hợp S gồm n phần tử ($n \geq 1$).

Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp S và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.

Định lý 2.2

Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử ($1 \leq k \leq n$) là:

$$A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Chú ý

Khi giải bài toán chọn trên một tập X có n phần tử, ta sẽ dùng chỉnh hợp nếu có 2 dấu hiệu sau:

- Chỉ chọn k phần tử của X ($1 \leq k \leq n$).
- Có sắp thứ tự các phần tử đã chọn.

3. Tổ hợp

Định nghĩa 2.4. Cho tập hợp A có n ($n \geq 1$) phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử của A (hay một tổ hợp chập k của A). Ký hiệu C_n^k .

Định lý 2.3

Số tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử ($1 \leq k \leq n$) là

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!}$$

Chú ý

Với quy ước $C_n^0 = 1$ thì với mọi số nguyên k thỏa $0 \leq k \leq n$ ta có

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

4. Tính chất của các số C_n^k

↔ **Tính chất 2.2.** $C_n^k = C_n^{n-k}$ với $0 \leq k \leq n$.

↔ **Tính chất 2.3 (Công thức Pascal).** $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k$ với $1 \leq k < n$.

B

BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG
1

Hoán Vị

Bài 1. Rút gọn: $A = \frac{12!5!}{10!6!}$; $B = \frac{(n-1)! \cdot (n+1)!}{n!(n-2)!}$; $C = \frac{P_n - P_{n-1}}{(n-2)!}$;

Bài 2. Phòng thi có 24 học sinh trong đó có Nhân và Nghĩa được xếp vào 12 bàn, mỗi bàn có 2 học sinh (không có ai trùng tên). Có bao nhiêu cách xếp để hai thí sinh Nhân và Nghĩa cùng ngồi chung bàn.

Bài 3. Cho tập hợp $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số phân biệt lấy từ tập A ?

Bài 4. Cho tập hợp $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số phân biệt lấy từ tập A ?

Bài 5. Bao nhiêu cách sắp xếp 7 bạn A, B, C, D, E, F, G vào 1 hàng sao cho

- A đứng chính giữa?
- A, B ngồi đứng 2 đầu dãy?

Bài 6. Một chồng sách gồm 4 quyển sách Toán khác nhau, 3 quyển sách Vật Lý khác nhau, 5 quyển sách Hóa Học khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các quyển sách trên thành một hàng ngang sao cho

- Các quyển sách cùng môn thì đứng cạnh nhau.
- Các quyển sách toán đứng gần nhau.

Bài 7. Một tổ có 5 học sinh nam và 5 học sinh nữ.

- Có bao nhiêu cách xếp 10 học sinh đó thành một hàng dọc.
- Có bao nhiêu cách xếp 10 học sinh đó thành một hàng dọc sao cho các học sinh cùng giới tính không đứng kề nhau.

Bài 8. Có bao nhiêu cách sắp xếp 10 viên bi đỏ và 10 viên bi xanh vào 1 hàng sao không có 2 viên bi nào cùng màu đứng gần nhau?

Bài 9. Cho các số tự nhiên: 0, 1, 2, 3, 4.

- Mỗi số có 5 chữ số khác nhau được thành lập từ các số trên là một hoán vị của 0; 1; 2; 3; 4.
 Các số có dạng $0abcd$ mà $a; b; c; d$ khác nhau là một hoán vị của các số 1; 2; 3; 4.
 Nên 5 có tất cả $5! - 4! = 96$ số có 5 chữ số khác nhau được thành lập từ các số trên.
- Tương tự phần a ; các số có dạng $ab3de$ bằng với số hoán vị của 4 số 0; 1; 2; 4.
 Các số có dạng $0a3cd$ bằng số hoán vị của 3 số 1; 2; 4.
 Nên có tất cả $4!3! = 18$ số có 5 chữ số khác nhau có số 3 đứng giữa được thành lập từ các số trên.

Bài 10. Cho tập hợp $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số phân biệt lấy từ tập A và 3 chữ số 1, 2, 3 luôn đứng cạnh nhau?

DẠNG
2

Chỉnh Hợp

Bài 11. Trong mặt phẳng cho 10 điểm phân biệt. Có bao nhiêu véc-tơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đã cho?

Bài 12. Một lớp có 40 học sinh. Có bao nhiêu cách chọn một ban cán sự gồm có lớp trưởng, lớp phó học tập và thủ quỹ?

Bài 13. Một nhóm có 5 bạn $A; B; C; D; E$. Có tất cả bao nhiêu cách phân công 3 bạn làm trực nhật: 1 bạn quét nhà, 1 bạn lau bảng, 1 bạn xếp bàn ghế?

Bài 14. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau?

Bài 15. Từ các chữ số 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau?

Bài 16. Cho tập $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 5 chữ số đôi một khác nhau?

Bài 17. Cho tập $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số đôi một khác nhau?

Bài 18. a) Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau?

b) Tính tổng của tất cả các số tìm được ở câu trên.

Bài 19. Cho tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

a) Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau và mỗi số chứa chữ số 5?

b) Trong các số trên, có bao nhiêu số không chia hết cho 5?

Bài 20. Có 100 người mua 100 vé số, có 4 giải (nhất, nhì, ba, tư).

a) Có bao nhiêu kết quả nếu người giữ vé số 47 đạt giải nhất?

b) Có bao nhiêu kết quả biết rằng người giữ vé số 47 trúng 1 trong 4 giải?

Bài 21. Trong mặt phẳng cho tập hợp gồm 6 điểm phân biệt. Có bao nhiêu véc-tơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối trong tập hợp này?

Bài 22. Có 10 cuốn sách khác nhau và 7 cây bút máy khác nhau. Cần chọn ra 3 cuốn sách và 3 cây bút máy để làm quà tặng cho 3 học sinh, mỗi em 1 cuốn sách và 1 cây bút máy. Hỏi có mấy cách chọn?

Bài 23. Trong một chương trình văn nghệ, cần chọn ra 7 bài hát trong 10 bài hát và 3 tiết mục múa trong 5 tiết mục múa rồi xếp thứ tự biểu diễn. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nếu các bài hát được xếp kế nhau và các tiết mục múa được xếp kế nhau?

Bài 24. Một dạ tiệc có 10 nam và 6 nữ giỏi khiêu vũ. Người ta chọn có thứ tự 3 nam và 3 nữ để ghép thành 3 cặp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

DẠNG
3

Tổ Hợp

- Bài 25.** Từ một đội tuyển bóng đá gồm 20 cầu thủ người ta cần cử 3 cầu thủ dự lễ bốc thăm chia bảng thi đấu. Hỏi có bao nhiêu cách cử?
- Bài 26.** Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Chọn 3 học sinh để tham gia vệ sinh công cộng toàn trường, hỏi có bao nhiêu cách chọn?
- Bài 27.** Có bao nhiêu cách lấy hai lá bài từ bộ bài tú lơ khơ gồm 52 lá?
- Bài 28.** Một tổ gồm 8 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Cần lấy một nhóm 5 người trong đó có 2 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?
- Bài 29.** Một hộp đựng 5 viên bi màu xanh, 7 viên bi màu vàng. Có bao nhiêu cách lấy ra 6 viên bi bất kỳ?
- Bài 30.** Có 15 đội bóng đá thi đấu theo thể thức vòng tròn tính điểm. Hỏi cần phải tổ chức bao nhiêu trận đấu?
- Bài 31.** Có bao nhiêu cách cắm 3 bông hoa giống nhau vào 5 lọ khác nhau (mỗi lọ cắm không quá một bông)?
- Bài 32.** Trong mặt phẳng cho tập hợp P gồm 2018 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng mà hai đầu mút thuộc P ?
- Bài 33.** Một tổ sinh viên có 20 em, trong đó có 8 em chỉ biết tiếng Anh, 7 em chỉ biết tiếng Pháp & 5 em chỉ biết tiếng Đức. Cần lập một nhóm đi thực tế gồm 3 em biết tiếng Anh, 4 em biết tiếng Pháp, 2 em biết tiếng Đức. Hỏi có bao nhiêu cách lập nhóm đi thực tế từ tổ sinh viên đó?
- Bài 34.** Trên một mặt phẳng có 10 đường thẳng song song cắt 9 đường thẳng song song khác. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành được tạo thành?
- Bài 35.** Trong một lớp học có 20 học sinh, trong đó có 2 cán bộ lớp. Hỏi có bao nhiêu cách cử 3 học sinh đi dự Đại hội Đoàn trường sao cho trong 3 học sinh đó có ít nhất một cán bộ lớp.
- Bài 36.** Trong một lớp gồm 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ.
Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên giải bài tập.
Có bao nhiêu cách gọi sao cho 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ?
- Bài 37.** Một đề thi trắc nghiệm có 20 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời trong đó có duy nhất phương án đúng. Mỗi câu nếu chọn đúng đáp án thì được 0,5 điểm.
Một thí sinh A chọn các phương án trả lời. Số cách chọn để thí sinh A được 4 điểm?
- Bài 38.** Tại một cuộc họp của tổ chức APEC tổ chức tại Hà Nội vào tháng 12 năm 2016 có 21 đại biểu là thành viên của các nước. Trước khi họp, các đại biểu chào hỏi và bắt tay nhau, mỗi đại biểu bắt tay một đại biểu khác một lần. Hỏi có bao nhiêu cái bắt tay?
- Bài 39.** Có 5 nhà toán học nam, 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lý nam. Lập một đoàn công tác có 3 người cần có cả nam lẫn nữ, cần có cả nhà toán học và nhà vật lý. Hỏi có bao nhiêu cách?
- Bài 40.** Cho 15 điểm nằm trên mặt phẳng trong đó có 5 điểm nằm trên một đường thẳng, ngoài ra không có bất kỳ 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là 3 trong số 15 điểm đã cho?
- Bài 41.** Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số (chữ số đầu tiên phải khác 0) biết rằng chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần và các chữ số còn lại có mặt không quá một lần?

Bài 42. Giải phương trình

- a) $P_2 \cdot n^2 - P_3 \cdot n = 8$.
 b) $A_x^3 + 5A_x^2 = 2(x + 15)$.
 c) $A_n^5 = 30A_{n-2}^4$;
 d) $C_{2n}^3 = \frac{44}{3}C_n^2$.
 e) $C_n^3 = 5C_n^1$.
 f) $C_x^1 + C_x^2 + C_x^3 = \frac{7}{2}x$.
 g) $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$.
 h) $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$.

Bài 43. Giải các bất phương trình sau:

- a) $A_x^3 + 5A_x^2 \leq 21x$.
 b) $10C_{n+1}^2 \geq 3nC_n^2$.
 c) $\frac{P_{n+4}}{P_n \cdot P_{n+2}} < \frac{15}{P_{n-1}}$ với $n \in \mathbb{N}$
 d) $\frac{A_{n+4}^4}{(n+2)!} < \frac{15}{(n-1)!}$.

Bài 44. Giải các phương trình, hệ phương trình, bất phương trình sau:

- a) $3C_{n+1}^2 + nP_2 = 4A_n^2$.
 b) $A_{n+1}^3 + C_{n+1}^{n-1} < 14(n+1)$.
 c) $\begin{cases} A_x^2 + C_y^3 = 22 \\ A_y^3 + C_x^2 = 66 \end{cases}$.

Bài 45. Cho $k, n \in \mathbb{N}$ và $k < n$. Chứng minh rằng $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Bài 46. Cho hai số nguyên dương m và n thỏa mãn $0 < m < n$. Chứng minh rằng $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$.

C

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Có bao nhiêu khả năng có thể xảy ra đối với thứ tự giữa các đội trong một giải bóng có 5 đội bóng? (giả sử rằng không có hai đội nào có điểm trùng nhau)

- A. 120. B. 100. C. 80. D. 60.

Câu 2. Có bao nhiêu cách xếp khác nhau cho 5 người ngồi vào một bàn dài?

- A. 120. B. 5. C. 20. D. 25.

Câu 3. Số cách sắp xếp 6 nam sinh và 4 nữ sinh vào một dãy ghế hàng ngang có 10 chỗ ngồi là:

- A. $6!4!$. B. $10!$. C. $6! - 4!$. D. $6! + 4!$.

Câu 4. Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Số cách sắp xếp sao cho bạn Chi luôn ngồi chính giữa là

- A. 24. B. 120. C. 60. D. 16.

Câu 5. Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho bạn An và bạn Dũng luôn ngồi ở hai đầu ghế?

- A. 120. B. 16. C. 12. D. 24.

Câu 6. Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho bạn An và bạn Dũng không ngồi cạnh nhau?

- A. 24. B. 48. C. 72. D. 12.

Câu 7. Có 3 viên bi đen khác nhau, 4 viên bi đỏ khác nhau, 5 viên bi xanh khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp các viên bi trên thành một dãy sao cho các viên bi cùng màu ở cạnh nhau?

- A. 345600. B. 725760. C. 103680. D. 518400.

Câu 8. Cô dâu và chú rể mời 6 người ra chụp ảnh kỷ niệm, người thợ chụp hình có bao nhiêu cách sắp xếp sao cho cô dâu, chú rể đứng cạnh nhau.

- A. $8! - 7!$. B. $2 \cdot 7!$. C. $6 \cdot 7!$. D. $2! + 6!$.

Câu 9. Có bao nhiêu cách sắp xếp 4 người vào 4 ghế ngồi được bố trí quanh một bàn tròn?

- A. 12. B. 24. C. 4. D. 6.

Câu 10. Có 4 nữ sinh tên là Huệ, Hồng, Lan, Hương và 4 nam sinh tên là An, Bình, Hùng, Dũng cùng ngồi quanh một bàn tròn có 8 chỗ ngồi. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp biết nam và nữ ngồi xen kẽ nhau?

- A. 576. B. 144. C. 2880. D. 1152.

Câu 11. Từ các số tự nhiên 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau:

- A. 4^4 . B. 24. C. 1. D. 42.

DẠNG

6

Chỉnh Hợp

Câu 12. Có bao nhiêu cách xếp khác nhau cho 6 người ngồi vào 4 chỗ trên một bàn dài?

- A. 15. B. 720. C. 30. D. 360.

Câu 13. Giả sử có bảy bông hoa khác nhau và ba lọ hoa khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách cắm ba bông hoa vào ba lọ đã cho (mỗi lọ cắm một bông)?

- A. 35. B. 30240. C. 210. D. 21.

Câu 14. Có bao nhiêu cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn được chọn từ 6 bóng đèn khác nhau?

- A. 15. B. 360. C. 24. D. 17280.

Câu 15. Trong mặt phẳng cho một tập hợp gồm 6 điểm phân biệt. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp điểm này?

- A. 15. B. 12. C. 1440. D. 30.

Câu 16. Trong trận chung kết bóng đá phải phân định thắng thua bằng đá luân lưu 11 mét. Huấn luyện viên mỗi đội cần trình với trọng tài một danh sách sắp thứ tự 5 cầu thủ trong số 11 cầu thủ để đá luân lưu 5 quả 11 mét. Hãy tính xem huấn luyện viên của mỗi đội có bao nhiêu cách lập danh sách gồm 5 cầu thủ.

- A. 462. B. 55. C. 55440. D. $11! \cdot 5!$.

Câu 17. Trong một ban chấp hành đoàn gồm 7 người, cần chọn ra 3 người vào ban thường vụ. Nếu cần chọn ban thường vụ gồm ba chức vụ Bí thư, Phó bí thư, Ủy viên thường vụ thì có bao nhiêu cách chọn?

A. 210.

B. 200.

C. 180.

D. 150.

Câu 18. Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh số từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có 4 giải: 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể nếu biết rằng người giữ vé số 47 được giải nhất?

A. 944109.

B. 941409.

C. 941094.

D. 941049.

Câu 19. Trong một dạ hội cuối năm ở một cơ quan, ban tổ chức phát ra 100 vé xổ số đánh số từ 1 đến 100 cho 100 người. Xổ số có 4 giải: 1 giải nhất, 1 giải nhì, 1 giải ba, 1 giải tư. Kết quả là việc công bố ai trúng giải nhất, giải nhì, giải ba, giải tư. Hỏi có bao nhiêu kết quả có thể nếu biết rằng người giữ vé số 47 trúng một trong bốn giải?

A. 3766437.

B. 3764637.

C. 3764367.

D. 3764376.

Câu 20. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được lập từ các số $1, 2, \dots, 9$?

A. 15120.

B. 9^5 .

C. 5^9 .

D. 126.

Câu 21. Cho tập $A = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ Số các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau lấy ra từ tập A là?

A. 30420.

B. 27162.

C. 27216.

D. 30240.

Câu 22. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số khác nhau đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3?

A. 249.

B. 7440.

C. 3204.

D. 2942.

DẠNG
7

Tổ Hợp

Câu 23. Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Chọn 3 học sinh để tham gia vệ sinh công cộng toàn trường, hỏi có bao nhiêu cách chọn như trên?

A. 9880.

B. 59280.

C. 2300.

D. 455.

Câu 24. Một tổ có 10 người gồm 6 nam và 4 nữ. Cần lập một đoàn đại biểu gồm 5 người, hỏi có bao nhiêu cách lập?

A. 25.

B. 252.

C. 50.

D. 455.

Câu 25. Trong một ban chấp hành đoàn gồm 7 người, cần chọn 3 người trong ban thường vụ. Nếu không có sự phân biệt về chức vụ của 3 người trong ban thường vụ thì có bao nhiêu cách chọn?

A. 25.

B. 42.

C. 50.

D. 35.

Câu 26. Một cuộc thi có 15 người tham dự, giả thiết rằng không có hai người nào có điểm bằng nhau. Nếu kết quả cuộc thi và việc chọn ra 4 người có điểm cao nhất thì có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?

A. 1635.

B. 1536.

C. 1356.

D. 1365.

Câu 27. Một hộp đựng 5 viên bi màu xanh, 7 viên bi màu vàng. Có bao nhiêu cách lấy ra 6 viên bi bất kỳ?

A. 665280.

B. 924.

C. 7.

D. 942.

Câu 28. Có bao nhiêu cách lấy hai con bài từ cỗ bài tú lơ khơ gồm 52 con?

A. 104. B. 450. C. 1326. D. 2652.

Câu 29. Có 15 đội bóng đá thi đấu theo thể thức vòng tròn tính điểm. Hỏi cần phải tổ chức bao nhiêu trận đấu?

A. 100. B. 105. C. 210. D. 200.

Câu 30. Có bao nhiêu cách cắm 3 bông hoa giống nhau vào 5 lọ khác nhau (mỗi lọ cắm không quá một bông)?

A. 10. B. 30. C. 6. D. 60.

Câu 31. Cho 10 điểm, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng khác nhau tạo bởi 2 trong 10 điểm nói trên?

A. 90. B. 20. C. 45. D. Một số khác.

Câu 32. Trong mặt phẳng, cho 6 điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó thuộc tập điểm đã cho?

A. 15. B. 20. C. 60. D. Một số khác.

Câu 33. Để chào mừng kỉ niệm ngày thành lập Đoàn TNCS Hồ Chí Minh, nhà trường tổ chức cho học sinh cắm trại. Lớp 10A có 19 học sinh nam và 16 học sinh nữ. Giáo viên cần chọn 5 học sinh để trang trí trại. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 5 học sinh sao cho có ít nhất 1 học sinh nữ? Biết rằng học sinh nào trong lớp cũng có khả năng trang trí trại.

A. C_19^5 . B. $C_35^5 - C_19^5$. C. $C_35^5 - C_16^5$. D. C_16^5 .

Câu 34. Một hộp có 6 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 4 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi sao cho có đủ cả ba màu. Số cách chọn là:

A. 2163. B. 3843. C. 3003. D. 840.

DẠNG

8

Tổng Hợp

Câu 35. Cho $A = \{a; b; c\}$. Số hoán vị của ba phần tử của A là:

A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

Câu 36. Số hoán vị của n phần tử là:

A. n^2 . B. n^n . C. $2n$. D. $n!$.

Câu 37. Có bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau được tạo thành từ các số 1, 2, 3, 4, 5?

A. P_4 . B. P_5 . C. A_5^4 . D. C_5^4 .

Câu 38. Cho 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Từ 5 chữ số này ta lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau?

A. 120. B. 60. C. 30. D. 40.

Câu 39. Một tổ học sinh có 5 nam và 5 nữ xếp thành một hàng dọc thì số các cách xếp khác nhau là: A 25. B 10 10! C 40

Câu 40. Cho 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5. Từ 5 chữ số này, ta lập các số chẵn có 5 chữ số khác nhau. Số các số có thể lập được là:

A. 120. B. 48. C. 32. D. 40.

Câu 41. Có bao nhiêu số lẻ có 4 chữ số khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5?

- A. 15. B. 120. C. 72. D. 12.

Câu 42. Cho $n, k \in \mathbb{N}$ với $0 < k \leq n$. Mệnh đề nào có giá trị sai?

- A. $P_0 = 1$. B. $P_n = C_n^n$. C. $C_n^k = C_n^{n-k}$. D. $A_n^k = k! \cdot C_n^k$.

Câu 43. Từ 6 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 ta lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau?

- A. 120. B. 192. C. 312. D. 216.

Câu 44. Trong một trường có 4 học sinh giỏi lớp 12, 3 học sinh giỏi lớp 11 và 5 học sinh giỏi lớp 10. Cần chọn 5 học sinh giỏi để tham gia một cuộc thi với các trường khác sao cho khối 12 có 3 em và mỗi khối 10, 11 có đúng 1 em. Vậy số tất cả các cách chọn là:

- A. 60. B. 180. C. 330. D. 90.

Câu 45. Một lớp có 30 học sinh gồm 12 học sinh nam, 18 học sinh nữ, cần chọn ra 5 học sinh gồm cả nam và nữ đi thi giới thiệu sách. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong đó có ít nhất 3 nữ?

- A. 53856. B. 90576. C. 28800. D. 14400.

Câu 46. Một nhóm học sinh gồm 5 nữ, 5 nam. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 bạn thành một hàng dọc sao cho các bạn cùng phái thì đứng cạnh nhau?

- A. 86400. B. 43200. C. 28800. D. 14400.

Câu 47. Trong một bình đựng 4 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên ra 2 viên. Có bao nhiêu cách lấy được 2 viên cùng màu?

- A. 18. B. 9. C. 22. D. 4.

Câu 48. Có 12 tay đua xe đạp cùng xuất phát trong một cuộc đua để chọn ra 3 người về đích đầu tiên. Số kết quả có thể xảy ra là:

- A. 1250. B. 1320. C. 220. D. 240.

Câu 49. Trên giá có 15 cuốn sách gồm 5 sách Toán, 7 sách Tiếng Anh và 3 sách Văn. Hỏi có bao nhiêu cách xếp thành một hàng sao cho sách cùng loại thì xếp cạnh nhau và sách Văn nằm giữa sách Toán, sách tiếng Anh?

- A. 7257600. B. 3628800. C. 1814400. D. 907200.

Câu 50. Cho 4 ô tô khác nhau và 3 xe máy giống nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 7 xe vào 8 chỗ trống sao cho ô tô cạnh nhau và xe máy cạnh nhau?

- A. 48. B. 144. C. 288. D. 432.

Câu 51. Cho 5 thẻ đen khác nhau và 3 thẻ trắng khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp thành một hàng sao cho không có 2 thẻ trắng nào cạnh nhau?

- A. 2880. B. 4320. C. 5760. D. 14400.

Câu 52. Dũng có 8 người bạn. Dũng muốn mời 4 trong 8 người bạn đó về quê chơi vào cuối tuần. Nhưng trong 8 người bạn đó, có 2 bạn là Hùng và Tuấn không thích đi chơi với nhau. Như vậy số cách chọn nhóm 4 người để về quê của Dũng là?

- A. C_8^4 . B. $C_6^4 + C_6^3$. C. $C_6^4 + 2C_6^3$. D. $C_6^4 + C_7^3$.

Câu 53. Một tổ có 6 học sinh, trong đó có 3 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các học sinh trong tổ thành một hàng dọc sao cho nam, nữ đứng xen kẽ nhau?

- A. 36. B. 42. C. 102. D. 72.

Câu 54. Có 10 quyển sách Toán, 8 quyển sách Lí, 5 quyển sách Văn. Cần chọn ra 8 quyển có ở cả ba môn sao cho số quyển Toán ít nhất là bốn và số quyển Văn nhiều nhất là hai. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

- A. 181440. B. 146580. C. 164420. D. 152280.

Câu 55. Một tổ học sinh có 5 nam và 5 nữ xếp thành 1 hàng dọc sao cho không có học sinh cùng giới tính đứng kề nhau. Số cách xếp là:

- A. $5! \cdot 5!$. B. $2 \cdot (5!)^2$. C. $10!$. D. $2 \cdot 5!$.

Câu 56. Một rổ có 10 loại quả khác nhau trong đó có 1 mít và 1 bưởi. Hỏi có bao nhiêu cách xếp thành một hàng sao cho mít và bưởi cách nhau đúng 2 quả khác?

- A. 2257920. B. 645120. C. 564480. D. 282240.

Câu 57. Có 7 nam 5 nữ xếp thành một hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho 2 vị trí đầu và cuối là nam và không có 2 nữ nào đứng cạnh nhau?

- A. 118540800. B. 152409600. C. 12700800. D. 3628800.

Câu 58. Một nhóm sinh viên có 4 nam 2 nữ ngồi và 9 ghế hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho nam ngồi liền nhau, nữ ngồi liền nhau và giữa 2 nhóm có ít nhất 2 ghế?

- A. 576. B. 672. C. 288. D. 144.

Câu 59. Trong một buổi chụp ảnh của trường A, có 5 giáo viên Toán, 3 giáo viên Hóa và 1 giáo viên Vật Lí xếp thành một hàng ngang. Hỏi có bao nhiêu cách xếp để 3 giáo viên Hóa và 1 giáo viên Vật Lí không ai cạnh nhau?

- A. 43200. B. 356640. C. 357120. D. Đáp án khác.

Câu 60. Cho 2 đường thẳng $a \parallel b$, trên đường thẳng a lấy 7 điểm phân biệt, trên đường thẳng b lấy 5 điểm phân biệt. Hỏi có thể dựng được bao nhiêu tam giác từ 12 điểm đã cho?

- A. 1320. B. 220. C. 210. D. 175.

Câu 61. An có 6 ảnh EXO, 5 ảnh BTS, 4 ảnh SNSD. An muốn chọn ra 4 ảnh để tặng cho Hà. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn sao cho số ảnh EXO bằng số ảnh SNSD?

- A. 240. B. 330. C. 335. D. 480.

Câu 62. Hai đơn vị thi đấu cờ tướng A và B lần lượt có 5 người và 6 người. Cần chọn ra mỗi đơn vị 3 người để ghép cặp thi đấu với nhau. Hỏi có bao nhiêu cách thực hiện như thế?

- A. 1200. B. $C_5^3 \cdot C_6^3$. C. $A_5^3 \cdot C_6^3$. D. $C_5^3 \cdot A_6^3$.

Câu 63. Một hội đồng gồm 5 nam và 4 nữ được tuyển vào một ban quản trị gồm 4 người. Hỏi có bao nhiêu cách tuyển chọn?

- A. 240. B. 260. C. 126. D. Kết quả khác.

Câu 64. Có bao nhiêu cách chọn và sắp thứ tự 5 cầu thủ để đá bóng luân lưu 11m. Biết rằng cả 11 cầu thủ đều có khả năng như nhau.

- A. 55440. B. 20680. C. 32456. D. 41380.

Câu 65. Một hội đồng gồm 5 nam và 4 nữ được tuyển vào một ban quản trị gồm 4 người. Biết rằng ban quản trị có ít nhất một nam và một nữ. Hỏi có bao nhiêu cách tuyển chọn?

- A. 240. B. 260. C. 126. D. Kết quả khác.

Câu 66. Một bạn có 13 cuốn vở. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 5 cuốn viết các môn tự nhiên, 4 cuốn viết các môn xã hội và 4 cuốn viết các môn còn lại?

- A. 657946575. B. 6306300. C. 360360. D. 90090.

Câu 67. Một lớp có 50 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách phân công 3 học sinh để làm vệ sinh lớp học trong một ngày?

- A. 117600. B. 128500. C. 376. D. 436.

Câu 68. Có 3 tem thư khác nhau và 6 bì thư khác nhau. Người ta muốn chọn từ đó ra 3 tem thư, 3 bì thư và dán 3 tem thư đó lên 3 bì thư đã chọn, mỗi bì thư chỉ dán 1 tem thư. Hỏi có bao nhiêu cách làm như vậy?

- A. 200. B. 30. C. 300. D. 120.

Câu 69. Có 3 môn thi Toán, Lí, Hóa cần xếp vào 3 buổi thi, mỗi buổi 1 môn sao cho môn Toán không thi buổi đầu thì số cách xếp là:

- A. $3!$. B. $2!$. C. $3!2!$. D. 5.

Câu 70. Từ 12 người, người ta thành lập một ban kiểm tra gồm 2 người lãnh đạo và 3 ủy viên. Hỏi có bao nhiêu cách thành lập ban kiểm tra?

- A. $C_1 2^2 C_1 0^3$. B. $C_1 0^2 C_1 2^5$. C. $C_1 2^2 C_1 2^5$. D. Kết quả khác.

Câu 71. Có 4 cuốn sách toán khác nhau, 3 sách lý khác nhau, 2 sách hóa khác nhau. Muốn sắp và một kệ dài các cuốn sách cùng môn kề nhau, 2 loại toán và lý phải kề nhau thì số cách sắp là:

- A. $4!3!2!$. B. $2!4!3!2!$. C. $3!4!3!2!$. D. $4!4!3!2!$.

Câu 72. Có 18 đội bóng đá tham gia thi đấu. Mỗi đội chỉ có thể nhận nhiều nhất là một huy chương và đội nào cũng có thể đoạt huy chương. Khi đó, số cách trao 3 loại huy chương vàng, bạc, đồng cho ba đội nhất nhì ba là:

- A. 51. B. 4896. C. 125. D. 12070.

Câu 73. Một tổ gồm 7 nam 4 nữ xếp thành một hàng dọc trong giờ thể dục. Hỏi có bao nhiêu cách xếp để nữ luôn đứng thành 2 cặp không cạnh nhau?

- A. 101606400. B. 3386880. C. 1128960. D. 6773760.

Câu 74. Có 8 nhà khoa học Toán (6 nam, 2 nữ) và 5 nhà khoa học Vật Lí (toàn nam). Hỏi có bao nhiêu cách lập một đội gồm 4 nhà khoa học trong đó có cả nam, nữ, cả Toán, Vật Lí?

- A. 270. B. 300. C. 375. D. 570.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. B	4. A	5. C	6. C	7. C	8. B	9. D	10. B
11. B	12. D	13. C	14. B	15. D	16. C	17. A	18. C	19. D	20. A
21. C	22. B	23. A	24. B	25. D	26. D	27. B	28. C	29. B	30. A
31. C	33. B	34. A	35. C	36. D	37. C	38. A	39. D	40. B	41. C
42. A	43. C	44. A	45. B	46. C	47. B	48. C	49. A	50. B	51. D
52. C	53. D	54. A	55. B	56. C	57. D	58. B	59. A	60. D	61. C
62. A	63. C	64. A	65. D	66. D	67. A	68. D	69. C	70. A	71. D
72. B	73. D	74. C							

BÀI

3

NHỊ THỨC NEWTON

A

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Công thức nhị thức Newton

Định nghĩa 3.1. Ta thừa nhận công thức khai triển biểu thức $(a + b)^n$ thành tổng các đơn thức như sau

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n. \quad (1)$$

Công thức (1) được gọi là **công thức nhị thức Newton**.

⇔ **Hệ quả 3.1.**

1) Với $a = b = 1$, ta có $2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$.

2) Với $a = 1, b = -1$, ta có $0 = C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n$.

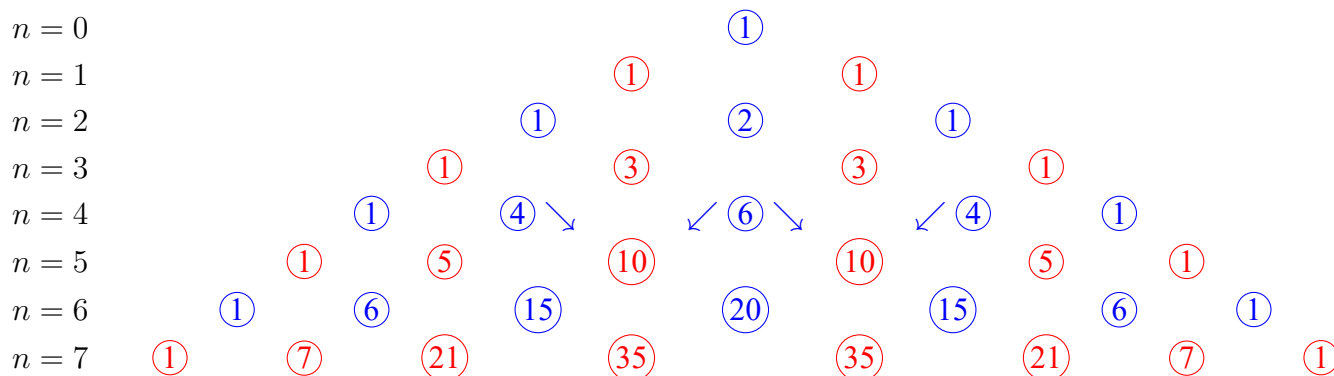
Chú ý

Trong biểu thức ở vế phải của công thức (1):

- Số các hạng tử là $n + 1$.
- Các hạng tử có số mũ của a giảm dần từ n đến 0, số mũ của b tăng dần từ 0 đến n , nhưng tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử luôn bằng n .
- Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.
- Số hạng tổng quát là $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ (số hạng thứ $k + 1$).

2. Tam giác Pascal

Trong công thức nhị thức Newton, cho $n = 0, 1, \dots$ và xếp các hệ số thành dòng, ta nhận được tam giác sau đây, gọi là **tam giác Pascal**.



Chú ý

Từ công thức $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ suy ra cách tính các số ở mỗi dòng dựa vào các số ở dòng trước nó. Chẳng hạn $C_5^2 = C_4^1 + C_4^2 = 4 + 6 = 10$.

B **BÀI TẬP TỰ LUẬN**

Bài 1. Khai triển biểu thức

- a) $(x + y)^6$.
 b) $(2x - 3)^4$.
 c) $(a + 2b)^5$.
 d) $(a - \sqrt{2})^6$.
 e) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{13}$.

Bài 2. 1) Tìm số hạng tổng quát và số hạng thứ 4 trong khai triển $(3x + 5)^7$.

- 2) Tìm số hạng tổng quát và số hạng thứ 5 trong khai triển $(1 - 5x)^9$.
 3) Tìm số hạng tổng quát và số hạng thứ 9 trong khai triển $(2\sqrt{x} - 1)^{18}$.
 4) Tìm số hạng tổng quát và số hạng thứ 25 trong khai triển $(2x + y^2)^{28}$.

Bài 3. Tìm hệ số của

- a) Số hạng chứa x^{15} trong khai triển $(3x^2 - 2x)^{10}$.
 b) Số hạng chứa x^5 trong khai triển: $(2x - 1)^{12}$.
 c) Số hạng chứa x^{11} trong khai triển: $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10}$.
 d) Số hạng chứa x^7 trong khai triển: $(x^2 + x)^{14}$.
 e) Số hạng chứa $x^{25} \cdot y^{10}$ trong khai triển: $(x^3 + xy)^{15}$.

Bài 4. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển

- 1) $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^6$, với $x \neq 0$.
 2) $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^{21}$, với $x \neq 0$.

3) $\left(2x^2 + \frac{3}{x}\right)^6$, với $x \neq 0$.

Bài 5. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $P(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^n$ (với x khác 0) biết $2C_n^2 = C_n^3$.

Bài 6. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $P(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^n$ (với x khác 0) biết

$$2A_n^2 = C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3.$$

Bài 7. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $P(x) = \left(\frac{2}{x} - x^3\right)^n$ (với x khác 0) biết

$$C_{n-4}^{n-6} + n.A_n^2 = 454.$$

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong khai triển $(2a - b)^5$, hệ số của số hạng thứ 3 bằng:

- A. -80. B. 80. C. -10. D. 10.

Câu 2. Trong khai triển nhị thức $(a + 2)^{n+6}$, ($n \in \mathbb{N}$). Có tất cả 17 số hạng. Vậy n bằng:

- A. 17. B. 11. C. 10. D. 12.

Câu 3. Trong khai triển $(3x^2 - y)^{10}$, hệ số của số hạng chính giữa là:

- A. $3^4 \cdot C_{10}^4$. B. $-3^4 \cdot C_{10}^4$. C. $3^5 \cdot C_{10}^5$. D. $-3^5 \cdot C_{10}^5$.

Câu 4. Trong khai triển $(2x - 5y)^8$, hệ số của số hạng chứa $x^5 \cdot y^3$ là:

- A. -22400. B. -40000. C. -8960. D. -4000.

Câu 5. Trong khai triển $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$, hệ số của x^3 , ($x > 0$) là:

- A. 60. B. 80. C. 160. D. 240.

Câu 6. Trong khai triển $\left(a^2 + \frac{1}{b}\right)^7$, số hạng thứ 5 là:

- A. $35 \cdot a^6 \cdot b^{-4}$. B. $-35 \cdot a^6 \cdot b^{-4}$. C. $35 \cdot a^4 \cdot b^{-5}$. D. $-35 \cdot a^4 \cdot b$.

Câu 7. Trong khai triển $(2a - 1)^6$, tổng ba số hạng đầu là:

- A. $2a^6 - 6a^5 + 15a^4$. B. $2a^6 - 15a^5 + 30a^4$.
C. $64a^6 - 192a^5 + 480a^4$. D. $64a^6 - 192a^5 + 240a^4$.

Câu 8. Trong khai triển $(x - \sqrt{y})^{16}$, tổng hai số hạng cuối là:

- A. $-16x\sqrt{y^{15}} + y^8$. B. $-16x\sqrt{y^{15}} + y^4$. C. $16xy^{15} + y^4$. D. $16xy^{15} + y^8$.

Câu 9. Trong khai triển $\left(8a^2 - \frac{1}{2}b\right)^6$, hệ số của số hạng chứa a^9b^3 là:

- A. $-80a^9 \cdot b^3$. B. $-64a^9 \cdot b^3$. C. $-1280a^9 \cdot b^3$. D. $60a^6 \cdot b^4$.

Câu 10. Trong khai triển $\left(x + \frac{8}{x^2}\right)^9$, số hạng không chứa x là:

- A. 4308. B. 86016. C. 84. D. 43008.

Câu 11. Trong khai triển $(2x - 1)^{10}$, hệ số của số hạng chứa x^8 là:

- A. -11520. B. 45. C. 256. D. 11520.

Câu 12. Trong khai triển $(a - 2b)^8$, hệ số của số hạng chứa $a^4 \cdot b^4$ là:

- A. 1120. B. 560. C. 140. D. 70.

Câu 13. Trong khai triển $(3x - y)^7$, số hạng chứa $x^4 y^3$ là:

- A. $-2835x^4 y^3$. B. $2835x^4 y^3$. C. $945x^4 y^3$. D. $-945x^4 y^3$.

Câu 14. Trong khai triển $(0,2 + 0,8)^5$, số hạng thứ tư là:

- A. 0,0064. B. 0,4096. C. 0,0512. D. 0,2048.

Câu 15. Hệ số của $x^3 y^3$ trong khai triển $(1 + x)^6 (1 + y)^6$ là:

- A. 20. B. 800. C. 36. D. 400.

Câu 16. Số hạng chính giữa trong khai triển $(3x + 2y)^4$ là:

- A. $C_4^2 x^2 y^2$. B. $6(3x)^2 (2y)^2$. C. $6C_4^2 x^2 y^2$. D. $36C_4^2 x^2 y^2$.

Câu 17. Trong khai triển $(x - y)^{11}$, hệ số của số hạng chứa $x^8 \cdot y^3$ là

- A. C_{11}^3 . B. $-C_{11}^3$. C. $-C_{11}^5$. D. C_{11}^8 .

Câu 18. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển biểu thức sau: $f(x) = (1 - 2x)^{10}$

- A. -15360 . B. 15360 . C. -15363 . D. 15363 .

Câu 19. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển biểu thức sau: $h(x) = x(2 + 3x)^9$

- A. 489889. B. 489887. C. -489888 . D. 489888.

Câu 20. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển biểu thức sau: $g(x) = (1 + x)^7 + (1 - x)^8 + (2 + x)^9$

- A. 29. B. 30. C. 31. D. 32.

Câu 21. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển biểu thức sau: $f(x) = (3 + 2x)^{10}$

- A. 103680. B. 1301323. C. 131393. D. 1031831.

Câu 22. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển biểu thức sau: $h(x) = x(1 - 2x)^9$

- A. -4608 . B. 4608. C. -4618 . D. 4618.

Câu 23. Xác định hệ số của x^8 trong các khai triển sau: $f(x) = (3x^2 + 1)^{10}$

- A. 17010. B. 21303. C. 20123. D. 21313.

Câu 24. Xác định hệ số của x^8 trong các khai triển sau: $f(x) = \left(\frac{2}{x} - 5x^3\right)^8$

- A. 1312317. B. 76424. C. 427700. D. 700000.

Câu 25. Xác định hệ số của x^8 trong các khai triển sau: $f(x) = \left(\frac{3}{x} + \frac{x}{2}\right)^{12}$

- A. $\frac{297}{512}$. B. $\frac{29}{51}$. C. $\frac{27}{52}$. D. $\frac{97}{12}$.

Câu 26. Tổng $T = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n$ bằng:

- A. $T = 2^n$. B. $T = 2^{n+1}$. C. $T = 2^n + 1$. D. $T = 4^n$.

Câu 27. Tính giá trị của tổng $S = C_6^0 + C_6^1 + \dots + C_6^6$ bằng:

- A. 64. B. 48. C. 72. D. 100.

Câu 28. Tìm số nguyên dương n sao cho: $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 243$

- A. 4. B. 11. C. 12. D. 5.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. C	3. D	4. A	5. C	6. A	7. D	8. A	9. C	10. D
11. D	12. A	13. A	14. D	15. D	16. D	17. B	18. A	19. D	20. A
21. A	22. A	23. A	24. D	25. A	26. A	27. A	28. D		

BÀI

4

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

A

KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Phép thử, không gian mẫu

Một trong những khái niệm cơ bản của lý thuyết xác suất là **phép thử**. Một thí nghiệm, một phép đo hay một sự quan sát hiện tượng nào đó,... được gọi là **phép thử**.

Định nghĩa 4.1. **Phép thử ngẫu nhiên** là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

Định nghĩa 4.2. Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là **không gian mẫu** của phép thử và kí hiệu là Ω (đọc là ô-mê-ga).

2. Biến cố

Định nghĩa 4.3. Biến cố là một tập con của không gian mẫu.

Mỗi biến cố liên quan đến một phép thử được mô tả bởi một tập con của không gian mẫu, tức là một tập hợp bao gồm các kết quả nào đó của phép thử.

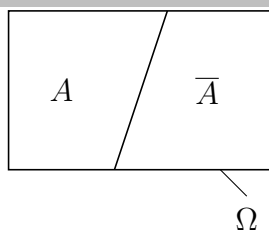
Định nghĩa 4.4. Tập $\emptyset$ được gọi là **biến cố không thể** (gọi tắt là **biến cố không**). Tập Ω được gọi là **biến cố chắc chắn**.

Biến cố A xảy ra trong một phép thử nào đó khi và chỉ khi kết quả của phép thử đó là một phần tử của A (hay thuận lợi cho A).

3. Phép toán trên các biến cố

Giả sử A và B là hai biến cố liên quan đến một phép thử.

Định nghĩa 4.5. Tập $\Omega \setminus A$ được gọi là **biến cố đối** của biến cố A , kí hiệu $\bar{A}$.



$\bar{A}$ xảy ra khi và chỉ khi A không xảy ra.

Định nghĩa 4.6. Tập $A \cup B$ được gọi là **hợp** của biến cố A và B .

Tập $A \cap B$ được gọi là **giao** của biến cố A và B .

Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì ta nói A và B **xung khắc**.

Chú ý

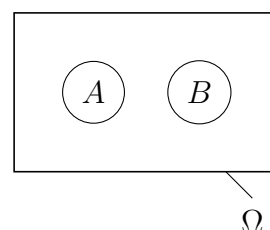
$A \cup B$ xảy ra khi và chỉ khi A xảy ra hoặc B xảy ra.

$A \cap B$ xảy ra khi và chỉ khi A và B đồng thời xảy ra.

Biến cố $A \cap B$ còn được viết là $A.B$.

A và B xung khắc khi và chỉ khi chúng không khi nào cùng xảy ra.

Kí hiệu	Ngôn ngữ biến cố
$A \subset \Omega$	A là biến cố
$A = \emptyset$	A là biến cố không
$A = \Omega$	A là biến cố chắc chắn
$C = A \cup B$	C là biến cố: " A hoặc B "
$C = A \cap B$	C là biến cố: " A và B "
$A \cap B = \emptyset$	A và B xung khắc
$B = \bar{A}$	A và B đối nhau



4. Định nghĩa cổ điển của xác suất

Định nghĩa 4.7. Xác suất của biến cố A được tính bởi công thức:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

Trong đó $n(A)$ là số kết quả thuận lợi của biến cố A ; $n(\Omega)$ là số kết quả có thể xảy ra của phép thử.

5. Tính chất của xác suất

Định lý 4.1

Giả sử A và B là các biến cố liên quan đến một phép thử có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Khi đó, ta có

1) $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1.$

2) $0 \leq P(A) \leq 1$, với mọi biến cố A .

3) Nếu A và B xung khắc, thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(công thức cộng xác suất).

Chú ý

Các biến cố A và B là xung khắc nếu và chỉ nếu chúng không khi nào cùng xảy ra.

⇨ **Hệ quả 4.1.** Với mọi biến cố A , ta có

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

B

BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1

Mô tả không gian mẫu và xác định số kết quả có thể của phép thử

Bài 1. Trong giỏ có 5 củ khoai, lấy ngẫu nhiên ra hai củ. Hãy mô tả không gian mẫu.

Bài 2. Gieo đồng xu ba lần liên tiếp. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

Bài 3. Trong một bình có 3 quả cầu đen khác nhau và 2 quả cầu trắng khác nhau. Lấy ngẫu nhiên ra hai quả, hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

Bài 4. Xếp 4 người ngồi thành hình vuông, mỗi người một đỉnh của hình vuông. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

Bài 5. Gieo con xúc xắc ba lần liên tiếp. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

Bài 6. Cắm 2 bông hoa khác nhau vào 3 lọ khác nhau sao cho mỗi lọ có nhiều nhất một bông hoa. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

Bài 7. Trong hộp có 8 bi đen và 5 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên ra 3 viên. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử đó.

DẠNG 2

Xác định biến cố của một phép thử

Bài 8. Gieo một con súc sắc hai lần, biến cố A : "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai lần gieo là số chẵn", và biến cố B là biến cố đối của biến cố A . Xác định biến cố B và liệt kê các kết quả thuận lợi cho B .

Bài 9. Gieo con súc sắc hai lần. Xác định biến cố A : "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai lần gieo nhỏ hơn hoặc bằng 4".

Bài 10. Gieo con súc sắc hai lần, biến cố: "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai lần gieo bằng 13" và biến cố "Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai lần gieo nhỏ hơn hoặc bằng 12" biến cố nào là biến cố không, biến cố nào là biến cố chắc chắn?

Bài 11. Gieo một đồng xu 5 lần liên tiếp. Xác định các biến cố:

A: "Trong cả 5 lần gieo đều được kết quả như nhau";

B: "Trong 5 lần gieo được đúng 2 lần mặt sấp";

C: "Trong 5 lần gieo có ít nhất 4 lần sấp".

Bài 12. Gieo một con súc sắc liên tiếp cho đến khi súc sắc xuất hiện mặt 1 chấm hoặc 6 chấm thì dừng lại. Xác định các biến cố:

A: "số lần gieo không vượt quá hai lần";

B: "Số lần gieo là ba".

