

Câu 1. (3,0 điểm) Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{1}{3}$; $u_{n+1} = \frac{3u_n}{2+3u_n^3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Câu 2. (3,0 điểm) Tìm tất cả các hàm số đa thức $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn
$$f(xf(y)) = f(xy) + 2f(x) - 4, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 3. (3,0 điểm)

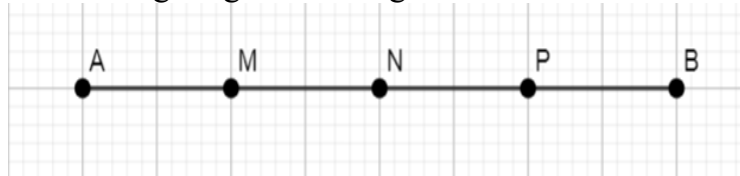
- a) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x, y thỏa mãn phương trình $2x^2 - 3y^2 = 3 - xy$.
b) Tìm tất cả các số nguyên dương m, n và số nguyên tố p thỏa mãn

$$(m^3 + n)(m + n^3) = p^3.$$

Câu 4. (5,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) và điểm D nằm trên đường trung tuyến AM kẻ từ đỉnh A của tam giác (D khác A). Gọi E là điểm trên đoạn MC (E khác M, C). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của D lên AB và AC . Gọi (C_1) và (C_2) lần lượt là hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BHE và CKE , (C_1) cắt (C_2) tại điểm thứ hai là L . Gọi d là đường thẳng kẻ từ B vuông góc với BC , d cắt (C_1) tại điểm thứ hai là I , N là giao điểm thứ hai của IL và (C_2) .

- a) Chứng minh BI song song NC .
b) Gọi P là giao điểm của IL và BC . Chứng minh tứ giác $ALMP$ nội tiếp đường tròn.

Câu 5. (3,0 điểm) Cho đoạn thẳng AB được chia thành bốn phần bằng nhau bởi ba điểm M, N, P (hình vẽ). Ta đánh dấu 2024 điểm phân biệt trong đoạn AB bằng cách **chia đều** trong mỗi đoạn AM, MN, NP, PB có 506 điểm, thỏa mãn điều kiện với một điểm bất kỳ thuộc đoạn AM thì tồn tại một điểm thuộc đoạn MN đối xứng với nhau qua M ; tương tự với một điểm bất kỳ thuộc đoạn PB thì tồn tại một điểm thuộc đoạn NP đối xứng với nhau qua P . Sau đó ta thực hiện tô màu đỏ cho 1012 điểm tùy ý và 1012 điểm còn lại màu đen. Chứng minh tổng các khoảng cách từ A đến các điểm màu đỏ bằng tổng các khoảng cách từ B đến các điểm màu đen.



Câu 6. (3,0 điểm) Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x \geq 0, y \leq 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$$P = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{y^2 - 2y + 2} + 3\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 4y + 8}.$$

----- HẾT -----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

- Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

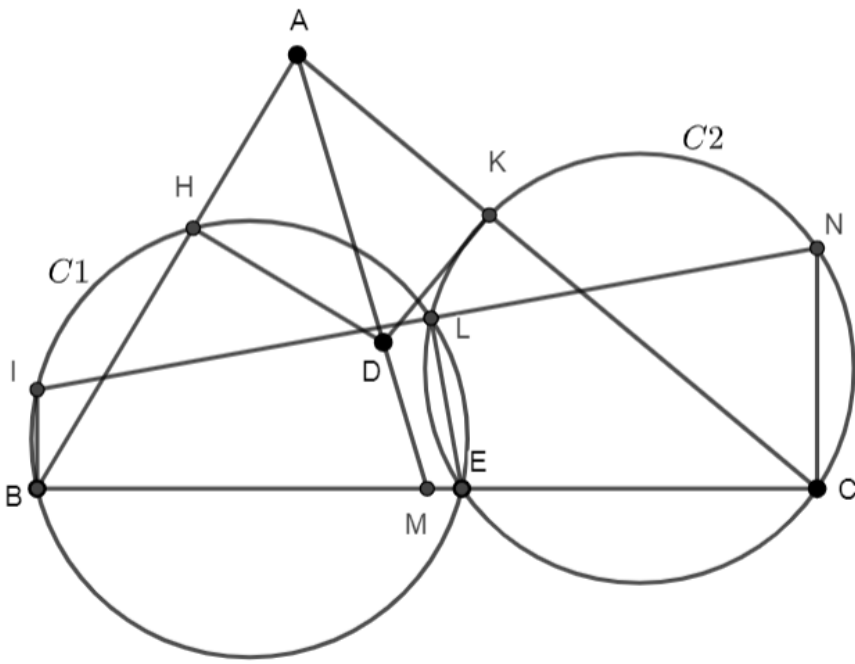
- Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh.....

