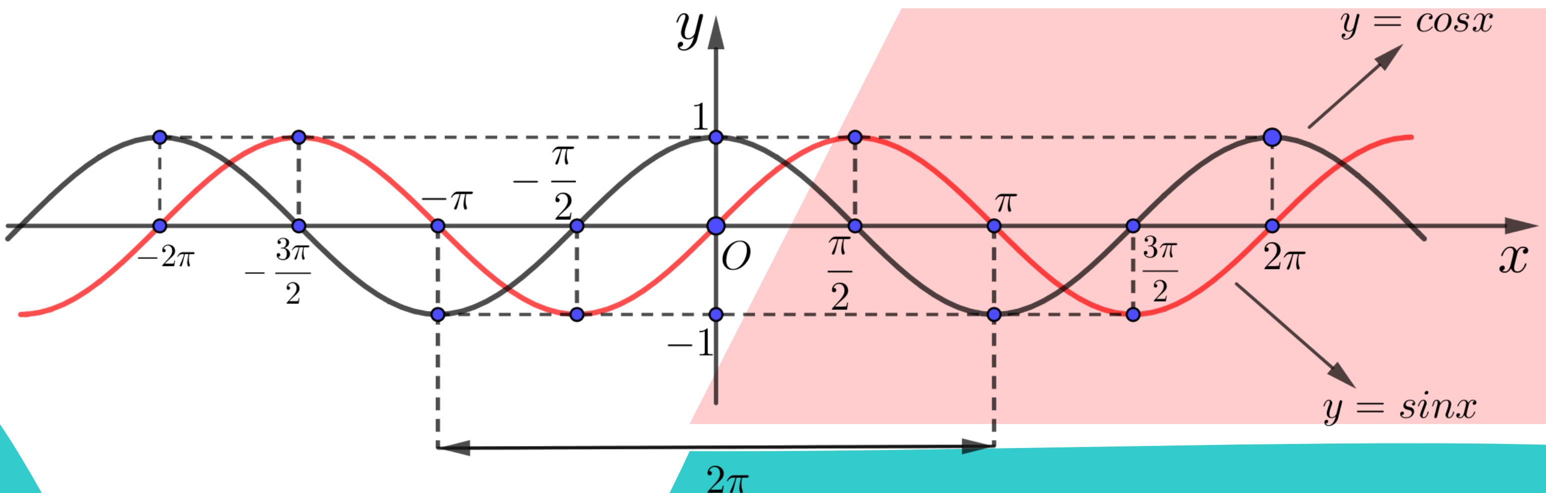
LÊ MINH TÂM

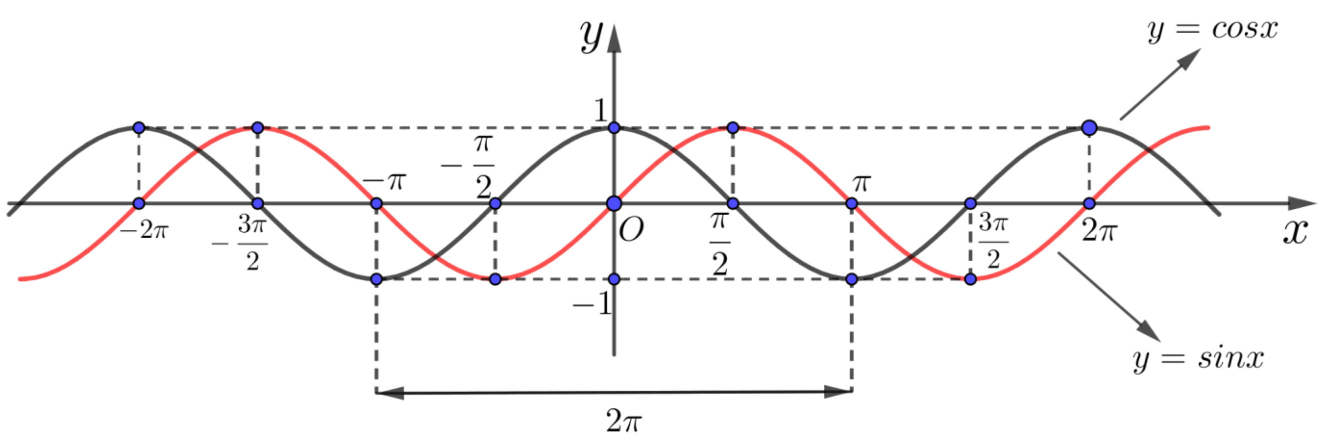
CHƯƠNG 01

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC



TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC


y
$y = cosx$
1
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
π
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
O
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$
2π
x
-1
$y = sinx$
2π

CHƯƠNG 01 HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

§1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

I. ÔN TẬP

1.1. Các hệ thức cơ bản.

$\tan\alpha.\cot\alpha=1$	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$	$1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$	$1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

1.2. Cung liên kết.

Cung đối nhau	Cung bù nhau	Cung phụ nhau	Cung hơn kém π	Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$	$\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$	$\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$
$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$	$\tan(\alpha+\pi)=\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$
$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$	$\cot(\alpha+\pi)=\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

1.3. Công thức cộng.

$\sin(a\pm b)=\sin a\cos b\pm\sin b\cos a$	$\cos(a\pm b)=\cos a\cos b\mp\sin a\sin b$
$\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$	$\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$

Hệ quả: $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$ và $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$.

1.4. Công thức nhân và hạ bậc.

Nhân đôi	Hạ bậc
$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$	$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$
$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ $=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$	$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$
$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$	$\tan^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

$\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$	$\cot^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$

1.5. Công thức biến đổi tổng thành tích.

$\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}.\cos\dfrac{a-b}{2}$	$\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}.\sin\dfrac{a-b}{2}$
$\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}.\cos\dfrac{a-b}{2}$	$\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}.\sin\dfrac{a-b}{2}$
$\tan a + \tan b = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b}$	$\tan a - \tan b = \dfrac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}$
$\cot a + \cot b = \dfrac{\sin(a+b)}{\sin a.\sin b}$	$\cot a - \cot b = \dfrac{\sin(b-a)}{\sin a.\sin b}$
Đặc biệt	
$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$	$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

1.6. Công thức biến đổi tích thành tổng.

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]$$

$$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$$

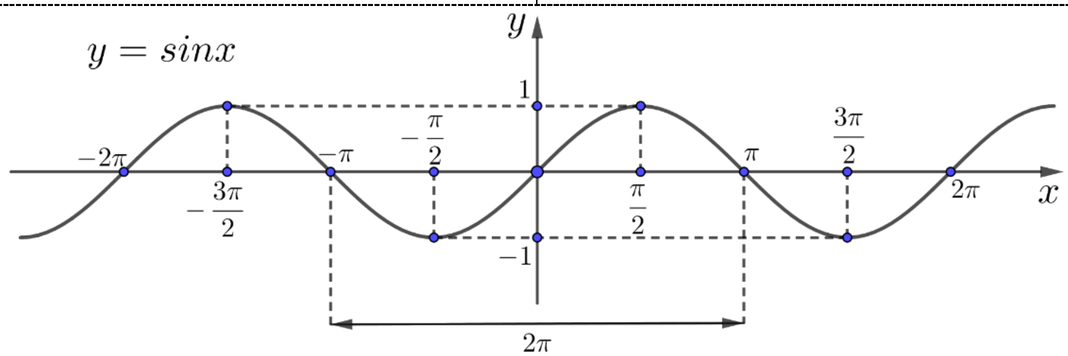
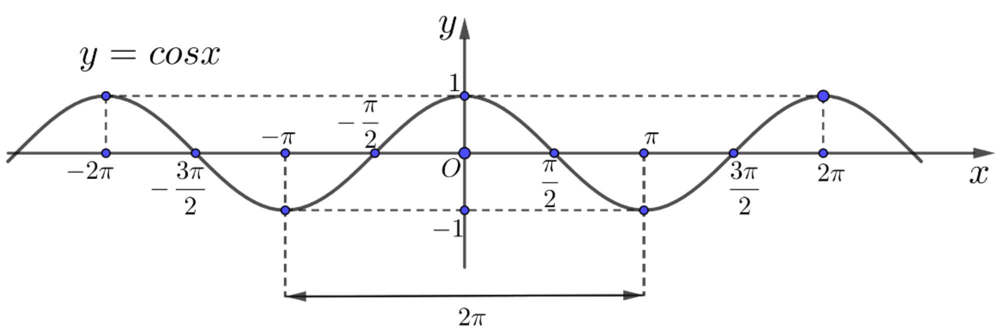
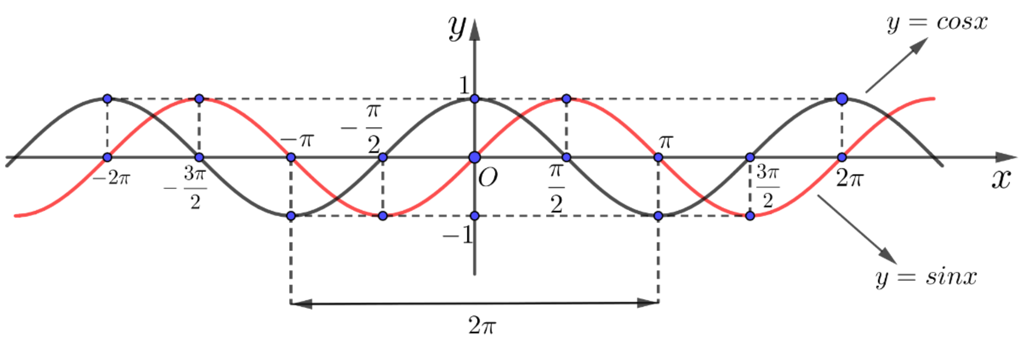
$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$$

1.7. Bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt.

Đơn vị độ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	360°
Đơn vị radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	KXĐ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	0
$\cot\alpha$	KXĐ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	KXĐ	KXĐ

II. Hàm Số $y = \sin x$ Và Hàm Số $y = \cos x$.

	Hàm số $y=\sin x$	Hàm số $y=\cos x$
1. Định nghĩa:	Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với sin của góc lượng giác có số đo x rađian được gọi là hàm số sin, kí hiệu $y=\sin x$.	Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với cos của góc lượng giác có số đo x rađian được gọi là hàm số cos, kí hiệu $y=\cos x$.

2. Tập xác định:	$D=\mathbb{R}$	$D=\mathbb{R}$
3. Tập giá trị:	$\left[-1;1\right]$	$\left[-1;1\right]$
4. Tính chất hàm	Là hàm số lẻ.	Là hàm số chẵn.
5. Chu kỳ	Chu kì 2π .	Chu kì 2π .
6. Đơn điệu	Hàm số + Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\right)$. + Nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2}+k2\pi;\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$.	Hàm số + Đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\pi+k2\pi;k2\pi\right)$. + Nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(k2\pi;\pi+k2\pi\right)$.
7. Đồ thị	  	
8. Giá trị đặc biệt	$\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$. $\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$. $\sin x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$.	$\cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+k2\pi$. $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$. $\cos x=1 \Leftrightarrow x=k2\pi$.

Chú ý:

+) Hàm số $y=\sin\left[u(x)\right], y=\cos\left[u(x)\right]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ có nghĩa.

+) $-1\le \sin x,\cos x\le 1$; $0\le \sin^2 x,\cos^2 x\le 1$; $0\le |\sin x|,|\cos x|\le 1$.

Ví dụ 01.

Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y=\sin 4x$. **b.** $y=\sin\dfrac{3x+1}{x^2-1}$. **c.** $y=\cos\sqrt{x+2}$.

Lời giải

a. $y=\sin 4x$.

Hàm số xác định với mọi số thực x nên hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

b. $y=\sin\dfrac{3x+1}{x^2-1}$.

Hàm số xác định khi $x^2-1\ne 0\Leftrightarrow x\ne \pm 1$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$.

c. $y=\cos\sqrt{x+2}$.

Hàm số xác định khi $x+2\ge 0\Leftrightarrow x\ge -2$.

Tập xác định $D=[-2;+\infty)$.

Ví dụ 02.

Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a. $y=3\cos x+\sin^2 x$. **b.** $y=\dfrac{1+\sin^2 2x}{1+\cos 3x}$.

Lời giải

a. $y=3\cos x+\sin^2 x$.

Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Lấy $x\in\mathbb{R}$ ta có $-x\in\mathbb{R}$ và $y(-x)=3\cos(-x)+\sin^2(-x)=3\cos x+\sin^2 x=y(x)$.

Do đó hàm số là hàm chẵn .

b. $y=\dfrac{1+\sin^2 2x}{1+\cos 3x}$

Hàm số xác định khi $\cos 3x\ne -1\Leftrightarrow 3x\ne \pi+k2\pi\Leftrightarrow x\ne\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k2\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k2\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$.

Ta thấy nếu $x\in D\Rightarrow \cos 3x\ne -1$ mà $\cos(-3x)=\cos 3x\Rightarrow \cos(-3x)\ne -1\Rightarrow -x\in D$

Khi đó $y(-x)=\dfrac{1+\sin^2(-2x)}{1+\cos(-3x)}=\dfrac{1+\sin^2 2x}{1+\cos 3x}=y(x)$.

Do đó hàm số là hàm chẵn .

Ví dụ 03.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a. $y=4-3\sin 5x$. b. $y=\sqrt{2}\sin 2x+\cos 2x+1$. c. $y=\sin x, x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.

Lời giải

a. $y=4-3\sin 5x$.

Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $-1\le \sin x\le 1 \Leftrightarrow -3\le -3\sin x\le 3 \Leftrightarrow -3+4\le 4-3\sin x\le 3+4 \Leftrightarrow 1\le y\le 7$.

Do đó: $\max y=7 \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

$\min y=1 \Leftrightarrow \sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

b. $y=\sqrt{2}\sin 2x+\cos 2x+1=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sin 2x+\frac{1}{\sqrt{3}}\cos 2x\right)+1$

Đặt $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}};\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\alpha\in\left(0;\pi\right)\right)$ ta có

$y=\sqrt{3}\left(\cos\alpha\sin 2x+\sin\alpha\cos 2x\right)+1=\sqrt{3}\sin\left(2x+\alpha\right)+1$

Ta có:

$-1\le\sin\left(2x+\alpha\right)\le 1 \Leftrightarrow -\sqrt{3}\le\sqrt{3}\sin\left(2x+\alpha\right)\le\sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3}+1\le\sqrt{3}\sin\left(2x+\alpha\right)+1\le\sqrt{3}+1$

Do đó: $\max y=1+\sqrt{3}$ đạt được khi $\sin\left(2x+\alpha\right)=1$

$\min y=1-\sqrt{3}$ đạt được khi $\sin\left(2x+\alpha\right)=-1$.

c. $y=\sin x, x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

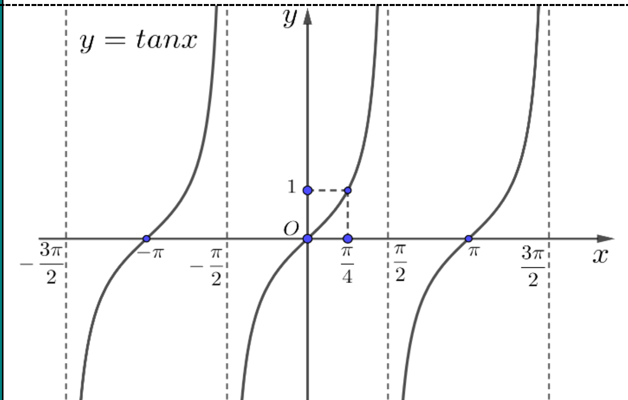
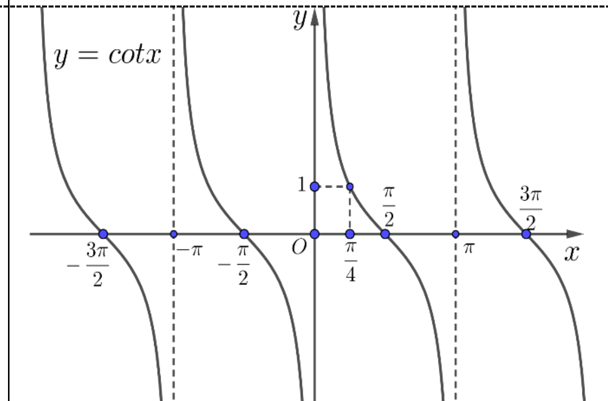
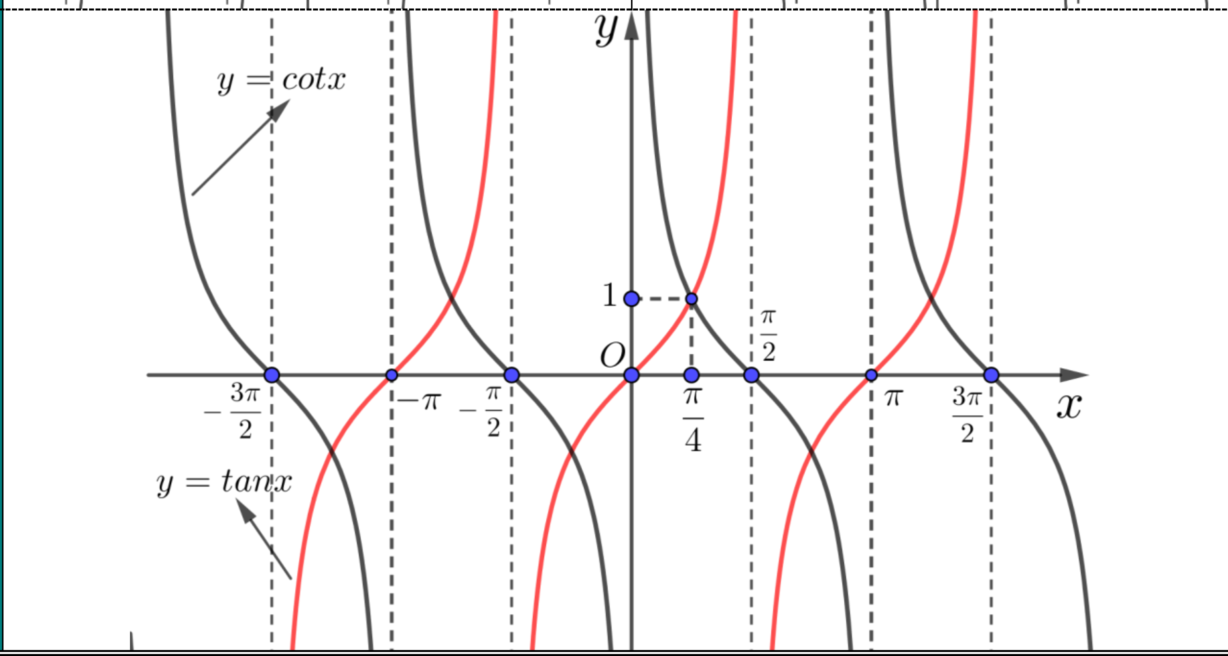
Hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\pi;\pi\right)$ nên

Với $x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]\Rightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\le\sin x\le\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}\le y\le\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $\max y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ đạt được khi $x=\frac{\pi}{4}$; $\min y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ đạt được khi $x=-\frac{\pi}{4}$.

III. Hàm Số *y = tanx* Và Hàm Số *y = cotx*.

	Hàm số $y=\tan x$	***Hàm số*** $y=\cot x$
1. Định nghĩa:	Hàm số tang là hàm số được xác định bởi công thức $y=\frac{\sin x}{\cos x}\left(\cos x\neq 0\right)$, ký hiệu $y=\tan x$.	Hàm số côtang là hàm số được xác định bởi công thức $y=\frac{\cos x}{\sin x}\left(\sin x\neq 0\right)$, ký hiệu $y=\cot x$.
2. Tập xác định:	$D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$	$D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$
3. Tập giá trị:	$\left[-1;1\right]$	$\left[-1;1\right]$

4. Tính chất hàm	Là hàm số lẻ.	Là hàm số lẻ.
5. Chu kỳ	Chu kì π .	Chu kì π .
6. Đơn điệu	Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{3\pi}{2}+k\pi\right)$.	Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(k\pi;\pi+k\pi\right)$.
7. Đồ thị		
		

📖 ***Chú ý:***

- Hàm số $y=\tan\left[u(x)\right]$ xác định khi và chỉ khi $\cos u(x)\neq 0$.

- Hàm số $y=\cot\left[u(x)\right]$ xác định khi và chỉ khi $\sin u(x)\neq 0$.

Ví dụ 04.

Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

b. $y=\cot\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

Lời giải

a. $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Hàm số xác định khi $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\neq 0 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

Do đó hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})\right\}$.

b. $y=\cot\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

Hàm số xác định khi $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\neq 0 \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}\neq k\pi \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{3}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

Do đó hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})\right\}$.

IV. BÀI TẬP.

Dạng 01. TẬP XÁC ĐỊNH.

Phương pháp giải:

1. $\sqrt{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x)\geq 0$; $\frac{1}{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x)\neq 0$.

2. $y=\sin(f(x))$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.

3. $y=\cos(f(x))$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.

4. $y=\tan(f(x))$ xác định $\Leftrightarrow f(x)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

5. $y=\cot(f(x))$ xác định $\Leftrightarrow f(x)\neq k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Bài 01.

Tìm tập xác định của các hàm số sau:

1. $y=\frac{1}{2\cos x-\sqrt{3}}$ **2.** $y=\sqrt{1+\sin x}$

3. $y=\frac{4+\cos x}{4\sin^2 x-1}$ **4.** $y=\sqrt{\frac{1-\cos x}{\cos^2 x}}$

Lời giải

1. $y=\frac{1}{2\cos x-\sqrt{3}}$

Điều kiện: $\cos x\neq\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x\neq\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

2. $y=\sqrt{1+\sin x}$

Điều kiện: $1+\sin x\geq 0\Leftrightarrow \sin x\geq -1\,(\forall x\in\mathbb{R})$

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

3. $y=\dfrac{4+\cos x}{4\sin^2 x-1}$

Điều kiện: $4\sin^2 x-1\neq 0 \Leftrightarrow \sin x\neq \pm\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x\neq \dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \\ x\neq -\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x\neq \dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{cases}, k\in\mathbb{Z}$.

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, \dfrac{5\pi}{6}+k2\pi, -\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, \dfrac{7\pi}{6}+k2\pi, \mathrm{k}\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{\cos^2 x}}$

Điều kiện: $\dfrac{1-\cos x}{\cos^2 x}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\cos x\geq 0 \\ \cos x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \mathrm{k}\in\mathbb{Z}\right\}$.

Bài 02.

Tìm tập xác định của các hàm số sau:

1. $y=\dfrac{1+\cos x}{\cot x+\sqrt{3}}$

2. $y=\dfrac{2\sin x}{\sqrt{3}\tan x-1}$

3. $y=\cot\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)$

4. $y=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

5. $y=\tan x+\cot x$

6. $y=\sqrt{1+\tan^2 x}$

Lời giải

1. $y=\dfrac{1+\cos x}{\cot x+\sqrt{3}}$

Điều kiện: $\begin{cases} \cot x\neq -\sqrt{3} \\ \sin x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ x\neq k\pi \end{cases}, k\in\mathbb{Z}$

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

2. $y=\dfrac{2\sin x}{\sqrt{3}\tan x-1}$

Điều kiện: $\begin{cases} \tan x\neq \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{cases}, k\in\mathbb{Z}$

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi,\mathrm{k}\in\mathbb{Z}\right\}$.

3. $y=\cot\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$

Điều kiện: $\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\neq 0\Leftrightarrow\frac{\pi}{3}-2x\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

Điều kiện: $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

5. $y=\tan x+\cot x$

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow 2x\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

6. $y=\sqrt{1+\tan^2 x}$

Điều kiện: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Dạng 02. TÍNH CHẴN LẺ.

Phương pháp giải:

1. Tập xác định D: $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$..

2. Xét $f\left(x\right)$ và $f\left(-x\right)$.

– Nếu $f\left(-x\right)=f\left(x\right),\forall x\in D$ thì hàm số chẵn trên D.

– Nếu $f\left(-x\right)=-f\left(x\right),\forall x\in D$ thì hàm số lẻ trên D.

Bài tập.

Xét tính chẵn, lẻ của hàm số:

1. $y=\sin^4 x$; **2.** $y=\dfrac{\sin x.\cos x}{\tan x+\cot x}$; **3.** $y=\dfrac{\sin x-\tan x}{\sin x+\cot x}$;

4. $y=\dfrac{\cos^4 x+1}{\sin^3 x}$; **5.** $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$; **6.** $y=\tan\left|x\right|$;

7. $y=\sin x+2\tan x$; **8.** $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$.

Lời giải

1. $y=\sin^4 x$

Tập xác định $D=\mathbb{R},\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Đặt $y=f\left(x\right)=\sin^4 x$.

Ta có: $f\left(-x\right)=\sin^4\left(-x\right)=\left(-\sin x\right)^4=\sin^4 x=f\left(x\right)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

2. $y=\dfrac{\sin x.\cos x}{\tan x+\cot x}$

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\},\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Đặt $y=f\left(x\right)=\dfrac{\sin x.\cos x}{\tan x+\cot x}$.

Ta có: $f\left(-x\right)=\dfrac{\sin\left(-x\right).\cos\left(-x\right)}{\tan\left(-x\right)+\cot\left(-x\right)}=\dfrac{-\sin x.\cos x}{-\tan x-\cot x}=\dfrac{\sin x.\cos x}{\tan x+\cot x}=f\left(x\right)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

3. $y=\dfrac{\sin x-\tan x}{\sin x+\cot x}$

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\dfrac{\pi}{2},\pm\arccos\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+m2\pi,k,m\in\mathbb{Z}\right\},\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Đặt $y=f\left(x\right)=\dfrac{\sin x-\tan x}{\sin x+\cot x}$.

Ta có: $f\left(-x\right)=\dfrac{\sin\left(-x\right)-\tan\left(-x\right)}{\sin\left(-x\right)+\cot\left(-x\right)}=\dfrac{-\sin x+\tan x}{-\sin x-\cot x}=\dfrac{\sin x-\tan x}{\sin x+\cot x}=f\left(x\right)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

4. $y=\dfrac{\cos^4 x+1}{\sin^3 x}$

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}, \forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Đặt $y=f(x)=\dfrac{\cos^4 x+1}{\sin^3 x}$.

Ta có: $f(-x)=\dfrac{\cos^4(-x)+1}{\sin^3(-x)}=\dfrac{\cos^4 x+1}{-\sin^3 x}=-f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

5. $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Tập xác định $D=\mathbb{R}, \forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Đặt $y=f(x)=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ta có: $f(-x)=\cos\left(-x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ta thấy $f(-x)\neq f(x), f(-x)\neq -f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số không chẵn, không lẻ.

6. $y=\tan|x|$

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}, \forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Đặt $y=f(x)=\tan|x|$.

Ta có: $f(-x)=\tan|-x|=\tan|x|=f(x)$.

Ta thấy $f(-x)\neq f(x), f(-x)\neq -f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

7. $y=\sin x+2\tan x$

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}, \forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Đặt $y=f(x)=\sin x+2\tan x$.

Ta có: $f(-x)=\sin(-x)+2\tan(-x)=-\sin x-2\tan x=-(\sin x+2\tan x)=-f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

8. $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$

Tập xác định $D=\mathbb{R}, \forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

Đặt $y=f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}$. Ta có:

$f(-x)=\dfrac{\cos(-x)}{1+\sin^2(-x)}=\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}=f(x)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Dạng 03. CHU KỲ HÀM SỐ.

Phương pháp giải:

Định nghĩa: Hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên tập D được gọi là hàm số tuần hoàn nếu có số $T\neq 0$ sao cho với mọi $x\in D$ ta có $x\pm T\in D$ và $f\left(x+T\right)=f\left(x\right)$.

Nếu có số T dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên thì hàm số đó được gọi là hàm số tuần hoàn với chu kì T.

Lưu ý:

①. Hàm số $f\left(x\right)=a\sin ux+b\cos vx+c$ (với $u,v\in\mathbb{Z}$) là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{2\pi}{\left|\left(u,v\right)\right|}$ ($\left(u,v\right)$ là ước chung lớn nhất).

② Hàm số $f\left(x\right)=a.\tan ux+b.\cot vx+c$ (với $u,v\in\mathbb{Z}$) là hàm tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{\pi}{\left|\left(u,v\right)\right|}$.

③ $y=f_1\left(x\right)$ có chu kỳ T_1 ; $y=f_2\left(x\right)$ có chu kỳ T_2

Thì hàm số $y=f_1\left(x\right)\pm f_2\left(x\right)$ có chu kỳ T là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2.