Bài 13. Một người bắn cung, có hai trường hợp xảy ra, người đó bắn trúng hồng tâm hoặc người đó bắn không trúng hồng tâm. Người đó bắn liên tiếp 5 lần. Xác định biến cố:

A: "Trong 5 lần bắn, chỉ có hai lần bắn trúng hồng tâm";

B: "Trong 5 lần bắn, lần bắn trúng hồng tâm và bắn không trúng hồng tâm xen kẽ nhau".

DẠNG
3

Xác suất của biến cố

Bài 14. Tung 3 đồng xu đồng chất (giả thiết các đồng xu hoàn toàn giống nhau gồm 2 mặt: sấp và ngửa).

1) Mô tả không gian mẫu các kết quả đạt được?

2) Tính xác suất thu được 3 mặt giống nhau?

Bài 15. Gieo một con súc sắc 3 lần. Tính xác suất của biến cố sau:

1) A: "3 lần gieo cho kết quả như nhau".

2) B: "Tích 3 lần gieo là số lẻ".

3) C: "Tổng 3 lần gieo là 5".

4) D: "Lần gieo sau gieo được số lớn hơn lần gieo trước".

Bài 16. Trong một hộp kín có 18 quả bóng khác nhau: 9 trắng, 6 đen, 3 vàng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 5 quả bóng trong đó. Tính xác suất của:

1) A: "5 quả bóng cùng màu".

2) B: "5 quả bóng có đủ 3 màu"

3) C: "5 quả bóng không có màu trắng"

Bài 17. Trong lớp 12A5 có 45 học sinh có 20 học sinh nam, 25 học sinh nữ. Lấy ngẫu nhiên 5 học sinh, Xác định xác suất của biến cố:

1) 5 học sinh lấy ra là nam.

2) 5 học sinh lấy ra có đủ nam và nữ.

3) Có ít nhất 3 học sinh nữ.

Bài 18. Một lớp có 41 học sinh trong đó có 15 bạn nam và 26 bạn nữ. Cô giáo chủ nhiệm chọn ngẫu nhiên ra bốn bạn đi trực ban.

- 1) Tính xác suất để cả bốn bạn đó đều là nữ.
- 2) Tính xác suất để có ít nhất một bạn nam.

Bài 19. Có hai hòm đựng thẻ, mỗi hòm đựng 10 thẻ đánh số từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hòm một thẻ. Tính xác suất để trong hai thẻ lấy ra

- 1) có ít nhất một thẻ đánh số 1.
- 2) tổng hai số ghi trên hai thẻ khác 19.

Bài 20. Một lớp có 30 học sinh trong đó gồm 8 học sinh giỏi, 15 học sinh khá và 7 học sinh trung bình. Người ta muốn chọn ngẫu nhiên 3 em để đi dự Đại Hội. Tính xác suất để chọn được:

- a) Ba học sinh được chọn đều là học sinh giỏi?
- b) Có ít nhất 1 học sinh giỏi?

Bài 21. Một hộp bóng có 12 bóng đèn, trong đó có 7 bóng tốt, lấy ngẫu nhiên 3 bóng. Tính xác suất để được:

- a) Ít nhất 2 bóng tốt.
- b) Cả 3 bóng đều không tốt.

Bài 22. Một sọt Cam có 10 trái trong đó có 4 trái hư. Lấy ngẫu nhiên ra 4 trái

- a) Tính xác suất để lấy được 3 trái hư
- b) Tính xác suất để lấy được 1 trái hư
- c) Tính xác suất để lấy được ít nhất 1 trái hư.

Bài 23. Một hộp có 5 viên bi xanh, 6 viên bi đỏ và 7 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi trong hộp, tính xác suất để 5 viên bi được chọn có đủ màu và số bi đỏ bằng số bi vàng.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Xét phép thử gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất 6 mặt hai lần. Xét biến cố A: “Số chấm xuất hiện ở cả hai lần gieo giống nhau”. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $n(A) = 6$. B. $n(A) = 12$. C. $n(A) = 16$. D. $n(A) = 36$.

Câu 2. Gieo một đồng xu cân đối và đồng chất liên tiếp ba lần. Gọi A là biến cố “Có ít nhất hai mặt sấp xuất hiện liên tiếp” và B là biến cố “Kết quả ba lần gieo là như nhau”. Xác định biến cố $A \cup B$

- A. $A \cup B = \{SSS, SSN, NSS, SNS, NNN\}$. B. $A \cup B = \{SSS, NNN\}$.
 C. $A \cup B = \{SSS, SSN, NSS, NNN\}$. D. $A \cup B = \Omega$.

Câu 3. Gieo ngẫu nhiên một đồng tiền cân đối và đồng chất 5 lần. Tính số phần tử không gian mẫu.

- A. 64. B. 10. C. 32. D. 16.

Câu 4. Rút ngẫu nhiên cùng lúc ba con bài từ cỗ bài tứ lơ khơ 52 con thì $n(\Omega)$ bằng bao nhiêu?

- A. 140608. B. 156. C. 132600. D. 22100.

Câu 5. Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất bốn lần. Xác suất để cả bốn lần xuất hiện mặt sấp là?

- A. $\frac{4}{16}$. B. $\frac{2}{16}$. C. $\frac{1}{16}$. D. $\frac{6}{16}$.

Câu 6. Chọn ngẫu nhiên một số có 2 chữ số từ các số 00 đến 99. Xác suất để có một con số tận cùng là 0 là

- A. 0,2. B. 0,1. C. 0,3. D. 0,4.

Câu 7. Gieo ngẫu nhiên một con xúc sắc cân đối đồng chất 2 lần. Tính xác suất để số chấm của hai lần gieo là bằng nhau

- A. $\frac{1}{8}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{7}$. D. $\frac{1}{5}$.

Câu 8. Gieo đồng thời hai con súc sắc cân đối và đồng chất. Xác suất để tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con súc sắc đó không vượt quá 5 bằng

- A. $\frac{5}{12}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{2}{9}$. D. $\frac{5}{18}$.

Câu 9. Gọi S là tập các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau được tạo từ tập $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tính xác suất để số được chọn là một số chẵn.

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 10. Một hộp chứa 11 quả cầu gồm 5 quả màu xanh và 6 quả cầu màu đỏ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 quả cầu từ hộp đó. Xác suất để 2 quả cầu chọn ra cùng màu bằng

- A. $\frac{5}{22}$. B. $\frac{6}{11}$. C. $\frac{5}{11}$. D. $\frac{8}{11}$.

Câu 11. Từ một hộp chứa 11 quả cầu màu đỏ và 4 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh

- A. $\frac{33}{91}$. B. $\frac{24}{455}$. C. $\frac{4}{165}$. D. $\frac{4}{455}$.

Câu 12. Từ một hộp chứa 7 quả cầu màu đỏ và 5 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng

- A. $\frac{1}{22}$. B. $\frac{2}{7}$. C. $\frac{5}{12}$. D. $\frac{7}{44}$.

Câu 13. Từ một hộp chứa 9 quả cầu đỏ và 6 quả cầu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng?

- A. $\frac{24}{91}$. B. $\frac{4}{91}$. C. $\frac{12}{65}$. D. $\frac{5}{21}$.

Câu 14. Từ một hộp chứa 10 quả cầu màu đỏ và 5 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng

- A. $\frac{2}{91}$. B. $\frac{12}{91}$. C. $\frac{1}{12}$. D. $\frac{24}{91}$.

Câu 15. Một lớp có 40 học sinh, trong đó có 4 học sinh tên Anh. Trong một lần kiểm tra bài cũ, thầy giáo gọi ngẫu nhiên hai học sinh trong lớp lên bảng. Xác suất để hai học sinh tên Anh lên bảng bằng

- A. $\frac{1}{10}$. B. $\frac{1}{20}$. C. $\frac{1}{130}$. D. $\frac{1}{75}$.

Câu 16. Hộp A có 4 viên bi trắng, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Hộp B có 7 viên bi trắng, 6 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp một viên bi, tính xác suất để hai viên bi được lấy ra có cùng màu.

- A. $\frac{91}{135}$. B. $\frac{44}{135}$. C. $\frac{88}{135}$. D. $\frac{45}{88}$.

Câu 17. Một tổ có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 4 học sinh. Xác suất để trong 4 học sinh được chọn luôn có học sinh nữ là

- A. $\frac{1}{14}$. B. $\frac{1}{210}$. C. $\frac{13}{14}$. D. $\frac{209}{210}$.

Câu 18. Một hộp đèn có 12 bóng, trong đó có 4 bóng hỏng. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng. Tính xác suất để trong 3 bóng có 1 bóng hỏng.

- A. $\frac{11}{50}$. B. $\frac{13}{112}$. C. $\frac{28}{55}$. D. $\frac{5}{6}$.

Câu 19. Trong một tổ có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 bạn trong tổ tham gia đội tình nguyện của trường. Tính xác suất để 3 bạn được chọn toàn là nam.

- A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{1}{5}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 20. Trong một đợt kiểm tra định kỳ, giáo viên chuẩn bị một hộp đựng 15 câu hỏi gồm 5 câu hỏi Hình học và 10 câu hỏi Đại số khác nhau. Mỗi học sinh bốc ngẫu nhiên từ hộp đó 3 câu hỏi để làm đề thi cho mình. Tính xác suất để một học sinh bốc được đúng một câu hình học.

- A. $\frac{45}{91}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{200}{273}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 21. Một người chọn ngẫu nhiên 2 chiếc giày từ 5 đôi giày cỡ khác nhau. Tính xác suất để 2 chiếc giày được chọn tạo thành một đôi.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{10}$. C. $\frac{7}{9}$. D. $\frac{1}{9}$.

Câu 22. Giải bóng chuyền VTV Cup có 16 đội tham gia trong đó có 12 đội nước ngoài và 4 đội của Việt Nam. Ban tổ chức cho bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành 4 bảng đấu A, B, C, D mỗi bảng 4 đội. Tính xác suất để 4 đội của Việt Nam nằm ở 4 bảng đấu khác nhau.

- A. $\frac{391}{455}$. B. $\frac{8}{1365}$. C. $\frac{32}{1365}$. D. $\frac{64}{455}$.

Câu 23. Trong một hộp có 12 bóng đèn, trong đó có 4 bóng đèn hỏng. Lấy ngẫu nhiên cùng lúc 3 bóng đèn. Tính xác suất để lấy được 3 bóng tốt.

- A. $\frac{28}{55}$. B. $\frac{14}{55}$. C. $\frac{1}{55}$. D. $\frac{28}{55}$.

Câu 24. Có 4 hành khách bước lên một đoàn tàu gồm 4 toa. Mỗi hành khách độc lập với nhau và chọn ngẫu nhiên một toa. Tính xác suất để 1 toa có 3 người, một toa có 1 người, 2 toa còn lại không có ai.

- A. $\frac{5}{16}$. B. $\frac{7}{16}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $\frac{3}{16}$.

Câu 25. Cho đa giác đều 20 đỉnh nội tiếp trong đường tròn tâm O . Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh của đa giác. Xác suất để 4 đỉnh được chọn là 4 đỉnh của một hình chữ nhật bằng

- A. $\frac{7}{216}$. B. $\frac{2}{969}$. C. $\frac{3}{323}$. D. $\frac{4}{9}$.

Câu 26. Một hộp chứa 35 quả cầu gồm 20 quả cầu đỏ được đánh số từ 1 đến 20 và 15 quả cầu xanh được đánh số từ 1 đến 15. Lấy ngẫu nhiên từ hộp đó một quả cầu. Tính xác suất để lấy được quả màu đỏ hoặc ghi số lẻ.

- A. $\frac{5}{7}$. B. $\frac{28}{35}$. C. $\frac{4}{7}$. D. $\frac{27}{35}$.

Câu 27. Có hai hộp, mỗi hộp chứa 5 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 5. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hộp một tấm thẻ. Tính xác suất để 2 thẻ rút ra đều ghi số chẵn.

- A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{21}{25}$. C. $\frac{4}{9}$. D. $\frac{4}{25}$.

Câu 28. Một hộp đựng 9 thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên hai thẻ và nhân hai số trên hai thẻ lại với nhau. Tính xác suất để kết quả thu được là một số chẵn.

- A. $\frac{5}{18}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{8}{9}$. D. $\frac{13}{18}$.

Câu 29. Bình có bốn đôi giày khác nhau gồm bốn màu: đen, trắng, xanh và đỏ. Một buổi sáng đi học, vì vội vàng, Bình đã lấy ngẫu nhiên hai chiếc giày từ bốn đôi giày đó. Tính xác suất để Bình lấy được hai chiếc giày cùng màu?

- A. $\frac{1}{7}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{14}$. D. $\frac{2}{7}$.

Câu 30. Bạn A có 7 cái kẹo vị hoa quả và 6 cái kẹo vị socola. A lấy ngẫu nhiên 5 cái kẹo cho vào hộp để tặng cho em gái. Tính xác suất để 5 cái kẹo có cả vị hoa quả và vị socola.

- A. $P = \frac{140}{143}$. B. $P = \frac{79}{156}$. C. $P = \frac{103}{117}$. D. $P = \frac{14}{117}$.

Câu 31. Một hộp đèn có 12 bóng, trong đó có 4 bóng hỏng. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng. Tính xác suất để trong 3 bóng có ít nhất 1 bóng hỏng.

- A. $\frac{40}{51}$. B. $\frac{55}{112}$. C. $\frac{41}{55}$. D. $\frac{3}{7}$.

Câu 32. Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để 3 quyển được lấy ra có ít nhất một quyển là toán.

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{37}{42}$. C. $\frac{10}{21}$. D. $\frac{2}{7}$.

Câu 33. Trên giá sách có 4 quyển sách Toán, 3 quyển sách Vật Lí và 2 quyển sách Hóa học. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất sao cho ba quyển lấy ra có ít nhất một quyển sách Toán.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{37}{42}$. C. $\frac{5}{6}$. D. $\frac{19}{21}$.

Câu 34. Có 5 học sinh không quen biết nhau cùng đến một cửa hàng kem có 6 quầy phục vụ. Xác suất để có 3 học sinh cùng vào một quầy và 2 học sinh còn lại vào một quầy khác là

- A. $\frac{C_5^3 \cdot C_6^1 \cdot 5!}{6^5}$. B. $\frac{C_5^3 \cdot C_6^1 \cdot C_5^1}{6^5}$. C. $\frac{C_5^3 \cdot C_6^1 \cdot 5!}{5^6}$. D. $\frac{C_5^3 \cdot C_6^1 \cdot C_5^1}{5^6}$.

Câu 35. Trong một đợt kiểm tra định kì, giáo viên chuẩn bị một chiếc hộp đựng 15 câu hỏi gồm 5 câu hỏi Hình học và 10 câu hỏi Đại số khác nhau. Mỗi học sinh bốc ngẫu nhiên từ hộp đó 3 câu hỏi để làm đề thi cho mình. Tính xác suất để một học sinh bốc được đúng 1 câu hỏi Hình học.

- A. $\frac{3}{4}$. B. $\frac{45}{91}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{200}{273}$.

Câu 36. Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 25 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{13}{25}$. C. $\frac{12}{25}$. D. $\frac{313}{625}$.

Câu 37. Một người làm vườn có 12 cây giống gồm 6 cây xoài, 4 cây mít và 2 cây ổi. Người đó muốn chọn ra 6 cây giống để trồng. Tính xác suất để 6 cây được chọn, mỗi loại có đúng 2 cây.

- A. $\frac{1}{8}$. B. $\frac{1}{10}$. C. $\frac{15}{154}$. D. $\frac{25}{154}$.

Câu 38. Một đề trắc nghiệm gồm 20 câu, mỗi câu có 4 đáp án và chỉ có một đáp án đúng. Bạn Anh làm đúng 12 câu, còn 8 câu bạn Anh đánh hù họa vào đáp án mà Anh cho là đúng. Mỗi câu đúng được 0,5 điểm. Tính xác suất để Anh được 9 điểm.

- A. $\frac{9}{20}$. B. $\frac{9}{10}$. C. $\frac{63}{16384}$. D. $\frac{9}{65536}$.

Câu 39. Một hộp đựng 7 quả cầu màu trắng và 3 quả cầu màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 4 quả cầu. Tính xác suất để trong 4 quả cầu lấy được có đúng 2 quả cầu đỏ.

- A. $\frac{21}{71}$. B. $\frac{20}{71}$. C. $\frac{62}{211}$. D. $\frac{21}{70}$.

Câu 40. Một hộp đựng 9 viên bi trong đó có 4 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên từ hộp 3 viên bi. Tìm xác suất để 3 viên bi lấy ra có ít nhất 2 viên bi màu xanh.

- A. $\frac{10}{21}$. B. $\frac{5}{14}$. C. $\frac{25}{42}$. D. $\frac{5}{42}$.

Câu 41. Lớp 11B có 25 đoàn viên, trong đó có 10 nam và 15 nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 đoàn viên trong lớp để tham dự hội trại ngày 26 tháng 3. Tính xác suất để 3 đoàn viên được chọn có 2 nam và 1 nữ.

- A. $\frac{7}{920}$. B. $\frac{27}{92}$. C. $\frac{3}{115}$. D. $\frac{9}{92}$.

Câu 42. Có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có ba ghế. Xếp ngẫu nhiên 6 học sinh, gồm 3 nam và 3 nữ, ngồi vào hai dãy ghế đó sao cho mỗi ghế có đúng một học sinh ngồi. Xác suất để mỗi học sinh nam đều ngồi đối diện với một học sinh nữ bằng.

- A. $\frac{1}{10}$. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{1}{20}$. D. $\frac{3}{5}$.

Câu 43. Một tổ học sinh có 6 nam và 4 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho hai người được chọn đều là nữ.

- A. $\frac{2}{15}$. B. $\frac{7}{15}$. C. $\frac{8}{15}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 44. Một lô hàng có 20 sản phẩm, trong đó 4 phế phẩm. Lấy tùy ý 6 sản phẩm từ lô hàng đó. Hãy tính xác suất để trong 6 sản phẩm lấy ra có không quá 1 phế phẩm.

- A. $\frac{91}{323}$. B. $\frac{637}{969}$. C. $\frac{7}{9}$. D. $\frac{91}{285}$.

Câu 45. Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 5 quyển sách lý, 6 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để 3 quyển sách được lấy ra có ít nhất một quyển sách toán.

- A. $\frac{24}{91}$. B. $\frac{58}{91}$. C. $\frac{24}{455}$. D. $\frac{33}{91}$.

Câu 46. Có 8 cái bút khác nhau và 9 quyển vở khác nhau được gói trong 17 hộp. Một học sinh được cho bất kỳ hai hộp. Xác suất để học sinh đó chọn được một cặp bút và vở là

- A. $\frac{1}{17}$. B. $\frac{9}{17}$. C. $\frac{1}{8}$. D. $\frac{9}{34}$.

Câu 47. Lớp 12A2 có 10 học sinh giỏi, trong đó có 6 nam và 4 nữ. Cần chọn ra 3 học sinh đi dự hội nghị “Đổi mới phương pháp dạy và học” của nhà trường. Tính xác suất để có đúng hai học sinh nam và một học sinh nữ được chọn. Giả sử tất cả các học sinh đó đều xứng đáng được đi dự đại hội như nhau.

- A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 48. Một đội gồm 5 nam và 8 nữ. Lập một nhóm gồm 4 người hát tốp ca. Tính xác suất để trong bốn người được chọn có ít nhất ba nữ.

- A. $\frac{70}{143}$. B. $\frac{73}{143}$. C. $\frac{56}{143}$. D. $\frac{87}{143}$.

Câu 49. Một bình đựng 8 viên bi xanh và 4 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Xác suất để có được ít nhất hai viên bi xanh là bao nhiêu?

- A. $\frac{41}{55}$. B. $\frac{14}{55}$. C. $\frac{28}{55}$. D. $\frac{42}{55}$.

Câu 50. Một túi đựng 6 bi xanh và 4 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 bi. Xác suất để cả hai bi đều đỏ là.

- A. $\frac{7}{15}$. B. $\frac{7}{45}$. C. $\frac{8}{15}$. D. $\frac{2}{15}$.

Câu 51. Có 100 tấm thẻ được đánh số từ 801 đến 900 (mỗi tấm thẻ được đánh một số khác nhau). Lấy ngẫu nhiên 3 tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất để lấy được 3 tấm thẻ có tổng các số ghi trên thẻ là số chia hết cho 3.

- A. $\frac{817}{2450}$. B. $\frac{248}{3675}$. C. $\frac{2203}{7350}$. D. $\frac{2179}{7350}$.

Câu 52. Có 3 bó hoa. Bó thứ nhất có 8 hoa hồng, bó thứ hai có 7 bông hoa ly, bó thứ ba có 6 bông hoa huệ. Chọn ngẫu nhiên 7 hoa từ ba bó hoa trên để cắm vào lọ hoa, tính xác suất để trong 7 hoa được chọn có số hoa hồng bằng số hoa ly.

- A. $\frac{3851}{4845}$. B. $\frac{1}{71}$. C. $\frac{36}{71}$. D. $\frac{994}{4845}$.

Câu 53. Có 13 học sinh của một trường THPT đạt danh hiệu học sinh xuất sắc trong đó khối 12 có 8 học sinh nam và 3 học sinh nữ, khối 11 có 2 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh bất kỳ để trao thưởng, tính xác suất để 3 học sinh được chọn có cả nam và nữ đồng thời có cả khối 11 và khối 12.

- A. $\frac{57}{286}$. B. $\frac{24}{143}$. C. $\frac{27}{143}$. D. $\frac{229}{286}$.

Câu 54. Một đoàn tình nguyện, đến một trường tiểu học miền núi để trao tặng 20 suất quà cho 10 em học sinh nghèo học giỏi. Trong 20 suất quà đó gồm 7 chiếc áo mùa đông, 9 thùng sữa tươi và 4 chiếc cặp sách. Tất cả các suất quà đều có giá trị tương đương nhau. Biết rằng mỗi em được nhận 2 suất quà khác loại (ví dụ: 1 chiếc áo và 1 thùng sữa tươi). Trong số các em được nhận quà có hai em Việt và Nam. Tính xác suất để hai em Việt và Nam đó nhận được suất quà giống nhau?

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{1}{15}$. D. $\frac{3}{5}$.

Câu 55. Một tổ chuyên môn tiếng Anh của trường đại học X gồm 7 thầy giáo và 5 cô giáo, trong đó thầy Xuân và cô Hạ là vợ chồng. Tổ chọn ngẫu nhiên 5 người để lập hội đồng chấm thi vấn đáp tiếng Anh B1 khung châu Âu. Xác suất sao cho hội đồng có 3 thầy, 2 cô và nhất thiết phải có thầy Xuân hoặc cô Hạ nhưng không có cả hai là

- A. $\frac{5}{44}$. B. $\frac{5}{88}$. C. $\frac{85}{792}$. D. $\frac{85}{396}$.

Câu 56. Đội tuyển học sinh giỏi Toán 12 trường THPT Yên Dũng số 3 gồm 8 học sinh, trong đó có 5 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh đi thi học sinh giỏi cấp Huyện. Tính xác suất để 5 học sinh được chọn đi thi có cả nam và nữ và học sinh nam nhiều hơn học sinh nữ

- A. $p = \frac{11}{56}$. B. $p = \frac{45}{56}$. C. $p = \frac{46}{56}$. D. $p = \frac{55}{56}$.

Câu 57. Một đoàn tình nguyện đến một trường tiểu học miền núi để trao tặng 20 suất quà cho 10 em học sinh nghèo học giỏi. Trong 20 suất quà đó gồm 7 chiếc áo mùa đông, 9 thùng sữa tươi và 4 chiếc cặp sách. Tất cả các suất quà đều có giá trị tương đương nhau. Biết rằng mỗi em nhận hai suất quà khác loại (ví dụ một chiếc áo và một thùng sữa tươi). Trong số các em được nhận quà có hai em Việt và Nam. Tính xác suất để hai em Việt và Nam đó nhận được suất quà giống nhau?

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{1}{15}$. D. $\frac{3}{5}$.

Câu 58. Trong kỳ thi THPT Quốc Gia năm 2021 có môn thi bắt buộc là môn Tiếng Anh. Môn thi này thi dưới hình thức trắc nghiệm với 4 phương án trả lời A, B, C, D. Mỗi câu trả lời đúng được cộng 0,2 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 0,1 điểm. Bạn Hoa vì học rất kém môn Tiếng Anh nên chọn ngẫu nhiên cả 50 câu trả lời. Tính xác suất để bạn Hoa đạt được 4 điểm môn Tiếng Anh trong kỳ thi trên.

A. $\frac{C_{50}^{30} \cdot (3)^{20}}{4^{50}}$. B. $\frac{A_{50}^{30} \cdot (3)^{20}}{4^{50}}$. C. $\frac{C_{50}^{30} \cdot (3)^{20}}{50}$. D. $\frac{A_{50}^{30} \cdot (3)^{20}}{50}$.

Câu 59. Có 6 học sinh lớp 11 và 3 học sinh lớp 12 được xếp ngẫu nhiên vào 9 ghế thành một dãy. Tính xác suất để xếp được 3 học sinh lớp 12 xen kẽ giữa 6 học sinh lớp 11.

A. $\frac{5}{12}$. B. $\frac{7}{12}$. C. $\frac{1}{1728}$. D. $\frac{5}{72}$.

Câu 60. Đội tuyển học sinh giỏi của một trường THPT có 8 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Trong buổi lễ trao phần thưởng, các học sinh trên được xếp thành một hàng ngang. Tính xác suất để khi xếp sao cho 2 học sinh nữ không đứng cạnh nhau.

A. $\frac{653}{660}$. B. $\frac{7}{660}$. C. $\frac{41}{55}$. D. $\frac{14}{55}$.

Câu 61. Trong kỳ thi THPT Quốc Gia, mỗi lớp thi gồm 24 thí sinh được sắp xếp vào 24 bàn khác nhau. Bạn Nam là một thí sinh dự thi, bạn đăng ký 4 môn thi và cả 4 lần thi đều thi tại một phòng duy nhất. Giả sử giám thị xếp thí sinh vào vị trí một cách ngẫu nhiên, tính xác suất để trong 4 lần thi thì bạn Nam có đúng 2 lần ngồi cùng vào một vị trí.

A. $\frac{253}{1152}$. B. $\frac{899}{1152}$. C. $\frac{4}{7}$. D. $\frac{26}{35}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. C	4. D	5. C	6. B	7. B	8. D	9. B	10. C
11. D	12. A	13. B	14. A	15. C	16. B	17. C	18. C	19. A	20. A
21. D	22. D	23. B	24. D	25. C	26. B	27. D	28. D	29. A	30. A
31. C	32. B	33. B	34. B	35. B	36. C	37. C	38. C	39. D	40. C
41. B	42. B	43. A	44. B	45. B	46. B	47. D	48. A	49. D	50. D
51. A	52. D	53. A	54. B	55. D	56. B	57. B	58. A	59. A	60. D
61. A									

DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG -
CẤP SỐ NHÂN

BÀI

1

NHỊ THỨC NIU-TƠN

A

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến số tự nhiên $n \in \mathbb{N}^*$ là đúng với mọi n mà không thể thử trực tiếp thì có thể làm như sau:

- Bước 1. Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = 1$.
- Bước 2. Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k \geq 1$ (gọi là giả thiết quy nạp), chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Đó là **phương pháp quy nạp toán học**, hay còn gọi tắt là **phương pháp quy nạp**.

Chú ý: Nếu phải chứng minh mệnh đề là đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên) thì:

- Bước 1, ta phải kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$;
- Bước 2, giả thiết mệnh đề đúng với số tự nhiên bất kì $n = k \geq p$ và phải chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

B

BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG

1

Chứng minh đẳng thức.

Bài 1. Chứng minh với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có đẳng thức

$$2 + 5 + 8 + \cdots + 3n - 1 = \frac{n(3n + 1)}{2}.$$

Bài 2. Chứng minh với mọi $n \geq 2$ nguyên dương thì:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

Bài 3. Chứng minh với mọi n nguyên dương thì:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

Bài 4. Chứng minh với mọi số nguyên dương $n \geq 2$ ta có

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Bài 5. Chứng minh với mọi n nguyên dương thì

- a) $1.2 + 2.3 + \cdots + n(n+1) = \frac{(n+2)(n+1)n}{3}.$
- b) $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \cdots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4.3^n}.$
- c) $1.2 + 2.5 + 3.8 + \cdots + n(3n-1) = 2n(1+2+\cdots+n).$
- d) $C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_{n+1}^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$

DẠNG
2

Một số bài toán số học

Áp dụng phương pháp quy nạp toán học để giải các bài toán về chứng minh tính chia hết của các biểu thức dạng đa thức hoặc lũy thừa.

Bài 6. Chứng minh các mệnh đề sau:

- a) $u_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3, $\forall n \in \mathbb{N}^*.$
- b) $v_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7, $\forall n \in \mathbb{N}^*.$

Bài 7. Chứng minh các mệnh đề sau:

- ☑ $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9, với mọi số tự nhiên $n.$
- b) $4^{2n} - 3^{2n} - 7$ chia hết cho 84, với mọi $n \in \mathbb{N}^*.$

Bài 8. Chứng minh các mệnh đề sau đây đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*.$

- ☑ $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.
- b) $7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho 5.
- c) $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Bài 9. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n > 1$ ta có

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} \quad (1).$$

Bài 10. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta đều có

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \quad (1).$$

Bài 11. Xét các số a, b không âm. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta đều có $\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \quad (1).$

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Dùng quy nạp chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên). Ở bước 1 của chứng minh quy nạp bắt đầu với

- A.** $n = 1$. **B.** $n = p$. **C.** $n > p$. **D.** $n \geq p$.

Câu 2. Dùng quy nạp chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên). Ở bước 2 ta giả thiết mệnh đề $A(n)$ đúng với $n = k$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $k < p$. **B.** $k = p$. **C.** $k > p$. **D.** $k \geq p$.

Câu 3. Khi sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh mệnh đề chứa biến $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là một số tự nhiên), ta tiến hành hai bước:

- **Bước 1:** Kiểm tra mệnh đề $A(n)$ đúng với $n = p$.
- **Bước 2:** Giả thiết mệnh đề $A(n)$ đúng với số tự nhiên bất kỳ $n = k \geq p$ và chứng minh mệnh đề cũng đúng với $n = k + 1$.

Trong hai bước trên thì

- A.** chỉ có bước 1 đúng. **B.** chỉ có bước 2 đúng.
C. cả hai bước đều đúng. **D.** cả hai bước đều sai.

Câu 4. Học sinh chứng minh mệnh đề “ $8^n + 1$ chia hết cho 7, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ” (*) như sau:

- Giả sử (*) đúng với $n = k$, tức là $8^k + 1$ chia hết cho 7
- Ta có: $8^{k+1} + 1 = 8(8^k + 1) - 7$, kết hợp với giả thiết $8^k + 1$ chia hết cho 7 nên suy ra được $8^{k+1} + 1$ chia hết cho 7.

Vậy đẳng thức (*) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** Học sinh trên chứng minh đúng.
B. Học sinh chứng minh sai vì không có giả thiết qui nạp.

C. Học sinh chứng minh sai vì không dùng giả thiết qui nạp.

D. Học sinh không kiểm tra bước 1 (bước cơ sở) của phương pháp qui nạp.

Câu 5. Cho $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S_n = \frac{n-1}{n}$.

B. $S_n = \frac{n}{n+1}$.

C. $S_n = \frac{n+1}{n+2}$.

D. $S_n = \frac{n+2}{n+3}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B 2. D 3. C 4. D 5. B

BÀI

2

DÃY SỐ

A

KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa dãy số

Định nghĩa 2.1. Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một **dãy số vô hạn** (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu:

$$\begin{aligned}
 u : \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 n &\longmapsto u(n)
 \end{aligned}$$

Người ta thường viết dãy số dưới dạng khai triển $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$, trong đó $u_n = u(n)$ hoặc viết tắt là (u_n) , và gọi u_1 là số hạng đầu, u_n là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số.

2. Số hạng của dãy số

- ✓ Các số trong một dãy gọi là số hạng.
- ✓ Số hạng đầu tiên ký hiệu là u_1 , số hạng thứ 2 là u_2 , thứ 3 là $u_3, \dots$ (các ký hiệu có thể thay đổi).
- ✓ Một dãy số có dạng tổng quát là $u_1, u_2, u_3, u_4, \dots$

3. Số hạng tổng quát

- ✓ Số hạng thứ n (bất kỳ) của một dãy là u_n còn gọi là **số hạng tổng quát**.
- ✓ Số hạng tổng quát cho ta **một công thức** để tính được bất kỳ số hạng nào trong dãy bằng cách thay n bằng thứ tự của số hạng cần tính.

4. Cách xác định một dãy số

Có ba cách cho (cách xác định) một dãy số:

- ✓ **Cách 1:** Liệt kê vài số hạng đầu: $u_1, u_2, u_3, u_4, \dots$
- ✓ **Cách 2:** Cho quy tắc tính u_n , dãy được ký hiệu là (u_n) .
- ✓ **Cách 3:** Cho kiểu “truy hồi”: Cho vài số hạng đầu và **một hệ thức giữa u_n và các số hạng đứng trước nó hay sau nó.**

5. Tính tăng giảm của dãy số

Định nghĩa 2.2. Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số tăng** nếu với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có $u_n < u_{n+1}$.
 Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số giảm** nếu với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có $u_n > u_{n+1}$.

6. Dãy số bị chặn

Định nghĩa 2.3.

- ✓ Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn trên** nếu tồn tại một số M sao cho

$$u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- ✓ Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn dưới** nếu tồn tại một số m sao cho

$$u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- ✓ Dãy số (u_n) được gọi là **bị chặn** nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số M, m sao cho

$$m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

B

BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1

Dự đoán công thức và chứng minh quy nạp công thức tổng quát của dãy số

Phương pháp:

- ✓ Tìm vài số hạng đầu (u_1, u_2, u_3, u_4) .
- ✓ Từ các giá trị u_1, u_2, u_3, u_4 dự đoán công thức tính u_n .
- ✓ Chứng minh u_n đúng $\forall n \geq 1$ bằng phương pháp quy nạp.

Bài 1. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \frac{n^2 + 3n + 7}{n + 1}$.

- Viết năm số hạng đầu của dãy.
- Dãy số có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên.

Bài 2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3 \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$.

- Viết năm số hạng đầu của dãy.
- Chứng minh rằng $u_n = 2^{n+1} - 3$;

Bài 3. Cho dãy số (u_n) biết:

$$u_1 = 10, u_{n+1} = 2u_n$$

- Tính u_2, u_3, u_4, u_5 .
- Dùng quy nạp để chứng minh $u_n = 10 \cdot 2^{n-1}, \forall n \geq 1$.

Bài 4. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n + 1}{n + 2}$.

- Viết năm số hạng đầu của dãy số.
- Tìm số hạng thứ 100 và 200.
- Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy?
- Dãy số có bao nhiêu số hạng là số nguyên?

Bài 5. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát: $u_n = 2n + \sqrt{n^2 + 4}$.

- Viết 6 số hạng đầu của dãy số.
- Tính u_{20}, u_{2010} .
- Dãy số đã cho có bao nhiêu số hạng là số nguyên.

Bài 6. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 2u_{n-1} + 3, n \geq 2 \end{cases}$.

- Tìm 6 số hạng đầu của dãy.
- Chứng minh rằng $u_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 3 \quad \forall n \geq 2$.
- Số hạng có 3 chữ số lớn nhất của dãy là bao nhiêu?

Bài 7. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}, \forall n \geq 1 \end{cases}$

- Tìm 4 số hạng đầu của dãy.

2) Chứng minh rằng $u_n > 1$ với $\forall n \geq 1$.

3) Tìm công thức tổng quát của dãy (u_n) .

Bài 8. Người ta nuôi cấy 5 con vi khuẩn ecoli trong môi trường nhân tạo. Cứ 30 phút thì vi khuẩn ecoli sẽ nhân đôi 1 lần.

1) Tính số lượng vi khuẩn thu được sau 1, 2, 3 lần nhân đôi.

2) Dự đoán công thức tính số lượng vi khuẩn sau n giờ và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp.

DẠNG 2

Xét sự tăng giảm của dãy số

1) Phương pháp 1: Xét dấu của hiệu số $u_{n+1} - u_n$.

✓ Nếu $u_{n+1} - u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.

✓ Nếu $u_{n+1} - u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.

2) Phương pháp 2: Nếu $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

✓ Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.

✓ Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Nếu $u_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

✓ Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số tăng.

✓ Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

3) Phương pháp 3: Nếu dãy số (u_n) cho bởi hệ thức truy hồi thì thường dùng phương pháp quy nạp để chứng minh $u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (hoặc $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$).

Bài 9. Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) với:

a) $u_n = n^3 - 2n + 1$.

b) $u_n = \frac{1}{n} - 2$.

c) $u_n = \frac{\sqrt{2}}{3^n}$.

d) $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

e) $u_n = \frac{4^n - 1}{4^n + 5}$.

f) $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+3}$.

g) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

h) $u_n = n + \cos^2 n$.

Bài 10. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với

1) $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{5 + u_n}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

$$2) \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 1}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n^2 + 1}, n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Bài 11. Câu 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2. \end{cases}$

- a) Tìm công thức của số hạng tổng quát. b) Chứng minh dãy số tăng.

Bài 12. Câu 1. Cho dãy số (u_n) định bởi: $u_n = \frac{a \cdot n^4 + 2}{2n^4 + 5}; n \in \mathbb{N}^*$. Định a để dãy số (u_n) tăng.

DẠNG
3

Xét tính bị chặn của dãy số

- ✓ Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn trên bởi M , ta chứng minh $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- ✓ Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi m , ta chứng minh $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- ✓ Để chứng minh dãy số bị chặn ta chứng minh nó bị chặn trên và bị chặn dưới.
- ✓ Nếu dãy số (u_n) tăng thì bị chặn dưới bởi u_1 .
- ✓ Nếu dãy số (u_n) giảm thì bị chặn trên bởi u_1 .

Bài 13. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn trên, bị chặn dưới và bị chặn?

- 1) $u_n = n^2 + 5$.
- 2) $u_n = \frac{3n + 1}{2n + 5}$.
- 3) $u_n = (-1)^n \cos \frac{\pi}{2n}$.
- 4) $u_n = \frac{n^2 + 2n}{n^2 + n + 1}$.
- 5) $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n}$.

Bài 14. Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \frac{8n + 3}{3n + 5}$ là một dãy số bị chặn.

Bài 15. Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n}{n^2 + 9}$ bị chặn trên bởi $\frac{1}{2}$.

Bài 16. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 0$ và $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4, \forall n \geq 1$.

- 1) Chứng minh dãy (u_n) bị chặn trên bởi số 8.
- 2) Chứng minh dãy (u_n) tăng, từ đó suy ra dãy (u_n) bị chặn.

C

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{-n}{n+1}$. Năm số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{5}; -\frac{5}{6}$.

B. $-\frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; -\frac{4}{5}; -\frac{5}{6}; -\frac{6}{7}$.

C. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}$.

D. $\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}$.

Câu 2. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 3}$. Tìm số hạng u_5

A. $u_5 = \frac{1}{4}$.

B. $u_5 = \frac{17}{12}$.

C. $u_5 = \frac{7}{4}$.

D. $u_5 = \frac{71}{39}$.

Câu 3. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = (-1)^n \cdot \frac{2^n}{n}$. Tìm số hạng u_3

A. $u_3 = \frac{8}{3}$.

B. $u_3 = 2$.

C. $u_3 = -2$.

D. $u_3 = -\frac{8}{3}$.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $-1; 2; 5$.

B. $1; 4; 7$.

C. $4; 7; 10$.

D. $-1; 3; 7$.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 2 \end{cases}$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $u_2 = \frac{5}{2}$.

B. $u_3 = \frac{15}{4}$.

C. $u_4 = \frac{31}{8}$.

D. $u_5 = \frac{63}{16}$.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) , biết $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị $u_1 + u_2 + u_3$ bằng

A. 18.

B. 13.

C. $u_n = \frac{n-1}{n}$.

D. 16.

Câu 7. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$. Số $\frac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 8.

B. 6.

C. 5.

D. 7.

Câu 8. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = -n^2 + n + 1$. Số -19 là số hạng thứ mấy của dãy?

A. 5.

B. 7.

C. 6.

D. 4.

Câu 9. Cho dãy số vô hạn (u_n) xác định bởi $u_n = \frac{2n^2 + 1}{n+1}$. Có bao nhiêu số hạng của dãy số có giá trị bằng $\frac{51}{6}$?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 5.

Câu 10. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n^2 + 3n + 7}{n+1}$. Dãy số có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên.

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. Không có.

Câu 11. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 2^n$. Tìm số hạng u_{n+1}

A. $u_{n+1} = 2^n \cdot 2$.

B. $u_{n+1} = 2^n + 1$.

C. $u_{n+1} = 2(n+1)$.

D. $u_{n+1} = 2^n + 2$.

Câu 12. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 3^n$. Tìm số hạng u_{2n-1}

A. $u_{2n-1} = 3^2 \cdot 3^n - 1$.

B. $u_{2n-1} = 3^n \cdot 3^{n-1}$.

C. $u_{2n-1} = 3^{2n} - 1$.

D. $u_{2n-1} = 3^{2(n-1)}$.

Câu 13. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = 5^{n+1}$. Tìm số hạng u_{n-1}

A. $u_{n-1} = 5^{n-1}$.

B. $u_{n-1} = 5^n$.

C. $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n+1}$.

D. $u_{n-1} = 5 \cdot 5^{n-1}$.

Câu 14. Cho dãy số (u_n) , biết $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n+3}$. Tìm số hạng u_{n+1}

A. $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n+1)+3}$.

B. $u_{n+1} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2(n-1)+3}$.

C. $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+3}$.

D. $u_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right)^{2n+5}$.

Câu 15. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an^2}{n+1}$ (a là hằng số). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_{n+1} = \frac{a \cdot n^2 + 1}{n+1}$.

B. $u_{n+1} = \frac{a \cdot (n+1)^2}{n+1}$.

C. $u_{n+1} = \frac{a \cdot (n+1)^2}{n+2}$.

D. $u_{n+1} = \frac{an^2}{n+2}$.

Câu 16. Cho dãy số có các số hạng đầu là: 5; 10; 15; 20; 25; ... Số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = 5(n-1)$.

B. $u_n = 5n$.

C. $u_n = 5 + n$.

D. $u_n = 5 \cdot n + 1$.

Câu 17. Cho dãy số có các số hạng đầu là: 8, 15, 22, 29, 36, ... Số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = 7n + 7$.

B. $u_n = 7 \cdot n$.

C. $u_n = 7 \cdot n + 1$.

D. u_n : Không viết được dưới dạng công thức.

Câu 18. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = \frac{n+1}{n}$.

B. $u_n = \frac{n}{n+1}$.

C. $u_n = \frac{n-1}{n}$.

D. $u_n = \frac{n^2 - n}{n+1}$.

Câu 19. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-1; 1; -1; 1; -1; \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này có dạng

A. $u_n = 1$.

B. $u_n = -1$.

C. $u_n = (-1)^n$.

D. $u_n = (-1)^{n+1}$.

Câu 20. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2; 0; 2; 4; 6; \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này có dạng?

A. $u_n = -2n$.

B. $u_n = (-2) + n$.

C. $u_n = (-2)(n+1)$.

D. $u_n = (-2) + 2(n-1)$.

Câu 21. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $\frac{1}{3}; \frac{1}{3^2}; \frac{1}{3^3}; \frac{1}{3^4}; \frac{1}{3^5}; \dots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là?

A. $u_n = \frac{1}{3} \frac{1}{3^{n+1}}$.

B. $u_n = \frac{1}{3^{n+1}}$.

C. $u_n = \frac{1}{3^n}$.

D. $u_n = \frac{1}{3^{n-1}}$.

Câu 22. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = \frac{(n-1)n}{2}$.

B. $u_n = 5 + \frac{(n-1)n}{2}$.

C. $u_n = 5 + \frac{(n+1)n}{2}$.

D. $u_n = 5 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Câu 23. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-1)^{2n+1} \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 2 - n$.

B. u_n không xác định.

C. $u_n = 1 - n$.

D. $u_n = -n$ với mọi n .

Câu 24. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

B. $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n+2)}{6}$.

C. $u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.

D. $u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}$.

Câu 25. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = 2n - 1 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 2 + (n-1)^2$.

B. $u_n = 2 + n^2$.

C. $u_n = 2 + (n+1)^2$.

D. $u_n = 2 - (n-1)^2$.

Câu 26. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = -\frac{n-1}{n}$.

B. $u_n = \frac{n+1}{n}$.

C. $u_n = -\frac{n+1}{n}$.

D. $u_n = -\frac{n}{n+1}$.

Câu 27. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là:

A. $u_n = \frac{1}{2} + 2(n-1)$.

B. $u_n = \frac{1}{2} - 2(n-1)$.

C. $u_n = \frac{1}{2} - 2n$.

D. $u_n = \frac{1}{2} + 2n$.

Câu 28. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này là

A. $u_n = (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

B. $u_n = (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

C. $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

D. $u_n = (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Câu 29. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này:

A. $u_n = n^{n-1}$.

B. $u_n = 2^n$.

C. $u_n = 2^{n+1}$.

D. $u_n = 2$.

Câu 30. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này:

A. $u_n = -2^{n-1}$.

B. $u_n = \frac{-1}{2^{n-1}}$.

C. $u_n = \frac{-1}{2^n}$.

D. $u_n = 2^{n-2}$.

Câu 31. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Số hạng tổng quát của dãy số này là

A. $u_n = \frac{1}{2^n}$.

B. $u_n = 2^n$.

C. $u_n = 2^{n-1}$.

D. $u_n = 2^{n-2}$.

Câu 32. Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $1; 1; 1; 1; 1; 1; \dots$

B. $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$

C. $1; 3; 5; 7; 9; \dots$

D. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$

Câu 33. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau đây, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \frac{n+5}{3n+1}$

B. $u_n = \frac{n-5}{3n+1}$

C. $u_n = \frac{5-3n}{2n+3}$

D. $u_n = \frac{2n+3}{n+1}$

Câu 34. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau đây, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = n^2$

B. $u_n = 5 - 2n^2$

C. $u_n = 2n^3 + 3$

D. $u_n = \frac{n^2+1}{n}$

Câu 35. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau đây, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \frac{1}{2^n}$

B. $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

C. $u_n = -2^n$

D. $u_n = 2^n$

Câu 36. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Dãy số (u_n) với $u_n = 2 - \frac{3}{n}$ là dãy số tăng.

B. Dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n+2}$ là dãy số tăng.

C. Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}$ là dãy số giảm.

D. Dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ là dãy số tăng.

Câu 37. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau đây, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n = \sin n$

B. $u_n = \cos^2(2n+1)$

C. $u_n = \cos n^2 - n$

D. $u_n = n - \sin^{2020} n$

Câu 38. Trong các mệnh đề sau có bao nhiêu mệnh đề đúng?

i) Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n \cdot (2^n + 1)$ là dãy số tăng.

ii) Dãy số (u_n) với $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ là dãy số giảm.

iii) Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{3^n}$ là dãy số giảm.

iv) Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2^n}{n!}$ là dãy số tăng.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 39. Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n^3 + 1}, n \geq 1 \end{cases}$

A. Dãy số (u_n) tăng.

B. Dãy số (u_n) giảm.

C. Dãy số (u_n) không đổi.

D. Dãy số (u_n) không tăng, không giảm.

Câu 40. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{3n+a}{4n+1}$ với $n \in \mathbb{N}^*$ và a là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của a để (u_n) là dãy số tăng.

A. $a < \frac{3}{4}$

B. $a > \frac{3}{4}$

C. $a = \frac{3}{4}$

D. $a \neq \frac{3}{4}$

Câu 41. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = au_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

A. $a < 0$

B. $a \leq 0$

C. $a > 0$

D. $a > 1$

Câu 42. Cho dãy số (u_n) Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Nếu có các số thực m và M thỏa $m \leq u_n \leq M$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì (u_n) bị chặn.
- B. Nếu (u_n) là dãy số tăng hoặc dãy số giảm thì (u_n) luôn bị chặn.
- C. Nếu (u_n) là dãy số giảm thì (u_n) bị chặn trên.
- D. Nếu (u_n) là dãy số tăng thì (u_n) bị chặn dưới.

Câu 43. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 4 - 3n - n^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Dãy số (u_n) bị chặn trên.
- B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới.
- C. Dãy số (u_n) tăng.
- D. Dãy số (u_n) không tăng, không giảm.

