2021

TH.S PHẠM HOÀNG ĐIỆP

NGUYỄN THÁI HOÀNG

DỰ ÁN LATEX TÀI LIỆU ÔN THI

KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

MÔN TOÁN 12

FULL CÔNG THỨC VÀ DẠNG TOÁN

TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC

PHẦN

I

ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

A LỚP 10

Xét dấu

1. Dấu nhị thức bậc nhất

- Dạng $f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$. Nghiệm của nhị thức là nghiệm của phương trình $ax + b = 0$.
- Bảng xét dấu của nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		trái dấu với a	0	cùng dấu với a	

2. Dấu tam thức bậc hai

- Dạng $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$. Nghiệm của nhị thức là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.
- Tính $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm và

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		cùng dấu với a	

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép $x = -\dfrac{b}{2a}$ và

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
ax^2+bx+c		cùng dấu với a	0	cùng dấu với a	

- Nếu $\Delta = 0$ $f(x) = 0$ có 2 nghiệm $x_1, x_2 \ (x_1 < x_2)$ và

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		cùng dấu với a	0	trái dấu với a	0	cùng dấu với a	

Chú ý: Có thể xét dấu tam thức bậc hai theo Δ' theo hệ số b chẵn .

3. Dấu các nghiệm phương trình bậc hai

Cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0 \ (*) \ \left(\Delta = b^2 - 4ac\right)$

- Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu $(x_1 < 0 < x_2)$ khi và chỉ khi $P = \dfrac{c}{a} < 0$.

- Phương trình (*) có hai nghiệm âm phân biệt ($x_1 < x_2 < 0$) khi và chỉ khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P = \dfrac{c}{a} > 0 \\ S = -\dfrac{b}{a} < 0 \end{cases}$.
- Phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt ($0 < x_1 < x_2$) khi và chỉ khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P = \dfrac{c}{a} > 0 \\ S = -\dfrac{b}{a} > 0 \end{cases}$.

4. Điều kiện không đổi dấu của tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

- $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{array}\right.$
- $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{array}\right.$

Phương trình cơ bản

1. Điều kiện xác định

a) Điều kiện để biểu thức $\sqrt{f(x)}$ có nghĩa là $f(x) \geq 0$;

b) Điều kiện để biểu thức $\dfrac{1}{f(x)}$ có nghĩa là $f(x) \neq 0$;

c) Điều kiện để biểu thức $\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$ có nghĩa là $f(x) > 0$.

2. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

a) $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B. \end{cases}$

b) $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2. \end{cases}$

3. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Với $f(x)$, $g(x)$ là các hàm số. Khi đó

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right. \end{cases}$$

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$$

$$|f(x)| + |g(x)| = |f(x) + g(x)| \Leftrightarrow f(x).g(x) \geq 0$$

B LỚP 11

Cấp số cộng

- (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d$
- Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $a + c = 2b$
- Số hạng TQ: $u_n = u_1 + (n-1)d$.
- Tổng n số hạng đầu CSC: $S_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2} = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$

Cấp số nhân

- (u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow n \geq 2, u_n = u_{n-1} \cdot q$.
- Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi $a \cdot c = b^2$.
- Số hạng TQ: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 2$.
- Tổng n số hạng đầu CSN: $S_n = u_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{u_1 - u_{n+1}}{1-q}$.

! Tổng cấp số nhân lùi vô hạn $S_n = \dfrac{u_1}{1-q}$.

Đạo hàm

1. Các quy tắc Giả sử $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ là các hàm số có đạo hàm, khi đó:

!

- $(u + v - w)' = u' + v' - w'$
- $(uv)' = u'v + v'u$
- $(ku)' = ku'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$
- $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$

2. Bảng đạo hàm các hàm số sơ cấp cơ bản

Đạo hàm hàm số sơ cấp cơ bản	Đạo hàm hàm số hợp
$(C)' = 0$	
$(x^n)' = n.x^{n-1} (n \in \mathbb{R}, x > 0)$ $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$	$(u^n)' = n.u^{n-1} (n \in \mathbb{R}, u > 0)$ $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (u > 0)$ $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2} \quad (u \neq 0)$

$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'.\sin u$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$	$(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} \quad \left(u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi), k \in \mathbb{Z}$	$(\tan u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u} \quad (u \neq k\pi), k \in \mathbb{Z}$
$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x.\ln a}$	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u.\ln a}$
$(\ln a)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
$(a^x)' = a^x.\ln a$	$(a^u)' = u'.a^u \ln a$

3. Phương trình tiếp tuyến

> !
> - Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $f'(x_0)$
> - Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0, y_0)$ có dạng $\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$.

Công thức lượng giác

1. Công thức lượng giác cơ bản

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
- $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq k\pi$
- $\tan x.\cot x = 1$
- $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
- $1 + \cot^2 x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq +k\pi$

> ! $\cos -$ đối, $\sin -$ bù, phụ - chéo, hơn kém π tan cot, hơn kém $\dfrac{\pi}{2}$ chéo sin.

2. Công thức cộng

- $\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a$
- $\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \sin b.\cos a$
- $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 - +tan a.\tan b}$

3. Công thức nhân đôi, hạ bậc

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin 2a = 2\sin a.\cos a$
- $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$
- $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$
- $\cos 3a = 3\cos^3 a - 3\cos a$
- $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$
- $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$
- $\tan^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$

4. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$
$$\sin a\sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$$
$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$

5. Công thức biến tổng thành tích

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$$
$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$$
$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$$
$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$$

6. Phương trình lượng giác cơ bản $\sin x = a$ **và** $\cos x = a$ Trường hợp $|a| > 1$ phương trình vô nghiệm.
Trường hợp $|a| < 1$, khi đó

	$\sin x = a$	$\cos x = a$
Đặc biệt	$\begin{cases}\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\end{cases}$	$\begin{cases}\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \\ \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi\end{cases}$
	$\exists\ a$ sao cho $\sin x = a$	$\exists a$ sao cho $\cos x = a$
Nếu a (chẵn số)	$\sin x = \sin a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a + k2\pi \\ x = \pi - a + k2\pi\end{array}\right.$	$\cos x = \cos a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a + k2\pi \\ x = -a + k2\pi\end{array}\right.$

Nếu a (lẻ số)	$\sin x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin(a) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin(a) + k2\pi \end{array}\right.$	$\cos x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos(a) + k2\pi \\ x = -\arccos(a) + k2\pi \end{array}\right.$
Nếu a (theo đơn vị độ)	$\sin x = \sin a^o \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a^o + k360^o \\ x = \pi - a^o + k360^o \end{array}\right.$	$\cos x = \cos a^o \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a^o + k360^o \\ x = -a^o + k360^o \end{array}\right.$

7. Phương trình lượng giác cơ bản $\tan x = a$ **và** $\cot x = a$

	$\tan x = a \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$	$\cot x = a \quad (x \neq k\pi)$
Đặc biệt	$\left\{\begin{array}{l} \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l} \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right.$
	$\exists\, a$ sao cho $\tan x = a$	$\exists a$ sao cho $\cot x = a$
Nếu a (chẵn số)	$\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi$	$\cot x = \cot a \Leftrightarrow x = a + \pi$
Nếu a (lẻ số)	$\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan(a) + k\pi$	$\cot x = a \Leftrightarrow x = \mathrm{arccot(a)} + \mathrm{k}\pi$
Nếu a (theo đơn vị độ)	$\tan x = \tan a^o \Leftrightarrow x = a^o + k180^o$	$\cot x = \cot a^o \Leftrightarrow x = a^o + k180^o$

C LỚP 12

Quy tắc xét tính đơn điệu hàm số

- Nếu $f'(x) \geq 0$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì HSĐB trên K.
- Nếu $f'(x) \leq 0$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì HSNB trên K.

! Hàm $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ không xét dấu bằng.