④ $y=\sin x$: Tập xác định $D=R$; tập giá trị $T=\left[-1;1\right]$; hàm lẻ, chu kỳ $T_0=2\pi$.

$y=\sin\left(ax+b\right)$ có chu kỳ $T_0=\dfrac{2\pi}{\left|a\right|}$

$y=\sin\left(f\left(x\right)\right)$ xác định $\Leftrightarrow f\left(x\right)$ xác định.

⑤ $y=\cos x$: Tập xác định $D=R$; Tập giá trị $T=\left[-1,1\right]$; hàm chẵn, chu kỳ $T_0=2\pi$.

$y=\cos x$ có chu kỳ $T_0=\dfrac{2\pi}{\left|a\right|}$

$y=\cos\left(f\left(x\right)\right)$ xác định $\Leftrightarrow f\left(x\right)$ xác định.

⑥ $y=\tan x$: Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\right\}$; tập giá trị $T=\mathbb{R}$, hàm lẻ, chu kỳ $T_0=\pi$.

$y=\tan\left(ax+b\right)$ có chu kỳ $T_0=\dfrac{\pi}{\left|a\right|}$

$y=\tan\left(f\left(x\right)\right)$ xác định $\Leftrightarrow f\left(x\right)\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

⑦ $y=\cot x$: Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi,k\in Z\right\}$; tập giá trị $T=\mathbb{R}$, hàm lẻ, chu kỳ $T_0=\pi$.

$y=\cot\left(ax+b\right)$ có chu kỳ $T_0=\dfrac{\pi}{\left|a\right|}$

$y=\cot\left(f\left(x\right)\right)$ xác định $\Leftrightarrow f\left(x\right)\neq k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

⑧ ***Phương pháp chứng minh.***

Tập xác định hàm số $D,\forall x\in D\Rightarrow\begin{cases}x-T\in D\\x+T\in D\end{cases}$.

$\left(1\right)$ Chứng minh: $f\left(x+T\right)=f\left(x\right),\forall x\in D$.

(2) Giả sử có số T' sao cho $0<T'<T$ thỏa $\begin{cases} x \pm T \in D \\ f(x+T') = f(x), \forall x \in D \end{cases} \Rightarrow$ vô lý.

Vậy hàm số $f(x)$ là hàm tuần hoàn với chu kỳ T.

Bài 01.

Chứng minh rằng $y=\sin 2x$ tuần hoàn có chu kỳ π.

Lời giải

Hàm số $y=f(x)=\sin 2x$ có tập xác định $\mathbb{R}$. Chọn số $L=\pi \neq 0$

Ta có: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x+\pi \in \mathbb{R}$ và $f(x+L)=\sin\left[2(x+\pi)\right]=\sin(2x+2\pi)=\sin 2x=f(x)$.

Vậy hàm số $f(x)$ là hàm số tuần hoàn.

Ta sẽ chứng minh chu kỳ của nó là π.

Thật vậy, giả sử hàm số $f(x)=\sin 2x$ có chu kỳ A mà $0<A<\pi$, khi đó ta có:

$\sin\left[2(x+A)\right]=\sin 2x, \forall x \in \mathbb{R}$

Cho $x=\frac{\pi}{4}$ thì $\sin\left[2\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\right]=\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}+2A\right)=1$

$\Rightarrow \cos 2A=1$: vô lý, vì $0<2A<2\pi$

Vậy chu kì tuần hoàn của hàm số $y=\sin 2x$ là π.

Bài 02.

Chứng minh rằng $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn có chu kỳ π.

Lời giải

Hàm số $y=f(x)=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Chọn số $L=\pi \neq 0$

Ta có: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x+\pi \in \mathbb{R}$ và $f(x+L)=\tan\left(x+\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$.

Vậy hàm số $f(x)$ là hàm số tuần hoàn.

Ta sẽ chứng minh chu kỳ của nó là π.

Thật vậy, giả sử hàm số $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ có chu kỳ A mà $0<A<\pi$, khi đó ta có:

$\tan\left(x+A+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right), \forall x \in D$

Cho $x=0$ thì $\tan\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=1$ vô lý vì $0<A<\pi$.

Vậy chu kì tuần hoàn của hàm số $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ là π.

Dạng 04. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT.

Phương pháp giải:

Sử dụng tính chất $-1 \le \sin x \le 1$ và $-1 \le \cos x \le 1$.

Bài tập.

Tìm GTNN và GTLN của các hàm số:

1. $y = \sqrt{2\cos x + 3} - 4$;
2. $y = \cos^2 x - 6\sin x + 3$;
3. $y = \dfrac{2}{\cos^2 x + 4\cos x + 5}$;
4. $y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 5$;
5. $y = \sin^2 x + 2\sin x + 5$;
6. $y = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin x + 3}}$;
7. $y = \cos^4 x - 2\sin^2 x + 1$;
8. $y = \dfrac{1}{\sin^2 x - 2\cos x + 5}$;
9. $y = \sqrt{2 + \cos 2x}$;
10. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

Lời giải

1. $y = \sqrt{2\cos x + 3} - 4$.

Điều kiện xác định: $2\cos x + 3 > 0 \Leftrightarrow \cos x > \dfrac{-3}{2} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $-1 \le \cos x \le 1$

$\Leftrightarrow -2 \le 2\cos x \le 2 \Leftrightarrow 1 \le 2\cos x + 3 \le 5 \Leftrightarrow 1 \le \sqrt{2\cos x + 3} \le \sqrt{5} \Leftrightarrow -3 \le \sqrt{2\cos x + 3} - 4 \le \sqrt{5} - 4$

Vậy GTLN của hàm số là $\sqrt{5} - 4$ khi $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$,

GTNN của hàm số là -3 khi $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

2. $y = \cos^2 x - 6\sin x + 3$.

Ta có: $y = \cos^2 x - 6\sin x + 3 = \left(1 - \sin^2 x\right) - 6\sin x + 3 = -\sin^2 x - 6\sin x + 4$.

Đặt $t = \sin x, t \in \left[-1;1\right]$. Khi đó: $y = f\left(t\right) = -t^2 - 6t + 4$ xác định với $t \in \left[-1;1\right]$

Bảng biến thiên $f\left(t\right)$:

t	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f(t)$	$-\infty$	↗	13	↘	9	↘	-3	↘	$-\infty$

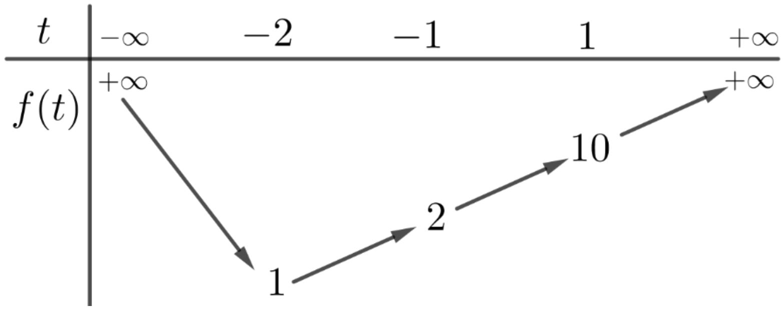
Vậy GTLN của hàm số là 9 khi $t = \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$,

GTNN của hàm số là -3 khi $t = \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

3. $y = \dfrac{2}{\cos^2 x + 4\cos x + 5}$.

Đặt $t=\cos x, t\in[-1;1]$. Khi đó: $\cos^2 x+4\cos x+5=t^2+4t+5=f(t)$ xác định với $t\in[-1;1]$

Bảng biến thiên $f(t)$:



Suy ra: $2\le\cos^2 x+4\cos x+5\le 10 \Leftrightarrow 1\ge\dfrac{2}{\cos^2 x+4\cos x+5}\ge\dfrac{1}{5}$

Vậy GTLN của hàm số là 1 khi $f(t)=2\Leftrightarrow t=-1\Leftrightarrow \cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$,

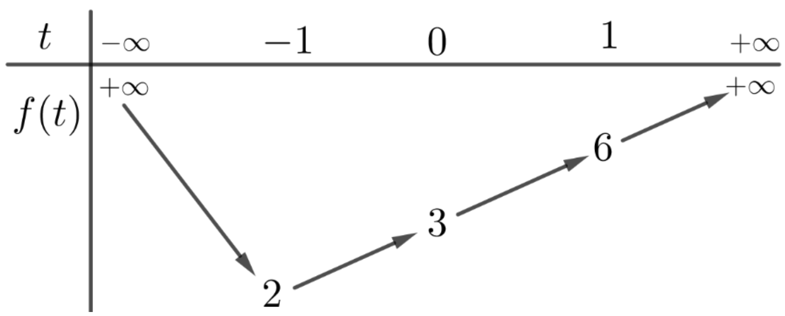
GTNN của hàm số là $\dfrac{1}{5}$ khi $f(t)=10\Leftrightarrow t=1\Leftrightarrow \cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

4. $y=\sin^4 x-2\cos^2 x+5$.

Ta có: $y=\sin^4 x-2\cos^2 x+5=\sin^4 x-2(1-\sin^2 x)+5=\sin^4 x+2\sin^2 x+3$.

Đặt $t=\sin^2 x, t\in[0;1]$. Khi đó: $y=f(t)=t^2+2t+3$ xác định với $t\in[0;1]$.

Bảng biến thiên $f(t)$:



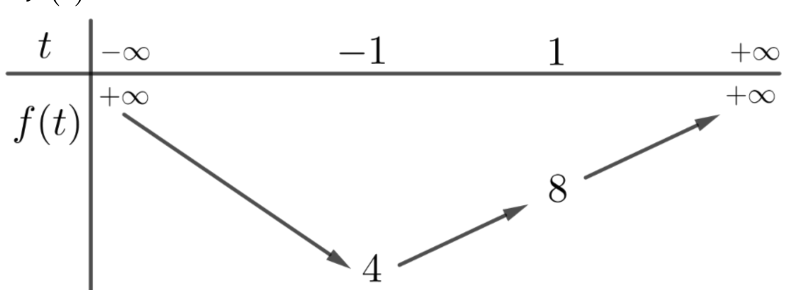
Vậy GTLN của hàm số là 6 khi $\sin^2 x=1\Leftrightarrow \cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$,

GTNN của hàm số là 3 khi $\sin^2 x=0\Leftrightarrow \sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

5. $y=\sin^2 x+2\sin x+5$.

Đặt $t=\sin x, t\in[-1;1]$. Khi đó: $y=f(t)=t^2+2t+5$ xác định với $t\in[-1;1]$.

Bảng biến thiên $f(t)$:



Vậy GTLN của hàm số là 8 khi $\sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$, GTNN của hàm số là 4 khi $\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

6. $y=\dfrac{1}{2\sqrt{\sin x+3}}$.

Điều kiện xác định: $\sin x+3>0\Leftrightarrow\sin x>-3\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $-1\le\sin x\le1$

$\Leftrightarrow 2\le\sin x+3\le4\Leftrightarrow\sqrt{2}\le\sqrt{\sin x+3}\le2\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\ge\frac{1}{\sqrt{\sin x+3}}\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{2}}\ge\frac{1}{2\sqrt{\sin x+3}}\ge\frac{1}{4}$

Vậy GTLN của hàm số là $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ khi $\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$,

GTNN của hàm số là $\frac{1}{4}$ khi $\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

7. $y=\cos^4x-2\sin^2x+1$.

Ta có: $y=\cos^4x-2\sin^2x+1=\cos^4x-2\left(1-\cos^2x\right)+1=\cos^4x+2\cos^2x-1$.

Đặt $t=\cos^2x,t\in\left[0;1\right]$. Khi đó: $y=f\left(t\right)=t^2+2t-1$ xác định với $t\in\left[0;1\right]$.

Bảng biến thiên $f\left(t\right)$:

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy GTLN của hàm số là 2 khi $\cos^2x=1\Leftrightarrow\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$,

GTNN của hàm số là -1 khi $\cos^2x=0\Leftrightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

8. $y=\dfrac{1}{\sin^2x-2\cos x+5}$.

Ta có: $y=\sin^2x-2\cos x+5=\left(1-\cos^2x\right)-2\cos x+5=-\cos^2x-2\cos x+6$.

Đặt $t=\cos x,t\in\left[-1;1\right]$. Khi đó: $y=f\left(t\right)=-t^2-2t+6$ xác định với $t\in\left[-1;1\right]$.

Bảng biến thiên $f\left(t\right)$:

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Suy ra: $3\le-\cos^2x-2\cos x+6\le7\Leftrightarrow\frac{1}{3}\ge\frac{1}{-\cos^2x-2\cos x+6}\ge\frac{1}{7}$

Vậy GTLN của hàm số là $\frac{1}{3}$ khi $\cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$,

GTNN của hàm số là $\frac{1}{7}$ khi $\cos x=1 \Leftrightarrow x=k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

9. $y=\sqrt{2+\cos 2x}$.

Ta có: $-1\le\cos 2x\le 1\Leftrightarrow 1\le 2+\cos 2x\le 3\Leftrightarrow 1\le\sqrt{2+\cos 2x}\le\sqrt{3}$

Vậy GTLN của hàm số là $\sqrt{3}$ khi $\cos 2x=1\Leftrightarrow 2x=k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow x=k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$,

GTNN của hàm số là 1 khi $\cos 2x=-1\Leftrightarrow 2x=\pi+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

10. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

$\Leftrightarrow y=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x.\cos^2 x\Leftrightarrow y=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$

Ta có: $0\le\sin^2 2x\le 1\Leftrightarrow 0\ge-\frac{1}{2}\sin^2 2x\ge-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1\ge 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\ge\frac{1}{2}$

Vậy GTLN của hàm số là 1 khi $\sin^2 2x=0\Leftrightarrow\sin 2x=0\Leftrightarrow 2x=k\pi\Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{2},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$,

GTNN của hàm số là $\frac{1}{2}$ khi $\sin^2 2x=1\Leftrightarrow\cos 2x=0\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

------------------HẾT------------------

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

I. PHƯƠNG TRÌNH *SinX = a* VÀ PHƯƠNG TRÌNH *CosX = a*.

Phương trình SinX = m (1)

– Nếu $|m|>1$: Phương trình vô nghiệm.

– Nếu $|m|\le 1 \Rightarrow \exists \alpha \in \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\sin\alpha = m$.

$(1) \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k2\pi \\ x=\pi-\alpha+k2\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Chú ý: Nếu α thỏa mãn $\begin{cases} -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2} \\ \sin\alpha=m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha=\arcsin m$.

Các trường hợp đặc biệt:

① $\sin x = 1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

② $\sin x = -1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

③ $\sin x = 0 \Leftrightarrow x=k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Phương trình CosX = a (2)

– Nếu $|m|>1$: phương trình vô nghiệm.

– Nếu $|m|\le 1 \Rightarrow \exists \alpha \in [0;\pi]$ thỏa mãn $\cos\alpha = m$.

$(2) \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\alpha+k2\pi \\ x=-\alpha+k2\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Chú ý: Nếu α thỏa mãn $\begin{cases} 0\le\alpha\le\pi \\ \cos\alpha=m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha=\arccos m$.

Các trường hợp đặc biệt:

① $\cos x = 1 \Leftrightarrow x=k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

② $\cos x = -1 \Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

③ $\cos x = 0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Ví dụ 01.

Giải các phương trình sau:

a. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. $\sin x = \frac{1}{3}$.

c. $\cos\left(x+60^\circ\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d. $\sin 2x = \sqrt{2}$.

e. $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

f. $\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=\cos 2x$.

Lời giải

a. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

b. $\sin x = \frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\arcsin\dfrac{1}{3}+k2\pi \\ x=\pi-\arcsin\dfrac{1}{3}+k2\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

c. $\cos\left(x+60^\circ\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(90^\circ-x-60^\circ\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(30^\circ-x\right)=\sin 45^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 30^\circ-x=45^\circ+k360^\circ \\ 30^\circ-x=135^\circ+k360^\circ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-15^\circ+k360^\circ \\ x=-105^\circ+k360^\circ \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

d. $\sin 2x=\sqrt{2}$ (1)

Vì $\sqrt{2}>1$ nên phương trình (1) vô nghiệm.

e. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{3}=2x-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{3}=\pi-2x+\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ 3x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\dfrac{5\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

f. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)=\cos 2x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{4}-2x=\dfrac{\pi}{2}-2x+k2\pi \\ \dfrac{\pi}{4}-2x=\pi-\dfrac{\pi}{2}+2x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ -4x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{16}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$$

Ví dụ 02.

Giải các phương trình sau:

a. $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b. $\cos x=\dfrac{1}{5}$.

c. $\cos\left(x+30^\circ\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

d. $\cos x=\dfrac{3}{2}$.

e. $\cos 2x=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{x}{5}\right)$.

f. $\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{4\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0$.

Lời giải

a. $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos x=\cos\dfrac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

b. $\cos x=\dfrac{1}{5}$

$\Leftrightarrow x=\pm\arccos\frac{1}{5}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

c. $\cos\left(x+30^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x+30^\circ\right)=\cos 30^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+30^\circ=30^\circ+k360^\circ \\ x+30^\circ=-30^\circ+k360^\circ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k360^\circ \\ x=-60^\circ+k360^\circ \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

d. $\cos x=\frac{3}{2}$ (2)

Vì $\frac{3}{2}>1$ nên phương trình (2) vô nghiệm.

e. $\cos 2x=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{x}{5}\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{2\pi}{3}-\frac{x}{5}+k2\pi \\ 2x=\frac{x}{5}-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{11}{5}x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ \frac{9}{5}x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{10\pi}{33}+k\frac{10\pi}{11} \\ x=-\frac{10\pi}{27}+k\frac{10\pi}{9} \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

f. $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{4\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos\frac{\frac{x}{2}-\frac{4\pi}{3}+x+\frac{\pi}{3}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{x}{2}-\frac{4\pi}{3}-x-\frac{\pi}{3}}{2}=0$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{3x}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(-\frac{x}{4}-\frac{5\pi}{6}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{3x}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=0 \\ \cos\left(-\frac{x}{4}-\frac{5\pi}{6}\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3x}{4}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi \\ -\frac{x}{4}-\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3x}{4}=\pi+k\pi \\ -\frac{x}{4}=\frac{4\pi}{3}+k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{4\pi}{3}+k\frac{4\pi}{3} \\ x=\frac{-16\pi}{3}+k4\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

II. PHƯƠNG TRÌNH *TANX* = *a* VÀ PHƯƠNG TRÌNH *COTX* = *a*

Phương trình TanX = m (3)	*Phương trình CotX = a (4)*
– Với $\forall m, \exists\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right): \tan\alpha=m$. $\left(3\right)\Leftrightarrow \tan x=\tan\alpha\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi$.	– Với $\forall m, \exists\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right): \cot\alpha=m$. $\left(4\right)\Leftrightarrow \cot x=\cot\alpha\Leftrightarrow x=\alpha+k\pi$.
❖ *Chú ý:* Nếu α thỏa mãn $\left\{\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2} \\ \tan\alpha=m \end{array}\right.$ thì ta viết $\alpha=\arctan m$.	❖ *Chú ý:* Nếu α thỏa mãn $\left\{\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2} \\ \cot\alpha=m \end{array}\right.$ thì ta viết $\alpha=\operatorname{arccot} m$.
Các trường hợp đặc biệt: ① $\tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$. ② $\tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.	*Các trường hợp đặc biệt:* ① $\cot x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$. ② $\cot x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

③ $\tan x=0 \Leftrightarrow x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

③ $\cot x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Chú ý:

① $\sin u=\sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u=v+k2\pi, & k\in\mathbb{Z} \\ u=\pi-v+k2\pi, & k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

② $\cos u=\cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u=v+k2\pi, & k\in\mathbb{Z} \\ u=-v+k2\pi, & k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

③ $\tan u=\tan v \Leftrightarrow \begin{cases} u\neq \dfrac{\pi}{2}+l\pi\left(\text{hay } v\neq\dfrac{\pi}{2}+l\pi\right)(l\in\mathbb{Z}) \\ u=v+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$

④ $\cot u=\cot v \Leftrightarrow \begin{cases} u\neq l\pi\ (\text{hay } v\neq l\pi)(l\in\mathbb{Z}) \\ u=v+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$

CẦN NHỚ: Phương trình $\tan x=a$, $\cot x=a$ luôn có nghiệm với $\forall a\in\mathbb{R}$.

Ví dụ 03.

Giải các phương trình sau:

a. $\tan x=1$.

b. $\tan 2x=-\dfrac{1}{3}$.

c. $\cot x=0$.

d. $\cot 3x=-2$.

e. $\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}-x\right)+\tan 2x=0$.

f. $\tan\left(\dfrac{2\pi}{3}+x\right)=\cot x$.

g. $\cot\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cot 2x$.

Lời giải

a. $\tan x=1$.

Ta có: $\tan x=1 \Leftrightarrow \tan x=\tan\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

b. $\tan 2x=-\dfrac{1}{3}$

Ta có: $\tan 2x=-\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 2x=\arctan\left(-\dfrac{1}{3}\right)+k\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\arctan\left(-\dfrac{1}{3}\right)+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

c. $\cot x=0$.

Ta có: $\cot x=0 \Leftrightarrow \cot x=\cot\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

d. $\cot 3x=-2$.

Ta có $\cot 3x=-2 \Leftrightarrow 3x=\operatorname{arccot}(-2)+k\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}\operatorname{arccot}(-2)+k\dfrac{\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$

e. $\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}-x\right)+\tan 2x=0$.

Ta có:

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)+\tan 2x=0 \Leftrightarrow \tan 2x=\tan\left(x-\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ 2x=x-\dfrac{3\pi}{4}+n\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2} \\ x=-\dfrac{3\pi}{4}+n\pi\end{cases}, k,n\in\mathbb{Z}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét: Việc giải dạng này theo chú ý ở trên cho kết quả nhanh, tuy nhiên nhiều bài học sinh sẽ khó khăn trong việc nhìn nhận quan hệ bao hàm giữa các họ nghiệm. Nên sử dụng đường tròn lượng giác để minh họa hoặc giải theo cách "dài" hơn như sau:

Điều kiện: $\begin{cases}\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}-x\right)\neq 0\\ \cos 2x\neq 0\end{cases}$. Khi đó

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)+\tan 2x=0\Leftrightarrow \tan 2x=\tan\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)\Leftrightarrow 2x=x-\frac{3\pi}{4}+k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{3\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Thay vào điều kiện ta thấy không thỏa mãn. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

f. $\tan\left(\dfrac{2\pi}{3}+x\right)=\cot x$.

$$\tan\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)=\cot x\Leftrightarrow \tan\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-x\neq\dfrac{\pi}{2}+n\pi\\ \dfrac{2\pi}{3}+x=\dfrac{\pi}{2}-x+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -n\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}\end{cases},k,n\in\mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

g. $\cot\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cot 2x$.

Ta có:

$$\cot\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\cot 2x\Leftrightarrow\begin{cases}2x\neq n\pi\\ 3x-\dfrac{\pi}{3}=2x+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq n\dfrac{\pi}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{cases},(k,n\in\mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Tóm tắt như sau:

DẠNG CƠ BẢN:

① $\sin u=\sin v\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}u=v+k2\pi, & k\in\mathbb{Z}\\ u=\pi-v+k2\pi, & k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

② $\cos u=\cos v\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}u=v+k2\pi, & k\in\mathbb{Z}\\ u=-v+k2\pi, & k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

③ $\tan u=\tan v\Leftrightarrow\begin{cases}u\neq\dfrac{\pi}{2}+l\pi\left(\text{hay } v\neq\dfrac{\pi}{2}+l\pi\right)(l\in\mathbb{Z})\\ u=v+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$

④ $\cot u=\cot v\Leftrightarrow\begin{cases}u\neq l\pi\ (\text{hay } v\neq l\pi)(l\in\mathbb{Z})\\ u=v+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$

TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT:

- $\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$
- $\sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$
- $\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$
- $\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$
- $\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$
- $\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

III. BÀI TẬP.

Bài 01.

Giải các phương trình sau:

1. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$
2. $\sin\left(4x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$
3. $\sin 3x=\sin 5x$
4. $\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$
5. $\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$.
6. $2\cos x-\sqrt{2}=0$
7. $\cos\left(3x+15^0\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.
8. $\sin(2x+1)=\cos(2-x)$
9. $\sin\left(4x-\frac{\pi}{8}\right)=\cos x$.
10. $\sin(2x+1)+\cos(3x-1)=0.$
11. $\cos 7x+\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=0.$
12. $(1+2\cos x)(3-\cos x)=0.$
13. $\sin 2x+3\sin 4x=0.$
14. $6\sin 4x+5\sin 8x=0.$
15. $\cos^2 x-\sin 2x=0.$
16. $\sin^2 2x=\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$
17. $\sin^2 x+\cos^2 4x=2.$

Lời giải

1. $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\2x+\frac{\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\x=\frac{5\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

2. $\sin\left(4x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x+\frac{1}{2}=\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)+k2\pi\\4x+\frac{1}{2}=\pi-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)+k2\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x=-\frac{1}{2}+\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)+k2\pi\\4x=\pi-\frac{1}{2}-\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{k\pi}{2}\\x=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

3. $\sin 3x=\sin 5x$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=5x+k2\pi\\3x=\pi-5x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2x=k2\pi\\8x=\pi+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-k\pi\\x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

4. $\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-\frac{\pi}{4}=2x-\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 4x-\frac{\pi}{4}=\pi-2x+\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi \\ 6x=\frac{19\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{24}+k\pi \\ x=\frac{19\pi}{72}+\frac{k\pi}{3} \end{array}\right. (k\in Z)$$

5. $\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-\frac{\pi}{4}=-2x+\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 4x-\frac{\pi}{4}=\pi+2x-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x=\frac{7\pi}{12}+k2\pi \\ 2x=\frac{11\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{7\pi}{72}+\frac{k\pi}{3} \\ x=\frac{11\pi}{24}+k\pi \end{array}\right. (k\in \mathbb{Z})$$

6. $2\cos x-\sqrt{2}=0$

$$\Leftrightarrow \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. (k\in \mathbb{Z})$$

7. $\cos\left(3x+15^0\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x+15^0\right)=\cos 30^0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x+15^0=30^0+k.360^0 \\ 3x+15^0=-30^0+k.360^0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=15^0+k.360^0 \\ 3x=-45^0+k.360^0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5^0+k.120^0 \\ x=-15^0+k.120^0 \end{array}\right. (k\in \mathbb{Z})$$

8. $\sin(2x+1)=\cos(2-x)$

$$\Leftrightarrow \sin(2x+1)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2+x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=\frac{\pi}{2}-2+x+k2\pi \\ 2x+1=\pi-\frac{\pi}{2}+2-x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}-3+k2\pi \\ 3x=\frac{\pi}{2}+1+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}-3+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}+\frac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k\in \mathbb{Z})$$

9. $\sin\left(4x-\frac{\pi}{8}\right)=\cos x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(4x-\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-x+k2\pi \\ 4x-\frac{\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{2}+x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x=\frac{5\pi}{8}+k2\pi \\ 3x=\frac{5\pi}{8}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{8}+\frac{k2\pi}{5} \\ x=\frac{5\pi}{24}+\frac{k2\pi}{3} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

10. $\sin(2x+1)+\cos(3x-1)=0$

$\Leftrightarrow \cos(3x-1)=-\sin(2x+1)$

$\Leftrightarrow \cos(3x-1)=\sin(-2x-1)$

$$\Leftrightarrow \cos(3x-1)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x+1\right) \Leftrightarrow 3x-1=\pm\left(\frac{\pi}{2}+2x+1\right)+k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{10}+k\frac{2\pi}{5} \end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{2}+2+k2\pi$; $x=-\frac{\pi}{10}+k\frac{2\pi}{5}$.

11. $\cos 7x+\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos 7x=-\sin\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)$

$\Leftrightarrow \cos 7x=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{5}\right)$

$$\Leftrightarrow \cos 7x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x-\frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow 7x=\pm\left(\frac{3\pi}{10}+2x\right)+k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3\pi}{50}+k\frac{2\pi}{5} \\ x=-\frac{\pi}{30}+k\frac{2\pi}{9} \end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\frac{3\pi}{50}+k\frac{2\pi}{5}$; $x=-\frac{\pi}{30}+k\frac{2\pi}{9}$.

12. $(1+2\cos x)(3-\cos x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=-\frac{1}{2} \\ \cos x=3\ (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi$.

13. $\sin 2x+3\sin 4x=0$

$\Leftrightarrow \sin 2x+6\sin 2x.\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \sin 2x(1+6\cos 2x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=-\frac{1}{6} \\ \sin 2x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{6}\right)+k2\pi \\ 2x=k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{6}\right)+k\pi \\ x=k\frac{\pi}{2} \end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{6}\right)+k\pi$; $x=k\frac{\pi}{2}$.