Câu 44. Cho dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Dãy số (u_n) là dãy số tăng.
- B. Dãy số (u_n) là dãy số giảm.
- C. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.
- D. Dãy số (u_n) là dãy số không bị chặn.

Câu 45. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Dãy số (u_n) là dãy số tăng.
- B. Dãy số (u_n) là dãy số giảm.
- C. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.
- D. Dãy số (u_n) là dãy số không bị chặn.

Câu 46. Cho dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n \cdot 5^{2n+5}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Dãy số (u_n) bị chặn trên nhưng không bị chặn dưới.
- B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới nhưng không bị chặn trên.
- C. Dãy số (u_n) không bị chặn trên và không bị chặn dưới.
- D. Dãy số (u_n) bị chặn.

Câu 47. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n-1}{3n+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Dãy số (u_n) bị chặn trên nhưng không bị chặn dưới.
- B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới nhưng không bị chặn trên.
- C. Dãy số (u_n) không bị chặn dưới và không bị chặn trên.
- D. Dãy số (u_n) bị chặn.

Câu 48. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{4n+5}{n+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Dãy số (u_n) bị chặn trên nhưng không bị chặn dưới.
- B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới nhưng không bị chặn trên.
- C. Dãy số (u_n) không bị chặn dưới và không bị chặn trên.
- D. Dãy số (u_n) bị chặn.

Câu 49. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n^2+n}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Dãy số (u_n) là dãy số giảm.
- B. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số $M = \frac{1}{2}$.
- C. Dãy số (u_n) bị chặn.
- D. Dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi số $m = \frac{1}{4}$.

Câu 50. Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}$

- A. Dãy số (u_n) bị chặn trên nhưng không bị chặn dưới.
- B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới nhưng không bị chặn trên.
- C. Dãy số (u_n) không bị chặn dưới và không bị chặn trên.

D. Dãy số (u_n) bị chặn.

Câu 51. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{3} \cos n - \sin n$. Dãy số (u_n) bị chặn trên bởi số nào sau đây?

- A. $\sqrt{3} - 1$. B. $\sqrt{3} + 1$. C. $\sqrt{2}$. D. 2.

Câu 52. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sin \frac{\pi}{n+1}$. Xét các mệnh đề sau:

- 1) Số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1} = \sin \frac{\pi}{n+2}$
- 2) Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.
- 3) Dãy số (u_n) là một dãy số tăng.
- 4) Dãy số (u_n) không tăng, không giảm.

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 53. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+3)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Dãy số (u_n) bị chặn trên nhưng không bị chặn dưới.
 B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới nhưng không bị chặn trên.
 C. Dãy số (u_n) không bị chặn trên và không bị chặn dưới.
 D. Dãy số (u_n) bị chặn.

Câu 54. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

- A. $u_n = (-2)^n$. B. $u_n = \frac{1}{2^n}$. C. $u_n = 3^n$. D. $u_n = 4^n - 1$.

Câu 55. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào bị chặn?

- A. $u_n = n - \sin 3n$. B. $u_n = \frac{n^3}{n^2 + 1}$.
 C. $u_n = \sqrt{n^3 + n}$. D. $u_n = (-1)^n + \frac{3n}{n^3 + 2}$.

Câu 56. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2^n}{n!}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Dãy số (u_n) bị chặn trên nhưng không bị chặn dưới.
 B. Dãy số (u_n) bị chặn dưới nhưng không bị chặn trên.
 C. Dãy số (u_n) không bị chặn trên và không bị chặn dưới.
 D. Dãy số (u_n) bị chặn.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. C	3. D	4. A	5. A	6. B	7. D	8. A	9. B	10. C
11. A	12. B	13. B	14. D	15. C	16. B	17. C	18. B	19. C	20. D
21. C	22. B	23. A	24. C	25. A	26. C	27. B	28. D	29. B	30. D
31. D	32. C	33. B	34. B	35. D	36. D	37. D	38. A	39. A	40. A
41. C	42. B	43. A	44. C	45. C	46. C	47. D	48. D	49. D	50. D
51. D	52. B	54. B	55. D	56. D					

BÀI

3

CẤP SỐ CỘNG

A

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa cấp số cộng

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d .

Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

$$u_{n+1} = u_n + d \text{ với } n \in \mathbb{N}^*$$

2. Tính chất các số hạng của cấp số cộng

Định lý 3.1

Cho cấp số cộng (u_n) . Khi đó

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, \forall k \geq 2.$$

⇨ **Hệ quả 3.1.** Nếu (u_n) là cấp số cộng và m, n, k, t thỏa $m + n = k + t$ thì

$$u_m + u_n = u_k + u_t.$$

Chú ý:

Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng ta chứng minh $u_{n+1} = u_n + d$ với $n \in \mathbb{N}^*$ hoặc $u_{n+1} - u_n = d$ với d là số không đổi.

Đặc biệt: Để chứng minh ba số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng ta có thể chứng minh $b - a = c - b$.

3. Số hạng tổng quát

Định lý 3.2

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức:

$$u_n = u_1 + (n - 1)d \text{ với } n \geq 2.$$

4. Tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng

Định lý 3.3

Cho cấp số cộng (u_n) . Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$. Khi đó

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}. \quad (3.1)$$

Chú ý:

Vì $u_n = u_1 + (n - 1)d$ nên công thức (3.1) có thể viết

$$S_n = nu_1 + \frac{n(n - 1)}{2}d. \quad (3.2)$$

B

BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG
1

Chứng Minh Một Dây Số u_n Là Cấp Số Cộng.

Bài 17. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là cấp số cộng? Tính số hạng đầu và công sai nếu dãy số là cấp số cộng.

a) $u_n = 2 - 3n$

b) $u_n = \frac{n}{3} - 2$

c) $u_n = \frac{1}{n} + 3$

d) $u_n = 2^n + 4$.

Bài 18. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là cấp số cộng? Tính số hạng đầu và công sai nếu dãy số là cấp số cộng.

a) $u_n = 2 \cdot 3^n + 1$

b) $u_n = \frac{1 - 2n}{3}$

c) $u_n = \frac{2}{n + 1} - 1$

d) $u_n = \frac{2n - 1}{2} - 3$.

Bài 19. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là cấp số cộng? Tính số hạng đầu và công sai nếu dãy số là cấp số cộng.

a) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 4, \text{ với } n \geq 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1, \text{ với } n \geq 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = 1 - u_n, \text{ với } n \geq 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n}, \text{ với } n \geq 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 3n + u_n, \text{ với } n \geq 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 2 + u_n^2, \text{ với } n \geq 1 \end{cases}$

Bài 20. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là cấp số cộng? Tính số hạng đầu và công sai nếu dãy số là cấp số cộng.

a) $u_n = n^2 - 1$.

b) $u_n = (n + 1)^2$.

c) $u_n = (2n - 1)^2 - n$.

d) $u_n = (2n + 1)^2 - 4n^2$.

Bài 21. Cho dãy số (u_n) với $u_n = (2n - 1)^2$. Dãy số (v_n) với $v_n = u_{n+1} - u_n$, với $n \geq 1$ có là một cấp số cộng hay không?

Bài 22. Tìm x để ba số a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng, biết.

1) $a = 10 - 3x, b = 2x^2 + 3, c = 7 - 4x$;

2) $a = x + 1, b = 3x - 2, c = x^2 - 1$.

DẠNG
2

Số hạng tổng quát

Bài 1. Cho cấp số cộng (u_n) , biết $u_1 = -3, d = 7$. Tìm $u_{15}, u_{20}, u_{25}, u_{30}$.

Bài 2. Cho cấp số cộng (u_n) , biết:

$$\begin{cases} u_1 = -15 \\ d = 18 \end{cases}.$$

a. Tìm $u_5, u_{10}, u_{15}, u_{20}, u_{25}$.

b. Số 1209 là số hạng thứ bao nhiêu ?

Bài 3. Xác định số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) , biết:

a) $\begin{cases} u_7 = 8 \\ d = 2 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} u_{11} = 5 \\ d = -6 \end{cases}$.

Bài 4. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng (u_n) , biết:

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$.

Bài 5. a) Giữa các số 7 và 35 hãy đặt thêm 6 số nữa để được một cấp số cộng.

b) Giữa các số 10 và 64 hãy đặt thêm 17 số nữa để được một cấp số cộng.

Bài 6. Cho các số $a, b, a + b \neq 0$ thỏa mãn $\frac{1}{a}; \frac{1}{a+b}; \frac{1}{b}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Tính tỉ số $\frac{a^2}{b^2}$.

DẠNG
3Tính tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng

Tìm u_1, d hoặc u_1, u_n và tính S_n theo một trong hai công thức sau:

$$\checkmark S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}.$$

$$\checkmark S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

Bài 7. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công sai $d = 3$. Tính tổng S_{100} của 100 số hạng đầu tiên.

Bài 8. Cho dãy số (u_n) , với $u_n = 2n - 3$.

- Chứng minh rằng (u_n) là cấp số cộng.
- Tính tổng của 30 số hạng đầu.
- Biết $S_n = 195$, tìm n .

Bài 9. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = -15, u_4 = 18$. Tính tổng S_{20} của 20 số hạng đầu tiên.

Bài 10. Cho cấp số cộng

$$(u_n) : 4, 7, 10, 13, 16, \dots$$

Hãy tìm số hạng thứ 50 và tính tổng của 50 số hạng đầu của cấp số cộng đã cho.

Bài 11. Tính tổng $S = 100 + 105 + 110 + \dots + 995$.

Bài 12. Tính tổng $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

Bài 13. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$. Tính tổng S_{10} của 10 số hạng đầu.

Bài 14. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = -15, u_{14} = 18$. Tính tổng của 20 số hạng đầu tiên.

Bài 15. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} S_4 = 9 \\ S_6 = \frac{45}{2} \end{cases}$. Tính u_1, d .

Bài 16. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ S_{13} = 129 \end{cases}$. Tính u_1, d .

Bài 17. Cho (u_n) là một cấp số cộng có $u_3 + u_{13} = 80$. Tìm tổng S_{15} của 15 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Bài 18. Tìm x , biết:

- $2 + 5 + 8 + 11 + \dots + x = 155$.
- $\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \dots + \frac{1}{x} = 3 \quad (x \in \mathbb{Z}^+)$.

Bài 19. Gọi S_k là tổng của k số hạng đầu tiên của một cấp số cộng. Chứng minh rằng:

$$S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n)$$

Bài 20. Một chuyên viên khi bắt đầu đi làm được hưởng lương bậc 1, hệ số 2, 34. Cứ sau 36 tháng thì được tăng hệ số lương thêm 0, 33. Tiền lương một tháng được tính bằng tiền lương cơ sở 1, 3 triệu đồng nhân với hệ số lương. Tính tổng tiền lương mà chuyên viên đó được hưởng trong thời gian làm việc liên tục 30 năm.

C

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Dãy số $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; \dots$ là một cấp số cộng: $\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2} \\ d = \frac{1}{2} \end{cases}$.

B. Dãy số $\frac{1}{2}; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{2^3}; \dots$ là một cấp số cộng: $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ d = \frac{1}{2}; n = 3 \end{cases}$.

C. Dãy số: $2; 2; 2; 2; \dots$ là cấp số cộng $\begin{cases} u_1 = -2 \\ d = 0 \end{cases}$.

D. Dãy số: $0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; \dots$ không phải là một cấp số cộng.

Câu 2. Cho một cấp số cộng có $u_1 = -\frac{1}{2}; d = \frac{1}{2}$. Hãy chọn kết quả đúng

A. Dạng khai triển: $-\frac{1}{2}; 0; 1; \frac{1}{2}; 1 \dots$.

B. Dạng khai triển: $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2} \dots$.

C. Dạng khai triển: $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}; \dots$.

D. Dạng khai triển: $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2} \dots$.

Câu 3. Cho một cấp số cộng có $u_1 = -3; u_6 = 27$. Tìm d ?

A. $d = 5$.

B. $d = 7$.

C. $d = 6$.

D. $d = 8$.

Câu 4. Cho một cấp số cộng có $u_1 = \frac{1}{3}; u_8 = 26$. Tìm d ?

A. $d = \frac{11}{3}$.

B. $d = \frac{3}{11}$.

C. $d = \frac{10}{3}$.

D. $d = \frac{3}{10}$.

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có: $u_1 = -0,1; d = 0,1$. Số hạng thứ 7 của cấp số cộng này là:

A. 1,6.

B. 6.

C. 0,5.

D. 0,6.

Câu 6. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số cộng?

A. $1; -3; -6; -9; -12; \dots$.

B. $1; -2; -4; -6; -8; \dots$.

C. $1; -3; -7; -11; -15; \dots$.

D. $1; -3; -5; -7; -9; \dots$.

Câu 7. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số cộng?

A. $-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; \frac{4}{3}; \dots$.

B. $\frac{4}{5}; 1; \frac{7}{5}; \frac{9}{5}; \frac{11}{5}; \dots$.

C. $15\sqrt{2}; 12\sqrt{2}; 9\sqrt{2}; 6\sqrt{2}; \dots$.

D. $\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}; \frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{5}{\sqrt{3}}; \dots$.

Câu 8. Dãy số: $\frac{1}{2}; 0; -\frac{1}{2}; -1; -\frac{3}{2}; \dots$ là cấp số cộng với

A. số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{2}$, công sai $d = \frac{1}{2}$.

B. số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{2}$, công sai $d = -\frac{1}{2}$.

C. số hạng đầu $u_1 = 0$, công sai $d = \frac{1}{2}$.

D. số hạng đầu $u_1 = 0$, công sai $d = -\frac{1}{2}$.

Câu 9. Cho cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = -\frac{1}{2}$, công sai $d = \frac{1}{2}$. Năm số hạng liên tiếp đầu tiên của cấp số này là

A. $-\frac{1}{2}; 0; 1; \frac{1}{2}; 1$.

B. $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}$.

D. $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$.

Câu 10. Một cấp số cộng có hai số hạng liên tiếp là 6 và 10. Số hạng tiếp theo của cấp số cộng là

- A. 8. B. 14. C. 16. D. 60.

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 3n - 1$. Khi đó số hạng đầu u_1 và công sai d là

- A. $u_1 = 2, d = 3$. B. $u_1 = 2, d = -3$. C. $u_1 = 2, d = 5$. D. $u_1 = 2, d = -5$.

Câu 12. Nếu cấp số cộng (u_n) có công sai là d thì dãy số (v_n) với $v_n = u_n + 13$ là một cấp số cộng có công sai là

- A. $d - 13$. B. $d + 13$. C. d . D. $13d$.

Câu 13. Nếu cấp số cộng (u_n) có công sai là $d \neq 0$ thì dãy số (v_n) với $v_n = 4u_n$ là một cấp số cộng có công sai là

- A. d . B. $4d$. C. $d + 4$. D. $\frac{d}{4}$.

Câu 14. Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

- A. $u_n = 7 - 3n$. B. $u_n = 7 - 3^n$. C. $u_n = \frac{7}{3n}$. D. $u_n = 7 \cdot 3^n$.

Câu 15. Trong các dãy số được cho dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng?

- A. $u_n = (n + 1)^3$. B. $u_n = \sin \frac{\pi}{n}$.
 C. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1, n \geq 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} - 1, n \geq 2 \end{cases}$.

Câu 16. Cho a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng, đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A. $a^2 + c^2 = 2ab + 2bc$. B. $a^2 - c^2 = 2ab - 2bc$.
 C. $a^2 + c^2 = 2ab - 2bc$. D. $a^2 - c^2 = ab - bc$.

Câu 17. Cho a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng, đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A. $a^2 + c^2 = 2ab + 2bc + 2ac$. B. $a^2 - c^2 = 2ab + 2bc - 2ac$.
 C. $a^2 + c^2 = 2ab + 2bc - 2ac$. D. $a^2 - c^2 = 2ab - 2bc + 2ac$.

Câu 18. Cho a, b, c theo thứ tự lập thành cấp số cộng, ba số nào dưới đây cũng lập thành một cấp số cộng?

- A. $2b^2, a, c^2$. B. $-2b, -2a, -2c$. C. $2b, a, c$. D. $2b, -a, -c$.

Câu 19. Xác định x để 3 số: $1 - x; x^2; 1 + x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng?

- A. Không có giá trị nào của x . B. $x = \pm 2$.
 C. $x = \pm 1$. D. $x = 0$.

Câu 20. Xác định x để 3 số: $1 + 2x; 2x^2 - 1; -2x$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng?

- A. $x = \pm 3$. B. $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 C. $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$. D. Không có giá trị nào của x .

Câu 21. Xác định a để 3 số: $1 + 3a; a^2 + 5; 1 - a$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng?

- A. Không có giá trị nào của a . B. $a = 0$.
 C. $a = \pm 1$. D. $a = \pm \sqrt{2}$.

Câu 22. Nếu các số $5 + m; 7 + 2m; 17 + m$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì m bằng bao nhiêu?

- A. $m = 2$. B. $m = 3$. C. $m = 4$. D. $m = 5$.

Câu 23. Biết bốn số $5; x; 15; y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị của $3x + 2y$ bằng

- A. 50. B. 70. C. 30. D. 80.

Câu 24. Các số $C_n^1; C_n^2; C_n^3$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng với $n > 3$. Tìm n

- A. $n = 5$. B. $n = 7$. C. $n = 9$. D. $n = 11$.

Câu 25. Ba góc $A, B, C (A < B < C)$ của tam giác tạo thành cấp số cộng, biết góc lớn nhất gấp đôi góc nhỏ nhất. Hiệu số đo độ của góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng

- A. 40° . B. 45° . C. 60° . D. 80° .

Câu 26. Một tam giác vuông có chu vi bằng 3 và độ dài các cạnh lập thành một cấp số cộng. Diện tích tam giác vuông đã cho bằng

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{3}{4}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{5}{8}$.

Câu 27. Cho cấp số cộng (u_n) có các số hạng đầu lần lượt là $5; 9; 13; 17; \dots$. Tìm số hạng tổng quát u_n của cấp số cộng.

- A. $u_n = 5n + 1$. B. $u_n = 5n - 1$. C. $u_n = 4n + 1$. D. $u_n = 4n - 1$.

Câu 28. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = -5$ và công sai $d = 3$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $u_{10} = 35$. B. $u_{13} = 31$. C. $u_{15} = 34$. D. $u_{15} = 45$.

Câu 29. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 = 15$ và công sai $d = -2$. Số hạng tổng quát u_n là

- A. $u_n = -2n + 21$. B. $u_n = -\frac{3}{2}n + 12$. C. $u_n = -3n - 17$. D. $u_n = \frac{3}{2}n^2 - 4$.

Câu 30. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = -5$ và công sai $d = 3$ Số 100 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng?

- A. Thứ 15. B. Thứ 20. C. Thứ 35. D. Thứ 36.

Câu 31. Cho hai số -3 và 23 Xen kẽ giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó lập thành cấp số cộng có công sai $d = 2$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $n = 12$. B. $n = 13$. C. $n = 14$. D. $n = 15$.

Câu 32. Người ta viết thêm 999 số thực vào giữa số 1 và số 2021 để được cấp số cộng có 1001 số hạng. Số hạng thứ 501 của cấp số cộng là

- A. 1000. B. 1001. C. 1011. D. $\frac{1011}{2}$.

Câu 33. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $u_{10} - u_5 = 10$. Giá trị của $u_{100} + u_{200} - 2u_{50}$ bằng

- A. 550. B. 400. C. 500. D. 450.

Câu 34. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và công sai $d = 7$. Hỏi kể từ số hạng thứ mấy trở đi thì các số hạng của (u_n) đều lớn hơn 2021?

- A. 288. B. 289. C. 290. D. 291.

Câu 35. Một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 2021$ và công sai $d = -5$. Hỏi bắt đầu từ số hạng nào của cấp số cộng đó thì nó nhận giá trị âm?

- A. u_{404} . B. u_{405} . C. u_{406} . D. u_{407} .

Câu 36. Một cấp số cộng có 8 số hạng. Số hạng đầu là 5, số hạng thứ tám là 40 Khi đó công sai d của cấp số cộng đã cho là bao nhiêu?

- A. $d = 4$. B. $d = 5$. C. $d = 8$. D. $d = 35$.

Câu 37. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12$ và $u_{14} = 18$. Khi đó u_2 bằng

- A. -24 . B. -18 . C. 18 . D. 24 .

Câu 38. Một cấp số cộng có 6 số hạng. Biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối bằng 17; tổng của số hạng thứ hai và số hạng thứ tư bằng 14. Tìm công sai d của cấp số cộng đã cho.

- A. $d = -16$. B. $d = -3$. C. $d = 3$. D. $d = 16$.

Câu 39. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_9 = 5u_2$ và $u_{13} = 2u_6 + 5$. Chọn mệnh đề đúng?

- A. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$. B. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ d = 3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 5 \end{cases}$. D. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ d = 5 \end{cases}$.

Câu 40. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = 3 \end{cases}$. B. $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = -3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} u_1 = 18 \\ d = 3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} u_1 = 21 \\ d = 4 \end{cases}$.

Câu 41. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 u_7 = 75 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $u_1 = 3$. B. $u_1 = -17$. C. $d = 2$. D. $d = 3$.

Câu 42. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2 u_3 = 54 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\begin{cases} u_1 = -33 \\ d = -15 \end{cases}$. B. $\begin{cases} u_1 = -33 \\ d = 3 \end{cases}$. C. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 3 \end{cases}$. D. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 15 \end{cases}$.

Câu 43. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + u_7 = 26 \\ u_2^2 + u_6^2 = 466 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ d = -4 \end{cases}$. B. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ d = -4 \end{cases}$. C. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 4 \end{cases}$. D. $\begin{cases} u_1 = 25 \\ d = 4 \end{cases}$.

Câu 44. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 \end{cases}$. Tính u_2

- A. $u_2 = 1$. B. $u_2 = 6$. C. $u_2 = 9$. D. $u_2 = 17$.

Câu 45. Cho số nguyên dương $n \geq 3$ thỏa mãn $C_n^1; C_n^2; C_n^3$ lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ 5 và thứ 15 của một cấp số cộng. Giá trị của n bằng

- A. 9. B. 10. C. 11. D. 12.

Câu 46. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 4$ và $d = -5$. Tổng 100 số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng

- A. -24350 . B. 24350 . C. -24600 . D. 24600 .

Câu 47. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = 5 - 2n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$. Tổng của 20 số hạng đầu tiên của cấp số cộng bằng

- A. -350 . B. -340 . C. -320 . D. 440 .

Câu 48. Xét các số nguyên dương chia hết cho 3. Tổng số 50 số nguyên dương đầu tiên của dãy số đó bằng

- A. 3675. B. 3750. C. 3825. D. 3900.

Câu 49. Cho cấp số cộng (u_n) có $d = -2$ và $S_8 = 72$. Tìm số hạng đầu tiên u_1

- A. $u_1 = 16$. B. $u_1 = -16$. C. $u_1 = \frac{1}{16}$. D. $u_1 = -\frac{1}{16}$.

Câu 50. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 5$ và tổng của 40 số hạng đầu là 3320. Công sai của cấp số cộng đó bằng

- A. -4 . B. 4 . C. -8 . D. 8 .

Câu 51. Một cấp số cộng có số hạng đầu là 1, công sai là 4, tổng của n số hạng đầu là 561. Khi đó số hạng thứ n của cấp số cộng đó là u_n có giá trị là bao nhiêu?

- A. $u_n = 57$. B. $u_n = 61$. C. $u_n = 65$. D. $u_n = 69$.

Câu 52. Một cấp số cộng có 12 số hạng. Biết rằng tổng của 12 số hạng đó bằng 144 và số hạng thứ mười hai bằng 23. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

- A. 2 . B. 3 . C. 4 . D. 5 .

Câu 53. Cho cấp số cộng có tổng 10 số hạng đầu tiên là 100 và tổng 100 số hạng đầu tiên là 10. Khi đó tổng của 110 số hạng đầu tiên là

- A. -110 . B. -90 . C. 90 . D. 110 .

Câu 54. Cho cấp số cộng (a_n) có công sai $d \neq 0$ Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng. Biết $S_6 = S_9$, tỉ số $\frac{a_3}{a_5}$ bằng

- A. $\frac{9}{5}$. B. $\frac{5}{9}$. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{3}{5}$.

Câu 55. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $5S_7 - 7S_5 = 70$. Công sai của cấp số cộng bằng

- A. 2 . B. 3 . C. $37,5$. D. 70 .

Câu 56. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_5 = 18$ và $4S_n = S_{2n}$. Tìm số hạng đầu tiên u_1 và công sai d của cấp số cộng.

- A. $u_1 = 2; d = 4$. B. $u_1 = 2; d = 3$. C. $u_1 = 2; d = 2$. D. $u_1 = 3; d = 2$.

Câu 57. Một đa giác có n cạnh và có chu vi bằng 158cm. Biết số đo các cạnh của đa giác lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 3$ cm và cạnh lớn nhất có độ dài là 44cm. Đa giác có số cạnh n bằng

- A. $n = 7$. B. $n = 6$. C. $n = 5$. D. $n = 4$.

Câu 58. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2 + u_{23} = 60$. Tổng 24 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho bằng

- A. 60 . B. 120 . C. 720 . D. 1440 .

Câu 59. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2 + u_8 + u_9 + u_{15} = 100$. Tổng 16 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho bằng

- A. 100 . B. 200 . C. 300 . D. 400 .

Câu 60. Số hạng tổng quát của một cấp số cộng là $u_n = 3n + 4$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $S_n = \frac{3n+4}{2}$. B. $S_n = \frac{3n^2+4n}{2}$. C. $S_n = \frac{3n+11}{2}$. D. $S_n = \frac{3n^2+11n}{2}$.

Câu 61. Cho cấp số cộng (u_n) có tổng n số hạng đầu tính được theo công thức $S_n = 5n^2 + 3n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng đã cho.

- A. $\begin{cases} u_1 = -8 \\ d = 10 \end{cases}$. B. $\begin{cases} u_1 = -8 \\ d = -10 \end{cases}$. C. $\begin{cases} u_1 = 8 \\ d = 10 \end{cases}$. D. $\begin{cases} u_1 = 8 \\ d = -10 \end{cases}$.

Câu 62. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_{100} = 199$ và công sai $d = 2$. Tính tổng $T = u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{20}$

A. $T = 200$. B. $T = 210$. C. $T = 220$. D. $T = 190$.

Câu 63. Tính tổng $S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 + \dots + (2n - 1) - 2n$ với $n \in \mathbb{N}^*$

A. $S = -1$. B. $S = 0$. C. $S = -n$. D. $S = n$.

Câu 64. Tính tổng $T = 15 + 20 + 25 + \dots + 7515$

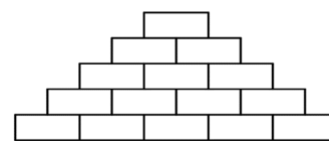
A. $T = 5651255$. B. $T = 5651260$. C. $T = 5651265$. D. $T = 5651270$.

Câu 65. Tính tổng $T = 1000^2 - 999^2 + 998^2 - 997^2 + \dots + 2^2 - 1^2$

A. $T = 500496$. B. $T = 500500$. C. $T = 500504$. D. $T = 500508$.

Câu 66.

Một người muốn trang trí quán cho đẹp nên quyết định thuê nhân công xây một bức tường gạch vớiximăng (mô hình như hình vẽ bên), biết hàng dưới cùng có 500 viên, mỗi hàng tiếp theo đều có ít hơn hàng trước 1 viên và hàng trên cùng cùng có 1 viên. Hỏi số gạch cần dùng để hoàn thành bức tường trên là bao nhiêu viên gạch?



A. 12550. B. 125250. C. 25250. D. 250500.

Câu 67.

Trong hội chợ tết, một công ty sữa muốn xếp 900 hộp sữa theo số lượng 1; 3; 5; ... từ trên xuống dưới (số hộp sữa trên mỗi hàng xếp từ trên xuống là các số lẻ liên tiếp, mô hình như hình vẽ bên). Hỏi hàng dưới cùng có bao nhiêu hộp sữa?



A. 30. B. 57. C. 59. D. 61.

Câu 68. Ông Nam đã trồng cây cao trên mảnh đất của mình có dạng hình tam giác. Ông trồng ở hàng đầu tiên 3 cây cao, kể từ hàng thứ hai trở đi số cây cao phải trồng ở mỗi hàng nhiều hơn 5 cây so với số cây đã trồng ở hàng trước đó và ở hàng cuối cùng ông đã trồng 2023 cây cao. Số cây cao mà ông Nam đã trồng trên mảnh đất của mình là

A. 406229 cây. B. 408242 cây. C. 410265 cây. D. 412293 cây.

Câu 69. Trong sân vận động có tất cả 30 dãy ghế. Dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liền sau nhiều hơn dãy trước 4 ghế. Hỏi sân vận động đó có tất cả bao nhiêu ghế?

A. 1740. B. 2190. C. 2250. D. 4380.

Câu 70. Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Giá của mét khoan đầu tiên là 80000 đồng, kể từ mét khoan thứ hai giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50 mét. Vậy hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

A. 4000000 đồng. B. 4245000 đồng. C. 10125000 đồng. D. 52500000 đồng.

Câu 71. Một công ty trách nhiệm hữu hạn thực hiện việc trả lương cho người lao động theo phương thức sau: Người lao động sẽ được nhận 36 triệu đồng cho năm làm việc đầu tiên và kể từ năm làm việc thứ hai mức lương sẽ tăng thêm 3 triệu đồng mỗi năm. Tổng số tiền lương một người lao động được nhận sau 5 năm làm việc là

A. 100 triệu đồng. B. 120 triệu đồng. C. 210 triệu đồng. D. 420 triệu đồng.

Câu 72. Một chiếc đồng hồ đánh chuông, kể từ thời điểm 0 giờ thì sau mỗi giờ số tiếng chuông được đánh đúng bằng số giờ mà đồng hồ chỉ tại thời điểm đánh chuông (biết rằng lúc 13 giờ thì xem như 1 giờ chiều và đồng hồ chỉ đánh một tiếng chuông). Hỏi trong một ngày có 24 giờ, đồng hồ đánh bao nhiêu tiếng chuông?

- A. 48. B. 78. C. 156. D. 300.

Câu 73. Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông, người ta đặt 7 hạt thóc vào ô đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt nhiều hơn ô thứ nhất là 5, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt nhiều hơn ô thứ hai là 5, ... và cứ thế tiếp tục đến ô thứ n . Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta phải sử dụng 25450 hạt. Hỏi bàn cờ đó có bao nhiêu ô vuông?

- A. 64. B. 98. C. 100. D. 102.

Câu 74. Một sinh viên ra trường đi phỏng vấn xin việc tại một công ty. Sau khi phỏng vấn xong các kiến thức chuyên môn, giám đốc đưa ra 3 lựa chọn.

- Một là anh sẽ vào làm việc trong công ty với lương tháng cố định $5 \cdot 000 \cdot 000$ đồng mỗi tháng.
- Hai là anh sẽ làm việc với mức lương khởi điểm $3 \cdot 000 \cdot 000$ đồng cho tháng đầu, sau mỗi tháng anh sẽ được tăng thêm $400 \cdot 000$ đồng cho các tháng sau.
- Ba là anh sẽ làm việc với mức lương khởi điểm $4 \cdot 000 \cdot 000$ cho tháng đầu, sau mỗi tháng anh sẽ được tăng thêm $200 \cdot 000$ đồng cho các tháng sau.

Thời gian thử việc theo cả 3 phương án là 12 tháng. Hỏi anh sinh viên sẽ lựa chọn phương án nào để có lợi nhất về thu nhập trong thời gian thử việc.

- A. Phương án 1. B. Phương án 2.
C. Phương án 3. D. Cả 3 phương án như nhau.

Câu 75. Nam đang tiết kiệm để mua một cây Guitar có giá 400. Trong tuần đầu tiên Nam để dành 42 và trong mỗi tuần tiếp theo Nam đã thêm 8 vào tài khoản tiết kiệm của mình. Hỏi vào tuần thứ bao nhiêu thì Nam có đủ tiền để mua cây Guitar?

- A. 44. B. 45. C. 46. D. 47.

Câu 76. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai $d = -3$ và $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Số hạng thứ 2020 của cấp số cộng bằng

- A. -6054. B. -6051. C. 6051. D. 6066.

Câu 77. Cho các số thực α, β, γ thỏa mãn $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ và $\cot \alpha, \cot \beta, \cot \gamma$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Giá trị của $\cot \alpha \cdot \cot \gamma$ bằng

- A. -3. B. -2. C. 2. D. 3.

Câu 78. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$, công sai bằng 2 và cấp số cộng (v_n) có $v_1 = 2$, công sai bằng 3. Hỏi có tất cả bao nhiêu số có mặt đồng thời trong 2021 số hạng đầu tiên của cả hai cấp số cộng nói trên?

- A. 335. B. 673. C. 674. D. 1010.

Câu 79. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $u_m = n$ và $u_n = m$. Tính u_{2021} .

- A. $u_{2021} = \frac{1}{2}(m + n + 2021)$. B. $u_{2021} = \frac{1}{2}(m + n - 2021)$.
C. $u_{2021} = m + n + 2021$. D. $u_{2021} = m + n - 2021$.

Câu 80. Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu u_1 , công sai d và tổng n số hạng đầu tiên là S_n thỏa mãn $S_m = S_n (m \neq n)$. Giá trị của S_{m+n} bằng

A. 0.

B. $2S_n$.C. $4S_n$.D. S_n^2 .

Câu 81. Cho cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu u_1 , công sai d và tổng n số hạng đầu tiên là S_n thỏa mãn $\frac{S_n}{S_m} = \left(\frac{n}{m}\right)^2$ ($m \neq n$) Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_1 = 2d$.B. $u_1 = -2d$.C. $d = 2u_1$.D. $d = -2u_1$.

Câu 82. Cho dãy số $C_23^0; C_23^1; \dots; C_23^{13}$ Tổng của ba số hạng liên tiếp lập thành cấp số cộng trong dãy số đã cho có giá trị bằng

A. 836418.

B. 1307527.

C. 2451570.

D. 3848222.

Câu 83. Có tất cả bao nhiêu bộ số nguyên dương $(n; k)$ biết $n < 20$ và các số $C_n^{k-1}; C_n^k; C_n^{k+1}$ theo thứ tự đó là số hạng thứ nhất, thứ ba, thứ năm của một cấp số cộng?

A. 2.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Câu 84. Cho cấp số cộng (u_n) có công sai d , các số hạng của cấp số cộng đã cho đều khác 0 Với giá trị nào của d thì dãy số $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ cũng là một cấp số cộng?

A. $d = -1$.B. $d = 0$.C. $d = 1$.D. $d = 2$.

Câu 85. Nếu $\frac{1}{b+c}; \frac{1}{c+a}; \frac{1}{a+b}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì dãy số nào sau đây lập thành cấp số cộng?

A. $a^2; b^2; c^2$.B. $b^2; c^2; a^2$.C. $c^2; a^2; b^2$.D. $\frac{1}{a^2}; \frac{1}{b^2}; \frac{1}{c^2}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. C	4. A	5. C	6. C	7. B	8. B	9. D	10. B
11. A	12. C	13. B	14. A	15. D	16. B	17. C	18. B	19. C	20. B
21. A	22. C	23. B	24. B	25. A	26. C	27. C	28. B	29. A	30. D
31. A	32. C	33. B	34. C	35. C	36. B	37. B	38. C	39. A	40. B
41. D	42. C	43. C	44. C	45. C	46. A	47. C	48. C	49. A	50. B
51. C	52. A	53. A	54. C	55. A	56. A	57. D	58. C	59. D	60. D
61. C	62. B	63. C	64. C	65. B	66. B	67. C	68. C	69. B	70. C
71. C	72. C	73. C	74. B	75. C	76. B	77. D	78. C	79. D	80. A
81. C	82. C	83. B	84. B	85. A					

BÀI

4

CẤP SỐ NHÂN

A

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa và các tính chất của cấp số nhân

Định nghĩa 4.1. Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai trở đi, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng liền trước với một số không đổi q . Số không đổi q đó được gọi là công bội của cấp số nhân. Từ định nghĩa, ta có: Nếu (u_n) là một cấp số nhân với công bội q , ta có công thức truy hồi $u_{n+1} = u_n \cdot q, n \in \mathbb{N}^*$.

Chú ý

Đặc biệt

- 1) Khi $q = 1$ thì cấp số nhân là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).
- 2) Khi $q = 0$ thì cấp số nhân có dạng $u_1, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots$
- 3) Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q cấp số nhân có dạng $0, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots$

Định lý 4.1

Số hạng tổng quát của cấp số nhân.

Nếu cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n được xác định bởi công thức: $u_n = u_1 q^{n-1}, \forall n \geq 2$.

Hệ quả 4.1. Cho cấp số nhân (u_n) với các số hạng khác 0. Khi đó ta có:

- 1) $u_m = u_k \cdot q^{m-k}, k < m.$
- 2) $q^{m-k} = \frac{u_m}{u_k}, k < m.$

Định lý 4.2

Tính chất các số hạng của cấp số nhân.

Trong cấp số nhân (u_n) , bình phương mỗi số hạng (trừ số hạng đầu và cuối) đều là tích hai số hạng đứng kề với nó, nghĩa là $u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}, k \geq 2$.

Chú ý

Một cách tổng quát, ta có: Nếu (u_n) là cấp số nhân thì $u_m^2 = u_{m-k} \cdot u_{m+k}, k < m$.

Định lý 4.3

Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

Cho một cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Khi đó:

$$S_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{u_1 - u_{n+1}}{1 - q}.$$

Chú ý

Nhận xét.

Chúng ta thường sử dụng công thức $S_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$ để tính S_n khi biết số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân. Công thức $S_n = \frac{u_1 - u_{n+1}}{1 - q}$ được sử dụng để tính S_n trong trường hợp biết các số hạng u_1, u_{n+1} và công bội q của cấp số nhân.

B

BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1

Chứng Minh Một Dây Số Là Cấp Số Nhân Và Các Yếu Tố Liên Quan

- Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số nhân, chúng ta cần phải chỉ tồn tại một số không đổi q sao cho $u_{n+1} = u_n \cdot q, \forall n \geq 1$.
- Trong trường hợp $u_n \neq 0, \forall n \geq 1$ để chứng minh (u_n) là một cấp số nhân, chúng ta cần phải chỉ ra tỷ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ là một số không đổi với mọi số nguyên dương n .
- Để chỉ ra một dãy số không phải là cấp số nhân, chúng ta cần chỉ một dãy số gồm 3 số hạng liên tiếp của dãy số đã cho mà không lập thành cấp số nhân.

Bài 1. Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

- Dãy số (x_n) , với $x_n = n^2$.
- Dãy số (y_n) , với $y_n = \sqrt{5^{2n-3}}$.
- Dãy số (z_n) , với $z_n = \frac{2}{n}$.
- Dãy số (w_n) , với $w_n = \frac{3^n + 1}{3^{n+1}}$.

Bài 2. Cho cấp số nhân (u_n) . Các dãy sau có phải là cấp số nhân không?

1) Dãy (a_n) , với $a_n = 3u_n$.

2) Dãy (b_n) , với $b_n = u_n^2$.

Bài 3. Chứng minh các dãy số sau là cấp số nhân. Hãy tìm công bội và số hạng đầu của cấp số nhân đó.

1) Dãy (u_n) với $u_n = (-1)^n \cdot 3^{2n}$

2) Dãy (v_n) với $v_n = \frac{5}{3^n}$

3) Dãy (x_n) với $x_n = (-4)^{2n+1}$

Bài 4. Tìm a để ba số $a - 2$; $a - 4$; $a + 2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Bài 5. Tìm b để ba số $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{b}$; $\sqrt{2}$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Bài 6. Cho cấp số nhân $-\frac{1}{5}$; b ; $-\frac{1}{125}$. Tìm b .

Bài 7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = 5 \cdot u_n + 8$, với $n > 1$. Chứng minh (v_n) với $v_n = u_n + 2$ là cấp số nhân.

DẠNG 2

Xác định q , u_k của cấp số nhân

Dựa vào định nghĩa và tính chất của cấp số nhân, ta thường đưa bài toán theo u_1 và q với chú ý: Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội q thì ta có

☑ $u_{n+1} = u_n \cdot q, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

☑ Số hạng tổng quát : $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, \forall n > 1$.

☑ $u_{n+1}^2 = u_n \cdot u_{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

☑ Tổng của n số hạng đầu là $S_n = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = u_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$.

Bài 8. Cho cấp số nhân u_n có $u_2 = 2$; $u_3 = 6$. Tìm u_4, u_5 .

Bài 9. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội q .

1) Biết $u_1 = 3$, $u_6 = 3072$. Tìm q .

2) Biết $q = \frac{2}{3}$, $u_4 = \frac{8}{25}$. Tìm u_1 .

3) Biết $u_1 = 3$, $q = 2$. Hỏi 192 là số hạng thứ mấy?

Bài 10. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội dương, biết $u_1 = 3$ và $u_5 = 48$

1) Tính u_8

2) Hỏi số 1536 là số hạng thứ mấy?

3) Tính tổng của 12 số hạng đầu.

Bài 11. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_n = 12 \cdot 2^{n-1}$.

- 1) Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q .
- 2) Tính tổng của 10 số hạng đầu tiên.
- 3) Tính tổng $S' = u_3 + u_4 + \dots + u_{12}$.

Bài 12. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân (u_n) , biết :
$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 72, \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$$

Bài 13. Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 + u_4 = 27$; $u_2 \cdot u_3 = 72$. Tìm u_7 .

Bài 14. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

Bài 15. Tìm số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng công bội là 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối là 486.

DẠNG
3

Các bài toán thực tế liên quan cấp số nhân

Bài 16. Tế bào E. Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại nhân đôi một lần. Nếu lúc đầu có 10^{12} tế bào thì sau 3 giờ sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

Bài 17. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng theo cách: Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích đế tháp. Biết diện tích đế tháp là $12288m^2$, tính diện tích mặt trên cùng.

Bài 18. Tỷ lệ tăng dân số của tỉnh X là 1,3%. Biết rằng số dân của tỉnh X hiện nay là 1,7 triệu người. Hỏi với mức tăng như vậy thì số dân của tỉnh đó là bao nhiêu biết:

- 1) sau 5 năm.
- 2) sau 10 năm.

Bài 19. Anh An mua nhà trị giá 500 triệu đồng theo phương thức trả góp.

- a) Nếu cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh An trả 6000000 và chịu lãi số tiền chưa trả là 0,5%/tháng thì sau bao lâu anh An trả hết số tiền trên ?
- b) Nếu anh An muốn trả hết nợ trong 3 năm và phải trả lãi với mức 6%/năm thì mỗi tháng anh phải trả bao nhiêu tiền ? (Làm tròn đến nghìn đồng)

Bài 20. Bố bạn An tặng bạn ấy một máy vi tính trị giá 15 triệu đồng bằng cách cho bạn ấy tiền hàng tháng theo phương thức: tháng đầu tiên cho 300000 đồng, các tháng từ tháng thứ 2 trở đi mỗi tháng nhận được số tiền nhiều hơn tháng trước 50000 đồng.

- 1) Nếu chọn cách gửi tiết kiệm số tiền được nhận hàng tháng với lãi suất 0,6%/tháng thì bạn An gửi bao nhiêu tháng mới đủ mua máy vi tính.
- 2) Nếu bạn An muốn có ngay máy vi tính để học bằng phương thức mua trả góp hàng tháng bằng số tiền bố cho với lãi suất ngân hàng là 0,7%/tháng thì bạn An mất bao nhiêu tháng để trả đủ số tiền và tháng cuối cùng trả bao nhiêu ?

Bài 21. Một người muốn có 100 triệu sau 18 tháng phải gửi mỗi tháng vào ngân hàng bao nhiêu tiền, biết lãi suất 0,6%/ tháng (lãi kép).

Bài 22. Một người vay 80 triệu, trả góp theo tháng trong vòng 60 tháng, lãi suất 1,15%/tháng.

- 1) Hỏi hàng tháng phải trả bao nhiêu ?
- 2) Nếu lãi suất là 0,75%/tháng thì mỗi tháng phải trả bao nhiêu, lợi hơn bao nhiêu so với lãi 1,15%/tháng ?

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

- A. 128; -64; 32; -16; 8; ...
 B. $\sqrt{2}$; 2; 4; $4\sqrt{2}$; ...
 C. 5; 6; 7; 8; ...
 D. 15; 5; 1; $\frac{1}{5}$; ...

Câu 2. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

- A. 1; -1; 1; -1; ...
 B. 3 ; 3^2 ; 3^3 ; 3^4 ; ...
 C. a ; a^3 ; a^5 ; a^7 ; ... ($a \neq 0$).
 D. $\frac{1}{\pi}$; $\frac{1}{\pi^2}$; $\frac{1}{\pi^4}$; $\frac{1}{\pi^6}$; ...

Câu 3. Dãy số 1; 2; 4; 8; 16; 32; ... là một cấp số nhân với

- A. công bội là 1 và số hạng đầu tiên là 2.
 B. công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 1.
 C. công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 2.
 D. công bội là 1 và số hạng đầu tiên là 1.

Câu 4. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -2$ và công bội $q = -5$ Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

- A. -2; 10; 50; -250.
 B. -2; 10; -50; 250.
 C. -2; -10; -50; -250.
 D. -2; 10; 50; 250.

Câu 5. Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 3 và 12. Số hạng tiếp theo của cấp số nhân là

- A. 15.
 B. 21.
 C. 36.
 D. 48.

Câu 6. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng tổng quát là $u_n = \frac{3}{2} \times 5^n$. Khi đó số hạng đầu u_1 và công bội q là

- A. $u_1 = \frac{3}{2}, q = \frac{1}{5}$.
 B. $u_1 = \frac{3}{2}, q = 5$.
 C. $u_1 = \frac{15}{2}, q = \frac{1}{5}$.
 D. $u_1 = \frac{15}{2}, q = 5$.

Câu 7. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

- A. $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$.
 B. $u_n = \frac{1}{3^n} - 1$.
 C. $u_n = (n+2) \cdot 3^n$.
 D. $u_n = n^2 - \frac{1}{3}$.

Câu 8. Dãy số nào sau đây là cấp số nhân?

- A. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 1, n \geq 1 \end{cases}$.
 B. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = -3u_n, n \geq 1 \end{cases}$.
 C. $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{6}{u_n}, n \geq 1 \end{cases}$.
 D. $\begin{cases} u_1 = \frac{\pi}{2} \\ u_n = \sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right), n \geq 1 \end{cases}$.

Câu 9. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân?

A. $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$. B. $u_{n+1} = nu_n$. C. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = -5u_n \end{cases}$. D. $u_{n+1} = u_{n+1} - 3$.

Câu 10. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân?

A. $u_n = \frac{1}{3^n} - 1$. B. $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$. C. $u_n = n + \frac{1}{3}$. D. $u_n = n^2 - \frac{1}{3}$.

Câu 11. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân?

A. $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n^3 \end{cases}$. B. $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. C. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 6u_n \end{cases}$. D. $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

Câu 12. Dãy số nào sau đây là cấp số nhân?

A. $u_n = \frac{1}{3}n + 2$. B. $u_n = n^2 + 2$. C. $u_n = 3^{2n}$. D. $u_n = n^2 + 1$.

Câu 13. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số nhân?

A. $u_n = \frac{1}{3^n} + 4$. B. $u_n = \frac{1}{5^{n-2}}$. C. $u_n = 2n + \frac{1}{3}$. D. $u_n = n^2 - \frac{1}{3}$.

Câu 14. Cho cấp số nhân có $u_1 < 0$ và công bội $q < 0$. Trong các nhận xét sau, nhận xét nào đúng?

- A. $u_n < 0$ với mọi n .
 B. $u_n < 0$ với mọi n lẻ và $u_n > 0$ với mọi n chẵn.
 C. $u_n > 0$ với mọi n .
 D. $u_n < 0$ với mọi n chẵn và $u_n > 0$ với mọi n lẻ.

Câu 15. Trong các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $u_n = 7 - 3n$. B. $u_n = 7 - 3^n$. C. $u_n = \frac{7}{3n}$. D. $u_n = 7 \cdot 3^n$.