Quy tắc:

a) Tìm tập xác định.

b) Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm nghiệm $f'(x) = 0$ $x_i \in \mathbb{R}$ hoặc $f'(x) = 0$ không xác định.

c) Lập BBT.

d) Kết luận.

Cực trị hàm số

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 và đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

Quy tắc 1.
- Tìm tập xác định.
- TÍnh $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không xác định.
- Lập bảng biến thiên.
- Từ bảng biến thiên suy ra cực trị. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi qua x_i thì hàm số đạt cực trị tại x_i.

Quy tắc 2.
- Tìm tập xác định.
- Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu x_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ là các nghiệm của nó.
- Tính $f''(x)$ và $f''(x_i), (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$.
- Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i.
  - ⊞ Nếu $f''(x_i) > 0$ thì x_i là điểm cực tiểu.
  - ⊞ Nếu $f''(x_i) < 0$ thì x_i là điểm cực đại.

Cực trị hàm bậc 3 - Trùng phương

- Hàm số bậc 3 có cực trị khi: $\Delta_{y'} > 0$. Không có cực trị khi: $\Delta_{y'} \leq 0$.
- Hàm số trùng phương có 3 cực trị khi: $ab < 0$. Có 1 cực trị khi: $ab \geq 0$.
  - ⊞ 3 điểm cực trị hàm trùng phương luôn tạo thành tam giác cân.
  - ⊞ $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$
  - ⊞ $S_{\triangle ABC} = \sqrt{-\dfrac{b^5}{32a^3}}$

Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

Quy tắc

1. Tìm các điểm $x_1;x_2;...;x_n$ trên khoảng $(a;b)$ tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ KXĐ.
2. Tính $f(a);f(x_1);f(x_2);...;f(x_n);f(b)$.
3. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên.

Sử dụng máy tính FX-580VNX

Bước 1. MODE 8 (TABLE).

Bước 2. NHẬP F(X) =.

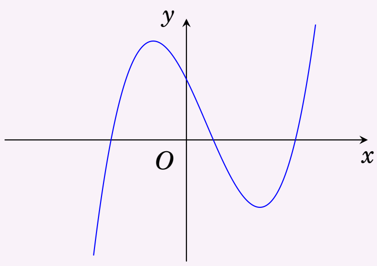
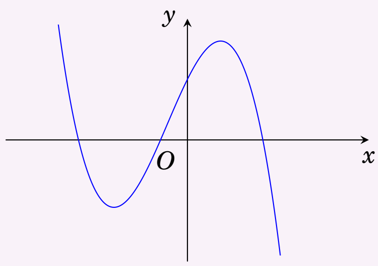
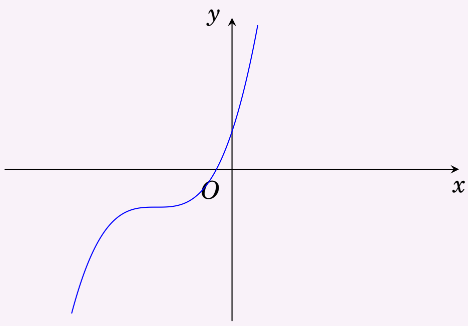
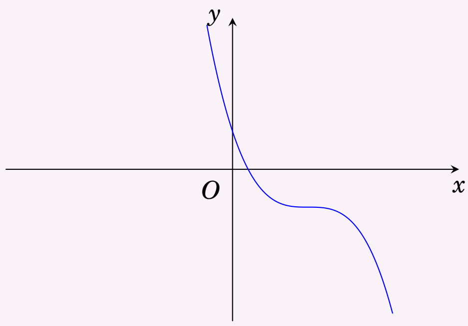
Bước 3. START = a, END = b, STEP = $\dfrac{b-a}{29}$. Chú ý: $-\infty=-10, +\infty=10$.

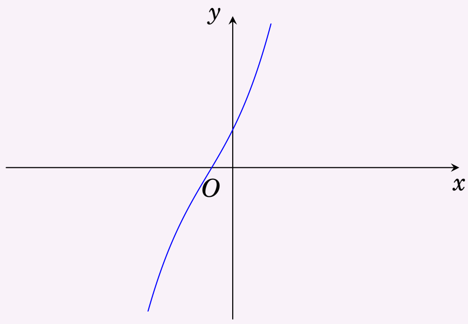
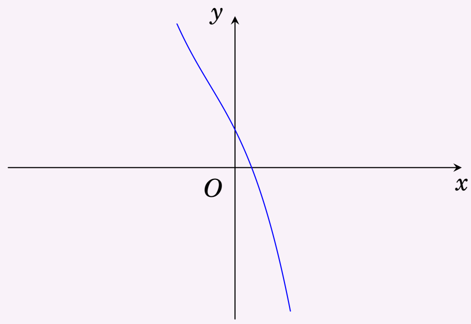
Đường tiệm cận

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0$ $(y_0=const) \Rightarrow$ TCN: $y=y_0$.
- TCĐ: $x=x_0$ nếu $x_0=const$ là nghiệm mẫu và không là nghiệm tử.
- Giao điểm của TCĐ và TCN là tâm đối xứng của đồ thị.

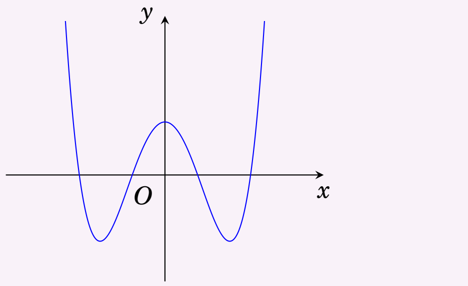
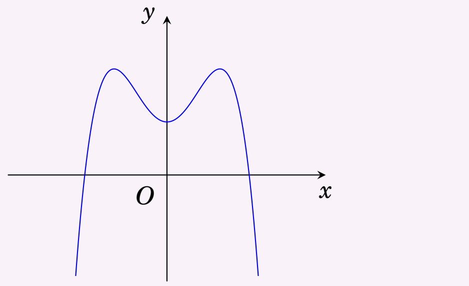
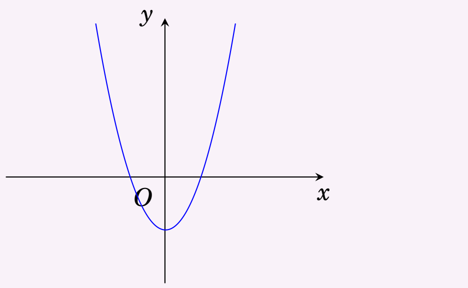
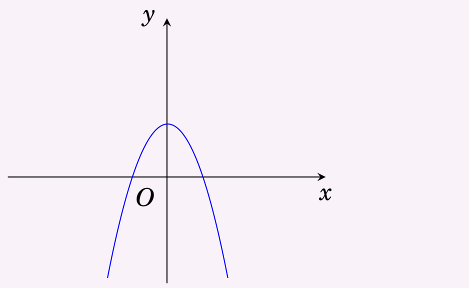
Đồ thị hàm số

1. Đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$

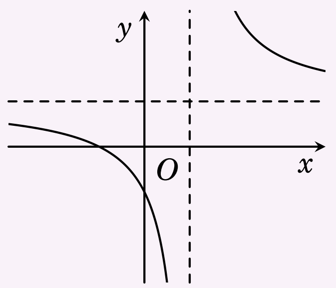
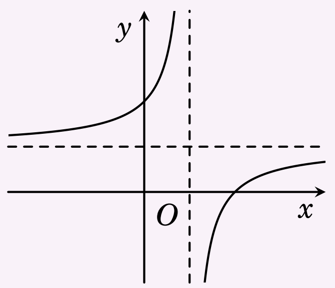
	$a>0$	$a<0$
$\Delta_{y'}>0$		
$\Delta_{y'}=0$		

$\Delta_{y'} < 0$		

2. Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$.

