

CÁC DẠNG TOÁN VỀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ LŨY THỪA - MŨ - LÔGARIT

NHẮC LẠI LÝ THUYẾT

a/ Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ (α là hằng số)

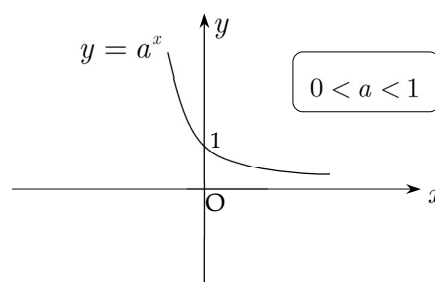
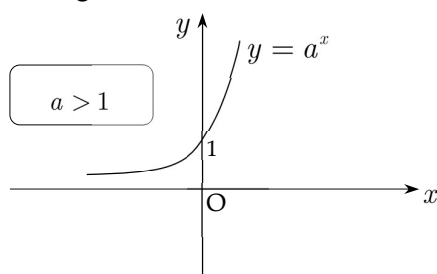
Số mũ α	Hàm số $y = x^\alpha$	Tập xác định D
$\alpha = n$ (n nguyên dương)	$y = x^n$	$D = \mathbb{R}$
$\alpha = n$ (n nguyên dương âm hoặc $n = 0$)	$y = x^n$	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
α là số thực không nguyên	$y = x^\alpha$	$D = (0, +\infty)$
<u>Lưu ý:</u> Hàm số $y = x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với hàm số $y = \sqrt[n]{x}$, ($n \in \mathbb{N}^*$)		

b/ Hàm số mũ $y = a^x$, ($a > 0, a \neq 1$)

- ✧ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- ✧ Tập giá trị: $T = (0, +\infty)$
- ✧ Tính đơn điệu:
 - Khi $a > 1$ hàm số đồng biến.
 - Khi $0 < a < 1$: hàm số nghịch biến.

✧ Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.

✧ Dạng đồ thị:

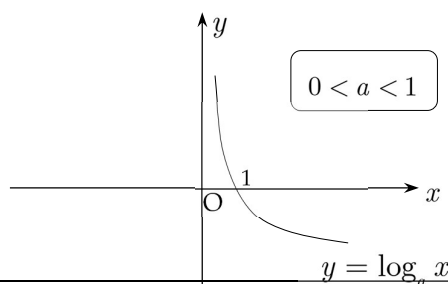
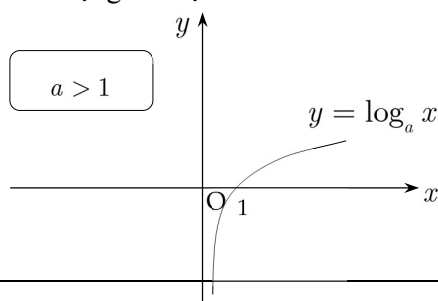
c/ Hàm số logarit $y = \log_a x$, ($a > 0, a \neq 1$)

- ✧ Tập xác định: $D = (0, +\infty)$
- ✧ Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$

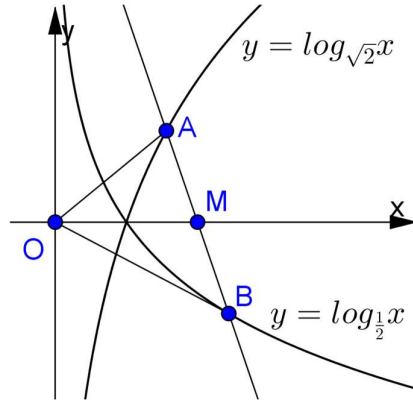
✧ Tính đơn điệu

✧ Nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

✧ Dạng đồ thị:



Câu 1. Gọi A và B là các điểm lần lượt nằm trên các đồ thị hàm số $y = \log_{\sqrt{2}} x$ và $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ sao cho điểm $M(2, 0)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB . Diện tích tam giác OAB là bao nhiêu biết rằng O là gốc tọa độ?



- A. $S = 8 \log_2 \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)$ B. $S = 4 \log_2 \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)$ C. $S = 8 \log_2 \left(\frac{\sqrt{17}+1}{2} \right)$ D. $S = 4 \log_2 \left(\frac{\sqrt{17}+1}{2} \right)$

Lời giải

Chọn B

Gọi tọa độ các điểm $A(a, 2 \log_2 a)$, $B(b, -\log_2 b)$. Vì $M(2, 0)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB nên:

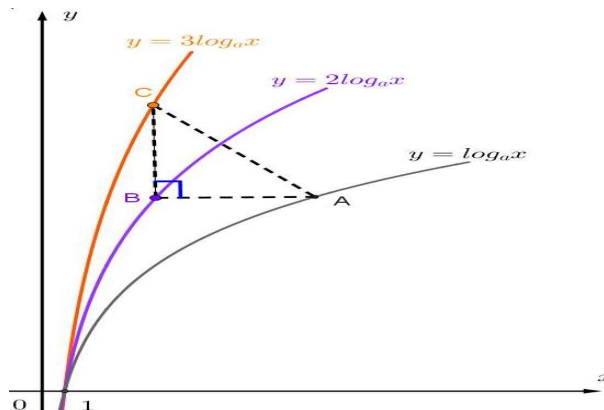
$$\begin{cases} a+b=4 \\ 2 \log_2 a = \log_2 b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ b=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ a^2+a-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a = \frac{\sqrt{17}-1}{2}}$$

Vì $\begin{cases} a+b=4 \\ 2 \log_2 a = \log_2 b \end{cases}$ nên ta suy ra

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA}(a, 2 \log_2 a) \\ \overrightarrow{OB}(4-a, -\log_2 a) \end{cases} \Rightarrow S = \frac{|(4-a)(2 \log_2 a) - a(-\log_2 a)|}{2} = 4 \log_2 \frac{\sqrt{17}-1}{2}.$$

Câu 2. Với $a > 1$. Biết trên đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x$, $y = 2 \log_a x$, $y = 3 \log_a x$ lần lượt có 3 điểm A , B , C sao cho tam giác ABC vuông cân tại B , AB song song với trục hoành và có diện tích bằng 18. Giá trị của a bằng

- A. $\sqrt[6]{6}$. B. $\sqrt[3]{3}$. C. $\sqrt[3]{3}$. D. $\sqrt[3]{6}$.