14. $6\sin 4x+5\sin 8x=0$

$\Leftrightarrow 6\sin 4x+10\sin 4x.\cos 4x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin 4x\left(3+5\cos 4x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x=-\dfrac{3}{5}\\ \sin 4x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=\pm\arccos\left(-\dfrac{3}{5}\right)+k2\pi\\ 4x=k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{1}{4}\arccos\left(-\dfrac{3}{5}\right)+k\dfrac{\pi}{2}\\ x=k\dfrac{\pi}{4}\end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\pm\dfrac{1}{4}\arccos\left(-\dfrac{3}{5}\right)+k\dfrac{\pi}{2}$; $x=k\dfrac{\pi}{4}$.

15. $\cos^2 x-\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x-2\sin x.\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x\left(\cos x-2\sin x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x-2\sin x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ \tan x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\arctan\dfrac{1}{2}+k\pi\end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$; $x=\arctan\dfrac{1}{2}+k\pi$.

16. $\sin^2 2x=\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x=\frac{1+\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x=\frac{1+\sin 2x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x-\sin 2x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=1\\ \sin 2x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ 2x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ 2x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$; $x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi$; $x=\dfrac{7\pi}{12}+k\pi$.

17. $\sin^2 x+\cos^2 4x=2.$

Vì $0\le\sin^2 x\le 1; 0\le\cos^2 4x\le 1; \forall x$ nên:

$\sin^2 x+\cos^2 4x=2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2 x=1\\ \cos^2 4x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=0\\ \sin 4x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=0\\ 4\sin x.\cos x.\cos 2x=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi.$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

Bài 02.

Giải các phương trình sau:

1. $\tan\left(2x-1\right)=\dfrac{1}{4}$ **2.** $\cot\left(\dfrac{3x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$

3. $\tan\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ **4.** $\cot\left(4x-20°\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

5. $\sqrt{3}\tan 2x-3=0$ **6.** $\tan 3x=\tan 4x$

7. $\cot 5x.\cot 8x=1$ **8.** $\cot 2x.\sin 3x=0$

Lời giải

1. $\tan\left(2x-1\right)=\dfrac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow 2x-1=\arctan\frac{1}{4}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{4}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

2. $\cot\left(\dfrac{3x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{2}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{6}+k\pi \Leftrightarrow \frac{3x}{2}=\frac{\pi}{6}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{9}+k\pi\ \ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

3. $\tan\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow 3x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{3}\ \ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

4. $\cot\left(4x-20°\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Leftrightarrow 4x-20°=60°+k180° \Leftrightarrow 4x=80°+k180° \Leftrightarrow x=20°+k45°\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

5. $\sqrt{3}\tan 2x-3=0$

$$\Leftrightarrow \tan 2x=\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\ \ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

6. $\tan 3x=\tan 4x$

Điều kiện $\begin{cases}\cos 3x\neq 0\\ \cos 4x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ 4x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{k\pi}{3}\\ x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4}\end{cases}\ \ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$

Ta có $\tan 3x=\tan 4x \Leftrightarrow 4x=3x+k\pi \Leftrightarrow x=k\pi\ \ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x=k\pi\ \ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$

7. $\cot 5x.\cot 8x=1$

Điều kiện $\begin{cases}\sin 5x\neq 0\\ \cos 8x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x=k\pi\\ 8x=k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{k\pi}{5}\\ x=\dfrac{k\pi}{8}\end{cases}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$

$$\cot 5x.\cot 8x=1 \Leftrightarrow \cot 8x=\tan 5x=\cot\left(\frac{\pi}{2}-5x\right) \Leftrightarrow 8x=\frac{\pi}{2}-5x+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{26}+\frac{k\pi}{13}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x=\frac{\pi}{26}+\frac{k\pi}{13}$, $k\ne 13m+6$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

8. $\cot 2x.\sin 3x=0$

Điều kiện $\sin 2x\ne 0\Leftrightarrow 2x\ne k\pi\Leftrightarrow x\ne\frac{k\pi}{2}$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Ta có $\cot 2x.\sin 3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cot 2x=0\\ \sin 3x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ 3x=k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{k\pi}{3}\end{array}\right.$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$; $x=\frac{m\pi}{3}\left(m\ne 3n\right)$ $\left(k;n\in\mathbb{Z}\right)$.

----------------- HẾT-----------------

§3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI THEO HÀM LƯỢNG GIÁC

I. DẠNG CƠ BẢN.

Dạng tổng quát:

$$\boxed{at^2+bt+c=0},$$

trong đó a,b,c là hằng số $(a\neq 0)$ và t là một trong các hàm lượng giác.

Phương pháp giải:

Quan sát và dùng các công thức biến đổi để đưa phương trình về cùng một hàm lượng giác với cung góc giống nhau, chẳng hạn:

Dạng	Đặt ẩn phụ	Điều kiện
$a\sin^2 X+b\sin X+c=0$	$t=\sin X$	$-1\le t\le 1$
$a\cos^2 X+b\cos X+c=0$	$t=\cos X$	$-1\le t\le 1$
$a\tan^2 X+b\tan X+c=0$	$t=\tan X$	Không có điều kiện của t
$a\cot^2 X+b\cot X+c=0$	$t=\cot X$	Không có điều kiện của t

Nếu đặt $t=\sin^2 X$, $\cos^2 X$ hoặc $t=|\sin X|$, $t=|\cos X|$ thì điều kiện là $0\le t\le 1$.

Ví dụ.

Giải các phương trình sau:

a. $2\sin^2 x-\sin x-1=0$

b. $\tan^2 x+2\sqrt{3}\tan x+3=0$

c. $3\sin^2 x+2\cos^4 x-2=0$

d. $3\cos^2 x-2\cos 2x=3\sin x-1$.

Lời giải

a. $2\sin^2 x-\sin x-1=0$

$$2\sin^2 x-\sin x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$$

b. $\tan^2 x+2\sqrt{3}\tan x+3=0$

$$\tan^2 x+2\sqrt{3}\tan x+3=0\Leftrightarrow\tan x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$$

c. $3\sin^2 x+2\cos^4 x-2=0$

$$3\sin^2 x+2\cos^4 x-2=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^4 x-3\cos^2 x+1=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos^2 x=1\\ \cos^2 x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=\pm 1\\ \cos x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right.,k\in Z$$

d. $3\cos^2 x - 2\cos 2x = 3\sin x - 1$

$$3\cos^2 x - 2\cos 2x = 3\sin x - 1$$

$$\Leftrightarrow 3\left(1-\sin^2 x\right) - 2\left(1-2\sin^2 x\right) = 3\sin x - 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 1 (n)\\ \sin x = 2 (l)\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

II. BÀI TẬP.

Bài 01.

Giải các phương trình sau:

1. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

2. $4\cos^2 x - 2\left(1+\sqrt{3}\right)\cos x + \sqrt{3} = 0$

3. $2\cos^2 2x - 2\left(\sqrt{3}+1\right)\cos 2x + \sqrt{3} = 0$

4. $9 - 13\cos x + \dfrac{4}{1+\tan^2 x} = 0$

5. $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right) + 4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right) = 4$

6. $2\sin^2 x + 5\sin x + 3 = 0$

7. $\sin^2 2x - 13\sin 2x + 5 = 0$

8. $4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$

9. $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$

10. $5\cos x - 2\sin\dfrac{x}{2} + 7 = 0$.

11. $\cos\left(2x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + 3\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$.

12. $\cos 4x + 12\sin x\cos x - 5 = 0.$

13. $\sin^2 x - \cos x + 1 = 0.$

14. $6\sin 4x + 5\sin 8x = 0.$

15. $\sin^3 x + 3\sin^2 x + 2\sin x = 0.$

16. $\tan^2 x + (\sqrt{3}-1)\tan x - \sqrt{3} = 0.$

17. $\cot^2 x + 4\cot x + 3 = 0.$

18. $\tan x - \cot x = \dfrac{3}{2}.$

19. $2\tan^2 x + 3 = \dfrac{3}{\cos x}.$

20. $\dfrac{3}{\sin^2 x} - 2\sqrt{3}\cot x - 6 = 0.$

Lời giải

1. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 1\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k2\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

2. $4\cos^2 x - 2\left(1+\sqrt{3}\right)\cos x + \sqrt{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2}\\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

3. $2\cos^2 2x - 2\left(\sqrt{3}+1\right)\cos 2x + \sqrt{3} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2} > 1\ (VN)\\ \cos 2x = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow 2x = \pm\arccos\frac{3-\sqrt{3}}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3-\sqrt{3}}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$$

4. $9-13\cos x+\dfrac{4}{1+\tan^2 x}=0$.

Điều kiện $\cos x\neq 0$.

$$\Leftrightarrow 9-13\cos x+4\cos^2 x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=\dfrac{9}{4}>1\,(VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=k2\pi\,(k\in\mathbb{Z}).$$

5. $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)+4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=4$

$$\Leftrightarrow 1-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)+4\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)-4=0$$

$$\Leftrightarrow -\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)+4\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)=1\\ \sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)=3\,(VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\quad(k\in\mathbb{Z}).$$

6. $2\sin^2 x+5\sin x+3=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=\dfrac{-3}{2}(VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\ \ (k\in\mathbb{Z}).$$

7. $\sin^2 2x-13\sin 2x+5=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=\dfrac{13+\sqrt{149}}{2}\ (VN)\\ \sin 2x=\dfrac{13-\sqrt{149}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{13-\sqrt{149}}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{13-\sqrt{149}}{2}+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$$

8. $4\sin^2 x+4\sin x-3=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \sin x=\dfrac{-3}{2}\ (VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$$

9. $\cos 2x-5\sin x-3=0$

$$\Leftrightarrow\left(1-2\sin^2 x\right)-5\sin x-3=0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 x-5\sin x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=-\dfrac{1}{2}\\ \sin x=-2\ (VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$$

10. $5\cos x-2\sin\dfrac{x}{2}+7=0$

$$\Leftrightarrow 5\left(1-2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)-2\sin\dfrac{x}{2}+7=0$$

$$\Leftrightarrow -10\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2}=1\\ \sin\frac{x}{2}=\frac{-6}{5}\ (VN)\end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\pi+k4\pi \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

11. $\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+3\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1=0$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+3\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1=0 \quad (1)$$

Đặt $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=t \quad (-1\le t\le 1)$.

Pt (1) $\Leftrightarrow 2t^2+3t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\frac{-1}{2}\\ t=-1\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}\\ \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1=\cos\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{3}=\pi+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{3}=\pi+k2\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=-\pi+k2\pi\\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\\ x=\frac{-4\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

12. $\cos 4x+12\sin x\cos x-5=0.$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 2x+6\sin 2x-5=0.$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x-6\sin 2x+4=0.$

Đặt $\sin 2x=t \quad (-1\le t\le 1)$.

$\Leftrightarrow 2t^2-6t+4=0.$

$$\Leftrightarrow t^2-3t+2=0. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1 \quad (\text{TM})\\ t=-2 \quad (\text{KTM})\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x=1=\sin\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi.$$

13. $\sin^2 x-\cos x+1=0.$

$$\Leftrightarrow 1-\cos^2 x-\cos x+1=0. \Leftrightarrow \cos^2 x+\cos x-2=0. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=-2 \quad (\text{KTM})\end{array}\right. \Leftrightarrow x=k2\pi.$$

14. $6\sin 4x+5\sin 8x=0.$

$\Leftrightarrow 6\sin 4x+10\sin 4x\cos 4x=0.$

$\Leftrightarrow 2\sin 4x(3+5\cos 4x)=0.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 4x=0\\ \cos 4x=-\frac{3}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=k\pi\\ 4x=\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)+k2\pi\\ 4x=-\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)+k2\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{4}\\ x=\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{k\pi}{2}\\ x=-\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

15. $\sin^3 x+3\sin^2 x+2\sin x=0.\quad (1)$

Đặt $\sin x=t\ \ (-1\le t\le 1)$.

Pt (1) $\Leftrightarrow t^3+3t^2+2t=0$

$$\Leftrightarrow t\left(t^2+3t+2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t^2+3t+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=-1\\ t=-2\,(KTM)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$$

16. $\tan^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\tan x-\sqrt{3}=0.\ (1)$

Đặt $\tan x=t$.

$$\text{Pt (1)}\Leftrightarrow t^2+\left(\sqrt{3}-1\right)t-\sqrt{3}=0.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=-\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=-\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$$

17. $\cot^2 x+4\cot x+3=0.\quad (1)$

Đặt $\cot x=t$.

Pt (1) $\Leftrightarrow t^2+4t+3=0.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cot x=-1\\ \cot x=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=\dfrac{-1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\arctan\left(\dfrac{-1}{3}\right)+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$$

18. $\tan x-\cot x=\dfrac{3}{2}.$

$$\Leftrightarrow\tan x-\frac{1}{\tan x}=\frac{3}{2}.\ (1)$$

Đặt $\tan x=t\ \ (t\ne 0)$.

Pt (1) $\Leftrightarrow t^2+\dfrac{1}{t}-\dfrac{3}{2}=0$

$$\Leftrightarrow 2t^2+3t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=2\\ \tan x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\arctan 2+k\pi\\ x=\arctan\left(-\dfrac{1}{2}\right)+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$$

19. $2\tan^2 x+3=\dfrac{3}{\cos x}.$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{\cos^2 x}+1=\frac{3}{\cos x}.$$

Đặt $\dfrac{1}{\cos x}=t\ \ \left(t\ne 0,-1\le\dfrac{1}{t}\le 1\right)$.

$$\Leftrightarrow 2t^2-3t+1=0.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{t}=1\\ \dfrac{1}{t}=2\ (KTM)\end{array}\right.\Leftrightarrow\cos x=1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

20. $\dfrac{3}{\sin^2 x}-2\sqrt{3}\cot x-6=0.$

$\Leftrightarrow 3\left(\cot^2 x+1\right)-2\sqrt{3}\cot x-6=0.$

$\Leftrightarrow 3\cot^2 x-2\sqrt{3}\cot x-3=0.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot x=\sqrt{3}\\ \cot x=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\dfrac{-\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$

Bài 02.

Giải các phương trình sau:

1. $\left(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\right)^2=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right).$

2. $\cot x+\left(1+\tan x.\tan\dfrac{x}{2}\right).\sin x=4.$

3. $\cot x-\tan x=\dfrac{2}{\sin 2x}-4\sin 2x.$

4. $\sqrt{2}\left(2\sin x-1\right)=4\left(\sin x-1\right)-\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

5. $\cot x-1=\dfrac{\cos 2x}{1+\tan x}+\sin^2 x-\dfrac{1}{2}\sin 2x.$

6. $5\sin x-2=3\left(1-\sin x\right)\tan^2 x.$

7. $\cos^2 3x\cdot\cos 2x-\cos^2 x=0;$

8. $\sin^4 x+\cos^4 x+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{3}{2}=0;$

9. $\dfrac{\left(1+\sin x+\cos 2x\right)\cdot\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x;$

10. $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x}{5\sin 2x}=\dfrac{1}{2}\cot 2x-\dfrac{1}{8\sin 2x};$

11. $\cot x-\tan x+4\sin 2x=\dfrac{2}{\sin 2x};$

12. $3\cos 4x-8\cos^6 x+2\cos^2 x+3=0;$

13. $\cot x=\tan x+\dfrac{2\cos 4x}{\sin 2x}.$

Lời giải

1. $\left(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\right)^2=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right).$

Ta có:

$\left(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\right)^2=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)^2=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sin 2x.\sin\frac{\pi}{6}+\cos 2x.\cos\frac{\pi}{6}\right)^2=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0\\ \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ 2x-\frac{\pi}{6}=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}$; $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

2. $\cot x+\left(1+\tan x.\tan\frac{x}{2}\right).\sin x=4.$

ĐKXĐ: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\\ \cos\frac{x}{2}\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow 2x\neq k\pi \Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z}).$

Ta có:

$$\cot x+\left(1+\tan x.\tan\frac{x}{2}\right).\sin x=4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}+\left(1+\frac{\sin x.\sin\frac{x}{2}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}}\right).\sin x=4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}+\left(\frac{\cos x.\cos\frac{x}{2}+\sin x.\sin\frac{x}{2}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}}\right).\sin x=4 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}+\left(\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}}\right).\sin x=4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=4$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x+\sin^2 x=4\sin x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x=1 \Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ 2x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\frac{5\pi}{12}+k\pi\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$; $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

3. $\cot x-\tan x=\dfrac{2}{\sin 2x}-4\sin 2x.$

ĐKXĐ: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\\ \sin 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0\Leftrightarrow 2x\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq k\dfrac{\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right).$

$\cot x-\tan x=\dfrac{2}{\sin 2x}-4\sin 2x$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{2}{\sin 2x}-4\sin 2x$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x.\cos x}=\dfrac{2}{\sin 2x}-4\sin 2x$

$\Leftrightarrow \dfrac{2\cos 2x}{\sin 2x}=\dfrac{2}{\sin 2x}-4\sin 2x$

$\Leftrightarrow \cos 2x=1-2\sin^2 2x$

$\Leftrightarrow \cos 2x=1-2\left(1-\cos^2 2x\right)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-\cos 2x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=1\left(L\right)\\ \cos 2x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow 2x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right).$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình là: $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right).$

4. $\sqrt{2}\left(2\sin x-1\right)=4\left(\sin x-1\right)-\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(2\sin x-1\right)=4\left(\sin x-1\right)-\left(\cos 2x.\cos\dfrac{\pi}{4}-\sin 2x.\sin\dfrac{\pi}{4}+\sin 2x.\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos 2x.\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(2\sin x-1\right)=4\left(\sin x-1\right)-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(2\sin x-1\right)=4\left(\sin x-1\right)-\sqrt{2}\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(2\sin x-1\right)=4\left(\sin x-1\right)-\sqrt{2}\left(1-2\sin^2 x\right)$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin^2 x+2\left(2-\sqrt{2}\right)\sin x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\sqrt{2}\left(VN\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right).$

5. $\cot x-1=\dfrac{\cos 2x}{1+\tan x}+\sin^2 x-\dfrac{1}{2}\sin 2x.$

ĐKXĐ: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\\ \tan x\neq -1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\neq k\dfrac{\pi}{2}\\ x\neq -\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{cases}\left(k\in\mathbb{Z}\right).$

$\cot x-1=\dfrac{\cos 2x}{1+\tan x}+\sin^2 x-\dfrac{1}{2}\sin 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}-1=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1+\dfrac{\sin x}{\cos x}}+\sin^2 x-\sin x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x-\sin x}{\sin x}=\frac{\cos x(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x}+\sin^2 x-\sin x.\cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x-\sin x}{\sin x}=\cos x(\cos x-\sin x)-\sin x(\cos x-\sin x)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x-\sin x=0\ (1)\\ \dfrac{1}{\sin x}=\cos x-\sin x\ (2)\end{array}\right.$$

Giải (1): $\cos x-\sin x=0\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi.$

Giải (2): $\dfrac{1}{\sin x}=\cos x-\sin x$

$\Leftrightarrow 1=\sin x.\cos x-\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x+\cos^2 x=\sin x.\cos x-\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x.\cos x+\cos^2 x=0\Leftrightarrow 2\tan^2 x-\tan x+1=0\,(VN).$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình là: $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$

6. $5\sin x-2=3(1-\sin x)\tan^2 x.$

ĐKXĐ: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$

$5\sin x-2=3(1-\sin x)\tan^2 x$

$\Leftrightarrow 5\sin x-2=3(1-\sin x).\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow 5\sin x-2=3(1-\sin x).\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$

$\Leftrightarrow 5\sin x-2=3.\dfrac{\sin^2 x}{1+\sin x}$

$\Leftrightarrow (5\sin x-2)(1+\sin x)=3\sin^2 x$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+3\sin x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2}\\ \sin x=-2\,(VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm của phương trình là: $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$; $x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

7. $\cos^2 3x\cdot\cos 2x-\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+\cos 6x}{2}\cdot\cos 2x-\dfrac{1+\cos 2x}{2}=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x+\cos 6x\cdot\cos 2x-1-\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \cos 6x\cdot\cos 2x-1=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 8x+\cos 4x)-1=0 \Leftrightarrow 2\cos^2 4x+\cos 4x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos 4x=1 & \\ \cos 4x=-\dfrac{3}{2} & (vn)\end{array}\right. \Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}.$$

8. $\sin^4 x+\cos^4 x+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{3}{2}=0;$

$$\Leftrightarrow \left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\frac{1}{2}\left[\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin 2x\right]=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x+\frac{1}{2}\left[\sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin 2x\right]=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2-\sin^2 2x-\cos 4x+\sin 2x=3$$

$$\Leftrightarrow 2-\sin^2 2x-\left(1-2\sin^2 2x\right)+\sin 2x=3$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x+\sin 2x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sin 2x=1 & \\ \sin 2x=-2 & (vn)\end{array}\right. \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

9. $\dfrac{(1+\sin x+\cos 2x)\cdot\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x;$

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \tan x\neq -1\end{cases}.$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+\sin x+\cos 2x)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)}{\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$$

$$\Leftrightarrow 1+\sin x+\cos 2x=1$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 x+\sin x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi & (l)\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi & \\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

10. $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x}{5\sin 2x}=\dfrac{1}{2}\cot 2x-\dfrac{1}{8\sin 2x};$

Điều kiện: $\sin 2x\neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x}{5\sin 2x}=\frac{4\cos 2x-1}{8\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow 8-4\left(1-\cos^2 2x\right)=20\cos 2x-5$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x-20\cos 2x+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\cos 2x=\dfrac{9}{2} & (l)\\ \cos 2x=\dfrac{1}{2} & \end{array}\right. \Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

11. $\cot x-\tan x+4\sin 2x=\dfrac{2}{\sin 2x}$;

Điều kiện: $\sin 2x\neq 0$

$$\cot x-\tan x+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}+4\sin 2x-\frac{2}{\sin 2x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x-\sin^2}{\sin x\cdot\cos x}+4\sin 2x-\frac{2}{\sin 2x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos 2x}{\sin 2x}+4\sin 2x-\frac{2}{\sin 2x}=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x+4\sin^2 2x-2=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x+2\left(1-\cos^2 2x\right)-1=0\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-\cos 2x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=1(l)\\ \cos 2x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$$

12. $3\cos 4x-8\cos^6 x+2\cos^2 x+3=0$;

$$\Leftrightarrow 3\left(2\cos^2 2x-1\right)-\left(1+\cos 2x\right)^3+\left(1+\cos 2x\right)+3=0$$

$$\Leftrightarrow 6\cos^2 2x-3-1-3\cos 2x-3\cos^2 2x-\cos^3 2x+1+\cos 2x+3=0$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 2x-3\cos^2 2x+2\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\left(\cos^2 2x-3\cos 2x+2\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos 2x=1\\ \cos 2x=2\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x=k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

13. $\cot x=\tan x+\dfrac{2\cos 4x}{\sin 2x}$.

Điều kiện: $\sin 2x\neq 0$.

Ta có:

$$\cot x=\tan x+\frac{2\cos 4x}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{2\cos 4x}{2\sin x\cos x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}-\frac{\cos 4x}{\sin x\cos x}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x-\cos 4x}{\sin x\cos x}=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x-\cos 4x=0\Leftrightarrow -2\cos^2 2x+\cos 2x+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=1(l)\\ \cos 2x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$$

§4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VỚI HÀM SIN - COS

I. DẠNG CƠ BẢN.

Dạng tổng quát:

$$\boxed{a\sin x + b\cos x = c\ (1)}\ \{a;b;c\} \in \mathbb{R},\ \text{và}\ a^2+b^2 \neq 0.$$

Phương pháp giải:

Điều kiện có nghiệm của phương trình: $a^2+b^2 \geq c^2$ (kiểm tra trước khi giải)

* Chia 2 vế cho $\sqrt{a^2+b^2}$, thì (*) $\Leftrightarrow \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (**)

* Giả sử $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\left(\alpha \in [0;2\pi]\right)$ thì:

(**) $\Leftrightarrow \sin x.\cos\alpha + \cos x.\sin\alpha = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$: dạng cơ bản

Chú ý: hai công thức sử dụng nhiều nhất là: $\begin{cases}\sin a.\cos b \pm \cos a\sin b = \sin(a\pm b)\\ \cos a.\cos b \pm \sin a\sin b = \sin(a\mp b)\end{cases}$

Các dạng có cách giải tương tự:

$$\left|\begin{array}{l} a.\sin mx + b.\cos mx = \left|\begin{array}{l}\sqrt{a^2+b^2}\cos mx\\ \sqrt{a^2+b^2}\sin mx\end{array}\right.\left(a^2+b^2\neq 0\right)\\ a.\sin mx + b.\cos mx = c.\sin nx + d.\cos nx,\ \left(a^2+b^2 \neq c^2+d^2\right)\end{array}\right. \xrightarrow{pp} \text{Chia cho } \sqrt{a^2+b^2}.$$

Chú ý:

① (1) có nghiệm $\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm $\Leftrightarrow a^2+b^2 \geq c^2$.

② $\sin x \pm \sqrt{3}\cos x = 2\left(\dfrac{1}{2}\sin x \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

③ $\sqrt{3}\sin x \pm \cos x = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x \pm \dfrac{1}{2}\cos x\right) = 2\sin\left(x \pm \dfrac{\pi}{6}\right)$.

④ $\sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x \pm \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ví dụ.

Giải các phương trình sau:

a. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$

b. $\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}$

c. $\sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\sin 2x$

d. $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{3}\sin x + \cos x$

Lời giải

a. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.$$

b. $\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3}-2x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ \frac{\pi}{3}-2x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{24}+k\pi \\ x=\frac{13\pi}{24}+k\pi \end{array}\right.$$

c. $\sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=2\sin 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3}=2x+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{3}=\pi-2x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{2\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k\in Z$$

d. $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{6}-2x=\frac{\pi}{6}+x+k2\pi \\ \frac{\pi}{6}-2x=\pi-\frac{\pi}{6}-x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{k2\pi}{3} \\ x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right., k\in Z$$

II. BÀI TẬP.

Bài 01.

Giải các phương trình sau:

1. $\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x=2\sin 2x$

2. $\sin x-\cos x=1$

3. $\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{6}}{2}$

4. $5\sin 2x+12\cos 2x=13$

5. $\sin 8x-\cos 6x=\sqrt{3}\left(\sin 6x+\cos 8x\right)$

6. $\sin 7x-\cos 2x=\sqrt{3}\left(\sin 2x-\cos 7x\right)$

7. $\sin x+\cos x=2\sqrt{2}.\sin x.\cos x$

8. $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=3$

9. $\sin x+\cos x.\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\left(\cos 4x+\sin^3 x\right)$

Lời giải

1. $\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x=2\sin 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x=\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-\frac{\pi}{3}=2x+k2\pi \\ 3x-\frac{\pi}{3}=\pi-2x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{4\pi}{15}+k\frac{2\pi}{5} \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

2. $\sin x-\cos x=1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

3. $\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

4. $5\sin 2x+12\cos 2x=13$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{13}\sin 2x+\frac{12}{13}\cos 2x=1$$

Đặt $\cos\alpha=\frac{5}{13},\sin\alpha=\frac{12}{13}$ Ta có phương trình:

$$\sin 2x.\cos\alpha+\cos 2x.\sin\alpha=1 \Leftrightarrow \sin(2x+\alpha)=1 \Leftrightarrow 2x+\alpha=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{-\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$$

5. $\sin 8x-\cos 6x=\sqrt{3}(\sin 6x+\cos 8x)$

$$\Leftrightarrow \sin 8x-\sqrt{3}\cos 8x=\sqrt{3}\sin 6x+\cos 6x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 8x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 8x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6x+\frac{1}{2}\cos 6x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(8x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(6x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x-\frac{\pi}{3}=6x+\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ 8x-\frac{\pi}{3}=\pi-6x-\frac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ 14x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\frac{7\pi}{84}+\frac{k\pi}{7} \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

6. $\sin 7x-\cos 2x=\sqrt{3}(\sin 2x-\cos 7x)$

$$\Leftrightarrow \sin 7x+\sqrt{3}\cos 7x=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 7x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 7x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(7x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x-\frac{\pi}{6}=2x-\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 7x-\frac{\pi}{6}=-2x+\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ 9x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{30}+\frac{k2\pi}{5} \\ x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{9} \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

7. $\sin x+\cos x=2\sqrt{2}.\sin x.\cos x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=x+\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ 2x=\pi-x-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{k2\pi}{3} \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Vì nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k2\pi}{3}$ chứa nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$ nên pt có 1 họ nghiệm là $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k2\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$

8. $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin 2x=3$

$$\Leftrightarrow 1-\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=1 \Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1 \Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

9. $\sin x+\cos x.\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\left(\cos 4x+\sin^3 x\right)$

$$\Leftrightarrow \sin x.\left(1-2\sin^2 x\right)+\cos x.\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin x.\cos 2x+\cos x.\sin 2x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x+\sqrt{3}\cos 3x=2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x=\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos 4x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=3x-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ 4x=-3x+\frac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{42}+\frac{k2\pi}{7} \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z}).$$

Bài 02.