	$a > 0$	$a < 0$
$a \cdot b < 0$		
$a \cdot b \geq 0$		

2. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

$ad - bc < 0$	$ad - bc > 0$
	

Tịnh tiến đồ thị và phép suy đồ thị

Tịnh tiến đồ thị song song với các trục tọa độ
Cho (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $p > 0$, ta có:

- Tịnh tiến (C) lên trên p đơn vị tì được đồ thị $y = f(x) + p$.
- Tịnh tiến (C) xuống dưới p đơn vị tì được đồ thị $y = f(x) - p$.
- Tịnh tiến (C) sang trái p đơn vị tì được đồ thị $y = f(x + p)$.
- Tịnh tiến (C) sang phải p đơn vị tì được đồ thị $y = f(x - p)$.

Dạng 1: Từ đồ thị (C): $y = f(x)$ suy ra đồ thị (C'): $y = f(|x|)$
Ta có: $y = f(|x|)$ là **hàm chẵn** nên đồ thị (C') **nhận** Oy **làm trục đối xứng**
Cách vẽ (C') từ (C):

- Giữ nguyên phần đồ thị bên phải trục Oy của đồ thị (C): $y = f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị bên trái trục Oy của (C), lấy đối xứng phần đồ thị được giữ qua Oy.

Dạng 2: Từ đồ thị (C): $y = f(x)$ suy ra đồ thị (C'): $y = |f(x)|$
Cách vẽ (C') từ (C):

- Giữ nguyên phần đồ thị bên trên trục Ox của đồ thị (C): $y = f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị bên dưới trục Ox của (C), lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ qua Ox.

Sự tương giao

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2).
• Khi đó **số giao điểm** của hai đồ thị (C_1) và (C_2) chính bằng **số nghiệm của phương trình** $f(x) = g(x)$ và hoành độ giao điểm chính là nghiệm của phương trình đó.

> ! Phương trình $f(x) = 0$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C_1) với trục hoành Ox

> ! • Cô lập m:
> - Nếu $g(m) \le f(x)$ thì $g(m) \le \min f(x)$
> - Nếu $g(m) \ge f(x)$ thì $g(m) \ge \max f(x)$

Lũy thừa (a>0)

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $\sqrt{a^k} = a^{\frac{k}{2}}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
- $\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^k}} = a^{\frac{k}{m \cdot n}}$

Lôgarit $(0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1)$

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a a^\alpha = \alpha$
- $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$
- $\log_x a = \dfrac{1}{\log_a x}$
- $\log_{a^m} x = \dfrac{1}{m}\log_a x$
- $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$
- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

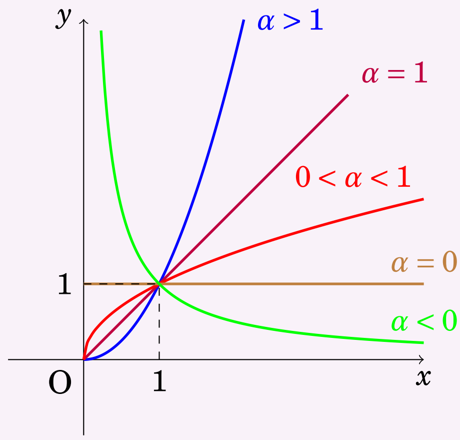
Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

Tập xác định

a) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ khi α nguyên dương.

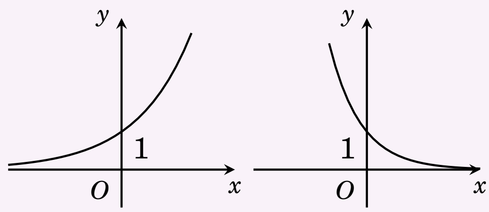
b) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ khi α nguyên âm.

c) $\mathscr{D} = (0; +\infty)$ khi α không nguyên.



Hàm số mũ $y = a^x$ $(a > 0)$

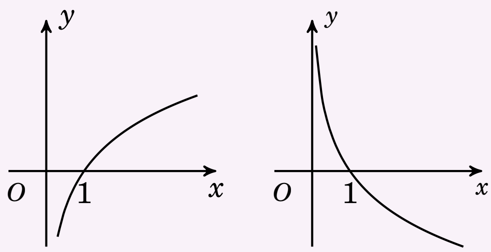
- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- $y' = a^x \ln a, \forall x \in \mathbb{R}$
- HSĐB trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a > 1$, HSNB trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a < 1$.
- TCN: $y = 0$.



$a > 1$ $\qquad$ $0 < a < 1$

Hàm số Lôgarit $y = \log_a x$

- Tập xác định $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.
- $y' = \dfrac{1}{x \ln a}, \forall x \in (0; +\infty)$.
- HSĐB trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $a > 1$, HSNB trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $0 < a < 1$.
- TCĐ: $x = 0$.



$a > 1$ $\qquad$ $0 < a < 1$

Phương trình, bất phương trình mũ

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$	$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$
$a > 1$	$0 < a < 1$
$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$	$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Phương trình và bất phương trình logarit

Khi giải phương trình bất phương trình logarit: **Đặt điều kiện**

$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$	$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$
$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$	$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$

Lãi suất ngân hàng

1. Lãi đơn: Lãi đơn là số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra, tức là tiền lãi của kì hạn trước không được tính vào vốn để tính lãi cho kỳ hạn tiếp, cho dù đến kì hạn người gửi không đến rút tiền ra.
Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi đơn $r\%$/ kỳ hạn thì số tiền khách nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là

$$S_n = A + n \cdot A \cdot r = A(1 + nr)$$

2. Lãi kép: Lãi kép là tiền lãi của kì hạn trước nếu người gửi không rút ra thì được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn sau.
Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép $r\%$/kì hạn thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn $n \in \mathbb{N}^*$ là

$$S_n = A(1 + r)^n$$

Nguyên hàm

1. Kí hiệu $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C$.

2. Tính chất

- $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)+C$.
- $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$ với $k\neq 0$.
- $\int [f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$.

Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp

Nguyên hàm	Nguyên hàm mở rộng
① $\int 0\mathrm{d}x = C$	$\int k\mathrm{d}x = k\cdot x + C$
② $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \alpha\neq -1$	$\int (ax+b)^\alpha\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \alpha\neq -1$
③ $\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}+C$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a}.\frac{1}{ax+b}+C$
④ $\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int a^{mx+n}\mathrm{d}x = \frac{1}{m}\cdot\frac{a^{mx+n}}{\ln a}+C$
⑤ $\int e^x\mathrm{d}x = e^x+C$	$\int e^{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax+b}+C$
⑥ $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert+C$	$\int \frac{1}{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}.\ln\lvert ax+b\rvert+C$
⑦ $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x+C$	$\int \cos(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot\sin(ax+b)+C$
⑧ $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x+C$	$\int \sin(ax+b)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$
⑨ $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x+C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$
⑩ $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x+C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$

! Lưu ý sau khi đổi biến và tính nguyên hàm xong thì cần phải trả lại biến cũ ban đầu.