Lời giải

Chọn B

Giả sử $B = (m; 2 \log_a m)$ thì $A = (m^2; 2 \log_a m)$, $C = (m; 3 \log_a m)$, $m > 0$.

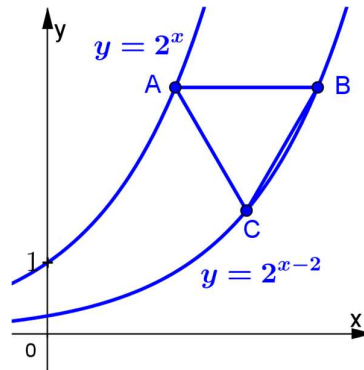
Ta có $AB = |m^2 - m|$, $BC = |\log_a m|$.

Vì $AB = BC$, $S_{\Delta ABC} = 18$ nên $\frac{1}{2}AB \cdot BC = 18 \Rightarrow AB = BC = 6$.

$$|m^2 - m| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 6 = 0 \\ m^2 - m + 6 = 0(VN) \end{cases}; m > 0 \Rightarrow m = 3.$$

$$|\log_a m| = 6 \Leftrightarrow |\log_a 3| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a 3 = 6 \\ \log_a 3 = -6 < 0 \end{cases}, a > 1 \Rightarrow a^6 = 3 \Leftrightarrow a = \sqrt[6]{3}.$$

Câu 3. Cho hàm số $y = 2^x$ và $y = 2^{x-2}$ có đồ thị lần lượt là (C_1) , (C_2) như hình vẽ. Gọi A là điểm thuộc (C_1) , B, C là các điểm thuộc (C_2) sao cho tam giác ΔABC là tam giác đều và AB song song với Ox . Khi đó tọa độ điểm C là $(p; q)$, giá trị của biểu thức $2^p + q$ bằng?



A. $5\sqrt{3}$.

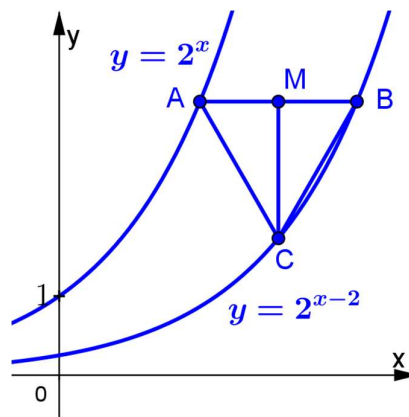
B. $4\sqrt{3}$.

C. $6\sqrt{3}$.

D. $10\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



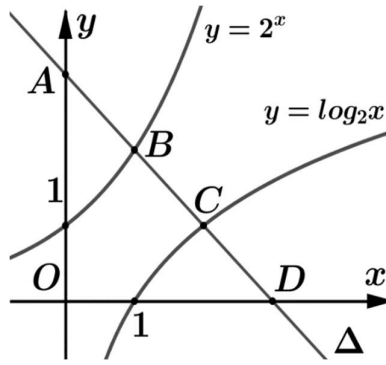
Gọi $A(a; 2^a)$ và $B(a+2; 2^a)$. Khi đó trung điểm của AB là $M(a+1; 2^a)$.

Ta có: $AB = 2$, do đó $CM = \sqrt{3}$. Vì $CM \parallel Oy$ nên $C(a+1; 2^a - \sqrt{3}) \in (C_2)$. Khi đó ta có:

$$2^{a-1} = 2^a - \sqrt{3} \Leftrightarrow 2^a = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow a = 1 + \log_2 \sqrt{3}.$$

Khi đó: $C(2 + \log_2 \sqrt{3}; \sqrt{3})$ hay $2^p + q = 5\sqrt{3}$.

Câu 4. Cho hai hàm số $y = 2^x$, $y = \log_2 x$ có đồ thị như hình vẽ. Đường thẳng Δ cắt trục tung, đồ thị hàm số $y = 2^x$, đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ và trục hoành lần lượt tại A, B, C, D thỏa mãn $AB = BC = CD$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng Δ như thế?



A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

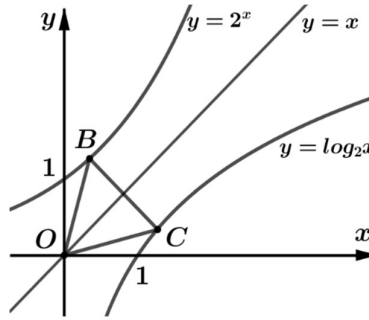
$$\text{Gọi } \begin{cases} B(b; 2^b) \in y = 2^x \\ C(c; \log_2 c) \in y = \log_2 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(2b - c; 2^{b+1} - \log_2 c) \\ D(2c - b; 2 \log_2 c - 2^b) \end{cases}.$$

$$\text{Vì } \begin{cases} A \in Oy \\ D \in Ox \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b - c = 0 \\ 2 \log_2 c - 2^b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b \\ \log_2 c = 2^{b-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2b \\ c = 2^{2^{b-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1, c = 2 \\ b = 2, c = 4 \end{cases}.$$

Vậy có hai bộ điểm A, B, C, D thỏa yêu cầu bài toán. Hay có **hai** đường thẳng Δ như thế

Câu 5. Gọi B và C lần lượt là các điểm thuộc đồ thị hàm số $y = 2^x$ và

$y = \log_2 x$ sao cho tam giác OBC đều. Giả sử điểm B có hoành độ là a khi đó tỉ số $\frac{2^x}{a}$ bằng