Giải các phương trình sau:

1. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos 2x}{2\sin x}=\cos x$.

2. $\tan\frac{\pi}{7}\sin x+2\cos^2\frac{x}{2}=2$

3. $\sqrt{3}\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)=\sin x+\cos x$

4. $\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x+2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}$

5. $\sqrt{3}\sin 7x-\cos 7x=2\sin\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)$

6. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)+\sqrt{3}\sin\left(\pi-2x\right)=2$

7. $\cos x+\sqrt{3}\sin x+2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$.

8. $2\cos 2x=\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\cos x-\sin x\right)$.

9. $\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x-\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x=1-\sqrt{3}$.

10. $3\sin 3x-\sqrt{3}\cos 9x=1+4\sin^3 3x$.

11. $2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)+4\sin x\cos x-1=0$.

12. $4\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-3\sqrt{2}=0$.

13. $8\sin x.\sin 2x+6\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right).\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)=5+7\cos x$.

14. $2\sqrt{3}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)+2\cos^2\left(x-\dfrac{\pi}{8}\right)=\sqrt{3}+1$.

15. $\dfrac{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}{2\cos^2 x+\cos x-1}=\dfrac{2}{3}\left(3-\sqrt{3}\sin x\right)$.

16. $8\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin x}$.

17. $2\cos^3 x+2\sin^3 x+2\sin^2 x.\cos x+2\cos^2 x.\sin x-\sqrt{2}=0$.

18. $5\left(\cos x+\sin x\right)+\sin 3x-\cos 3x=2\sqrt{2}\left(2+\sin 2x\right)$.

Lời giải

1. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos 2x}{2\sin x}=\cos x$.

Điều kiện xác định $x\neq k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

$$\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos 2x}{2\sin x}=\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}-\sqrt{3}\cos 2x=\sin 2x \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{3}\sin 2x+\sin\dfrac{\pi}{3}\cos 2x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ 2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi(l) \\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi(tm) \end{array}\right.(k\in Z)$$

2. $\tan\dfrac{\pi}{7}\sin x+2\cos^2\dfrac{x}{2}=2$

$$\Leftrightarrow \tan\dfrac{\pi}{7}\sin x+\cos x+1=2$$

$$\Leftrightarrow \tan\dfrac{\pi}{7}\sin x+\cos x=1$$

$$\Leftrightarrow \sin\dfrac{\pi}{7}\sin x+\cos\dfrac{\pi}{7}\cos x=\cos\dfrac{\pi}{7}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{7}\right)=\cos\dfrac{\pi}{7} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\dfrac{\pi}{7}=\dfrac{\pi}{7}+k2\pi \\ x-\dfrac{\pi}{7}=-\dfrac{\pi}{7}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2\pi}{7}+k2\pi \\ x=k2\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

3. $\sqrt{3}\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)=\sin x+\cos x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=\sin x+\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\left(\cos x-\sin x\right)\left(\cos x+\sin x\right)=\sin x+\cos x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ \sqrt{3}\left(\cos x-\sin x\right)=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \sqrt{6}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{4}-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)-k2\pi \quad \left(k\in\mathbb{Z}\right)\\ x=\frac{-3\pi}{4}+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)-k2\pi\end{array}\right.$$

4. $\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x+2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\cos 2x+\sin\frac{\pi}{6}\sin 2x+\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)=1 \Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{24}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

5. $\sqrt{3}\sin 7x-\cos 7x=2\sin\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x-\frac{1}{2}\cos 7x=\sin\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\sin 7x-\sin\frac{\pi}{6}\cos 7x=\sin\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(7x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(5x-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}7x-\frac{\pi}{6}=5x-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ 7x-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}-5x+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{9}+k\frac{\pi}{6}\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

6. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)+\sqrt{3}\sin\left(\pi-2x\right)=2$

$$\Leftrightarrow \cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=1 \Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{6}\cos 2x+\cos\frac{\pi}{6}\sin 2x=1$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1 \Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

7. $\cos x+\sqrt{3}\sin x+2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos x+\sqrt{3}\sin x=-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=-\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi-2x-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{3}=\pi-2x-\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ x-\frac{\pi}{3}=-\left(\pi-2x-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=\pi+2k\pi \\ -x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3} \\ x=\frac{\pi}{3}-2k\pi \end{array}\right..$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}, x=\frac{\pi}{3}-2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

8. $2\cos 2x=\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\cos x-\sin x\right)$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x=\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\cos x-\sin x\right)$

$\Leftrightarrow \left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\cos x-\sin x\right)$

$\Leftrightarrow \left(\cos x-\sin x\right)\left(\cos x+\sin x\right)=\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\cos x-\sin x\right)$

$\Leftrightarrow \left(\cos x-\sin x\right)\left(\cos x+\sin x-1-\sqrt{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x-\sin x=0 \\ \cos x+\sin x-1-\sqrt{3}=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right) \\ \cos x+\sin x=1+\sqrt{3}\quad (*) \end{array}\right..$

Phương trình (*) vô nghiệm do $1^2+1^2<\left(1+\sqrt{3}\right)^2$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

9. $\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x-\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x=1-\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}-1\right)\sin x-\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x=1-\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sin x-\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\cos x=1$

$\Leftrightarrow \sin x-\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\cos x=1$

$\Leftrightarrow \sin x-\tan\frac{5\pi}{12}.\cos x=1$

$\Leftrightarrow \sin x.\cos\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{5\pi}{12}.\cos x=\cos\frac{5\pi}{12}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{12}+2k\pi \\ x-\frac{5\pi}{12}=\pi-\frac{\pi}{12}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

10. $3\sin 3x-\sqrt{3}\cos 9x=1+4\sin^3 3x$

$$\Leftrightarrow 3\sin 3x-\sqrt{3}\cos 9x=1+4\sin^3 3x$$
$$\Leftrightarrow 3\sin 3x-4\sin^3 3x-\sqrt{3}\cos 9x=1$$
$$\Leftrightarrow \sin 9x-\sqrt{3}\cos 9x=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 9x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 9x=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin\left(9x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ 9x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{9} \\ x=\frac{7\pi}{54}+\frac{2k\pi}{9} \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $x=\frac{\pi}{18}+\frac{2k\pi}{9}, x=\frac{7\pi}{54}+\frac{2k\pi}{9}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

11. $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+4\sin x\cos x-1=0$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+4\sin x\cos x-1=0$$
$$\Leftrightarrow 2\left(\cos 2x.\cos\frac{\pi}{6}-\sin 2x.\sin\frac{\pi}{6}\right)+2\sin 2x-1=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x+2\sin 2x-1=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x-1=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)=\sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3}+2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ \frac{\pi}{3}+2x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \\ 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi, x=\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

12. $4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-3\sqrt{2}=0$

$$\Leftrightarrow 4\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-3\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow 4\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{4}\right)+2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-3\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-3\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow 4\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-3\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 6\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \\ x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x=2k\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, x=2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

13. $8\sin x.\sin 2x+6\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=5+7\cos x$

$$8\sin x.\sin 2x+6\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=5+7\cos x$$

$$\Leftrightarrow 8\sin x.\sin 2x+3\left[\sin\left(-x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin 3x\right]=5+7\cos x$$

$$\Leftrightarrow 8\sin x.\sin 2x+3\cos x+3\sin 3x=5+7\cos x$$

$$\Leftrightarrow -4\left(\cos 3x-\cos x\right)+3\cos x+3\sin 3x=5+7\cos x$$

$$\Leftrightarrow -4\cos 3x+4\cos x+3\cos x+3\sin 3x=5+7\cos x$$

$$\Leftrightarrow 3\sin 3x-4\cos 3x=5$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin 3x-\frac{4}{5}\cos 3x=1$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha.\sin 3x-\sin\alpha.\cos 3x=1 \text{ (với } \cos\alpha=\frac{3}{5},\sin\alpha=\frac{4}{5}\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x-\alpha\right)=1 \Leftrightarrow 3x-\alpha=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3}\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

14. $2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{3}+1$

$$2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right).\cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{3}+1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{8}\right).\cos\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)-1=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin\left(2\text{x}-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 2x-\frac{\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{24}+k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{8}+k2\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

15. $\dfrac{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}{2\cos^2 x+\cos x-1}=\dfrac{2}{3}\left(3-\sqrt{3}\sin x\right)$

$$\frac{1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x}{2\cos^2 x+\cos x-1}=\frac{2}{3}\left(3-\sqrt{3}\sin x\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{2\cos^2 x+2\cos 2x.\cos x}{2\cos^2 x+\cos x-1}=\frac{2}{3}\left(3-\sqrt{3}\sin x\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{2\cos x(\cos x+\cos 2x)}{2\cos^2 x+\cos x-1}=\frac{2}{3}\left(3-\sqrt{3}\sin x\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{2\cos x\left(2\cos^2 x+\cos x-1\right)}{2\cos^2 x+\cos x-1}=\frac{2}{3}\left(3-\sqrt{3}\sin x\right)$$
$$\Leftrightarrow 3\cos x=3-\sqrt{3}\sin x$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x+\sin x=\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

16. $8\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin x}$

Điều kiện: $\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\dfrac{\pi}{2};\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Ta có: $8\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin x}\Leftrightarrow 8\sin x=\dfrac{\sqrt{3}\sin x+\cos x}{\cos x.\sin x}\Leftrightarrow 4\sin x.\sin 2x=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$$\Leftrightarrow 2\left(\cos x-\cos 3x\right)=\sqrt{3}\sin x+\cos x\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\cos 3x$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}.\cos x-\sin\frac{\pi}{3}.\sin x=\cos 3x$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 3x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x=x+\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 3x=-x-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\frac{-\pi}{12}+k\frac{\pi}{2} \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

17. $2\cos^3 x+2\sin^3 x+2\sin^2 x.\cos x+2\cos^2 x.\sin x-\sqrt{2}=0$

Ta có: $2\cos^3 x+2\sin^3 x+2\sin^2 x.\cos x+2\cos^2 x.\sin x-\sqrt{2}=0$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x\left(\cos x+\sin x\right)+2\sin^2 x\left(\cos x+\sin x\right)-\sqrt{2}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\cos x+\sin x\right)\left(2\cos^2 x+2\sin^2 x\right)=\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow 2\left(\cos x+\sin x\right)=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{7\pi}{12}+k2\pi\\x=\frac{-\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

18. $5\left(\cos x+\sin x\right)+\sin 3x-\cos 3x=2\sqrt{2}\left(2+\sin 2x\right)$

Ta có: $5\left(\cos x+\sin x\right)+\sin 3x-\cos 3x=2\sqrt{2}\left(2+\sin 2x\right)$

$\Leftrightarrow 5\left(\cos x+\sin x\right)+3\sin x-4\sin^3 x-(4\cos^3 x-3\cos x)=2\sqrt{2}\left(2+\sin 2x\right)$

$\Leftrightarrow 5\left(\cos x+\sin x\right)+3\left(\cos x+\sin x\right)-4\left(\cos x+\sin x\right)\left(\sin^2 x-\sin x.\cos x+\cos^2 x\right)=2\sqrt{2}\left(2+\sin 2x\right)$

$\Leftrightarrow 5\left(\cos x+\sin x\right)+\left(\sin x+\cos \mathrm{x}\right)=\left(2\sin 2x-1\right)=2\sqrt{2}\left(2+\sin 2x\right)$

$\Leftrightarrow\left(\sin x+\cos x\right)\left(2\sin 2x+4\right)=2\sqrt{2}\left(2+\sin 2x\right)$

$\Leftrightarrow 2\left(2+\sin 2x\right)\left(\sin x+\cos x-\sqrt{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin x+\cos x=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi(k\in\mathbb{Z})$.

------------------ HẾT------------------

§4. PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP

I. DẠNG CƠ BẢN.

Dạng tổng quát:

$$\boxed{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d\ (1)},\ \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

Phương pháp giải:

Bước 1: Kiểm tra $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases}$ có phải nghiệm hay không?

Bước 2: Khi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin^2 x \neq 1 \end{cases}$. Chia hai vế (1) cho $\cos^2 x$:

$$(1) \Leftrightarrow a\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + b\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x} + c\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = d\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow a\tan^2 x + b\tan x + c = d\left(1 + \tan^2 x\right).$$

Bước 3: Đặt $t = \tan x$ để đưa về phương trình bậc hai theo ẩn $t \Rightarrow x$.

Ví dụ.

Giải các phương trình sau:

a. $\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$.

b. $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2$.

c. $\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 + \sin^2 x$.

d. $4\sin^2 2x - 5\sin 2x\cos 2x - 6\cos^2 2x = 0$.

Lời giải

a. $\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$

$\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$ (1)

* Với $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases}$. Phương trình trở thành: 1 = 0 (vô lý)

$\Rightarrow$ Phương trình không nhận nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

* Với $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin^2 x \neq 1 \end{cases}$. Chia hai vế (1) cho $\cos^2 x$:

$$(1) \Leftrightarrow \tan^2 x + \tan x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-2) + k\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai họ nghiệm: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \arctan(-2) + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

b. $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2$

$2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x\cos x - \cos^2 x = 2$ (2)

* Với $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases}$. Phương trình trở thành: 2 = 2 (đúng)

$\Rightarrow$ Phương trình nhận nghiệm $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

* Với $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin^2 x\neq 1\end{cases}$. Chia hai vế (2) cho $\cos^2 x$:

(2) $\Leftrightarrow 2\tan^2 x+3\sqrt{3}\tan x-1=2\left(1+\tan^2 x\right)$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{3}\tan x=3\Leftrightarrow \tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi$

Vậy phương trình đã cho có hai họ nghiệm: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi; x=\frac{\pi}{6}+k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

c. $\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=1+\sin^2 x$

$\cos^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=1+\sin^2 x$

$\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=1$

$$\Leftrightarrow \cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=1\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ 2x+\frac{\pi}{3}=\frac{-\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{-\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.$$

d. $4\sin^2 2x-5\sin 2x\cos 2x-6\cos^2 2x=0$

$4\sin^2 2x-5\sin 2x\cos 2x-6\cos^2 2x=0$ (3)

* Với $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 2x=0\\ \sin^2 2x=1\end{cases}$. Phương trình trở thành: 4 = 0 (sai)

$\Rightarrow$ Phương trình không nhận nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$

* Với $x\neq\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 2x\neq 0\\ \sin^2 2x\neq 1\end{cases}$. Chia hai vế (3) cho $\cos^2 2x$:

(2) $\Leftrightarrow 4\tan^2 2x-5\tan 2x-6=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan 2x=2\\ \tan 2x=\frac{-3}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\arctan 2+k\pi\\ 2x=\arctan\left(\frac{-3}{4}\right)+k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\arctan 2+k\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-3}{4}\right)+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai họ nghiệm:

$x=\frac{1}{2}\arctan 2+k\frac{\pi}{2}; x=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-3}{4}\right)+k\frac{\pi}{2}$, $(k\in\mathbb{Z})$.

II. BÀI TẬP.

Bài 01.

Giải các phương trình sau:

1. $2\sin^2 x+3\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x=4$
2. $3\sin^2 2x-\sin 2x\cos 2x-4\cos^2 2x=2$
3. $2\sin^2+\left(3+\sqrt{3}\right)\sin x\cos x+\left(\sqrt{3}-1\right)\cos^2 x=-1$

4. $3\sin^2\frac{x}{2}+4\sin x+\left(8\sqrt{3}-9\right)\cos^2\frac{x}{2}=0$

5. $\sqrt{3}\sin^2 x+\left(1-\sqrt{3}\right)\sin x.\cos x-\cos^2 x+1-\sqrt{3}=0$

6. $9\sin^2 x+30\sin x.\cos x+25\cos^2 x=25$

7. $\sin 2x-2\sin^2 x=2\cos 2x$

8. $\sin^2 x+\sin 2x-2\cos^2 x=\frac{1}{2}$

Lời giải

1. $2\sin^2 x+3\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x=4 \quad (1)$

Xét $\cos x=0\Rightarrow\sin^2 x=1$, phương trình trở thành $2=4$ (Vô lý)

$\Rightarrow\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $\cos x\neq 0$, chia cả hai vế của phương trình (1) cho $\cos^2 x$, ta được phương trình:

$-2\tan^2 x+3\sqrt{3}\tan x-5=0$ (phương trình vô nghiệm)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

2. $3\sin^2 2x-\sin 2x\cos 2x-4\cos^2 2x=2 \quad (2)$

Xét $\cos 2x=0\Rightarrow\sin^2 2x=1$, phương trình trở thành $3=2$ (Vô lý)

$\Rightarrow\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $\cos 2x\neq 0$, chia cả hai vế của phương trình (2) cho $\cos^2 2x$, ta được:

$$\tan^2 2x-\tan 2x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan 2x=-2\\ \tan 2x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\arctan\left(-2\right)+k\pi\\ x=\frac{1}{2}\arctan 3+k\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

3. $2\sin^2+\left(3+\sqrt{3}\right)\sin x\cos x+\left(\sqrt{3}-1\right)\cos^2 x=-1 \quad (3)$

Xét $\cos x=0\Rightarrow\sin^2 x=1$, phương trình trở thành $2=-1$ (Vô lý)

$\Rightarrow\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $\cos x\neq 0$, chia cả hai vế của phương trình (3) cho $\cos^2 x$, ta được:

$$3\tan^2 x+\left(3+\sqrt{3}\right)\tan x+\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

4. $3\sin^2\frac{x}{2}+4\sin x+\left(8\sqrt{3}-9\right)\cos^2\frac{x}{2}=0$

Xét $\cos\frac{x}{2}=0\Rightarrow\sin^2\frac{x}{2}=1$, phương trình trở thành $3=0$ (Vô lý)

$\Rightarrow\ x=\pi+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $\cos\frac{x}{2}\neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2\frac{x}{2}$, ta được:

$$3\tan^2\frac{x}{2}+8\tan\frac{x}{2}+\left(8\sqrt{3}-9\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan\frac{x}{2}=\frac{-8+3\sqrt{3}}{3}\\ \tan\frac{x}{2}=-\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\arctan\frac{3\sqrt{3}-8}{3}+k2\pi\\ x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

5. $\sqrt{3}\sin^2x+\left(1-\sqrt{3}\right)\sin x.\cos x-\cos^2x+1-\sqrt{3}=0\quad(5)$

$\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin^2x+\left(1-\sqrt{3}\right)\sin x.\cos x-\cos^2x+\left(1-\sqrt{3}\right)\left(\sin^2x+\cos^2x\right)=0$

$\Leftrightarrow\sin^2x+\left(1-\sqrt{3}\right)\sin x.\cos x-\sqrt{3}\cos^2x=0$

Xét $\cos x=0\Rightarrow\sin x=0$ (loại vì $\sin^2x+\cos^2x=1$)

Xét $\cos x\neq 0$ chia cả 2 vế của phương trình (5) cho $\cos^2x$ ta được ;

$$\tan^2x+\left(1-\sqrt{3}\tan x\right)-\sqrt{3}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=\sqrt{3}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+\pi\end{array}\right.$$

6. $9\sin^2x+30\sin x.\cos x+25\cos^2x=25\qquad(6)$

Xét $\cos x=0\Rightarrow\sin x=\pm\frac{5}{3}$ (loại vì $\sin^2x+\cos^2x=1$)

Xét $\cos x\neq 0$ chia cả 2 vế của phương trình (6) cho $\cos^2x$ ta được :

$$9\tan^2x+30\tan x+25-25\left(1+\tan^2x\right)=0\Leftrightarrow-16\tan^2x+30\tan x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=0\\ \tan x=\frac{15}{8}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\arctan\frac{15}{8}+k\pi\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}.$$

7. $\sin 2x-2\sin^2x=2\cos 2x\quad(7)$

$\Leftrightarrow 2\sin x.\cos x-2\sin^2x=4\cos^2x-2\Leftrightarrow 2\sin^2x-2\sin x\cos x+4\cos^2x-2=0$ (1).

Xét $\cos x=0\Rightarrow\sin x=1$. Suy ra $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ là nghiệm của phương trình.

Xét $\cos x\neq 0$ chia cả 2 vế của phương trình (7) cho $\cos^2x$ ta được :

$2\tan^2x-2\tan x-2\left(1+\tan^2x\right)+4=0\Leftrightarrow\tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

8. $\sin^2x+\sin 2x-2\cos^2x=\frac{1}{2}\quad(8)$

$\Leftrightarrow\sin^2x+2\sin x.\cos x-2\cos^2x=\frac{1}{2}\left(\sin^2x+\cos^2x\right)$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin^2x+2\sin x.\cos x-\frac{5}{2}\cos^2x=0$

Xét $\cos x=0$ thay vào phương trình ta được $\sin x=0$ (vô lý)

Xét $\cos x \neq 0$ chia cả 2 vế phương trình (8) cho $\cos^2 x$ ta được;

$$\frac{1}{2}\tan^2 x + 2\tan x - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-5) + k\pi \end{array}\right.$$

Bài 02.

Giải các phương trình sau:

1. $2\sin^3 x = \cos x$

2. $3\sin^3 x + 2\sin^2 x\cos x = \sin x\cos^2 x$

3. $6\sin x + 2\cos^3 x = 5\sin 2x\cos x$

4. $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0$

5. $3\cos^4 x - 4\sin^2 x.\cos^2 x + \sin^4 x = 0$

6. $\left(\sin x - \sin^2 x\right)\left(\sin x + 2\cos x\right) = \sqrt{3}\left(1 + \sin x\right)\left(1 - \sin x\right)^2$

7. $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin x + \cos x$

8. $6\sin x - 2\cos^3 x = \dfrac{5\sin 4x.\cos x}{2\cos 2x}$.

Lời giải

1. $2\sin^3 x = \cos x$

Trường hợp 1: Xét $\cos x = 0 \Rightarrow \sin x \neq 0$

Thay $\cos x = 0$ vào $(1) \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2\sin^3 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ (mâu thuẫn)

Trường hợp 2: Xét $\cos x \neq 0$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2.\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 2.\tan^3 x = 1 + \tan^2 x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy $S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

2. $3\sin^3 x + 2\sin^2 x\cos x = \sin x\cos^2 x$

Trường hợp 1: Xét $\cos x = 0 \Rightarrow \sin x \neq 0$

Thay $\cos x = 0$ vào $(2) \Rightarrow (2) \Leftrightarrow 3\sin^3 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ (mâu thuẫn)

Trường hợp 2: Xét $\cos x \neq 0$

$$\Rightarrow 3.\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + 2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^3 x + 2\tan^2 x - \tan x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 0 \\ \tan x = -1 \\ \tan x = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\frac{1}{3} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ (tmđk).}$$

3. $6\sin x + 2\cos^3 x = 5\sin 2x\cos x$

Trường hợp 1: Xét $\cos x = 0 \Rightarrow \sin x \neq 0$

Thay $\cos x = 0$ vào $(3) \Rightarrow (3) \Leftrightarrow 6\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ (mâu thuẫn)

Trường hợp 2: Xét $\cos x \neq 0$

$\Rightarrow (3) \Leftrightarrow 6\sin x + 2\cos^3 x = 10\sin x\cos^2 x$

$\Rightarrow \dfrac{6\sin x}{\cos^3 x} + 2 = 10.\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\Leftrightarrow 6.\tan x\left(1+\tan^2 x\right)+2 = 10\tan x \Leftrightarrow 6\tan^3 x - 4\tan x - 2 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy $S = \left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

4. $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0$

Trường hợp 1: Xét $\cos x = 0 \Rightarrow \sin x \neq 0$

Thay $\cos x = 0$ vào $(4) \Rightarrow (4) \Leftrightarrow \sin x - 4\sin^3 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(1-4\sin^2 x\right) = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \sin x = \pm\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Trường hợp 2: Xét $\cos x \neq 0$

$\Rightarrow (4) \Leftrightarrow \dfrac{\sin x}{\cos^3 x} - 4\dfrac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x} = 0$

$\Leftrightarrow \tan x\left(1+\tan^2 x\right) - 4\tan^3 x + \left(1+\tan^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow -3\tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy $S = \left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi, \pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

5. $3\cos^4 x - 4\sin^2 x.\cos^2 x + \sin^4 x = 0$

Trường hợp 1: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$, khi đó $\sin^2 x = 1$.

Thay $\cos x = 0,\ \sin^2 x = 1$ vào phương trình (1) ta được: $1 = 0$ (Vô lý).

Vậy $x = \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ không là nghiệm của phương trình (1).

Trường hợp 2: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)\ (*)$.

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{3\cos^4 x - 4\sin^2 x.\cos^2 x + \sin^4 x}{\cos^4 x} = 0$

$\Leftrightarrow 3 - 4.\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^4 x}{\cos^4 x} = 0$

$\Leftrightarrow \tan^4 x - 4\tan^2 x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\tan^2 x\right)^2 - 4\tan^2 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan^2 x = 1\\ \tan^2 x = 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = -1\\ \tan x = \sqrt{3}\\ \tan x = -\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{3}+k\pi\\ x = -\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)\ \text{(thoả *)}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\pm\frac{\pi}{4}+k\pi,\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

6. $\left(\sin x-\sin^2 x\right)\left(\sin x+2\cos x\right)=\sqrt{3}\left(1+\sin x\right)\left(1-\sin x\right)^2$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(1-\sin x\right)\left(\sin x+2\cos x\right)-\sqrt{3}\left(1+\sin x\right)\left(1-\sin x\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\sin x\right)\left[\sin^2 x+2\sin x.\cos x-\sqrt{3}\left(1-\sin^2 x\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\sin x\right)\left[\sin x.\left(\sin x+2\cos x\right)-\sqrt{3}\left(1+\sin x\right)\left(1-\sin x\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\sin x\right)\left(\sin^2 x+2\sin x.\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-\sin x=0\\ \sin^2 x+2\sin x.\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin^2 x+2\sin x.\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)\\ \sin^2 x+2\sin x.\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x=0\ \left(2\right)\end{array}\right.$$

Giải phương trình $\left(2\right)$:

Trường hợp 1: $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$, khi đó $\sin^2 x=1$.

Thay $\cos x=0,\ \sin^2 x=1$ vào phương trình $\left(2\right)$ ta được: $1=0$ (Vô lý).

Vậy $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ không là nghiệm của phương trình $\left(2\right)$.

Trường hợp 2: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)\ \left(*\right)$.

$$\left(1\right)\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x+2\sin x.\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x}{\cos^2 x}=0$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x+2\tan x-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-1+\sqrt{1+\sqrt{3}}=\alpha\\ \tan x=-1-\sqrt{1+\sqrt{3}}=\beta\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\arctan\alpha+k\pi\\ x=\arctan\beta+k\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)\ \text{(thoả *)}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\arctan\alpha+k\pi\\ x=\arctan\beta+k\pi\end{array}\right.,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

7. $\sin^3 x-\cos^3 x=\sin x+\cos x$

Trường hợp 1: $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$. Khi đó $\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-1\end{array}\right.$.

Với $\sin x=1$: Thay $\sin x=1,\ \cos x=0$ vào phương trình $\left(3\right)$, ta được $1=1$ (luôn đúng).

Với $\sin x=-1$: Thay $\sin x=-1,\ \cos x=0$ vào phương trình $\left(3\right)$, ta được $-1=-1$ (luôn đúng).

Vậy $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ là nghiệm của phương trình $\left(3\right)$.

Trường hợp 2: $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

$\left(3\right) \Leftrightarrow \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\cos^3 x} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x}$

$\Leftrightarrow \tan^3 x - 1 = \frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow \tan^3 x - 1 = \tan x\left(1 + \tan^2 x\right) + 1 + \tan^2 x$

$\Leftrightarrow \tan^3 x - 1 = \tan x + \tan^3 x + 1 + \tan^2 x \Leftrightarrow \tan^2 x + \tan x + 2 = 0$: Phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

8. $6\sin x - 2\cos^3 x = \frac{5\sin 4x.\cos x}{2\cos 2x}$

Điều kiện xác định: $\cos 2x \ne 0 \Leftrightarrow 2x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi\ \left(k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\ \left(k \in \mathbb{Z}\right)\ \left(**\right)$.

