

Lời nói đầu

Chào các Em học sinh thân mến !

Câu hình học không gian là một nội dung quan trọng trong đề thi của Bộ Giáo Dục và Đào Tạo. Câu này không quá khó. Tuy nhiên nhiều Em học sinh cũng lúng túng khi gặp phần này. Đặc biệt là khi các Em tính khoảng cách hay ý sau của bài toán. Qua nhiều năm tham gia chấm thi Thầy nhận ra được rằng đa phần các Em hay bị mất đi 0,5 điểm ở ý sau của câu này. Với mục tiêu có thể giúp Em cảm thấy nhẹ nhàn với hình học không gian và có thể lấy được trọn điểm câu này. Thầy biên soạn một quyển tài liệu “**PHƯƠNG PHÁP GIẢI NHANH HÌNH KHÔNG GIAN**” gửi đến các Em. Với cách hệ thống lý thuyết và các ví dụ được xây dựng từ cái gốc của vấn đề, nâng dần đến giải quyết các vấn đề tổng quát. Thầy tin rằng có thể mang đến cho các Em một cái nhìn hết sức rõ ràng về hình không gian và có được sự tự tin về hình học không gian. Để thuận lợi cho việc đọc tài liệu Thầy chia ra thành 3 chương:

Chương 1. Tóm tắt lý thuyết quan trọng

Chương 2. Phân dạng các bài toán khoảng cách

Chương 3. Thể tích và các bài toán liên quan

Cuối cùng, Thầy cũng không quên nói rằng dù đã cố gắng nhưng tài liệu chắc chắn sẽ không tránh khỏi sai sót nhất định. Hi vọng nhận được phản hồi từ phía các Bạn đọc. Để lần chỉnh sửa sau sẽ mang đến cho chúng ta một tài liệu hoàn chỉnh hơn nữa để việc học tập của các Em học sinh hiệu quả nhất.

Mọi ý kiến đóng góp xin vui lòng liên hệ một trong các địa chỉ sau:

+ Gmail: tdthuc89@gmail.com

+ Facebook: <https://www.facebook.com/tranduy.thuc.73>

Chân thành cảm ơn các Bạn đọc!

Trần Duy Thúc

Chương 1. TÓM TẮT LÝ THUYẾT QUAN TRỌNG

Trong phần này Thầy chỉ điểm qua những lý thuyết hay sử dụng nhất khi giải bài toán hình không gian. Những phần lý thuyết khác nếu có sử dụng Thầy sẽ nhắc lại trong các bài tập mẫu.

A. Hình học phẳng

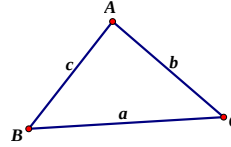
I. Các hệ thức lượng trong tam giác thường

1. Định lý côsin

$$* a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$* b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$* c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos C$$



2. Định lý sin

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$. Trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

II. Các hệ thức lượng trong tam giác vuông

Cho tam giác ABC vuông tại A, có đường cao AH và đường trung tuyến AM. Ta có:

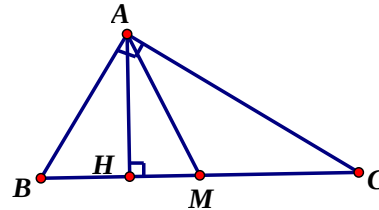
$$* BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$* AH \cdot BC = AB \cdot AC$$

$$* \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$* MA = MB = MC$$

$$* BH \cdot BC = AB^2; CH \cdot CB = AC^2$$



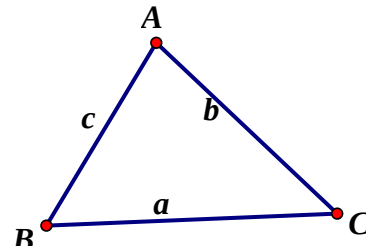
III. Diện tích tam giác

$$* S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

$$* S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B$$

$$* S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}; S_{\triangle ABC} = pr$$

$$* S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \left(p = \frac{a+b+c}{2} \right)$$



+ h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài đường cao kẻ từ A, B và C của $\triangle ABC$.