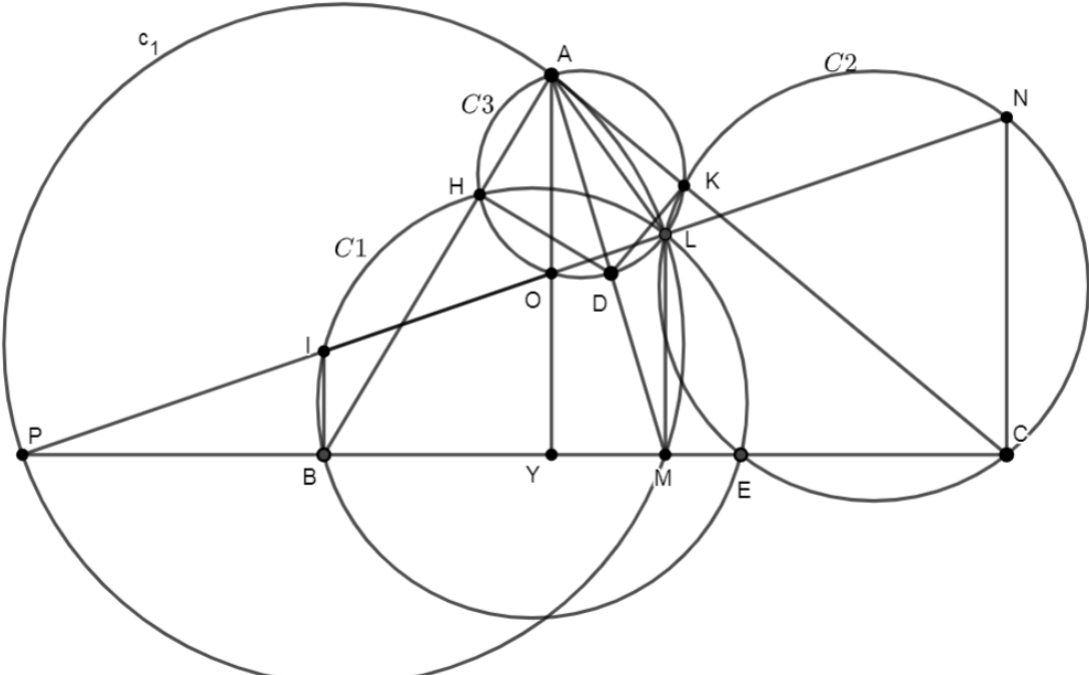
(Bản hướng dẫn này gồm 07 trang)

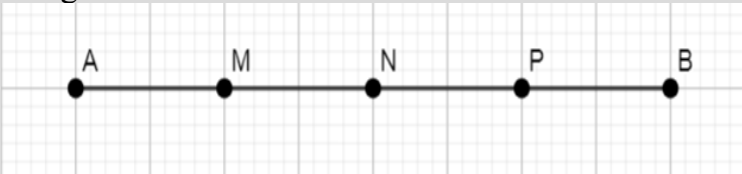
Câu	Nội dung	Điểm
1	Câu 1. (3,0 điểm) Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{1}{3}$; $u_{n+1} = \frac{3u_n}{2+3u_n^3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.	3,0
	Nhận xét dãy số $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,25
	Biến đổi $u_{n+1} = \frac{3u_n}{2+3u_n^3} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{u_n} + 3u_n^2 \right)$	
	Đặt dãy số $x_n = \frac{1}{u_n} > 0$ ta được $x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{3}{x_n^2} \right)$	0,25
	Dùng BĐT AM-GM ta được: $x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(x_n + x_n + \frac{3}{x_n^2} \right) \geq \sqrt[3]{3}$ suy ra $x_n = \frac{1}{u_n} \geq \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow u_n \leq \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$	0,5
	Dấu bằng xảy ra khi $u_{n+1} = \frac{3u_n}{2+3u_n^3} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ hay là $u_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ điều này vô lý, nên dấu bằng không xảy ra.	0,25
	Vậy ta luôn có $u_n < \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ (bị chặn trên)	0,25
	Mặt khác xét $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{2+3u_n^3} - u_n = \frac{u_n - 3u_n^4}{2+3u_n^3} = \frac{u_n(1-3u_n^3)}{2+3u_n^3} > 0; \left(u_n < \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)$	0,5
	Suy ra dãy số tăng và bị chặn trên nên tồn tại giới hạn hữu hạn L .	0,5
	Từ công thức truy hồi suy ra $L = \frac{3L}{2+3L^3} \Leftrightarrow L = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Vậy $\lim u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$	0,5