Tích phân

1. Kí hiêu

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

2. Tính chất

- $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

- $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \, (k \in \mathbb{R})$.
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x (a < c < b)$.
- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
- Nếu $y = f(x)$ là hàm lẻ, liên tục trên đoạn $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$.
- Nếu $y = f(x)$ là hàm chẵn, liên tục trên đoạn $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

Diện tích hình phẳng

$$(\mathscr{H}) = \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \Rightarrow S = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

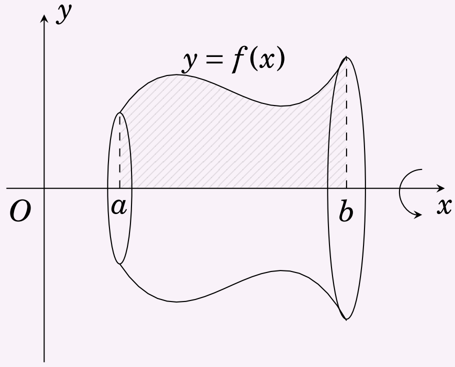
$$(\mathscr{H}) = \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b \end{cases} \Rightarrow S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\mathrm{d}x.$$

Thể tích khối tròn xoay

- **Loại 1**

  Vật thể tròn xoay sinh ra khi quanh quanh trục Ox hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = a, x = b$ với $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

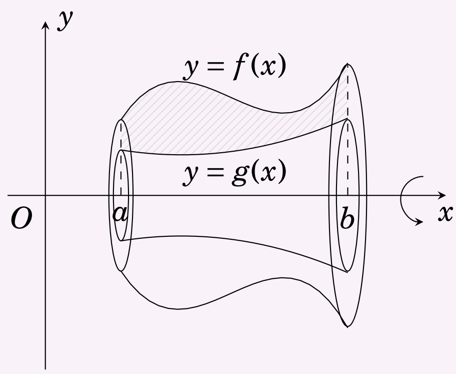
  Áp dụng công thức: $\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}$



- **Loại 2**

Vật thể tròn xoay sinh ra khi quanh quanh trục Ox hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b$ với $f(x), g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $0 \le g(x) \le f(x)\, \forall x \in [a;b]$.
Áp dụng công thức:

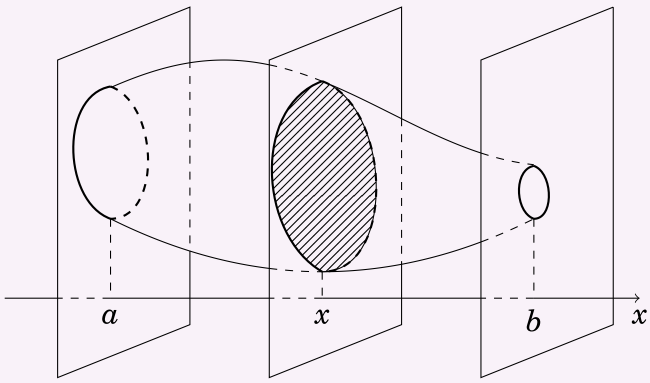
$$\boxed{V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right] \mathrm{d}x}$$



- Nhiều bài tập chưa cho $x = a, x = b$ thì ta GPT $f(x) = g(x)$ để tìm a, b.
- Nếu xác định được vị trí hàm số $f(x)$ và $g(x)$ thì ta có thể mở giấu GTTĐ như sau:
  - ⊞ ĐTHS $f(x)$ nằm trên ĐTHS $g(x)$ trên $[a,b]$ thì $f(x) > g(x), \forall x \in [a,b]$.
  - ⊞ ĐTHS $f(x)$ nằm dưới ĐTHS $g(x)$ trên $[a,b]$ thì $f(x) < g(x), \forall x \in [a,b]$.

Thể tích vật thể

Cắt vật thể $\mathcal{V}$ bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x = a, x = b (a < b)$. Một mặt phẳng tuỳ ý vuông góc với Ox tại điểm $x, (a \le x \le b)$ cắt $\mathcal{V}$ theo thiết diện có diện tích $S(x)$. Với $S(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.



Thể tích của vật thể $\mathcal{V}$ giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) tính bởi công thức

$$V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x.$$

Số phức

1. Định nghĩa và tính chất

- $z = a + bi$, $i^2 = -1$ là số phức

   ⊞ Phần thực: a
   ⊞ Phần ảo: b

- Cho $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ thì

   ⊞ $z + z' = (a + a') + (b + b')i$
   ⊞ $z - z' = (a - a') + (b - b')i$
   ⊞ $z \cdot z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$
   ⊞ $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \dfrac{a'b - a - b'}{a'^2 + b'^2}$

2. Số phức liên hợp

- Cho $z = a + bi$ thì $\overline{z} = a - bi$ là số phức liên hợp của z
- Tính chất:

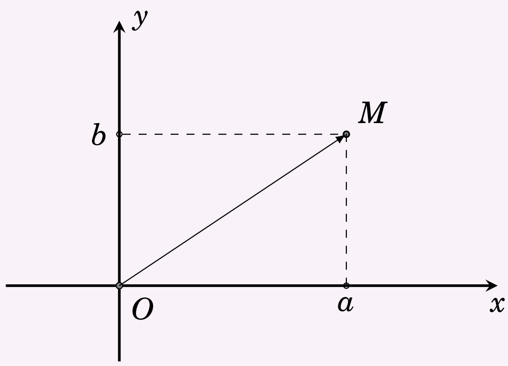
   ⊞ $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$; $\quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; $\quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
   ⊞ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$; $\quad z + \overline{z} = 2a$; $\quad z - \overline{z} = 2bi$

3. Môđun của số phức

- Cho $a = z + bi$ thì $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $|\overline{z}| = |z|$; $\quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$; $\quad |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$; $\quad |z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

4. Biểu diễn hình học số phức

- $z = a + bi \Rightarrow M(a; b)$
- $|z| = OM$



5. Phương trình bậc hai

- $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \ne 0)$, $\Delta = b^2 - 4ac$.
- $\Delta > 0$ phương trình có hai nghiệm thực: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta < 0$ Phương trình có hai nghiệm phức: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{|\Delta|}i}{2a}$

PHẦN

II

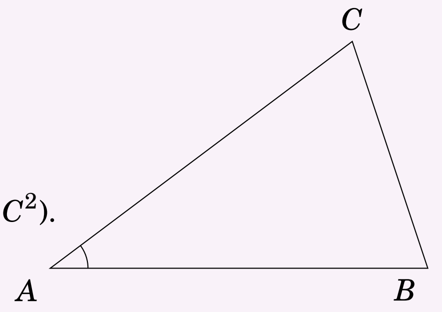
HÌNH HỌC

Một số công thức cần nhớ

Để tính góc giữa hai đường thẳng trong không gian chúng ta cần nhớ các công thức sau:

- Định lý hàm số cô-sin trong tam giác $\triangle ABC$:

$$\bullet BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \widehat{BAC}$$
$$\bullet \cos\widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$$
$$\bullet \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos\widehat{BAC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2).$$



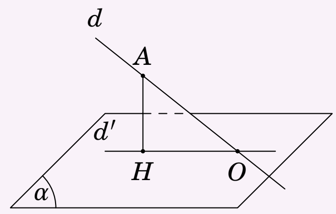
- Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD ta tính góc giữa hai véc-tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ dựa vào công thức

$$\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|} \Rightarrow \cos(AB;CD) = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}$$

từ đó suy ra góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

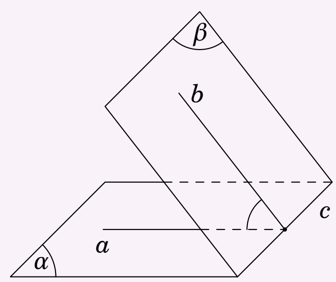
Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

- Xác định giao điểm O của d và (α).
- Lấy một điểm A tùy ý trên d khác với O.
- Xác định hình chiếu H của A lên mp (α).
- φ là góc giữa d và (α) thì $\varphi = \widehat{AOH}$.



Góc giữa hai mặt phẳng

- Xác định giao tuyến c của hai mặt phẳng (α) và (β).
- Dựng hai đường thẳng a, b lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến c tại một điểm trên c. Khi đó: $\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) = \left(\widehat{a,b}\right)$.
- Hay ta xác định mặt phẳng phụ (γ) vuông góc với giao tuyến c mà $(\alpha)\cap(\gamma) = a$, $(\beta)\cap(\gamma) = b$. Suy ra $\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) = \left(\widehat{a,b}\right)$.



Khoảng cách từ chân đường vuông góc đến mặt bên

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Xác định khoảng cách từ chân đường cao A đến mặt bên (SBC).