+ R: bán kính đường tròn ngoại tiếp.

+ r: bán kính đường tròn nội tiếp.

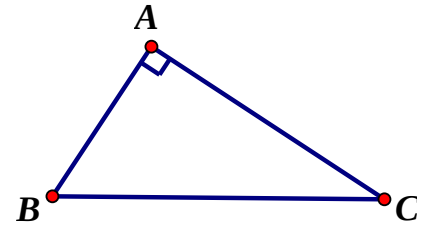
+ p: nửa chu vi của $\triangle ABC$.

IV. Diện đa giác

1. Diện tích tam giác vuông

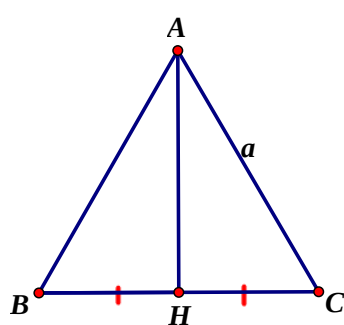
Diện tích tam giác vuông bằng $\frac{1}{2}$ tích hai cạnh góc vuông.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB.AC.$$



2. Diện tích tam giác đều

Cho tam giác ABC đều cạnh a, ta có:



$$+ S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$+ AH = \frac{a \sqrt{3}}{2}.$$

+ Diện tích tam giác đều bằng cạnh bình phương nhân $\sqrt{3}$ chia 4.

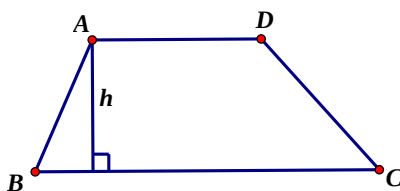
+ Đường cao bằng cạnh nhân $\sqrt{3}$ chia 2.

3. Diện tích hình chữ nhật và hình vuông.

- Diện tích hình vuông bằng cạnh bình phương.
- Diện tích hình chữ nhật bằng chiều dài nhân chiều rộng.

4. Diện tích hình thang.

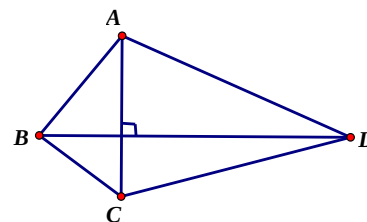
Diện tích hình thang bằng một nửa đường cao nhân tổng hai cạnh đáy.



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} h(AD + BC).$$

5. Diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC.BD.$$

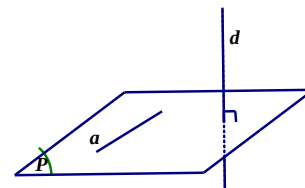


Chú ý: Trường hợp không nhớ công thức tính diện tích của tứ giác thì chia ra thành các tam giác hoặc các hình dễ tính, sau đó cộng lại ta có diện tích cần tính.

B. Hình không gian

I. Đường thẳng vuông góc mặt phẳng

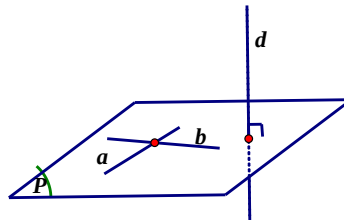
1. Định nghĩa:



$$d \perp (P) \Leftrightarrow d \perp a, \forall a \in (P).$$

2. Định lí (cách chứng minh đường thẳng vuông góc mặt phẳng)

$$\begin{cases} d \perp a \\ d \perp b \\ a, b \subset (P), a \cap b \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow d \perp (P).$$



3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

a. Định nghĩa:

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa đường thẳng d và hình chiếu vuông góc của nó trên (P) .

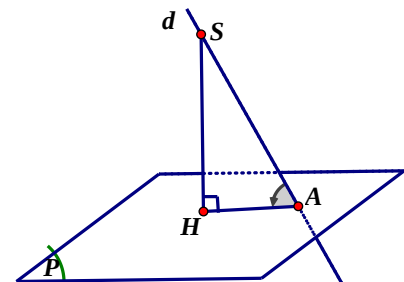
b. Cách xác định góc giữa đường thẳng d và (P) :

B1: Tìm $A = d \cap (P)$.