Câu 16. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số nhân.
 B. Dãy số có tất cả các số hạng bằng nhau là một cấp số cộng.
 C. Một cấp số cộng có công sai dương là một dãy số tăng.
 D. Một cấp số nhân có công bội $q > 1$ là một dãy tăng.

Câu 17. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và công bội $q = \frac{2}{3}$. Chọn mệnh đề đúng?

A. $u_5 = -\frac{27}{16}$. B. $u_5 = -\frac{16}{27}$. C. $u_5 = \frac{16}{27}$. D. $u_5 = \frac{27}{16}$.

Câu 18. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1, u_2 = -2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_{2021} = -2^{2020}$. B. $u_{2021} = 2^{2020}$. C. $u_{2021} = -2^{2021}$. D. $u_{2021} = 2^{2021}$.

Câu 19. Một cấp số nhân có số hạng thứ bảy bằng $\frac{1}{2}$, công bội bằng $\frac{1}{4}$. Hỏi số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng bao nhiêu?

A. $\frac{1}{512}$. B. 1024. C. 2048. D. 4096.

Câu 20. Cho cấp số nhân (u_n) được xác định bởi $u_1 = -4$ và $u_n = -\frac{1}{2}u_{n-1}$ với $n \geq 2$. Số hạng tổng quát u_n của cấp số nhân là

A. $u_n = 4 \cdot \frac{1}{2}^{n-1}$. B. $u_n = -4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
 C. $u_n = 4 \cdot \frac{1}{2}^{n+1}$. D. $u_n = -4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Câu 21. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 \neq 0$ và công bội $q \neq 0$. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

- A. $u_1; u_3; u_5; \dots$
 B. $3u_1; 3u_2; 3u_3; \dots$
 C. $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \frac{1}{u_3}; \dots$
 D. $u_1 + 2; u_2 + 2; u_3 + 2; \dots$

Câu 22. Thêm hai số thực dương x và y vào giữa hai số 5 và 320 để được bốn số 5; x ; y ; 320 theo thứ tự đó lập thành cấp số nhân. Giá trị của $x + 2y$ bằng

- A. 100. B. 120. C. 180. D. 200.

Câu 23. Viết thêm bốn số vào giữa hai số 160 và 5 để được một dãy giảm và dãy này là một cấp số nhân. Số hạng thứ tư của cấp số nhân bằng

- A. 10. B. 20. C. 40. D. 80.

Câu 24. Cho cấp số nhân $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots; \frac{1}{4096}$. Số $\frac{1}{4096}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

- A. 10. B. 11. C. 12. D. 13.

Câu 25. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và công bội $q = -2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

- A. 5. B. 6. C. 7. D. 8.

Câu 26. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -1$ và công bội $q = -\frac{1}{10}$. Số $\frac{1}{10^{103}}$ là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

- A. Số hạng thứ 103. B. Số hạng thứ 104.
 C. Số hạng thứ 105. D. Không là số hạng của cấp số đã cho.

Câu 27. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và công bội $q = -\frac{1}{2}$. Số 222 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân đã cho?

- A. Số hạng thứ 9. B. Số hạng thứ 10.
 C. Số hạng thứ 11. D. Không là số hạng của cấp số đã cho.

Câu 28. Một cấp số nhân có công bội bằng 3 và số hạng đầu bằng 5. Biết số hạng chính giữa là 32805. Hỏi cấp số nhân đã cho có bao nhiêu số hạng?

- A. 9. B. 17. C. 18. D. 19.

Câu 29. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 \neq 0$ và công bội $q \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $u_k = u_1 \cdot q^k$. B. $u_k = u_1 \cdot q^{k-1}$. C. $u_k = \sqrt{u_{k-1} \cdot u_{k+1}}$. D. $u_k = \sqrt{u_{k+1} \cdot u_{k+2}}$.

Câu 30. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 \neq 0$ và công bội $q \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $u_7 = u_4 \cdot q^3$. B. $u_7 = u_4 \cdot q^4$. C. $u_7 = u_4 \cdot q^7$. D. $u_7 = u_4 \cdot q^{11}$.

Câu 31. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 \neq 0$ và công bội $q \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $u_1 \cdot u_{15} = u_2 \cdot u_{14}$. B. $u_1 \cdot u_{15} = u_5 \cdot u_{11}$. C. $u_1 \cdot u_{15} = u_6 \cdot u_9$. D. $u_1 \cdot u_{15} = u_{12} \cdot u_4$.

Câu 32. Cho các cấp số nhân với $u_1 = -\frac{1}{2}$; $u_7 = -32$. Công bội của cấp số nhân là

- A. $\pm \frac{1}{2}$. B. ± 4 . C. ± 2 . D. ± 1 .

Câu 33. Cấp số nhân (u_n) có $u_n = \frac{3}{5} \cdot 2^n$. Số hạng đầu tiên và công bội của cấp số nhân là

- A. $u_1 = \frac{6}{5}, q = 3$. B. $u_1 = \frac{6}{5}, q = -2$. C. $u_1 = \frac{6}{5}, q = 2$. D. $u_1 = \frac{6}{5}, q = 5$.

Câu 34. Cho cấp số nhân có $u_1 = -1, u_6 = 0,00001$. Khi đó công bội q và số hạng tổng quát u_n là

A. $q = \frac{1}{10}, u_n = \frac{-1}{10^{n-1}}$.

B. $q = \frac{-1}{10}, u_n = -10^{n-1}$.

C. $q = \frac{-1}{10}, u_n = \frac{1}{10^{n-1}}$.

D. $q = \frac{-1}{10}, u_n = \frac{(-1)^n}{10^{n-1}}$.

Câu 35. Cho cấp số nhân $-2; 4; -8; \dots$. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân là

A. $\frac{-2[1 - (-2)^n]}{1 - (-2)}$.

B. $\frac{-2[1 - (2)^n]}{1 - 2}$.

C. $\frac{-2[1 - (-2)^{2n}]}{1 - (-2)}$.

D. $\frac{-2[1 - (2)^{2n}]}{1 - 2}$.

Câu 36. Cho cấp số nhân biết $u_1 = 1; q = 2$. Số hạng thứ 11 là

A. 20.

B. 1024.

C. 22.

D. 2008.

Câu 37. Nếu cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và công bội $q = 3$ thì giá trị u_7 là

A. 3^6 .

B. 3^7 .

C. 21.

D. 3^8 .

Câu 38. Cấp số nhân (u_n) có $u_n = \frac{3}{5} \cdot 2^n$. Số hạng đầu tiên và công bội q là

A. $u_1 = \frac{6}{5}, q = 3$.

B. $u_1 = \frac{6}{5}, q = -2$.

C. $u_1 = \frac{6}{5}, q = 2$.

D. $u_1 = \frac{6}{5}, q = 5$.

Câu 39. Cho cấp số nhân có $u_2 = \frac{1}{4}, u_5 = 16$. Công bội và số hạng đầu tiên của cấp số nhân là

A. $q = \frac{1}{2}; u_1 = \frac{1}{2}, \dots$

B. $q = -\frac{1}{2}; u_1 = -\frac{1}{2}, \dots$

C. $q = 4; u_1 = \frac{1}{16}, \dots$

D. $q = -4; u_1 = -\frac{1}{16}, \dots$

Câu 40. Tổng 10 số hạng đầu của một cấp số nhân có $u_1 = 4, u_{10} = 2048$ là

A. $S_{10} = 8184$.

B. $S_{10} = 4092$.

C. $S_{10} = 12276$.

D. $S_{10} = 6138$.

Câu 41. Cho cấp số nhân với $u_1 = 4, q = -4$. Ba số tiếp theo của cấp số nhân là

A. $-16; 64; -256$.

B. $-16; -64; -256$.

C. $16; 64; 256$.

D. $-16; 64; 256$.

Câu 42. Cho $S = 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^n$. Khẳng định nào sau đây đúng với mọi n nguyên dương?

A. $S = 3(2^n - 1)$.

B. $S = 3(2^{n+1} + 1)$.

C. $S = 3(2^{n+1} - 1)$.

D. $S = 3(2^{n-1} - 1)$.

Câu 43. Cho một cấp số nhân biết $u_1 = 3, q = 2$. Tổng của 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân là

A. $3 \cdot (1 - 2^9)$.

B. $3 \cdot (1 - 2^{10})$.

C. $-3 \cdot (2^9 - 1)$.

D. $3 \cdot (2^{10} - 1)$.

Câu 44. Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_{2017} = 1, u_{2020} = 1000$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng

A. $\frac{10^{10} - 1}{9 \cdot 10^{2016}}$.

B. $\frac{9^{10} - 1}{8 \cdot 9^{2016}}$.

C. $\frac{1 - 10^{10}}{9 \cdot 10^{2016}}$.

D. $\frac{10^{10} - 1}{9 \cdot 10^{2019}}$.

Câu 45. Tổng $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}$ bằng

A. $1 - 2^{100}$.

B. $2^{100} - 1$.

C. $1 - 2^{101}$.

D. $2^{101} - 1$.

Câu 46. Cấp số nhân $5; 10; \dots; 1280$ có bao nhiêu số hạng?

A. 9.

B. 7.

C. 8.

D. 10.

Câu 47. Số hạng thứ 5 của cấp số nhân $2; 6; \dots$ là

A. 48.

B. 486.

C. 81.

D. 162.

Câu 48. Dãy số có số hạng tổng quát $u_n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$ là một cấp số nhân có công bội q bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. $\frac{1}{9}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Câu 49. Tổng $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \dots$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2}{9}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 50. Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với $u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$. Tổng của cấp số nhân đó là

- A. $\frac{1}{6}$. B. $-\frac{1}{4}$. C. $-\frac{1}{12}$. D. $\frac{1}{12}$.

Câu 51. Tổng $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ có giá trị

- A. 1. B. 2. C. 4. D. $+\infty$.

Câu 52. Cho cấp số nhân (u_n) biết $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 31 \\ u_1 + u_3 = 26 \end{cases}$. Giá trị u_1 và q là

- A. $u_1 = 2; q = 5$ hoặc $u_1 = 25; q = \frac{1}{5}$. B. $u_1 = 5; q = 1$ hoặc $u_1 = 25; q = \frac{1}{5}$.
 C. $u_1 = 25; q = 5$ hoặc $u_1 = 1; q = \frac{1}{5}$. D. $u_1 = 1; q = 5$ hoặc $u_1 = 25; q = \frac{1}{5}$.

Câu 53. Cấp số nhân (u_n) có $u_n = \frac{6}{5} \cdot 2^n$. Số hạng đầu tiên và công bội q là

- A. $u_1 = \frac{6}{5}, q = 2$. B. $u_1 = \frac{6}{5}, q = -2$. C. $u_1 = \frac{12}{5}, q = 2$. D. $u_1 = \frac{12}{5}, q = 5$.

Câu 54. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = -2$ và $u_5 = 54$. Khi đó tổng 1000 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng

- A. $\frac{1 - 3^{1000}}{4}$. B. $\frac{3^{1000} - 1}{2}$. C. $\frac{3^{1000} - 1}{6}$. D. $\frac{3^{1000} - 1}{3}$.

Câu 55. Số hạng đầu và công bội của cấp số nhân thỏa mãn $\begin{cases} u_5 + u_2 = 36 \\ u_6 - u_4 = 48 \end{cases}$ là

- A. $u_1 = 4, q = 4$. B. $u_1 = 2, q = 4$. C. $u_1 = 2, q = 2$. D. $u_1 = 4, q = 2$.

Câu 56. Tổng $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$ là một số chia hết cho

- A. 21. B. 41. C. 51. D. 31.

Câu 57. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_3 = 24$ và $u_4 = 48$. Tổng năm số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng

- A. 168. B. 186. C. -186. D. 196.

Câu 58. Cho cấp số nhân với $u_1 = 3, q = -\frac{1}{2}$. Số 222 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

- A. Số hạng thứ 11. B. Số hạng thứ 9.
 C. Số hạng thứ 12. D. Không thuộc cấp số nhân.

Câu 59. Cho cấp số nhân có $\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases}$. Số hạng đầu tiên u_1 và công bội q của cấp số nhân là

- A. $u_1 = 9$ và $q = 2$. B. $u_1 = 9$ và $q = -2$. C. $u_1 = -9$ và $q = 2$. D. $u_1 = -9$ và $q = 2$.

Câu 60. Cho cấp số nhân có $\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases}$. Giá trị u_1 và q của cấp số nhân là

- A. $u_1 = 9$ và $q = 2$. B. $u_1 = 9$ và $q = -2$.
 C. $u_1 = -9$ và $q = 2$. D. $u_1 = -9$ và $q = -2$.

Câu 61. Cho cấp số nhân có $u_1 = 3; q = -2$. Số 192 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân?

- A. Số hạng thứ 5. B. Số hạng thứ 6. C. Số hạng thứ 7. D. Số hạng thứ 8.

Câu 62. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội $q > 1$ và $\begin{cases} u_1 + u_3 = 3 \\ u_1^2 - u_3^2 = 5 \end{cases}$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân là

- A. $S_{10} = \frac{31(2 + \sqrt{2})}{16}$. B. $S_{10} = 31(1 - \sqrt{2})$.
 C. $S_{10} = 31(\sqrt{2} + 1)$. D. $S_{10} = 31(\sqrt{2} - 1)$.

Câu 63. Cho cấp số nhân (u_n) có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = \frac{3^n - 1}{3^{n-1}}$. Số hạng thứ 5 của cấp số nhân là

- A. $u_5 = \frac{2}{3^4}$. B. $u_5 = \frac{1}{3^5}$. C. $u_5 = 3^5$. D. $u_5 = \frac{5}{3^5}$.

Câu 64. Cho cấp số nhân có $u_1 = -1; u_6 = 0,00001$. Khi đó công bội q và số hạng tổng quát là

- A. $q = \frac{1}{10}, u_n = \frac{-1}{10^{n-1}}$. B. $q = -\frac{1}{10}, u_n = -10^{n-1}$.
 C. $q = -\frac{1}{10}, u_n = \frac{1}{10^{n-1}}$. D. $q = -\frac{1}{10}, u_n = \frac{(-1)^n}{10^{n-1}}$.

Câu 65. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} \cdot u_n$. Giá trị tổng $S = u_1 + \frac{u_2}{2} + \frac{u_3}{3} + \dots + \frac{u_{10}}{10}$ là

- A. $\frac{3280}{6561}$. B. $\frac{29524}{59049}$. C. $\frac{25942}{59049}$. D. $\frac{1}{243}$.

Câu 66. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_n = 24; \frac{u_4}{u_{11}} = 16384$. Số hạng thứ 17 của cấp số nhân là

- A. $\frac{3}{67108864}$. B. $\frac{3}{268435456}$. C. $\frac{3}{536870912}$. D. $\frac{3}{214783648}$.

Câu 67. Các số $x + 6y, 5x + 2y, 8x + y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng; đồng thời các số $x - 1, y + 2, x - 3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Tính $x^2 + y^2$

- A. $x^2 + y^2 = 10$. B. $x^2 + y^2 = 25$. C. $x^2 + y^2 = 40$. D. $x^2 + y^2 = 100$.

Câu 68. Cho ba số a, b, c theo thứ tự đó tạo thành cấp số nhân với công bội khác 1. Biết cũng theo thứ tự đó chúng lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng với công sai là $d \neq 0$. Tỉ số $\frac{a}{d}$ bằng

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{4}{9}$. C. 3. D. 9.

Câu 69. Ba số phân biệt có tổng là 217 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một cấp số nhân; cũng có thể coi là số hạng thứ 2, thứ 9, thứ 44 của một cấp số cộng. Hỏi phải lấy bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng này để tổng của chúng bằng 820?

- A. 17. B. 20. C. 21. D. 42.

Câu 70. Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân với công bội q khác 1; đồng thời các số $x, 2y, 3z$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng với công sai khác 0. Tìm giá trị của q

- A. $q = -3$. B. $q = -\frac{1}{3}$. C. $q = \frac{1}{3}$. D. $q = \frac{1}{9}$.

Câu 71. Cho dãy số (u_n) có tổng của n số hạng đầu tiên là $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(3n-7)}{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. (u_n) là cấp số nhân có $q = 3$.
 B. (u_n) là cấp số nhân có $q = -5$.
 C. (u_n) là cấp số cộng có $d = 3$.
 D. (u_n) là cấp số cộng có $d = -5$.

Câu 72. Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là $12288m^2$). Diện tích mặt trên cùng (của tầng thứ 11) có giá trị nào sau đây?

- A. $6m^2$.
 B. $8m^2$.
 C. $10m^2$.
 D. $12m^2$.

Câu 73. Một du khách vào trường đua ngựa đặt cược. Lần đầu đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách trên thắng hay thua bao nhiêu tiền?

- A. Hòa vốn.
 B. Thua 20000 đồng.
 C. Thắng 20000 đồng.
 D. Thua 40000 đồng.

Câu 74. Tế bào E.Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Nếu có 10^5 tế bào thì sau 2 giờ sẽ phân chia được thành bao nhiêu tế bào?

- A. 2^6 tế bào.
 B. $2^5 \cdot 10^5$ tế bào.
 C. $2^6 \cdot 10^5$ tế bào.
 D. $2^7 \cdot 10^5$ tế bào.

Câu 75. Một loại vi khuẩn sau mỗi phút số lượng tăng gấp đôi, biết rằng sau 5 phút người ta đếm được có 64000 con. Hỏi sau bao nhiêu phút thì có được 2048000 con?

- A. 9.
 B. 10.
 C. 11.
 D. 12.

Câu 76. Một quả bóng siêu nảy rơi từ độ cao 30 mét so với mặt đất. Khi chạm đất nó nảy lên cao với độ cao bằng $\frac{2}{3}$ lần so với độ cao của lần rơi ngay trước đó. Hỏi ở lần nảy lên thứ 11 quả bóng đạt độ cao tối đa bao nhiêu mét so với mặt đất (kết quả làm tròn 2 chữ số sau dấu phẩy)?

- A. 0,23 m.
 B. 0,33 m.
 C. 0,35m.
 D. 0,52 m.

Câu 77. Một cửa hàng ngày đầu chỉ bán được 5 sản phẩm, nhưng do quảng cáo hiệu quả và chất lượng sản phẩm tốt nên những ngày sau số lượng sản phẩm bán ra đều tăng gấp đôi so với ngày trước đó. Số ngày ít nhất để cửa hàng đó bán hết 1200 sản phẩm là?

- A. 7.
 B. 8.
 C. 9.
 D. 10.

Câu 78. Cho đoạn thẳng $AB = 2^{100}(\text{cm})$. Gọi M_1 là trung điểm của AB Gọi M_{k+1} là trung điểm của $M_k B$ (với $k = 1; 2; \dots; 99$). Tính độ dài đoạn thẳng $M_1 M_{100}$

- A. $1(\text{cm})$.
 B. $2^{98} - 1(\text{cm})$.
 C. $2^{99} - 1(\text{cm})$.
 D. $2^{100} - 1(\text{cm})$.

Câu 79. Cho dãy hình vuông $H_1; H_2; \dots; H_n; \dots$. Với mỗi số nguyên dương n , gọi u_n , P_n và S_n lần lượt là độ dài cạnh, chu vi và diện tích của hình vuông H_n . Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai khác 0 thì (P_n) cũng là cấp số cộng.
 B. Nếu (u_n) là cấp số cộng với công sai khác 0 thì (S_n) cũng là cấp số cộng.
 C. Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội dương thì (P_n) cũng là cấp số nhân.
 D. Nếu (u_n) là cấp số nhân với công bội dương thì (S_n) cũng là cấp số nhân.

Câu 80. Một hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB = a$, diện tích S_1 . Nối bốn trung điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự của bốn cạnh AB, BC, CD, DA ta được hình vuông thứ hai là $A_1 B_1 C_1 D_1$ có diện tích S_2 . Tiếp tục như thế ta được hình vuông thứ ba là $A_2 B_2 C_2 D_2$ có diện tích $S_3, \dots$ và cứ tiếp tục làm như vậy ta được các hình vuông lần lượt có diện tích $S_4, S_5, \dots, S_{10}$. Tổng $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{10}$ bằng

- A. $2a^2$.
 B. $2a^2 \left(1 - \frac{1}{2^9}\right)$.
 C. $2a^2 \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right)$.
 D. $2a^2 \left(\frac{1}{2^{10}} - 1\right)$.

Câu 81. Cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 1. Gọi $A_{k+1}, B_{k+1}, C_{k+1}, D_{k+1}$ thứ tự là trung điểm các cạnh $A_kB_k, B_kC_k, C_kD_k, D_kA_k$ (với $k = 1; 2; \dots$). Chu vi của hình vuông $A_{2021}B_{2021}C_{2021}D_{2021}$ bằng

- A. $\frac{1}{2^{1008}}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2^{1008}}$. C. $\frac{1}{2^{1010}}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2^{1010}}$.

Câu 82. Cho cấp số nhân (u_n) với số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội $q = 2$ và cấp số cộng (v_n) có số hạng đầu $v_1 = 2$, công sai $d = 2$. Hỏi có tất cả bao nhiêu số có mặt đồng thời trong 1000 số hạng đầu tiên của cả hai cấp số cộng nói trên?

- A. 9. B. 10. C. 11. D. 12.

Câu 83. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tổng $S_{2021} = u_1 + u_2 + \dots + u_{2021}$ bằng

- A. $2021 - \frac{1}{2^{2021}}$. B. $2021 + \frac{1}{2^{2021}}$. C. $2022 - \frac{1}{2^{2021}}$. D. $2022 + \frac{1}{2^{2021}}$.

Câu 84. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 49 \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{1}{u_5} \right) \\ u_1 + u_3 = 35 \end{cases}$$

Tính $P = u_1 + 4q^2$

- A. $P = 24$. B. $P = 29$. C. $P = 34$. D. $P = 39$.

Câu 85. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$
. Dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n + 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Dãy (v_n) là cấp số cộng với công sai $d = 3$. B. Dãy (v_n) là cấp số cộng với công sai $d = 4$.
 C. Dãy (v_n) là cấp số nhân với công bội $q = 4$. D. Dãy (v_n) là cấp số nhân với công bội $q = 9$.

Câu 86. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 3u_n - 6, \forall n \geq 1 \end{cases}$$
. Tìm u_{2021}

- A. $u_{2021} = 3^{2020} - 3$. B. $u_{2021} = 3^{2020} + 3$. C. $u_{2021} = 3^{2021} - 3$. D. $u_{2021} = 3^{2021} + 3$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. B	4. B	5. D	6. D	7. A	8. B	9. C	10. B
11. C	12. C	13. B	14. B	15. D	16. D	17. B	18. B	19. C	20. B
21. D	22. C	23. B	24. C	25. C	26. B	27. D	28. B	29. B	30. A
31. C	32. C	33. C	34. D	35. A	36. B	37. B	38. C	39. C	40. B
41. A	42. C	43. D	44. A	45. D	46. A	47. D	48. D	49. C	50. D
51. B	52. D	53. C	54. D	55. C	56. D	57. B	58. D	59. A	60. A
61. C	62. C	63. A	64. D	65. C	66. C	67. C	68. D	69. B	70. C
71. C	72. A	74. C	75. B	76. C	77. B	78. C	79. B	80. C	81. A
82. C	83. C	84. B	85. C	86. B					

GIỚI HẠN DÃY SỐ

A

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa giới hạn hữu hạn của dãy số

- ☑ Ta nói dãy số (u_n) **có giới hạn là 0** khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$.

- ☑ Ta nói dãy số (v_n) **có giới hạn là a** khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - a) = 0$.

Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$ hay $v_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$.

2. Định nghĩa giới hạn vô cực của dãy số

- ☑ Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

- ☑ Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $\lim (-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

3. Một số giới hạn đặc biệt và định lí về giới hạn dãy số.

GIỚI HẠN HỮU HẠN	GIỚI HẠN VÔ CỰC
1. Giới hạn đặc biệt $\lim \frac{1}{n^k} = 0, \quad (k \in \mathbb{N}^*).$ $\lim q^n = 0, \quad (q < 1).$ $\lim C = C, \quad (C \in \mathbb{R}).$	1. Giới hạn đặc biệt $\lim n^k = +\infty, \quad (k \in \mathbb{N}^*).$ $\lim q^n = +\infty, \quad (q > 1).$

2. Định lý Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

- $\lim(u_n \pm v_n) = a \pm b$.
- $\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b$.
- $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}, \quad (b \neq 0)$.
- Nếu $u_n \geq 0, \forall n$
và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

2. Định lý

- Nếu $\begin{cases} \lim u_n = a \\ \lim v_n = \pm\infty \end{cases} \Rightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.
- Nếu $\begin{cases} \lim u_n = a > 0 \\ \lim v_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.
- Nếu $\begin{cases} \lim u_n = a < 0 \\ \lim v_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim \frac{u_n}{v_n} = -\infty$.

Định lý 1.1

Cho ba dãy số $(u_n), (v_n), (w_n)$. Nếu $u_n \leq v_n \leq w_n, \forall n$ và $\lim u_n = \lim w_n = a, (a \in \mathbb{R})$ thì $\lim v_n = a$.

Định nghĩa 1.1. Cấp số nhân (u_n) có công bội q , với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Khi đó $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \lim S_n = \frac{u_1}{1 - q} = S$.

B

BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1

Dùng định nghĩa chứng minh giới hạn

Để chứng minh $\lim u_n = L$ ta chứng minh $\lim (u_n - L) = 0$.

Bài 1. Chứng minh rằng

a. $\lim \frac{2n^2 + n}{n^2 + 4} = 2$

b. $\lim \frac{6n + 2}{n + 5} = 6$

c. $\lim \frac{7^n - 2 \cdot 8^n}{8^n + 3^n} = -2$

d. $\lim \frac{2 \cdot 3^n + 5^n}{5^n + 3^n} = 1$.

Bài 2. Chứng minh rằng

a. $\lim (\sqrt{4n^2 + 4n} - 2n) = 1$

b. $\lim \frac{\sqrt{n^2 + 2n} - n}{n} = 0$

DẠNG 2

Tìm Giới Hạn Của Dãy Số Có Giới Hạn Hữu Hạn

Bài 3. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{n+1}{n^2-2};$

b) $\lim \frac{n(n+1)}{(n+4)^3};$

c) $\lim \frac{2n^2-3n-1}{-n^2+2};$

d) $\lim \frac{2n^3}{n^4+3n^2+1};$

e) $\lim \frac{n^2-4n^3}{2n^3+5n-2};$

f) $\lim \frac{n+2}{n^2+n+1};$

g) $\lim \frac{3n^2+n-5}{2n^2+1};$

h) $\lim \frac{6n^3-2n+1}{5n^3-n(n^2+n-1)};$

Bài 4. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{7 \cdot 5^n - 2 \cdot 7^n}{5^n - 5 \cdot 7^n};$

b) $\lim \frac{3^n - 4^n + 5^n}{3^n + 4^n - 5^n};$

c) $\lim \frac{1+3^n}{4+3^n};$

d) $\lim \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 7^n};$

e) $\lim \frac{4^{n+1} + 6^{n+2}}{5^n + 8^n};$

f) $\lim \frac{5 \cdot 2^n - 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}};$

g) $\lim \frac{7 \cdot 2^n + 4^n}{2 \cdot 3^n + 4^n};$

h) $\lim \frac{4 + 2^n + 3^{n+2}}{(-2)^{n+1} + 5 \cdot 3^n};$

i) $\lim \frac{1 - 3^n + 4 \cdot 5^{n+2}}{2^{n+1} + 3^{n+2} + 5^{n+1}};$

j) $\lim \frac{4^{n+2} + 6^{n+1}}{5^{n-1} + 2 \cdot 6^{n+3}};$

k) $\lim \frac{(-3)^n - 4 \cdot 5^{n+1}}{2 \cdot 4^n + 3 \cdot 5^n};$

l) $\lim \frac{2^n + (-5)^n}{2 \cdot 3^n + 3 \cdot (-5)^n};$

m) $\lim \frac{(-1)^n \cdot 2^{5n+1}}{3^{5n+2}};$

n) $\lim \frac{2^n - 3^n + 5^{n+2}}{2^{n+1} + 3^{n+2} + 5^{n+1}};$

o) $\lim \frac{2^n - 3^{n-2} + 3 \cdot 5^{n+2}}{2^{n-1} + 3^{n+2} + 5^{n+1}}.$

Bài 5. Tính các giới hạn sau:

a) $L = \lim \frac{(2n^2 - n)^5 \cdot (4n - 1)^4}{20n^6 \cdot (2n^2 - n + 1)^4};$

b) $L = \lim \frac{(2n^4 + 1)^2 \cdot (n + 2)^9}{n^{17} + 1};$

Bài 6. Tìm giới hạn:

a) $\lim (\sqrt{4n^2 + 5n} - 2n).$

b) $\lim (3n - \sqrt{9n^2 + 1}).$

c) $\lim (n - \sqrt{n^2 + 2n - 3}).$

d) $\lim (\sqrt{n^2 + 2n - 1} - n + 1).$

e) $\lim (3n - 5 - \sqrt{9n^2 + 1}).$

f) $\lim (\sqrt[3]{n^3 - 2n} - n).$

g) $\lim (n^2 + 2019 - \sqrt{n^4 + 3n + 1}).$

h) $\lim [n (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 2})].$

Bài 7. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 2}).$

b) $\lim \frac{\sqrt{3n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}}{n}.$

c) $\lim (\sqrt[3]{n^3 - 2n^2} - n).$

d) $\lim (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}).$

Bài 8. Tìm giới hạn:

a) $\lim \frac{\sqrt{4n^2 + 2n} - n + 1}{\sqrt{9n^2 + n} - 2n};$

b) $\lim \frac{\sqrt{4n^2 - n + 1} - n}{\sqrt{9n^2 + 3n}}.$

Bài 9. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2};$

b) $\lim \frac{1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n + 1)}{3n^2 + 4};$

c) $\lim \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{3n^2 + 1};$

d) $\lim \frac{n\sqrt{2 + 4 + \dots + 2n}}{3n^2 + n - 2};$

e) $\lim \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 3n};$

f) $\lim \frac{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)}{n^2 + 3n + 1}.$

Bài 10. Tính giới hạn của

a) $L = \lim \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n + 1)} \right].$

b) $A = \lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} \right].$

c) $B = \lim \left[\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n + 1)\sqrt{n} + n\sqrt{n + 1}} \right].$

Bài 11. Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim \frac{u_n}{5n + 2020}.$

DẠNG
3

Dãy số có giới hạn vô hạn

Bài 12. Tính các giới hạn sau:

a) $L = \lim \frac{n^3 - 5n + 3}{3n^2 + n - 1};$

b) $L = \lim \frac{5n^4 - n^3 + 5n^2 + 3}{n^2 - 3n^3 - 1};$ c) $L = \lim \frac{3n^5 - 2n^4 + 2n + 7}{-6n^4 + 2n^3 + n^2 - 1}.$

Bài 13. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim (n^3 + n^2 + n + 1).$

b) $\lim (-n^2 + n\sqrt{n} - 1).$

c) $\lim \frac{n^5 + n^4 - n - 2}{4n^3 + 6n^2 + 9}.$

d) $\lim (-n^4 - 50n + 11).$

Bài 14. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim (2^n + 3^n);$

f) $\lim \left(\frac{7^n + 1}{-2 \cdot 3^n - 3 \cdot 6^n} \right).$

b) $\lim [-4^n + (-2)^n].$

g) $\lim \frac{2^{n+1} - 2.5^n + 3}{3.2^n + 7.4^n}.$

c) $\lim (3.2^n - 5^{n+1} + 10).$

h) $\lim \frac{3^n - 4^{n+1}}{2^{n+3} + 3^n}.$

d) $\lim (2 \cdot 3^n - 4^{n+1} + 7).$

i) $\lim \sqrt{2^n - n + 1}.$

e) $\lim \frac{3^n - 11}{1 + 7.2^n}$

j) $\lim (4^n + 2.3^n - 3.2^n - 1).$

Bài 15. Tính giới hạn của các dãy số sau:

a) $u_n = \sqrt{n^2 + 1}, n \in \mathbb{N}^*;$

b) $v_n = \sqrt{\frac{n^2 + 2n + 4}{2n - 3}}, n \geq 2.$

Bài 16. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim(\sqrt{2n^2 + 3n + 5} - n);$

b) $\lim(\sqrt{n^3 + 2n} - n^2);$

c) $\lim(n + \sqrt{n^2 - n + 1});$

d) $\lim(\sqrt[3]{1 + 2n - n^3} - n);$

e) $\lim(\sqrt{n^2 + 3n - 1} - \sqrt{n + 1});$

f) $\lim(\sqrt{n + 3} - \sqrt{n - 5})n;$

g) $\lim \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n+3}};$

h) $\lim(\sqrt{9n^2 + 2n - 1} - \sqrt{4n^2 + 1}).$

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số không đổi (u_n) với $u_n = a$, có giới hạn là 0.

B. $\lim \frac{1}{n} > 0$.

C. $\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \lim |u_n - a| = a$ (với a là hằng số).

D. $\lim q^n = 0 (|q| > 1)$.

Câu 2. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\lim u_n = c$ ($u_n = c$ là hằng số).

B. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{c}{n} = 0$ (c là hằng số).

C. $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$, với $|q| < 1$.

D. $\lim \frac{1}{n^k} = 0, \forall k$.

Câu 3. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu $\lim u_n = 0$ thì $\lim |u_n| = 0$.

B. Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim u_n = -\infty$.

C. Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim u_n = +\infty$.

D. Nếu $\lim u_n = -a$ thì $\lim |u_n| = a$.

Câu 4. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu $|u_n| \leq v_n (\forall n)$ và $\lim v_n = 0$ thì có $\lim u_n = 0$.

B. Nếu $|u_n| \geq v_n (\forall n)$ và $\lim v_n = 0$ thì có $\lim u_n = 0$.

C. Nếu $|u_n| > v_n (\forall n)$ và $\lim v_n = 0$ thì có $\lim u_n = 0$.

D. Nếu $|u_n| < v_n (\forall n)$ và $\lim v_n = a$ (a là hằng số) thì có $\lim u_n = 0$.

Câu 5. Nếu $\lim u_n = L$ (với $u_n \geq -9, \forall n \in \mathbb{N}^*$) thì $\lim \sqrt{u_n + 9}$ có giá trị là

A. $\sqrt{L} + 3$.

B. $\sqrt{L + 9}$.

C. $L + 3$.

D. $L + 9$.

Câu 6. Tính giới hạn $\lim \frac{\sin 2021n}{n}$?

A. 0.

B. 1.

C. 2021.

D. $+\infty$.

Câu 7. Tính giới hạn $\lim \left(-\frac{n \cos 2n}{n^2 + 1} \right)$?

A. $-\infty$.

B. -2.

C. 0.

D. 2.

Câu 8. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2 \sin(2020n + 1)}{\sqrt{n} - 2021}$. Tính $\lim u_n$

A. $\lim u_n = 0$.

B. $\lim u_n = 2$.

C. $\lim u_n = 4040$.

D. $\lim u_n = +\infty$.

Câu 9. Tính giới hạn $\lim \sqrt[3]{\frac{8n + \cos(n\pi)}{n}}$?

A. 8.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 10. Tính giới hạn $\lim \left(\frac{\sin^2 n}{n^2 + 2} - 2 \right)$?

- A. -2. B. -1. C. 0. D. 1.

Câu 11. Tính giới hạn $\lim \frac{\sin(n!)}{n^2 + 1}$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. $+\infty$.

Câu 12. Tính giới hạn $\lim \frac{3 \sin n + 4 \cos n}{n + 1}$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 13. Tính giới hạn $\lim \left(4 + \frac{(-1)^n}{n + 1} \right)$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 14. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$ và $v_n = \frac{1}{n^2 + 2}$. Khi đó $\lim(u_n + v_n)$ có giá trị bằng

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 15. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \frac{(-1)^n \sin n^2 + \cos n}{n^2 + n}$. Giới hạn của dãy số đã cho bằng

- A. -1. B. 0. C. 1. D. $+\infty$.

Câu 16. $\lim \frac{1}{2n + 5}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. 0. C. $+\infty$. D. $\frac{1}{5}$.

Câu 17. Tìm $I = \lim \frac{7n^2 - 2n^3 + 1}{3n^3 + 2n^2 + 1}$

- A. $\frac{7}{3}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. 0. D. 1.

Câu 18. $\lim \frac{2n^2 - 3}{n^6 + 5n^5}$ bằng:

- A. 2. B. 0. C. $-\frac{3}{5}$. D. -3.

Câu 19. $\lim \frac{2018}{n}$ bằng

- A. $-\infty$. B. 0. C. 1. D. $+\infty$.

Câu 20. Tính giới hạn $L = \lim \frac{2n + 1}{2 + n - n^2}$?

- A. $L = -\infty$. B. $L = -2$. C. $L = 1$. D. $L = 0$.

Câu 21. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng 0?

- A. $u_n = \frac{n^2 - 2}{5n + 3n^2}$. B. $u_n = \frac{n^2 - 2n}{5n + 3n^2}$. C. $u_n = \frac{1 - 2n}{5n + 3n^2}$. D. $u_n = \frac{1 - 2n^2}{5n + 3n^2}$.

Câu 22. Tính $I = \lim \frac{2n - 3}{2n^2 + 3n + 1}$

- A. $I = -\infty$. B. $I = 0$. C. $I = +\infty$. D. $I = 1$.

Câu 23. Giá trị của $\lim \frac{2 - n}{n + 1}$ bằng

- A. 1. B. 2. C. -1. D. 0.

Câu 24. Kết quả của $\lim \frac{n - 2}{3n + 1}$ bằng:

- A. $\frac{1}{3}$. B. $-\frac{1}{3}$. C. -2. D. 1.

- Câu 25.** Tìm giới hạn $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{n+3}$.
- A. $I = -\frac{2}{3}$. B. $I = 1$. C. $I = 3$. D. $k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 26.** Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n}{3n+1}$ bằng?
- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. 1. D. $-\frac{2}{3}$.
- Câu 27.** Tính giới hạn $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2017}{3n+2018}$.
- A. $I = \frac{2}{3}$. B. $I = \frac{3}{2}$. C. $I = \frac{2017}{2018}$. D. $I = 1$.
- Câu 28.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+19n}{18n+19}$ bằng
- A. $\frac{19}{18}$. B. $\frac{1}{18}$. C. $+\infty$. D. $\frac{1}{19}$.
- Câu 29.** Dãy số nào sau đây có giới hạn khác 0?
- A. $\frac{1}{n}$. B. $\frac{1}{\sqrt{n}}$. C. $\frac{n+1}{n}$. D. $\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$.
- Câu 30.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2}{2n^2+1}$ bằng
- A. 0. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $-\frac{1}{2}$.
- Câu 31.** Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2018}{2n+1}$.
- A. $\frac{1}{2}$. B. 4. C. 2. D. 2018.
- Câu 32.** Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^5-2n^3+1}{4n^5+2n^2+1}$.
- A. 2. B. 8. C. 1. D. 4.
- Câu 33.** Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{1+n}$ được kết quả là
- A. 2. B. 0. C. $\frac{1}{2}$. D. 1.
- Câu 34.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^4-2n+2}{4n^4+2n+5}$ bằng
- A. $\frac{2}{11}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $+\infty$. D. 0.
- Câu 35.** Giá trị $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{12n^2+1}$ bằng
- A. $\frac{1}{12}$. B. 0. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{1}{24}$.
- Câu 36.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{4n^2-2n+1}$ có kết quả nào sau đây?
- A. $-\infty$. B. -1. C. $-\frac{3}{4}$. D. 0.
- Câu 37.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1}$ có kết quả nào sau đây?
- A. $+\infty$. B. 0. C. $\frac{2}{7}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 38. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} + 1}{n^2 + 2}$ có kết quả nào sau đây?

A. 0.

B. 1.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 2.

Câu 39. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} - 4}{\sqrt{n+1} + n}$ có kết quả nào sau đây?

A. -1.

B. 0.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1.

Câu 40. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}}$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. 0.

D. 1.

Câu 41. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{an+4}{5n+3}$ trong đó a là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2 Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a = 10$.

B. $a = 8$.

C. $a = 6$.

D. $a = 4$.

Câu 42. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+b}{5n+3}$ trong đó b là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. b là một số thực tùy ý.

B. $b = 2$.

C. Không tồn tại b thỏa bài toán.

D. $b = 5$.

Câu 43. Gọi S là tập hợp các tham số nguyên a thỏa mãn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{n+2} + a^2 - 4a \right) = 0$ Tổng các phần tử của S bằng

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Câu 44. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{4n^2+n+2}{an^2+5}$ Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2 Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a = -4$.

B. $a = 4$.

C. $a = 2$.

D. $a = 3$.

Câu 45. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n^3}{2n^3 + 5n - 2}$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\frac{3}{2}$.

B. 0.

C. $\frac{1}{5}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 46. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n\sqrt{n}+1)(\sqrt{n}+3)}{(n+1)(n+2)}$ có kết quả nào sau đây?

A. 0.

B. 2.

C. 6.

D. $+\infty$.

Câu 47. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)}$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\frac{3}{2}$.

B. 1.

C. 3.

D. $+\infty$.

Câu 48. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+2n)(2n^3+1)(4n+5)}{(n^4-3n-1)(3n^2-7)}$ có kết quả nào sau đây?

A. 0.

B. 1.

C. $\frac{8}{3}$.

D. $+\infty$.

Câu 49. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2-n} - \sqrt{n+2}}{3n-2}$ có kết quả nào sau đây?

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. $+\infty$.

Câu 50. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2+2n+1}{\sqrt{3n^4+2}}$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\frac{2}{3}$.

B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 51. $\lim \left(\frac{\sqrt{3n} + (-1)^n \cos 3n}{\sqrt{n} - 1} \right)$ có kết quả nào sau đây?

A. -1 . B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\sqrt{5}$.

Câu 52. $\lim \frac{n^3 - 2n}{1 - 3n^2}$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. $-\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 53. Cho các tham số a, b thỏa $\lim \frac{an^2 + 3n}{bn + 4} = \frac{4}{3}$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $b < 0$. B. $0 < b < 1$. C. $1 < b < 2$. D. $b > 2$.

Câu 54. Giới hạn nào sau đây bằng 0?

A. $\lim \frac{3 + 2n^3}{2n^2 - 1}$. B. $\lim \frac{2n^2 - 3}{-2n^3 - 4}$. C. $\lim \frac{2n - 3n^3}{-2n^2 - 1}$. D. $\lim \frac{2n^2 - 3n^4}{-2n^4 + n^2}$.

Câu 55. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng $-\frac{1}{3}$?

A. $u_n = \frac{n^2 - 2n}{3n^2 + 5}$. B. $u_n = \frac{-n^4 + 2n^3 - 1}{3n^3 + 2n^2 - 1}$.
 C. $u_n = \frac{n^2 - 3n^3}{9n^3 + n^2 - 1}$. D. $u_n = \frac{-n^2 + 2n - 5}{3n^3 + 4n - 2}$.

Câu 56. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

A. $u_n = \frac{1 + n^2}{5n + 5}$. B. $u_n = \frac{n^2 - 2}{5n + 5n^3}$. C. $u_n = \frac{n^2 - 2n}{5n + 5n^2}$. D. $\frac{1 + 2n}{5n + 5n^2}$.

Câu 57. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

A. $\frac{1 + 2n}{5n + 5n^2}$. B. $u_n = \frac{n^3 + 2n - 1}{-n + 2n^3}$. C. $u_n = \frac{2n^2 - 3n^4}{n^2 + 2n^3}$. D. $u_n = \frac{n^2 - 2n}{5n + 1}$.

Câu 58. $\lim(3n^4 + 4n^2 - n + 1)$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 3. D. 7.

Câu 59. $\lim \left(n^2 \sin \frac{n\pi}{5} - 2n^3 \right)$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. -2 . D. 0.

Câu 60. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(-10; 10)$ để $\lim [-3(a^2 - 2)n^3 + 5n] = -\infty$?

A. 3. B. 10. C. 16. D. 19.

Câu 61. $\lim (\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{3n^2 + 2})$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. -2 . D. 0.

Câu 62. $\lim (\sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{2n^2 + n})$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. -1 . D. $1 - \sqrt{2}$.

Câu 63. $\lim (\sqrt{2n^{2021} + n^3 + 1} - \sqrt{3n^{2021} + n^{19} + 1})$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0. D. 1.

Câu 64. $\lim (\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n})$ có kết quả nào sau đây?

A. 1. B. 2. C. 4. D. $+\infty$.

Câu 65. $\lim (\sqrt{2n^2 - n + 1} - \sqrt{2n^2 - 3n + 2})$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Câu 66.** Biết $\lim \left[\sqrt{(n-1)^2 + n\sqrt{5}} - n \right] = a + \sqrt{b}$ với $a \in \mathbb{Z}$ và $b \in (0; 1)$. Tính $a^2 + b^2$
- A. $a^2 + b^2 = \frac{13}{4}$. B. $a^2 + b^2 = \frac{17}{4}$. C. $a^2 + b^2 = \frac{21}{16}$. D. $a^2 + b^2 = \frac{41}{16}$.
- Câu 67.** Tìm tham số thực a thỏa mãn $\lim (\sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + 1}) = -1$
- A. $a = -2$. B. $a = 0$. C. $a = 2$. D. a tùy ý.
- Câu 68.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thỏa $\lim (\sqrt{n^2 - 8n} - n + a^2) = 0$?
- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.
- Câu 69.** $\lim [\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})]$ có kết quả nào sau đây?
- A. -1. B. 0. C. 1. D. $+\infty$.
- Câu 70.** $\lim [\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})]$ có kết quả nào sau đây?
- A. 0. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{4}$.
- Câu 71.** $\lim \frac{1}{n(\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+2})}$ có kết quả nào sau đây?
- A. 0. B. 1. C. 2. D. $+\infty$.
- Câu 72.** $\lim (\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt[3]{n^3+2})$ có kết quả nào sau đây?
- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.
- Câu 73.** $\lim (2n - \sqrt{9n^2+n} + \sqrt{n^2+2n})$ có kết quả nào sau đây?
- A. 0. B. $\frac{5}{6}$. C. 1. D. $\frac{7}{6}$.
- Câu 74.** $\lim (\sqrt{4n^2+3n+7} - \sqrt[3]{8n^3+5n^2+1})$ có kết quả nào sau đây?
- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{7}{6}$.
- Câu 75.** $\lim (\sqrt{n^2-2n} + 2\sqrt[3]{n^2-8n^3} + 3\sqrt{n^2+n})$ có kết quả nào sau đây?
- A. $-\frac{5}{12}$. B. 0. C. $\frac{2}{3}$. D. 6.
- Câu 76.** Dãy số (u_n) có số hạng tổng quát nào sau đây có giới hạn bằng 0?
- A. $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$. B. $u_n = \left(-\frac{4}{3}\right)^n$. C. $u_n = \left(-\frac{5}{3}\right)^n$. D. $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.
- Câu 77.** $\lim \frac{\cos(n\pi)}{4^n}$ có kết quả nào sau đây?
- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0. D. 1.
- Câu 78.** $\lim \left(\frac{\sqrt{n^2-n}}{2n-1} + \frac{2^n \cos n}{3^n} \right)$ có kết quả nào sau đây?
- A. $-\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 0. D. 2.
- Câu 79.** $\lim \frac{3^n - 2 \cdot 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^n}$ có kết quả nào sau đây?
- A. -15. B. -10. C. 10. D. 15.
- Câu 80.** $\lim \frac{1 - 2 \cdot 3^n + 6^n}{2^n(3^{n+1} - 5)}$ có kết quả nào sau đây?
- A. $-\frac{2}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $+\infty$.
- Câu 81.** $\lim \frac{2^n + 3^n - 4^{n+3}}{2^{2n} - 3^{n+1} + 4^{n-1}}$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\frac{256}{5}$.

B. -1 .

C. -64 .

D. -256 .

Câu 82. $\lim \frac{\pi^{n+1} + 3^n + 2^n}{5 \cdot \pi^n - 4 \cdot 3^n + 2^{n+2}}$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\frac{1}{4}$.