A. $2 - \sqrt{3}$.

B. $2 + \sqrt{3}$.

C. $2 - \sqrt{2}$.

D. $2 + \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

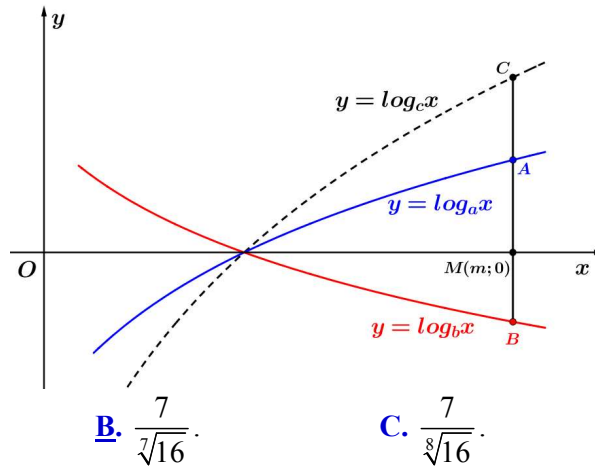
Đồ thị hai hàm số $y = 2^x$ và $y = \log_2 x$ đối xứng qua đường thẳng $y = x$ và theo yêu cầu bài toán là tam giác OBC đều nên suy ra $B(a; 2^a)$, $C(2^a; a)$ (theo đề điểm B có hoành độ là a).

Tam giác OBC đều $\longrightarrow OB = BC \Leftrightarrow OB^2 = BC^2 \Leftrightarrow 2^{2a} - 4a \cdot 2^a + a^2 = 0$. Đây là phương trình đẳng cấp và tìm được $\frac{2^x}{a} = 2 \pm \sqrt{3}$. Vì B là điểm nằm trên đồ thị hàm số $y = 2^x$ suy ra $2^a > a$

nên suy ra $\frac{2^x}{a} = 2 + \sqrt{3}$.

Câu 6. Cho ba hàm số $y = \log_a x$; $y = \log_b x$; $y = \log_c x$ có đồ thị biểu diễn như

hình vẽ. Biết rằng $5MA = 4MB = 3MC$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^6 + 3b^{10} + c^{10}$ bằng



A. $2\sqrt[8]{243}$.

B. $\frac{7}{\sqrt[3]{16}}$.

C. $\frac{7}{\sqrt[8]{16}}$.

D. $4\sqrt[3]{60}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $c > a > 1 > b > 0$. Tiếp theo, ta có:

$$\begin{cases} 5MA = 3MC = 5\log_a m = 3\log_c m \\ 5MA = 4MB = 5\log_a m = 4\log_b m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{\log_m a} = \frac{3}{\log_m c} \\ \frac{5}{\log_m a} = \frac{4}{\log_m b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\log_m a = 5\log_m c \\ 4\log_m a = 5\log_m b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3 = c^5 \\ a^4 = b^5 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } T = a^6 + 3b^{10} + c^{10} = a^6 + \frac{3}{a^8} + a^6 = 2a^6 + \frac{3}{a^8} = \frac{a^6}{2} + \frac{a^6}{2} + \frac{a^6}{2} + \frac{a^6}{2} + \frac{1}{a^8} + \frac{1}{a^8} + \frac{1}{a^8}$$

$$\text{Theo Cösi, ta có: } T = \frac{a^6}{2} + \frac{a^6}{2} + \frac{a^6}{2} + \frac{a^6}{2} + \frac{1}{a^8} + \frac{1}{a^8} + \frac{1}{a^8} \geq 7\sqrt[7]{\frac{a^6}{2} \cdot \frac{a^6}{2} \cdot \frac{a^6}{2} \cdot \frac{a^6}{2} \cdot \frac{1}{a^8} \cdot \frac{1}{a^8} \cdot \frac{1}{a^8}} = \frac{7}{\sqrt[7]{16}}$$

$$\text{Nên suy ra } T_{\min} = \frac{7}{\sqrt[7]{16}} \text{ khi và chỉ khi } \frac{a^6}{2} = \frac{1}{a^8} \Leftrightarrow a = \sqrt[14]{2} > 1$$

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x) = (2x+1)^x$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp

tuyến với đồ thị hàm số (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ tương ứng cắt hai trục tọa độ tại hai điểm phân biệt A, B. Từ đó hãy tính diện tích tam giác ΔOAB

A. $\frac{(3\ln 3 + 4)^2}{2(3\ln 3 - 1)}$.

B. $\frac{2(3\ln 3 + 1)}{3\ln 3 - 2}$.

C. $\frac{(3\ln 3 - 1)^2}{2(3\ln 3 + 2)}$.

D. $\frac{3\ln 3 - 1}{2\ln 3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } y = f(x) = (2x+1)^x = e^{x\ln(2x+1)}$$

$$\text{Suy ra } f'(x) = \left[\ln(2x+1) + \frac{2x}{2x+1} \right] e^{x\ln(2x+1)} = \left[\ln(2x+1) + \frac{2x}{2x+1} \right] (2x+1)^x$$

$$\text{Tọa độ tiếp điểm A có hoành độ và tung độ lần lượt là } \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = (2x_0 + 1)^{x_0} = 3 \end{cases} \Rightarrow A(1; 3)$$

$$\text{Hệ số góc của tiếp tuyến } f'(1) = 3\ln 3 + 2$$

$$\text{Suy ra phương trình tiếp tuyến là } y = (3\ln 3 + 2)(x - 1) + 3 = (3\ln 3 + 2)x + 1 - 3\ln 3$$

$$\text{Chuyển phương trình trên về dạng phương trình đoạn chắn: } \frac{x}{\left(\frac{3\ln 3 - 1}{3\ln 3 + 2} \right)} + \frac{y}{(-3\ln 3 + 1)} = 1$$

Như ta đã biết phương trình đường thẳng trong Oxy $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ cắt trục hoành và tung lần lượt tại hai điểm A, B nên ta áp dụng suy ra phương trình trên