$\left(4\right) \Leftrightarrow 6\sin x - 2\cos^3 x = \frac{5.2.\sin 2x.\cos 2x.\cos x}{2\cos 2x}$

$\Leftrightarrow 6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x.\cos x \Leftrightarrow 6\sin x - 2\cos^3 x = 10\sin x.\cos^2 x\ \left(5\right)$

Trường hợp 1: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$. Khi đó $\left[\begin{array}{l}\sin x = 1\\ \sin x = -1\end{array}\right.$.

Với $\sin x = 1$: Thay $\sin x = 1,\ \cos x = 0$ vào phương trình $\left(5\right)$, ta được $6 = 0$ (vô lý).

Với $\sin x = -1$: Thay $\sin x = -1,\ \cos x = 0$ vào phương trình $\left(5\right)$, ta được $-6 = 0$ (vô lý).

Vậy $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$ không là nghiệm của phương trình $\left(4\right)$.

Trường hợp 2: $\cos x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \left(k \in \mathbb{Z}\right)\ \left(*\right)$.

$\left(5\right) \Leftrightarrow \frac{6\sin x - 2\cos^3 x}{\cos^3 x} = \frac{10\sin x.\cos^2 x}{\cos^3 x}$

$\Leftrightarrow 6.\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos^2 x} - 2 = 10.\frac{\sin x}{\cos x}$

$\Leftrightarrow 6\tan x\left(1 + \tan^2 x\right) - 2 = 10\tan x$

$\Leftrightarrow 6\tan^3 x + 6\tan x - 10\tan x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 6\tan^3 x - 4\tan x - 2 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ \left(k \in \mathbb{Z}\right)$ (thoả $*$).

So với điều kiện ($**$), ta thấy không thỏa mãn.

Vậy phương trình vô nghiệm.

------------------ HẾT------------------

§5. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG

I. DẠNG CƠ BẢN.

Dạng tổng quát:

$$\boxed{a\left(\sin x \pm \cos x\right) + b\sin x\cos x + c = 0} \quad \forall a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

Phương pháp giải:

Đặt $t = \sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$, do đó $|t| = \left|\sqrt{2}\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)\right| \le \sqrt{2}$

- Với $t = \sin x + \cos x$, khi đó $t^2 = 1 + 2\sin x.\cos x \Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.
- Với $t = \sin x - \cos x$, khi đó $t^2 = 1 - 2\sin x.\cos x \Rightarrow \sin x.\cos x = \frac{1 - t^2}{2}$.

Lưu ý: khi đặt $t = |\sin x \pm \cos x|$ thì điều kiện là $|t| \le \sqrt{2}$

Ví dụ.

Giải phương trình sau:

$$2\left(\sin x + \cos x\right) + 6\sin x\cos x = 2 \quad (1)$$

Lời giải

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, do đó $|t| = \left|\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \le \sqrt{2}$.

$t = \sin x + \cos x$, khi đó $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x \Rightarrow 6\sin x\cos x = 3\left(t^2 - 1\right)$.

$$(1) \Leftrightarrow 2t + 3\left(t^2 - 1\right) = 2 \Leftrightarrow 3t^2 + 2t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{-5}{3} \end{array}\right.$$

Kiểm tra điều kiện ta được $t = 1$. Khi đó :

$$\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right..$$

II. BÀI TẬP.

Bài 01.

Giải các phương trình sau:

1. $2\sin 2x - 3\sqrt{3}\left(\sin x + \cos x\right) + 5 = 0$.

2. $2\left(\sin x + \cos x\right) + 6\sin x\cos x - 2 = 0$.

3. $2\sqrt{2}\left(\sin x - \cos x\right) - 2\sin 2x = 1$.

4. $\sin x + \cos x - 4\sin x\cos x - 1 = 0$.

5. $\sin x\cos x - \sqrt{2}\left(\sin x + \cos x\right) + 1 = 0$.

6. $\sin x.\cos x = 6\left(\sin x - \cos x\right) - 1$.

7. $\sin x - \cos x = 2\sqrt{6}\sin x.\cos x$.

8. $2\sqrt{2}\left(\sin x - \cos x\right) = 3 - \sin 2x$.

9. $2\sin 2x + 3\sqrt{3}\left(\sin x + \cos x\right) + 5 = 0$.

10. $\left(1 - \sqrt{2}\right)\left(1 + \sin x - \cos x\right) = \sin 2$.

Lời giải

1. $2\sin 2x-3\sqrt{3}\left(\sin x+\cos x\right)+5=0$.

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\begin{cases}t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\\ \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}\end{cases}$.

Ta có $4\left(\frac{t^2-1}{2}\right)-3\sqrt{3}t+5=0 \Leftrightarrow 2t^2-3\sqrt{3}t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{3}\\ t=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$

Do đó $\left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+\arcsin\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)+k2\pi\\ x=\frac{3\pi}{4}-\arcsin\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+\arcsin\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)+k2\pi\\ x=\frac{3\pi}{4}-\arcsin\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

2. $2\left(\sin x+\cos x\right)+6\sin x\cos x-2=0$.

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\begin{cases}t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\\ \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}\end{cases}$.

Ta có $6\left(\frac{t^2-1}{2}\right)+2t-2=0 \Leftrightarrow 3t^2+2t-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\frac{5}{3}(l)\\ t=1(n)\end{array}\right.$.

Do đó $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

3. $2\sqrt{2}\left(\sin x-\cos x\right)-2\sin 2x=1$.

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\begin{cases}t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\\ \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}\end{cases}$.

Ta có $-4\left(\frac{1-t^2}{2}\right)+2\sqrt{2}t-1=0 \Leftrightarrow 2t^2+2\sqrt{2}t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ t=\frac{-3\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$.

Do đó

$$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\x-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+k2\pi\\x=\frac{17\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

4. $\sin x+\cos x-4\sin x\cos x-1=0$.

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\begin{cases}t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\\\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}\end{cases}$.

Ta có $-4\left(\frac{t^2-1}{2}\right)+t-1=0\Leftrightarrow-2t^2+t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\frac{1}{2}\\t=1\end{array}\right.$.

Do đó $\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\\\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\\\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\\x+\frac{\pi}{4}=\arcsin\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+k2\pi\\x+\frac{\pi}{4}=\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\x=-\frac{\pi}{4}+\arcsin\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+k2\pi\\x=\frac{3\pi}{4}-\arcsin\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

5. $\sin x\cos x-\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)+1=0$.

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\begin{cases}t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\\\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}\end{cases}$.

Ta có $\frac{t^2-1}{2}-\sqrt{2}t+1=0\Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1+\sqrt{2}\left(n\right)\\t=-1-\sqrt{2}\left(l\right)\end{array}\right.$.

Do đó

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1+\sqrt{2}\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{2}+k2\pi\\x+\frac{\pi}{4}=\pi-\arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{2}+k2\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+\arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{2}+k2\pi\\x=\frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{2}+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

6. $\sin x.\cos x=6\left(\sin x-\cos x\right)-1\quad\left(1\right)$

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\begin{cases}t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\\\sin x.\cos x=\frac{1-t^2}{2}\end{cases}$

Thay vào $\left(1\right)$ ta có được: $\frac{1-t^2}{2}=6t-1\Leftrightarrow t^2+12t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-6+\sqrt{39}\\t=-6-\sqrt{39}\notin\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\end{array}\right.$

$*\,t=-6+\sqrt{39}\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-6+\sqrt{39}\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{78}-6\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=\arcsin\left(\frac{\sqrt{78}-6\sqrt{2}}{2}\right)+k2\pi\\x-\frac{\pi}{4}=\pi-\arcsin\left(\frac{\sqrt{78}-6\sqrt{2}}{2}\right)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\arcsin\left(\frac{\sqrt{78}-6\sqrt{2}}{2}\right)+k2\pi\\x=\frac{5\pi}{4}-\arcsin\left(\frac{\sqrt{78}-6\sqrt{2}}{2}\right)+k2\pi\end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

7. $\sin x-\cos x=2\sqrt{6}\sin x.\cos x\quad\left(1\right)$

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\begin{cases}t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\\\sin x.\cos x=\frac{1-t^2}{2}\end{cases}$

Thay vào $\left(1\right)$ ta có được: $t=2\sqrt{6}.\frac{1-t^2}{2}\Leftrightarrow\sqrt{6}t^2+t-\sqrt{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\sqrt{6}}{3}\\t=-\frac{\sqrt{6}}{2}\end{array}\right.$

$*\,t=\frac{\sqrt{6}}{3}\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$$\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+k2\pi\\x-\frac{\pi}{4}=\pi-\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+k2\pi\\x=\frac{5\pi}{4}-\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+k2\pi\end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

$*\,t=-\frac{\sqrt{6}}{2}\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{4\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{12}+k2\pi \\ x=\dfrac{19\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right. ,\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

8. $2\sqrt{2}\left(\sin x-\cos x\right)=3-\sin 2x \quad (1)$

$(1)\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\left(\sin x-\cos x\right)=3-2\sin x\cos x \quad (2)$

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\Rightarrow \begin{cases} t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \\ \sin x.\cos x=\dfrac{1-t^2}{2} \end{cases}$

Thay vào (2) ta có được: $2\sqrt{2}.t=3-2\dfrac{1-t^2}{2}\Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}t+2=0\Leftrightarrow t=\sqrt{2}$

$t=\sqrt{2}\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\Leftrightarrow \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi \ ,\left(k\in\mathbb{Z}\right).$

9. $2\sin 2x+3\sqrt{3}\left(\sin x+\cos x\right)+5=0 \quad (1)$

$(1)\Leftrightarrow 4\sin x.\cos x+3\sqrt{3}\left(\sin x+\cos x\right)+5=0 \quad (2)$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\Rightarrow \begin{cases} t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \\ \sin x.\cos x=\dfrac{t^2-1}{2} \end{cases}$

Thay vào (2) ta được: $4.\dfrac{t^2-1}{2}+3\sqrt{3}.t+5=0\Leftrightarrow 2t^2+3\sqrt{3}t+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ t=-\sqrt{3}\notin\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \end{array}\right.$

$*\, t=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{4}=\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)+k2\pi \\ x+\dfrac{\pi}{4}=\pi-\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)+k2\pi \\ x=\dfrac{3\pi}{4}-\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)+k2\pi \end{array}\right. ,\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

10. $\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sin x-\cos x\right)=\sin 2x \quad (1)$

$(1)\Leftrightarrow \left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sin x-\cos x\right)=2\sin x.\cos x \quad (2)$

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\Rightarrow \begin{cases} t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \\ \sin x.\cos x=\dfrac{1-t^2}{2} \end{cases}$

Thay vào (2) ta được: $\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+t\right)=2\dfrac{1-t^2}{2}\Leftrightarrow t^2+\left(1-\sqrt{2}\right)t-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\sqrt{2} \end{array}\right.$

$* \; t=-1 \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$

$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{4}=\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right., \left(k\in\mathbb{Z}\right).$

$* \; t=\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi \;, \left(k\in\mathbb{Z}\right).$

------------------ HẾT------------------

§6. CÁC LOẠI PHƯƠNG TRÌNH KHÁC

I. BIẾN ĐỔI TÍCH THÀNH TỔNG.

Phương pháp giải:

Dùng công thức biến đổi tích thành tổng, đặt nhân tử chung đưa về phương trình tích

1.1. Ví dụ minh họa.

Ví dụ.

Giải phương trình sau:

$$\sin x.\sin 7x = \sin 3x.\sin 5x$$

Lời giải

$\sin x.\sin 7x = \sin 3x.\sin 5x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 8x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x)$

$\Leftrightarrow \cos 6x = \cos 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x = 2x + k2\pi \\ 6x = -2x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = k2\pi \\ 8x = k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{k\pi}{4} \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $x = \frac{k\pi}{2}; x = \frac{k\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z})$.

1.2. Bài tập rèn luyện.

Bài tập.

Giải các phương trình sau:

1. $\sin 5x.\cos 3x = \sin 9x.\cos 7x$.
2. $\cos x.\cos 3x - \sin 2x.\sin 6x - \sin 4x.\sin 6x = 0$.
3. $\sin 4x.\sin 5x + \sin 4x.\sin 3x - \sin 2x.\sin x = 0$.
4. $2\cos x.\cos 2x.\cos 3x - 7 = 7\cos 2x$.

Lời giải

1. $\sin 5x.\cos 3x = \sin 9x.\cos 7x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 8x) = \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 16x)$

$\Leftrightarrow \sin 16x = \sin 8x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 16x = 8x + k2\pi \\ 16x = \pi - 8x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x = k2\pi \\ 24x = \pi + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{12} \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $x = \frac{k\pi}{4}; x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{12}, (k \in \mathbb{Z})$.

2. $\cos x.\cos 3x - \sin 2x.\sin 6x - \sin 4x.\sin 6x = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) - \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x) - \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 10x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 4x + \cos 2x - \cos 4x + \cos 8x - \cos 2x + \cos 10x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 10x + \cos 8x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos 9x.\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 9x = 0\\ \cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}9x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi\end{array}\right.,\left(k \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{9}\\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi\end{array}\right.,\left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{9}; x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

3. $\sin 4x.\sin 5x + \sin 4x.\sin 3x - \sin 2x.\sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cos x - \cos 9x\right) + \frac{1}{2}\left(\cos x - \cos 7x\right) - \frac{1}{2}\left(\cos x - \cos 3x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \cos 9x + \cos x - \cos 7x - \cos x + \cos 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \cos 9x - \cos 7x + \cos 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos 3x + \cos x\right) - \left(\cos 9x + \cos 7x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x\cos x - 2\cos 8x\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(\cos 2x - \cos 8x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos 2x - \cos 8x = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos 8x = \cos 2x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ 8x = 2x + k2\pi\\ 8x = -2x + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ 6x = k2\pi\\ 10x = k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \frac{k\pi}{3}\\ x = \frac{k\pi}{5}\end{array}\right.,\left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \frac{k\pi}{3}; x = \frac{k\pi}{5}$,$\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

4. $2\cos x.\cos 2x.\cos 3x - 7 = 7\cos 2x$

$$\Leftrightarrow \left(\cos 4x + \cos 2x\right).\cos 2x - 7 = 7\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos^2 2x - 1 + \cos 2x\right).\cos 2x - 7 = 7\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^3 2x + \cos^2 2x - \cos 2x - 7 = 7\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^3 2x + \cos^2 2x - 8\cos 2x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos 2x + 1\right)\left(2\cos^2 2x - \cos 2x - 7\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x + 1 = 0\\ 2\cos^2 2x - \cos 2x - 7 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = -1\\ \cos 2x = \frac{1+\sqrt{57}}{4}\ \left(loai\right)\\ \cos 2x = \frac{1-\sqrt{57}}{4}\ \left(loai\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\left(k \in \mathbb{Z}\right).$$

Vậy phương trình có một họ nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

II. BIẾN ĐỔI TỔNG THÀNH TÍCH.

Phương pháp giải:

Dùng công thức biến đổi tổng thành tích, đặt nhân tử chung đưa về phương trình tích

2.1. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 01.

Giải phương trình sau:

$$\sin 5x+\sin 3x=\sin 4x$$

Lời giải

$\sin 5x+\sin 3x=\sin 4x$

$\Leftrightarrow \sin 5x+\sin 3x-\sin 4x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin 4x\cos x-\sin 4x=0$

$$\Leftrightarrow \sin 4x\left(2\cos x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 4x=0\\ 2\cos x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=k\pi\ ,\left(k\in\mathbb{Z}\right)\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{4}\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy $S=\left\{\dfrac{k\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ví dụ 02.

Giải phương trình sau:

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$$

Lời giải

$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x+\sin 3x\right)+\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x+\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow \sin 2x\left(2\cos x+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ 2\cos x+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=k\pi\ ,\left(k\in\mathbb{Z}\right)\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{2}\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy $S=\left\{\dfrac{k\pi}{2};\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

2.2. Bài tập rèn luyện.

Bài tập.

Giải các phương trình sau:

1. $\cos x+\cos 3x+2\cos 5x=0$

2. $\cos 22x+3\cos 18x+3\cos 14x+\cos 10x=0$

3. $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$

4. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$

5. $1+\sin x+\cos 3x=\cos x+\sin 2x+\cos 2x$.

6. $\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+\sin^4 x=\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x+\cos^4 x$

Lời giải

1. $\cos x+\cos 3x+2\cos 5x=0$

$\Leftrightarrow (\cos 5x + \cos x) + (\cos 3x + \cos 5x) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 3x.\cos 2x + 2\cos 4x.\cos x = 0$

$\Leftrightarrow (4\cos^3 x - 3\cos x)\cos 2x + \cos 4x.\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left[(4\cos^2 x - 3)\cos 2x + \cos 4x\right] = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left[(2\cos 2x - 1)\cos 2x + 2\cos^2 2x - 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left[4\cos^2 2x - \cos 2x - 1\right] = 0$

Trường Hợp 1: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Trường Hợp 2: $4\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{1}{2}.\arccos\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}\right) + k\pi \\ x = \pm\dfrac{1}{2}.\arccos\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{8}\right) + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy $S = \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \pm\dfrac{1}{2}.\arccos\left(\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{8}\right) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. $\cos 22x + 3\cos 18x + 3\cos 14x + \cos 10x = 0$

$\Leftrightarrow (\cos 22x + \cos 10x) + 3(\cos 18x + \cos 14x) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 16x.\cos 6x + 6\cos 16x.\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 16x(\cos 6x + 3\cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 16x(4\cos^3 2x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 16x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{32} + \dfrac{k\pi}{16} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy $S = \left\{\dfrac{\pi}{32} + \dfrac{k\pi}{16}; \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3. $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

$\Leftrightarrow 1 + \cos x + 2\cos^2 x - 1 + 4\cos^3 x - 3\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x + 2\cos^2 x - 2\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(2\cos^2 x + \cos x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x = 0 \\ 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pi + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi; x = \pi + k2\pi; x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

4. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x+\cos 4x\right)+\left(\cos 2x+\cos 3x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{5x}{2}\cos\left(-\frac{3x}{2}\right)+2\cos\frac{5x}{2}\cos\left(-\frac{x}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\cos\frac{5x}{2}=0\\ \cos\frac{3x}{2}=-\cos\frac{x}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\frac{5x}{2}=0\\ \cos\frac{3x}{2}=\cos\left(\pi-\frac{x}{2}\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{5x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \frac{3x}{2}=\pi-\frac{x}{2}+k2\pi\\ \frac{3x}{2}=-\pi+\frac{x}{2}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{5}+k\frac{2\pi}{5}\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=-\pi+k2\pi\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x=\frac{\pi}{5}+k\frac{2\pi}{5};x=\frac{\pi}{2}+k\pi;x=-\pi+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

5. $1+\sin x+\cos 3x=\cos x+\sin 2x+\cos 2x$

$$\Leftrightarrow \left(1-\cos 2x\right)+\left(\sin x-\sin 2x\right)+\left(\cos 3x-\cos x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\left(\sin x-\sin 2x\right)-2\sin x\sin 2x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\sin x-\sin 2x\right)+\left(\sin x-\sin 2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x-\sin 2x\right)\left(2\sin x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\sin 2x\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2x+k2\pi\\ x=\pi-2x+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-k2\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\\ x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x=-k2\pi;x=\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3};x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi;x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

6. $\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+\sin^4 x=\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x+\cos^4 x$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x-\cos x\right)+\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)+\left(\sin^3 x-\cos^3 x\right)+\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x-\cos x\right)+\left(\sin x-\cos x\right)\left(\sin x+\cos x\right)$$

$$+\left(\sin x-\cos x\right)\left(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x\right)+\left(\sin x-\cos x\right)\left(\sin x+\cos x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x-\cos x\right)\left(1+\sin x+\cos x+\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x+\sin x+\cos x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-\cos x=0\ (1)\\ 2\sin x+\sin x\cos x+2\cos x+2=0\ (2)\end{array}\right.$$

+ Giải $(1)\Leftrightarrow \sin x=\cos x\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2}-x=x+k2\pi \\ \dfrac{\pi}{2}-x=-x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}-k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

+ Giải $\left(2\right)\Leftrightarrow 2\left(\sin x+\cos x\right)+\sin x\cos x+2=0$

Đặt $\sin x+\cos x=t\ \left(\left|t\right|\le\sqrt{2}\right)\Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$. Khi đó phương trình trên trở thành:

$$t^2+4t+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\ \left(tm\right) \\ t=-3\ \left(loai\right) \end{array}\right.$$

Với $t=-1\Rightarrow \sin x+\cos x=-1\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x=\dfrac{\pi}{4}-k\pi; x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi; x=\pi+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

III. TỔNG HỢP CÁC PHƯƠNG PHÁP.

Phương pháp giải:

Sử dụng các công thức lượng giác (công thức cộng, công thức nhân đôi, công thức hạ bậc, công thức biến đổi tích thành tổng, biến đổi tổng thành tích) để đưa về dạng phương trình lượng giác cơ bản

3.1. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 01.

Giải phương trình sau:

$$\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\frac{3}{2}$$

Lời giải

$\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 1-\cos 2x+1-\cos 4x+1-\cos 6x=3$.

$\Leftrightarrow \cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=0$.

$\Leftrightarrow 2\cos 2x\cos 4x+\cos 4x=0$.

$\Leftrightarrow \cos 4x\left(2\cos 2x+1\right)=0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x=0 \\ 2\cos 2x+1=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \\ \cos 2x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{4} \\ 2x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{4} \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Ví dụ 02.

Giải phương trình sau:

$$\sin^2 3x+\sin^2 4x=\sin^2 5x+\sin^2 6x\quad\left(1\right)$$

Lời giải

$\sin^2 3x+\sin^2 4x=\sin^2 5x+\sin^2 6x$

$\Leftrightarrow 1-\cos 6x+1-\cos 8x=1-\cos 10x+1-\cos 12x$.

$\Leftrightarrow \cos 6x+\cos 8x=\cos 10x+\cos 12x$.

$\Leftrightarrow \cos 7x\cos x=\cos 11x\cos x$.

$\Leftrightarrow \cos x\left(\cos 7x-\cos 11x\right)=0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos 11x=\cos 7x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ 11x=7x+k2\pi\\ 11x=-7x+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{k\pi}{2}\\ x=\dfrac{k\pi}{9}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{2}\\ x=\dfrac{k\pi}{9}\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

3.2. Bài tập rèn luyện.

Bài tập.

Giải các phương trình sau:

1. $\sin^2 2x+\sin^2 4x=\sin^2 6x$.

2. $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2$.

3. $\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 5x=\dfrac{3}{2}$.

4. $8\cos^4 x=1+\cos 4x$.

5. $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos 4x$.

6. $3\cos^2 2x-3\sin^2 x+\cos^2 x=0$.

Lời giải

1 $\sin^2 2x+\sin^2 4x=\sin^2 6x \quad (1)$.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow 1-\cos 4x+1-\cos 8x=1-\cos 12x$.

$\Leftrightarrow \cos 4x+\cos 8x=1+\cos 12x$.

$\Leftrightarrow 2\cos 6x\cos 2x=2\cos^2 6x$.

$\Leftrightarrow \cos 6x\left(\cos 6x-\cos 2x\right)=0$.

$\Leftrightarrow \cos 6x\left(-2\sin 4x\sin 2x\right)=0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 6x=0\\ -2\sin 4x\sin 2x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 6x=0\\ \sin 4x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}6x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ 4x=k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{6}\\ x=k\dfrac{\pi}{4}\end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

2. $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2$.

PT $\Leftrightarrow \cos 2x+\cos 4x+\cos 6x+\cos 8x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 3x\cos x+2\cos 7x\cos x=0$.

$\Leftrightarrow 2\cos x\left(\cos 3x+\cos 7x\right)=0$.

$\Leftrightarrow \cos x\cos 5x\cos 2x=0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos 5x=0\\ \cos 2x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ 5x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ 2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{10}+k\dfrac{\pi}{5}\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

3. $\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 5x=\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{1+\cos 6x}{2}+\frac{1+\cos 8x}{2}+\frac{1+\cos 10x}{2}=\frac{3}{2}$.

$\Leftrightarrow \cos 6x+\cos 8x+\cos 10x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 8x\cos 2x+\cos 8x=0$

$\Leftrightarrow \cos 8x\left(1+\cos 2x\right)=0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 8x=0\\ 1+\cos 2x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}8x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \cos 2x=-1\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{8}\\ 2x=\pi+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{8}\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

4. $8\cos^4 x=1+\cos 4x$

$\Leftrightarrow 8\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=2\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x+1=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x=\cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

5. $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos 4x$

$\Leftrightarrow \left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-2\sin^2 2x$

$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-2\sin^2 2x \Leftrightarrow \sin^2 2x=0 \Leftrightarrow \sin 2x=0 \Leftrightarrow 2x=k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

6. $3\cos^2 2x-3\sin^2 x+\cos^2 x=0$.

$\Leftrightarrow 3\left(2\sin^2 x-1\right)^2-4\sin^2 x+1=0$.

$\Leftrightarrow 12\sin^4 x-16\sin^2 x+4=0$.

Đặt $t=\sin^2 x,\ t\in\left[0,1\right]$. Phương trình trở thành $12t^2-16t+4=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\frac{1}{3}\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin^2 x=1\\ \sin^2 x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{1-\cos 2x}{2}=1\\ \frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=-1\\ \cos 2x=\frac{1}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\pi+k2\pi\\ 2x=\pm\arccos\frac{1}{3}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+k\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

IV. PHƯƠNG TRÌNH CÓ ĐIỀU KIỆN.

Phương pháp giải:
Sử dụng các công thức lượng giác đưa về phương trình lượng giác cơ bản và kết hợp điều kiện để tìm nghiệm của phương trình.

4.1. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 01.

Tìm tổng các nghiệm trong khoảng $\left(-\pi;\pi\right)$ của phương trình:

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Lời giải

$$\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}-2x\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}-2x+k2\pi\\3x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{3\pi}{4}+2x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{5}\\x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{5}\end{array}\right.(\mathrm{k}\in\mathbb{Z})$$

Trường hợp 1: $x=\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{5}(k\in\mathbb{Z})\in\left(-\pi;\pi\right)$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\frac{65}{24}<k<\frac{55}{24}\\k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow k\in\{-2;-1;0;1;2\}\Rightarrow S_1=5.\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{5}(-2-1+0+1+2)=\frac{5\pi}{12}$$

Trường hợp 2: $x=-\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{5}(k\in\mathbb{Z})\in\left(-\pi;\pi\right)$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\frac{55}{24}<k<\frac{65}{24}\\k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow k\in\{-2;-1;0;1;2\}\Rightarrow S_2=-\frac{5\pi}{12}$$

Vậy tổng các nghiệm trong khoảng $\left(-\pi;\pi\right)$. của phương trình: $S=S_1+S_2=0$

Ví dụ 02.

Tìm nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình

$$\sin^2 2x+\cos^2 5x=1$$

Lời giải

$$\sin^2 2x+\cos^2 5x=1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x=\sin^2 5x\Leftrightarrow 1-\cos 4x=1-\cos 10x\Leftrightarrow \cos 4x=\cos 10x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\frac{\pi}{3}\\x=k\frac{\pi}{7}\end{array}\right.\ \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Xét $x=k\frac{\pi}{3}>0\Rightarrow k>0$

Xét $x=k\frac{\pi}{7}>0\Rightarrow k>0$

Do $k\in\mathbb{Z}$ nên nghiệm dương nhỏ nhất $x=\frac{\pi}{7}$

Tương tự tìm được nghiệm âm lớn nhất $x=-\frac{\pi}{7}$

4.2. Bài tập rèn luyện.

Bài 01.

Tìm tổng các nghiệm trong khoảng $(-\pi;\pi)$ của phương trình:

$$\sin^2 2x=\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{8}\right)$$

Lời giải

$$\sin^2 2x=\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos4x}{2}=\frac{1+\cos\left(6x-\frac{\pi}{4}\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\cos4x=\cos\left(6x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi-4x)=\cos\left(6x-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\pi-4x=6x-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ \pi-4x=-6x+\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{5}\\ x=-\frac{3\pi}{8}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Trường hợp 1: $x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{5}(k\in\mathbb{Z})\in(-\pi;\pi)$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\frac{45}{8}<k<\frac{35}{8}\\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow k\in\{-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}\Rightarrow S_1=10.\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{5}(-5-4-3-...+3+4)=\pi$$

Trường hợp 2: $x=-\frac{3\pi}{8}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})\in(-\pi;\pi)$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\frac{5}{8}<k<\frac{11}{8}\\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow k\in\{0;1\}\Rightarrow S_2=\frac{\pi}{4}$$

Vậy tổng các nghiệm trong khoảng $(-\pi;\pi)$. của phương trình: $S=S_1+S_2=\frac{5\pi}{4}$

Bài 02.