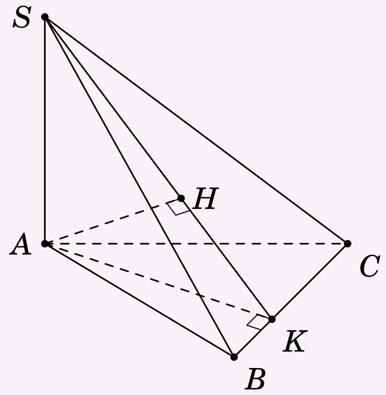
Dựng $\begin{cases} AK \perp BC, (K \in BC) \\ AH \perp SK, (H \in SK). \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \quad (\text{ do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAK).$

$\Rightarrow BC \perp AH.$

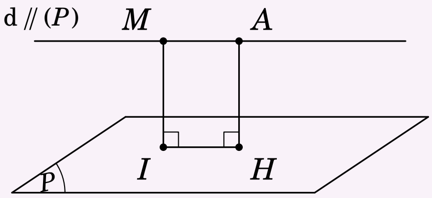
Do đó, ta có $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SK \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBC)) = AH.$

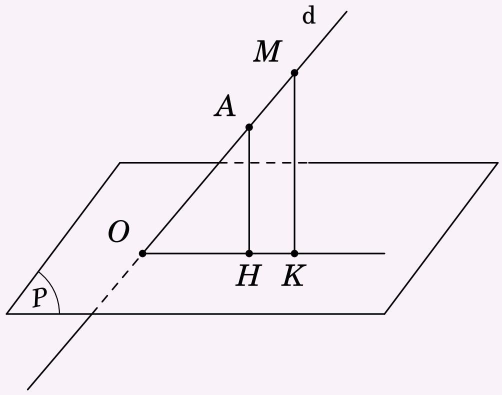


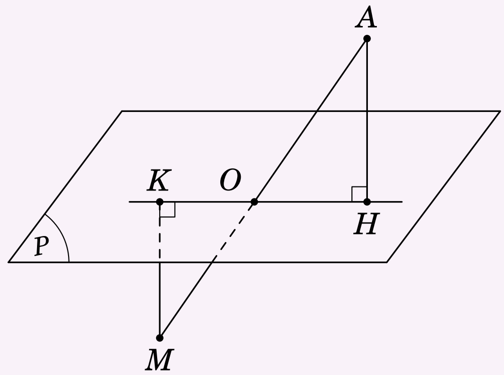
☑ Các phương pháp đưa về khoảng cách từ chân đường vuông góc

a) **Sử dụng song song của đường thẳng và mặt phẳng**
Đường thẳng d qua M, qua chân đường vuông góc A và $d \parallel (P)$. Khi đó $\mathrm{d}(M,(P)) = \mathrm{d}(A,(P))$.



b) **Sử dụng tỷ số khoảng cách**

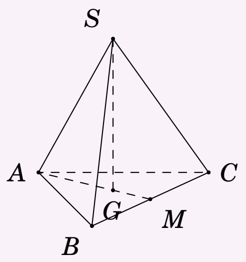
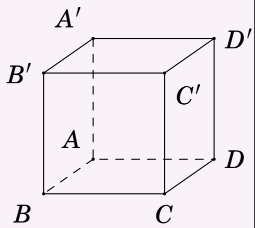
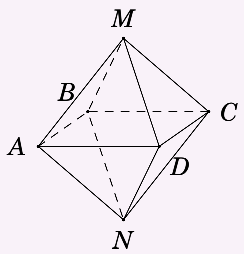
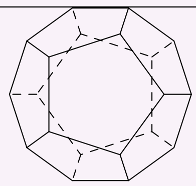
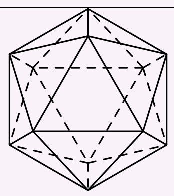




Nếu H là hình chiếu vuông góc của A trên (P), đường thẳng d qua hai điểm M, A và cắt (P) tại O.

Khi đó: $\mathrm{d}(M,(P)) = \dfrac{OM}{OA} \cdot \mathrm{d}(A,(P))$ (Sử dụng định lý Talet để chứng minh).

Khối đa diện đều

Khối đa diện đều	Hình	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt	Loại	V	R
Tứ diện đều (6)		4	6	4	$\{3;3\}$	$V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$	$R=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$
Khối lập phương (9)		8	12	6	$\{4;3\}$	$V=a^3$	$R=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
Bát diện đều (9)		6	12	8	$\{3;4\}$	$V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$	$R=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$
Mười hai mặt đều (15)		20	30	12	$\{5;3\}$	$\dfrac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$	$R=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}a$
Hai mươi mặt đều (15)		12	30	20	$\{3;5\}$	$\dfrac{15+5\sqrt{5}}{12}a^3$	$R=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{20}}{4}a$

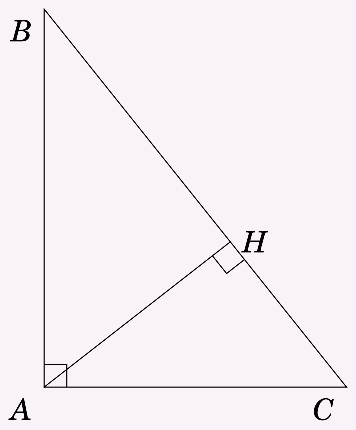
Mặt phẳng đối xứng của một số hình thường gặp

- Hình hộp chữ nhật có 3 kích thức khác nhau: có 3 mặt phẳng đối xứng.
- Hình lăng trụ tam giác đều: có 4 mặt phẳng đối xứng.
- Hình chóp tam giác đều: có 3 mặt phẳng đối xứng.

Khối chóp không có **tâm đối xứng**

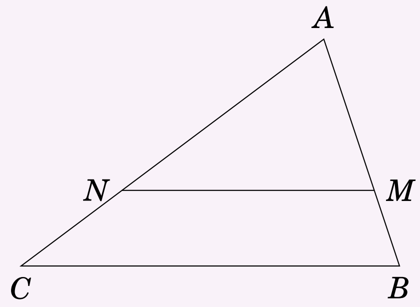
Hình học phẳng

- $\triangle ABC$ vuông tại A: $BC^2 = AB^2 + AC^2$.
- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$.
- Diện tích $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC$
- $\triangle ABC$ vuông tại cân tại A
  - $S_{\triangle ABC} = \dfrac{BC^2}{4}$
  - $BC = AB\sqrt{2}$



Định lý Thales

$$\begin{cases} \bullet\ MN \,//\, BC \Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC} = k \\ \bullet\ \dfrac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\dfrac{AM}{AB}\right)^2 = k^2 \end{cases}$$



Diện tích đa giác

Diện tích tam giác

Đối với các tam giác thường ta sử dụng một trong các công thức tính diện tích sau đây:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- Tam giác ABC vuông tại A: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC$.
- Tam giác ABC đều cạnh a: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
- Tam giác ABC đều cạnh a có đường cao $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích tứ giác

Các tứ giác đặc biệt mà ta thường gặp trong các bài toán:

a) Hình vuông $ABCD$ cạnh a: $S_{ABCD} = a^2 = \frac{1}{2}AC \cdot BD$.

b) Hình chữ nhật $ABCD$: $S_{ABCD} = AB \cdot AD$.

c) Hình thoi: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = AB \cdot AD \cdot \sin A$.

d) Hình bình hành $ABCD$: $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin A$.

e) Hình thang $ABCD$: $S_{ABCD} = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$.