Tọa độ của hai giao điểm của tiếp tuyến với hai trục toạ độ là $\Rightarrow A(0; 1 - 3\ln 3), B\left(0; \frac{3\ln 3 - 1}{3\ln 3 + 2}\right)$

Suy ra diện tích của tam giác OAB là $S = \frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{(3\ln 3 - 1)^2}{2(3\ln 3 + 2)}$

- Câu 8.** Biết rằng hai đồ thị hàm số $y = 2^x$ và $y = 3^x$ có tồn tại một tiếp tuyến chung. Khi đó, giá trị gần nhất của hệ số góc của tiếp tuyến đó nằm trong khoảng nào sau đây:
A. $(0.6; 0.7)$. **B.** $(0.7; 0.8)$. **C.** $(0.8; 0.9)$. **D.** $(0.9; 1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta đặt: $\begin{cases} m = \ln 2 \\ n = \ln 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^m = 2 \\ e^n = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = f(x) = 2^x = e^{mx} \\ y = g(x) = 3^x = e^{nx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = m \cdot e^{mx} \\ g'(x) = n \cdot e^{nx} \end{cases}$

Suy ra hai đồ thị tồn tại hệ số góc chung khi $\exists a, b$ sao cho $f'(a) = g'(b) = 0$

$$\Rightarrow m \cdot e^{ma} = n \cdot e^{nb} \Leftrightarrow e^{ma} = \frac{n}{m} \cdot e^{nb} \Leftrightarrow \ln(e^{ma}) = \ln\left(\frac{n}{m} \cdot e^{nb}\right) \Leftrightarrow ma = \ln\left(\frac{n}{m}\right) + nb$$

Suy ra $a = \frac{1}{m} \cdot \ln\left(\frac{n}{m}\right) + \frac{n}{m} \cdot b \Rightarrow \begin{cases} A\left(\frac{1}{m} \ln\left(\frac{n}{m}\right) + \frac{nb}{m}; \frac{n}{m} e^{nb}\right) \\ B(b; e^{nb}) \end{cases}$ với A, B lần lượt là tiếp điểm của đồ

thị $f(x)$ và $g(x) \Rightarrow$ Hệ số góc của AB là $k_{AB} = \frac{(n-m) \cdot e^{nb}}{\ln\left(\frac{n}{m}\right) + (n-m)b} = n \cdot e^{nb}$

Giải phương trình trên theo ẩn b ta thu được $b = \frac{(n-m) - n \ln\left(\frac{n}{m}\right)}{n(n-m)}$

Suy ra thế vào thu được $k_{AB} = g'(b) = n e^{nb} = n \cdot e^{\frac{(n-m) - n \ln\left(\frac{n}{m}\right)}{n(n-m)}} = n \cdot e^{\frac{(n-m) - n \ln\left(\frac{n}{m}\right)}{(n-m)}} = e^{\left(\frac{m^n}{n^n}\right)^{\frac{1}{n-m}}}$

$$k_{AB} = g'(b) = e^{\left(\frac{(\ln 2)^{\ln 3}}{(\ln 3)^{\ln 2}}\right)^{\frac{1}{\ln 3 - \ln 2}}} \approx 0,857 \in (0.8; 0.9)$$

- Câu 9.** Cho các hàm số $y = f(x) = \ln(x-5) + 5$ có đồ thị (C) và $y = g(x) = 9 - \ln(3-x)$ có đồ thị (C') . Gọi (C_0) là đường tròn có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đồ thị (C) và (C') ; S_0 là diện tích của (C_0) . Hỏi S_0 gần với giá trị nào sau đây
A. 23. **B.** 24. **C.** 25. **D.** 26.

Lời giải

Chọn C

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M_1(x_1; y_1)$ với $x_1 > 5$:

$$d_1: y = \frac{1}{x_1 - 5}(x - x_1) + \ln(x_1 - 5) + 5$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C') tại $M_1(x_2; y_2)$ với $x_2 < 3$:

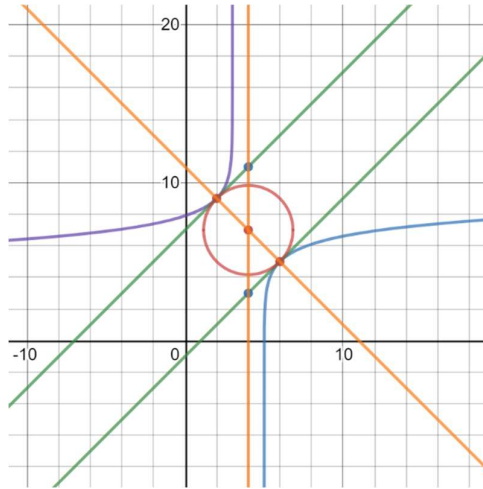
$$d_2: y = \frac{1}{3-x_2}(x-x_2) + 9 - \ln(3-x_2)$$

Muốn cho d_1 song song d_2 thì ta phải có $\frac{1}{x_1-5} = \frac{1}{3-x_2} \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{2} = 4$ (1)

$$\text{Xét: } \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{f(x_1)+g(8-x_2)}{2} = \frac{\ln(x_1-5)+5+9-\ln(3-8+x_1)}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điểm $I(4;7)$ là trung điểm của đoạn thẳng M_1M_2 .

Với mỗi cặp tiếp tuyến song song ta đều có điểm $I(4;7)$ là trung điểm của các cặp tiếp điểm $M_1; M_2$ nên suy ra (C) và (C') đối xứng nhau qua điểm $I(4;7)$.