B2. Lấy điểm $S \in d$ (thường có sẵn), sau đó tìm H là hình chiếu vuông góc của S trên (P) .

Suy ra AH là hình chiếu của d trên (P) .

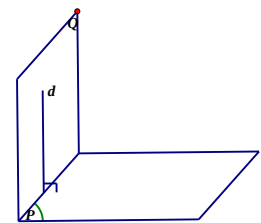
$$\text{Suy ra } (d; (P)) = (d; AH) = \angle SAH.$$



II. Mặt phẳng vuông góc mặt phẳng

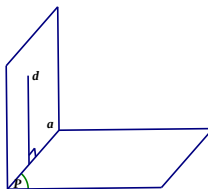
1. Định nghĩa:

Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc nếu một trong hai mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc mặt phẳng kia.



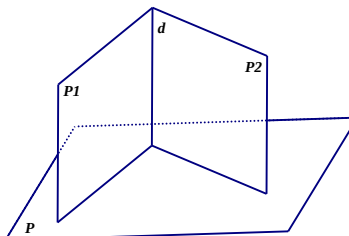
2. Định lí 1

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = a \\ d \subset (P), d \perp a \end{cases} \Rightarrow d \perp (Q)$$



3. Định lí 2

$$\begin{cases} (P_1) \perp (P) \\ (P_2) \perp (P) \\ (P_1) \cap (P_2) = d \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$$



4. Góc giữa hai mặt phẳng

a. Định nghĩa

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

b. Cách xác định góc giữa (P) và (Q)

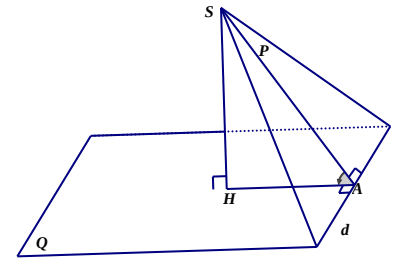
B1: Xác định $d = (P) \cap (Q)$.

B2: Lấy điểm S thuộc (P), tìm H là hình chiếu vuông góc của S trên (Q).

B3: Từ H kẻ HA vuông góc d (A thuộc d).

Ta sẽ chứng minh được SA vuông góc với d.

Suy ra $((P);(Q)) = (SA;HA) = \angle SAH$.



III. Hình chóp đều

1. Định nghĩa

Hình chóp đều là hình chóp có **đáy là đa giác đều** và **chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy**.

Nhận xét:

+ Hình chóp đều có các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau. Các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau.

+ Các cạnh bên bằng nhau và cùng với đáy các góc bằng nhau.

2. Các hình chóp đều thường gặp

a) Hình chóp tam giác đều

Hình chóp tam giác đều $\Rightarrow$ đáy là tam giác đều, các cạnh bên bằng nhau và chân đường cao của hình chóp là trọng tâm của tam giác. Cho hình chóp đều S.ABC, khi đó:

+ Tam giác ABC đều; chân đường cao của hình chóp là trọng tâm G của $\triangle ABC$.

+ Các mặt bên là tam giác cân tại S và bằng nhau.

+ Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy bằng nhau.

Chú ý:

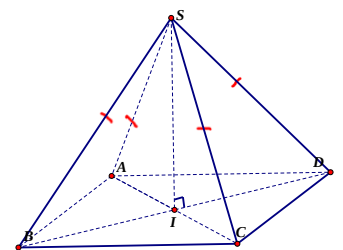
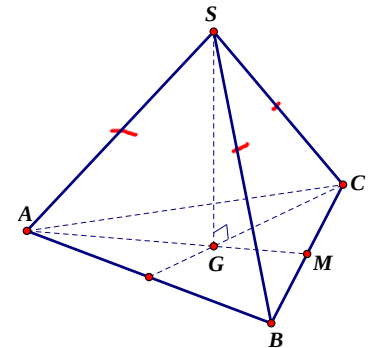
Hình chóp tam giác đều khác với tứ diện đều.