2	Câu 2. (3,0 điểm) Tìm tất cả các hàm số đa thức $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(xf(y)) = f(xy) + 2f(x) - 4, \forall x, y \in \mathbb{R}.$	3,0
	Giả sử tồn tại hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa yêu cầu đề bài + Xét $x=1$ suy ra $f(f(y)) = f(y) + 2f(1) - 4, \forall y \in \mathbb{R}$ (2)	0,5
	Đặt $\deg f = n (n \in \mathbb{N})$ So sánh bậc 2 vế của (2) ta được: $n^2 = n \Leftrightarrow \begin{cases} n=0 \\ n=1 \end{cases}$	0,5
	Nếu $n=0 \Rightarrow f(x) = C$, thay vào (1) ta được $C = 2 \Rightarrow f(x) = 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thỏa mãn.	0,5
	Nếu $n=1 \Rightarrow f(x) = ax + b (a \neq 0)$ Thay vào (1) ta được: $ax(ay + b) + b = axy + b + 2(ax + b) - 4, \forall x, y \in \mathbb{R}$	0,5
	$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ ab = 2a \\ b = 3b - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$	0,5
	$\Rightarrow f(x) = x + 2$. Thử lại thỏa mãn	0,25
	Vậy hàm số tìm được là $f(x) = 2, \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f(x) = x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$	0,25
3	Câu 3. (3,0 điểm)	
a.	a/ Tìm tất cả các giá trị nguyên của x, y thỏa mãn phương trình $2x^2 - 3y^2 = 3 - xy$.	1,0
	Ta có phương trình: $2x^2 - 3y^2 = 3 - xy$ Biến đổi tương đương ta được $(x - y)(2x + 3y) = 3$ Với $x - y; 2x + 3y$ là các số nguyên nên ta có các trường hợp sau	0,25
	1) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}$ (loại) 2) $\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + 3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-6}{5} \\ y = \frac{-1}{5} \end{cases}$ (loại)	0,25
	3) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ (nhận) 4) $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$ (nhận)	0,25
	Vậy có 2 nghiệm $(2; -1)$ và $(-2; 1)$	0,25

b.	Câu 3. <i>b/ Tìm tất cả các số nguyên dương m, n và số nguyên tố p thỏa mãn</i> $(m^3 + n)(m + n^3) = p^3$	2,0
	Không mất tính tổng quát, ta giả sử $m \geq n$ Từ: $(m^3 + n)(m + n^3) = p^3$ suy ra: $\begin{cases} m^3 + n = p^2 & (1) \\ n^3 + m = p & (2) \end{cases}$	0,25
	Dễ thấy: $p > m \geq n^3$, ngoài ra từ (2) ta có: $m \equiv -n^3 \pmod{p}$. Từ (1) ta có: $n \equiv -m^3 \equiv -(-n^3)^3 \equiv n^9 \pmod{p}$ Chuyển về ta được: $p \mid (n - n^9) = -n(n-1)(n+1)(n^2+1)(n^4+1)$	0,75
	+ Nếu $n=1$ thử lại được $m=2; p=3$, nếu $n>1$ ta xét các trường hợp dưới đây	0,25
	1) $p \mid n$ ta có $p \leq n < p$ vô lý 2) Với $p \mid (n-1)$ ta có $p \leq n-1 < p-1$ mâu thuẫn 3) Với $p \mid (n+1)$ ta có $n+1 \geq p > n^3 > n+1$ mâu thuẫn 4) Với $p \mid (n^2+1)$ ta có $n^2+1 \geq p > n^3 > n^2+1$ mâu thuẫn 5) Với $p \mid (n^4+1)$ ta kết hợp với (2) có $p \mid [n(m+n^3) - (n^4+1)] = mn-1$ suy ra $mn > p$ Mà ta lại có $p^3 = (m+n^3)(n+m^3) > n^3 m^3$ suy ra (5) mâu thuẫn	0,5
	Vậy ta chỉ có hai bộ số (1,2,3) hoặc (2,1,3) thỏa mãn bài toán.	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
4	Câu 4. (5,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) và điểm D nằm trên đường trung tuyến AM kẻ từ đỉnh A của tam giác (D khác A). Gọi E là điểm trên đoạn MC (E khác M, C). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của D lên AB và AC. Gọi (C_1) và (C_2) lần lượt là hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BHE và CKE, (C_1) cắt (C_2) tại điểm thứ hai là L. Gọi d là đường thẳng kẻ từ B vuông góc với BC, d cắt (C_1) tại điểm thứ hai là I, N là giao điểm thứ hai của IL và (C_2). a) Chứng minh BI song song NC. b) Gọi P là giao điểm của IL và BC. Chứng minh tứ giác $ALMP$ nội tiếp đường tròn.	5,0
a.	a/ Chứng minh rằng BI song song NC .	2,0
		0,25
	Cách 1. Xét hai đường tròn (C_1) và (C_2) có hai giao điểm là L, E và có hai cát tuyến lần lượt là ILN và BEC, theo định lý Reim thì BI song song NC.	1,75
	Cách 2. + Xét tứ giác nội tiếp $IBEL$ có $\widehat{B} = 90^\circ$ nên $\widehat{ELN} = 90^\circ$	0,75
	Suy ra với tứ giác nội tiếp $LECN$ thì ta được $\widehat{NCE} = 90^\circ$	0,5
	+ Vậy $NC \perp EC \Rightarrow NC // BI$	0,5