Suy ra đường tròn (C_0) tiếp xúc với cả hai đồ thị (C) và (C') có bán kính nhỏ nhất khi nó tiếp xúc với cả 2 tiếp tuyến tại hai tiếp điểm $M_1; M_2$ và do đó nhận điểm $I(4;7)$ làm tâm.

$$\text{Xét } (C): y = f(x) = \ln(x-5) + 5$$

$\forall M(x; y) \in (C)$ ta có:

$$IM^2 = h(x) = (x-4)^2 + (y-7)^2 = (x-4)^2 + (\ln(x-5)-2)^2 \quad (x > 5)$$

$$h'(x) = 2(x-4) + \frac{2[\ln(x-5)-2]}{x-5}. \text{ Cho } h'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x-5) = -x^2 + 9x - 18 \quad (*)$$

Phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x = 6$ vì vế trái là hàm số đồng biến còn vế phải là hàm nghịch biến với mọi $x > 5$. Lập bảng biến thiên ta có $\min R = \min(IM) = 2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow S_0 = \min S = \pi R^2 = 8\pi \approx 25,13.$$

Câu 10. Cho đồ thị của hai hàm số $y = a^x$ ($a > 1$) và $y = f(x)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x - 2$. Biết rằng đường thẳng $x = 6$ cắt đồ thị hàm số $y = a^x$ tại A , cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $B(6; b)$ sao cho $AB = 6$ và tung độ điểm A lớn hơn tung độ điểm B . Giá trị của $a + b$ gần với số nào dưới đây?

A. 2.

B. 5.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Lấy điểm $M(t; a')$ thuộc đồ thị hàm số $y = a^x$. Gọi d là đường thẳng đi qua $M(t; a')$ và vuông góc với đường thẳng $y = x - 2$. Phương trình đường thẳng d có dạng $y = -x + m$.

Vì d đi qua $M(t; a')$ nên ta có $a' = -t + m \Leftrightarrow m = a' + t$.

Khi đó phương trình đường thẳng d là $y = -x + a' + t$.

Gọi H là giao điểm của d và đường thẳng $y = x - 2$.

Tọa độ điểm H thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x + a' + t \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{a' + t + 2}{2}; \frac{a' + t - 2}{2}\right).$$

Gọi M' là điểm đối xứng với M qua đường thẳng $y = x - 2$ thì H là trung điểm MM' .

$$\Rightarrow M'(a' + 2; t - 2) \text{ thuộc đồ thị hàm số } y = f(x) \Rightarrow f(a' + 2) = t - 2.$$

$$\text{Đặt } u = a' + 2 > 2 \Rightarrow t = \log_a(u - 2) \Rightarrow f(u) = \log_a(u - 2) - 2 \Rightarrow f(x) = \log_a(x - 2) - 2$$

với $x > 2$. Điểm $A(6; a^6)$, $B(6; \log_a 4 - 2)$. Tung độ điểm A lớn hơn điểm B nên ta có

$$AB = a^6 - \log_a 4 + 2 = 6 \Leftrightarrow a^6 - \log_a 4 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a \approx 0,7 < 1 \\ a \approx 1,41 > 1 \end{cases}.$$

Với $a > 1$, chọn $a \approx 1,41 \Rightarrow b \approx 2,03 \Rightarrow a + b \approx 3,44$.

Cách 2:

Vì đồ thị của hai hàm số $y = a^x$ ($a > 1$) và $y = f(x)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x - 2$ nên ta có $x - 2 = a^{f(x)+2} \Rightarrow f(x) = \log_a(x - 2) + 2$. Suy ra ta có được tọa độ các điểm lần lượt là $A(6; a^6)$ và $B(6; \log_a 4 - 2)$.

$$\text{Vì } AB = 6 \text{ nên ta có } \sqrt{(a^6 - \log_a 4 + 2)^2} = 6 \Leftrightarrow a^6 - \log_a 4 + 2 = 6 \Rightarrow a^6 = \log_a 4 + 4 \quad (1)$$

Vì tung độ điểm A lớn hơn tung độ điểm B nên ta có $a^6 > \log_a 4 - 2$.

Phương trình (1) có nghiệm $a = \sqrt{2}$ và vế trái là một hàm số luôn đồng biến trên $(1; +\infty)$, vế phải là một hàm số luôn nghịch biến trên $(1; +\infty)$ nên suy ra $a = \sqrt{2}$ chính là nghiệm duy nhất của (1)

Suy ra $b = 2$. Như vậy, suy ra $a + b = 2 + \sqrt{2} \approx 3,44$.

Câu 11. Trong mặt phẳng Oxy xét tứ giác diện tích $\ln\left(\frac{91}{90}\right)$ các đỉnh có hoành

độ là các số nguyên liên tiếp và nằm trên đồ thị hàm số $y = \ln x$. Hãy xác định tổng các chữ số của hoành độ đỉnh xa gốc tọa độ nhất.

A. 6.

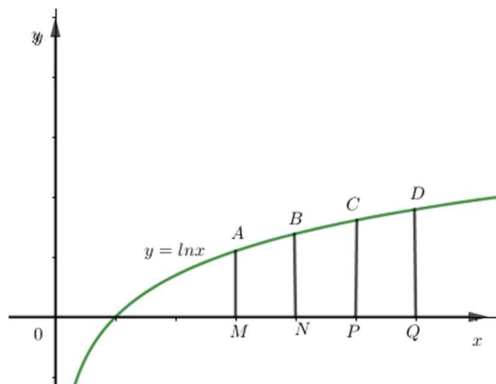
B. 5.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn A



ĐK: $a > 0$

Giả sử $A(a; \ln a); B(a+1; \ln(a+1)); C(a+2; \ln(a+2)); D(a+3; \ln(a+3))$.