+ Tứ diện đều các cạnh bên bằng cạnh đáy và các mặt bên các tam giác đều. Hình chóp tam giác đều $\Rightarrow$ đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

+ hình chóp tam giác đều các cạnh bên chưa chắc đã bằng cạnh đáy.

b) Hình chóp tứ giác đều

Hình chóp tứ giác đều $\Rightarrow$ đáy là hình vuông, các cạnh bên bằng nhau và chân đường cao của hình chóp là tâm của hình vuông. Cho hình chóp đều S.ABCD,



khi đó:

+ABCD là hình vuông; chân đường cao của hình chóp là I hình vuông ABCD.

+Các mặt bên là tam giác cân tại S và bằng nhau.

+Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy bằng nhau.

IV. Xác định đường cao của hình chóp

1. Hình chóp có mặt bên vuông góc đáy

Đường cao của hình chóp là đường cao của mặt bên chứa trong mặt phẳng vuông góc đáy.

Ví dụ: Cho hình chóp S.ABCD có mặt bên SAB vuông góc đáy. Ta kẻ SH vuông góc AB thì SH là đường cao của hình chóp.

2. Hình chóp có hai mặt bên vuông góc đáy

Đường cao của hình chóp là giao tuyến của hai mặt bên.

Ví dụ: Cho hình chóp S.ABCD có các mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc đáy. Khi đó đường cao là SA.

V. Khoảng cách

1. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

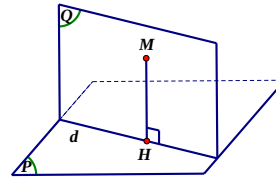
Để tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng ta phải dựng đoạn thẳng vuông góc kẻ từ điểm đó đến mặt phẳng. Cho điểm M và (P) để dựng đoạn thẳng vuông góc kẻ từ M đến (P) ta thường dùng một trong hai cách sau:

Cách 1:

+ Xây dựng (Q) chứa M và (Q) vuông góc (P).

+ Xác định $d = (P) \cap (Q)$.

+ Dựng $MH \perp d \Rightarrow MH = d(M; (P))$.



Cách 2:

Nếu trong bài toán đã có $SA \perp (P)$. Ta dựng MH song song với SA (H thuộc (P)). Khi đó:

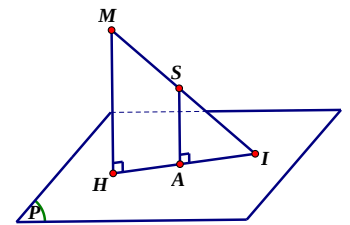
+ Nếu $MH \parallel SA$ thì $d(M; (P)) = d(S; (P))$.

+ Nếu $MH \cap SA = I$ thì $\frac{d(M; (P))}{d(S; (P))} = \frac{MI}{SI}$.

ng (Q) chứa M và (Q) vuông góc (P).

+ Xác định $d = (P) \cap (Q)$.

+ Dựng $MH \perp d \Rightarrow MH = d(M; (P))$.



2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và (P) ta có:

+ $\begin{cases} d \cap (P) \neq \emptyset \\ d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d(d; (P)) = 0.$

+ $d \parallel (P) \Rightarrow d(d; (P)) = d(A; (P)), \forall A \in d.$

3. Khoảng giữa hai mặt phẳng

$$+ \begin{cases} (Q) \cap (P) = d \\ (Q) \equiv (P) \end{cases} \Rightarrow d((Q); (P)) = 0.$$

$$+ (Q) // (P) \Rightarrow d((Q); (P)) = d(A; (P)), \forall A \in (Q).$$

4. Khoảng giữa hai đường thẳng.

Cho hai đường thẳng $\Delta_1; \Delta_2$ khi đó:

$$+ \begin{cases} \Delta_1 \cap \Delta_2 \neq \emptyset \\ \Delta_1 \equiv \Delta_2 \end{cases} \Rightarrow d(\Delta_1; \Delta_2) = 0.$$

$$+ \Delta_1 // \Delta_2 \Rightarrow d(\Delta_1; \Delta_2) = d(M; \Delta_2) = d(N; \Delta_1), \forall M \in \Delta_1; \forall N \in \Delta_2.$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng $\Delta_1; \Delta_2$ chéo nhau. Khi đó đoạn thẳng MN đồng thời vuông góc với Δ_1 và Δ_2 (M thuộc Δ_1 ; N thuộc Δ_2) được gọi là đoạn thẳng vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 . MN chính là khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 .