Thể tích khối đa diện

- Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là

$$V = B \cdot h$$

- Thể tích của khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$$

- Nếu (H) là khối lập phương có cạnh bằng a thì $V_{(H)} = a^3$.
- Thể tích của khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước của nó $a \cdot b \cdot c$.
- Nếu hai khối đa diện (H_1) và (H_2) bằng nhau thì $V_{(H_1)} = V_{(H_2)}$.
- Nếu khối đa diện (H) được phân chia thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2) thì:

$$V_{(H)} = V_{(H_1)} + V_{(H_2)}$$

Hình chóp đều

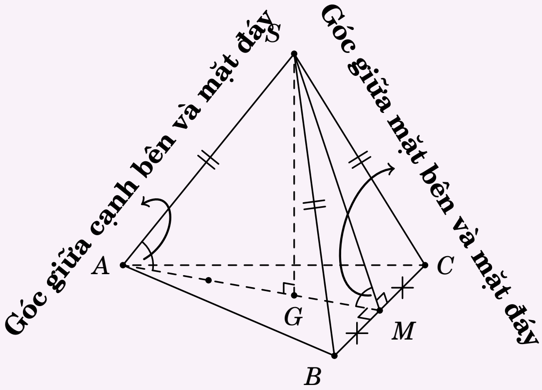
a) Đáy là đa giác đều (hình chóp tam giác đều có đáy là tam giác đều, hình chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông).

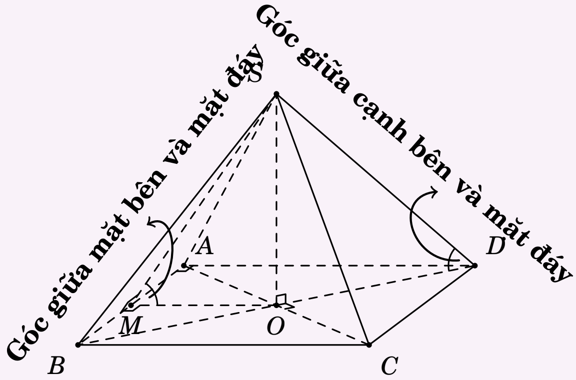
b) Chân đường cao trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy (hình chóp tam giác đều có chân đường cao trùng với trọng tâm G, hình chóp tứ giác đều có chân đường cao trùng với tâm O của hình vuông).

c) Các mặt bên là những tam giác cân và bằng nhau.

d) Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy đều bằng nhau.

e) Góc giữa các mặt bên và mặt đáy đều bằng nhau.





Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Tỉ số thể tích khối chóp

Các kết quả thường dùng

Kết quả 1: Cho tam giác OAB, trên cạnh OA chọn A', trên cạnh OB chọn B'.

Khi đó: $\dfrac{S_{OA'B'}}{S_{OAB}} = \dfrac{OA'}{OA} \cdot \dfrac{OB'}{OB}$

Kết quả 2: Cho hình chóp $S.ABC$, trên cạnh SA chọn A', trên cạnh SB chọn B' trên cạnh SC chọn C'.

Khi đó: $\dfrac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SA'}{SA} \cdot \dfrac{SB'}{SB} \cdot \dfrac{SC'}{SC}$

Kết quả 3:

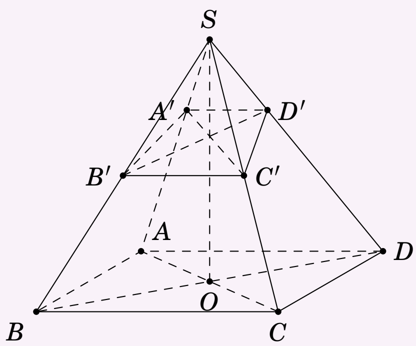
Cho hình chóp $S.ABCD$, trên cạnh SA chọn A', trên cạnh SB chọn B' trên cạnh SC chọn C' trên cạnh SD chọn D'.

Khi đó:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{a+b+c+d}{4 \cdot abcd}$$

Trong đó:

$a = \dfrac{SA}{SA'}, b = \dfrac{SB}{SB'}, c = \dfrac{SC}{SC'}, d = \dfrac{SD}{SD'}$.



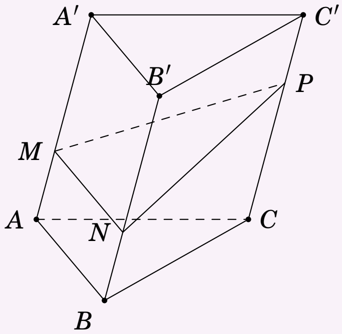
Tỉ số thể tích khối lăng trụ

Các kết quả thường dùng

Kết quả 1:

$$\frac{V_{A'B'C'.MNP}}{V_{A'B'C'.ABC}} = \frac{a+b+c}{3}$$

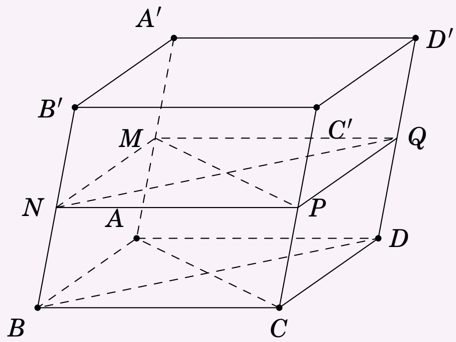
Trong đó:
$a = \dfrac{A'M}{AA'}, b = \dfrac{B'N}{BB'}, c = \dfrac{C'P}{CC'}$.



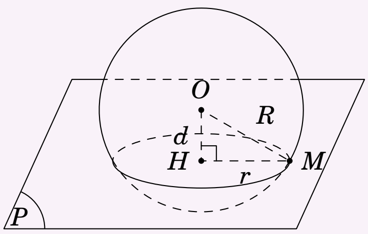
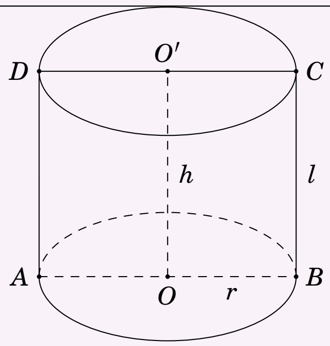
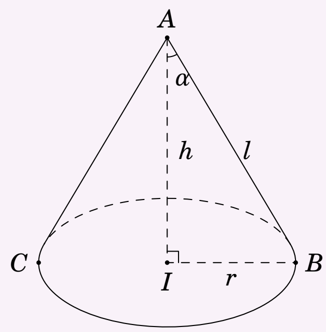
Kết quả 2:

$$\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{a+b+c+d}{4}$$

Trong đó:
$a = \dfrac{AM}{AA'}, b = \dfrac{BN}{BB'}, c = \dfrac{CP}{CC'}, d = \dfrac{DQ}{DD'}$.



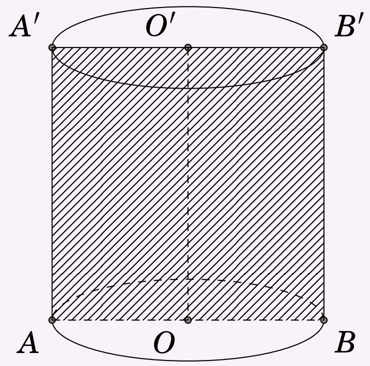
Khối tròn xoay

	CẦU	TRỤ	NÓN
KHỐI TRÒN XOAY	 $d^2 + r^2 = R^2$	 $h = \ell$	 $r^2 + h^2 = \ell^2$
DIỆN TÍCH	$*S = 4\pi R^2$	$*S_{xq} = 2\pi rh$ $*S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}}$ $= 2\pi rl + 2\pi r^2$.	$*S_{xq} = \pi rl$ (l đường sinh, r bkính) $*S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}}$ $= \pi rl + \pi r^2$.
THỂ TÍCH	$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$	$V = \pi r^2 h$	$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ (h: đường cao)

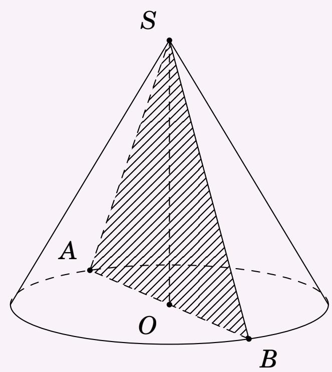
> ! Đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu (S) tâm I có bán kính R khi và chỉ khi $d(I;\Delta) = R$.
> Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tâm I có bán kính R khi và chỉ khi $d(I;(P)) = R$.