Tìm nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình

$$(\sin x+\cos x)^2=2\cos^2 3x$$

Lời giải

$$(\sin x+\cos x)^2=2\cos^2 3x$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)^2=2\cos^2 3x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos^2 3x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1+\cos 6x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\cos 6x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{2}-2x=6x+k2\pi \\ \frac{\pi}{2}-2x=-6x+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{4} \\ x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Xét $x=x=\frac{\pi}{16}+k\frac{\pi}{4}>0 => k>-\frac{1}{4}$

Xét $x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}>0 => k>-\frac{1}{4}$

Do $k\in\mathbb{Z}$ nên nghiệm dương nhỏ nhất $x=\frac{\pi}{16}$

Tương tự tìm được nghiệm âm lớn nhất $x=-\frac{3\pi}{16}$

Bài 03.

Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình

1. $\cos\left[\pi\left(x^2+2x-\frac{1}{2}\right)\right]=\sin\left(\pi x^2\right)$, **2.** $\sin\left(\pi x^2\right)=\sin\left[\pi\left(x+1\right)^2\right]$.

Lời giải

1. $\cos\left[\pi\left(x^2+2x-\frac{1}{2}\right)\right]=\sin\left(\pi x^2\right)$

Ta có

$$\cos\left[\pi\left(x^2+2x-\frac{1}{2}\right)\right]=\sin\left(\pi x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left[\pi\left(x^2+2x-\frac{1}{2}\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\pi\left(x^2+2x-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-\pi x^2+k2\pi \\ \pi\left(x^2+2x-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}+\pi x^2+k2\pi\end{array}\right., \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2+2x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-x^2+2k \\ x^2+2x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+x^2+2k\end{array}\right., \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}+k & (1) \\ x=k & (2)\end{array}\right., \quad k\in\mathbb{Z}$$

+) (1) có nghiệm khi $\frac{3}{4}+k\geq 0 \Leftrightarrow k\geq -\frac{3}{4}, k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{0;1;2;3...\}$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{3}{4}+k} \\ x+\frac{1}{2}=-\sqrt{\frac{3}{4}+k} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}+k} \\ x=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{4}+k} \end{array}\right., \ k\in\{0;1;2;3...\}$

Suy ra nghiệm dương nhỏ nhất của (1) là $x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

+) (2) có nghiệm dương nhỏ nhất là $x=1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm dương nhỏ nhất là $x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

2. $\sin\left(\pi x^2\right)=\sin\left[\pi(x+1)^2\right]$

Ta có

$\sin\left(\pi x^2\right)=\sin\left[\pi(x+1)^2\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \pi(x+1)^2=\pi x^2+k2\pi \\ \pi(x+1)^2=\pi-\pi x^2+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+1)^2=x^2+2k \\ (x+1)^2=1-x^2+2k \end{array}\right., k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-\frac{1}{2}+k & (1) \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+k & (2) \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

+) (1) có nghiệm dương nhỏ nhất là $x=\frac{1}{2}$.

+) (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{1}{4}+k\ge 0 \Leftrightarrow k\ge -\frac{1}{4}, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow k\in\{0;1;2;3....\}$

Khi đó $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1}{4}+k} \\ x+\frac{1}{2}=-\sqrt{\frac{1}{4}+k} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+k} \\ x=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+k} \end{array}\right., k\in\{0;1;2;3....\}$

$\Rightarrow (2)$ có nghiệm dương nhỏ nhất là $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm dương nhỏ nhất là $x=\frac{1}{2}$.

Bài 04.

Tính tổng các nghiệm nằm trong khoảng $(0;2\pi)$ của phương trình sau

$$\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x+\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x=2\sqrt{2}\sin 2x$$

Lời giải

Ta có

$\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x+\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x=2\sqrt{2}\sin 2x$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)+\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)=2\sqrt{2}\sin 2x$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)=\sqrt{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x=\sin\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=x+\dfrac{5\pi}{12}+k2\pi \\ 2x=\pi-x-\dfrac{5\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5\pi}{12}+k2\pi \\ x=\dfrac{7\pi}{36}+k\dfrac{2\pi}{3} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

+) $x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi$, $x\in(0;2\pi) \Rightarrow 0<\frac{5\pi}{12}+k2\pi<2\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{24}<k<\frac{19}{24}$, $k\in\mathbb{Z} \Rightarrow k=0 \Rightarrow x=\frac{5\pi}{12}$.

+) $x=\frac{7\pi}{36}+k\frac{2\pi}{3}$, $x\in(0;2\pi) \Rightarrow 0<\frac{7\pi}{36}+k\frac{2\pi}{3}<2\pi \Leftrightarrow -\frac{7}{12}<k<\frac{65}{24}$, $k\in\mathbb{Z} \Rightarrow k\in\{0;1;2\}$

$\Rightarrow x=\frac{7\pi}{36}; x=\frac{31\pi}{36}; x=\frac{55\pi}{36}$.

Suy ra phương trình đã cho có tập nghiệm nằm trong khoảng $(0;2\pi)$ là

$\left\{\frac{5\pi}{12};\frac{7\pi}{36};\frac{31\pi}{36};\frac{55\pi}{36}\right\}$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho nằm trong khoảng $(0;2\pi)$ là

$$\frac{5\pi}{12}+\frac{7\pi}{36}+\frac{31\pi}{36}+\frac{55\pi}{36}=3\pi.$$

Bài 05.

Tìm nghiệm trên khoảng $(-\pi,\pi)$ của phương trình:

$$2(\sin x+1)(\sin^2 2x-3\sin x+1)=\sin 4x.\cos x$$

Lời giải

$2(\sin x+1)(\sin^2 2x-3\sin x+1)=\sin 4x.\cos x$

$\Leftrightarrow 2(\sin x+1)(\sin^2 2x-3\sin x+1)=2\sin 2x.\cos 2x.\cos x$

$\Leftrightarrow 2(\sin x+1)(\sin^2 2x-3\sin x+1)=4\cos 2x.\sin x.\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 2(\sin x+1)(\sin^2 2x-3\sin x+1)=4\cos 2x.\sin x.(1-\sin x)(1+\sin x)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x+1=0 \\ \sin^2 2x-3\sin x+1=2\cos 2x.\sin x.(1-\sin x) \end{array}\right.$$

Trường hợp 1: $\sin x+1=0 \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{-\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Mà $x\in(-\pi,\pi) \Rightarrow x=\frac{-\pi}{2}$.

Trường hợp 2:

$\sin^2 2x-3\sin x+1=2\cos 2x.\sin x(1-\sin x)$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x - 3\sin x + 1 = (\sin 3x - \sin x)(1 - \sin x)$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x - 2\sin x + \cos^2 x = \sin 3x - \sin 3x.\sin x$

$\Leftrightarrow 1 - \cos 4x - 4\sin x + 1 + \cos 2x = 2\sin 3x - (\cos 2x - \cos 4x)$

$\Leftrightarrow \cos 4x - \cos 2x + \sin 3x - 1 + 2\sin x = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin 3x \sin x + \sin 3x - 1 + 2\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 3x(-2\sin x + 1) - 1 + 2\sin x = 0$

$$\Leftrightarrow (3\sin x - 4\sin^3 x - 1)(-2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

Mà $x \in (-\pi, \pi) \Rightarrow x \in \left\{\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

Vậy $x \in \left\{\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

Bài 06.

Giải các phương trình sau

1. $\cot 3x = \cot x$ **2.** $\cot 4x.\cot 7x = 1$

Lời giải

1. $\cot 3x = \cot x$

Điều kiện: $\begin{cases} \sin 3x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{k\pi}{3} \\ x \neq k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có:

$\cot 3x = \cot x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$

Kết hợp điều kiện thì phương trình có nghiệm là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

2. $\cot 4x.\cot 7x = 1$

Điều kiện: $\begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ \sin 7x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{k\pi}{4} \\ x \neq \frac{k\pi}{7} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có:

$\cot 4x.\cot 7x = 1 \Leftrightarrow \cot 4x = \tan 7x \Leftrightarrow \cot 4x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right)$

$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} - 7x + m\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{22} + \frac{m\pi}{11}, (m \in \mathbb{Z})$.

Giả sử $\frac{\pi}{22} + \frac{m\pi}{11} = \frac{k\pi}{4} \Leftrightarrow 2 + 4m = 11k$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 4t + 2 \\ 2 + 4m = 11(4t+2) \end{cases} (t \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4t + 2 \\ m = 11t + 5 \end{cases} (t \in \mathbb{Z})$$

Giả sử $\frac{\pi}{22} + \frac{m\pi}{11} = \frac{k\pi}{7} \Leftrightarrow 7 + 14m = 22k \Leftrightarrow 7 = 22k - 14m$ (phương trình vô nghiệm)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{\pi}{22} + \frac{m\pi}{11}, m \neq 11t + 5 \, (t \in \mathbb{Z})$.

Bài 07.

Giải phương trình lượng giác sau:

$$\frac{\sin x \cot 5x}{\cos 9x} = 1$$

Lời giải

+) Điều kiện $\begin{cases} \cos 9x \neq 0 \\ \sin 5x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 5x \neq l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{9} \\ x \neq \frac{l\pi}{5} \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}$.

+) Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương với

$\Leftrightarrow \sin x \cos 5x = \cos 9x \sin 5x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\sin(x - 5x) + \sin(x + 5x)\right] = \frac{1}{2}\left[\sin(5x - 9x) + \sin(5x + 9x)\right]$

$\Leftrightarrow \sin 6x - \sin 4x = \sin 14x - \sin 4x \Leftrightarrow \sin 14x = \sin 6x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 14x = 6x + m2\pi \\ 14x = \pi - 6x + m2\pi \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x = m2\pi \\ 20x = \pi + m2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{m\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{m\pi}{10} \end{array}\right., m \in \mathbb{Z}$.

+) Với $x = \frac{m\pi}{4}$:

$\frac{m\pi}{4} = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{9} \Leftrightarrow 9m = 2 + 4k \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 + 9t \\ 9m = 2 + 4k \end{cases} \Leftrightarrow 9m = 18 + 36t \Leftrightarrow m = 2 + 4t, t \in \mathbb{Z}$.

$\frac{m\pi}{4} = \frac{l\pi}{5} \Leftrightarrow 5m = 4l \Leftrightarrow \begin{cases} l = 5t \\ 5m = 20t \end{cases} \Leftrightarrow m = 4t, t \in \mathbb{Z}$.

Do đó phương trình có họ nghiệm $x = \frac{m\pi}{4}, m \neq 2 + 4t, m \neq 4t, t \in \mathbb{Z}$. Hay $x = \frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}, m \in \mathbb{Z}$

+) Với $x = \frac{\pi}{20} + \frac{m\pi}{10}$:

$\frac{\pi}{20} + \frac{m\pi}{10} = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{9} \Leftrightarrow \frac{m\pi}{10} = \frac{\pi}{180} + \frac{k\pi}{9} \Leftrightarrow 18m = 1 + 20k \Leftrightarrow 18m - 20k = 1$ (vô nghiệm).

$\frac{\pi}{20} + \frac{m\pi}{10} = \frac{l\pi}{5} \Leftrightarrow 1 + 2m = 4l \Leftrightarrow 1 = 4l - 2m$ (vô nghiệm).

Do đó phương trình có họ nghiệm $x = \frac{\pi}{20} + \frac{m\pi}{10}, m \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có hai họ nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+\frac{m\pi}{2}, x=\frac{\pi}{20}+\frac{m\pi}{10}, m\in\mathbb{Z}$.

Bài 08.

Giải phương trình:

$$\cos 3x\tan 4x=\sin 5x$$

Lời giải

+) Điều kiện $\cos 4x\neq 0\Leftrightarrow 4x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$.

+) Với điều kiện trên, phương trình đã cho $\Leftrightarrow\sin 4x\cos 3x=\sin 5x\cos 4x$

$\frac{1}{2}(\sin x+\sin 7x)=\frac{1}{2}(\sin x+\sin 9x)\Leftrightarrow\sin 9x=\sin 7x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}9x=7x+m2\pi\\9x=\pi-7x+m2\pi\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\pi\\x=\frac{\pi}{16}+\frac{m\pi}{8}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\pi\\x=\frac{\pi}{16}+\frac{m\pi}{8}\end{array}\right., m\in\mathbb{Z}$.

+) Với $x=m\pi$:

$m\pi=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\Leftrightarrow 8m=1+2k\Leftrightarrow 8m-2k=1$ (vô nghiệm).

Do đó họ nghiệm $x=m\pi, m\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn.

+) Với $x=\frac{\pi}{16}+\frac{m\pi}{8}$:

$\frac{\pi}{16}+\frac{m\pi}{8}\neq\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{m\pi}{8}\neq\frac{1}{16}+\frac{k\pi}{4}\Leftrightarrow 2m\neq 1+4k$ (luôn đúng, vì một vế là số chẵn, một vế là số lẻ). Do đó họ nghiệm $x=\frac{\pi}{16}+\frac{m\pi}{8}, m\in\mathbb{Z}$ thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có hai họ nghiệm $x=m\pi, x=\frac{\pi}{16}+\frac{m\pi}{8}, m\in\mathbb{Z}$.

Bài 09.

Giải phương trình:

$$\tan 2x\tan 3x\tan 7x=\tan 2x+\tan 3x+\tan 7x$$

Lời giải

+) Điều kiện $\begin{cases}\cos 2x\neq 0\\\cos 3x\neq 0\\\cos 7x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\3x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\7x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\\x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\\x\neq\frac{\pi}{14}+\frac{k\pi}{7}\end{cases}, k\in\mathbb{Z}$.

+) Phương trình đã cho $\Leftrightarrow\tan 2x(\tan 3x\tan 7x-1)=\tan 3x+\tan 7x$ (1)

Nếu $\tan 3x\tan 7x-1=0\Rightarrow\tan 3x+\tan 7x=0\Rightarrow\tan 3x+\frac{1}{\tan 3x}=0\Leftrightarrow\tan^2 3x+1=0$ (vô nghiệm). Do đó $\tan 3x\tan 7x-1\neq 0$. Khi đó

(1) $\Leftrightarrow\tan 2x=\frac{\tan 3x+\tan 7x}{\tan 3x\tan 7x-1}\Leftrightarrow\tan 2x=-\frac{\tan 3x+\tan 7x}{1-\tan 3x\tan 7x}\Leftrightarrow\tan 2x=-\tan 10x$

$\Leftrightarrow \tan 10x = \tan(-2x) \Leftrightarrow 10x = -2x + l\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{l\pi}{12}, l \in \mathbb{Z}$.

+) Xét họ nghiệm $x = \dfrac{l\pi}{12}, l \in \mathbb{Z}$. Ta có

$\dfrac{l\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \Leftrightarrow l = 3 + 6k \Leftrightarrow l = 3(1+2k)$

$\dfrac{l\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \Leftrightarrow l = 2 + 4k \Leftrightarrow l = 2(1+2k)$

$\dfrac{l\pi}{12} = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{k\pi}{7} \Leftrightarrow 7l = 6 + 12k \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 + 7t \\ 7l = 6 + 12k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 + 7t \\ 7l = 6 + 12(3 + 7t) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 + 7t \\ l = 6 + 12t \end{cases} \Rightarrow l = 6 + 12t, t \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có nghiệm, $x = \dfrac{l\pi}{12}, l \neq 3(1+2k), l \neq 2(1+2k), l \neq 6 + 12t, l, t \in \mathbb{Z}$.

Bài 10.

Giải phương trình:

$$\frac{4\cos 2x}{\sin 2x + 2\cos x} - \tan x = \tan x.\tan^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \dfrac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (,k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có: $\dfrac{4\cos 2x}{\sin 2x + 2\cos x} - \tan x = \tan x.\tan^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{4\cos 2x}{\sin 2x + 2\cos x} - \tan x = \tan x.\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4\cos 2x}{2\sin x.\cos x + 2\cos x} = \tan x.\left(1 + \dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{4\cos 2x}{2\cos x(\sin x + 1)} = \dfrac{\sin x}{\cos x}.\dfrac{2}{1 + \sin x}$

$\Rightarrow \cos 2x = \sin x$

$\Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2x + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3} \\ x = \dfrac{-\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$

Đối chiếu điều kiện thì phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi; x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \, (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 11.

Giải phương trình:

$$\frac{\cos 2x\left(2\cos 2x+1\right)}{\sin 3x}=\cot x$$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}\sin 3x\neq 0\\ \sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 3x\neq 0\Leftrightarrow x\neq \frac{k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$.

Ta có: $\frac{\cos 2x(2\cos 2x+1)}{\sin 3x}=\cot x\Leftrightarrow \frac{\cos 2x\left[2\left(1-2\sin^2 x\right)+1\right]}{3\sin x-4\sin^3 x}=\frac{\cos x}{\sin x}$

$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x\left(3-4\sin^2 x\right)}{\sin x\left(3-4\sin^2 x\right)}=\frac{\cos x}{\sin x}\Rightarrow \cos 2x=\cos x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=x+k2\pi\\ 2x=-x+k2\pi\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{k2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$

(Loại vì không thỏa mãn điều kiện)

Kết luận: Phương trình vô nghiệm.

Bài 12.

Giải các phương trình sau:

1. $\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}=\sqrt{3}$

2. $\cos 2x-\tan^2 x=\frac{\cos^2 x-\cos^3 x-1}{\cos^2 x}$.

3. $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin 2x}=\frac{2}{\sin 4x}$.

4. $\tan^4 x+1=\frac{\left(2-\sin^2 2x\right)\sin 3x}{\cos^4 x}$.

5. $\cos 3x\tan 5x=\sin 7x$.

6. $\frac{1}{\tan x+\cot 2x}=\frac{\sqrt{2}\left(\sin x-\cos x\right)}{\cot x-1}$.

Lời giải

1. $\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \frac{\sin 3x+\sin x+\sin 2x}{\cos 3x+\cos x+\cos 2x}=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \frac{2\sin 2x\cos x+\sin 2x}{2\cos 2x\cos x+\cos 2x}=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x\left(2\cos x+1\right)}{\cos 2x\left(2\cos x+1\right)}=\sqrt{3}$, ĐK: $\cos 2x\neq 0; 2\cos x+1\neq 0$

$\Leftrightarrow \tan 2x=\sqrt{3}\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ (thoả mãn ĐK).

2. $\cos 2x-\tan^2 x=\frac{\cos^2 x-\cos^3 x-1}{\cos^2 x}$ (ĐK: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi, K\in\mathbb{Z}$.).

$PT\Leftrightarrow \cos 2x-\tan^2 x=1-\cos x-\frac{1}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow \cos 2x-\tan^2 x=1-\cos x-\left(1+\tan^2 x\right)$

$\Leftrightarrow \cos 2x-\tan^2 x=1-\cos x-1-\tan^2 x$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right., K\in\mathbb{Z}$ (Thoả mãn điều kiện).

3. $\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin 2x}=\dfrac{2}{\sin 4x}$

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin 2x\neq 0\\ \sin 4x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\neq 0\\ 2\sin x\cos x\neq 0\\ 2\sin 2x\cos 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 4x\neq 0\Leftrightarrow 4x\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq\dfrac{k\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$.

$PT\Leftrightarrow \dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{2\sin x\cos x}=\dfrac{2}{2\sin x\cos x\cos 2x}$

$\Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{2\sin x}=\dfrac{1}{2\sin x\cos 2x}$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x+\cos 2x=1$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x=1-\cos 2x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x=2\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos 2x-\sin x\right)=0$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x-\sin x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

+) Xét $\sin x=-1\Rightarrow \cos x=0$ (Loại).

+) $\sin x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right., K\in\mathbb{Z}$.

Thử điều kiện

+) $\sin 4x=\sin 4\left(\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\right)=\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+k8\pi\right)=\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\neq 0$ (thoả mãn).

+) $\sin 4x=\sin 4\left(\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\right)=\sin\left(\dfrac{10\pi}{3}+k8\pi\right)=\sin\left(\dfrac{10\pi}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+3\pi\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\neq 0$

(thoả mãn).

Vậy phương trình có nghiệm: $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right., K\in\mathbb{Z}$.

4. $\tan^4 x+1=\dfrac{\left(2-\sin^2 2x\right)\sin 3x}{\cos^4 x}$

Điều kiện: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\quad \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Với điều kiện trên, ta có:

$$\tan^4 x+1=\frac{\left(2-\sin^2 2x\right)\sin 3x}{\cos^4 x}$$
$$\Leftrightarrow \sin^4 x+\cos^4 x=\left(2-\sin^2 2x\right)\sin 3x$$
$$\Leftrightarrow \left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=\left(2-4\sin^2 x\cos^2 x\right)\sin 3x$$
$$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x\cos^2 x=2\sin 3x-4\sin^2 x\cos^2 x\sin 3x$$
$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x\cos^2 x\sin 3x-2\sin^2 x\cos^2 x-\left(2\sin 3x-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\cos^2 x\left(2\sin 3x-1\right)-\left(2\sin 3x-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(2\sin 3x-1\right)\left(2\sin^2 x\cos^2 x-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\sin 3x-1=0 & (1)\\ 2\sin^2 x\cos^2 x-1=0 & (2)\end{array}\right.$$

Giải phương trình (1): $\sin 3x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \sin 3x=\sin\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3}\\ x=\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right.\quad \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Giải phương trình (2):

$$\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sin^2 2x=\frac{1}{8}\Leftrightarrow \frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{1}{8}\Leftrightarrow \cos 4x=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{3}{4}+\frac{k\pi}{2}\quad \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Đối chiếu với điều kiện thì phương trình ban đầu có các họ nghiệm là:

$$x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}\ ;\ x=\frac{5\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}\ ;\ x=\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{3}{4}+\frac{k\pi}{2}\quad \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

5. $\cos 3x\tan 5x=\sin 7x$

Điều kiện: $\cos 5x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k\pi}{5}\quad \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Với điều kiện trên, ta có:

$$\cos 3x\tan 5x=\sin 7x$$
$$\Leftrightarrow \cos 3x\frac{\sin 5x}{\cos 5x}=\sin 7x$$
$$\Leftrightarrow \cos 3x\sin 5x=\sin 7x\cos 5x$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\sin 8x+\sin 2x\right)=\frac{1}{2}\left(\sin 12x+\sin 2x\right)$$
$$\Leftrightarrow \sin 12x=\sin 8x$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 12x=8x+k2\pi\\ 12x=\pi-8x+k2\pi\end{array}\right.\quad \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{k\pi}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k\pi}{10} \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Đối chiếu với điều kiện thì phương trình ban đầu có các họ nghiệm là:

$x=\dfrac{k\pi}{2}$; $x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{k\pi}{10}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

6. $\dfrac{1}{\tan x+\cot 2x}=\dfrac{\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{\cot x-1}$

Điều kiện: $\tan x\neq -\cot 2x$; $\cot x\neq 1$; $\sin 2x\neq 0$

Với điều kiện trên, ta có:

$$\frac{1}{\tan x+\cot 2x}=\frac{\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{\cot x-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos 2x}{2\sin x\cos x}}=\frac{\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\dfrac{2\sin^2 x+\cos 2x}{2\sin x\cos x}}=\frac{\sqrt{2}\sin x(\sin x-\cos x)}{\cos x-\sin x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin x\cos x}{2.\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\cos 2x}=-\sqrt{2}\sin x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+\sqrt{2}\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x\left(\sqrt{2}\cos x+1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x=0 & (loai) \\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{3\pi}{4}+k2\pi \ (k\in\mathbb{Z})$$

Đối chiếu với điều kiện thì phương trình ban đầu có các họ nghiệm là: $x=\pm\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

Bài 13.

Giải các phương trình sau :

1. $2\tan x+\dfrac{1}{2}\cot 2x=2\sin 2x+\dfrac{1}{2\sin 2x}$. (1)
2. $\dfrac{\cos x}{\cos 3x}-\dfrac{\cos 5x}{\cos x}+8\sin^2 2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=8\cos^2 x$. (2)
3. $\tan 2x=\tan 3x+\tan 5x+\tan 2x\tan 3x\tan 5x$. (3)

Lời giải

1. $2\tan x+\dfrac{1}{2}\cot 2x=2\sin 2x+\dfrac{1}{2\sin 2x}$. (1)

Đk: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin 2x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$. $(*)$

Phương trình $(1) \Leftrightarrow \dfrac{2\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}=2\sin 2x+\dfrac{1}{\sin 2x}$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 x+\cos 2x=2\sin^2 2x+1$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 x+\left(1-2\sin^2 x\right)=8\sin^2 x.\cos^2 x+1$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\left(1-4\cos^2 x\right)=0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x\left[1-2\left(1+\cos 2x\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\left(-1-2\cos 2x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\ (2)\\ \cos 2x=\dfrac{-1}{2}\ (3)\end{array}\right.$.

Giải phương trình (2): $\sin x=0$ loại do $\sin 2x\neq 0 \Rightarrow \sin x\neq 0$.

Giải phương trình (3): $\cos 2x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{2\pi}{3}+l2\pi\\ 2x=-\dfrac{2\pi}{3}+l2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+l\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+l\pi\end{array}\right.\ \left(l\in\mathbb{Z}\right)$.

Kết hợp điều kiện $(*) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{3}+l\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+l\pi\end{array}\right.\ \left(l\in\mathbb{Z}\right)$ là nghiệm phương trình .

2. $\dfrac{\cos x}{\cos 3x}-\dfrac{\cos 5x}{\cos x}+8\sin^2 2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=8\cos^2 x$. $\qquad (2)$

Đk: $\begin{cases}\cos 2x\neq 0\\ \cos 3x\neq 0\\ \cos 5x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq \dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\\ x\neq \dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{3}\\ x\neq \dfrac{\pi}{10}+k\dfrac{\pi}{5}\end{cases}\ (k\in\mathbb{Z}).(*)$

Phương trình $(2) \Leftrightarrow \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}+\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}=\dfrac{\sin 5x}{\cos 5x}+\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}.\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}.\dfrac{\sin 5x}{\cos 5x}$

$\Leftrightarrow \sin 2x.\cos 3x.\cos 5x+\sin 3x.\cos 2x.\cos 5x=\sin 5x.\cos 3x.\cos 2x+\sin 2x.\sin 3x.\sin 5x$

$\Leftrightarrow \cos 5x\left(\sin 2x.\cos 3x+\sin 3x.\cos 2x\right)=\sin 5x\left(\cos 3x.\cos 2x+\sin 2x.\sin 3x\right)$

$\Leftrightarrow \cos 5x\sin 5x=\sin 5x\cos x \Leftrightarrow \sin 5x\left(\cos 5x-\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 5x=\cos x\\ \sin 5x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x=x+l2\pi\\ 5x=-x+l2\pi\\ 5x=l\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=l\dfrac{\pi}{2}\\ x=l\dfrac{\pi}{3}\\ x=l\dfrac{\pi}{5}\end{array}\right.\ \left(l\in\mathbb{Z}\right)$.

Kết hợp điều kiệnKết hợp điều kiện $\left(*\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=l\frac{\pi}{2}\\x=l\frac{\pi}{3}\\x=l\frac{\pi}{5}\end{array}\right.$ $\left(l\in\mathbb{Z}\right)$ là nghiệm phương trình .

3. $\tan 2x=\tan 3x+\tan 5x+\tan 2x\tan 3x\tan 5x$. $\quad\left(3\right)$

Đk: $\begin{cases}\cos x\ne 0\\\cos 3x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi\\x\ne\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\end{cases}$ $(k\in\mathbb{Z}).\left(*\right)$

Phương trình $\left(3\right)\Leftrightarrow\cos^2 x-\cos 5x.\cos 3x+8\cos^2 2x.\cos 3x.\cos x=8\cos x.\cos 3x.\cos^2 x$

$\Leftrightarrow\cos^2 x-\cos 5x.\cos 3x+\left(4\cos 4x-4\cos 2x\right).\cos 3x.\cos x=0$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos 8x\right)-8\sin 3x.\cos 3x.\cos x.\sin x=0$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 8x-2\sin 6x.\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 8x-\cos 4x+\cos 8x=0$

$\Leftrightarrow 1+\cos 8x-2\cos 4x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 4x-2\cos 4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 4x=0\\\cos 4x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+\frac{l\pi}{4}\\x=\frac{l\pi}{2}\end{array}\right.\left(l\in\mathbb{Z}\right)$

Kết hợp điều kiện $\left(*\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+\frac{l\pi}{4}\\x=l\pi\end{array}\right.$ $\left(l\in\mathbb{Z}\right)$ là nghiệm phương trình .

----------------- HẾT-----------------

§7. TỔNG ÔN CHƯƠNG

Dạng 01. TẬP XÁC ĐỊNH.