B. $\frac{1}{5}$.

C. $\frac{\pi}{5}$.

D. 1 .

Câu 83. Biết rằng $\lim \left[\frac{(\sqrt{5})^n - 2^{n+1} + 1}{5 \cdot 2^n + (\sqrt{5})^{n+1} - 3} + \frac{2n^2 + 3}{n^2 - 1} \right] = \frac{a\sqrt{5}}{b} + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $S = a^2 + b^2 + c^2$

A. $S = 21$.

B. $S = 26$.

C. $S = 30$.

D. $S = 31$.

Câu 84. Biết $\lim \frac{\sqrt{2 \cdot 4^n + 1} - 2^n}{\sqrt{2 \cdot 4^n + 1} + 2^n} = a + b\sqrt{2}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $a^3 + b^3$ bằng

A. 1 .

B. 17 .

C. 19 .

D. 35 .

Câu 85. $\lim \sqrt{3 + \frac{n^2 - 1}{n^2 + 3} - \frac{1}{2^n}}$ có kết quả nào sau đây?

A. $\frac{1}{2}$.

B. 2 .

C. 3 .

D. 4 .

Câu 86. $\lim(3^4 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^n)$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. -1 .

D. $\frac{1}{3}$.

Câu 87. $\lim (\sqrt{16^{n+1} + 4^n} - \sqrt{16^{n+1} + 3^n})$ có kết quả nào sau đây?

A. 0 .

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{8}$.

D. $\frac{1}{16}$.

Câu 88. $\lim \frac{\sqrt{9^{2n} + 2^n} - 9^n}{5^{-n}}$ có kết quả nào sau đây?

A. 0 .

B. $\frac{6}{5}$.

C. $\frac{10}{9}$.

D. $+\infty$.

Câu 89. $\lim \frac{2^{n+1} + 3n + 10}{3n^2 - n + 2}$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 90. $\lim \frac{3^n - 4 \cdot 2^{n+1} - 3}{3 \cdot 2n + 4^n}$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. 0 .

D. 1 .

Câu 91. $\lim \frac{\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + \dots + \frac{n}{2}}{n^2 + 1}$ có kết quả nào sau đây?

A. 1 .

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $\frac{1}{8}$.

Câu 92. $\lim \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$ có kết quả nào sau đây?

A. 0 .

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1 .

Câu 93. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$. Khi đó $\lim \left(u_n - \frac{1}{3} \right)$ bằng

A. 0 .

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. 1 .

Câu 94. $\lim \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n}$ có kết quả nào sau đây?

A. 0.

B. $\frac{2}{3}$.C. $\frac{3}{2}$.

D. 3.

Câu 95. $\lim \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$.

B. 0.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1.

Câu 96. $\lim \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$ có kết quả nào sau đây?

A. $\frac{1}{4}$.B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. 2.

Câu 97. $\lim \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ có kết quả nào sau đây?

A. -1.

B. 0.

C. $\frac{1}{2}$.

D. 1.

Câu 98. $\lim \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n(n^2 + 1)}$ có kết quả nào sau đây?

A. $\frac{1}{3}$.B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. 4.

Câu 99. $\lim \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+n} \right)$ có kết quả nào sau đây?

A. $\frac{3}{2}$.B. $\frac{5}{2}$.

C. 2.

D. $+\infty$.

Câu 100. $\lim \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2+n}} \right)$ có kết quả nào sau đây?

A. 0.

B. $\frac{1}{4}$.C. $\frac{1}{2}$.D. $\frac{3}{4}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. A	4. A	5. B	6. A	7. C	8. A	9. D	10. A
11. A	12. A	13. D	14. D	15. B	16. B	17. B	18. B	19. B	20. D
21. C	22. B	23. C	24. A	25. C	26. D	27. A	28. A	29. C	30. D
31. C	32. A	33. A	34. B	35. A	36. D	37. B	38. A	39. B	40. C
41. A	42. A	43. C	44. C	45. A	46. B	47. A	48. C	49. B	50. B
51. C	52. A	53. D	54. B	55. A	56. A	57. C	58. B	59. B	60. C
61. A	62. A	63. A	64. B	65. D	66. D	67. A	68. C	69. C	70. B
71. C	72. C	73. B	74. C	75. C	76. D	77. C	78. B	79. B	80. C
81. A	82. C	83. C	84. C	85. B	86. A	87. C	88. D	89. B	90. C
91. C	92. C	93. A	94. A	95. D	96. B	97. C	98. A	99. C	100. C

BÀI

2

GIỚI HẠN HÀM SỐ

A

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giới hạn của hàm số tại một điểm

a) Giới hạn hữu hạn

Cho khoảng K chứa điểm x_0 . Ta nói rằng hàm số $f(x)$ xác định trên K (có thể trừ điểm x_0) có giới hạn là L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$, ta có $f(x_n) \rightarrow L$. Ta kí hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ hay } f(x) \rightarrow L \text{ khi } x \rightarrow x_0.$$

Các giới hạn đặc biệt: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$

Định lý 2.1

1) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M}.$$

2) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L|$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

b) Giới hạn vô cực

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn dần tới dương vô cực khi x dần tới x_0 nếu với mọi dãy số (x_n) thỏa $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow +\infty$.

Kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

+ Tương tự ta cũng có định nghĩa giới hạn dần về âm vô cực

+ Ta cũng có định nghĩa như trên khi ta thay x_0 bởi $-\infty$ hoặc $+\infty$.

Định lý 2.2

1) Nếu $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \end{cases}$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{khi } L \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) > 0 \\ -\infty & \text{khi } L \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) < 0. \end{cases}$

2) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{khi } L \cdot g(x) > 0 \\ -\infty & \text{khi } L \cdot g(x) < 0. \end{cases}$

2. Giới hạn của hàm số tại vô cực

- ✓ Ta nói hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; +\infty)$ có giới hạn là L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) thỏa $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.
 ✓ Ta nói hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty; b)$ có giới hạn là L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) thỏa $x_n < b$ và $x_n \rightarrow -\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$. Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

Các giới hạn đặc biệt:

- ✓ $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c$; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x} = 0$ với c là hằng số.
 ✓ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ với k lẻ, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ với k chẵn

B

BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG
1

Giới Hạn Của Hàm Số Tại 1 Điểm

Bài 1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(3x+1)(2-3x)}{x+1}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2+x^3}{1+x}$.

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{5x-1}{2x+7}}$.

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x-1}$.

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-2}$.

g) $\lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{(x+1)(2-x)}{x-1} \right|$.

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^2+x-1}}{|x+1|}$.

Bài 2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2-5x+2}{1-2x}$.

e) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2+3x-4}{x^2+4x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-5x+2}{x^2+x-6}$.

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x(x+5)-6}$.

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x^3}{1-x^2}$.

g) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2+2x-15}{x+5}$.

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4-16}{x^3+2x^2}$.

Bài 3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^2-3x+2}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x^3-2x^2+1}$.

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}.$

Bài 4. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{2x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{2x^3 - 3x^2}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{3x+1}}{x^2 - 1}.$

Bài 5. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - 1}.$

Bài 6. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{x+1}}{3x};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-x}}{3x};$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{x^2+3} - 2};$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x^2-2x} - \sqrt{2-x}}{x^2 + 5x + 6}.$

DẠNG

2

Giới hạn của hàm số tại vô cực

Bài 7. Tính giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + 7x^3 - 15}{x^4 + 1};$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 7}{2x^3 - 1};$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x^3 + 2x + 5};$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 - x + 1}}{5x^2 - 1};$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + 2}{x\sqrt{x^3} + 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 2}$

Bài 8. Tính giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x} - x + 2021);$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x);$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| - \sqrt{x^2 + x}}{x + 10};$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1});$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x + 10);$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^4 + x^2 - 1}}{1 - 2x};$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x + 5);$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + x);$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2|x| + 3}{\sqrt{x^2 + x + 5}}.$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} + 2x}{2x + 3}.$

Bài 9. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 - 6x^2 + 9x + 1);$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 2);$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 2x^2 + 1);$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + 2x^2 + 3).$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 2x\sqrt{x} - x + 1);$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4\sqrt{x} + 2x\sqrt[3]{x} - 2).$

Bài 10. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(x-1) \sqrt{\frac{3-x}{5-3x-x^3}} \right];$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \cdot \sqrt{\frac{2x^3+x}{x^5-x^2+3}} \right);$

Bài 11. Tính giới hạn

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3+1}{2x^3+5}};$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{2x+1};$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{\sqrt{2x^2+1}};$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6+x^4+x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}$

Bài 12. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2-9x-21} - \sqrt{4x^2-7x+13});$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{27x^3-x^2}-3x);$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6+2x-1}+x-6}{\sqrt{2x^2-3x+1}-4x};$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2|x|-3x^2+7x-1}{(2x+1)^2 \cdot \sqrt{x^2+3x}};$

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 3$ Hỏi $\lim_{x \rightarrow x_0} [4f(x) - 2g(x)]$ bằng bao nhiêu?

- A. 2. B. 8. C. 14. D. 16.

Câu 2. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 7x + 11)$ có kết quả nào sau đây?

- A. 37. B. 38. C. 39. D. 40.

Câu 3. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 4|$ có kết quả nào sau đây?

- A. -1. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \sin \frac{1}{2} \right)$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0. D. $\sin \frac{1}{2}$.

Câu 5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \tan x + 1}{\sin x + 1}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 1. D. $\frac{4\sqrt{3}+6}{9}$.

Câu 6. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-3}{x^3+2}$ có kết quả nào sau đây?

- A. -2. B. $-\frac{3}{2}$. C. 1. D. 2.

Câu 7. Biết $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+m}{x+2} = 5$ với m là tham số thực. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $m = \frac{10}{3}$. B. $m = \frac{15}{7}$. C. $m = 3$. D. $m = 14$.

Câu 8. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\frac{3}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.

- Câu 9.** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{\sqrt[3]{3x+1} - 2}$ có kết quả nào sau đây?
 A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0. D. 1.
- Câu 10.** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2-4} - \sqrt{3x-2}}{x+1}$ có kết quả nào sau đây?
 A. $+\infty$. B. $-\frac{3}{2}$. C. $-\frac{2}{3}$. D. 0.
- Câu 11.** $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1}$ có kết quả nào sau đây?
 A. $+\infty$. B. -2. C. 0. D. 2.
- Câu 12.** $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-3x-4}{x-4}$ có kết quả nào sau đây?
 A. $+\infty$. B. 0. C. 1. D. 5.
- Câu 13.** $\lim_{x \rightarrow 2^{2022}} \frac{x^2-4^{2022}}{x-2^{2022}}$ có kết quả nào sau đây?
 A. $+\infty$. B. 2^{2022} . C. $2+2^{2022}$. D. 2^{2023} .
- Câu 14.** $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+1} - 1 \right) \right]$ có kết quả nào sau đây?
 A. $+\infty$. B. -1. C. 0. D. 1.
- Câu 15.** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$ có kết quả nào sau đây?
 A. $+\infty$. B. 0. C. $\frac{1}{3}$. D. 1.
- Câu 16.** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-5x+2}{x^3-3x-2}$ có kết quả nào sau đây?
 A. $+\infty$. B. 0. C. $\frac{1}{3}$. D. 2.
- Câu 17.** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-(a+2)x+a+1}{x^3-1}$ có kết quả nào sau đây?
 A. $-\frac{a}{3}$. B. $\frac{a}{3}$. C. $-\frac{a+2}{3}$. D. $\frac{a+2}{3}$.
- Câu 18.** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-5x^2+4}{x^3-8}$ có kết quả nào sau đây?
 A. $+\infty$. B. $-\frac{1}{2}$. C. 0. D. 1.
- Câu 19.** $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-3x+2}{x^3+2x-3}$ có kết quả nào sau đây?
 A. $+\infty$. B. 0. C. $\frac{1}{5}$. D. 1.
- Câu 20.** $\lim_{t \rightarrow a} \frac{t^4-a^4}{3(t-a)}$ có kết quả nào sau đây?
 A. $3a^3$. B. $4a^2$. C. $\frac{2a^2}{3}$. D. $\frac{4}{3}a^3$.
- Câu 21.** $\lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{-x^2-x+6}{x^2+3x} \right|$ có kết quả nào sau đây?
 A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{5}{3}$. D. $\frac{3}{5}$.
- Câu 22.** $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\pi^2(x-\sqrt{\pi x})}{x^2-\pi x}$ có kết quả nào sau đây?
 A. 0. B. $\frac{\pi}{2}$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Câu 23. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $+\infty$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 1.

Câu 24. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{\sqrt{2x+5} - 1}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $+\infty$. B. -6. C. 0. D. 12.

Câu 25. Biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x^2+2x+1} - \sqrt{5x+3}}{x^2+3x-4} = \frac{a\sqrt{b}}{c}$ với a, b là các số nguyên tố và $\frac{a}{c}$ là phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c$ bằng

- A. 43. B. 91. C. 93. D. 151.

Câu 26. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2\sqrt{2x+5}}{x+2}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $+\infty$. B. 1. C. 3. D. 5.

Câu 27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^2} - (1+x)}{x}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $+\infty$. B. -2. C. 0. D. 1.

Câu 28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + \pi^{2021})\sqrt{1-2x} - \pi^{2021}}{x}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-2\pi^{2021}$. B. $-\pi^{2021}$. C. π^{2021} . D. $2\pi^{2021}$.

Câu 29. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x-1}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 30. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1 + \sqrt[3]{1+x}}{x+2}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{5-x^2}}{\sqrt{x^2+16} - 4}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $\sqrt{5}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

Câu 32. Biết $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1 - \sqrt{5x+1}}{x - \sqrt{4x-3}} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $2a - b$ bằng

- A. -1. B. 1. C. 7. D. 10.

Câu 33. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2+x+2} - x}{\sqrt{2x}-2}$ có kết quả nào sau đây?

- A. 0. B. 2. C. $-\frac{1}{2}$. D. $-\frac{7}{6}$.

Câu 34. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + b}{x-3} = 3$ Giá trị $a + 2b$ bằng

- A. -6. B. -3. C. 3. D. 6.

Câu 35. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{2x^2 - x - 6} = \frac{3}{2}$ Giá trị $2a + b$ bằng

- A. -4. B. -3. C. 3. D. 4.

Câu 36. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + bx + 2}{\sqrt{x+3} - 2} = 2$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $b \leq -1$. B. $-1 < b \leq 0$. C. $0 < b \leq 1$. D. $b > 1$.

Câu 37. Cho a, b, c là các số thực thỏa $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + bx + c}{x^3 - 3x + 2} = \frac{2}{3}$. Tổng $a + 2b + 3c$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 6.

Câu 38. Cho a là số thực dương thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2ax + 1} - \sqrt{(a-8)x + 1}}{x} = 5$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a \in (-6; 1)$. B. $a \in (1; 2)$. C. $a \in (1; 3)$. D. $a \in (4; 9)$.

Câu 39. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[4]{x+2} - 1}{\sqrt[3]{x+2} - 1}$ có kết quả nào sau đây?

- A. -1. B. 1. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 40. Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[51]{(x+1)^2} - 1}{x}$ bằng

- A. 51. B. $\frac{51}{2}$. C. $\frac{1}{51}$. D. $\frac{2}{51}$.

Câu 41. Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 9$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ và $g(x) < 0$ với mọi $x \neq x_0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0. D. 9.

Câu 42. Cho hàm số $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ trong đó $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \frac{1}{2021}$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = -\infty$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2021$.
 C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Câu 43. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - x^2)$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. -1. D. 2.

Câu 44. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x^3 + 1)$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. -1. D. 0.

Câu 45. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (|x|^3 + 2x^2 + 3|x|)$

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. -1. D. 1.

Câu 46. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1 + 2x^2} - x)$

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0. D. $\sqrt{2} - 1$.

Câu 47. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{3x^3 - 1} + \sqrt{x^2 + 2})$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. $\sqrt[3]{3} - 1$. D. $\sqrt[3]{3} + 1$.

Câu 48. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{4x^2 + 7x + 2})$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 2. D. 4.

Câu 49. Với hằng số $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - ax^3)$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 4. D. 6.

Câu 50 (VD). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 1} + ax) = +\infty$

- A. $a < \sqrt{2}$. B. $a > \sqrt{2}$. C. $a < 2$. D. $a > 2$.

Câu 51 (VDC). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-7; 7]$ để $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{38x^2 + 17x - 6} - mx) = +\infty$?

- A. 12. B. 13. C. 14. D. 15.

Câu 52. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. -1 . D. 2 .

Câu 53. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2+5x-3}{(x+3)^3}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0 . D. 2 .

Câu 54. Biết $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 4$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{(x+1)^4}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0 . D. 4 .

Câu 55. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-3})$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0 . D. 2 .

Câu 56. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$ có kết quả nào sau đây?

- A. $+\infty$. B. 0 . C. $\frac{1}{2}$. D. 2 .

Câu 57. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+4x+1} + x)$ có kết quả nào sau đây?

- A. -4 . B. -2 . C. 2 . D. 4 .

Câu 58. Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{5x^2+2x} + x\sqrt{5}) = a\sqrt{5} + b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$ Giá trị $5a + b$ bằng

- A. -5 . B. -1 . C. 1 . D. 5 .

Câu 59. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2+7x+1} - 3x) = \frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}$ và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $m - n$

- A. $m - n = -2$. B. $m - n = -1$. C. $m - n = 1$. D. $m - n = 13$.

Câu 60. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1 - \sqrt{x^2-x+2})$ có kết quả nào sau đây?

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{17}{11}$. D. $\frac{46}{11}$.

Câu 61. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{8x^3+2x} - 2x)$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0 . D. $\frac{1}{4}$.

Câu 62. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+4x})$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{7}{2}$.

Câu 63. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^{10}-x^5+1} - x^5)$ có kết quả nào sau đây?

- A. $+\infty$. B. $-\frac{1}{2}$. C. 0 . D. $\frac{1}{2}$.

Câu 64. Giới hạn nào dưới đây có kết quả là $\frac{1}{2}$?

- A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} (\sqrt{x^2+1} - x)$.
 B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^2+1} + x)$.
 C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} (\sqrt{x^2+1} + x)$.
 D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^2+1} - x)$.

Câu 65. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x \cdot (\sqrt{x^2+5} - x)]$

- A. $+\infty$. B. $-\frac{5}{2}$. C. 0 . D. $\frac{5}{2}$.

Câu 66. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2})]$

- A. $+\infty$. B. $-\frac{3}{2}$. C. 0 . D. $\frac{3}{2}$.

Câu 67. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2})$

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. $-\frac{5}{6}$. D. $\frac{5}{6}$.

Câu 68. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + \sqrt[3]{x^3 - x^2})$

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. $-\frac{5}{6}$. D. $\frac{5}{6}$.

Câu 69. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x-1} + \sqrt{x})$

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0. D. 4.

Câu 70. Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 5} + x) = 5$ Khi đó giá trị của a là

- A. -10. B. -6. C. 10. D. 6.

Câu 71. Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 2021} + x) = 6$. Khi đó giá trị của a là

- A. -12. B. -6. C. 12. D. 6.

Câu 72 (VDC). Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a\sqrt{x^2 + 1} + 2017}{x + 2018} = \frac{1}{2}$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + bx + 1} - x) = 2$. Tính $P = 4a + b$

- A. $P = -1$. B. $P = 1$. C. $P = 2$. D. $P = 3$.

Câu 73. Với hằng số $a > 0$, tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax - \sqrt{a^2x^2 - 2x})$

- A. $-\frac{2}{a}$. B. $-\frac{1}{a}$. C. $\frac{1}{a}$. D. $\frac{2}{a}$.

Câu 74. Với hằng số $a < 0$, tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax - \sqrt{a^2x^2 - 2x})$

- A. $-\frac{2}{a}$. B. $-\frac{1}{a}$. C. $\frac{1}{a}$. D. $\frac{2}{a}$.

Câu 75. Cho số thực a thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 - \sqrt{ax^2 + x + 3}) = \frac{1}{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a > 0$. B. $a = \frac{1}{12}$. C. $a = 1$. D. $a > 1$.

Câu 76. Cho hai số thực a, b thỏa $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + ax + 1} + bx) = -1$. Giá trị của biểu thức $P = a^2 - 2b^3$ bằng

- A. 0. B. 8. C. 16. D. 32.

Câu 77. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $c^2 + a = 18$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{ax^2 + bx} - cx) = -2$. Giá trị của biểu thức $P = a + b + 5c$ bằng

- A. 5. B. 9. C. 12. D. 18.

Câu 78. Cho hai số thực a, b thỏa $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b - \sqrt{x^2 - 6x + 2}) = 3$, Giá trị $a + 2b$ bằng

- A. -1. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 79. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2}{(x-1)^2} \cdot \frac{2x+1}{2x-3} \right]$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0. D. 2.

Câu 80 (Vận dụng cao). Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 6x + 1} + ax + b + 2020) = 2021$. Giá trị của $a - b$ bằng

- A. -3. B. -1. C. 1. D. 3.

Câu 81. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + 1}{x^2 + x + 1}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $+\infty$. B. -1. C. 0. D. 1.

Câu 82. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{2x^4 + x^2 - 3}}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $+\infty$. B. 0. C. $\sqrt{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 83. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos 5x}{2x}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 84. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 7}{x^4 + 1}$ có kết quả nào sau đây?

- A. -1. B. 0. C. 1. D. 7.

Câu 85. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x + 1)^3(x + 2)^4}{(3 - 2x)^7}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $+\infty$. B. $-\frac{1}{16}$. C. $\frac{1}{16}$. D. 1.

Câu 86. Tìm giá trị thực của tham số m thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x^2 - 1)(mx + 3)}{x^3 + 4x + 7} = 6$

- A. $m = -3$. B. $m = -2$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Câu 87. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{x^3 - 3x + 1}{2x^2 - x^3} \right|$ có kết quả nào sau đây?

- A. $+\infty$. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 88. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{3x^2 + 2}}{5x + \sqrt{x^2 + 2}}$ có kết quả nào sau đây?

- A. 0. B. $\frac{2 - \sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 89. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} + 3x}{\sqrt{4x^2 + 1} - x + 2}$ có kết quả nào sau đây?

- A. -3. B. $\frac{1}{2}$. C. 2. D. 4.

Câu 90. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x} + \sqrt[3]{8x^3 + x - 1}}{\sqrt[4]{x^4 + 3}}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $+\infty$. B. 0. C. 3. D. 4.

Câu 91. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - x + 1}}{x + 1}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. -2. D. 2.

Câu 92. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 3x}{\sqrt{2x^2 + 3}}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$. B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 93. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x - 1)\sqrt{x^2 - 3}}{x - 5x^2}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\frac{2}{5}$. B. $-\frac{1}{5}$. C. $\frac{2}{5}$. D. 2.

Câu 94. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2|x| + 3}{\sqrt{x^2 + x + 5}}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $+\infty$. B. 0. C. 2. D. $\sqrt{5}$.

Câu 95. Cho số thực a thỏa $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 7x + 12}}{a|x| - 17} = \frac{2}{3}$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a = -6$. B. $a = -3$. C. $a = 3$. D. $a = 6$.

Câu 96. Cho số thực a thỏa $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} + 4}{ax - 2} = \frac{1}{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a = -4$. B. $a = -1$. C. $a = 1$. D. $a = 4$.

Câu 97. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{1 + x^4 + x^6}}{\sqrt{1 + x^3 + x^4}}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 1. D. $\frac{4}{3}$.

Câu 98. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x}}{x + 1}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $+\infty$. B. -2 . C. 1. D. 2.

Câu 99. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$ có kết quả nào sau đây?

- A. -2 . B. -1 . C. 1. D. 2.

Câu 100. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 3}}{3x + 2}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\frac{2}{3}$. B. $-\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 101. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 4x + 1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2 - x}$ có kết quả nào sau đây?

- A. -1 . B. $\frac{1}{2}$. C. 3. D. 5.

Câu 102. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{3x^3 + 1} - \sqrt{2x^2 + x + 1}}{\sqrt[4]{4x^4 + 2}}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\frac{\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. B. $\frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 103. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 - 2x + 1} + 2 - x}{\sqrt{9x^2 - 3x + 2x}}$ Gọi $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a = -b$. B. $a = b$. C. $b = 15a$. D. $b = -15a$.

Câu 104. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x^5}{x^4 + 6x + 5}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. -1 . D. 3.

Câu 105. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 - 3}{x^2 + 6x + 3}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. -2 . D. 2.

Câu 106. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 2}{2|x| + 1}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. $-\frac{5}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 107. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\sqrt{x^2 + 1} - 2x + 1}{\sqrt[3]{2x^3 - 2} + 1}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. D. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Câu 108. Cho các giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$; $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{x}$; $N = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$;

$O = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^4}$ Tìm từ được mã hóa bởi chuỗi số 30213?

A. CONAC. B. CANOC. C. CANON. D. CONAN.

Câu 109. Cho hai số thực a, b thỏa $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - 3x + 1}{x + 2} - ax - b \right) = 0$ Giá trị $a + b$ bằng

A. -7. B. -4. C. 4. D. 7.

Câu 110 (Vận Dụng Cao). Tìm tất cả các giá trị của tham số a thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-a)x - 3}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = +\infty$

A. $a < 2$. B. $2 \leq a < \sqrt{2}$. C. $2\sqrt{2} \leq a < 4$. D. $a \geq 4$.

Câu 111. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{\frac{2x+1}{3x^3 + x^2 + 2}} \right)$

A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 112. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(2+x) \sqrt{\frac{x-1}{x^4 + x^2 + 1}} \right]$ có kết quả nào sau đây?

A. $+\infty$. B. 0. C. $\frac{1}{2}$. D. 2.

Câu 113. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4x-2} \sqrt{\frac{8x^2 + x - 3}{x+4}} \right)$

A. $+\infty$. B. 0. C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. D. 2.

Câu 114. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(1-5x) \sqrt{\frac{16x+1}{x^3 - x + 2}} \right]$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. -20. D. 20.

Câu 115. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(1+x) \sqrt{\frac{4x-3}{x^3 + 5x - 4}} \right]$

A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. -2. D. 2.

Câu 116. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - \sqrt{3x-2}}{x-1}$ có kết quả nào sau đây?

A. $+\infty$. B. $-\sqrt{3}$. C. 0. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 117. Biết $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} - 7}{x} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $b - 3a$

A. -3. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 118. Biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{2x^2+4x+19} - \sqrt{3x^2+46}}{x^2-1} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $2a - b$ bằng

A. -79. B. -18. C. 0. D. 18.

Câu 119. Cho hàm số $f(x)$ thỏa $f\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \frac{3x-5}{5x+3}$ với $\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -\frac{3}{5} \end{cases}$ Khi đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ có kết quả nào sau đây?

A. -4. B. -2. C. $\frac{3}{5}$. D. 4.

Câu 120. Cho hàm số $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2}$ với $x > 0$ Đặt $M = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, tính $P = 2^M$.

A. $P = -2$. B. $P = \frac{1}{4}$. C. $P = \frac{1}{2}$. D. $P = 2$.

Câu 121. Biết $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(ax + \sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x})$ có giá trị hữu hạn. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $L = -\frac{1}{4}$. B. $L = 0$. C. $L = \frac{1}{4}$. D. $L = \frac{1}{2}$.

Câu 122. Biết $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{\alpha x^2 + 4x + 1} - \sqrt{\beta x^2 + 3x + 2}) = \frac{1}{4}$. Giá trị $\alpha + 2\beta$ bằng
 A. 0. B. 4. C. 8. D. 12.

Câu 123. Cho hai số thực a và b thỏa $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{1 - x^3} - ax - b) = 0$. Giá trị $a + b$ bằng
 A. -1. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 124. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+5}}{x-3}$ có kết quả nào sau đây?
 A. 0. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 125. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{2x^2 - 5x + 2}$ có kết quả nào sau đây?
 A. 1. B. $\frac{7}{2}$. C. $\frac{5}{162}$. D. $\frac{7}{162}$.

Câu 126. Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a + b = 5, b > 0$ và $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ax+1} - \sqrt{1-bx}}{x} = 2$ Mệnh đề nào sau đây đúng?
 A. $a + 2b = 5$. B. $a + 2b = 6$. C. $a + 2b = 7$. D. $a + 2b = 8$.

Câu 127. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} \cdot \sqrt{1+6x} - 1}{x}$ có kết quả nào sau đây?
 A. 1. B. 5. C. 23. D. 24.

Câu 128. Biết $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} \cdot \sqrt[3]{1+2x} - 2}{x} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $a + b$ bằng
 A. 5. B. 7. C. 30. D. 31.

Câu 129. Biết $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6x-3} - \sqrt{20x-15} + x}{x^2 - 4x + 4} = \frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $m + n$ bằng
 A. 23. B. 27. C. 33. D. 37.

Câu 130. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$ có kết quả nào sau đây?
 A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 0. D. 2.

Câu 131. Tổng chữ số hàng đơn vị và hàng chục của $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2020} - 2020x + 2019}{(x-1)^2}$ bằng
 A. 5. B. 9. C. 10. D. 11.

Câu 132. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2022} + x^{2021} + \dots + x - 2022}{x^{2022} - 1}$ có kết quả nào sau đây?
 A. 1011. B. $\frac{2022}{2021}$. C. $\frac{2023}{2}$. D. $\frac{2023}{2022}$.

Câu 133. Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} = 10$ Hỏi $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)+4} - 3}{x - 1}$ có kết quả nào sau đây?
 A. $\frac{5}{3}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 134. Cho đa thức $f(x)$ thỏa $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - 3}{2x - 1} = 5$. Hỏi $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2f(x)+3} + \sqrt{f(x)+1} - 5}{2x^2 - x}$ có kết quả nào sau đây?
 A. $\frac{25}{6}$. B. $\frac{35}{6}$. C. 6. D. 7.

Câu 135. Cho $f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 3}{x + 1} = 2$. Hỏi $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - 3}{(x^2 + 3x + 2)(\sqrt{2f(x) + 3} + 1)}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 136. Cho đa thức $f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 1}{x - 2} = a$. Hỏi $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x) + 2x + 1} - x}{x^2 - 4}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $\frac{a - 2}{16}$. B. $\frac{a + 2}{16}$. C. $\frac{a - 2}{8}$. D. $\frac{a + 2}{8}$.

Câu 137. Cho các đa thức $f(x), g(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 5}{x - 1} = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 1}{x - 1} = 3$.

Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x) \cdot g(x) + 4} - 3}{x - 1}$.

- A. $\frac{17}{6}$. B. $\frac{23}{7}$. C. 7. D. 17.

Câu 138. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(\tan x) = \cos^4 x$. Hỏi $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4f(x) - 1}{x^2 - 3x + 2}$ có kết quả nào sau đây?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 139. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = 2$. Hỏi $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x^2) - 3}{x - 1}$ có kết quả nào sau đây?

- A. 2. B. 4. C. 8. D. 16.

Câu 140. Cho hàm số $f(x)$ thỏa $4f(x) + 5f\left(\frac{1}{x}\right) + 9x = 0$ Hỏi $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x \cdot f(x) + 14} - 5}{x^2 - x - 2}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $\frac{4}{5}$. B. $\frac{8}{5}$. C. $\frac{4}{15}$. D. $\frac{8}{15}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. B	4. C	5. D	6. A	7. D	8. A	9. C	10. D
11. B	12. D	13. D	14. B	15. D	16. C	17. A	18. D	19. C	20. D
21. C	22. B	23. B	24. B	25. C	26. C	27. B	28. B	29. C	30. B
31. C	32. D	33. D	34. B	35. A	36. A	37. A	38. C	39. D	40. D
41. A	42. C	43. A	44. B	45. B	46. B	47. A	48. B	49. A	50. A
51. C	52. B	53. A	54. B	55. C	56. B	57. B	58. B	59. C	60. B
61. C	62. C	63. B	64. D	65. D	66. D	67. D	68. C	69. C	70. A
71. A	72. C	73. C	74. C	75. C	76. A	77. C	78. C	79. A	80. C
81. C	82. B	83. C	84. C	85. B	86. D	87. C	88. B	89. D	90. D
91. C	92. A	93. C	94. C	95. C	96. A	97. C	98. D	99. B	100. B
101. A	102. A	103. C	104. A	105. A	106. B	107. B	108. A	109. D	110. A
111. D	112. B	113. B	114. D	115. C	116. D	117. D	118. B	119. D	120. D
121. A	122. D	123. A	124. D	125. D	126. C	127. B	128. D	129. D	130. D
131. B	132. C	133. A	134. B	135. C	136. A	137. A	138. D	139. C	140. D

BÀI

3

GIỚI HẠN MỘT BÊN CỦA HÀM SỐ

A

KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Định nghĩa hữu hạn

- ✓ Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

Ta nói rằng hàm số f có **giới hạn bên phải** là số thực L khi x tiến về x_0 nếu mọi số (x_n) trong khoảng $(x_0; b)$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó, ta viết: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ hoặc $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0^+$.

- ✓ Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a; x_0)$.

Ta nói rằng hàm số f có **giới hạn bên trái** là số thực L khi x tiến về x_0 nếu mọi số (x_n) trong khoảng $(a; x_0)$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$.

Khi đó, ta viết: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ hoặc $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0^-$.

Nhận xét: Nếu tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ và ngược lại.

2. Giới hạn vô hạn

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

B

BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG

1

Giới Hạn Hữu Hạn

Bài 1. Tìm các giới hạn:

a) $\lim_{x \rightarrow 3^-} (\sqrt{3-x} + x);$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2 - 5x + 2};$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|3-x|}{3-x};$

d) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x+2}.$

e) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2 - 5x + 2}.$

f) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{2x^3 + x - 3}.$

Bài 2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim_{x \rightarrow 4^-} (4-x) \sqrt{\frac{2x+1}{x^3-64}};$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1) \sqrt{\frac{x^2+1}{x^4+3x+1}}.$

DẠNG
2

Giới Hạn Vô Hạn

Bài 3. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-3}{x-1};$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-15}{x-2};$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2-x}{3-x};$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{2x-4};$

e) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-5}{(x-4)^2};$

f) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x-8}{(3-x)^2};$

g) $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2};$

h) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right).$

DẠNG
3

Bài Toán Chứng Minh Sự Tồn Tại Của Giới Hạn Tại 1 Điểm.

Bài 4. Tính các giới hạn $A = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2}$ và $B = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2}$. Suy ra giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}$.

Bài 5. Tính $C = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2-9|}{x-3}$.

Bài 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^4 - 6x^2 - x & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 3x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. Hỏi hàm số hàm số $f(x)$ có giới hạn tại $x = 1$ hay không? Tại sao?

Bài 7. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ với $f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{khi } x < 1 \\ 1 - \sqrt{7x^2+2} & \text{khi } x > 1. \end{cases}$

Bài 8. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow -2} g(x)$ với $g(x) = \begin{cases} \frac{3x-2}{x+1} & \text{khi } x < -2 \\ x+10 & \text{khi } x \geq -2. \end{cases}$

Bài 9. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+1}{x+1} & \text{khi } x < -1 \\ mx^2 - x + m^2 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$ có giới hạn tại $x = -1$.

Bài 10. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x-3+|x-1|\sqrt{5x^2+4}}{x^2-2x+1}$.

Bài 11. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2-2x+|x-1|\sqrt{x+3}}{x^2-2x+1}$.

Bài 12. Tính giới hạn $C = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{\sqrt{x-1}-1}$.

Bài 13. Tính giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}}$.

Bài 14. Tính giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\sqrt{4-x^2}}$.

Bài 15. Tính giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x} + x - 1}{\sqrt{x^2 - x^3}}$.

Bài 16. Tính giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x) \sqrt{\frac{x+5}{x^3 + 2x^2 - 3}}$.

Bài 17. Tính giới hạn $D = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^3 - 3x + 2}}{x^2 - 5x + 4}$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-15}{x-2}$

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. 1.

D. $\frac{15}{2}$.

Câu 2. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x-3}{x-1}$

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. 3.

D. 4.

Câu 3. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+1}{x-2}$

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. 2.

Câu 4. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1+3x-2x^2}{x-3}$

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. -2.

D. 3.

Câu 5. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x^2-3x+1}{\sqrt{x+2}}$

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. -3.

D. 1.

Câu 6. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right)$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. 0.

D. Không tồn tại.

Câu 7. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. 0.

D. Không tồn tại.

Câu 8. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2-3x+2} - \frac{1}{x^2-5x+6} \right)$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. 0.

D. Không tồn tại.

Câu 9. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. 0.

D. 1.

Câu 10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. -1.

D. 1.

Câu 11. $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2+13x+30}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}}$ có kết quả nào sau đây?

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. 0.

D. 1.

Câu 12. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^3-x^2}}{\sqrt{x-1}+1-x}$ có kết quả nào sau đây?

A. $+\infty$.

B. -1.

C. 0.

D. 1.

Câu 13. $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x + 3)^2}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0. D. 2.

Câu 14. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0. D. 1.

Câu 15. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x}}{x^2}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0. D. 1.

Câu 16. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(1 - x) \sqrt{\frac{x + 5}{x^2 + 2x - 3}} \right]$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. -1. D. 0.

Câu 17. $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \left[(x^3 + 1) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}} \right]$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0. D. 1.

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 5x^4 - 6x^2 - x & \text{khi } x \geq 1 \\ -x^3 + 3x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Kết quả của $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ là

- A. -2. B. -1. C. 0. D. 2.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{3x^2 + 1} & \text{khi } x \geq 1 \\ \frac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. -2. D. 2.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x - 2} & \text{khi } x \geq 1 \\ \frac{x^2 + 1}{1 - x} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Kết quả của $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ là

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. -1. D. 0.

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x} & \text{khi } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{khi } 0 < x < 1 \\ x^2 - 4 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Kết quả của $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ là

- A. -3. B. $\sqrt{3}$. C. 3. D. Không tồn tại.

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & \text{khi } |x| < 2 \\ 9 & \text{khi } |x| = 2 \\ 3x - 1 & \text{khi } |x| > 2 \end{cases}$. Kết quả của $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$ là

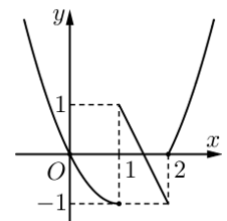
- A. -7. B. 5. C. 9. D. Không tồn tại.

Câu 23.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $a = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ và

$b = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Khi đó $2a + b$ bằng

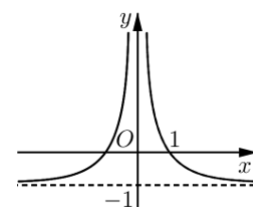
- A. -1. B. 0. C. 1. D. 2.



Câu 24.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

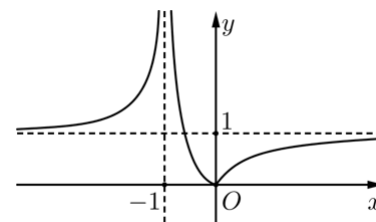
- A. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.
 B. $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$.
 C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
 D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$.



Câu 25.

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Trong các mệnh đề sau có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- i) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$.
 ii) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$.
 iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.
 iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.



- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 26. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|3x - 6|}{x - 2}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $+\infty$. B. -3 . C. 3. D. Không tồn tại.

Câu 27. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 3x + 2|}{x - 2}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $+\infty$. B. -1 . C. 1. D. Không tồn tại.

Câu 28. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $+\infty$. B. -1 . C. 1. D. Không tồn tại.

Câu 29. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x - 5}{x - 4}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 2. D. Không tồn tại.

Câu 30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2}$ có kết quả nào sau đây?

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0. D. Không tồn tại.

Câu 31. Cho hàm số $f(x) = [x]$ ($[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x , đọc là phần nguyên của x).

Hỏi $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ có kết quả nào sau đây?

- A. 0. B. 4. C. 5. D. Không tồn tại.

Câu 32. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ x - 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

- A. -1 . B. 0. C. 1. D. Không tồn tại.

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \\ -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

- A. $-\frac{1}{2}$. B. 0. C. $\frac{1}{2}$. D. Không tồn tại.

Câu 34. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{khi } x < 1 \\ -2 & \text{khi } x = 1 \\ 1 - \sqrt{7x^2 + 2} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

- A. -2. B. 0. C. 2. D. Không tồn tại.

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x > 3 \\ -12 & \text{khi } x = 3 \\ 2x^2 - 12 & \text{khi } x < 3 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$. B. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6$.
C. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$. D. Không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Câu 36. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & \text{khi } x > 2 \\ 2x^2 - x + 1 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ có giới hạn tại $x = 2$

- A. $a = -2$. B. $a = -1$. C. $a = 1$. D. $a = 2$.

Câu 37. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} a^2 x^2 & \text{khi } x \leq \sqrt{2} \\ (2-a)x^2 & \text{khi } x > \sqrt{2} \end{cases}$ có giới hạn tại $x = \sqrt{2}$. Tổng các phần tử của tập S bằng

- A. -1. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{2x+5}-3} & \text{khi } x > 2 \\ 3x + m & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tìm m để tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

- A. $m \in \emptyset$. B. $m = -\frac{11}{2}$. C. $m = -3$. D. $m = -2$.

Câu 39. Biết hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x + b & \text{khi } x \leq -1 \\ x + a & \text{khi } x > -1 \end{cases}$ có giới hạn tại $x = -1$. Giá trị của $a - b$ bằng

- A. -2. B. -1. C. 1. D. 2.

Câu 40. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{khi } x \leq 2 \\ ax + b & \text{khi } 2 < x < 6 \\ x + 4 & \text{khi } x \geq 6 \end{cases}$. Biết hàm số $f(x)$ có giới hạn tại $x = 2$ và $x = 6$.

Hệ thức nào sau đây đúng?

- A. $2a - b = 0$. B. $a - 2b = 0$. C. $2a + b = 0$. D. $a + 2b = 0$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	3. B	4. A	5. B	6. B	7. A	8. B	9. C	10. C	11. C
12. D	13. B	14. B	15. B	16. D	17. C	18. D	19. D	20. B	21. A
22. A	23. A	24. D	25. C	26. D	27. D	28. D	29. D	30. B	31. D
32. C	33. A	34. A	35. D	36. C	37. A	38. C	39. A	40. C	

BÀI

4

HÀM SỐ LIÊN TỤC

A

KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Hàm số liên tục tại một điểm

Định nghĩa 4.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

✓ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

✓ Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 ta nói hàm số gián đoạn tại x_0 .

2. Hàm số liên tục trên một khoảng

Định nghĩa 4.2.

✓ Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

✓ Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu nó liên tục trên $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

3. Các định lý cơ bản

Định lý 4.1

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập $\mathbb{R}$.

b) Hàm số phân thức hữu tỉ, hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

Định lý 4.2

Cho các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ liên tục tại x_0 . Khi đó:

a) Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0 .

b) Nếu hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại x_0 và $g(x_0) \neq 0$ thì hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 .

c) Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số phân thức và lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

4. Tính chất của hàm số liên tục

Định lý 4.3

Giả sử hàm số f liên tục trên $[a; b]$. Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ thỏa $f(c) = M$.

⇨ **Hệ quả 4.1.** (Ý nghĩa hình học) Nếu f là hàm liên tục trên $[a; b]$ và M là số thực nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$ thì đường thẳng $y = M$ cắt đồ thị của hàm số $y = f(x)$ tại ít nhất một điểm có hoành độ $x = c \in (a; b)$.

Nhận xét: Từ hệ quả trên, ta có thể áp dụng vào sự tương giao của đồ thị: “Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành ít nhất tại một điểm có hoành độ $x = c \in (a; b)$ ”.

⇨ **Hệ quả 4.2.** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Nhận xét: Từ hệ quả trên, ta có thể áp dụng vào việc chứng minh phương trình có nghiệm: “Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a; b)$ ”.

B

BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG
1

Xét Tính Liên Tục Của Hàm Số Tại Một Điểm

Bài 1. Xét tính liên tục của các hàm số tại x_0

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{khi } x \neq 5 \\ 9 & \text{khi } x = 5 \end{cases}, \text{ tại } x_0 = 5.$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}, \text{ tại } x_0 = 2.$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x + 2} - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{3}{4} & \text{khi } x = 2 \end{cases}, \text{ tại } x_0 = 2.$$

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3} & \text{khi } x \neq 4 \\ -\frac{3}{2} & \text{khi } x = 4 \end{cases}, \text{ tại điểm } x_0 = 4.$$

$$5) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{3} & \text{khi } x = 1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 1.$$

$$6) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2-3}-1}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 2x-2 & \text{khi } x = 2 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 2.$$

Bài 2. Xét tính liên tục của các hàm số sau:

$$a) f(x) = \begin{cases} x^4 + x^2 - 1 & \text{khi } x \leq -1 \\ 3x + 2 & \text{khi } x > -1 \end{cases}, \text{ tại } x_0 = -1$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{nếu } x > 0 \\ x & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}, \text{ tại điểm } x_0 = 0.$$

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & \text{khi } x \leq 2 \\ \frac{1 - \sqrt{2x-3}}{2-x} & \text{khi } x > 2 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 2.$$

$$d) f(x) = \begin{cases} 2x + 12 & \text{khi } x \leq 3 \\ \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2} & \text{khi } x > 3 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 3.$$

$$e) f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 1} & \text{khi } x < 1 \\ 2x + 2 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 1.$$

$$f) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{\sqrt{x+1} + 7}{3} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 1.$$

$$g) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{\sqrt{x+1} + 7}{3} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 1.$$

$$h) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 2}{-x - 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ x^2 + 2x & \text{khi } x = -1 \end{cases} \text{ tại } x_0 = -1.$$

$$i) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x+2} - 2} & \text{khi } x > 2 \\ -4 & \text{khi } x = 2 \\ x\sqrt{2-x} - 4 & \text{khi } x < 2 \end{cases} \text{ tại } x_0 = 2.$$

Bài 3. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm x_0 .

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2. \end{cases}, \text{ tại } x_0 = 2.$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ m^2+3m & \text{nếu } x = 2 \end{cases}, \text{ tại } x_0 = 2.$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x-1} & \text{khi } x < 1 \\ m + \frac{4-x}{x+2} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}, \text{ tại } x_0 = 1.$

d) $f(x) = \begin{cases} mx^2 + \frac{2}{3} & \text{khi } x \leq 2 \\ \frac{\sqrt[3]{4x}-2}{x^2-3x+2} & \text{khi } x > 2 \end{cases}, \text{ tại } x_0 = 2.$

e) $f(x) = \begin{cases} mx + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \\ \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \end{cases}, \text{ tại } x_0 = 2.$

Bài 4. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x-1} & \text{nếu } x < 0 \\ m + \frac{x^3-3x+1}{x+2} & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 0$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3-\sqrt{8-4x}}{x-1} & \text{nếu } x < 1 \\ 14ax & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$.

Bài 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x^2+2x-2}{3x+a} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 3x+a & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$. Tìm các giá trị của tham số a để $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Bài 7. Tìm a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+3 & \text{nếu } x < 1 \\ 5 & \text{nếu } x = 1 \\ 2x-3b & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 1$.

Bài 8. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x-1} & \text{nếu } x < 0 \\ m + \frac{x^3-3x+1}{x+2} & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 0$.

Bài 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2-m+3 & \text{khi } x = 1 \\ \frac{x^2+mx-1-m}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x = 1$.

Bài 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 5x + 2}{2 - x} & \text{khi } x \neq 2 \\ m^2 - m - 5 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số gián đoạn tại $x = 2$.

DẠNG
2

Xét Tính Liên Tục Của Hàm Số Trên Khoảng, Nửa Khoảng, Đoạn

Bài 11. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-4} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$.

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ -3 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$.

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{(x-1)^2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

Bài 12. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{khi } x \geq 2 \\ 6x + 1 & \text{khi } x < 2. \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \geq -2 \\ 2 - x & \text{khi } x < -2. \end{cases}$

Bài 13. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{khi } x > -1 \\ 1 & \text{khi } x = -1 \\ x^2 - 6 & \text{khi } x < -1. \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{khi } x \geq 3 \\ x^2 & \text{khi } 1 \leq x < 3 \\ 4x^2 - 3 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$

DẠNG
3

Chứng minh phương trình có nghiệm

Bài 14. Chứng minh rằng phương trình $2x^4 - 2x^3 - 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$.

Bài 15. Chứng minh rằng phương trình $6x^3 + 3x^2 - 31x + 10 = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Bài 16. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1 . **ĐS:** $(-1; 0)$

Bài 17. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 5x^2 - 2 = 0$ có ít nhất hai nghiệm. **ĐS:** $(-1; 0), (0; 1)$

Bài 18. Chứng minh rằng phương trình $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ có ít nhất hai nghiệm. **ĐS:** $(-1; 0), (0; 1)$

Bài 19. Chứng minh rằng phương trình $x - 1 + \sin x = 0$ có nghiệm.