Phương pháp:

Cách 1: Dựng mặt phẳng (P) chứa Δ_1 và song song Δ_2 . Khi đó: $d(\Delta_1; \Delta_2) = d(\Delta_2; (P))$.

Cách 2: Dựng đoạn thẳng vuông góc chung và tính độ dài của đoạn thẳng đó.

Phần này ta sẽ tìm hiểu kĩ hơn và sẽ được giải quyết nhanh gọn ở chương 2.

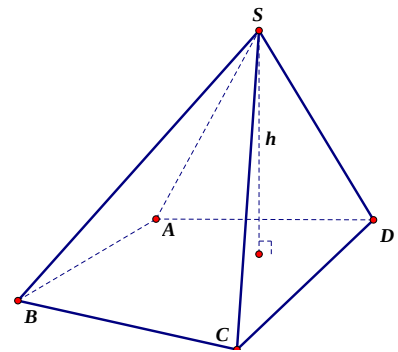
VI. Thể tích khối đa diện

1. Thể tích khối chóp

$$V = \frac{1}{3} Bh$$

+ B: Diện tích đáy.

+ h: độ dài đường cao của hình chóp.
oảng cách

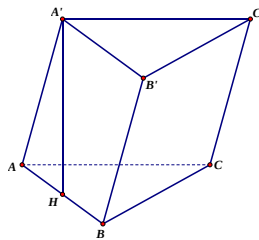


2. Thể tích khối lăng trụ

$$V = Bh$$

+ B: Diện tích đáy.

+ h: độ dài đường cao của hình chóp.



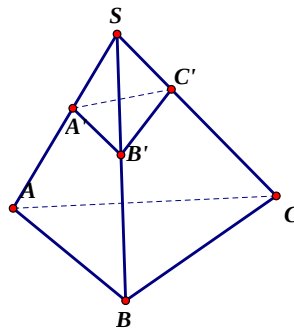
3. Thể tích hình hộp chữ nhật

$$V = a.b.c$$

Thể tích hình lập phương: $V = a^3$

4. Tỷ số thể tích:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}.$$



Chương 2. PHÂN DẠNG CÁC BÀI TOÁN KHOẢNG CÁCH

I. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

1. Khoảng cách từ chân đường cao đến mặt phẳng bên

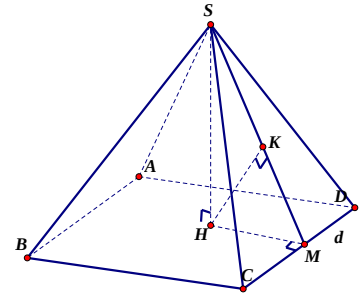
a. Phương pháp:

Cho hình chóp có đỉnh là S và chân đường cao H. Để tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng bên chứa S ta thực hiện các bước sau:

+ Xác định giao tuyến d giữa mặt phẳng bên và mặt phẳng đáy.

+ Từ chân đường cao H dựng đoạn $HM \perp d$. Kẻ $HK \perp SM$, khi

đó HK là khoảng cách cần tính. Để tính được HK ta nhớ là phải tính đường cao của hình chóp trước nhé.



Chú ý:

Trong khi tính khoảng cách ta nên vẽ thêm mặt phẳng đáy ra cho dễ phát hiện các tính chất vuông góc, song song, cũng như thuận tiện cho việc tính độ dài. Tức là nếu đáy là hình vuông thì ta vẽ đúng hình vuông bên cạnh...

b. Bài tập mẫu

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. SA vuông góc mặt phẳng đáy.

SC hợp với đáy 1 góc 60° .

a) Tính $d(A; (SBC))$.

b) Tính $d(A; (SBD))$.