Thiết diện khối nón và trụ

- Thiết diện qua trục OO' của hình trụ luôn là một hình chữ nhật $A'B'BA$.
  - ⊞ Chiều rộng: $AB = 2R$
  - ⊞ Chiều dài: $AA' = h = \ell$
  - ⊞ Diện tích: $S_{A'B'BA} = AB.AA' = 2 \cdot R \cdot \ell$



- Thiết diện qua trục của hình nón đỉnh S luôn là một tam giác cân đỉnh S.
  - ⊞ Cạnh bên: $SA = SB = \ell$
  - ⊞ Chiều dài: $AB = 2R$
  - ⊞ Diện tích: $S_{SAB} = R \cdot h$

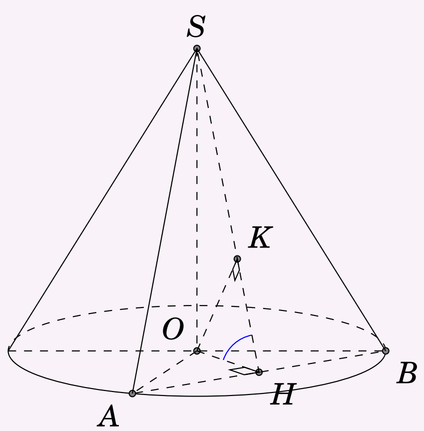


Thiết diện không đi qua trục

1. Khối nón Gọi H là trung điểm AB.

- Tam giác SAB là tam giác cân.
- $d(O,(SAB)) = OK$.
- $\widehat{(SAB),(\text{đáy})} = \widehat{SHO}$.
- $\widehat{(SO),(SAB)} = \widehat{OSH}$
- $R^2 = OH^2 + AH^2$

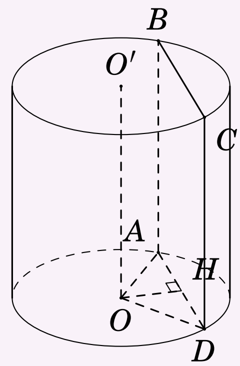
> ! H là trung điểm AB.



1. Khối trụ

- ABCD là hình chữ nhật.
- $d(O,(ABCD)) = OH$.
- $R^2 = OH^2 + HD^2$

H là trung điểm AD.



Bán kính đường tròn ngoại tiếp

Hình	Tính bán kính ngoại tiếp đáy
Tam giác đều cạnh a	$R_{\text{đáy}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$
Tam giác vuông	$R_{\text{đáy}} = \frac{1}{2} \cdot$ cạnh huyền
Hình vuông cạnh a	$R_{\text{đáy}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$
Hình chữ nhật cạnh a, b	$R_{\text{đáy}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$
Hình thang nửa lục giác đều	$R_{\text{đáy}} = \frac{1}{2} \cdot$ đáy lớn
Tam giác thường 3 cạnh a, b, c	$R_{\text{đáy}} = \frac{abc}{4S_{\text{đáy}}}$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

- Khối đa diện có cạnh bên vuông góc mặt đáy $R = \sqrt{R_d^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}$.

⊞ Hình hộp chữ nhật + Hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác vuông

$$R = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}.$$

⊞ Hình lập phương $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

- Chóp có mặt bên vuông góc mặt đáy $R = \sqrt{R_b^2 + R_d^2 - \dfrac{d^2}{4}}$.
- Hình chóp đều: Gọi h là độ cao của hình chóp và k là chiều dài cạnh bên. Khi đó $R = \dfrac{k^2}{2h}$.
- Gọi d là độ dài đoạn thẳng mà tất cả các đỉnh còn lại nhìn nó dưới một góc vuông. Khi đó, bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = \dfrac{d}{2}$.

Mặt cầu nội tiếp

Gọi V là thể tích khối đa diện và S_{tp} là diện tích toàn phần của đa diện. Khi đó, bán kính mặt cầu nội tiếp khối đa diện là $r = \dfrac{3V}{S_{tp}}$.

Tọa độ trong không gian

1. Tọa độ véctơ

- Vec-tơ đơn vị: $\vec{i} = (1;0;0)$, $\vec{j} = (0;1;0)$, $\vec{k}(0;0;1)$
- Vec-tơ $\vec{a} = a_1\overleftarrow{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \Rightarrow \vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$
- **Tính chất:** Cho hai véc tơ $\vec{a} = (a_1;a_2a_3)$, $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$

  ⊞ Tổng hiệu: $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$

  ⊞ Tích một số với một vec tơ: $k\vec{a} = (ka_1;ka_2;ka_3)$

  ⊞ Độ dài vec tơ: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

  ⊞ Hai vec tơ bằng nhau: $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

  ⊞ Hai vec tơ cùng phương: $\vec{a} = k\vec{b} \Rightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} = k$

  ⊞ Tích vô hướng của hai vec tơ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

  ⊞ Vec tơ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

⊞ Tích có hướng của hai vec tơ: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$
$=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$

⊞ Góc giữa hai vec tơ: $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$
$\cos\alpha=\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

2. Tọa độ điểm

- $A(x;y;z)\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$
- Cho $M(x;y;z)$ khi đó

  ⊞ Hình chiếu của M lên Ox là $M_1(x;0;0)$
  ⊞ Hình chiếu của M lên Oy là $M_2(0;y;0)$
  ⊞ Hình chiếu của M lên Oz là $M_3(0;0;z)$
  ⊞ Hình chiếu của M lên Oxy là $M_4(x;y;0)$
  ⊞ Hình chiếu của M lên Oxz là $M_5(x;0;z)$
  ⊞ Hình chiếu của M lên Oyz là $M_6(0;y;z)$

- **Tính chất**
  Cho các điểm $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$, $C(x_C;y_C;z_C)$

  ⊞ Độ dài đoạn thẳng AB:

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

  ⊞ Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB
$$\begin{cases} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2} \\ z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2} \end{cases}$$

  ⊞ Điểm chia đoạn thẳng AB theo tỉ số k: $\overrightarrow{MA}=k\cdot\overrightarrow{MB}$
  $x_M=\dfrac{x_A-k\cdot x_B}{1-k}$; $y_M=\dfrac{y_A-k\cdot y_B}{1-k}$; $z_M=\dfrac{z_A-k\cdot z_B}{1-k}$

  ⊞ Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC $\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_b+x_c}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_b+y_c}{3} \\ z_G=\dfrac{z_A+z_b+z_c}{3} \end{cases}$

! Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Ứng dụng tích có hướng của hai vec-tơ

- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$
- $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\cdot\vec{c}=\vec{0}$
- Diện tích $\triangle ABC$ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$
- Diện tích tình bình hành $ABCD$: $S_{ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$
- Thể tích tứ diện $ABCD$: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AD}\right|$
- Thể tích hình hộp: $ABCD.A'B'C'D'$: $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AA'}\right|$

> !
> - Ba điểm A,B,C là ba đỉnh của tam giác khi $\overleftrightarrow{AB}$ không cùng phương $\overleftrightarrow{AC}$
> - Bốn điểm A,B,C,D là 4 đỉnh tứ diện khi $[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}]\cdot\overleftrightarrow{AD}\neq\overleftrightarrow{0}$.

Phương trình mặt cầu

Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ bán kính R là:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$$

Phương trình:

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0}$$

với điều kiện $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, có bán kính là $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Một số yếu tố trong tam giác

Xét tam giác ABC, ta có:

- H là chân đường cao hạ từ A của $\Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BH}=k\overrightarrow{BC}\end{cases}$.
- AD là đường phân giác trong của $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}=-\frac{AB}{AC}.\overrightarrow{DC}$.
- AE là đường phân giác ngoài của $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{EB}=\frac{AB}{AC}\overrightarrow{EC}$.
- H là trực tâm của $\Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}\\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH}=0\end{cases}$.