Bài 20. Chứng minh phương trình $x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm dương và 1 nghiệm âm.

Bài 21. Chứng minh phương trình $x^4 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm.

Bài 22. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt.

Bài 23. Chứng minh rằng phương trình $x + 1 + \cos x = 0$ có nghiệm.

Bài 24. Chứng minh rằng phương trình $x^4 + mx^2 - 2mx - 1 = 0$ có nghiệm với mọi m . **ĐS:** $(0; 2)$

Bài 25. Chứng minh rằng phương trình $m(x-2)(x-3) + 2x - 5 = 0$ có nghiệm với mọi m . **ĐS:** $(2; 3)$

Bài 26. Chứng minh phương trình $(m^2 - 3m + 5)x^3 + 2x - 2 = 0$ có nghiệm với mọi m . **ĐS:** $(0; 1)$

Bài 27. Chứng minh rằng phương trình $\sqrt{x^5 + 2x^3 + 25x^2 + 14x + 2} = 3x^2 + x + 1$ có đúng 5 nghiệm phân biệt.

Bài 28. Chứng minh rằng phương trình $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm với mọi giá trị của m .

Bài 29. Chứng minh rằng phương trình $(1 - m)x^5 + 9mx^2 - 16x - m = 0$ có ít nhất hai nghiệm. **ĐS:** $(-2; 0), (0; 2)$

Bài 30. Chứng minh rằng phương trình $\frac{x^4 - x^2 + mx - 3m + 1}{x^2 - x - 2} = m$ có ít nhất 2 nghiệm với mọi $m > 1$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K chứa điểm a . Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = a$ khi và chỉ khi

A. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = a$.

B. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$.

C. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

D. $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow a$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ Điều kiện cần và đủ để hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ là

A. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

B. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$.

C. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

D. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ và $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b)$.

Câu 3. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số liên tục trên $[a; b]$ thì nó xác định trên $[a; b]$.

B. Hàm số liên tục trên $[a; b]$ thì nó liên tục tại $x_0 \in (a; b)$.

C. Hàm số liên tục trên $[a; b]$ nếu nó liên tục trên $(a; b)$.

D. Hàm số liên tục trên $[a; b]$ thì nó liên tục trên $(a; b)$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục tại $x = 1$ và thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$ Khi đó ta phải gán $f(1)$ bằng bao nhiêu?

A. $f(1) = -4$.

B. $f(1) = -1$.

C. $f(1) = 1$.

D. $f(1) = 4$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[-3; 3]$ có $f(x) = \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}}{x}$ với $x \neq 0$ Khi đó ta phải gán $f(0)$ bằng bao nhiêu?

A. $f(0) = 0$.

B. $f(0) = 1$.

C. $f(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $f(0) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 6. Hàm số nào trong các hàm số sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$?

- A. $f(x) = \frac{x^2 + 3}{5 - x}$. B. $f(x) = \frac{x + 5}{x^2 + 4}$. C. $f(x) = \sqrt{x - 6}$. D. $f(x) = \tan x + 5$.

Câu 7. Hàm số nào trong các hàm số sau đây không liên tục trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = |x|$. B. $y = \frac{x}{x + 1}$. C. $y = \sin x$. D. $y = \frac{x}{|x| + 1}$.

Câu 8. Điểm gián đoạn của hàm số $f(x) = \frac{2021x}{x + 1}$ là

- A. $x = -1$. B. $x = 0$. C. $x = 1$. D. $x = 2021$.

Câu 9. Hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^4 - 10x^2 + 9}$ có bao nhiêu điểm gián đoạn?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{x + 2}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 2$. B. $f(x)$ liên tục tại điểm $x = -2$.
 C. $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 0$. D. $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 2021$.

Câu 11. Hàm số nào sau đây liên tục tại điểm $x_0 = 1$?

- A. $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$. B. $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$.
 C. $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$. D. $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$.

Câu 12. Trong các hàm số nào sau đây, có bao nhiêu hàm số liên tục tại điểm $x = 2$?

- i) $y = \frac{x - 4}{x^2 - 3x + 2}$.
 ii) $y = 1 - x^2 + \sqrt{4 - x^2}$.
 iii) $y = x^9 - \sin x - 3 \cos^2 x$.
 iv) $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 13. Hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 5x + 6}$ liên tục trên

- A. $(-\infty; 3)$. B. $(-3; 2)$. C. $(-2; +\infty)$. D. $\mathbb{R}$.

Câu 14. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ liên tục trên $(0; +\infty)$. B. $y = \sqrt[3]{x}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
 C. $y = \tan x$ liên tục trên $(0; \pi)$. D. $y = \sin x + x^2$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Xét các mệnh đề sau:

- i) Hàm số liên tục trên $(-2; 2)$
 ii) Hàm số liên tục trên $[-2; 2]$
 iii) Hàm số liên tục tại điểm $x = -2$.
 iv) Hàm số liên tục phải tại điểm $x = -2$ và liên tục trái tại điểm $x = 2$.

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x > 0 \\ x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $f(0) = 0$. B. f liên tục tại $x_0 = 0$.
 C. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$. D. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$. B. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$.
 C. $f(1) = -1$. D. $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 1$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{khi } x < 1 \\ x^2 + 4 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ Xét các mệnh đề sau:

- i) Hàm số liên tục trên $[1; +\infty)$.
 ii) Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
 iii) Hàm số liên tục tại mọi điểm x thuộc $[1; +\infty)$.
 iv) Hàm số liên tục trên $(-\infty; 1)$.

Trong các mệnh đề trên có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+6}{3x^2-27} & \text{khi } x \neq \pm 3 \\ -\frac{1}{9} & \text{khi } x = \pm 3 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ các điểm thuộc khoảng $(-3; 3)$.
 B. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = -3$.
 C. Hàm số liên tục tại mọi điểm trừ điểm $x = 3$.
 D. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số liên tục tại $x = 2$. B. Hàm số gián đoạn tại $x = 2$.
 C. $f(4) = 2$. D. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$.

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{khi } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f(x)$ liên tục tại $x = 0$. B. $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 1)$.
 C. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$. D. $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số liên tục tại $x = 0$.

C. $f(0) = 0$.

B. Hàm số gián đoạn tại $x = 0$.

D. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1 & \text{khi } |x| \leq 1 \\ 3x - 1 & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số không liên tục trên $(2; +\infty)$.

B. Hàm số không liên tục trên $(-\infty; -1)$.

D. Hàm số gián đoạn tại các điểm $x = \pm 1$.

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{khi } x < 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \\ x + 1 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số đã cho gián đoạn tại $x = 0$.

C. Hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$.

B. Hàm số liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

D. Hàm số liên tục trên nửa khoảng $(-\infty; 0]$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + 1 & \text{khi } x < 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \\ x + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số không có giới hạn tại $x = 1$ và không liên tục tại $x = 1$.

B. Hàm số có giới hạn tại $x = 1$ và liên tục tại $x = 1$.

C. Hàm số không có giới hạn tại $x = 1$ nhưng liên tục tại $x = 1$.

D. Hàm số có giới hạn tại $x = 1$ nhưng không liên tục tại $x = 1$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 & \text{khi } x \neq 1 \\ x + m + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Giá trị của tham số m để hàm số liên tục tại $x = 1$ là

A. $m = 0$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = 3$.

Câu 27. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$

A. $a = -\frac{1}{2}$.

B. $a = \frac{1}{2}$.

C. $a = -1$.

D. $a = 1$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{khi } x \geq 1 \\ a(x+1) & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ với a là tham số. Biết $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và liên tục tại $x = 1$. Giá trị $a + f(0)$ bằng

A. -1 .

B. 0 .

C. 1 .

D. 2 .

Câu 29. Biết hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 5 & \text{khi } x \leq 1 \\ 2ax - 3b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = a - 4b$

A. $P = -4$.

B. $P = 4$.

C. $P = -5$.

D. $P = 5$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số gián đoạn tại $x = 1$

A. $m \neq -2$.

B. $m \neq 1$.

C. $m \neq 2$.

D. $m \neq 3$.

Câu 31. Hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2} & \text{khi } x > 4 \\ 3x - m & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ liên tục tại $x = 4$ khi m nhận giá trị là

A. -20. B. 20. C. -44. D. 44.

Câu 32. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{khi } x < 1 \\ k^2 & \text{khi } x = 1 \\ (x + 1)^2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của k để $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$

A. $k \neq -2$. B. $k \neq 2$. C. $k \neq \pm 2$. D. $k \neq \pm 1$.

Câu 33. Tìm m, n để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ n & \text{khi } x = 1 \\ mx + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$

A. $n = -1$ và $m = 0$. B. $n = m = 1$. C. $n = 0$ và $m = 1$. D. $n = 1$ và $m = 0$.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng phương trình $f(x) = 3$ có nghiệm duy nhất là $x = 1$.
 Tìm giá trị của tham số a để hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$ $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{f(x) - 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ a - 2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

A. $a = -2$. B. $a = 2$. C. $a = 3$. D. $a = 5$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 8x + m}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ n & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ với m, n là các tham số thực. Biết rằng hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$, khi đó giá trị của $m + n$ bằng

A. 0. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 36. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a; b]$ Trong các mệnh đề sau có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- i) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại $x_0 \in (a; b)$ sao cho $f(x_0) = 0$.
- ii) Nếu $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a; b)$.
- iii) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm.
- iv) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục, tăng trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ không có nghiệm trong khoảng $(a; b)$.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 37. Phương trình nào dưới đây có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$?

- A. $2x^2 - 3x + 4 = 0$. B. $3x^4 - 4x^2 + 5 = 0$.
- C. $(x - 1)^5 - x^7 - 2 = 0$. D. $3x^{2017} - 8x + 4 = 0$.

Câu 38. Biết phương trình $x^5 + x^3 + 3x - 1 = 0$ có duy nhất một nghiệm x_0 . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $x_0 \in (-2; -1)$. B. $x_0 \in (-1; 0)$. C. $x_0 \in (0; 1)$. D. $x_0 \in (1; 2)$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0) < 0, f(1) > 0, f(2) < 0, f(3) > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm. B. Phương trình $f(x) = 0$ có đúng 2 nghiệm.
 C. Phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm. D. Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 3 nghiệm.

Câu 40. Xét phương trình $x^{2021} + x = a$ trên tập số thực. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Phương trình chỉ có nghiệm khi $a > 0$. B. Phương trình chỉ có nghiệm khi $a < 0$.
 C. Phương trình vô nghiệm khi $a \geq 0$. D. Phương trình có nghiệm $\forall a \in \mathbb{R}$.

Câu 41. Cho phương trình $(m^2 - 5m + 3)x^5 - 2x^2 + 1 = 0$ với m là tham số. Tập hợp các giá trị của m để phương trình có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$ là

- A. $m \in (1; 4)$. B. $m \in \mathbb{R}$.
 C. $m \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$. D. $m \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 5]$ và thỏa mãn $f(-1) = 1, f(5) = 6$. Phương trình nào sau đây luôn có nghiệm trong khoảng $(-1; 5)$?

- A. $f(x) + 5 = 0$. B. $f(x) = 1$. C. $f(x) = 3$. D. $f(x) = 8$.

Câu 43. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và thỏa mãn $f(a) = b, f(b) = a$ với $a, b > 0$ và $a \neq b$. Phương trình nào sau đây có nghiệm trên $(a; b)$?

- A. $f(x) = 0$. B. $f(x) = -x$. C. $f(x) = x$. D. $f(x) = a$.

Câu 44. Xét phương trình $\cos x + m \cos 2x = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Phương trình chỉ có nghiệm khi $m > 0$.
 B. Phương trình chỉ có nghiệm khi $-1 \leq m \leq 1$.
 C. Phương trình vô nghiệm khi $m < 1$.
 D. Phương trình có nghiệm với mọi m .

Câu 45. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a + c > b + 1 \\ a + b + c + 1 < 0 \end{cases}$. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục Ox là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. C	4. D	5. C	6. B	7. B	8. A	9. D	10. B
11. C	12. B	13. C	14. C	15. C	16. B	17. D	18. C	19. C	20. A
21. C	22. B	23. D	24. D	25. D	26. A	27. A	28. B	29. C	30. B
31. A	32. C	33. D	34. D	35. C	36. B	37. D	38. C	39. D	40. D
41. C	42. C	43. C	44. D	45. D					

ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

- ☑ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng (a, b) và $x_0 \in (a, b)$ nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 và kí hiệu là $f'(x_0)$ tức là

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Trong đó: Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ là số gia của đối số tại x_0 , đại lượng $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ là số gia tương ứng của hàm số.

- ☑ Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

2. Cách tính đạo hàm bằng định nghĩa

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 bằng định nghĩa ta làm theo các bước sau

Bước 1: Tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Bước 2: Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bước 3: Tìm $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. Đạo hàm bên trái, bên phải

☑ $f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$

☑ $f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$

Hệ quả: Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì sẽ tồn tại $f'(x_0^+)$ và $f'(x_0^-)$ đồng thời $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.

4. Đạo hàm trên khoảng, trên đoạn

- ☑ Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm (hay hàm khả vi) trên $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $(a; b)$.
- ☑ Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm (hay hàm khả vi) trên $[a; b]$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $(a; b)$ đồng thời tồn tại đạo hàm bên trái $f'(b^-)$ và đạo hàm bên phải $f'(a^+)$.

5. Mối liên hệ giữa đạo hàm và tính liên tục

- Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $y = f(x)$ liên tục tại x_0 .

Chú ý: Định lý trên chỉ là điều kiện cần, tức là một hàm có thể liên tục tại điểm x_0 nhưng hàm đó không có đạo hàm tại x_0 .

Chẳng hạn: Xét hàm $f(x) = |x|$ liên tục tại $x = 0$ nhưng không có đạo hàm tại điểm đó.

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1, \text{ còn } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -1.$$

B

BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1

Tìm số gia của hàm số

Bài 1. Tìm số gia của hàm số $f(x) = x^4$ khi $x_0 = 1, \Delta x = 1$.

Bài 2. Số gia của hàm số $f(x) = x^3 + x$ khi $x_0 = 0, \Delta x = 1$.

Bài 3. Tìm số gia của hàm số $f(x) = \frac{x^3}{3}$ theo số gia Δx của đối số x tại $x_0 = 0$.

Bài 4. Số gia của hàm số $f(x) = x^2 - x$ ứng với $x_0, \Delta x$ là

Bài 5. Tìm số gia của hàm số $f(x) = x^2 + 2$ khi $x_0 = 0, \Delta x = 2$.

Bài 6. Số gia của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$ khi $x_0 = 1, \Delta x = 1$.

Bài 7. Tìm số gia của hàm số $f(x) = \sqrt{x+1}$ theo số gia Δx của đối số x tại $x_0 = 0$.

DẠNG 2

Tính Đạo Hàm Bằng Định Nghĩa Tại Điểm

Bài 8. Tính đạo hàm của hàm số sau:

a) $y = f(x) = 2x^3 + x - 1$ tại $x_0 = 0$.

b) $y = f(x) = (x+1)(x-3) + 2$ tại $x_0 = -1$.

Bài 9. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = \frac{1}{x^3 + x + 1}$ tại $x_0 = -1$.

b) $y = f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{2x - 1}$ tại $x_0 = 3$.

Bài 10. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ tại $x_0 = 2$.

b) $y = f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ tại $x_0 = 1$.

DẠNG
3

Tính Đạo Hàm Của Hàm Số Trên 1 Khoảng Bằng Định Nghĩa

Bài 11. Tính đạo hàm của hàm số sau:

a) $y = f(x) = x^2 - 3x + 1$. b) $y = f(x) = x^3 - 2x$. c) $y = f(x) = 4x + 3$.

Bài 12. Tính đạo hàm của hàm số sau:

a) $y = f(x) = \frac{1}{2x - 3}$. b) $y = f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$.

DẠNG
4

Mối Quan Hệ Giữa Liên Tục Và Đạo Hàm

Bài 13. Cho hàm số $y = f(x) = |x|$

- a) Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 0$. b) Xét sự tồn tại đạo hàm của hàm số tại $x = 0$.

Bài 14. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$

- a) Chứng minh rằng hàm số liên tục tại $x = 0$.
b) Hàm số này có đạo hàm tại điểm $x = 0$ hay không? Tại sao?

Bài 15. Chứng minh rằng hàm số $y = f(x) = \begin{cases} (x - 1)^2, & x \geq 0 \\ (x + 1)^2, & x < 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại $x_0 = 0$, nhưng liên tục tại đó.

Bài 16. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \frac{2x^2 + |x + 1|}{x - 1}$ liên tục tại $x = -1$ nhưng không có đạo hàm tại điểm đó.

Bài 17. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ x^2 + bx + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Để hàm số này có đạo hàm tại $x = 1$ thì giá trị của b là?

Bài 18. Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 1$

C

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = a$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

B. $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + f(a)}{x - a}$.

C. $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x + a}$.

D. $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + f(a)}{x + a}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$ Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

B. $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

C. $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

D. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$ Tính $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 2.

D. 12.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f'(x) = 2$.

B. $f'(x) = 3$.

C. $f'(2) = 3$.

D. $f'(3) = 2$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 2$ Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x - 2}$

A. 0.

B. $f'(2)$.

C. $f(2) - 2f'(2)$.

D. $2f'(2) - f(2)$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên tập số thực. Biết $f'(1) = 1$ và $f(1) = 2$ Kết quả của $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x^2 - 3}{x - 1}$ bằng

A. 2.

B. $\frac{5}{2}$.

C. 3.

D. 4.

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên tập số thực. Biết $f'(1) = 5$ và $f(1) = 6$ Kết quả của $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - f(x) - 30}{\sqrt{x} - 1}$ bằng

A. -29.

B. 0.

C. 110.

D. $+\infty$.

Câu 8. Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số có đạo hàm $f'(x) = 3x$ và $g'(x) = 2x^2$ thì giá trị của $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + g(x) - f(1)}{x - 1}$ bằng

A. 0.

B. $\frac{13}{6}$.

C. 5.

D. 10.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x) = x^3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$.

B. $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 27}{x + 3}$.

C. $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3}{x - 3}$.

D. $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 9}{x - 3}$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = x(x - 1)(x - 2) \cdots (x - 1000)$ Tính $f'(0)$

A. 1000!.

B. 1100!.

C. 1110!.

D. 10000!.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = (x^2 - 1)(x + 2)(x + 3) \cdots (x + 2021)$ và $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Giá trị của biểu thức $g'(1)$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 2021!.

D. 2022!.

Câu 12. Hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{khi } x \leq 3 \\ 5 - x & \text{khi } x > 3 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f'(3) = 3$. B. $f'(3) = -3$. C. $f'(3) = 2$. D. Không tồn tại $f'(3)$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{khi } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.
 B. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$.
 C. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ và có đạo hàm tại $x = 1$.
 D. Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 1$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3} & \text{khi } x \neq 3 \\ -1 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số liên tục tại $x = 3$ nhưng không có đạo hàm tại $x = 3$.
 B. Hàm số gián đoạn tại $x = 3$ và không có đạo hàm tại $x = 3$.
 C. Hàm số có đạo hàm tại $x = 3$ nhưng không liên tục tại $x = 3$.
 D. Hàm số liên tục tại $x = 3$ và có đạo hàm tại $x = 3$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$

- A. $f'(0) = \frac{1}{4}$. B. $f'(0) = \frac{1}{16}$. C. $f'(0) = \frac{1}{32}$. D. Không tồn tại.

Câu 16. Số gia của hàm số $y = f(x) = x^2 + 1$ ứng với số gia $\Delta x = -0,1$ và $x_0 = 4$ bằng

- A. $-15,99$. B. $-0,79$. C. $0,81$. D. $1,01$.

Câu 17. Tìm số gia của hàm số $y = f(x) = x^3 + x^2 + 1$ tại x_0 ứng với số gia $\Delta x = 1$

- A. $\Delta y = 3x_0^2 + 5x_0 + 3$. B. $\Delta y = 2x_0^3 + 3x_0^2 + 5x_0 + 2$.
 C. $\Delta y = 3x_0^2 + 5x_0 + 2$. D. $\Delta y = 3x_0^2 - 5x_0 + 2$.

Câu 18. Tìm số gia của hàm số $y = f(x) = \frac{x^2}{2}$ tại điểm $x_0 = -1$ ứng với số gia Δx

- A. $\Delta y = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - \Delta x$. B. $\Delta y = \frac{1}{2}[(\Delta x)^2 - \Delta x]$.
 C. $\Delta y = \frac{1}{2}[(\Delta x)^2 + \Delta x]$. D. $\Delta y = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \Delta x$.

Câu 19. Tìm số gia của hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 1$ tại điểm x_0 ứng với số gia Δx

- A. $\Delta y = \Delta x(\Delta x + 2x_0 - 4)$. B. $\Delta y = 2x_0 + \Delta x$.
 C. $\Delta y = \Delta x(2x_0 - 4\Delta x)$. D. $\Delta y = 2x_0 - 4\Delta x$.

Câu 20. Tìm số gia của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{x}$ tại điểm x ($x \neq 0$) ứng với số gia Δx

- A. $\Delta y = \frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$. B. $\Delta y = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$.
 C. $\Delta y = -\frac{\Delta x}{x + \Delta x}$. D. $\Delta y = \frac{\Delta x}{x + \Delta x}$.

Câu 21. Tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = f(x) = x^2 - 1$ theo x và Δx là

- A. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. B. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 2x$. C. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = x + 2\Delta x$. D. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x$.

Câu 22. Tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = f(x) = x^3 + 1$ theo x và Δx là

- A. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 - 3x \cdot \Delta x - (\Delta x)^2$. B. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$.
 C. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 - 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^3$. D. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x - (\Delta x)^3$.

Câu 23. Tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = f(x) = \frac{2}{x}$ theo x ($x \neq 0$) và Δx là

- A. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2}{(\Delta x)^2}$. B. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2\Delta x}{x(x + \Delta x)}$. C. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{x(x + \Delta x)}$. D. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{x(x + \Delta x)}$.

Câu 24. Tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = f(x) = \frac{2}{x+1}$ tại điểm $x_0 = 2$ là

- A. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{3(\Delta x + 2)}$. B. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{3(\Delta x + 2)}$. C. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{3(\Delta x + 3)}$. D. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{3(\Delta x + 3)}$.

Câu 25. Đạo hàm của hàm số $y = f(x) = x^2 - x$ tại điểm x_0 ứng với số gia Δx là

- A. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(\Delta x)^2 + 2x_0 \cdot \Delta x - \Delta x]$. B. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2x_0 - 1)$.
 C. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2x_0 + 1)$. D. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(\Delta x)^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x]$.

Câu 26. Tìm tham số thực b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ -\frac{x^2}{2} + bx - 6 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 2$

A. $b = -6$. B. $b = 1$. C. $b = 3$. D. $b = 6$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số a, b để hàm số

$f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$

- A. $a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{2}$. B. $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2}$. C. $a = 1; b = \frac{1}{2}$. D. $a = 1; b = -\frac{1}{2}$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ ax - b - 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Biết hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 0$. Tổng $a + 2b$ bằng

- A. -6 . B. -4 . C. 0 . D. 6 .

Câu 29. Tìm a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{khi } x \leq 1 \\ -x^2 + ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$

- A. $\begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} a = 3 \\ b = -11 \end{cases}$. C. $\begin{cases} a = 13 \\ b = -1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} a = 23 \\ b = -21 \end{cases}$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} mx^2 + 2x + 2 & \text{khi } x \geq 0 \\ nx + 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số m, n để

hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 0$

- A. Không tồn tại m, n . B. $m = 2, \forall n \in \mathbb{R}$.
 C. $\forall m \in \mathbb{R}, n = 2$. D. $m = n = 2$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. A	2. D	3. C	4. D	5. D	6. C	7. C	8. C	9. A	10. A
11. D	12. D	13. D	14. D	15. B	16. B	17. C	18. A	19. A	20. B
21. B	22. B	23. C	24. B	25. B	26. D	27. D	28. A	29. A	30. C

BÀI

2

QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương

Cho các hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có:

- i) $(u + v)' = u' + v'$.
- ii) $(u - v)' = u' - v'$.
- iii) $(u \cdot v)' = u'v + v'u$.
- iv) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

Mở rộng:

- 1. $(u_1 \pm u_2 \pm \dots \pm u_n)' = u_1' \pm u_2' \pm \dots \pm u_n'$.
- 2. $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$

2. Đạo hàm của hàm số hợp

Cho hàm số $y = f(u(x)) = f(u)$ với $u = u(x)$. Khi đó: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

B

BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG

1

Quy tắc tính đạo hàm

Bài 1. Tính đạo hàm

a) $y = -2x^4 + 4x^2 - 3x + 1$.

b) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^2}{2} - 2$.

c) $y = 4x^2 - \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

d) $y = x - \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1$.

e) $y = \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$.

f) $y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x}$.

Bài 2. Tính đạo hàm

- a) $y = x^2 + x\sqrt{x} + 1$; b) $y = (1-x)(1-2x)(1-3x)$; c) $y = (x + \sqrt{x})(x^2 + x + 1)$;
 d) $y = x^2(x+4)^3$; e) $y = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x^2}\right)$; f) $y = (x^3 + 3x)(2-x)$;
 g) $y = x(2x-1)(3x+2)$; h) $y = (x^2 - 2x + 3)(2x^2 + 3)$; i) $y = (x^2 + 1)(5 - 3x^2)$;

Bài 3. Tính đạo hàm

- a) $y = \frac{3}{2x+1}$. b) $y = \frac{x+2}{2x-1}$. c) $y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.
 d) $y = \frac{3}{2x-1}$. e) $y = \frac{x^2+x+1}{2x^2-x+4}$. f) $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.
 g) $y = \frac{x^2-3x+7}{2x-5}$. h) $y = \frac{x^2+4x-1}{2x+3}$.

Bài 4. Tính đạo hàm của hàm số

- a) $y = \sqrt{x^2+6x+7}$; b) $y = \sqrt{x^2-2x-8}$; c) $y = \sqrt{x+4} - \sqrt{4-x}$;
 d) $y = x - 2\sqrt{x^2+3x+3}$; e) $y = (x-1)\sqrt{3x+2}$; f) $y = x\sqrt{1-x^2}$;
 g) $y = (3x^2-x)\sqrt{2x+1}$; h) $y = x\sqrt{16-x^2} + (x-1)\sqrt{x}$; i) $y = \sqrt{(x-2)^3}$

Bài 5. Tính các đạo hàm sau:

- a) $y = (x^7 + x)^2$. b) $y = (2x^3 - 3x^2 - 6x + 1)^2$. c) $y = (x^7 + 3x^4 + 2)^{10}$.
 d) $y = (x^4 - 2x^2 + x - 1)^2$. e) $y = (x^2 - 2x + 3)(2x + 1)^3$. f) $y = (3x - 5x^2 + 4x^3)^{10}(x + 3)^5$.

Bài 6. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

- a) $y = x - \frac{9}{x} + \frac{2}{x^4 + 6x^3 - 1}$; b) $y = \frac{1}{x+1} - 2x$; c) $y = -x + 1 - \frac{1}{x+2}$;
 d) $y = \frac{1}{(2x-5)^2}$; e) $y = \frac{1}{x^2-3x+1}$; f) $y = \frac{4}{(x^2-2x+5)^2}$;
 g) $y = x - \frac{3}{(x^2-3x)^{10}}$; h) $y = \frac{1}{x} - \frac{2}{(3x-x^2)^5}$; i) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2x-1)^5}$;
 j) $y = \frac{3}{x-1} + \frac{5}{2(2x-1)^6}$;

DẠNG
2

Chứng minh, giải phương trình và bất phương trình chứa đạo hàm

Bài 7. Cho các hàm số sau. Hãy giải phương trình $y' = 0$

- a) $y = \frac{x^2+3x+3}{x+1}$; b) $y = \frac{2x^2+2}{1-x}$; c) $y = 3x + \sqrt{10-x^2}$.

Bài 8. Giải phương trình $f'(x) = 0$, biết

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$;

2) $f(x) = -2x^4 - x^2 + 4$;

Bài 9. Cho $f(x) = 2x^3 - x^2 + \sqrt{3}$, $g(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{3}$. Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$.

Bài 10. Cho $f(x) = 3x + \frac{60}{x} - \frac{64}{x^3} + 5$. Giải phương trình $f'(x) = 0$.

Bài 11. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 7}$. Giải bất phương trình $f'(x) \geq \frac{1}{2}$.

Bài 12. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + mx + 5$. Tất cả các giá trị của tham số m để, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 13. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 4x + 2019$. Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $y' \leq 0$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng:

Bài 14. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 1010x^2 + 2019x - 2020$. Giải bất phương trình $y' \geq 0$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm đạo hàm của hàm số $y = k$, với k là hằng số.

- A. $y' = -1$. B. $y' = 0$. C. $y' = 1$. D. $y' = k$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = ax + b$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f'(x) = a$. B. $f'(x) = -a$. C. $f'(x) = b$. D. $f'(x) = -b$.

Câu 3. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \frac{ax + b}{a + b}$

- A. $y' = 0$. B. $y' = 1$. C. $y' = \frac{a}{a + b}$. D. $y' = \frac{b}{a + b}$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + b^2$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f'(x) = a$. B. $f'(x) = 2b$. C. $f'(x) = 2ax$. D. $f'(x) = 2ax + 2b$.

Câu 5. Cho hàm số $y = \frac{4}{x-1}$. Khi đó $y'(-1)$ bằng

- A. -1 . B. -2 . C. 2 . D. 1 .

Câu 6. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+7}{x+4}$ tại $x = 2$ ta được:

- A. $f'(2) = \frac{1}{36}$. B. $f'(2) = \frac{11}{6}$. C. $f'(2) = \frac{3}{2}$. D. $f'(2) = \frac{5}{12}$.

Câu 7. Tính đạo hàm của hàm số $y = x(x+1)(x+2)(x+3)$ tại điểm $x_0 = 0$ là:

- A. $y'(0) = 5$. B. $y'(0) = 6$. C. $y'(0) = 0$. D. $y'(0) = -6$.

Câu 8. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x} + x$ tại điểm $x_0 = 4$ là:

- A. $y'(4) = \frac{9}{2}$. B. $y'(4) = 6$. C. $y'(4) = \frac{3}{2}$. D. $y'(4) = \frac{5}{4}$.

Câu 9. Đạo hàm của hàm số $y = 5 \sin x - 3 \cos x$ tại $x_0 = \frac{\pi}{2}$ là:

- A. $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$. B. $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$. C. $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$. D. $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -5$.

Câu 10. Cho $f(x) = x^5 + x^3 - 2x - 3$. Tính $f'(1) + f'(-1) + 4f'(0)$? Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. 4. B. 7. C. 6. D. 5.

Câu 11. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$. Tính $y'(3)$

- A. $\frac{5}{2}$. B. $-\frac{3}{4}$. C. $-\frac{3}{2}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

- A. Không tồn tại. B. $f'(0) = \frac{1}{16}$. C. $f'(0) = \frac{1}{4}$. D. $f'(0) = \frac{1}{32}$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+4}}$. Tính giá trị biểu thức $f'(0)$.

- A. -3. B. -2. C. $\frac{3}{2}$. D. 3.

Câu 14. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 + 2x + 1$.

- A. $y' = 3x^2 + 2x$. B. $y' = 3x^2 + 2$. C. $y' = 3x^2 + 2x + 1$. D. $y' = x^2 + 2$.

Câu 15. Khẳng định nào sau đây sai

- A. $y = x \Rightarrow y' = 1$. B. $y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2$.
 C. $y = x^5 \Rightarrow y' = 5x$. D. $y = x^4 \Rightarrow y' = 4x^3$.

Câu 16. Hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 2018$ có đạo hàm là

- A. $y' = 3x^2 - 4x + 2018$. B. $y' = 3x^2 - 2x - 4$.
 C. $y' = 3x^2 - 4x - 4$. D. $y' = x^2 - 4x - 4$.

Câu 17. Đạo hàm của hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$ (với m là tham số) bằng

- A. $3x^2 - 6mx - 3 + 3m^2$. B. $-x^2 + 3mx - 1 - 3m$.
 C. $-3x^2 + 6mx + 1 - m^2$. D. $-3x^2 + 6mx + 3 - 3m^2$.

Câu 18. Đạo hàm của hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 3$ là

- A. $y' = -4x^3 + 8x$. B. $y' = 4x^2 - 8x$. C. $y' = 4x^3 - 8x$. D. $y' = -4x^2 + 8x$.

Câu 19. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \sqrt{2x} + a^2$ (a là hằng số) bằng.

- A. $2x^3 + 5x^2 - \frac{1}{\sqrt{2x}} + 2a$. B. $2x^3 + 5x^2 + \frac{1}{2\sqrt{2x}}$.
 C. $2x^3 + 5x^2 - \frac{1}{\sqrt{2x}}$. D. $2x^3 + 5x^2 - \sqrt{2}$.

Câu 20. Hàm số nào sau đây có đạo hàm bằng $\frac{1}{\sqrt{2x}}$?

- A. $f(x) = 2\sqrt{x}$. B. $f(x) = \sqrt{x}$. C. $f(x) = \sqrt{2x}$. D. $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

Câu 21. Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 5)\sqrt{x}$.

- A. $y' = \frac{7}{2}\sqrt[5]{x^2} - \frac{5}{2\sqrt{x}}$. B. $y' = \frac{7}{2}\sqrt{x^5} - \frac{5}{2\sqrt{x}}$.
 C. $y' = 3x^2 - \frac{5}{2\sqrt{x}}$. D. $y' = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Câu 22. Hàm số nào sau đây có đạo hàm bằng $3x^2 - 2x$?

A. $y = 3x^3 - 2x^2 + 2022$.

B. $y = x^3 - x^2 + 2022$.

C. $y = 3x^3 - 3x^2$.

D. $y = x^2(3x + 2) + 2022$.

Câu 23. Cho hàm số $S(r)$ là diện tích hình tròn tính theo bán kính $r (r > 0)$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S'(r)$ là chu vi của đường tròn bán kính $2r$.

B. $S'(r)$ là chu vi của đường tròn bán kính $\frac{r}{2}$.

C. $S'(r)$ là chu vi của đường tròn bán kính $4r$.

D. $S'(r)$ là chu vi của đường tròn bán kính r .

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = \frac{m}{3}x^3 - (m-2)x^2 + x + 2$. Để đạo hàm $f'(x)$ bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất thì giá trị m là

A. -1 hoặc 1 .

B. 1 hoặc 4 .

C. -4 hoặc 4 .

D. Không có giá trị nào.

Câu 25. Cho $f(u) = u^3$ và $u(x) = x^2 + 3x + 1$. Đạo hàm của hàm số $y = f[u(x)]$ là

A. $y' = 3(x^2 + 3x + 1)^2 \cdot (2x + 3)$.

B. $y' = 3(x^2 + 3x + 1)^2$.

C. $y' = (x^2 + 3x + 1)^2 \cdot (2x + 3)$.

D. $y' = (x^2 + 3x + 1)^2$.

Câu 26. Cho $f(x) = x^{2022} - 1011x^2 + 2021x$. Giá trị của $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + 1) - f(1)}{\Delta x}$ bằng

A. 1011 .

B. 2020 .

C. 2021 .

D. 2022 .

Câu 27. Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2)(2x - 1)$ là

A. $y' = 4x$.

B. $y' = 3x^2 - 6x + 2$.

C. $y' = 2x^2 - 2x + 4$.

D. $y' = 6x^2 - 2x - 4$.

Câu 28. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào có đạo hàm bằng $12x(2x^2 + 1)^2$?

A. $y = 2(x^2 + 1)^3$.

B. $y = (2x^2 + 1)^3$.

C. $y = x(2x^2 + 1)^3$.

D. $y = 2x(2x^2 + 1)^3$.

Câu 29. Đạo hàm của $y = x^2(2x + 1)(5x - 3)$ là biểu thức có dạng $ax^3 + bx^2 + cx$. Tổng $a + b + c$ bằng

A. 24 .

B. 31 .

C. 34 .

D. 51 .

Câu 30. Tìm đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^{2021}$

A. $y' = 2021(x^3 - 2x^2)^{2021}$.

B. $y' = 2021(x^3 - 2x^2)^{2020}(3x^2 - 4x)$.

C. $y' = 2021(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 4x)$.

D. $y' = 2021(3x^2 - 4x)^{2021}$.

Câu 31. Đạo hàm của hàm số $y = (5x^2 - x + 2)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $y' = \frac{10x - 1}{3\sqrt[3]{(5x^2 - x + 2)^2}}$.

B. $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(5x^2 - x + 2)^2}}$.

C. $y' = \frac{10x - 1}{3\sqrt[3]{5x^2 - x + 2}}$.

D. $y' = \frac{10x - 1}{\sqrt[3]{(5x^2 - x + 2)^2}}$.

Câu 32. Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 4x + 5)^{\sqrt{3}}$ là

A. $y' = (2x - 4)(x^2 - 4x + 5)^{\sqrt{3}-1}$.

B. $y' = \sqrt{3}(2x - 4)(x^2 - 4x + 5)^{\sqrt{3}-1}$.

C. $y' = (2x - 4)^{\sqrt{3}-1}$.

D. $y' = \sqrt{3}(2x - 4)^{\sqrt{3}-1}(x^2 - 4x + 5)$.

Câu 33. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 1 & \text{khi } x > 1 \\ 2x + 2 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$. Xét các mệnh đề sau:

1) Hàm số liên tục tại $x = 1$.

2) $f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{khi } x > 1 \\ 2 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$.

3) Hàm số không có đạo hàm tại $x = 1$.

Trong các mệnh đề trên, có bao nhiêu mệnh đề sai?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 34. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x - 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.
 B. Hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 1$.
 C. $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \geq 1 \\ 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.
 D. $f'(1) = 1$.

Câu 35. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Biết hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2$

.Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

- A. 17. B. 18. C. 20. D. 25.

Câu 36. Cho hàm số $f(x) = x^2 + |x - 1|$. Tính $f'(1)$

- A. $f'(1) = 1$. B. $f'(1) = 2$. C. $f'(1) = 3$. D. Không tồn tại.

Câu 37. Xét các mệnh đề sau:

- i) Hàm số $f(x) = |x|$ có $f'(0) = 0$.
 ii) Hàm số $f(x) = |x^{2021}|$ có $f'(0) = 0$.
 iii) Đạo hàm của hàm số $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ bằng 0 tại ba điểm phân biệt.

Những mệnh đề đúng là

- A. i), ii). B. ii), iii). C. i), ii), iii). D. ii).

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x + a}{x - b}$ ($a, b \in \mathbb{R}; b \neq 1$). Giá trị $f'(1)$ bằng

- A. $\frac{-a + 2b}{(b - 1)^2}$.
 B. $\frac{-a - 2b}{(b - 1)^2}$.
 C. $\frac{-a + 2b}{b - 1}$.
 D. $\frac{-a - 2b}{b - 1}$.

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + \frac{b}{x}$ có $f'(1) = 1$ và $f'(2) = -2$. Khi đó $f'(\sqrt{2})$ bằng

- A. $-\frac{12}{5}$. B. $-\frac{2}{5}$. C. 2. D. $\frac{12}{5}$.

Câu 40. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x + 2}{x + 5m}$ có đạo hàm dương trên khoảng $(-\infty; -10)$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Câu 41. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 1}}$ là:

- A. $\frac{1 - 3x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.
 B. $\frac{1 + 3x}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.
 C. $\frac{1 - 3x}{x^2 + 1}$.
 D. $\frac{2x^2 - x - 1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.

Câu 42. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$. Tính giá trị của biểu thức $S = f(1) + 4f'(1)$.

- A. $S = 4$. B. $S = 2$. C. $S = 6$. D. $S = 8$.

Câu 43. Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 5x - 4}$. Đạo hàm y' của hàm số là

- A. $y' = \frac{4x + 5}{2\sqrt{2x^2 + 5x - 4}}$.
 B. $y' = \frac{2x + 5}{2\sqrt{2x^2 + 5x - 4}}$.
 C. $y' = \frac{2x + 5}{\sqrt{2x^2 + 5x - 4}}$.
 D. $y' = \frac{4x + 5}{\sqrt{2x^2 + 5x - 4}}$.

Câu 44. Cho các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng J và $v(x) \neq 0$ với $\forall x \in J$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$.

B. $\left[\frac{1}{v(x)}\right]' = \frac{v'(x)}{v^2(x)}$.

C. $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$.

D. $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v^2(x)}$.

Câu 45. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 - \frac{1}{x}$.

A. $y' = 2x - \frac{1}{x^2}$.

B. $y' = x - \frac{1}{x^2}$.

C. $y' = x + \frac{1}{x^2}$.

D. $y' = 2x + \frac{1}{x^2}$.

Câu 46. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$

A. $y' = \frac{2}{(x-1)^2}$.

B. $y' = \frac{2}{(x-1)}$.

C. $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

D. $y' = \frac{-2}{(x-1)}$.

Câu 47. Hàm số $y = \frac{1}{x^2 + 5}$ có đạo hàm bằng:

A. $y' = \frac{1}{(x^2 + 5)^2}$.

B. $y' = \frac{2x}{(x^2 + 5)^2}$.

C. $y' = \frac{-1}{(x^2 + 5)^2}$.

D. $y' = \frac{-2x}{(x^2 + 5)^2}$.

Câu 48. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 7}{x^2 + 2x + 3}$.

A. $y' = \frac{-7x^2 + 2x + 23}{(x^2 + 2x + 3)^2}$.

B. $y' = \frac{7x^2 - 2x - 23}{(x^2 + 2x + 3)^2}$.

C. $y' = \frac{7x^2 - 2x - 23}{(x^2 + 2x + 3)}$.

D. $y' = \frac{8x^3 + 3x^2 + 14x + 5}{(x^2 + 2x + 3)^2}$.

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+a}{x-b}$ ($a, b \in \mathbb{R}; b \neq 1$). Ta có $f'(1)$ bằng:

A. $\frac{-a+2b}{(b-1)^2}$.

B. $\frac{a-2b}{(b-1)^2}$.

C. $\frac{a+2b}{(b-1)^2}$.

D. $\frac{-a-2b}{(b-1)^2}$.

Câu 50. Cho $f(x) = \sqrt{1-4x} + \frac{1-x}{x-3}$. Tính $f'(x)$.

A. $\frac{2}{\sqrt{1-4x}} - \frac{2}{x-3}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{1-4x}} - \frac{2}{(x-3)^2}$.

C. $\frac{1}{2\sqrt{1-4x}} + 1$.

D. $\frac{-2}{\sqrt{1-4x}} + \frac{2}{(x-3)^2}$.

Câu 51. Đạo hàm của hàm số $y = (2x-1)\sqrt{x^2+x}$ là

A. $y' = \frac{8x^2 + 4x - 1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

B. $y' = \frac{8x^2 + 4x + 1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

C. $y' = \frac{4x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

D. $y' = \frac{6x^2 + 2x - 1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

Câu 52. Đạo hàm của hàm số $y = (-x^2 + 3x + 7)^7$ là

A. $y' = 7(-2x+3)(-x^2 + 3x + 7)^6$.

B. $y' = 7(-x^2 + 3x + 7)^6$.

C. $y' = (-2x+3)(-x^2 + 3x + 7)^6$.

D. $y' = 7(-2x+3)(-x^2 + 3x + 7)^6$.

Câu 53. Đạo hàm của hàm số $y = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^3$ bằng

A. $y' = 6\left(x + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$.

B. $y' = 3\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$.

C. $y' = 6\left(x - \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$.

D. $y' = 6\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$.

Câu 54. Cho hai hàm số $f(x) = \frac{-1}{x^2+1}$ và $g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
 A. $f'(x) = g'(x)$. B. $f'(x) = -g'(x)$. C. $1 + f'(x) = g'(x)$. D. $f'(x) = 1 + g'(x)$.

Câu 55. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{(x-1)(x+3)}$
 A. $y' = \frac{1}{(x+3)^2(x-1)^2}$. B. $y' = \frac{-1}{(x+3)^2(x-1)^2}$.
 C. $y' = -\frac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}$. D. $y' = \frac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}$.

Câu 56. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$ có dạng $\frac{ax^2+bx}{(x-1)^2}$. Tích $a \cdot b$ bằng
 A. -2. B. -1. C. 3. D. 4.

Câu 57. Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$ và số dương α thỏa mãn $f'(\alpha) = 0$. Tính $f(\alpha)$
 A. $f(\alpha) = \frac{1}{8}$. B. $f(\alpha) = \frac{1}{4}$. C. $f(\alpha) = \frac{1}{2}$. D. $f(\alpha) = 1$.

Câu 58. Hàm số nào sau đây có đạo hàm là $2x + \frac{1}{x^2}$?
 A. $y = \frac{x^3-1}{x}$. B. $y = \frac{3(x^2+x)}{x^3}$. C. $y = \frac{x^3-5x+1}{x}$. D. $y = \frac{2x^2+x-1}{x}$.

Câu 59. Tính đạo hàm của hàm số $y = \left(m + \frac{n}{x^2}\right)^3$ (m, n là các hằng số).
 A. $y' = -\frac{6}{x^3} \left(m + \frac{n}{x^2}\right)^2$. B. $y' = \frac{6}{x^3} \left(m + \frac{n}{x^2}\right)^2$.
 C. $y' = -\frac{6n}{x^3} \left(m + \frac{n}{x^2}\right)^2$. D. $y' = \frac{6n}{x^3} \left(m + \frac{n}{x^2}\right)^2$.

Câu 60. Cho hàm số $g(x) = \frac{(2x+1)(2-3x)^2}{x-1}$. Tính $g'(2)$
 A. $g'(2) = -75$. B. $g'(2) = 72$. C. $g'(2) = 152$. D. $g'(2) = 232$.

Câu 61. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. Hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y' = n \cdot x^{n-1}$.
- B. Hàm số $y = x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y' = 1$.
- C. Hàm số hằng $y = c$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y' = 0$.
- D. Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Câu 62. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ Kết quả $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f(x+a) - f(x)}{a}$ (với $x > 0$) bằng
 A. $\frac{1}{\sqrt{x}}$. B. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. C. $\frac{1}{\sqrt{a}}$. D. $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Câu 63. Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt{x}$
 A. $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. B. $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.
 C. $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{x}$. D. $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} + 1$.

Câu 64. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{x\sqrt{x}}$
 A. $y' = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$. B. $y' = -\frac{1}{2x^2\sqrt{x}}$. C. $y' = \frac{1}{2x^2\sqrt{x}}$. D. $y' = \frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$.

Câu 65. Cho hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x}$ với $x > 0$ Giá trị $f'(8)$ bằng

- A. $-\frac{1}{6}$. B. $-\frac{1}{12}$. C. $\frac{1}{12}$. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 66. Cho hàm số $f(x) = k \cdot \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}$ Với giá trị nào của k thì $f'(1) = \frac{3}{2}$?

- A. $k = -3$. B. $k = 3$. C. $k = 1$. D. $k = \frac{9}{2}$.

Câu 67. Hàm số $y = \sqrt[3]{x^2}$ có đạo hàm là

- A. $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$. B. $y' = \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}$. C. $y' = \frac{3}{2\sqrt[3]{x}}$. D. $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

Câu 68. Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = -1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

- A. $f'(x) = -\frac{1}{3}x\sqrt[3]{x}$. B. $f'(x) = \frac{1}{3}x\sqrt[3]{x}$. C. $f'(x) = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$. D. $f'(x) = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x^2}}$.

Câu 69. Cho hàm số $f(u) = \sqrt{u}$ và $u(x) = 2x + 1$ Tính đạo hàm của hàm $y = f[u(x)]$

- A. $y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. B. $y' = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$. C. $y' = \frac{-1}{\sqrt{2x+1}}$. D. $y' = \frac{-1}{2\sqrt{2x+1}}$.

Câu 70. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2}$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f'(0) = 0$. B. $f'(0) = 2$. C. $f'(0) = 1$. D. Không tồn tại $f'(0)$.

Câu 71. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

- A. $y' = \frac{\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$. B. $y' = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x^2 + x\sqrt{x}}}$.
C. $y' = \frac{\sqrt{x} + 2}{4\sqrt{x^2 + x}}$. D. $y' = \frac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

Câu 72. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ có dạng $\frac{ax + b}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$ Tích $a \cdot b$ bằng

- A. -4 . B. -1 . C. 0 . D. 1 .

