TRƯỜNG THPT CHUYÊN VĨNH PHÚC

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HSG CẤP TRƯỜNG NĂM HỌC 2019-2020

ĐỀ THI MÔN: TOÁN LỚP 11

Thời gian: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (2,5 *điểm*). Cho dãy số (a_n) xác định bởi $\begin{cases} a_1 = 3 \\ 4a_{n+1} = 5a_n + 3\sqrt{a_n^2 - 4},\ n \geq 1. \end{cases}$

a) Chứng minh rằng $\lim a_n = +\infty$ và tính giới hạn $A = \lim \dfrac{a_{n+1}^2 - a_{n+1}a_n + 2}{a_n^2 + a_{n+1}a_n + 1}$.

b) Tồn tại hay không số thực dương α sao cho dãy số $\left(\dfrac{a_n}{n^\alpha}\right)$ có giới hạn hữu hạn ?

Câu 2 (2,0 *điểm*). Cho hệ phương trình 3 ẩn (x, y, z) và a là tham số

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} = a - 1 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} + \sqrt{z+1} = a + 1 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng nếu hệ có nghiệm thực (x, y, z) thì $a \geq \dfrac{9}{2}$.

b) Tìm tất cả các giá trị của a sao cho hệ phương trình đã cho có nghiệm thực.

Câu 3 (1,5 *điểm*).

a) Cho hai số nguyên a và b. Chứng minh rằng nếu $a^5 \equiv b^5 \pmod{97}$ thì $a \equiv b \pmod{97}$.

b) Tìm số dư của phép chia $T = \prod_{1 \leq x \leq 97, x \in Z} \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4\right)$ khi chia cho 97.

Câu 4 (3,0 *điểm*). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. L, M, N lần lượt là các giao điểm thứ hai của AI, BI, CI với (O). Một đường tròn (w) thay đổi luôn đi qua I, L và cắt cạnh BC tại E, F (E nằm giữa B và F). Các đường thẳng LE, LF cắt (O) tại điểm P, Q.

a) Chứng minh rằng tứ giác $EFQP$ nội tiếp và đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi đường tròn (w) thay đổi.

b) Đường thẳng PQ cắt AB, AC lần lượt tại H, K. Chứng minh rằng NH và MK cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (w).

Câu 5 (1,0 *điểm*). Cho $m \leq n$ là hai số nguyên dương và một bảng có kích thước $m \times n$ gồm mn ô vuông đơn vị. Mỗi ô vuông có không quá một con kiến. Biết rằng với mỗi số nguyên dương k thuộc tập hợp $\{1, 2, 3, \ldots, 78\}$, tồn tại một hàng hoặc một cột trong bảng có đúng k con kiến.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của $m + n$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của số con kiến trên bảng đã cho.

----------**Hết**----------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....