- I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{IA}\right| = \left|\overrightarrow{IB}\right| \\ \left|\overrightarrow{IA}\right| = \left|\overrightarrow{IC}\right| \\ \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AI} = 0 \end{cases}$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng

! $\vec{n} \neq 0$ là VTPT nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (P)

- PTTQ (P): $Ax + By + Cz + D = 0$ có vec-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (A;B;C)$.
- Mặt phẳng $(P): \begin{cases} \text{Đi qua } M(x_0, y_0, z_0) \\ VTPT \vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] \end{cases}$
  $\boxed{A(x - x_0) + By - y_0 + C(z - z_0) = 0}$
- Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm của AB và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$.
- Mặt phẳng (P) có cặp vec-to chỉ phương $\overleftrightarrow{a}$ và $\overleftrightarrow{b}$ thì VTPT của (P) là $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$
- Nếu $(p) // (Q)$ thì $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{n_Q}$
- Mặt phẳng đi qua A, B, C phân biệt không thẳng hàng có VTPT $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$.
- Mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng AB có $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$.
- Cho mặt cầu (S) có tâm I.
  Khi đó mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm H có $\vec{n} = \overrightarrow{IH}$.

!

⊞ Mặt phẳng (P) cắt ba trục tọa độ tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$
$\Rightarrow (P): \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1.$

⊞ Các mặt phẳng đặc biệt

$*$ $(Oyz): x = 0$ $*$ $(Oxz): y = 0$ $*$ $(Oyz): z = 0$

⊞ Nếu trong phương trình (α) không chứa ẩn nào thì mặt phẳng (α) sẽ song song hoặc chứa trục tương ứng. Chứa khi $D = 0$.

Phương trình đường thẳng

! $\vec{u} \neq 0$ là VTCP nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với d

- Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$.

⊞ Phương trình tham số Δ: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \ (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

⊞ Phương trình chính tắc Δ: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$ nếu $(abc \neq 0)$.

- Đường thẳng Δ đi qua hai điểm A và B thì $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ hoặc $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$.
- Nếu $\vec{u}$ là một véc-tơ chỉ phương của Δ thì $k\vec{u}\ (k \neq 0)$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của Δ, do đó một đường thẳng có vô số véc-tơ chỉ phương.
- Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là cặp véc-tơ không cũng phương thì $\vec{u} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

Góc

- **Góc giữa hai mặt phẳng**
  (P) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1$, (Q) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2$

  Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). Ta có: $\boxed{\cos\varphi = \dfrac{\left|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right| \cdot \left|\vec{n}_2\right|}}$

- **Góc giữa hai đường thẳng**
  Δ_1 có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}_1$, Δ_2 có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}_2$

  Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Ta có: $\boxed{\cos\varphi = \dfrac{\left|\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2\right|}{\left|\vec{a}_1\right| \cdot \left|\vec{a}_2\right|}}$

- **Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng**
  Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}_\Delta$, (α) có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha$

  Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ và (α). Ta có $\boxed{\sin\varphi = \dfrac{\left|\vec{a}_\Delta \cdot \vec{n}_\alpha\right|}{\left|\vec{a}_\Delta\right| \cdot \left|\vec{n}_\alpha\right|}}$

Khoảng cách

- **Khoảng cách từ** $A(x_0; y_0; z_0)$ **đến** (P): $Ax + by + Cz + D = 0$:

  $$\boxed{d(A,(P)) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

- **Khoảng cách từ điểm** M **đến đường thẳng** Δ
  Δ đi qua điểm M_0 và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}_\Delta$

  $$\boxed{\mathrm{d}(M,\Delta) = \dfrac{\left|\left[\vec{a}_\Delta, \overrightarrow{M_0M}\right]\right|}{\left|\vec{a}_\Delta\right|}}$$

- **Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau**
  Δ_1 đi qua điểm M và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}_1$, Δ_2 đi qua điểm N và có véc-tơ chỉ phương $\vec{a}_2$

$$\boxed{\mathrm{d}(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{\left|[\vec{a}_1,\vec{a}_2]\cdot\overrightarrow{MN}\right|}{\left|[\vec{a}_1,\vec{a}_2]\right|}}$$

Vị trí tương đối

- **Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng**:
  Cho hai mặt phẳng (P_1) $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và (P_2) $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.
  Khi đó ta có ba trường hợp

  1. $(P_1)\equiv(P_2)\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$.
  2. $(P_1)\,/\!/\,(P_2)\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$.
  3. (P_1) cắt $(P_2)\Leftrightarrow A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2$.

  Lưu ý: $A_1.A_2+B_1.B_2+C_1.C_2=0\Leftrightarrow(P_1)\perp(P_2)$.

- **Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng**

  Cho $(\Delta):\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ và $(P):Ax+By+Cz+D=0$.

  Thế (Δ) vào (P) ta được: $A(x_0+at)+B(y_0+bt)+C(z+ct)+D=0\Leftrightarrow A't+B'=0$ (1)

  ⊞ Nếu (1) có đúng một nghiệm $t=t_0$ thì (Δ) cắt (P) tại điểm $M_0(x_0+at_0;y_0+bt_0;z_0+zt_0)$

  ⊞ Nếu (1) vô nghiệm thì $(\Delta)\,/\!/\,(P)$

  ⊞ Nếu (1) vô số nghiệm thì $(\Delta)\in(P)$

- **Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu**
  Cho mặt cầu $(S)=(I;R)$ và mặt phẳng (P)

  ⊞ Nếu $d(I,(P))=R$ thì (P) tiếp xúc (S).

  ⊞ Nếu $d(I,(P))>R$ thì (P) không cắt (S).

  ⊞ Nếu $d(I,(P))<R$ thì (P) cắt (S) theo một đường tròn $(C)=(O;r)$.
  Khi đó $d^2+r^2=R^2$.

- **Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu**

  Cho $(\Delta):\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ và $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=0$

  Thế (Δ) vào (S) ta được phương trình bậc hai: $A't^2+B't+C'=0$ (2)

  ⊞ Nếu $\Delta>0$ thì d cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

  ⊞ Nếu $\Delta=0$ thì d tiếp xúc với (S) và $d(I,(\Delta)=R)$.

  ⊞ Nếu $\Delta<0$ thì d không cắt (S).

- **Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng**

  Cho $d_1 : \begin{cases} \text{đi qua } M \\ VTCP = \overrightarrow{u_1} \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} \text{đi qua } N \\ VTCP = \overrightarrow{u_2} \end{cases}$

  ⊞ $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] = \overrightarrow{0}$ thì d_1 song song hoặc trùng d_2. Lấy $M \in d_1$ bất kì.

  - Nếu $M \in d_2$ thì d_1 trùng d_2
  - Nếu $M \notin d_2$ thì d_1 song song d_2

  ⊞ $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] \neq \overrightarrow{0}$ thì d_1 cắt hoặc chéo d_2. Khi đó

  - $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{0}$ thì d_1 cắt d_2.
  - $[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}] \cdot \overrightarrow{MN} \neq \overrightarrow{0}$ thì d_1 chéo d_2.

- **Vị trí tương đối giữa một điểm và một mặt cầu**

  Cho điểm A và mặt cầu $(S) = (I; R)$ khi đó

  ⊞ $IA > R$ thì A nằm ngoài (S)

  ⊞ $IA = R$ thì A nằm trên (S)

  ⊞ $IA < R$ thì A nằm trong (S)

Tọa độ hình chiếu và đối xứng của một điểm qua mặt phẳng

Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng (P): $Ax + By + Cz + D = 0$.

Xét $\boxed{T = \dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}}$. Khi đó

- Tọa độ hình chiếu của M lên (P) là $H : \begin{cases} x = x_0 - AT \\ y = y_0 - BT \\ z = z_0 - CT \end{cases}$

- Tọa độ điểm đối xứng của M qua (P) là $M' : \begin{cases} x = x_0 - 2AT \\ y = y_0 - 2BT \\ z = z_0 - 2CT \end{cases}$