Phương pháp giải:

1. $\sqrt{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x)\ge 0$; $\dfrac{1}{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x)\ne 0$.
2. $y=\sin\left(f(x)\right)$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.
3. $y=\cos\left(f(x)\right)$ xác định $\Leftrightarrow f(x)$ xác định.
4. $y=\tan\left(f(x)\right)$ xác định $\Leftrightarrow f(x)\ne \dfrac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.
5. $y=\cot\left(f(x)\right)$ xác định $\Leftrightarrow f(x)\ne k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Bài tập

Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y=\sqrt{3-\cos 2x}$

b. $y=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

c. $y=\dfrac{2+3\sin x}{2\cos x-\sqrt{3}}$

d. $y=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\cos x}$

e. $y=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

f. $y=\cot\left(x-3\right)$

g. $y=\dfrac{4}{\sqrt{3}\sin x-\cos x}$

h. $y=\dfrac{2\sin x+3\tan x}{2\cos x-1}$

i. $y=\dfrac{\cot\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{1-\cos x}}$

k. $y=\dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-4x\right)}{\sin 2x}$

m. $y=\dfrac{3\sin 2x+\cos x}{\cos\left(4x+\dfrac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)}$

Lời giải

a. $y=\sqrt{3-\cos 2x}$

Hàm số $y=\sqrt{3-\cos 2x}$ xác định khi $3-\cos 2x\ge 0$ (luôn đúng, vì $\cos 2x\le 1,\forall x\in\mathbb{R}$).

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}$.

b. $y=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

Hàm số $y=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ xác định khi $\sin x\ne 0\Leftrightarrow x\ne k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c. $y=\dfrac{2+3\sin x}{2\cos x-\sqrt{3}}$

Hàm số $y=\dfrac{2+3\sin x}{2\cos x-\sqrt{3}}$ xác định khi $2\cos x-\sqrt{3}\neq 0 \Leftrightarrow \cos x\neq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x\neq \pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

d. $y=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\cos x}$

Hàm số $y=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\cos x}$ xác định khi $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq k\pi\end{cases}, k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x\neq k.\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{k.\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

e. $y=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

Hàm số $y=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ xác định khi $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\neq 0 \Leftrightarrow 2x+\dfrac{\pi}{3}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

f. $y=\cot(x-3)$

Hàm số $y=\cot(x-3)$ xác định khi $\sin(x-3)\neq 0 \Leftrightarrow x-3\neq k\pi \Leftrightarrow x\neq 3+k\pi$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{3+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

g. $y=\dfrac{4}{\sqrt{3}\sin x-\cos x}$

Hàm số $y=\dfrac{4}{\sqrt{3}\sin x-\cos x}$ xác định khi

$\sqrt{3}\sin x-\cos x\neq 0 \Leftrightarrow \sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\neq 0 \Leftrightarrow x-\dfrac{\pi}{3}\neq k\pi \Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{3}+k\pi$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

h. $y=\dfrac{2\sin x+3\tan x}{2\cos x-1}$

Hàm số $y=\dfrac{2\sin x+3\tan x}{2\cos x-1}$ xác định khi $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos x\neq\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ x\neq-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{cases}$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{3}+k2\pi, -\dfrac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

i. $y=\dfrac{\cot\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{1-\cos x}}$

Hàm số $y=\dfrac{\cot\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{1-\cos x}}$ xác định khi $\begin{cases}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)\neq 0\\ \cos x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-\dfrac{\pi}{6}\neq k\pi\\ x\neq k2\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x\neq k2\pi\end{cases}$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi,k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

k. $y=\dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-4x\right)}{\sin 2x}$

Hàm số $y=\dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-4x\right)}{\sin 2x}$ xác định khi

$$\begin{cases}\sin 2x\neq 0\\ \cos\left(\dfrac{\pi}{3}-4x\right)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\neq k\pi\\ \dfrac{\pi}{3}-4x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{k\pi}{2}\\ x\neq-\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{4}\end{cases}$$

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{k\pi}{2},-\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{4},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

m. $y=\dfrac{3\sin 2x+\cos x}{\cos\left(4x+\dfrac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)}$

Hàm số $y=\dfrac{2\sin 2x+\cos x}{\cos\left(4x+\dfrac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)}$ xác định khi và chỉ khi

$$\cos\left(4x+\dfrac{2\pi}{5}\right)+\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\dfrac{7x}{2}+\dfrac{3\pi}{40}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{13\pi}{40}\right)\neq 0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\dfrac{7x}{2}+\dfrac{3\pi}{40}\right)\neq 0\\ \cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{13\pi}{40}\right)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{7x}{2}+\dfrac{3\pi}{40}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{13\pi}{40}\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{17\pi}{140}+\dfrac{2\pi}{7}k\\ x\neq\dfrac{7\pi}{20}+k2\pi\end{cases}.$$

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{17\pi}{140}+\dfrac{2k\pi}{7};\dfrac{7\pi}{20}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Dạng 02. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT.

Phương pháp giải:
Sử dụng tính chất $-1\le\sin x\le 1$ và $-1\le\cos x\le 1$.

Bài tập.

Tìm GTNN và GTLN của các hàm số:

a. $y=2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+5$

b. $y=4\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$

c. $y=\frac{5}{3\cos^2 2x+1}$

d. $y=\sqrt{1-\sin x}-1$

e. $y=\sin x+\cos x$.

f. $y=\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x$.

g. $y=\left(\sin x-\cos x\right)^2+2\cos 2x+3\sin x.\cos x$.

h. $y=3\sin^2 x+4\sin x.\cos x-5\cos^2 x+2$.

i. $y=\frac{2\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x+2}$.

Lời giải

a. $y=2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+5$

Với $\forall x\in\mathbb{R}$, ta có:

$-1\le\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1\Rightarrow -2\le 2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 2\Rightarrow 3\le 2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+5\le 7$

$\Rightarrow 3\le y\le 7$

Suy ra:

$\max\limits_{\mathbb{R}} y=7\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=k2\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi$, với $k\in\mathbb{Z}$

$\min\limits_{\mathbb{R}} y=3\Leftrightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\pi+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi$, với $k\in\mathbb{Z}$

b. $y=4\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$

Với $\forall x\in\mathbb{R}$, ta có:

$0\le\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\le 1\Rightarrow 0\le\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\le 1\Rightarrow -1\le 4\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\le 3$

$\Rightarrow -1\le y\le 3$

Suy ra:

$\max\limits_{\mathbb{R}} y=3\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi$, với $k\in\mathbb{Z}$

$\min\limits_{\mathbb{R}} y=-1\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, với $k\in\mathbb{Z}$

c. $y=\frac{5}{3\cos^2 2x+1}$

Với $\forall x\in\mathbb{R}$, ta có:

$0\le\left|\cos 2x\right|\le 1\Rightarrow 0\le\cos^2 2x\le 1\Rightarrow 1\le 3\cos^2 2x+1\le 4$

$\Rightarrow \dfrac{5}{4} \le \dfrac{5}{3\cos^2 2x+1} \le 5$

Suy ra:

$\max\limits_{\mathbb{R}} y = 5 \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, với $k \in \mathbb{Z}$.

$\min\limits_{\mathbb{R}} y = \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow \cos^2(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}$, với $k \in \mathbb{Z}$.

d. $y = \sqrt{1-\sin x} - 1$

Với $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có:

$-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -1 \le -\sin x \le 1 \Rightarrow 0 \le 1 - \sin x \le 2$

$\Rightarrow 0 \le \sqrt{1-\sin x} \le \sqrt{2}$

$\Rightarrow -1 \le \sqrt{1-\sin x} - 1 \le \sqrt{2} - 1$

$\Rightarrow -1 \le y \le \sqrt{2} - 1$

$\max\limits_{\mathbb{R}} y = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$

$\min\limits_{\mathbb{R}} y = -1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$

e. $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Với $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có:

$-1 \le \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \le 1$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}$

Suy ra:

$\max\limits_{\mathbb{R}} y = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.

$\min\limits_{\mathbb{R}} y = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.

f. $y = \sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 2\left(\sin 3x.\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\cos 3x\right)$

Cách 1. $y = \sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 2\left(\sin 3x.\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\cos 3x\right)$

$= 2.\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\sin 3x - \sin\dfrac{\pi}{3}\cos 3x\right) = 2\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

Với $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có:

$-1 \le \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) \le 2 \Leftrightarrow -2 \le y \le 2$

Suy ra:

$\max\limits_{\mathbb{R}} y = 2 \Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}$, với $k \in \mathbb{Z}$

$\min\limits_{\mathbb{R}} y = -2 \Leftrightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}$, với $k \in \mathbb{Z}$

Cách 2. Phương trình $y = \sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x$ có nghiệm khi và chỉ khi

$1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 \ge y^2 \Leftrightarrow y^2 \le 4 \Leftrightarrow -2 \le y \le 2$.

Vậy GTLN của y là 2 và GTNN của y là -2.

g. $y = \left(\sin x - \cos x\right)^2 + 2\cos 2x + 3\sin x.\cos x$

$\Leftrightarrow y = 1 - 2\sin x.\cos x + 2\cos 2x + 3\sin x.\cos x$

$\Leftrightarrow y - 1 = 2\cos 2x + \sin x.\cos x$

$\Leftrightarrow y - 1 = 2\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x \qquad (*)$

Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi (*) có nghiệm

$\Leftrightarrow 2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \ge \left(y-1\right)^2 \Leftrightarrow \left(y-1\right)^2 \le \frac{17}{4} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{17}}{2} \le y - 1 \le \frac{\sqrt{17}}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{\sqrt{17}}{2} \le y \le 1 + \frac{\sqrt{17}}{2}$.

Vậy GTLN của y là $1 + \frac{\sqrt{17}}{2}$ và GTNN của y là $1 - \frac{\sqrt{17}}{2}$.

h. $y = 3\sin^2 x + 4\sin x.\cos x - 5\cos^2 x + 2$.

$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}\left(1 - \cos 2x\right) + 2\sin 2x - \frac{5}{2}\left(1 + \cos 2x\right) + 2$

$\Leftrightarrow y - 1 = 2\sin 2x - 4\cos 2x \qquad (*)$

Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi (*) có nghiệm

$\Leftrightarrow 2^2 + \left(-4\right)^2 \ge \left(y-1\right)^2 \Leftrightarrow \left(y-1\right)^2 \le 20 \Leftrightarrow -2\sqrt{5} \le y - 1 \le 2\sqrt{5} \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{5} \le y \le 1 + 2\sqrt{5}$.

Vậy GTLN của y là $1 + 2\sqrt{5}$ và GTNN của y là $1 - 2\sqrt{5}$.

i. $y = \frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x + 2}$

$\Leftrightarrow y\sin x + y\cos x + 2y = 2\sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow \left(y-2\right)\sin x + \left(y-1\right)\cos x + 2y = 0 \qquad (*)$

Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi (*) có nghiệm

$\Leftrightarrow \left(y-2\right)^2 + \left(y-1\right)^2 \ge \left(2y\right)^2$

$\Leftrightarrow 4y^2 \le 2y^2 - 6y + 5 \Leftrightarrow 2y^2 + 6y - 5 \le 0 \Leftrightarrow \frac{-3-\sqrt{19}}{2} \le y \le \frac{-3+\sqrt{19}}{2}$

Dạng 03. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC.

Phương pháp giải:

DẠNG CƠ BẢN:

① $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u = v + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ u = \pi - v + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

② $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u = v + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ u = -v + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

③ $\tan u=\tan v \Leftrightarrow \begin{cases} u\neq \frac{\pi}{2}+l\pi\left(\text{hay } v\neq \frac{\pi}{2}+l\pi\right)(l\in\mathbb{Z}) \\ u=v+k\pi\,(k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$ ④ $\cot u=\cot v \Leftrightarrow \begin{cases} u\neq l\pi\ (\text{hay } v\neq l\pi)(l\in\mathbb{Z}) \\ u=v+k\pi\,(k\in\mathbb{Z}) \end{cases}$

TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT:

- $\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$
- $\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$
- $\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$
- $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$
- $\cos x=1 \Leftrightarrow x=k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$
- $\cos x=-1 \Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

Bài 01.

Giải các phương trình sau:

a. $\cos 2x=-1$. **b.** $\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c.** $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=1$

d. $\cot 4x-\sqrt{3}=0$ **e.** $3\tan 2x+\sqrt{3}=0$ **f.** $\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0$

g. $2\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}=0$ **h.** $\sin^2 2x=\frac{1}{4}$. **i.** $\tan^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=3$.

Lời giải

a. $\cos 2x=-1$

$$\Leftrightarrow 2x=\pi+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\ .$$

b. $\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 3x-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3} \\ x=\frac{5\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., (k\in\mathbb{Z})$$

c. $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=1$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{5}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{9\pi}{20}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{20}+k2\pi \end{array}\right., (k\in\mathbb{Z})$$

d. $\cot 4x-\sqrt{3}=0$

$$\Leftrightarrow \cot 4x=\cot\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 4x=\frac{\pi}{6}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}\ ..$$

e. $3\tan 2x+\sqrt{3}=0$

$$\Leftrightarrow \tan 2x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\Leftrightarrow \tan 2x = \tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 2x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

f. $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{3} - x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} - k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

g. $2\sin\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0$

$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k6\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + k6\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$.

h. $\sin^2 2x = \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1 - \cos 4x}{2} = \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \cos 4x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = \cos\dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow 4x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

i. $\tan^2\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 3$.

Điều kiện: $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \\ \tan\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{3} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \tan\dfrac{\pi}{3} \\ \tan\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ 2x - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = -\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$ đều thỏa mãn.

Vậy $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = -\dfrac{\pi}{24} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$ là nghiệm của phương trình.

Bài 02.

Giải các phương trình sau:

a. $\sin 3x - \cos 2x = 0$.

b. $\cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos x = 0$.

c. $\cos\dfrac{x}{2}=-\cos\left(2x-30^\circ\right)$.	**d.** $\tan x.\cot 2x=1$.
e. $\sin^2 x-\cos^2 2x=0$.	**f.** $\sin^4\dfrac{x}{2}-\cos^4\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

a. $\sin 3x-\cos 2x=0$.

$\Leftrightarrow \sin 3x=\cos 2x$.

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x=\dfrac{\pi}{2}-2x+k2\pi\\ 3x=\pi-\dfrac{\pi}{2}+2x+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k2\pi}{5}\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{k2\pi}{5}\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$.

b. $\cos\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\cos x=0$.

$\Leftrightarrow 2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0$.

$\Leftrightarrow \cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=0.\Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ \ ,k\in\mathbb{Z}.\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\ \ ,k\in\mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\ ,k\in\mathbb{Z}$.

c. $\cos\dfrac{x}{2}=-\cos\left(2x-30^\circ\right)$.

$\Leftrightarrow \cos\dfrac{x}{2}=\cos\left(2x-30^\circ+180^\circ\right)$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+150^\circ=\dfrac{x}{2}+k360^\circ\\ 2x+150^\circ=-\dfrac{x}{2}+k360^\circ\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-100^\circ+k240^\circ\\ x=-60^\circ+k240^\circ\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-100^\circ+k240^\circ\\ x=-60^\circ+k240^\circ\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

d. $\tan x.\cot 2x=1$

Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l}\cos x\neq 0\\ \sin 2x\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\neq\dfrac{\pi}{2}+m\pi\\ 2x\neq n\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\neq\dfrac{\pi}{2}+m\pi\\ x\neq\dfrac{n\pi}{2}\end{array}\right.\left(m,n\in\mathbb{Z}\right)$.

Phương trình $\Leftrightarrow \tan x=\dfrac{1}{\cot 2x}\Leftrightarrow \tan x=\tan 2x\Leftrightarrow x=2x+k\pi\ \ ,k\in Z\Leftrightarrow x=-k\pi\ \ ,k\in Z$.

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $S=\varnothing$.

e. $\sin^2 x-\cos^2 2x=0$.

$\Leftrightarrow \dfrac{1-\cos 2x}{2}-\cos^2 2x=0$.

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x+\cos 2x-1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=\dfrac{1}{2}\\ \cos 2x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\ 2x=\pi+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Vậy phương trình có nghiệm là $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

f. $\sin^4\dfrac{x}{2}-\cos^4\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow \left(\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\left(\sin\left(\dfrac{x}{x}\right)+\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\left(\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)=\dfrac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow \left(\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\left(\sin\left(\dfrac{x}{x}\right)+\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)=\dfrac{1}{2}$.

$\Leftrightarrow \cos x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\\ x=-\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có nghiệm là $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\\ x=-\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

Bài 03.

Tìm nghiệm của các phương trình sau trong các khoảng đã cho:

a. $\sin 2x=-\dfrac{1}{2}$ với $x\in(0;\pi)$.

b. $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ với $x\in(-\pi;\pi)$.

c. $\tan(2x-15^\circ)=1$ với $-180^\circ<x<90^\circ$

d. $\cot 3x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ với $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$. .

Lời giải

a. $\sin 2x=-\dfrac{1}{2}$ với $x\in(0;\pi)$.

$\sin 2x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ 2x=\pi+\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\dfrac{7\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

Vì $x \in (0;\pi)$ nên

$$\left[\begin{array}{l} 0<-\dfrac{\pi}{12}+k\pi<\pi \\ 0<\dfrac{7\pi}{12}+k\pi<\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<-\dfrac{1}{12}+k<1 \\ 0<\dfrac{7}{12}+k<1 \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{12}<k<\dfrac{13}{12} \\ -\dfrac{7}{12}<k<\dfrac{5}{12} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=0 \end{array}\right..$$

Vậy $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{12}+\pi=\dfrac{11}{12}\pi \\ x=\dfrac{7\pi}{12} \end{array}\right..$

b. $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ với $x\in(-\pi;\pi)$.

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5\pi}{12}+k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Vì $x\in(-\pi;\pi)$ nên $\left[\begin{array}{l} -\pi<\dfrac{5\pi}{12}+k2\pi<\pi \\ -\pi<\dfrac{\pi}{12}+k2\pi<\pi \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<\dfrac{5}{12}+2k<1 \\ -1<\dfrac{1}{12}+2k<1 \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{-17}{12}<2k<\dfrac{7}{12} \\ \dfrac{-13}{12}<2k<\dfrac{11}{12} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{-17}{24}<k<\dfrac{7}{24} \\ \dfrac{-13}{24}<k<\dfrac{11}{24} \end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=0 \\ k=0 \end{array}\right..$$

Vậy $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5\pi}{12} \\ x=\dfrac{\pi}{12} \end{array}\right..$

c. $\tan(2x-15^\circ)=1$ với $-180^\circ<x<90^\circ$

Ta có $\tan(2x-15^\circ)=1$

$\Leftrightarrow 2x-15^\circ=45^\circ+k.180^\circ(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow 2x=60^\circ+k.180^\circ(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow x=30^\circ+k.90^\circ(k\in\mathbb{Z})$

Vì $-180^\circ<x<90^\circ$

$\Leftrightarrow -180^\circ<30^\circ+k.90^\circ<90^\circ(k\in\mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow -210^\circ<k.90^\circ<60^\circ(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow -\dfrac{7}{3}<k<\dfrac{2}{3}(k\in\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=-2 \\ k=-1 \\ k=0 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=-150^\circ \\ x=-60^\circ \\ x=30^\circ \end{array}\right..$

d. $\cot 3x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ với $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right).$

Ta có $\cot 3x=-\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow 3x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Vì $x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ nên

$-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}<0\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<-\frac{1}{9}+\frac{k}{3}<0\left(k\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow -\frac{7}{18}<\frac{k}{3}<\frac{1}{9}\left(k\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow -\frac{21}{18}<k<\frac{1}{3}\left(k\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=-1\\k=0\end{array}\right.$.

Vậy $\left[\begin{array}{l}x=-\frac{4\pi}{9}\\x=-\frac{\pi}{9}\end{array}\right.$.

Bài 04.

Giải các phương trình sau:

a. $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$.

b. $2\sin^2 x-\cos^2 x-4\sin x+2=0$.

c. $3\sin^2 2x+7\cos 2x-3=0$.

d. $6\cos^2 x+5\sin x-7=0$.

e. $\cos 2x+3\cos x-4=0$.

f. $6\sin^2 3x+\cos 12x=7$.

g. $\cos x-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}=1$.

h. $5\sin x\left(\sin x-1\right)-\cos^2 x=3$.

i. $4\sin^4 x+12\cos^2 x=7$.

k. $7\tan x-4\cot x=12$

l. $\frac{1}{\cos^2 x}+3\cot^2 x-5=0$.

m. $2\sin^3 x+\cos 2x=\sin x$

n. $\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}=\cos x+\frac{1}{\cos x}$.

o. $\left(\tan x+\cot x\right)^2-\left(\tan x+\cot x\right)=2$

Lời giải

a. $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=1\\\cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của phương trình ban đầu là: $x=k2\pi$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

b. $2\sin^2 x-\cos^2 x-4\sin x+2=0$.

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\left(1-\sin^2 x\right)-4\sin x+2=0$.

$\Leftrightarrow 3\sin^2 x-4\sin x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\\sin x=\frac{1}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\x=\arccos\frac{1}{3}+k2\pi\\x=\pi-\arccos\frac{1}{3}+k2\pi\end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của phương trình ban đầu là: $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$; $x=\arccos\frac{1}{3}+k2\pi$; $x=\pi-\arccos\frac{1}{3}+k2\pi\quad\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

c. $3\sin^2 2x+7\cos 2x-3=0$.

$\Leftrightarrow 3\left(1-\cos^2 2x\right)+7\cos 2x-3=0$.

$\Leftrightarrow 3\cos^2 2x-7\cos 2x=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos 2x=\frac{7}{3}\left(VN\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$.

Vậy nghiệm của phương trình ban đầu là: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

d. $6\cos^2 x+5\sin x-7=0$.

$\Leftrightarrow 6\left(1-\sin^2 x\right)+5\sin x-7=0\Leftrightarrow -6\sin^2 x+5\sin x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2}\\ \sin x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$.

+) Với $\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$.

+) Với $\sin x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\arcsin\frac{1}{3}+k2\pi\\ x=\pi-\arcsin\frac{1}{3}+k2\pi\end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của phương trình ban đầu là: $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$; $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$; $x=\arcsin\frac{1}{3}+k2\pi$; $x=\pi-\arcsin\frac{1}{3}+k2\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

e. $\cos 2x+3\cos x-4=0$.

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+3\cos x-5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=1\\ \cos x=\frac{-5}{2}\left(VN\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=k2\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình ban đầu là: $x=k2\pi\quad\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

f. $6\sin^2 3x+\cos 12x=7$.

$\Leftrightarrow 6.\frac{1-\cos 6x}{2}+2\cos^2 6x-1-7=0$.

$\Leftrightarrow 2\cos^2 6x-3\cos 6x-5=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 6x=\frac{5}{2}\left(VN\right)\\ \cos 6x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow 6x=\pi+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$.

Vậy nghiệm của phương trình ban đầu là: $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\quad\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

g. $\cos x-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}=1$.

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{x}{2}+\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2}=\frac{-\sqrt{2}}{2}\ (VN)\\ \sin\frac{x}{2}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\frac{x}{2}=k\pi\Leftrightarrow x=k2\pi\ .$$

Vậy nghiệm của phương trình ban đầu là: $x=k2\pi\quad\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

h. $5\sin x\left(\sin x-1\right)-\cos^2 x=3$

$\Leftrightarrow 5\sin^2 x-5\sin x+\sin^2 x-1=3$.

$\Leftrightarrow 6\sin^2 x-5\sin x-4=0$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{4}{3}(vn)\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\sin x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

i. $4\sin^4 x+12\cos^2 x=7$.

$\Leftrightarrow\left(1-\cos 2x\right)^2+6\left(1+\cos 2x\right)-7=0$.

$\Leftrightarrow\cos^2 2x+4\cos 2x=0$.

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos 2x=-4\end{array}\right.\\ -1\le\cos 2x\le 1\end{array}\right..$$

$\Leftrightarrow\cos 2x=0\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)..$

k. $7\tan x-4\cot x=12$.

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}7\tan^2 x-12\tan x-4=0\\ x\ne k\frac{\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=2\\ \tan x=-\frac{2}{7}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\arctan 2+k\pi\\ x=\arctan\left(-\frac{2}{7}\right)+k\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

l. $\frac{1}{\cos^2 x}+3\cot^2 x-5=0$.

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}1+\cot^2 x+3\cot^2 x-5=0\\ x\ne k\frac{\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)\end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}4\cot^2 x-4=0\\ x\ne k\frac{\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\cot x=\pm 1\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

m. $2\sin^3 x+\cos 2x=\sin x$.

$\Leftrightarrow\sin x\left(2\sin^2 x-1\right)+\cos 2x=0$.

$\Leftrightarrow \cos 2x(1-\sin x)=0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \sin x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

n. $\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}=\cos x+\dfrac{1}{\cos x}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos^4 x+1=\cos^3 x+cosx\\ cosx\neq 0\end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos^4 x-\cos^3 x-\cos x+1=0\\ \cos x\neq 0\end{cases}$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(\cos x-1)^2(\cos^2 x+\cos x+1)=0\\ \cos x\neq 0\end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow \cos x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$.

o. $(\tan x+\cot x)^2-(\tan x+\cot x)=2$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(\tan x+\cot x)^2-(\tan x+\cot x)-2=0\\ x\neq\dfrac{k\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x+\cot x=-1\\ \tan x+\cot x=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan^2 x+\tan x+1=0\\ \tan^2 x-2\tan x+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \tan x=1 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbb{Z})$

Bài 05.

Giải các phương trình sau:

a. $\sin 2x-\cos 2x=1$

b. $\cos 5x+\sin 5x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

c. $\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=\sqrt{2}$

d. $3\sin 4x-\sqrt{3}\cos 4x+\sqrt{3}=0$

e. $\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\cos 2x$

f. $\cos 7x-\sin 5x=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 7x)$

g. $2\sin 11x-\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=0$

Lời giải

a. $\sin 2x-\cos 2x=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \cos\dfrac{\pi}{4}\sin 2x-\sin\dfrac{\pi}{4}\cos 2x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ 2x-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ 2x=\pi+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

b. $\cos 5x+\sin 5x=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ 5x+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x=\frac{\pi}{12}+k2\pi \\ 5x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{60}+\frac{k2\pi}{5} \\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{k2\pi}{5} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

c. $\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{3}\cos 2x+\cos\frac{\pi}{3}\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3}+2x=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ \frac{\pi}{3}+2x=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi \\ 2x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{24}+k\pi \\ x=\frac{5\pi}{24}+k\pi \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

d. $3\sin 4x-\sqrt{3}\cos 4x+\sqrt{3}=0$

$$\Leftrightarrow 3\sin 4x-\sqrt{3}\cos 4x=-\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x-\frac{1}{2}\cos 4x=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\sin 4x-\sin\frac{\pi}{6}\cos 4x=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ 4x-\frac{\pi}{6}=\pi+\frac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x=k2\pi \\ 4x=\frac{4\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{k\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

e. $\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\cos 2x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\cos 2x$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x=\cos 2x$

$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{3}=2x+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{3}=-2x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{3}-k2\pi \\ x=\frac{\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

f. $\cos 7x-\sin 5x=\sqrt{3}\left(\cos 5x-\sin 7x\right)$

$\Leftrightarrow \cos 7x-\sin 5x=\sqrt{3}\cos 5x-\sqrt{3}\sin 7x$

$\Leftrightarrow \cos 7x+\sqrt{3}\sin 7x=\sqrt{3}\cos 5x+\sin 5x$

$\Leftrightarrow \cos 7x+\sqrt{3}\sin 7x=\sqrt{3}\cos 5x+\sin 5x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 7x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x+\frac{1}{2}\sin 5x$

$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{4}\cos 7x+\cos\frac{\pi}{4}\sin 7x=\sin\frac{\pi}{4}\cos 5x+\cos\frac{\pi}{4}\sin 5x$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}+7x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+5x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4}+7x=\frac{\pi}{4}+5x+k2\pi \\ \frac{\pi}{4}+7x=\frac{3\pi}{4}-5x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{6} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$

g. $2\sin 11x-\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin 11x=\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin 11x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin 11x=\sin\frac{\pi}{3}\cos 2x+\cos\frac{\pi}{3}\sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin 11x=\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 11x=\frac{\pi}{3}+2x+k2\pi \\ 11x=\frac{2\pi}{3}-2x+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{27}+\frac{k2\pi}{9} \\ x=\frac{2\pi}{39}+\frac{k2\pi}{13} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$

Bài 06.