Câu 73. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{ax^2 + 2x}$ có đạo hàm tại $x = 1$, giá trị của $f'(1)$ bằng

- A. $\sqrt{a+2}$. B. $\frac{a-3}{\sqrt{a+2}}$. C. $\frac{a+1}{\sqrt{a+2}}$. D. $\frac{2a+2}{\sqrt{a+2}}$.

Câu 74. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x^3}$

- A. $y' = \frac{x - 6x^2}{\sqrt{x^2 - 4x^3}}$. B. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4x^3}}$. C. $y' = \frac{x - 12x^2}{2\sqrt{x^2 - 4x^3}}$. D. $y' = \frac{x - 6x^2}{2\sqrt{x^2 - 4x^3}}$.

Câu 75. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{(2x+1)^{2021}}$

- A. $y' = \frac{2021}{2\sqrt{(2x+1)^{2021}}}$. B. $y' = \frac{2021(2x+1)^{2020}}{2\sqrt{(2x+1)^{2021}}}$.
C. $y' = \frac{(2x+1)^{2021}}{2\sqrt{(2x+1)^{2021}}}$. D. $y' = \frac{2021(2x+1)^{2020}}{\sqrt{(2x+1)^{2021}}}$.

Câu 76. Cho hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y'\sqrt{x^2 + 1} = y$. B. $2y'\sqrt{x^2 + 1} = y$. C. $y'\sqrt{x^2 + 1} = 2y$. D. $2y\sqrt{x^2 + 1} = y'$.

Câu 77. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (a là hằng số) là

- A. $\frac{-a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$. B. $\frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$. C. $\frac{-2a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$. D. $\frac{2a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}$.

Câu 78. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \frac{a^3}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (a là hằng số).

A. $y' = \frac{a^3x}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

B. $y' = \frac{a^3x}{2(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$.

C. $y' = \frac{a^3x}{a^2 - x^2}$.

D. $y' = \frac{a^3x}{2(a^2 - x^2)}$.

Câu 79. Đạo hàm của hàm số $y = x\sqrt{x-1}$ có dạng $\frac{ax+b}{\sqrt{x-1}}$ Tổng $2a+b$ bằng

A. -2.

B. 2.

C. 4.

D. 5.

Câu 80. Đạo hàm của hàm số $y = (3x-7)\sqrt{2x+1}$ có dạng $\frac{mx+n}{\sqrt{2x+1}}$ Tổng $m+n$ bằng

A. 5.

B. 7.

C. 13.

D. 11.

Câu 81. Tìm đạo hàm của hàm số $y = (x-2)\sqrt{x^2+1}$

A. $y' = \frac{2x^2 - 2x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

B. $y' = \frac{2x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

C. $y' = \frac{2x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

D. $y' = \frac{2x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Câu 82. Tìm đạo hàm của hàm số $y = (2x-1)\sqrt{x^2+x}$

A. $y' = 2\sqrt{x^2+x} - \frac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

B. $y' = 2\sqrt{x^2+x} + \frac{4x^2-1}{\sqrt{x^2+x}}$.

C. $y' = 2\sqrt{x^2+x} + \frac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

D. $y' = 2\sqrt{x^2+x} + \frac{4x^2+1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

Câu 83. Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

A. $f'(x) = x + \frac{1}{x} - 2$.

B. $f'(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

C. $f'(x) = x - \frac{1}{x^2}$.

D. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

Câu 84. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$

A. $y' = -\frac{1}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2}$.

B. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-1}}$.

C. $y' = \frac{1}{4\sqrt{x+1}} + \frac{1}{4\sqrt{x-1}}$.

D. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Câu 85. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \frac{\sqrt{x}}{1-2x}$

A. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-2x)^2}$.

B. $y' = \frac{1}{-4\sqrt{x}}$.

C. $y' = \frac{1-2x}{2\sqrt{x}(1-2x)^2}$.

D. $y' = \frac{1+2x}{2\sqrt{x}(1-2x)^2}$.

Câu 86. Cho hàm số $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+4}}$ Giá trị của $f'(0)$ bằng

A. -3.

B. -2.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 3.

Câu 87. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{3-2x}{\sqrt{4x-1}}$ có dạng $\frac{ax-b}{(4x-1)\sqrt{4x-1}}$ Tỉ số $\frac{a}{b}$ bằng

A. -16.

B. -4.

C. -1.

D. 4.

Câu 88. Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}\right)^2$

A. $f'(x) = \frac{-2(1 - \sqrt{x})}{(1 + \sqrt{x})^3}$.

B. $f'(x) = \frac{-2(1 - \sqrt{x})}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^3}$.

C. $f'(x) = \frac{2(1 - \sqrt{x})}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2}$.

D. $f'(x) = \frac{2(1 - \sqrt{x})}{1 + \sqrt{x}}$.

Câu 89. Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$

A. $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} \left(x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$.

B. $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} \left(x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$.

C. $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} \left(-x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$.

D. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(x^2 - 3x + 3 - \frac{1}{x}\right)$.

Câu 90. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x$. Tập nghiệm của bất phương trình $y' \geq 0$ là

A. $[-1; 5]$.

B. $\emptyset$.

C. $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$.

D. $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

Câu 91. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 3x - 5$ với m là tham số. Tìm tập hợp M tất cả các giá trị của m để $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt:

A. $M = (-3; 3)$.

B. $M = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

C. $M = \mathbb{R}$.

D. $M = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

Câu 92. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2017$. Bất phương trình $y' < 0$ có tập nghiệm là:

A. $S = (-1; 1)$.

B. $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(-\infty; -1)$.

Câu 93. Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3$. Tìm x để $f'(x) > 0$?

A. $-1 < x < 0$.

B. $x < 0$.

C. $x > 0$.

D. $x < -1$.

Câu 94. Cho hàm số $y = (m - 1)x^3 - 3(m + 2)x^2 - 6(m + 2)x + 1$. Tập giá trị của m để $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

A. $[3; +\infty)$.

B. $\emptyset$.

C. $[4\sqrt{2}; +\infty)$.

D. $[1; +\infty)$.

Câu 95. Cho hàm số $y = (m + 2)x^3 + \frac{3}{2}(m + 2)x^2 + 3x - 1$, m là tham số. Số các giá trị nguyên m để $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

A. 5.

B. Có vô số giá trị nguyên m .

C. 3.

D. 4.

Câu 96. Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3mx^2 - 12x + 3$ với m là tham số thực. Số giá trị nguyên của m để $f'(x) \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ là

A. 1.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Câu 97. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$. Tổng $S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2021)$ bằng

A. $P = \frac{1 - \sqrt{2021}}{\sqrt{2021}}$.

B. $P = \frac{-1 + \sqrt{2022}}{2\sqrt{2021}}$.

C. $P = \frac{1 - \sqrt{2022}}{2\sqrt{2022}}$.

D. $P = \frac{1 - \sqrt{2022}}{\sqrt{2022}}$.

Câu 98. Cho hai hàm số $f(x) = x + 2$ và $g(x) = x^2 - 2x + 3$. Đạo hàm của hàm số $y = g[f(x)]$ tại $x = 1$ bằng

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 7.

- Câu 99.** Cho hai hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ và $g(x) = 3x - 2$. Đạo hàm của hàm số $y = f[g(x)]$ tại $x = 3$ bằng
- A. $\frac{7}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{14}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{18}{\sqrt{5}}$. D. $\frac{15}{\sqrt{21}}$.
- Câu 100.** Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(2) = 3$. Đặt $g(x) = f(x^2 + 1)$, giá trị $g'(1)$ bằng
- A. 1. B. 3. C. 5. D. 6.
- Câu 101.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f(-4x + 11) = x^3 - 2x^2 + 3$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị $f'(-1)$ bằng
- A. $-\frac{15}{4}$. B. $-\frac{13}{4}$. C. -15. D. 10.
- Câu 102.** Cho hàm số $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3) \cdots (x+n)$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tính $f'(0)$
- A. $f'(0) = 0$. B. $f'(0) = n$. C. $f'(0) = n!$. D. $f'(0) = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Câu 103.** Cho hàm số $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3) \cdots (x+2021)$ Tính $f'(-2)$
- A. $f'(-2) = 2 \times 2019!$. B. $f'(-2) = -2 \times 2019!$.
 C. $f'(-2) = 2 \times 2020!$. D. $f'(-2) = -2 \times 2020!$.
- Câu 104.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2) \cdots (x-2021)}$. Giá trị của $f'(0)$ bằng
- A. $-\frac{1}{2021!}$. B. $\frac{1}{2021!}$. C. $-2021!$. D. $2021!$.
- Câu 105.** Cho hàm số $f(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2021}$. Tính $L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$
- A. $L = 2020 \cdot 2^{2021} + 1$. B. $L = 2021 \cdot 2^{2020} + 1$.
 C. $L = 2020 \cdot 2^{2021} - 1$. D. $L = 2021 \cdot 2^{2020} - 1$.
- Câu 106.** Cho hàm số $f(x) = (2021+x)(2020+2x)(2019+3x) \cdots (1+2021x)$ Tính $f'(1)$
- A. 1010×2022^{2020} . B. $\frac{2021}{2} \times 2022^{2020}$. C. 1011×2022^{2020} . D. $\frac{2021}{2} \times 2022^{2021}$.
- Câu 107.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Xét các hàm số $g(x) = f(x) - f(2x)$ và $h(x) = f(x) - f(4x)$. Biết rằng $g'(1) = 21$ và $g'(2) = 1000$. Tính $h'(1)$
- A. -2021. B. -2020. C. 2020. D. 2021.
- Câu 108.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(2x) = 4f(x) \cos x - 2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại giao điểm của đồ thị với trục tung là
- A. $y = 2 - x$. B. $y = -x$. C. $y = x$. D. $y = 2x - 1$.
- Câu 109.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(1-x) + f^2(1+2x) = 4f^2(1+3x) - 7x - 2$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 đi qua điểm nào sau đây?
- A. $(-1; 1)$. B. $(1; 3)$. C. $(2; 4)$. D. $(-2; 0)$.
- Câu 110.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f^2(3-x) = x - f^3(3-2x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 3 đi qua điểm nào sau đây?
- A. $(1; 0)$. B. $(-1; 0)$. C. $(4; 1)$. D. $(4; 3)$.

Câu 111. Đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và $y = \frac{f(x) + 3}{g(x) + 3}$ có tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 1$ có cùng hệ số góc và khác 0. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f(1) \leq -\frac{11}{4}$. B. $f(1) < -\frac{11}{4}$. C. $f(1) > \frac{11}{4}$. D. $f(1) \geq \frac{11}{4}$.

Câu 112. Đồ thị các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ có tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 2$ có hệ số góc lần lượt là k_1, k_2, k_3 thỏa mãn $k_1 = k_2 = 2k_3 \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f(2) \leq \frac{1}{2}$. B. $f(2) > \frac{1}{2}$. C. $f(2) < \frac{1}{2}$. D. $f(2) \geq \frac{1}{2}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. B	2. A	3. C	4. C	5. A	6. A	7. B	8. D	10. A	11. B
12. B	13. C	14. B	15. C	16. C	17. D	18. C	19. C	20. C	21. B
22. B	23. D	24. B	25. A	26. C	27. D	28. B	29. B	30. B	31. B
32. B	33. C	34. D	35. C	36. D	37. D	38. B	39. B	40. B	41. A
42. A	43. A	44. B	45. D	46. C	47. D	48. B	49. D	50. D	51. A
52. A	53. A	54. A	55. C	56. A	57. B	58. A	59. C	60. B	61. D
62. D	63. B	64. A	65. C	66. B	67. D	68. C	69. A	70. D	71. B
72. B	73. C	74. A	75. D	76. B	77. B	78. A	79. B	80. A	81. D
82. C	83. D	84. C	85. D	86. C	87. C	88. B	89. A	90. D	91. D
92. A	93. C	94. B	95. A	96. B	97. C	98. C	99. A	100. D	101. A
102. C	103. A	104. A	105. A	106. D	107. D	108. C	109. D	110. B	111. A
112. A									

BÀI

3

Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM

A

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Ý nghĩa của đạo hàm

1) Ý nghĩa hình học

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $m(x_0; f(x_0))$ có dạng:

$$y = k(x - x_0) + f(x_0)$$

với $k = f'(x_0)$ là hệ số tiếp tuyến.

2) Ý nghĩa vật lí

Vận tốc tức thời $v(t) = s'(t)$, gia tốc tức thời $a(t) = v'(t)$.

Cường độ dòng điện tức thời $I(t) = Q'(t)$.

2. Phương trình tiếp tuyến của đường cong

Cho đồ thị $(C): y = f(x)$ và $M(x_0; y_0 \in (C))$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là

$$\Delta: y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0.$$

Trong đó,

- ☑ $M(x_0; y_0)$: tọa độ tiếp điểm ($y_0 = f(x_0)$);
- ☑ $y'(x_0) = k$: hệ số góc của phương trình tiếp tuyến.

B

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DẠNG
1

Viết phương trình tiếp tuyến tại một điểm

Bài 1. Viết phương trình tiếp tuyến Δ tại

- a) $M(1; -1)$ thuộc đồ thị $(C): y = 3x^3 - 5x^2 + 1$; b) $M(1; 1)$ thuộc đồ thị $(C): y = 2x^3 - 6x + 1$;
 c) $M(-2; 5)$ thuộc đồ thị $(C): y = \frac{3x+1}{x+1}$; d) $M(2; 4)$ thuộc đồ thị $(C): y = \frac{x^2 - x + 2}{x - 1}$;
 e) $M(0; 3)$ thuộc đồ thị $(C): y = x + 1 - \frac{2}{2x-1}$; f) $M(1; 0)$ thuộc đồ thị $(C): y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Bài 2. Cho hàm số $y = x^3 - x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm M có hoành độ $x_0 = -1$.
ĐS: $\Delta: y = 5x + 5$.

Bài 3. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm M có hoành độ $x_0 = 1$.

Bài 4. Cho hàm số $y = \frac{2x-2}{x-2}$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm có tung độ bằng 3.
ĐS: $\Delta: y = -\frac{1}{2}x + 5$.

Bài 5. Với $(C): y = 2x^3 + 3x^2 - 1$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm có tung độ $y_0 = 4$.
ĐS: $\Delta: y = 12x - 8$.

Bài 6. Với $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.
ĐS: $\Delta: y = -3x - 1$.

Bài 7. Với $(C): y = 2x - \sqrt{2x^2 + 1}$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.
ĐS: $\Delta: y = x - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 8. Với $(C): y = \frac{x+2}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) và đường thẳng $d: y = 2$.
ĐS: $\Delta: y = -x + 2$.

Bài 9. Với $(C): y = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x - 1$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) và đường thẳng $d: y + 1 = 0$.
ĐS: $\Delta_1: y = 3x - 1, \Delta_2: y = -1$.

Bài 10. Với $(C): \frac{3-2x}{x-1}$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) và đường thẳng $d: y = x - 3$.
ĐS: $\Delta_1: y = -x + 1, \Delta_2: y = -x - 3$.

Bài 11. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là (C) . Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) và đường thẳng $d: x + y + 3 = 0$.
ĐS: $\Delta: y = 9x + 7$.

Bài 12. Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{11}{8}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại giao điểm của (C) và đường thẳng $d: y = 4x + 4$ có hoành độ dương.
ĐS: $y = 24x - 66$

DẠNG

2

Viết phương trình tiếp tuyến khi biết điểm đi qua

Cách 1: Sử dụng điều kiện tiếp xúc của 2 đồ thị

Bước 1. Phương trình tiếp tuyến đi qua $A(x_A; y_A)$ có hệ số góc k có dạng $d: y = k(x - x_A) + y_A$.
 (*)

Bước 2. Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} f(x) = k(x - x_A) + y_A \\ f'(x) = k. \end{cases}$$

Bước 3. Giải hệ trên, tìm được x từ đó tìm được k và thế vào phương trình (*) ta được phương trình tiếp tuyến cần tìm.

Cách 2: Sử dụng PTTT tại 1 điểm

Bước 1. Gọi $M(x_0, f(x_0))$ là tiếp điểm, tính hệ số góc tiếp tuyến $k = f'(x_0)$ theo x_0 .

Bước 2. Phương trình tiếp tuyến (d) có dạng: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (*)
 Vì điểm $A(x_A; y_A) \in (d)$ nên $y_A = f'(x_0)(x_A - x_0) + f(x_0)$, giải phương trình này tìm được x_0 .

Bước 3. Thay x_0 tìm được vào phương trình (*) ta được PTTT cần viết.

Bài 13. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = x^3 + 3x^2 - 6x + 1$, biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(0; 1)$.
ĐS: $\Delta_1: y = -6x + 1; \Delta_2: y = -\frac{33}{4}x + 1$

Bài 14. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(-1; 6)$.
ĐS: $\Delta_1: y = 6, \Delta_2: y = -9x - 3$

Bài 15. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$, biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(-7; 5)$.
ĐS: $\Delta_1: y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}, \Delta_2: y = -\frac{3}{16}x - \frac{59}{16}$

Bài 16. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = \frac{2x-1}{x+1}$, biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(-1; 4)$.
ĐS: $\Delta: y = \frac{1}{3}x - \frac{13}{3}$

Bài 17. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = x^3 - 2x^2 + x + 4$, biết tiếp tuyến Δ đi qua điểm $M(-4; -24)$. **ĐS:** $\Delta_1: y = 8x + 8, \Delta_2: y = 5x - 4, \Delta_3: y = 133x + 508$

DẠNG 3

Viết phương trình tiếp tuyến biết hệ số góc k

Phương pháp giải

- ✓ Tính $y' = f'(x)$.
- ✓ Giải phương trình $k = f'(x_0)$ để tìm x_0 .
- ✓ Thay vào phương trình của hàm số $y = f(x)$ để tính y_0 .
- ✓ Thay vào phương trình $y = y'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$.

Bài 18. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến Δ với (C) , biết hệ số góc $k = 2$. **ĐS:** $y = 2x - 1$ và $y = 2x + 7$

Bài 19. Với $(C): y = \frac{2x-1}{x+1}$, viết phương trình tiếp tuyến Δ với (C) biết hệ số góc $k = 3$. **ĐS:** $y = 3x - 1$ và $y = 3x + 11$

Bài 20. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 2}{x - 1}$ (C) . Viết phương trình tiếp tuyến d với (C) , biết $k = 1$. **ĐS:** Không tồn tại tiếp tuyến

Bài 21. Với $(C): y = x^3 - x^2 + 2$, viết phương trình tiếp tuyến Δ với (C) biết hệ số góc $k = 1$. **ĐS:** $y = x + 1$ và $y = x + \frac{59}{27}$

Bài 22. Với $(C): y = \sqrt{2x+1}$, viết phương trình tiếp tuyến Δ với (C) , biết $k = \frac{1}{3}$. **ĐS:** $x - 3y + 5 = 0$

Bài 23. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = x^2 - 3x + 2$, biết Δ song song với $d: y = 3x - 2$. **ĐS:** $y = 3x - 7$

Bài 24. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = x^2 - x + 2$, biết Δ vuông góc với $d: 5y = -x + 300$. **ĐS:** $y = 5x - 7$

Bài 25. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{4}{3}$; biết tiếp tuyến song song với $d: 4x - y + 2 = 0$. **ĐS:** $y = 4x + \frac{73}{6}$ và $y = 4x - \frac{26}{3}$

Bài 26. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) , biết Δ vuông góc với đường thẳng $d: x + 9y = 0$. **ĐS:** $y = 9x + 25$ và $y = 9x - 7$

Bài 27. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = \frac{2x+1}{1-2x}$; biết Δ song song với đường thẳng $d: 4x - y - 8 = 0$. **ĐS:** $y = 4x + 1$ và $y = 4x - 7$

Bài 28. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 10$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) , biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x + 3y - 10 = 0$. **ĐS:** $y = 3x + 11$

Bài 29. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = 2x^3 - 3x^2 + 1$, biết Δ có hệ số góc nhỏ nhất. **ĐS:** $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$

Bài 30. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị $(C): y = -2x^3 + 3x^2 - 6x + 1$, biết Δ có hệ số góc lớn nhất.

ĐS: $y = -\frac{9}{2}x + \frac{3}{4}$

Bài 31. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 2mx^2 - m^2x + 1$. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$ song song với đường thẳng $d: y = -5x + \frac{11}{3}$.

Bài 32. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C) . Gọi M là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ 1. Hỏi tham số m thuộc khoảng nào sau đây thì tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $d: y = (m^2 - 4)x + 2m - 1$.

Bài 33. Cho hàm số $y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m + 2$ có đồ thị (C) . Gọi A là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ 1. Hỏi tham số m thuộc khoảng nào sau đây thì tiếp tuyến của đồ thị (C) tại A vuông góc với đường thẳng $d: x - 4y + 1 = 0$.

Bài 34. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (2m - 1)x + 2m - 3$ có đồ thị (C_m) . Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $d: x - 2y - 4 = 0$.

Bài 35. Hỏi tham số m thuộc khoảng nào sau đây thì tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (m - 2)x + 3m$ vuông góc với đường thẳng $d: x - y + 2 = 0$.

Bài 36. Cho hàm số $y = x^3 + x^2 - 1$ có đồ thị (C) , phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $A(1; 1)$ cắt (C) tại điểm thứ hai là B . Tính độ dài đoạn thẳng AB .

DẠNG 4

Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

Bài 37. Một chất điểm chuyển động thẳng biến đổi đều với phương trình $s = 2t^2 + t - 1$ (m)

- Tìm vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 2s$.
- Tìm vận tốc trung bình của chất điểm trong khoảng thời gian từ tới $t = 2s$.

Bài 38. Một viên đạn được bắn lên từ vị trí M cách mặt đất 1 m, theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu là $v_0 = 196$ m/s (bỏ qua sức cản của không khí).

- Tìm thời điểm t_0 mà tại đó vận tốc của viên đạn bằng 0. Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét? (lấy $g = 9,8$ m/s²).
- Sau khoảng bao nhiêu giây (kể từ lúc bắn) viên đạn rơi xuống mặt đất?

Bài 39. Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8$ m/s² và t được tính bằng giây.

- Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ $t(t = 5s)$ đến $t + \Delta t$ với độ chính xác đến 0,001, biết Δt lần lượt nhận các giá trị 0,1; 0,01; 0,001.
- Tìm vận tốc tại thời điểm $t = 5$ giây.

C

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) , tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ có hệ số góc k được tính theo công thức nào sau đây?

- A. $k = f(x_0)$. B. $k = f(y_0)$. C. $k = f'(x_0)$. D. $k = f'(y_0)$.

Câu 2. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ là

- A. $y = f'(x)(x - x_0) + f(x_0)$. B. $y = f'(x)(x - x_0) - f(x_0)$.
C. $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. D. $y = f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$.

Câu 3. Biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $(1; 7)$ đi qua điểm $A(-2; -2)$ Hệ số góc của tiếp tuyến này bằng

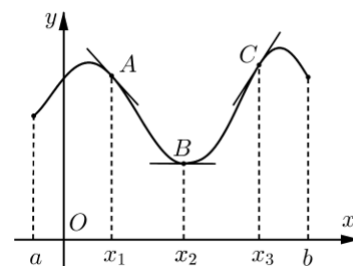
- A. -5 . B. 1 . C. 3 . D. 7 .

Câu 4.

Hình bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$ Biết rằng tại các điểm A, B, C đồ thị hàm số có tiếp tuyến được thể hiện trên hình vẽ.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

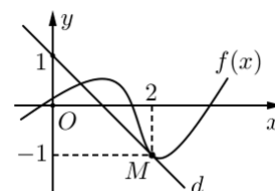
- A. $f'(x_3) < f'(x_2) < f'(x_1)$. B. $f'(x_1) < f'(x_2) < f'(x_3)$.
C. $f'(x_2) < f'(x_3) < f'(x_1)$. D. $f'(x_2) < f'(x_1) < f'(x_3)$.



Câu 5.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Đường thẳng d là tiếp tuyến tại M của đồ thị hàm số. Giá trị $f'(2)$ bằng

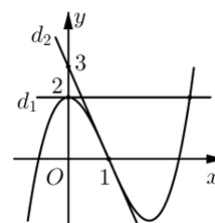
- A. -1 . B. 0 . C. 1 . D. 2 .



Câu 6.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên, d_1 và d_2 là các tiếp tuyến của (C) . Dựa vào hình vẽ, hãy tính giá trị biểu thức $P = 3f'(0) + 2f'(1)$

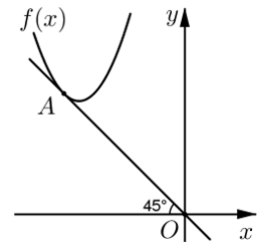
- A. $P = -8$. B. $P = -6$. C. $P = 3$. D. $P = 8$.



Câu 7.

Biết OA là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x) = x^2 + bx + c$ tại điểm A và $OA = 4\sqrt{2}$. Tổng $b + c$ bằng

- A. -4. B. 9. C. 23. D. 32.



Câu 8. Cho hàm số $y = -x^2 - 4x + 3$ có đồ thị (P) Nếu tiếp tuyến tại điểm M của (P) có hệ số góc bằng 8 thì hoành độ điểm M là

- A. $x_M = -6$. B. $x_M = 0$. C. $x_M = 5$. D. $x_M = 12$.

Câu 9. Cho hàm số $y = \frac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) Các phương trình của tiếp tuyến của (C) tạo với trục Ox một góc 45° là

- A. $\begin{cases} y = -x - 1 \\ y = -x + 7 \end{cases}$ B. $\begin{cases} y = -x - 1 \\ y = -x + 17 \end{cases}$ C. $\begin{cases} y = -x - 11 \\ y = -x + 7 \end{cases}$ D. $\begin{cases} y = -x - 11 \\ y = -x + 17 \end{cases}$

Câu 10. Tìm tất cả các phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$, biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$

- A. $x + 4y = 0$. B. $x + 4y - 1 = 0; x + 4y + 1 = 0$.
C. $x + 4y - 4 = 0; x + 4y + 4 = 0$. D. $x + 4y + 16 = 0; x + 4y - 16 = 0$.

Câu 11. Cho hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 - 4x + 2021$ có đồ thị (C) Trong số các tiếp tuyến của (C) , có một tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất. Hệ số góc của tiếp tuyến này bằng

- A. -5,5. B. -3,5. C. -2,5. D. 7,5.

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 9x - 11$ có đồ thị (C) Gọi d là tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C) Hỏi đường thẳng d đi qua điểm nào sau đây?

- A. $M\left(-5; \frac{2}{3}\right)$. B. $N\left(5; -\frac{2}{3}\right)$. C. $P\left(-2; \frac{5}{3}\right)$. D. $Q\left(2; -\frac{5}{3}\right)$.

Câu 13. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết cosin của góc tạo bởi tiếp tuyến và đường thẳng $\Delta: 4x - 3y = 0$ bằng $\frac{3}{5}$

- A. $y = 2; y = 1$. B. $y = -2; y = 1$. C. $y = -2; y = -1$. D. $y = 2; y = -2$.

Câu 14. Một vật chuyển động theo phương trình $s(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 20t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 8$ giây bằng

- A. $12m/s$. B. $22m/s$. C. $40m/s$. D. $152m/s$.

Câu 15. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{3}x - 2021$ và tiếp điểm có hoành độ dương.

- A. $y = -3x - 2$. B. $y = -3x + 2$. C. $y = -3x + 6$. D. $y = -3x + 10$.

Câu 16. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + x$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 5y = 0$

- A. $y = 3x - 5$. B. $y = 3x + 5$. C. $y = 5x - 3$. D. $y = 5x + 3$.

Câu 17. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 5$ tại điểm có hoành độ $x = -1$

- A. $y = 4x - 6$. B. $y = 4x + 2$. C. $y = 4x + 6$. D. $y = 4x - 2$.

Câu 18. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-2}$ tại điểm có hoành độ bằng 3, tương ứng là

- A. $y = 7x + 13$. B. $y = -7x + 30$. C. $y = 3x + 9$. D. $y = -x - 2$.

Câu 19. Một vật rơi tự do với phương trình chuyển động $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ với t (giây) là khoảng thời gian kể từ thời điểm vật bắt đầu rơi và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong thời gian đó. Lấy $g = 9,8\text{m/s}^2$, vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 4$ giây bằng

- A. $9,8\text{m/s}$. B. $19,6\text{m/s}$. C. $39,2\text{m/s}$. D. $78,4\text{m/s}$.

Câu 20. Một vật chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong thời gian đó. Sau bao lâu thì chuyển động dừng lại?

- A. 1 giây. B. 2 giây. C. 3 giây. D. 4 giây.

Câu 21. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$ có đồ thị là (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là:

- A. $y = 3x - 2$. B. $y = -3x + 2$. C. $y = x - \frac{2}{3}$. D. $y = -x + \frac{2}{3}$.

Câu 22. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = 3x - 4x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là

- A. $y = 0$. B. $y = 3x$. C. $y = 3x - 2$. D. $y = -12x$.

Câu 23. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị (C) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

- A. $y = -2x + 1$. B. $y = 2x + 1$. C. $y = 3x - 2$. D. $y = -3x - 2$.

Câu 24. Một viên đạn được bắn lên cao theo phương trình $s(t) = 196t - 4,9t^2$ trong đó $t > 0$, t tính bằng giây kể từ thời điểm viên đạn được bắn lên cao và s là khoảng cách của viên đạn so với mặt đất được tính bằng mét. Tại thời điểm vận tốc của viên đạn bằng 0 thì viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?

- A. 196m. B. 980m. C. 1960m. D. 3920m.

Câu 25. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 1 + 3t^2 - t^3$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian bao lâu kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất?

- A. $t = 1$. B. $t = 2$. C. $t = 3$. D. $t = 4$.

Câu 26. Một vật chuyển động theo phương trình $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong thời gian đó. Chuyển động có vận tốc lớn nhất bằng

- A. 18m/s . B. 24m/s . C. 64m/s . D. 108m/s .

Câu 27. Một vật chuyển động theo phương trình $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{25}{3}\text{ m/s}$. B. 71 m/s . C. 89 m/s . D. 109 m/s .

Câu 28. Một chuyển động theo phương trình $s(t) = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 20$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong thời gian đó. Quãng đường vật đi được bắt đầu từ lúc vật chuyển động tới thời điểm vật đạt được vận tốc lớn nhất bằng

- A. 20m. B. 28m. C. 32m. D. 36m.

Câu 29. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = x^4 - 8x^2 + 9$ tại điểm M có hoành độ bằng -1.

- A. $y = 12x + 14$. B. $y = 12x - 14$. C. $y = 12x + 10$. D. $y = -20x - 22$.

Câu 30. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trên tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.

- A. $y = 3x - 2$. B. $y = -3x - 2$. C. $y = 3x - 3$. D. $y = 3x + 2$.

Câu 31. Cho biết điện lượng trong một dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q = 3t^2 + 6t + 5$ (t được tính bằng giây, Q được tính bằng Coulomb). Tính cường độ tức thời của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t = 1$

- A. 4 A. B. 7 A. C. 12 A. D. 14 A.

Câu 32. Cho biết điện lượng trong một dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q = 10t^2 + 6t + 3$ (t được tính bằng giây, Q được tính bằng Coulomb). Thời điểm cường độ tức thời của dòng điện trong dây dẫn là 46A là

- A. 2s. B. 4s. C. 5s. D. 7s.

Câu 33. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{-x+3}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 0$ là

- A. $y = -2x + 3$. B. $y = -2x - 3$. C. $y = 2x - 3$. D. $y = 2x + 3$.

Câu 34. Cho hàm số $y = x^3 - 2x + 1$ có đồ thị (C) . Hệ số góc k của tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng 1 bằng

- A. $k = -5$. B. $k = 10$. C. $k = 25$. D. $k = 1$.

Câu 35. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{-x+1}{3x-2}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có hệ số góc là

- A. -1. B. $\frac{1}{4}$. C. $-\frac{5}{4}$. D. $-\frac{1}{4}$.

Câu 36. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 3. Tìm hệ số góc k của đường thẳng d

- A. $-\frac{1}{2}$. B. -2. C. 2. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 37. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = x^2 + x - 2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

- A. $x + y - 1 = 0$. B. $x - y - 2 = 0$. C. $x + y + 3 = 0$. D. $x - y - 1 = 0$.

Câu 38. Hệ số góc tiếp tuyến tại $A(1; 0)$ của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ là

- A. 1. B. -1. C. -3. D. 0.

Câu 39. Gọi I là giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ và trục tung của hệ trục tọa độ Oxy . Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số trên tại I là

- A. -2. B. 0. C. -1. D. 2.

- Câu 40.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là
 A. $y = 2x + 9$. B. $y = -2x + 9$. C. $y = 2x - 9$. D. $y = -2x - 9$.
- Câu 41.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(H): y = \frac{x-1}{x+2}$ tại giao điểm của (H) và trục hoành là:
 A. $y = x - 3$. B. $y = \frac{1}{3}(x - 1)$. C. $y = 3x$. D. $y = 3(x - 1)$.
- Câu 42.** Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ có đồ thị (C) . Hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến với đồ thị (C) là.
 A. 1. B. 6. C. 12. D. 9.
- Câu 43.** Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1; 4)$ là
 A. $y = 8x - 4$. B. $y = x + 3$. C. $y = -8x + 12$. D. $y = 8x + 4$.
- Câu 44.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại điểm $A(2; 3)$ có phương trình $y = ax + b$. Tính $a + b$
 A. 9. B. 5. C. 1. D. -1.
- Câu 45.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ tại điểm có tung độ bằng -2 là
 A. $y = 3x + 1$. B. $y = -3x - 1$. C. $y = -3x + 1$. D. $y = -3x + 3$.
- Câu 46.** Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + 1$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại M song song với đường thẳng $d: y = 3x - 1$?
 A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.
- Câu 47.** Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x(C)$. Số các tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y = 3x - 10$ là
 A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.
- Câu 48.** Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3$ có đồ thị (C) . Số tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{9}x + 2017$ là
 A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.
- Câu 49.** Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x$ có đồ thị (C) Biết trên (C) tồn tại hai điểm $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ mà tiếp tuyến của (C) tại các điểm đó vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2021$. Tổng $x_1 + x_2$ bằng
 A. $-\frac{4}{3}$. B. -1 . C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.
- Câu 50.** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+1)x - m$ có đồ thị là (C_m) Gọi A là giao điểm của (C_m) với Oy Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại A vuông góc với đường thẳng $y = 2x - 3$
 A. $m = -\frac{3}{2}$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = \frac{1}{2}$. D. $m = \frac{3}{2}$.
- Câu 51.** Tìm tất cả các phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 20$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 24x + 2021$
 A. $y = 24x - 48; y = 24x - 60$. B. $y = 24x - 48; y = 24x + 60$.
 C. $y = 24x - 12; y = 24x - 18$. D. $y = 24x + 12; y = 24x - 18$.
- Câu 52.** Gọi $d: ax + by + 140 = 0$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$, biết d song song với đường thẳng $y = 3x + 4$. Tổng $a + b$ bằng
 A. 2. B. 4. C. 54. D. 108.

Câu 53. Có bao nhiêu điểm thuộc đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x + \frac{7}{3}$ mà tiếp tuyến của đồ thị tại điểm đó song song với trục hoành?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 54. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2021$ có đồ thị (C) Biết trên (C) tồn tại hai điểm $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ ($x_1 < x_2$) mà tiếp tuyến của (C) tại các điểm đó song song với đường thẳng $y = 24x + 2022$ Tổng $2x_1 + x_2$ bằng

- A. -2. B. 0. C. 2. D. 6.

Câu 55. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3x + 1$ có đồ thị (C) Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y = 3x + 2021$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 56. Tìm tất cả các phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ song song với đường thẳng $y = -3x + 15$

- A. $y = -3x + 1; y = -3x - 11$. B. $y = -3x - 1; y = -3x + 11$.
C. $y = -3x + 1; y = -3x - 7$. D. $y = -3x - 1; y = -3x + 7$.

Câu 57. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y = -2x + 7$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. Vô số.

Câu 58. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$ có đồ thị (C) . Tìm tất cả các điểm thuộc (C) , biết tiếp tuyến của (C) tại các điểm đó song song với đường thẳng $y = 4x - 3$

- A. $M(0; -3)$. B. $M(-2; 5)$.
C. $M(0; -3), M(-2; 5)$. D. Không tồn tại M .

Câu 59. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C) Gọi $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc (C) . Biết tiếp tuyến của (C) tại M và N song song với đường thẳng $3x - y + 15 = 0$. Tổng $y_1 + y_2$ bằng

- A. -4. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 60. Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 2m + 1$ có đồ thị (C_m) và đường $d: x = 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến của (C_m) tại giao điểm của (C_m) và d song song với đường thẳng $\Delta: y = -12x + 4$

- A. $m = 0$. B. $m = 1$. C. $m = \pm 2$. D. $m = 3$.

Câu 61. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ có đồ thị (C) Biết trên (C) tồn tại hai điểm $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ mà tiếp tuyến của (C) tại các điểm đó song song với nhau. Tổng $x_1 + x_2$ bằng

- A. -1. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 62. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x + 3$ tại $M(1; 2)$ là

- A. $y = -x + 2$. B. $y = x + 1$. C. $y = 2x + 2$. D. $y = 3x - 1$.

Câu 63. Cho hàm số $y = x^3 + 4x^2 + 4x + 1$ có đồ thị (C) Tiếp tuyến tại điểm $A(-3; -2)$ của đồ thị (C) cắt đồ thị tại điểm thứ hai có tọa độ là?

- A. $(-3; -2)$. B. $(-2; 1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(2; 33)$.

- Câu 64.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \sin^2 x$ tại điểm có hoành độ bằng $\frac{\pi}{4}$ là $y = ax + b$ Tổng $a + 2b$ bằng
 A. $-\frac{\pi}{2}$. B. 2. C. $2 - \frac{\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{2} - 2$.
- Câu 65.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ có dạng $y = ax + b$ Hiệu $a - b$ bằng
 A. -1. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. 2.
- Câu 66.** Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 5$ có đồ thị (C) Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ 1 cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng bao nhiêu?
 A. -4. B. -3. C. 5. D. 6.
- Câu 67.** Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1$ có đồ thị (C) Biết rằng khi $m = m_0$ thì tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng -1 đi qua điểm $A(1; 3)$ Mệnh đề nào sau đây đúng?
 A. $-2 < m_0 < -1$. B. $-1 < m_0 < 0$. C. $0 < m_0 < 1$. D. $1 < m_0 < 2$.
- Câu 68.** Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm có tung độ bằng 8
 A. $y = 8$. B. $y = -12x + 16$. C. $y = 12x - 24$. D. $y = 12x - 16$.
- Câu 69.** Biết k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2$ tại điểm có tung độ bằng 8. Tổng $k_1 + k_2$ bằng
 A. -1. B. 0. C. 1. D. 2.
- Câu 70.** Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+2}$ có đồ thị (C) Gọi đường thẳng $d: y = ax + b$ là tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành. Tổng $a + b$ bằng
 A. -4. B. $-\frac{10}{49}$. C. $\frac{2}{49}$. D. 2.
- Câu 71.** Cho hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$ có đồ thị (C) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm với trục tung là
 A. $y = 4x - 2$. B. $y = 4x + 2$. C. $y = 4x - 6$. D. $y = 4x + 6$.
- Câu 72.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) Tìm tất cả các phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm với đường thẳng $y = -2$
 A. $y = -2$. B. $y = -2; y = -9x + 7$.
 C. $y = 2; y = 9x + 7$. D. $y = -2; y = 9x + 7$.
- Câu 73.** Tìm tất cả các phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$, biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1; -9)$
 A. $y = 24x + 15$. B. $y = 24x + 33$.
 C. $y = \frac{15}{4}x + \frac{21}{4}$. D. $y = 24x + 15; y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}$.
- Câu 74.** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) Gọi d là tiếp tuyến của (C), biết d đi qua điểm $M(4; -1)$ Gọi A là tiếp điểm của d và (C) Tọa độ điểm A là
 A. $A(2; 5), A(0; -1)$. B. $A(2; 5), A(-2; 1)$.
 C. $A(0; -1), A(-2; 1)$. D. $A\left(-1; \frac{3}{2}\right), A(-2; 1)$.

Câu 75. Có hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-2}{x-1}$ đi qua điểm $M(9; 0)$ Tính hệ số góc của hai tiếp tuyến đó bằng

- A. $-\frac{3}{8}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $-\frac{9}{64}$. D. $\frac{9}{64}$.

Câu 76. Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m; 2)$ Tìm tập hợp S là tập tất cả các giá trị thực của m để có ba tiếp tuyến của (C) đi qua M .

- A. $S = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{4}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$. B. $S = (-\infty; -2) \cup \left(\frac{5}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.
 C. $S = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$. D. $S = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; 3\right) \cup (3; +\infty)$.

Câu 77. Tiếp tuyến của parabol $y = 4 - x^2$ tại điểm $M(1; 3)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông. Diện tích của tam giác vuông đó bằng

- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{25}{2}$. C. $\frac{5}{4}$. D. $\frac{25}{4}$.

Câu 78. Trên đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ có điểm M sao cho tiếp tuyến tại đó cùng với các trục tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 2 Tọa độ điểm M là

- A. $(2; 1)$. B. $\left(4; \frac{1}{3}\right)$. C. $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{4}{7}\right)$. D. $\left(\frac{3}{4}; -4\right)$.

Câu 79. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ tại điểm có hoành độ bằng 1 tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{3}{2}$

- A. $m = 1$. B. $m = 2, m = -4$. C. $m = 1, m = -5$. D. $m = 2$.

Câu 80. Cho hàm số $y = \frac{2x}{x-2}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm thuộc (C) mà tiếp tuyến của (C) tại điểm đó cắt trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB có trọng tâm thuộc đường thẳng $y = x$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 81. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ có đồ thị (C) . Đường thẳng $d: y = ax + b$ là tiếp tuyến của (C) cắt trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB là tam giác vuông cân tại O . Tổng $a + b$ bằng

- A. -3. B. -2. C. -1. D. 0.

Câu 82. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu điểm thuộc (C) mà tiếp tuyến của (C) tại điểm đó cắt trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B thỏa $3OA = OB$?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. C	4. B	5. A	6. B	7. C	8. A	9. A	10. C
11. C	12. B	13. D	14. A	15. D	16. C	17. C	18. B	19. C	20. B
21. C	22. B	23. C	24. C	25. A	26. B	27. C	28. B	29. A	30. A
31. C	32. A	33. B	34. D	35. D	36. B	37. C	38. C	39. A	40. B
41. B	42. C	43. A	44. B	45. C	46. D	47. A	48. A	49. D	50. A
51. B	52. C	53. B	54. B	55. C	56. B	57. A	58. B	59. C	60. C
61. C	62. B	63. D	64. C	65. C	66. D	67. C	68. D	69. B	70. A
71. A	72. D	73. D	74. B	75. D	76. C	77. D	78. D	79. B	80. B
81. A	82. B								

BÀI

4

ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Hàm sơ cấp	Hàm hợp
$(\sin x)' = \cos x.$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x.$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$	$(\tan u)' = (1 + \tan^2 u) \cdot u' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -u' (1 + \cot^2 u) = -\frac{u'}{\sin^2 u}$

B

BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG

1

Đạo Hàm Của Hàm Số Lượng Giác

Bài 1. Tính đạo hàm các hàm số sau:

- a) $y = 5 \sin x - 3 \cos x;$ b) $y = 3 \sin x - 2 \cos x + \tan x - 4;$
 c) $y = \sin x + 3 \cos x - 2 \tan x;$ d) $y = x - \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{4} \sin x - \sqrt{x};$
 e) $y = 3 \tan x + \frac{1}{4} \cot x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - 2;$ f) $y = \sin x - \frac{1}{3} \cos 3x + 2 \tan x + \pi.$

Bài 2. Tính các đạo hàm của hàm số sau:

- a) $y = \tan 2x - 2 \cot 2x;$ b) $y = 7 \sin 4x - 2 \cos 5x;$
 c) $y = \cos (3x^7 + 2) + \cot 2x;$ d) $y = \sin 2x - \cot \left(x - \frac{\pi}{3} \right).$

Bài 3. Tính các đạo hàm của hàm số sau:

- a) $y = \cos^2 5x;$ b) $y = (3 - \sin x)^3;$ c) $y = \cos^2 2x - \sin 2x;$
 d) $y = \sin^2 3x + \cos x;$ e) $y = \cos^3 2x - \tan x;$ f) $y = \sin^3 (2x + 1);$
 g) $y = \cos^4 (3x - 1);$ h) $y = \cos^2 (\sin 2x);$ i) $y = \sin (\cos^2 x \cdot \tan^2 x);$
 j) $y = 2 \sin^2 4x - 3 \cos^3 5x;$ k) $y = (2 \sin x - \cos x)^4;$ l) $y = (2 + \sin^2 2x)^3.$

Bài 4. Tính đạo hàm các hàm số sau:

$$a) y = (\sin x + \cos x) \left(3 \cos x - \frac{1}{3} \sin x \right);$$

$$b) y = \cot x \cdot (4 \cos x - \sqrt[3]{x});$$

$$c) y = \left(2 \tan x + \frac{1}{2} \cot x \right) \left(6 \sin x - \frac{2}{3} \right);$$

$$d) y = (2 \cos x + 1)(3 \sin x + 1).$$

Bài 5. Tính đạo hàm các hàm số sau:

$$a) y = \frac{x}{1 - 2 \cos x};$$

$$b) y = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x};$$

$$c) y = f(x) = \frac{2x - 1}{\sin x + \cos x};$$

$$d) y = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\sin x};$$

$$e) y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x};$$

$$f) y = \frac{2 \sin x - 3 \cos x}{\sin x + \cos x};$$

$$g) y = \frac{5x^2 + 1}{4 + 3 \sin x};$$

$$h) y = \left(\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} \right)^2;$$

$$i) y = \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}.$$

Bài 6. Tính đạo hàm các hàm số sau:

$$a) y = \tan 2x - \frac{1}{3} \cot 4x + \sqrt{\sin x};$$

$$b) y = \sqrt{\cos 3x} - \frac{1}{\sin 2x};$$

$$c) y = \left(\frac{\sin x}{1 + \cos 2x} \right)^2;$$

$$d) y = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2} \sin 2x + \sqrt{2x^2 + x}.$$

$$e) y = \sqrt{\sin x + 2x};$$

$$f) y = \cos \sqrt{2 + x^2};$$

$$g) y = \sqrt{2x^3 + \sin 5x};$$

$$h) y = \cos^4 \sqrt{2x + 1};$$

$$i) y = \cot^3 \sqrt{x^2 - x + 1};$$

$$j) y = \sqrt{\cot^2(x^2 + 1)}.$$

DẠNG 2

Chứng minh, giải phương trình và bất phương trình

Bài 7. Cho hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$. Tính $f'(0)$, $f'(\pi)$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Bài 8. Cho hàm số $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$. Chứng minh $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$.

Bài 9. Cho hàm số $y = x \sin x$. Chứng minh:

$$a) xy + x(2 \cos x - y) = 2(y' - \sin x).$$

$$b) y' - x \cos x = \cos x \tan x.$$

Bài 10. Cho hàm số $y = \tan x$. Chứng minh $y' - y^2 - 1 = 0$.

Bài 11. Cho hàm số $y = \cot 2x$. Chứng minh $y' + 2y^2 + 2 = 0$.

Bài 12. Cho hàm số $y = \frac{x \sin x + \cos x}{\tan x}$. Chứng minh rằng: $y' + y \cdot \tan x = -\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$

Bài 13. Cho hàm số $y = x \sin x$. Chứng minh rằng: $xy - 2(y' - \sin x) + x(2 \cos x - y) = 0$

Bài 14. Chứng minh $3f'(x) - 2g'(x) = 0$ với $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, $g(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$.

Bài 15. Cho hàm số $f(x) = \sin 2x - 2 \cos x$. Giải phương trình $f'(x) = 0$.

Bài 16. Cho hàm số $y = \cos^2 x + \sin x$. Giải phương trình $y' = 0$.

Bài 17. Cho hàm $y = 3 \sin 2x + 4 \cos 2x + 10x$. Giải phương trình $y' = 0$.

C

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 83. Hàm số nào sau đây có đạo hàm trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \tan x$. B. $y = x^{10}$. C. $y = \frac{1}{x}$. D. $y = \sqrt{x}$.

Câu 84. Hàm số nào sau đây không có đạo hàm tại $x = 1$?