b.	Câu 4. <i>b/ Gọi P là giao điểm của IL với BC. Chứng minh rằng tứ giác ALMP nội tiếp đường tròn</i>	3,0
	 (Có thể không có đường tròn C1)	0,25
	Gọi đường tròn (C3) ngoại tiếp 3 đỉnh A,H,K.	0,25
	Khi đó: điểm L là điểm Miquel của 3 đường tròn (C1), (C2), (C3) tương ứng 3 điểm H, E, K trên 3 cạnh của tam giác ABC.	0,5
	Gọi O là giao điểm của IL và (C3). Theo câu (a) ta vận dụng cho 2 đường tròn (C2), (C3) suy ra $AO \parallel NC$ (hoặc vận dụng định lý Reim cho 2 đường tròn (C2), (C3) có 2 cát tuyến lần lượt là AKC và OLN) Khi đó ta được: $AO \perp BC$	0,75
	+ Vì $HD \perp AB; KD \perp AC$ nên D thuộc đường tròn (C3) và AD là đường kính	0,25
	+ Suy ra $OD \parallel BC$ nên $\widehat{ADO} = \widehat{AMP}$	0,25
	+ Lại có $\widehat{ADO} = \widehat{ALO}$	0,25
	+ Suy ra $\widehat{AMP} = \widehat{ALO}$ hay là $\widehat{AMP} = \widehat{ALP}$	0,25
	+ Vậy ALMP là tứ giác nội tiếp đường tròn.	0,25