Giải các phương trình sau:

a. $3\left(\sin x+\cos x\right)+2\sin 2x+3=0$.

b. $\sin^3 x+\cos^3 x=\sin 2x+\sin x+\cos x$.

c. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$

d. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$

e. $\cos x+\cos 5x+2\cos 3x=0$

f. $\cos 2x.\cos 5x=\cos 7x$.

g. $4\sin x.\sin 2x.\sin 3x=\sin 4x$.

h. $\cos x.\cos 3x-\sin 2x.\sin 6x-\sin 4x.\sin 6x=0$.

i. $\cos 22x+3\cos 18x+3\cos 14x+\cos 10x=0$.

k. $4\sin 3x+\sin 5x-2\sin x.\cos 2x=0$.

Lời giải

a. $3(\sin x+\cos x)+2\sin 2x+3=0$.

Đặt $\sin x+\cos x=t,|t|\le\sqrt{2}\Rightarrow\sin 2x=t^2-1$, khi đó ta có pt:

$$3t+2\left(t^2-1\right)+3=0\Leftrightarrow 2t^2+3t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1(tm)\\ t=\dfrac{-1}{2}(tm)\end{array}\right..$$

$$+\ t=-1\Rightarrow\sin x+\cos x=-1\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

$$+t=\frac{-1}{2}\Rightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{2\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-\pi}{4}+\alpha+k2\pi\\ x=\dfrac{3\pi}{4}-\alpha+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}),\sin\alpha=\frac{-1}{2\sqrt{2}}.$$

b. $\sin^3x+\cos^3x=\sin 2x+\sin x+\cos x$.

Đặt $\sin x+\cos x=t,|t|\le\sqrt{2}$

$\Rightarrow\sin 2x=t^2-1$, khi đó ta có pt:

$$t\left(1-\frac{t^2-1}{2}\right)=t^2-1+t\Leftrightarrow -t^3-2t^2+t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1(tm)\\ t=-1(tm)\\ t=-2(l)\end{array}\right.$$

$$+\ t=-1\Rightarrow\sin x+\cos x=-1\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

$$+t=1\Rightarrow\sin x+\cos x=1\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

c. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x\cos x+\cos 2x=0$

$$\Leftrightarrow\cos 2x(2\cos x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ 2\cos x+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Vậy $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

d. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}+2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\frac{5x}{2}=0\\ \cos\frac{3x}{2}=\cos\left(\pi-\frac{x}{2}\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Vậy: $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$ là nghiệm của phương trình.

e. $\cos x+\cos 5x+2\cos 3x=0$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x+\cos 5x\right)+2\cos 3x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 3x.\cos 2x+2\cos 3x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 3x\left(\cos 2x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 3x=0\\ \cos 2x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}\quad .$$

Vậy nghiệm của phương trình là $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

f. $\cos 2x.\cos 5x=\cos 7x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\cos 7x+\cos 3x\right]=\cos 7x$$

$$\Leftrightarrow \cos 7x+\cos 3x=2\cos 7x$$

$$\Leftrightarrow \cos 7x=\cos 3x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}7x=3x+k2\pi\\ 7x=-3x+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{k\pi}{5}\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

g. $4\sin x.\sin 2x.\sin 3x=\sin 4x$

$$\Leftrightarrow 4\sin x.\sin 2x.\sin 3x=2\sin 2x.\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\left(2\sin x\sin 3x-\cos 2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x.\left(\cos 2x-\cos 4x-\cos 2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x\cos 4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \cos 4x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=k\pi\\ 4x=\frac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

h. $\cos x.\cos 3x-\sin 2x.\sin 6x-\sin 4x.\sin 6x=0$

$$\Leftrightarrow \cos x.\cos 3x-\sin 6x\left(\sin 4x+\sin 2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x.\cos 3x-2\sin 6x.\sin 3x\cos x=0$$

$\Leftrightarrow \cos x\left(\cos 3x - 2\sin 6x \sin 3x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(\cos 3x - \cos 3x + \cos 9x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos 9x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{k\pi}{9}\end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

i. $\cos 22x + 3\cos 18x + 3\cos 14x + \cos 10x = 0$.

$\Leftrightarrow \cos 22x + \cos 10x + 3\left(\cos 18x + \cos 14x\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 16x \cos 6x + 6\cos 16x \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 16x\left(\cos 6x + 3\cos 2x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 16x = 0\\ 4\cos^3 2x - 3\cos 2x + 3\cos 2x = 0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 16x = 0\\ \cos 2x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}16x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{32} + \dfrac{k\pi}{16}\\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

k. $4\sin 3x + \sin 5x - 2\sin x.\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin 3x + \sin 5x - \sin 3x + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow 3\sin 3x + 2\sin 3x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{3}\\ \cos 2x = -\dfrac{3}{2}\left(VN\right)\end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)..$

Bài 07.

Giải các phương trình sau:

a. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$.

b. $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \dfrac{3}{2}$.

c. $3\cos^2 2x - 3\sin^2 x + \cos^2 x = 0$

d. $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$

e. $8\cos^4 x = 1 + \cos 4x$.

f. $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$.

g. $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos x$.

h. $\sin^6 x + \cos^6 x = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

a. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1 - \cos 2x}{2} + \dfrac{1 - \cos 4x}{2} = \dfrac{1 - \cos 6x}{2}$

$\Leftrightarrow 1 - \left(\cos 2x + \cos 4x\right) + \cos 6x = 0$

$\Leftrightarrow 1 + \cos 6x - 2\cos 3x.\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 3x - 2\cos 3x.\cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 3x\left(\cos 3x - \cos x\right) = 0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 3x=0\\ \cos 3x=\cos x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\\ x=l\pi\\ x=m\frac{\pi}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\\ x=m\frac{\pi}{2}\end{array}\right.\left(k,l,m\in\mathbb{Z}\right)$$

b. $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow-\left(\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\cos 2x+\cos 6x+\cos 4x=0$$

$$\Leftrightarrow\cos 4x.\cos 2x+\cos 4x=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 4x=0\\ \cos 2x=\text{-}1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}\\ 2x=\pi+l2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{4}\\ x=\frac{\pi}{2}+l\pi\end{array}\right.\left(k,l\in\mathbb{Z}\right).$$

c. $3\cos^2 2x-3\sin^2 x+\cos^2 x=0$

$$\Leftrightarrow 3\cos^2 2x-3\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)+\frac{1+\cos 2x}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow 6\cos^2 2x+4\cos 2x-2=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=\frac{1}{3}\\ \cos 2x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+l\pi\end{array}\right.\left(k,l\in\mathbb{Z}\right)$$

d. $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x$

$$\Leftrightarrow\frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1+\cos 8x}{2}=\frac{1-\cos 10x}{2}-\frac{1+\cos 12x}{2}$$

$$\Leftrightarrow-\cos 6x-\cos 8x=-\cos 10x-\cos 12x$$

$$\Leftrightarrow\cos 10x-\cos 6x=-\left(\cos 12x-\cos 8x\right)$$

$$\Leftrightarrow-2\sin 8x.\sin 2x=2\sin 10x.\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 2x\left(\sin 10x+\sin 8x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \sin 10x=\sin\left(-8x\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=k\pi\\ 10x=-8x+l2\pi\\ 10x=\pi+8x+km\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\frac{\pi}{2}\\ x=l\frac{\pi}{9}\\ x=\frac{\pi}{2}+m\frac{\pi}{2}\end{array}\right.\left(k,l,m\in\mathbb{Z}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\frac{\pi}{2}\\ x=l\frac{\pi}{9}\end{array}\right.\left(k,l\in\mathbb{Z}\right)$$

e. $8\cos^4 x=1+\cos 4x$.

Ta có $8\cos^4 x=1+\cos 4x$

$\Leftrightarrow 8\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = 1+2\cos^2 2x+1$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{4}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

f. $\sin^4 x+\cos^4 x = \cos 4x$.

Ta có $\sin^4 x+\cos^4 x = \cos 4x$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x\cos^2 x = 2\cos^2 2x+1$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x+\frac{1}{2}\sin^2 2x = 0$

$\Leftrightarrow 3\cos^2 2x+1=0$ vô nghiệm.

g. $\sin^4 x-\cos^4 x = \cos x$.

Ta có $\sin^4 x-\cos^4 x = \cos x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x-\cos^2 x = \cos x$

$\Leftrightarrow 1-2\cos^2 x = \cos x$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+k2\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\quad \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

h. $\sin^6 x+\cos^6 x = \frac{1}{2}$.

Ta có $\sin^6 x+\cos^6 x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^3-3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 4x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+k2\pi\quad \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Dạng 04. TỔNG HỢP PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC.

Bài tập.

Giải các phương trình sau:

1. $\cos 2x=(1+2\cos x)(\cos x-\sin x)$.

2. $(1+\sin x)^2=\cos^3 x$.

3. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$.

4. $\cos 10x-\cos 8x-\cos 6x+1=0$.

5. $\sin 4x=2\cos^2 x-1$.

6. $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$.

7. $(1-\tan x)(1+\sin 2x)=1+\tan x$.

8. $(1+2\sin x)^2\cos x=1+\sin x+\cos x$.

9. $(2\sin x-1)(2\cos x+\sin x)=\sin 2x-\cos x$.

10. $\cos^4\frac{x}{4}-\sin^4\frac{x}{4}=\sin 2x$.

11. $\sin 2x-\cos 2x=1+\sqrt{2}(\sin 2x+\sin 4x)$.

12. $2\sin^2 2x+\sin 7x-1=\sin x$

13. $2\sin x\cos 2x+\sin 2x\cos x=\sin 4x\cos x$.

14. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\dfrac{1}{\cos x}$

15. $2(\sin x+1)(2-\cos^2 2x-3\sin x)=\sin 4x\cos x$

16. $2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+1=\sqrt{3}(\sqrt{3}\cos x-\sin x)$.

17. $4\cos^2 x+3\tan^2 x-4\sqrt{3}\cos x+2\sqrt{3}\tan x+4=0$.

18. $\sin^3 x+\cos^3 x=\sin x-\cos x$.

19. $8\cos^4 x-\cos 4x=1$.

20. $\sin^2 2x+\sin^2 4x=\dfrac{3}{2}$.

21. $4(\cos^3 x+\sin^3 x)=\cos x+3\sin x$.

22. $4\sin^3 x+4\sin^2 x+3\sin 2x+6\cos x=0$.

23. $(2\sin^2 x-1)\tan^2 2x+3(2\cos^2 x-1)=0$.

24. $\dfrac{\cos^2 x(\cos x-1)}{\sin x+\cos x}=2(1+\sin x)$.

25. $\tan x-2\sqrt{2}\sin x=1$.

26. $\tan x+\tan 2x=\sin 3x.\cos x$.

27. $4\sqrt{3}\sin x\cos x\cos 2x=\sin 8x$.

28. $\sin\left(2x+\dfrac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\dfrac{7\pi}{2}\right)=1+\sin x$.

29. $\tan x-3\cot x=4(\sin x+\sqrt{3}\cos x)$.

30. $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin 2x}=\dfrac{1}{2}(\tan x+\cot x)$.

Lời giải

1. $\cos 2x=(1+2\cos x)(\cos x-\sin x)$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin^2 x=(1+2\cos x)(\cos x-\sin x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x+\sin x-1-2\cos x)(\cos x-\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x-1)(\cos x-\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-\cos x=1\\ \cos x-\sin x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi;\pi+k2\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right\}$.

2. $(1+\sin x)^2=\cos^3 x$

$\Leftrightarrow (1+\sin x)^2=\cos x\left(1-\sin^2 x\right)$

$\Leftrightarrow (1+\sin x)\left[1+\sin x-\cos x(1-\sin x)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ 1+\sin x-\cos x+\sin x\cos x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ 1+\sin x-\cos x+\sin x\cos x=0\quad(1)\end{array}\right.$

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\left(|t|\le\sqrt{2}\right)$

$\Rightarrow t^2=1-2\sin x\cos x\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow 1+t+\frac{1-t^2}{2}=0\Leftrightarrow t^2-2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\ (TM)\\ t=3\ (l)\end{array}\right.$.

Với $t=-1\Rightarrow\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{-\frac{\pi}{2}+k2\pi;k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right\}$.

3. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x+2\sin 3x\cos x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin 2x+\sin 3x)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin 2x=-\sin 3x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ 2x=-3x+k2\pi\\ 2x=\pi+3x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{k2\pi}{5}\\ x=-\pi+k2\pi\end{array}\right.$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{k2\pi}{5};-\pi+k2\pi\right\}$.

4. $\cos 10x-\cos 8x-\cos 6x+1=0$

$\Leftrightarrow(\cos 10x-\cos 6x)+1-\cos 8x=0$

$\Leftrightarrow -2\sin 8x\sin 2x+2\sin^2 4x=0$

$\Leftrightarrow -4\sin 4x\cos 4x\sin 2x+2\sin^2 4x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin 4x(\sin 4x-2\cos 4x\sin 2x)=0$

$\Leftrightarrow 4\sin 4x\sin 2x(\cos 2x-\cos 4x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 4x = 0\\ \sin 2x = 0\\ \cos 4x = \cos 2x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x = k\pi\\ 2x = k\pi\\ 4x = 2x + k2\pi\\ 4x = -2x + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{k\pi}{4}\\ x = \dfrac{k\pi}{2}\\ x = k\pi\\ x = \dfrac{k\pi}{3}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\dfrac{k\pi}{4}; \dfrac{k\pi}{3}\right\}$.

5. $\sin 4x = 2\cos^2 x - 1$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x \cos 2x = \cos 2x$

$\Leftrightarrow \cos 2x(2\sin 2x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \sin 2x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ 2x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ 2x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\\ x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}; \dfrac{\pi}{12} + k\pi; \dfrac{5\pi}{12} + k\pi\right\}$.

6. $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) + (1 + 2\sin x \cos x) + (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)^2 + (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + \sin x + \cos x + \cos x - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + 2\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0\\ 1 + 2\cos x = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0\\ \cos x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x + \dfrac{\pi}{4} = k\pi\\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có các nghiệm $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \, (k \in \mathbb{Z})$

7. $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ta có

$(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x\right)=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x-\sin x\right)\left(\sin x+\cos x\right)^2=\cos x+\sin x$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x+\sin x\right)\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=\cos x+\sin x$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x+\sin x\right)\left(\cos 2x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ \cos 2x-1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \cos 2x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=k\pi\\ 2x=k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=k\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy phương trình có các nghiệm $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi;x=k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

8. $\left(1+2\sin x\right)^2\cos x=1+\sin x+\cos x$

$$\Leftrightarrow \left(1+4\sin x+4\sin^2 x\right)\cos x=1+\sin x+\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos x+4\sin x\cos x+4\sin^2 x\cos x=1+\sin x+\cos x$$

$$\Leftrightarrow 4\sin x\cos x\left(\sin x+1\right)=\sin x+1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x+1\right)\left(2\sin 2x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+1=0\\ 2\sin 2x-1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin 2x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ 2x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ 2x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{12}+k\pi\\ x=\frac{5\pi}{12}+k\pi\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy phương trình có các nghiệm $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi;x=\frac{\pi}{12}+k\pi;x=\frac{5\pi}{12}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

9. $\left(2\sin x-1\right)\left(2\cos x+\sin x\right)=\sin 2x-\cos x$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin x-1\right)\left(2\cos x+\sin x\right)=2\sin x\cos x-\cos x$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin x-1\right)\left(2\cos x+\sin x\right)=\cos x\left(2\sin x-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin x-1\right)\left(\cos x+\sin x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\sin x-1=0\\ \cos x+\sin x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2}\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy phương trình có các nghiệm $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\,;x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\,;x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

10. $\cos^4\frac{x}{4}-\sin^4\frac{x}{4}x=\sin 2x$

$$\Leftrightarrow\left(\cos^2\frac{x}{4}-\sin^2\frac{x}{4}\right)\left(\cos^2\frac{x}{4}+\sin^2\frac{x}{4}\right)=\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow\cos\frac{x}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}-2x+k2\pi\\ \frac{x}{2}=-\frac{\pi}{2}+2x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{5x}{2}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ \frac{-3x}{2}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{5}+\frac{k4\pi}{5}\\ x=-\frac{\pi}{3}-\frac{k4\pi}{3}\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy phương trình có các nghiệm $x=\frac{\pi}{5}+\frac{k4\pi}{5}\,;x=-\frac{\pi}{3}-\frac{k4\pi}{3}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

11. $\sin 2x-\cos 2x=1+\sqrt{2}\left(\sin 2x+\sin 4x\right)$

$$\Leftrightarrow\sin 2x-2\cos^2 x=\sqrt{2}\sin 2x\left(1+2\cos 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x\left(\sin x-\cos x\right)=2\sqrt{2}\cos x\sin x\left(1+2\cos 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin x\left(1+2\cos 2x\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin x+2\sqrt{2}\sin x\cos 2x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}\left(\sin 3x-\sin x\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin 3x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ 3x=x-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ 3x=\pi-x+\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{8}+k\pi\\ x=\frac{5\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

12. $2\sin^2 2x+\sin 7x-1=\sin x$

$$\Leftrightarrow\sin 7x-\sin x=1-2\sin^2 2x$$

$$\Leftrightarrow\sin 7x-\sin x=\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 4x\sin 3x=\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow\cos 4x\left(2\sin 3x-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 4x=0\\ \sin 3x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\\ x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}\\ x=\frac{5\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

13. $2\sin x\cos 2x+\sin 2x\cos x=\sin 4x\cos x$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x = \cos x\left(\sin 4x - \sin 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x = 2\cos x\cos 3x\sin x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos 2x = \cos 3x\cos x\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos 2x = \dfrac{1}{2}\cos 4x + \dfrac{1}{2}\cos 2x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0\\ \cos 4x = \cos 2x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \dfrac{k\pi}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{3}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

14. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\quad (ĐK: x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\tan x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\tan x + 1 = \tan^2 x + 1 \Leftrightarrow \tan^2 x - \sqrt{3}\tan x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 0\\ \tan x = \sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)\ \text{(tmđk)}.$$

15. $2\left(\sin x + 1\right)\left(2 - \cos^2 2x - 3\sin x\right) = \sin 4x\cos x$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sin x + 1\right)\left(2 - \cos^2 2x - 3\sin x\right) = 4\sin x\cos^2 x\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sin x + 1\right)\left(2 - \cos^2 2x - 3\sin x\right) = 4\sin x\cos 2x\left(1 - \sin^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ 2 - \cos^2 2x - 3\sin x = 2\sin x\cos 2x\left(1 - \sin x\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ 2 - \cos^2 2x - 3\sin x = 2\sin x\left(1 - 2\sin^2 x\right)\left(1 - \sin x\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ 2 - \left(1 - 2\sin^2 x\right)^2 - 3\sin x = \left(2\sin x - 2\sin^2 x\right)\left(1 - 2\sin^2 x\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ 8\sin^4 x - 4\sin^3 x - 6\sin^2 x + 5\sin x - 1 = 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \left(\sin x + 1\right)\left(2\sin x - 1\right)^3 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi\end{array}\right.\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

16. $2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 1 = \sqrt{3}\left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right)$.

Cách 1: Đặt $t = \sqrt{3}\cos x - \sin x$

$$\Rightarrow t^2 = 3\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 2\cos^2 x + 1 - 2\sqrt{3}\sin x\cos x$$

Phương trình trở thành: $t^2 = \sqrt{3}t \Rightarrow \left[\begin{array}{l}t = 0\\ t = \sqrt{3}\end{array}\right.$.

Với $t=0 \Rightarrow \sqrt{3}\cos x-\sin x=0 \Rightarrow \tan x=\sqrt{3} \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Với $t=\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}\cos x-\sin x=\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right., (k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{3}+k\pi, x=k2\pi, x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Cách 2: $2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+1=\sqrt{3}(\sqrt{3}\cos x-\sin x)$

$$\Leftrightarrow \cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x+2=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1=\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

Đặt $t=x+\frac{\pi}{6}$, ta được

$$\cos 2t+1=\sqrt{3}\cos t \Leftrightarrow 2\cos^2 t=\sqrt{3}\cos t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos t=0 \\ \cos t=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Ta được nghiệm như cách 1.

17. $4\cos^2 x+3\tan^2 x-4\sqrt{3}\cos x+2\sqrt{3}\tan x+4=0$.

Điều kiện: $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ta có $4\cos^2 x+3\tan^2 x-4\sqrt{3}\cos x+2\sqrt{3}\tan x+4=0$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos x-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}.\tan x+1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\cos x-\sqrt{3}=0 \\ \sqrt{3}\tan x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$$

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

18. $\sin^3 x+\cos^3 x=\sin x-\cos x$.

$$\Leftrightarrow \sin^3 x-\sin x+\cos^3 x+\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\left(\sin^2 x-1\right)+\cos^3 x+\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 x-\cos^2 x\sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x\left(\cos^2 x-\sin x\cos x+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=0 \ (1) \\ \cos^2 x-\sin x\cos x+1=0 \ (2) \end{array}\right.$$

Ta có $(1) \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

$(2) \Leftrightarrow \sin 2x-\cos 2x=3$ (Vô nghiệm vì $1^2+(-1)^2<3^2$)

(Hoặc ta có $\cos^2 x+1\ge 1, -\sin x\cos x=-\frac{1}{2}\sin 2x\ge -\frac{1}{2}\Rightarrow (2)$ Vô nghiệm).

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

19. $8\cos^4 x-\cos 4x=1$.

$\Leftrightarrow 8\frac{(1+\cos 2x)^2}{4}-2\cos^2 2x=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

20. $\sin^2 2x+\sin^2 4x=\frac{3}{2}$.

$\Leftrightarrow 1-\cos 4x+2\sin^2 4x-3=0$

$\Leftrightarrow 2(1-\cos^2 4x)-\cos 4x-2=0$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 4x+\cos 4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x=0\\ \cos 4x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\\ x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}, x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

21. $4(\cos^3 x+\sin^3 x)=\cos x+3\sin x$.

$\Leftrightarrow 4\sin^3 x-3\sin x-\cos x+4\cos^3 x=0$

Nếu $\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow \sin x=\pm 1$ không là nghiệm của phương trình.

Nếu $\cos x\ne 0$, chia 2 vế của phương trình cho $\cos^3 x$ ta được:

$4\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}-3\frac{\sin x}{\cos^3 x}-\frac{\cos x}{\cos^3 x}+4\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x}=0$

$\Leftrightarrow 4\tan^3 x-3\frac{\tan x}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}+4=0$

$\Leftrightarrow \tan^3 x-\tan^2 x-3\tan x+3=0$

$\Leftrightarrow (\tan x-1)(\tan^2 x-3)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=\pm\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

22. $4\sin^3 x+4\sin^2 x+3\sin 2x+6\cos x=0$.

$\Leftrightarrow 4\sin^3 x+4\sin^2 x+6\sin x\cos x+6\cos x=0$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 x(\sin x+1)+6\cos x(\sin x+1)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x+1)(4\sin^2 x+6\cos x)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x+1)(-4\cos^2 x+6\cos x+4)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \cos x=-\dfrac{1}{2}\\ \cos x=2\,(loaïi)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

23. $(2\sin^2 x-1)\tan^2 2x+3(2\cos^2 x-1)=0$.

Điều kiện: $2x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\,(k\in\mathbb{Z})$.

Ta có $(2\sin^2 x-1)\tan^2 2x+3(2\cos^2 x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \frac{-\cos 2x.\sin^2 2x}{\cos^2 2x}+3\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x}-3\cos 2x=0 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 2x-3\cos^2 2x}{\cos 2x}=0$$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x-3\cos^2 2x \Leftrightarrow \sin^2 2x=3\cos^2 2x \Leftrightarrow \tan^2 2x=3$

$\Leftrightarrow \tan 2x=\pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$ thoả mãn điều kiện.

Vậy nghiệm của phương tình là: $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

24. $\dfrac{\cos^2 x(\cos x-1)}{\sin x+\cos x}=2(1+\sin x)$.

Điều kiện: $\sin x+\cos x\neq 0 \Leftrightarrow \tan x\neq -1 \Leftrightarrow x\neq -\dfrac{\pi}{4}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$.

Ta có $\dfrac{\cos^2 x(\cos x-1)}{\sin x+\cos x}=2(1+\sin x)$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)(1+\sin x)(\cos x-1)=2(1+\sin x)(\sin x+\cos x)$

$\Leftrightarrow (1+\sin x)(2\sin x+2\cos x)-(1-\sin x)(1+\sin x)(\cos x-1)=0$

$\Leftrightarrow (1+\sin x)(1+\sin x.\cos x+\sin x+\cos x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sin x=-1 & (1)\\ 1+\sin x.\cos x+\sin x+\cos x=0 & (2)\end{array}\right.$$

Giải (1): $\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Giải (2): $1+\sin x.\cos x+\sin x+\cos x=0$.

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow \sin x.\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$.

Ta được phương trình: $1+\dfrac{t^2-1}{2}+t=0 \Leftrightarrow t^2+2t+1=0 \Leftrightarrow t=-1$.

Với $t=-1\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\Rightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right., \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm của phương trình là: $x=\pi+k2\pi$; $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

25. $\tan x-2\sqrt{2}\sin x=1$.

Điều kiện: $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Ta có $\tan x-2\sqrt{2}\sin x=1$

$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}-2\sqrt{2}\sin x=1\Leftrightarrow \sin x-2\sqrt{2}\sin x.\cos x-\cos x=0$

$\Leftrightarrow\left(\sin x-\cos x\right)-2\sqrt{2}\sin x.\cos x=0$.

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

$\Rightarrow \sin x.\cos x=\frac{1-t^2}{2}$.

Ta được phương trình: $t-2\sqrt{2}\frac{1-t^2}{2}=0\Leftrightarrow \sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{\sqrt{2}}{2}\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \\ t=-\sqrt{2}\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \end{array}\right.$.

Với $t=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi \\ x=\frac{13\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right., \left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Với $t=-\sqrt{2}\Rightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\Rightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm của phương trình là:

$x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi$; $x=\frac{13\pi}{12}+k2\pi$, $x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

26. $\tan x+\tan 2x=\sin 3x.\cos x$.

Điều kiện: $\begin{cases} x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \end{cases}, k\in\mathbb{Z}$

Ta có: $\tan x+\tan 2x=\sin 3x.\cos x$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\sin 3x.\cos x$$
$$\Leftrightarrow \sin 3x=\sin 3x.\cos x.\cos x.\cos 2x$$
$$\Leftrightarrow \sin 3x\left(1-\cos x.\cos x.\cos 2x\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x=0\\ \dfrac{1+\cos 2x}{2}.\cos 2x=1\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x=k\pi\\ \cos^2 2x+\cos 2x-2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{3}\\ \left[\begin{array}{l}\cos 2x=1\\ \cos 2x=-2\,(loaïi)\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{3}\\ x=k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$$

Kiểm tra điều kiện suy ra nghiệm phương trình là $x=\dfrac{k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$.

27. $4\sqrt{3}\sin x\cos x\cos 2x=\sin 8x$.

Ta có $4\sqrt{3}\sin x\cos x\cos 2x=\sin 8x$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin 2x.\cos 2x=\sin 8x$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 4x=\sin 8x$$
$$\Leftrightarrow \sin 4x\left(\sqrt{3}-2\cos 4x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 4x=0\\ \cos 4x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{4}\\ \left[\begin{array}{l}4x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ 4x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{k\pi}{4}\\ x=\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}\\ x=-\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

28. $\sin\left(2x+\dfrac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\dfrac{7\pi}{2}\right)=1+\sin x$.

Ta có: $\sin\left(2x+\dfrac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\dfrac{7\pi}{2}\right)=1+\sin x$
$$\Leftrightarrow \cos 2x+3\sin x=1+\sin x$$
$$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x+2\sin x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

29. $\tan x-3\cot x=4\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)$

Điều kiện: $x\neq\dfrac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Ta có $\tan x-3\cot x=4\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)$
$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}-3\frac{\cos x}{\sin x}=4\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 x-3\cos^2 x=4\sin x\cos x\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x-2\sin 2x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x+\sqrt{3}\cos x=0 \\ \sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x=-\sqrt{3} \\ \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{3}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{4\pi}{9}+\frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}.$$

30. $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin 2x}=\dfrac{1}{2}\left(\tan x+\cot x\right)$

Điều kiện: $x\neq\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Ta có $\dfrac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin 2x}=\dfrac{1}{2}\left(\tan x+\cot x\right)$

$\Leftrightarrow \sin^4 x+\cos^4 x=\sin^2 x+\cos^2 x$

$\Leftrightarrow \left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x.\cos^2 x=1$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x.\cos^2 x=0 \Leftrightarrow \sin 2x=0$ (loại)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

------------------- HẾT-------------------