

ĐỀ THI OLYMPIC CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN 2023

Môn thi: TOÁN

Ngày thi thứ nhất

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn $a_1 = 7$ và $a_{n+1} = a_n(3a_n - 2^{2^n+1})$ với mọi số nguyên dương n . Chứng minh rằng nếu p là ước nguyên tố của a_{2023} thì $p - 1$ chia hết cho 3.

Câu 2. Giả sử a, b là các số nguyên dương sao cho $\frac{a^3b^3}{a^4 + b^4}$ là số nguyên dương không có ước nguyên tố vượt quá 3. Chứng minh rằng $a = b$.

Câu 3. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp trong đường tròn (O) với phân giác trong AD (D nằm trên cạnh BC). M là trung điểm BC . AM cắt lại (O) tại N . J là trung điểm cung BC chứa A của (O) . Trên (O) lấy các điểm S và T sao cho $JS \parallel AB$ và $JT \parallel AC$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng ST đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ADN .

b) Lấy P thuộc (O) sao cho $NP = AJ$. Gọi giao điểm của PB và PC lần lượt với JS và JT là Q và R . Chứng minh rằng Q, R, D thẳng hàng.

Câu 4. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{2ab(a^2 - ab + b^2)}{a^4 + b^4}} + \sqrt{\frac{2bc(b^2 - bc + c^2)}{b^4 + c^4}} + \sqrt{\frac{2ca(c^2 - ca + a^2)}{c^4 + a^4}} \leq \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2}{a + b + c}.$$

ĐỀ THI OLYMPIC CHUYÊN KHOA HỌC TỰ NHIÊN 2023

Môn thi: TOÁN

Ngày thi thứ hai

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 5. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực sao cho đẳng thức

$$P(x^4) + 4x^2(P(x))^2 = (P(x))^4 + 2x^4$$

đúng với mọi số thực x .

Câu 6. Xét một số số nguyên dương có tổng bằng 2023. Hãy tìm giá trị lớn nhất có thể có của tích các số nguyên dương này.

Câu 7. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B với $BC < AD$. Gọi ω là đường tròn tâm C đi qua B . Giả sử ℓ là một tiếp tuyến của ω sao cho ℓ vuông góc với BD đồng thời ℓ cắt tia đối tia AB tại E . F thuộc đường thẳng CD sao cho $EF \parallel AD$. P là hình chiếu vuông góc của F trên ℓ . M là trung điểm của cạnh AB . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác EPM tiếp xúc với ω .

— HẾT NGÀY 2 —