5	Câu 5. (3,0 điểm) Cho đoạn thẳng AB được chia thành bốn phần bằng nhau bởi ba điểm M, N, P (hình vẽ). Ta đánh dấu 2024 điểm phân biệt trong đoạn AB bằng cách chia đều trong mỗi đoạn AM, MN, NP, PB có 506 điểm, thỏa mãn điều kiện với một điểm bất kỳ thuộc đoạn AM thì tồn tại một điểm thuộc đoạn MN đối xứng với nhau qua M; tương tự với một điểm bất kỳ thuộc đoạn PB thì tồn tại một điểm thuộc đoạn NP đối xứng với nhau qua P. Sau đó ta thực hiện tô màu đỏ cho 1012 điểm tùy ý và 1012 điểm còn lại màu đen. Chứng minh tổng các khoảng cách từ A đến các điểm màu đỏ bằng tổng các khoảng cách từ B đến các điểm màu đen. 	3,0
	+ Định hướng bằng đường thẳng từ A tới B và giả sử N là gốc, điểm B có tọa độ là 1 còn điểm A có tọa độ là -1.	0,25
	+ Theo giả thiết 506 điểm $X_1; X_2; \dots; X_{506}$ (có tọa độ $x_1; x_2; \dots; x_{506}$ bất kỳ thuộc đoạn AM thì ta cũng có tương ứng 506 điểm $Y_1; Y_2; \dots; Y_{506}$ có tọa độ $y_1; y_2; \dots; y_{506}$ đối xứng với $X_1; X_2; \dots; X_{506}$ qua M, suy ra $y_i = 2x_M - x_i = x_A - x_i = -1 - x_i$ với $i = \overline{1, \dots, 506}$.	0,5
	Tương tự với 506 điểm $Z_1; Z_2; \dots; Z_{506}$ có tọa độ $z_1; z_2; \dots; z_{506}$ bất kỳ thuộc đoạn PB thì ta cũng có tương ứng 506 điểm $T_1; T_2; \dots; T_{506}$ có tọa độ $t_1; t_2; \dots; t_{506}$ đối xứng với $Z_1; Z_2; \dots; Z_{506}$ qua P, suy ra $t_i = 2x_P - z_i = x_B - z_i = 1 - z_i$ với $i = \overline{1, \dots, 506}$.	0,5
	+ Tính tổng tọa độ 2024 điểm như sau $\sum_{i=1}^{506} x_i + \sum_{i=1}^{506} y_i + \sum_{i=1}^{506} z_i + \sum_{i=1}^{506} t_i = \sum_{i=1}^{506} x_i + \sum_{i=1}^{506} (-1 - x_i) + \sum_{i=1}^{506} z_i + \sum_{i=1}^{506} (1 - z_i) = 0$	0,25
	+ Gọi tọa độ của 1012 điểm màu đỏ là $a_1; a_2; \dots; a_{1012}$, suy ra tổng khoảng cách từ các điểm màu đỏ đến A là $\sum_{i=1}^{1012} (a_i - x_A) = \sum_{i=1}^{1012} a_i + 1012$	0,5
	+ Gọi tọa độ của 1012 điểm màu đen là $b_1; b_2; \dots; b_{1012}$, suy ra tổng khoảng cách từ các điểm màu đen đến B là $\sum_{i=1}^{1012} (x_B - b_i) = -\sum_{i=1}^{1012} b_i + 1012$	0,5
	Ta lại có $\sum_{i=1}^{1012} a_i + \sum_{i=1}^{1012} b_i = \sum_{i=1}^{506} x_i + \sum_{i=1}^{506} y_i + \sum_{i=1}^{506} z_i + \sum_{i=1}^{506} t_i = 0$	0,25
	Vậy $\sum_{i=1}^{1012} a_i = -\sum_{i=1}^{1012} b_i$ hay là tổng khoảng cách từ các điểm màu đỏ đến A bằng tổng khoảng cách từ các điểm màu đen đến B	0,25

6	Câu 6. (3,0 điểm) Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x \geq 0, y \leq 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{y^2 - 2y + 2} + 3\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 4y + 8}$.	3,0
	Cách 1. Xét $y = 0$ và $x \geq 0$. Ta chứng minh P không bị chặn trên khi $x \rightarrow +\infty$	0,5
	$y=0, P = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{2} + 3\sqrt{x^2 + 4x + 8}$.	0,25
	Ta có: $\frac{1}{x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{(x+1)^2 + 1} > 0, \forall x$ nên	0,5
	$P > 3\sqrt{x^2 + 4x + 8} > \sqrt{x^2 + 4x + 8} > x$.	1,0
	Khi $x \rightarrow +\infty$ thì $P \rightarrow +\infty$.	0,5
	Vậy nên P không có giá trị lớn nhất trên miền $\{(x, y) / x \geq 0, y \leq 0\}$.	0,25
	Cách 2.	
	Ta có: $\frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{y^2 - 2y + 2} = \frac{1}{1 + (x+1)^2} + \frac{1}{1 + (1-y)^2}$	0,25
	$x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 4y + 4 + 4 = (x + 2 - y)^2 + 4 = [(x+1) + (1-y)]^2 + 4$	0,25
	Đặt $\begin{cases} a = x+1 \\ b = 1-y \end{cases}, ab \geq 1$	0,25
	$P = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + 3\sqrt{(a+b)^2 + 4}$	0,25
	CM được: $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}, \forall ab \geq 1$	0,5
	Có: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ nên: $P \geq \frac{2}{1+ab} + 3\sqrt{4ab+4}$	0,5
	Đặt: $t = \sqrt{1+ab} \geq \sqrt{2} \Rightarrow P \geq \frac{2}{t^2} + 6t, \forall t \geq \sqrt{2}$	0,25
	Gọi $f(t) = \frac{2}{t^2} + 6t, \forall t \geq \sqrt{2}$ $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$	0,5
	Vì $P > f(t)$ nên không tồn tại giá trị lớn nhất của P	0,25

----- HẾT -----

*** Lưu ý:** Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong HDC nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.