Khi đó $S_{ABCD} = S_{ABNM} + S_{BCPN} + S_{CDQP} - S_{ADQM}$.

$$\text{Ta có: } S_{ABNM} = \frac{\ln a + \ln(a+1)}{2} = \frac{\ln(a(a+1))}{2}; S_{BCPN} = \frac{\ln(a+1) + \ln(a+2)}{2} = \frac{\ln((a+1)(a+2))}{2}$$

$$S_{CDQP} = \frac{\ln(a+2) + \ln(a+3)}{2} = \frac{\ln((a+2)(a+3))}{2}; S_{ADQM} = 3 \cdot \frac{\ln a + \ln(a+3)}{2} = 3 \cdot \frac{\ln(a(a+3))}{2}$$

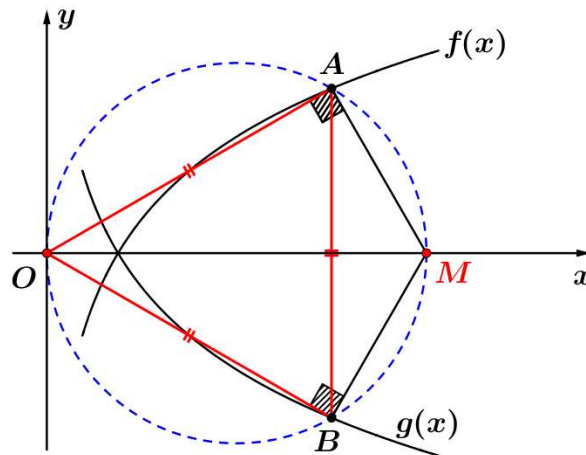
$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{\ln(a(a+1))}{2} + \frac{\ln((a+1)(a+2))}{2} + \frac{\ln((a+2)(a+3))}{2} - 3 \cdot \frac{\ln(a(a+3))}{2}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{91}{90}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{a \cdot (a+1)^2 (a+2)^2 (a+3)}{a^3 \cdot (a+3)^3}}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{91}{90}\right) = \ln\left(\frac{(a+1)(a+2)}{a(a+3)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{91}{90} = \frac{(a+1)(a+2)}{a(a+3)} \Rightarrow a = 12 \Rightarrow x_D = a+3 = 15 \Rightarrow 1+5 = 6.$$

Câu 12. Lần lượt cho các hàm số $y = f(x) = \frac{2\log_2 x}{\sqrt{3}}$ và $y = g(x) = -\frac{2\log_2 x}{\sqrt{3}}$

có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Gọi $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ là các điểm lần lượt nằm trên các đồ thị hàm số $f(x), g(x)$ sao cho $\triangle OAB$ đều. Biết rằng tồn tại hai hoành độ x_1, x_2 của hai điểm M thuộc trục hoành sao cho $OAMB$ là tứ giác nội tiếp. Khi đó, tổng $x_1 + x_2$ bằng



A. 6.

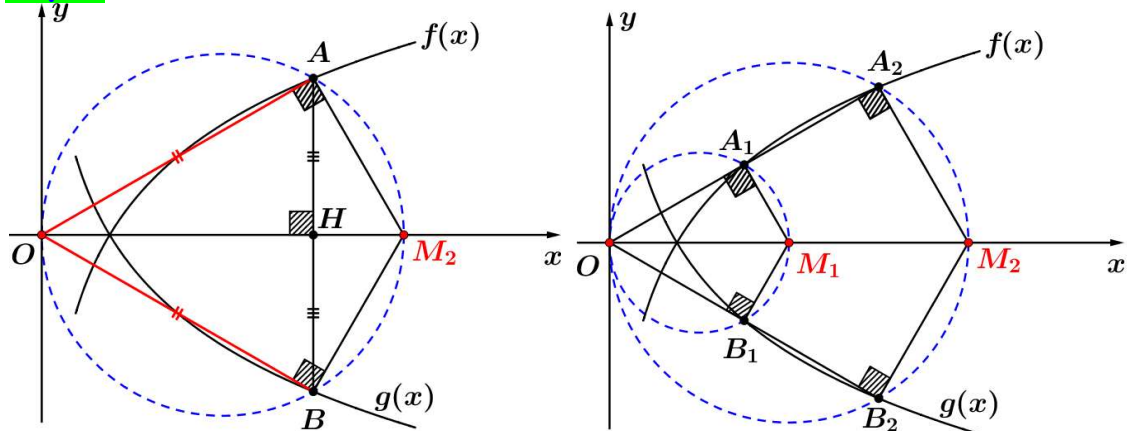
B. 5.

C. 7.

D. 8.

Lời giải

Chọn D



Gọi a là hoành độ của hai điểm A, B với $a > 0$, H là trung điểm AB

$$\text{Ta có: } \begin{cases} A\left(a; \frac{2\log_2 a}{\sqrt{3}}\right) \\ B\left(a; -\frac{2\log_2 a}{\sqrt{3}}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = \frac{4\log_2 a}{\sqrt{3}} \\ \overrightarrow{OA} = \left(a; \frac{2\log_2 a}{\sqrt{3}}\right) \end{cases}$$

$$\text{Do giả thiết yêu cầu } \triangle OAB \text{ đều nên ta có: } OH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{4\log_2 a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \log_2 a = \frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln a}{\ln 2} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln 2}{2} = \frac{n \ln 2}{2n} = \frac{\ln(2^2)}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1\left(2; \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\ A_2\left(4; \frac{4}{\sqrt{3}}\right) \end{cases}$$

Đến đây ta nhận thấy $x_{A_1} = \frac{x_{A_2} + x_O}{2}$ nên suy ra A_1 là trung điểm OA_2

Gọi $M_1(x_1; 0)$ là điểm sao cho thỏa OA_1M_1B nội tiếp $\Rightarrow OA_1 \perp A_1M_1 \Rightarrow \overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{A_1M_1} = 0$

$$\Leftrightarrow 2(m-2) - \frac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{8}{3} \Rightarrow M_1\left(\frac{8}{3}; 0\right) \Rightarrow x_1 = \frac{8}{3}$$

Tương tự ta có điểm $M_2(x_2; 0)$ là điểm sao cho thỏa OA_2M_2B nội tiếp $\Rightarrow OA_2 \perp A_2M_2$

Do ta cũng có A_1 là trung điểm OA_2 nên suy ra A_1M_1 song song với A_2M_2

Theo hệ quả từ đường trung bình suy ra M_1 là trung điểm OM_2 tức $x_2 = 2x_1 = \frac{16}{3}$