- A. $y = |x - 1|$. B. $y = \sqrt{(x - 1)^2 + 5}$.
 C. $y = \sin(x - 1)$. D. $y = \sqrt{2 - \cos x}$.

Câu 85. Hàm số nào sau đây có đạo hàm bằng 0?

- A. $y = \cos x$. B. $y = x$. C. $y = \cos 1^0$. D. $y = \sqrt{x}$.

Câu 86. Cho hàm số $f(x) = \sin 3x - bx$ Tính $f'(0)$

- A. $f'(0) = 0$. B. $f'(0) = -b$. C. $f'(0) = 1 - b$. D. $f'(0) = 3 - b$.

Câu 87. Kết quả $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ là

- A. $\sin x$. B. $\tan x$. C. $-\frac{1}{\cos^2 x}$. D. $\frac{1}{\cos^2 x}$.

Câu 88. Cho hàm số $y = \cot 2x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y' + 2y^2 = -2$. B. $y' + 2y^2 = -1$. C. $y' + 2y^2 = 1$. D. $y' + 2y^2 = 2$.

Câu 89. Tìm đạo hàm của hàm số $y = x^2 \tan x + \sqrt{x}$

- A. $y' = 2x \tan x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. B. $y' = \frac{2x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
 C. $y' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. D. $y' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Câu 90. Cho hàm số $f(x) = \sin 2x - 2x \cos 2x$. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}}$ bằng

- A. $\frac{1}{4}$. B. 1. C. $\frac{\pi}{4}$. D. π .

Câu 91. Đạo hàm của $y = \cos 2x - \tan 3x$ có dạng $a \sin 2x + \frac{b}{\cos^2 3x}$. Hiệu $a - b$ bằng

- A. -5. B. -1. C. 1. D. 5.

Câu 92. Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$. Xét hàm số u, v thỏa $\begin{cases} f'(x) = u(x) \\ v'(x) = f(x) \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\begin{cases} u(x) = 2 \sin 2x \\ v(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$. B. $\begin{cases} u(x) = -2 \sin 2x \\ v(x) = \frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$.
 C. $\begin{cases} u(x) = 2 \sin 2x \\ v(x) = \frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$. D. $\begin{cases} u(x) = -2 \sin 2x \\ v(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$.

Câu 93. Cho hàm số $u(x)$ có đạo hàm tại x là u' . Khi đó đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 u$ tại x là

- A. $y' = \sin 2u$. B. $y' = u' \sin 2u$. C. $y' = 2 \sin 2u$. D. $y' = 2u' \sin 2u$.

Câu 94. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin 2x - \cos x$

- A. $y' = 2 \cos x + \sin x$. B. $y' = \cos 2x + \sin x$.

C. $y' = 2 \cos 2x + \sin x$.

D. $y' = 2 \cos x - \sin x$.

Câu 95. Đạo hàm của hàm số $y = 4 \sin 2x + 7 \cos 3x + 9$ là

A. $8 \cos 2x - 21 \sin 3x + 9$.

B. $8 \cos 2x - 21 \sin 3x$.

C. $4 \cos 2x - 7 \sin 3x$.

D. $4 \cos 2x + 7 \sin 3x$.

Câu 96. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x + 3$ là:

A. $f'(x) = \sin x - \cos x$.

B. $f'(x) = \cos x + \sin x + 3$.

C. $f'(x) = \cos x - \sin x$.

D. $f'(x) = -\sin x - \cos x$.

Câu 97. Đạo hàm của hàm số $y = \cos 2x + 1$ là

A. $y' = -\sin 2x$.

B. $y' = 2 \sin 2x$.

C. $y' = -2 \sin 2x + 1$.

D. $y' = -2 \sin 2x$.

Câu 98. Đạo hàm của hàm số $y = \cos(2x + 1)$ là:

A. $y' = 2 \sin(2x + 1)$.

B. $y' = -2 \sin(2x + 1)$.

C. $y' = -\sin(2x + 1)$.

D. $y' = \sin(2x + 1)$.

Câu 99. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 x$ là:

A. $f'(x) = 2 \sin x$.

B. $f'(x) = 2 \cos x$.

C. $f'(x) = -\sin(2x)$.

D. $f'(x) = \sin(2x)$.

Câu 100. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \tan x$.

A. $y' = -\frac{1}{\cos^2 x}$.

B. $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

C. $y' = \cot x$.

D. $y' = -\cot x$.

Câu 101. Tính đạo hàm của hàm số $y = x \sin x$

A. $y = \sin x - x \cos x$.

B. $y = x \sin x - \cos x$.

C. $y = \sin x + x \cos x$.

D. $y = x \sin x + \cos x$.

Câu 102. Đạo hàm của hàm số $y = \cos \sqrt{x^2 + 1}$ là

A. $y' = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \sin \sqrt{x^2 + 1}$.

B. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \sin \sqrt{x^2 + 1}$.

C. $y' = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \sin \sqrt{x^2 + 1}$.

D. $y' = -\frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \sin \sqrt{x^2 + 1}$.

Câu 103. Đạo hàm của hàm số $y = \tan x - \cot x$ là

A. $y' = \frac{1}{\cos^2 2x}$.

B. $y' = \frac{4}{\sin^2 2x}$.

C. $y' = \frac{4}{\cos^2 2x}$.

D. $y' = \frac{1}{\sin^2 2x}$.

Câu 104. Biết hàm số $y = 5 \sin 2x - 4 \cos 5x$ có đạo hàm là $y' = a \sin 5x + b \cos 2x$. Giá trị của $a - b$ bằng

A. -30 .

B. 10 .

C. -1 .

D. -9 .

Câu 105. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\cos 2x}$.

A. $y' = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}$.

B. $y' = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

C. $y' = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

D. $y' = \frac{-\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}$.

Câu 106. Với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, hàm số $y = 2\sqrt{\sin x} - 2\sqrt{\cos x}$ có đạo hàm là?

A. $y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} + \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$.

B. $y' = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$.

C. $y' = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} - \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$.

D. $y' = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} - \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$.

Câu 107. Đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 4x\right)$ là:

A. $-4 \cos 4x$.

B. $4 \cos 4x$.

C. $4 \sin 4x$.

D. $-4 \sin 4x$.

Câu 108. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin 2x - 2 \cos x + 1$.

- A. $y' = -2 \cos 2x + 2 \sin x$.
 B. $y' = 2 \cos 2x + 2 \sin x$.
 C. $y' = 2 \cos 2x - 2 \sin x$.
 D. $y' = -\cos 2x - 2 \sin x$.

Câu 109. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\cos 2x}$.

- A. $y' = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}$.
 B. $y' = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$.
 C. $y' = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$.
 D. $y' = \frac{-\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}$.

Câu 110. Biết hàm số $y = 5 \sin 2x - 4 \cos 5x$ có đạo hàm là $y' = a \sin 5x + b \cos 2x$. Giá trị của $a - b$ bằng:

- A. -30.
 B. 10.
 C. -1.
 D. -9.

Câu 111. Cho hàm số $f(x) = a \cos x + 2 \sin x - 3x + 1$. Tìm a để phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm.

- A. $|a| < \sqrt{5}$.
 B. $|a| \geq \sqrt{5}$.
 C. $|a| > 5$.
 D. $|a| < 5$.

Câu 112. Đạo hàm của hàm số $y = \cos 3x$ là

- A. $y = \sin 3x$.
 B. $y = -3 \sin 3x$.
 C. $y = 3 \sin 3x$.
 D. $y = -\sin 3x$.

Câu 113. Cho $f(x) = \sin^3 ax, a > 0$. Tính $f'(\pi)$

- A. $f'(\pi) = 3 \sin^2(a\pi) \cdot \cos(a\pi)$.
 B. $f'(\pi) = 0$.
 C. $f'(\pi) = 3a \sin^2(a\pi)$.
 D. $f'(\pi) = 3a \cdot \sin^2(a\pi) \cdot \cos(a\pi)$.

Câu 114. Cho hàm số $f(x) = \sin 2x$. Tính $f'(x)$.

- A. $f'(x) = 2 \sin 2x$.
 B. $f'(x) = \cos 2x$.
 C. $f'(x) = 2 \cos 2x$.
 D. $f'(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x$.

Câu 115. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\cos 4x}{2} + 3 \sin 4x$.

- A. $y' = 12 \cos 4x - 2 \sin 4x$.
 B. $y' = 12 \cos 4x + 2 \sin 4x$.
 C. $y' = -12 \cos 4x + 2 \sin 4x$.
 D. $y' = 3 \cos 4x - \frac{1}{2} \sin 4x$.

Câu 116. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 2x - \cos 3x$.

- A. $f'(x) = 2 \sin 4x - 3 \sin 3x$.
 B. $f'(x) = 2 \sin 4x + 3 \sin 3x$.
 C. $f'(x) = \sin 4x + 3 \sin 3x$.
 D. $f'(x) = 2 \sin 2x + 3 \sin 3x$.

Câu 117. Cho $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x - x$. Khi đó $f'(x)$ bằng

- A. $1 - \sin 2x$.
 B. $-1 + 2 \sin 2x$.
 C. $-1 + \sin x \cdot \cos x$.
 D. $1 + 2 \sin 2x$.

Câu 118. Tính $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ biết $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

- A. -2.
 B. $\frac{1}{2}$.
 C. 0.
 D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 119. Cho hàm số $y = \cos 3x \cdot \sin 2x$. Tính $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

- A. $\frac{1}{2}$.
 B. $-\frac{1}{2}$.
 C. -1.
 D. 1.

Câu 120. Đạo hàm của hàm số $y = \tan(ax^2 + b\sqrt{x} + 1)$ là $y' = \frac{2x\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} \cdot \cos^2(ax^2 + b\sqrt{x} + 1)}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Khi đó $a + b$ bằng

- A. -7.
 B. 2.
 C. 3.
 D. 5.

Câu 121. Tìm đạo hàm của hàm số $y = 2 \cos x^2$

- A. $y' = 4 \cos x$.
 B. $y' = 4x \sin x^2$.
 C. $y' = -4x \sin x^2$.
 D. $y' = -4 \sin x \cos x$.

Câu 122. Tìm đạo hàm của hàm số $y = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)$

A. $y' = -x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right).$

B. $y' = x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right).$

C. $y' = -\frac{1}{2}x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right).$

D. $y' = \frac{1}{2}x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right).$

Câu 123. Cho hàm số $f(x) = \sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ ta được

A. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

B. $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$

C. $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$

D. $x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 124. Cho hàm số $y = (m+1) \sin x + m \cos x - (m+2)x + 1$ Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $y' = 0$ có nghiệm.

A. $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}.$

B. $m \geq 2.$

C. $-1 \leq m \leq 3.$

D. $m \leq -2.$

Câu 125. Hàm số $y = (1 + \sin x)(1 + \cos x)$ có đạo hàm là

A. $y' = -\sin x \cos x.$

B. $y' = \cos x + \sin x + 1.$

C. $y' = \cos x - \sin x + \cos 2x.$

D. $y' = \cos x + \sin x + \cos 2x.$

Câu 126. Tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{\cos(\pi x)}$ tại điểm $x = \frac{1}{3}$

A. $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 8.$

B. $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 2\pi\sqrt{3}.$

C. $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 4\pi\sqrt{3}.$

D. $f'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi\sqrt{3}}{3}.$

Câu 127. Tìm đạo hàm của hàm số $y = -\frac{2}{\tan(1-2x)}$

A. $y' = \frac{-4}{\sin^2(1-2x)}.$

B. $y' = \frac{4}{\sin^2(1-2x)}.$

C. $y' = \frac{-4}{\cos^2(1-2x)}.$

D. $y' = \frac{4}{\cos^2(1-2x)}.$

Câu 128. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}$ tại điểm $x = \frac{\pi^2}{16}$ bằng

A. 0.

B. $\sqrt{2}.$

C. $\frac{2}{\pi}.$

D. $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$

Câu 129. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \cos \sqrt{1-2x}$

A. $y' = \sin \sqrt{1-2x}.$

B. $y' = -\sin \sqrt{1-2x}.$

C. $y' = \frac{\sin \sqrt{1-2x}}{\sqrt{1-2x}}.$

D. $y' = -\frac{\sin \sqrt{1-2x}}{\sqrt{1-2x}}.$

Câu 130. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \cot \sqrt{x^2+1}$

A. $y' = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sin^2 \sqrt{x^2+1}}.$

B. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sin^2 \sqrt{x^2+1}}.$

C. $y' = -\frac{1}{\sin^2 \sqrt{x^2+1}}.$

D. $y' = \frac{1}{\sin^2 \sqrt{x^2+1}}.$

Câu 131. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin(\pi \sin x)$ tại điểm $x = \frac{\pi}{6}$ bằng

A. $-\frac{\pi}{2}.$

B. 0.

C. $\frac{\pi}{2}.$

D. $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}.$

Câu 132. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \cos(\tan x)$

A. $y' = \sin(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$

B. $y' = -\sin(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$

C. $y' = \sin(\tan x).$

D. $y' = -\sin(\tan x).$

Câu 133. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \cot(\sin 5x)$

- A. $y' = -[1 + \cot^2(\sin 5x)] \cos 5x$.
 B. $y' = -5[1 + \cot^2(\sin 5x)] \cos 5x$.
 C. $y' = [1 + \cot^2(\sin 5x)] \cos 5x$.
 D. $y' = 5[1 + \cot^2(\sin 5x)] \cos 5x$.

Câu 134. Cho hàm số $y = \cos^2 x$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y' = \sin^2 x$.
 B. $y' = -\sin^2 x$.
 C. $y' = \sin 2x$.
 D. $y' = -\sin 2x$.

Câu 135. Cho hàm số $f(x) = 2 \cos^2(4x - 1)$ Giá trị lớn nhất của hàm số $f'(x)$ bằng

- A. 2.
 B. 4.
 C. 8.
 D. 16.

Câu 136. Cho hàm số $f(x) = \cos^2 x + \sin x$ Phương trình $f'(x) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$?

- A. 1.
 B. 2.
 C. 3.
 D. 4.

Câu 137. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{4}$ bằng

- A. 0.
 B. -2.
 C. 1.
 D. 2.

Câu 138. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sin^3(1 - x)$

- A. $y' = \cos^3(1 - x)$.
 B. $y' = 3 \sin^2(1 - x)$.
 C. $y' = -3 \sin^2(1 - x) \cdot \cos(1 - x)$.
 D. $y' = 3 \sin^2(1 - x) \cdot \cos(1 - x)$.

Câu 139. Cho hàm số $f(x) = \sin^3 ax$ Tính $f'(\pi)$

- A. $f'(\pi) = 3a \sin^2(a\pi)$.
 B. $f'(\pi) = 0$.
 C. $f'(\pi) = 3 \cos(a\pi) \cdot \sin^2(a\pi)$.
 D. $f'(\pi) = 3a \cdot \cos(a\pi) \cdot \sin^2(a\pi)$.

Câu 140. Nếu $k(x) = 2 \sin^3 \sqrt{x}$ thì $k'(x)$ là biểu thức nào sau đây?

- A. $3 \sin^2 \sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x}$.
 B. $6 \sin^2 \sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x}$.
 C. $\frac{3}{\sqrt{x}} \cdot \sin^2 \sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x}$.
 D. $\frac{6}{\sqrt{x}} \cdot \sin^2 \sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x}$.

Câu 141. Cho hai hàm số $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ và $g(x) = \frac{1}{4} \cos 4x$ Chọn mệnh đề đúng.

- A. $f'(x) - g'(x) = 0$.
 B. $f(x) = g(x) + \frac{1}{4}$.
 C. $2f'(x) - 3g'(x) = 1$.
 D. $3f'(x) + 2g'(x) = -1$.

Câu 142. Cho hàm số $y = (2 + \sin^2 2x)^3$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y' = 3(2 + \sin^2 2x)^2$.
 B. $y' = 6 \cos 2x(2 + \sin^2 2x)^2$.
 C. $y' = 6 \sin 4x(2 + \sin^2 2x)^2$.
 D. $y' = 12 \sin 4x(2 + \sin^2 2x)^2$.

Câu 143. Cho hàm số $y = (x^2 - 3 \cos x)^{10}$. Tính $y'(0)$

- A. $y'(0) = 0$.
 B. $y'(0) = 1$.
 C. $y'(0) = -10 \cdot 3^9$.
 D. $y'(0) = 10 \cdot 3^9$.

Câu 144. Đạo hàm của hàm số $y = \cos^2(\sin^3 x)$ là biểu thức nào sau đây?

- A. $y' = -3 \sin(\sin^3 x)$.
 B. $y' = -6 \sin(\sin^3 x)$.
 C. $y' = -3 \sin(2 \sin^3 x) \cdot \sin^2 x \cdot \cos x$.
 D. $y' = -6 \sin(2 \sin^3 x) \cdot \sin^2 x \cdot \cos x$.

Câu 145. Cho hàm số $y = \cos^2 x + m \sin x$ Giá trị của m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = \pi$ vuông góc với đường thẳng $y = -x$ là

- A. -1.
 B. 0.
 C. 1.
 D. Không tồn tại.

Câu 146. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{2 + \cos^2 2x}$ là

- A. $y' = \frac{-\sin 4x}{2\sqrt{2 + \cos^2 2x}}$.
 B. $y' = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{2 + \cos^2 2x}}$.

C. $y' = \frac{\cos 2x}{\sqrt{2 + \cos^2 2x}}$.

D. $y' = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{2 + \cos^2 2x}}$.

Câu 147. Hàm số $y = \sqrt{\cot 2x}$ có đạo hàm là

A. $y' = \frac{1 + \cot^2 2x}{2\sqrt{\cot 2x}}$. B. $y' = \frac{1 + \cot^2 2x}{\sqrt{\cot 2x}}$. C. $y' = -\frac{1 + \cot^2 2x}{2\sqrt{\cot 2x}}$. D. $y' = -\frac{1 + \cot^2 2x}{\sqrt{\cot 2x}}$.

Câu 148. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{\cos 2x}$ tại điểm $x = \frac{\pi}{2}$ bằng

A. -1. B. 0. C. 1. D. Không xác định.

Câu 149. Cho hàm số $f(x) = a \sin x + b \cos x + 1$ có đạo hàm tại 0 bằng $\frac{1}{2}$ và đạo hàm tại $-\frac{\pi}{4}$ bằng 1.

Tổng $a + b$ bằng

A. 0. B. 1. C. $\sqrt{2}$. D. 2.

Câu 150. Cho hàm số $f(x) = 2x^2 - x + 2$. Tính đạo hàm của hàm số $g(x) = f(\sin x)$

A. $g'(x) = 2 \cos 2x - \sin x$. B. $g'(x) = 2 \cos 2x + \sin x$.
C. $g'(x) = 2 \sin 2x - \cos x$. D. $g'(x) = 2 \sin 2x + \cos x$.

Câu 151. Cho hàm số $y = f(x) - \cos^2 x$ với $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Biểu thức nào sau đây xác định hàm số $f(x)$ thỏa mãn $y'(x) = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. $f(x) = x + \frac{1}{2} \cos 2x$. B. $f(x) = x - \frac{1}{2} \cos 2x$.
C. $f(x) = x - \sin 2x$. D. $f(x) = x + \sin 2x$.

Câu 152. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm với mọi $x \in \mathbb{R}$ thỏa $f(3x) = \cos x \cdot f(x) + 4x$. Tính $f'(0)$

A. $f'(0) = \frac{\pi}{2}$. B. $f'(0) = 2$. C. $f'(0) = 1$. D. $f'(0) = 0$.

BẢNG ĐÁP ÁN

83. B	84. A	85. C	86. D	87. D	88. A	89. C	90. D	91. C	92. D
93. B	94. C	95. B	96. C	97. D	98. B	99. D	100. B	101. C	102. A
103. B	104. B	105. B	106. A	107. D	108. B	109. B	110. B	111. B	112. B
113. B	114. C	115. A	116. B	117. B	118. B	119. D	120. C	121. C	122. B
123. B	124. A	125. C	126. C	127. A	128. A	129. C	130. A	131. B	132. B
133. B	134. D	135. C	136. C	137. B	138. C	139. D	140. C	141. A	142. C
143. A	144. C	145. A	146. B	147. D	148. B	149. B	150. C	151. A	152. B

BÀI

5

ĐẠO HÀM CẤP CAO

A

KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Đạo hàm cấp 2

Cho hàm số $y = f(x)$, có đạo hàm $y' = f'(x)$.

Đạo hàm của đạo hàm y' được gọi là đạo hàm cấp 2. Kí hiệu: $y'' = [y']'$ hoặc $f'' = [f']'$.

2. Đạo hàm cấp cao

Cho hàm số $y = f(x)$.

Đạo hàm cấp 1 kí hiệu là: $y' = y^{(1)} = f'(x)$.

Đạo hàm cấp 2 là đạo hàm của đạo hàm cấp 1, kí hiệu là $y'' = y^{(2)} = f''(x)$.

Đạo hàm cấp 3 là đạo hàm của đạo hàm cấp 2, kí hiệu là $y''' = y^{(3)} = f'''(x)$. Đạo hàm cấp n là đạo hàm của đạo hàm cấp $n - 1$, kí hiệu là $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$.

3. Phương pháp tìm đạo hàm cấp cao

- ☑ Tính đạo hàm: $y', y'', y''', \dots$ để tìm quy luật.
- ☑ Dự đoán đạo hàm cấp n : $y^{(n)}$.
- ☑ Chứng minh điều dự đoán bằng phương pháp quy nạp toán học.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Tính đạo hàm cấp 2 của các hàm số sau.

- | | |
|---------------------------------|------------------------------------|
| a) $y = \cos(x + 1)$. | b) $y = \sin^2 x$. |
| c) $y = (1 - x)^4$. | d) $y = (x^2 + 1)^2$. |
| e) $y = \frac{5 - 2x}{x + 3}$. | f) $y = \frac{-x^2 + 2x}{x - 1}$. |

Bài 2. Cho các hàm số sau:

- | | |
|---|---|
| a) $y = 3 \cos 2x$. Tính $y''' = ?$. | b) $y = \sqrt{2x - x^2}$. Tính $y''' = ?$. |
| c) $y = \frac{1 - x}{1 + x}$. Tính $y'' = ?$. | d) $y = x^6 - 4x^3 + \sqrt{x} - 1$. Tính $y^{(4)} = ?$. |

Bài 3. Tính đạo hàm cấp cao:

- | | | |
|--------------------|------------------------|-----------------------------------|
| a) $y = \cos 2x$. | b) $y = \frac{1}{x}$. | c) $y = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$. |
|--------------------|------------------------|-----------------------------------|

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x) = 2x^2 + 16 \cos x - \cos 2x$.

- a) Tính $f'(x)$ và $f''(x)$.
- b) Tính $f'(0)$ và $f''(\pi)$.
- c) Giải phương trình $f''(x) = 0$.

Bài 5. Cho hàm số $y = \sin^2 2x$. Tính giá trị của biểu thức $y^{(3)} + y'' + 16y' + 16y - 8$.

Bài 6. Chứng minh rằng hàm số:

- a) $y = \frac{x - 3}{x + 4}$ thỏa $2(y')^2 = (y - 1) \cdot y''$.
- b) $y = \sqrt{2x - x^2}$ thỏa $y^3 y'' + 1 = 0$.
- c) $y = x \sin x$ thỏa $xy - 2(y' - \sin x) + x \cdot y'' = 0$.

C

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hàm số nào dưới đây có đạo hàm cấp hai là $6x$?

- A. $y = x^2$. B. $y = 3x^2$. C. $y = x^3$. D. $y = 2x^3$.

Câu 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$ có đồ thị (C) Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 , biết x_0 thỏa mãn $y''(x_0) = 0$

- A. $y = -3x - 3$. B. $y = 3x + 5$. C. $y = -3x - 5$. D. $y = -3x + 1$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = (x + 10)^6$. Tính $f''(2)$

- A. $f''(2) = 622080$. B. $f''(2) = 1492992$. C. $f''(2) = 124416$. D. $f''(2) = 103680$.

Câu 4. Đạo hàm cấp 2 của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ tại -1 bằng

- A. $\frac{2}{9}$. B. $-\frac{8}{27}$. C. $-\frac{4}{27}$. D. $\frac{8}{27}$.

Câu 5. Cho hàm số $y = \frac{1}{x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y''y^3 - 2 = 0$. B. $y''y^3 + 2 = 0$. C. $y''y - 2(y')^2 = 0$. D. $y''y + 2(y')^2 = 0$.

Câu 6. Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+4}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $2(y')^2 = (y+1)y''$. B. $2(y')^2 = (y-1)y''$.
C. $2(y')^2 = -(y-1)y''$. D. $2(y')^2 = (-y-1)y''$.

Câu 7. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y'' + xy' = y$. B. $y'' + xy' = 2y$. C. $y^2y'' + xy' = y$. D. $y^2y'' + xy' = 2y$.

Câu 8. Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Thu gọn biểu thức $M = y^3 \cdot y'' + 1$

- A. $M = -1$. B. $M = 0$. C. $M = 1$. D. $M = 2$.

Câu 9. Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số $y = x\sqrt{1+x^2}$

- A. $y'' = \frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. B. $y'' = \frac{2x(3+2x^2)}{(\sqrt{1+x^2})^3}$.
C. $y'' = \frac{x(3-2x^2)}{(\sqrt{1+x^2})^2}$. D. $y'' = \frac{x(1+x^2)}{2(\sqrt{1+x^2})^3}$.

Câu 10. Cho hàm số $y = \sqrt{1+3x-x^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $(y')^2 + y \cdot y'' = -1$. B. $(y')^2 + y \cdot y'' = 1$.
C. $(y')^2 - y \cdot y'' = -1$. D. $(y')^2 - y \cdot y'' = 1$.

Câu 11. Cho hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $4(x^2+1)y'' - 4xy' - y = 0$. B. $4(x^2+1)y'' + 4xy' + y = 0$.
C. $4(x^2+1)y'' - 4xy' + y = 0$. D. $4(x^2+1)y'' + 4xy' - y = 0$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$. Tính $f''(\pi)$

- A. $f''(\pi) = -4$. B. $f''(\pi) = -1$. C. $f''(\pi) = 0$. D. $f''(\pi) = 4$.

Câu 13. Cho hàm số $y = \sin 2x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y^2 + (y')^2 = 4$. B. $y = y' \cdot \tan 2x$. C. $4y - y'' = 0$. D. $4y + y'' = 0$.

Câu 14. Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \tan x$

- A. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$. B. $y'' = \frac{-1}{\cos^4 x}$. C. $y'' = -\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$. D. $y'' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$. Thu gọn biểu thức $M = f''(x) + \omega^2 f(x)$

- A. $M = -1$. B. $M = 0$.
 C. $M = 1$. D. $M = \cos^2(\omega x + 4)$.

Câu 16. Cho hàm số $y = \cos^2 3x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y'' = -18(2y + 1)$. B. $y'' = 18(2y + 1)$. C. $y'' = 18(1 - 2y)$. D. $y'' = 18(2y - 1)$.

Câu 17. Cho hai hàm số $f(x) = \sin^2 x$ và $g(x) = \cos^2 x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f'(x) = g'(x)$. B. $[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2 = 1$.
 C. $f''(x) = -g''(x)$. D. $f''(x) = g''(x)$.

Câu 18. Cho hàm số $y = \tan^2 x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y'' = 6y^2 + 8y - 2$. B. $y'' = 6y^2 - 8y + 2$. C. $y'' = 6y^2 + 8y + 2$. D. $y'' = 6y^2 - 8y - 2$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \sin^3 x + x^2$. Tính $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

- A. $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$. B. $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$. C. $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$. D. $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 5$.

Câu 20. Hàm số nào dưới đây có đạo hàm cấp hai là $-\frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$?

- A. $y = -\frac{1}{\sin x}$. B. $y = \frac{1}{\sin x}$. C. $y = -\cot x$. D. $y = \cot x$.

Câu 21. Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = x \cos 2x$ là

- A. $y'' = -4 \sin 2x + 4x \cdot \cos 2x$. B. $y'' = -4 \sin 2x - 4x \cdot \cos 2x$.
 C. $y'' = 4 \sin 2x + 4x \cdot \cos 2x$. D. $y'' = 4 \sin 2x - 4x \cdot \cos 2x$.

Câu 22. Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = x^2 \sin x$ là

- A. $y'' = (2 - x^2) \sin x - 4x \cdot \cos x$. B. $y'' = (2 + x^2) \sin x - 4x \cdot \cos x$.
 C. $y'' = (2 - x^2) \sin x + 4x \cdot \cos x$. D. $y'' = (2 + x^2) \sin x + 4x \cdot \cos x$.

Câu 23. Cho hàm số $y = x \sin x$. Thu gọn biểu thức $M = xy - 2(y' - \sin x) + xy''$

- A. $M = 0$. B. $M = 1$. C. $M = 2$. D. $M = \sin x$.

Câu 24. Cho hàm số $y = x \cdot \tan x$. Thu gọn biểu thức $M = x^2 y'' - 2(x^2 + y^2)(1 + y)$

- A. $M = -1$. B. $M = 0$. C. $M = 1$. D. $M = x^2 - \tan^2 x$.

Câu 25. Cho hàm số $y = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cdot \cos x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y'' - y = 0$. B. $y'' + y = 0$. C. $y'' - y' = 0$. D. $y'' + y' = 0$.

Câu 26. Hàm số $y = (x^2 + 1)^3$ có đạo hàm cấp ba là

- A. $y''' = -12(x^2 + 1)$. B. $y''' = 12(x^2 + 1)$. C. $y''' = 24(5x^2 + 3)$. D. $y''' = 24x(5x^2 + 3)$.

Câu 27. Cho hàm số $y = -3x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1$. Hỏi đạo hàm ít nhất đến cấp nào thì ta được kết quả triệt tiêu (bằng 0)?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 28. Cho hàm số $y = (ax + b)^5$ với a, b là tham số. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y^{(10)}(1) = 0$. B. $y^{(10)}(1) = 5a$. C. $y^{(10)}(1) = 10a$. D. $y^{(10)}(1) = 10a + b$.

Câu 29. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$. Tính $f'''(1)$

- A. $f'''(1) = -3$. B. $f'''(1) = 0$. C. $f'''(1) = 3$. D. $f'''(1) = \frac{3}{2}$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$. Tính $f^{(4)}(x)$

- A. $f^{(4)}(x) = \frac{4}{x^5}$. B. $f^{(4)}(x) = -\frac{4}{x^5}$. C. $f^{(4)}(x) = \frac{4!}{x^5}$. D. $f^{(4)}(x) = -\frac{4!}{x^5}$.

Câu 31. Đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ là

- A. $\frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^n}$. B. $\frac{(-1)^n}{(x-1)^{n+1}}$. C. $\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$. D. $\frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-1)^{n+1}}$.

Câu 32. Đạo hàm cấp ba của hàm số $y = \frac{x^2+x+1}{x+1}$ là

- A. $y''' = \frac{-4}{(x+1)^3}$. B. $y''' = \frac{6}{(x+1)^3}$. C. $y''' = \frac{-6}{(x+1)^4}$. D. $y''' = \frac{-12}{(x+1)^4}$.

Câu 33. Đạo hàm cấp 2021 của hàm số $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ là

- A. $f^{(2021)}(x) = -\frac{2021!}{(1-x)^{2022}}$. B. $f^{(2021)}(x) = \frac{2021!}{(1-x)^{2022}}$.
 C. $f^{(2021)}(x) = -\frac{2021!x^{2021}}{(1-x)^{2022}}$. D. $f^{(2021)}(x) = \frac{2021!x^{2021}}{(1-x)^{2022}}$.

Câu 34. Đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{x}{x^2+5x+6}$ là

- A. $y^{(n)} = 3 \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+3)^{n+1}} - 2 \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+2)^{n+1}}$. B. $y^{(n)} = -3 \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+3)^{n+1}} + 2 \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+2)^{n+1}}$.
 C. $y^{(n)} = 3 \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+3)^{n+1}} + 2 \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+2)^{n+1}}$. D. $y^{(n)} = -3 \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+3)^{n+1}} - 2 \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+2)^{n+1}}$.

Câu 35. Đạo hàm cấp ba của hàm số $y = \sin x$ là

- A. $y''' = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. B. $y''' = \sin(x + \pi)$.
 C. $y''' = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$. D. $y''' = \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$.

Câu 36. Cho hàm số $y = \sin^2 2x$. Tính $y^{(4)}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ bằng

- A. $-64\sqrt{3}$. B. -64 . C. 64 . D. $64\sqrt{3}$.

Câu 37. Đạo hàm cấp bốn của hàm số $y = \sin^4 x$ là

- A. $-8 \cos 2x + 32 \cos 4x$. B. $4 \cos 2x + 16 \cos 4x$.
 C. $8 \cos 2x - 12 \cos 2x$. D. $6 \cos 2x - 32 \cos 4x$.

Câu 38. Cho hàm số $y = \sin^2 x$ Tính $y^{(2021)}(\pi)$

- A. $y^{(2021)}(\pi) = 0$. B. $y^{(2021)}(\pi) = -2^{2020}$.
 C. $y^{(2021)}(\pi) = 2^{2020}$. D. $y^{(2021)}(\pi) = 2^{2021}$.

Câu 39. Đạo hàm cấp bốn của hàm số $y = \sin 5x \cdot \sin 3x$ là

- A. $y^{(4)} = -2048 \cos 8x + 8 \cos 2x$. B. $y^{(4)} = 2048 \cos 8x - 8 \cos 2x$.
 C. $y^{(4)} = 1024 \cos 16x + 4 \cos 4x$. D. $y^{(4)} = 2048 \cos 8x - 4 \cos 4x$.

Câu 40. Đạo hàm cấp bốn của hàm số $y = \sin 3x \cdot \cos x - \sin 2x$ là

- A. $y^{(4)} = -128 \sin 4x - 8 \sin 2x$. B. $y^{(4)} = -128 \sin 4x + 8 \sin 2x$.
 C. $y^{(4)} = 128 \sin 4x - 8 \sin 2x$. D. $y^{(4)} = 128 \sin 4x + 8 \sin 2x$.

Câu 41. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 2021$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Gia tốc tức thời tại thời điểm $t = 3$ giây của chất điểm bằng

- A. $6m/s^2$. B. $9m/s^2$. C. $12m/s^2$. D. $15m/s^2$.

Câu 42. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 6 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Gia tốc tức thời tại thời điểm t của chuyển động là

- A. $a(t) = 6 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$. B. $a(t) = -54 \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$.
 C. $a(t) = 54 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$. D. $a(t) = -54 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 43. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 3 \sin 2t + \cos 2t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Gia tốc tức thời tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$ giây của chuyển động bằng

- A. $-16m/s^2$. B. $-12m/s^2$. C. $0m/s^2$. D. $12m/s^2$.

Câu 44. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 - \frac{2}{5}t + 3$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Gia tốc tức thời của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$.
 B. Gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 4$ là $a = 18m/s^2$.
 C. Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ là $v = 18m/s^2$.
 D. Vận tốc tức thời của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$.

Câu 45. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 + 4t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm mà vận tốc tức thời của chuyển động bằng $11m/s$ là

- A. $12m/s^2$. B. $14m/s^2$. C. $16m/s^2$. D. $18m/s^2$.

Câu 46. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 2021 + t^2 - 4t^3$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm gia tốc tức thời bằng $-1m/s^2$ là

- A. $\frac{1}{16}m/s^2$. B. $\frac{1}{8}m/s^2$. C. $\frac{1}{4}m/s^2$. D. $\frac{1}{2}m/s^2$.

Câu 47. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 15 + 20t^2 - 8t^3$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm gia tốc tức thời bằng 0 là

- A. $\frac{10}{3}m/s^2$. B. $15m/s^2$. C. $\frac{50}{3}m/s^2$. D. $20m/s^2$.

Câu 48. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - t^3 + 6t^2 + 10t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong 20 giây đầu tiên tại thời điểm gia tốc tức thời đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc tức thời của chất điểm bằng bao nhiêu?

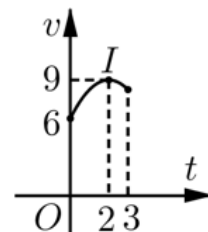
- A. 0. B. $17m/s$. C. $18m/s$. D. $28m/s$.

Câu 49. Một vật chuyển động theo phương trình $s = 6t^2 - t^3$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi tại thời điểm vận tốc tức thời của vật đạt giá trị lớn nhất thì gia tốc tức thời của vật bằng bao nhiêu?

- A. $-12m/s^2$. B. $0m/s^2$. C. $6m/s^2$. D. $12m/s^2$.

Câu 50.

Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(m/s)$ phụ thuộc thời gian $t(s)$ có đồ thị là một phần của đường Parabol có đỉnh $I(2; 9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = \frac{5}{2}(s)$ bằng



- A. $-\frac{141}{16}m/s^2$. B. $-\frac{3}{4}m/s^2$. C. $\frac{3}{4}m/s^2$. D. $\frac{141}{16}m/s^2$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. A	4. B	5. C	6. B	7. C	8. B	9. A	10. A
11. D	12. A	13. D	14. D	15. B	16. C	17. C	18. C	19. D	20. C
21. B	22. C	23. A	24. B	25. B	26. D	27. D	28. A	29. C	30. C
31. D	32. C	33. B	34. A	35. C	36. C	37. A	38. A	39. A	40. C
41. C	42. D	43. B	44. B	45. B	46. A	47. C	48. D	49. B	50. B

BÀI

6

VI PHÂN

A

KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. Vi phân của hàm số tại 1 điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 . Khi đó ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Nếu $|\Delta x|$ khá nhỏ thì $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x_0) \rightarrow \Delta y = f'(x_0) \Delta x$.

Tích số $f'(x_0) \Delta x$ được gọi là vi phân của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 và được kí hiệu là $df(x_0)$, tức là:

$$df(x_0) = f'(x_0) \Delta x$$

2. Ứng dụng của vi phân (tính gần đúng)

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \Delta x$$

3. Vi phân của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$.

Vi phân của hàm số kí hiệu:

$$df(x_0) = f'(x_0) dx \Rightarrow dy = y' dx$$

B BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Tính vi phân của các hàm số sau:

a) $y = x^3 + \sqrt{x} - 1$ tại $x = 2$;

b) $y = \frac{1 - \tan x}{1 + \cot x}$ tại $x = \frac{\pi}{6}$.

Bài 2. Tìm vi phân của các hàm $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{2x + 3}$ tại điểm $x_0 = 3$ và $\Delta x = 0,03$.

Bài 3. Tính vi phân của các hàm số sau:

a) $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x+2}$;

b) $y = \tan^3 3x$;

c) $y = \sqrt{x \cdot \sin x + \cos x}$;

d) $y = \frac{x - \tan x}{1 - \cot x}$

Bài 4. Tìm vi phân của các hàm số sau?

a) $y = \sin x + 2 \cos x$;

b) $y = \sin 2x - \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Bài 5. Tính vi phân

a) Cho hàm số $y = \frac{2}{x} - 2x + \sqrt{x}$. Tìm vi phân của hàm số tại $x = 3$.

b) Cho hàm số $y = \tan x + \sin x - \sqrt{\cos x}$. Tìm vi phân của hàm số tại $x = \frac{\pi}{4}$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Biểu thức nào sau đây là vi phân của hàm số $y = (x - 1)^2$?

A. $dy = 2(x - 1)$.

B. $dy = 2(x - 1)^2 dx$.

C. $dy = 2(x - 1) dx$.

D. $dy = (x - 1)^2 dx$.

Câu 2. Tìm vi phân hàm số $y = \frac{t}{\sqrt{4 - t^2}}$

A. $dy = \frac{-1}{(\sqrt{4 - t^2})^3} dt$.

B. $dy = \frac{1}{(\sqrt{4 - t^2})^3} dt$.

C. $dy = \frac{-4}{(\sqrt{4 - t^2})^3} dt$.

D. $dy = \frac{4}{(\sqrt{4 - t^2})^3} dt$.

Câu 3. Tìm vi phân của hàm số $y = \frac{\sqrt{x}}{a + b}$ (a, b là hằng số).

A. $dy = \frac{1}{2(a + b)\sqrt{x}} dx$.

B. $dy = \frac{1}{(a + b)\sqrt{x}} dx$.

C. $dy = \frac{2\sqrt{x}}{a + b} dx$.

D. $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}(a + b)^2} dx$.

Câu 4. Vi phân của hàm số $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5x + 1$ là

A. $dy = (x^2 - x + 6) dx.$

B. $dy = x^2 - x + 5.$

C. $dy = \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} + 5 \right) dx.$

D. $dy = (x^2 - x + 5) dx.$

Câu 5. Tính vi phân của hàm số $f(x) = 3x^2 - x$ tại điểm $x = 2$ ứng với $\Delta x = 0,1$

A. $df(2) = 1.$

B. $df(2) = 10.$

C. $df(2) = 1,1.$

D. $df(2) = -1,1.$

Câu 6. Vi phân của hàm số $y = x \sin x + \cos x$ là

A. $dy = (2 \sin x + x \cos x) dx.$

B. $dy = x \cos x dx.$

C. $dy = x \cos x.$

D. $dy = (\sin x + \cos x) dx.$

Câu 7. Tìm vi phân của hàm số $y = \sqrt{1+x^2}.$

A. $dy = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

B. $dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

C. $dy = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

D. $dy = \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

Câu 8. Tính vi phân của hàm số $y = \frac{x+3}{1-2x}$ tại điểm $x = -3$

A. $dy = \frac{1}{7} dx.$

B. $dy = 7 dx.$

C. $dy = -\frac{1}{7} dx.$

D. $dy = -7 dx.$

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1+\cos^2 2x}$ Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{2\sqrt{1+\cos^2 2x}} dx.$

B. $df(x) = \frac{-\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}} dx.$

C. $df(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}} dx.$

D. $df(x) = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 2x}} dx.$

Câu 10. Tính vi phân của hàm số $y = (x-1)^2$

A. $dy = 2(x-1) dx.$

B. $dy = 2(x-1).$

C. $dy = (x-1) dx.$

D. $dy = (x-1)^2 dx.$

Câu 11. Tính vi phân của hàm số $y = x^3 9x^2 + 12x - 5$

A. $dy = (3x^2 18x + 12) dx.$

B. $dy = (-3x^2 18x + 12) dx.$

C. $dy = -(3x^2 18x + 12) dx.$

D. $dy = (-3x^2 + 18x - 12) dx.$

Câu 12. Tính vi phân của hàm số $y = \frac{2x+3}{2x-1}$

A. $dy = -\frac{8}{(2x-1)^2} dx.$

B. $dy = \frac{4}{(2x-1)^2} dx.$

C. $dy = -\frac{4}{(2x-1)^2} dx.$

D. $dy = -\frac{7}{(2x-1)^2} dx.$

Câu 13. Tính vi phân của hàm số $y = \frac{x^2+x+1}{x-1}$

A. $dy = -\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2} dx.$

B. $dy = \frac{2x+1}{(x-1)^2} dx.$

C. $dy = -\frac{2x+1}{(x-1)^2} dx.$

D. $dy = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2} dx.$

Câu 14. Kết quả của $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$ là

A. $-\cot x.$

B. $\cot x.$

C. $-\tan x.$

D. $\tan x.$

Câu 15. Vi phân của hàm số $y = \sin^2(3x)$ là

A. $dy = \sin(6x) dx.$

B. $dy = 3 \cos^2 x dx.$

C. $dy = 6 \sin(3x) dx.$

D. $dy = 3 \sin(6x) dx.$

Câu 16. Tìm vi phân của hàm số $y = \frac{2}{\cos(\pi x)}$

- A. $dy = 2\pi \cdot \frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} dx.$ B. $dy = 2\pi \cdot \frac{\sin(\pi x)}{\cos^2(\pi x)} dx.$
 C. $dy = 2\pi \cdot \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} dx.$ D. $dy = 2\pi \cdot \frac{\cos(\pi x)}{\sin^2(\pi x)} dx.$

Câu 17. Tìm vi phân của hàm số $y = \sin(\sin x)$

- A. $dy = \cos(\sin x) \cdot \sin x \cdot dx.$ B. $dy = \sin(\cos x) \cdot dx.$
 C. $dy = \cos(\sin x) \cdot \cos x \cdot dx.$ D. $dy = \cos(\sin x) \cdot dx.$

Câu 18. Tìm vi phân của hàm số $y = f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}.$

- A. $dy = \frac{1}{2\sqrt{\tan x + \cot x}} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx.$
 B. $dy = \frac{1}{2\sqrt{\tan x + \cot x}} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx.$
 C. $dy = \frac{1}{2\sqrt{\tan x + \cot x}} \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx.$
 D. $dy = \frac{1}{\sqrt{\tan x + \cot x}} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx.$

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $df(0) = -dx.$ B. $f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) = -1.$
 C. $f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - x) = 0.$ D. $f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0.$

Câu 20. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{khi } x \geq 0 \\ x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $f'(0^+) = 1.$ B. $f'(0^-) = 1.$
 C. $df(0) = dx.$ D. Hàm số không có vi phân tại $x = 0.$

Câu 21. Cho hàm số $y = -2\sqrt{1-x}$. Rút gọn biểu thức $K = \sqrt{1-x} dy - dx$

- A. $K = 0.$ B. $K = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$ C. $K = \sqrt{1-x}.$ D. $K = 1 - x.$

Câu 22. Cho hàm số $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\sqrt{1+x^2} \cdot dy - y \cdot dx = 0.$ B. $\sqrt{1+x^2} \cdot dy + y \cdot dx = 0.$
 C. $\sqrt{1+x^2} \cdot dx - y \cdot dy = 0.$ D. $\sqrt{1+x^2} \cdot dx + y \cdot dy = 0.$

Câu 23. Cho hàm số $y = \cot \frac{x}{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $2dx + (1+y^2)dy = 0.$ B. $2dx - (1+y^2)dy = 0.$
 C. $2dy + (1+y^2)dx = 0.$ D. $2dy - (1+y^2)dx = 0.$

Câu 24. Cho hàm số $y = 1 + \frac{2}{x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $x \cdot dy - (y-1)dx = 0.$ B. $x \cdot dy + (y-1)dx = 0.$
 C. $x \cdot dy + (y+1)dx = 0.$ D. $x \cdot dy - (y+1)dx = 0.$

Câu 25. Cho hàm số $y = 2x^2 - x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $(x-2y)dx - x \cdot dy = 0.$ B. $(x-2y)dx + x \cdot dy = 0.$
 C. $(x+2y)dx - x \cdot dy = 0.$ D. $(x+2y)dx + x \cdot dy = 0.$

Câu 26. Vi phân của hàm số $f(x) = \frac{x+3}{1-2x}$ tại điểm $x = -3$ là

- A. $df(-3) = -\frac{1}{7} dx$. B. $df(-3) = \frac{1}{7} dx$. C. $df(-3) = -7 dx$. D. $df(-3) = 7 dx$.

Câu 27. Vi phân của hàm số $f(x) = 5 \sin 2x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{3}$ là

- A. $df\left(\frac{\pi}{3}\right) = -5 dx$. B. $df\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5 dx$.
 C. $df\left(\frac{\pi}{3}\right) = -10 \cos 2x \cdot dx$. D. $df\left(\frac{\pi}{3}\right) = 10 \cos 2x \cdot dx$.

Câu 28. Tính vi phân của hàm số $f(x) = 3x^2 - x$ tại điểm $x = 2$ ứng với $\Delta x = 0,1$

- A. $df(2) = -0,4$. B. $df(2) = 0,05$. C. $df(2) = 1,1$. D. $df(2) = 10$.

Câu 29. Tính vi phân của hàm số $f(x) = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}$ tại $x = 4$ ứng với $\Delta x = 0,002$

- A. $df(4) = \frac{1}{8}$. B. $df(4) = \frac{1}{400}$. C. $df(4) = \frac{1}{1600}$. D. $df(4) = \frac{1}{8000}$.

Câu 30. Tính vi phân của hàm số $f(x) = \tan x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{3}$ ứng với $\Delta x = \frac{\pi}{180}$

- A. $df\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$. B. $df\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{8}$. C. $df\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{24}$. D. $df\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{45}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. A	4. B	5. C	6. B	7. B	8. A	9. A	10. A
11. A	12. A	13. D	14. A	15. D	16. B	17. C	18. B	19. B	20. D
21. A	22. A	23. C	24. B	25. C	26. B	27. A	28. C	29. D	30. D