Vậy suy ra $x_1 + x_2 = 8$

Câu 13. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [1; 40]$ để đồ

thị của hàm số $y = e^{\frac{x^{2m-1} \cdot \sqrt{x^2+x}}{(x^2-4)^m}}$ có đúng 4 đường tiệm cận (không tính tiệm cận xiên)

A. 39.

B. 40.

C. 21.

D. 20.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Gọi } y = f(x) = \frac{x^{2m-1} \cdot \sqrt{x^2+x}}{(x^2-4)^m} = \frac{x^{2m-1} \cdot \sqrt{x^2+x}}{(x-2)^m \cdot (x+2)^m} \Rightarrow y = e^{f(x)}$$

Trường hợp 1: tham số m chẵn, ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^m \cdot \left(1+\frac{2}{x}\right)^m} = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{f(x)} = \frac{1}{e} \\ \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^{2m-1} \cdot \sqrt{x^2+x}}{(x-2)^m \cdot (x+2)^m} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} e^{f(x)} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^{2m-1} \cdot \sqrt{x^2+x}}{(x-2)^m \cdot (x+2)^m} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} e^{f(x)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^m \cdot \left(1+\frac{2}{x}\right)^m} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f(x)} = e \end{array} \right. \Rightarrow \text{Đồ thị } e^{f(x)} \text{ có 3 đường tiệm cận}$$

Như vậy trường hợp 1 loại

Trường hợp 1: tham số m lẻ, ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^m \cdot \left(1+\frac{2}{x}\right)^m} = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{f(x)} = \frac{1}{e} \\ \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^{2m-1} \cdot \sqrt{x^2+x}}{(x-2)^m \cdot (x+2)^m} = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} e^{f(x)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^{2m-1} \cdot \sqrt{x^2+x}}{(x-2)^m \cdot (x+2)^m} = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} e^{f(x)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^m \cdot \left(1+\frac{2}{x}\right)^m} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{f(x)} = e \end{array} \right. \Rightarrow \text{Đồ thị } e^{f(x)} \text{ có 4 đường tiệm cận}$$

Như vậy suy ra với tham số m lẻ thì thỏa yêu cầu đề bài, tức là có 20 giá trị nguyên m thỏa

Câu 14. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để

đồ thị của hàm số $y = \ln(x^3 + 3mx^2 - 4mx + m - 1)$ có đúng 3 đường tiệm cận (không tính tiệm cận xiên)

A. 39.

B. 40.

C. 21.

D. 20.

Lời giải

Chọn A

Gọi $y = \ln(x^3 + 3mx^2 - 4mx + m - 1) = \ln f(x)$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln f(x) = \ln(\pm\infty) \Rightarrow$ đồ thị y không có tiệm cận ngang

Để đồ thị hàm số $y = \ln f(x)$ có đúng 3 đường tiệm cận thì nó phải là 3 đường tiệm cận đứng ứng với 3 nghiệm đơn của phương trình $f(x) = x^3 + 3mx^2 - 4mx + m - 1 = 0$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + (3m+1)x - m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 + (3m+1)x - m + 1 = g(x) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Suy ra để (1) có 3 nghiệm phân biệt thì (2) phải có 2 nghiệm phân biệt và khác 1

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta_{(2)} = (3m+1)^2 - 4(-m+1) > 0 \\ g(1) = 2m+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{-5-2\sqrt{13}}{9} \\ m > \frac{-5+2\sqrt{13}}{9} \\ m \neq \frac{-3}{2} \end{cases} \xrightarrow{m \in [-20; 20]} \begin{cases} -20 \leq m \leq -2 \\ 1 \leq m \leq 20 \end{cases}$$

Vậy có tất cả 39 giá trị nguyên m thỏa mãn

Câu 15. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để

đồ thị của hàm số $y = \log_3(x^3 + (3m-1)x^2 + mx)$ có đúng 2 đường tiệm cận (không tính tiệm cận xiên)

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Gọi $y = \log_3(x^3 + (3m-1)x^2 + mx) = \log_3 f(x)$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \log_3 f(x) = \log_3(\pm\infty) \Rightarrow$ đồ thị y không có tiệm cận ngang

Để đồ thị hàm số $y = \log_3 f(x)$ có đúng 2 đường tiệm cận thì nó phải là 2 đường tiệm cận đứng ứng với 2 nghiệm đơn của phương trình $f(x) = x^3 + (3m-1)x^2 + mx = 0$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow x(x^2 + (3m-1)x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = x^2 + (3m-1)x + m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Như vậy, để (1) có 2 nghiệm phân biệt thì (2) phải có 2 nghiệm thực. Tức phương trình (2) có nghiệm kép khác 0 hoặc phương trình (2) có hai nghiệm thực phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 0, suy ra:

$$\begin{cases} \Delta_{g(x)} = (3m-1)^2 - 4m = 0 \\ g(0) = m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{1}{9} \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_{g(x)} = (3m-1)^2 - 4m > 0 \\ g(0) = m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > \frac{1}{9} \\ m = 0 \end{cases}$$

Tuy nhiên, khác với câu 14 bên trên, ở câu này, bài toán chưa dừng lại tại đó, bởi vì ta chưa chắc tại những nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ đã tồn tại tiệm cận đứng, vì có khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^-$

Thử lại: $m = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$. Ta suy luận nhanh như sau:

- $x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty \rightarrow \log_3 f(x) \rightarrow$ không thể xác định
- $x \rightarrow 0 \Rightarrow f(x) \rightarrow 0 \rightarrow \log_3 f(x) \rightarrow$ không thể xác định
- $x \rightarrow 1^- \Rightarrow f(x) \rightarrow 0^- \rightarrow \log_3 f(x) \rightarrow$ không thể xác định
- $x \rightarrow 1^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow 0^+ \rightarrow \log_3 f(x) \rightarrow -\infty$

Như vậy, $m = 0$ loại vì chỉ có đúng 1 tiệm cận đứng

Thử lại: $m = 1 \Rightarrow f(x) = x^3 + 2x^2 + x = x(x+1)^2$. Ta suy luận nhanh như sau:

- $x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty \rightarrow \log_3 f(x) \rightarrow$ không thể xác định
- $x \rightarrow -1 \Rightarrow f(x) \rightarrow 0 \rightarrow \log_3 f(x) \rightarrow$ không thể xác định
- $x \rightarrow 0^- \Rightarrow f(x) \rightarrow 0^- \rightarrow \log_3 f(x) \rightarrow$ không thể xác định
- $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow 0^+ \rightarrow \log_3 f(x) \rightarrow -\infty$

Như vậy, $m = 1$ loại vì chỉ có đúng 1 tiệm cận đứng

Từ đó ta kết luận **không** có giá trị m nào thỏa mãn

Câu 16. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị

của hàm số $y = \ln \left(\frac{x^3 - 3x + m}{x^3 - x^2 - 2x} \right)$ có đúng 5 đường tiệm cận (không tính tiệm cận xiên). Số phần tử của tập S là

A. 2.

B. 5.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \left(\frac{x^3 - 3x + m}{x^3 - x^2 - 2x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \left(\frac{1 - \frac{3}{x^2} + \frac{m}{x^3}}{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} \right) = \ln 1 = 0$. Suy ra hàm số trên có một

tiệm cận ngang $y = 0$

Tiếp theo, ta có: $y = \ln \left(\frac{x^3 - 3x + m}{x^3 - x^2 - 2x} \right) = \ln \left(\frac{x^3 - 3x + m}{x(x+1)(x-2)} \right)$

Như vậy, để đồ thị hàm số $y = \ln \left(\frac{x^3 - 3x + m}{x(x+1)(x-2)} \right)$ có 5 đường tiệm cận thì đồ thị hàm số tương

ứng đó phải có 4 tiệm cận đứng. Suy ra ta có các trường hợp sau đây:

Trường hợp 1: Tử số có hai nghiệm, ta dễ dàng suy ra $m = \pm 2$

Với $m = 2 \Rightarrow y = \ln \left(\frac{(x-1)^2(x+2)}{x(x+1)(x-2)} \right)$. Khi $x \rightarrow 1$ thì $\frac{(x-1)^2(x+2)}{x(x+1)(x-2)} \rightarrow 0^-$ cho nên suy ra đồ

thị $y = \ln \left(\frac{(x-1)^2(x+2)}{x(x+1)(x-2)} \right)$ không nhận tiệm cận đứng là $x = 1$, tức đồ thị trên có các tiệm cận

đứng sau: $\{x = \pm 2; x = -1; x = 0\}$ thỏa mãn tức $m = 2$ nhận

Với $m = -2 \Rightarrow y = \ln \left(\frac{(x+1)^2(x-2)}{x(x+1)(x-2)} \right) = \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$.

Ta nhận thấy: Khi $\begin{cases} x \rightarrow -1 \Rightarrow \frac{x+1}{x} \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \Rightarrow \frac{x+1}{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow y \rightarrow +\infty \end{cases}$

Từ đó, ta nhận thấy với trường hợp này thì chỉ hai tiệm cận đứng với $\{x = -1; x = 0\}$ nên không thể thỏa mãn tức $m = -2$ loại

Trường hợp 2: Tử số có ba nghiệm phân biệt và có nhận một nghiệm của mẫu số làm nghiệm

Đặt tử số $f(x) = x^3 - 3x + m$

Suy ra

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -2 < m < 2 \\ f(0) = 0; f(-1) \neq 0; f(2) \neq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -2 < m < 2 \\ f(0) \neq 0; f(-1) = 0; f(2) \neq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -2 < m < 2 \\ f(0) \neq 0; f(-1) \neq 0; f(2) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -2 < m < 2 \\ m = 0; m \neq -2 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -2 < m < 2 \\ m \neq 0; m = -2; m \neq -2; \end{array} \right. \Leftrightarrow m = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} -2 < m < 2 \\ m \neq 0; m \neq -2; m = -2; \end{array} \right. \end{array} \right]$$

Như vậy $S = \{0; 2\}$ tức S có 2 phần tử

Câu 17. Cho hàm số $y = 2\log_2 x$ có đồ thị là (C) . Có bao nhiêu điểm

$M \in (C)$ sao cho khoảng cách từ M đến đường tiệm cận đứng của đồ thị bằng khoảng cách từ M đến trục Ox .

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

♦ Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\log_2 x = -\infty$. Suy ra đồ thị có tiệm cận đứng là đường thẳng Oy .

♦ Gọi $M(x_0; 2\log_2 x_0) \in (C)$ điều kiện $x_0 > 0$.

$$\text{Theo bài ra ta có } d(M; Oy) = d(M; Ox) \Leftrightarrow |x_0| = |2\log_2 x_0| \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2\log_2 x_0 & (1) \\ x_0 = -2\log_2 x_0 & (2) \end{cases}$$

♦ Xét hàm $f(x) = 2\log_2 x - x, x \in (0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{2}{x \ln 2} - 1, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\ln 2}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = 2\log_2 x - x$ trên khoảng $(0; +\infty)$ như sau:

x	0	$\frac{2}{\ln 2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗ 0 ↘		

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm. Mà $f(2) = f(4) = 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có đúng 2 nghiệm $x = 2, x = 4$.

Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm $x_0 = 2, x_0 = 4$.

♦ Xét hàm $g(x) = 2\log_2 x + x, x \in (0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{2}{x \ln 2} + 1 > 0, \forall x > 0. \text{ Suy ra hàm số trên đồng biến trên khoảng } (0; +\infty).$$

$$\text{Mặt khác } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty, g(1) = 1 \Rightarrow \exists c \in (0; +\infty) \text{ mà } g(c) = 0.$$

Suy ra phương trình (2) có nghiệm duy nhất.

Vậy có 3 điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TOANMATH.com