Phân tích:

Tính khoảng cách từ chân đường cao tới các mặt bên là khá dễ, nhưng hầu như khi tính khoảng cách đều quy về khoảng cách của chân đường cao. Do vậy các Em phải làm thật vững phần này nếu muốn tính được các khoảng cách ở phần sau.

Bởi vì trong lúc tính khoảng cách ta sẽ dựng thêm các đường vuông góc trong mặt phẳng đáy nên tốt nhất là ta vẽ mặt đáy ra. Để có thể dự đoán được chân đường vuông góc cũng như để tính chúng. Trong một số bài toán thì đường vuông góc từ chân đường cao kẻ đến mặt bên có sẵn nên ta không cần kẻ thêm. Ví dụ như bài này để tính $d(A; (SBC))$ thì ta cần kẻ AE vuông góc BC vì

$AB \perp BC \Rightarrow E \equiv B$. Tiếp theo ta chỉ cần kẻ AK vuông góc SB thì AK là khoảng cách cần tính.

Giải

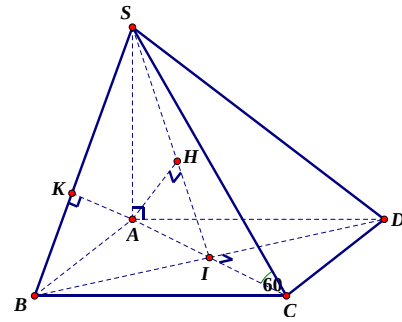
a) Ta có $C = SC \cap (ABCD)$ và A là hình chiếu của S trên (ABCD). Suy ra AC là hình chiếu của SC trên (ABCD). Do đó:

$(SC; (ABCD)) = SCA = 60^\circ$. Tam giác SAC vuông tại A nên

$$\tan SCA = \frac{SA}{AC} \Leftrightarrow SA = a\sqrt{2} \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{6}.$$

Ta đã có $AB \perp BC$, kẻ $AK \perp SB$ (1). Ta chứng minh

$$AK \perp (SBC).$$



Ta có: $\begin{cases} AB \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AK$ (2). Từ (1) và (2) suy ra

$AK \perp (SBC) \Rightarrow AK = d(A; (SBC))$. Tam giác SAB vuông tại A, có đường cao AK nên ta có:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow AK = \frac{a\sqrt{42}}{7}. \text{ Vậy } d(A; (SBC)) = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$

b) Gọi I là giao điểm giữa AC và BD thì $AI \perp BD$. Kẻ $AH \perp SI$ (3), ta chứng minh $AH \perp (SBD)$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AI \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAI) \Rightarrow BD \perp AH$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $AH \perp (SBD) \Rightarrow AH = d(A; (SBD))$.

Tam giác SAI vuông tại A, có đường cao AH nên ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AI^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{(a\sqrt{6})^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow AK = \frac{a\sqrt{78}}{13}. \text{ Vậy } d(A; (SBC)) = \frac{a\sqrt{78}}{13}.$$

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. SA vuông góc mặt phẳng đáy. SC hợp với đáy 1 góc 60° . Gọi M là trung điểm BC. Tính $d(A; (SMD))$.

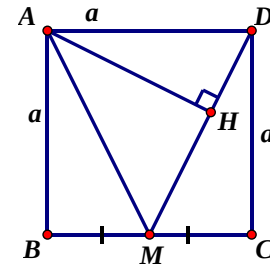
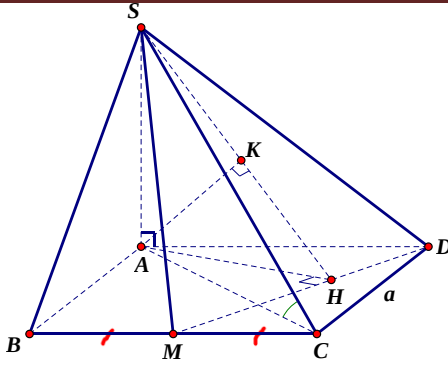
Phân tích:

Giao tuyến giữa $(SMD) \cap (ABCD) = MD$. Do đó ta cần kẻ AH vuông góc MD.

Ở ví dụ 1 thì ta không vẽ mặt phẳng đáy ra vì việc xác định hình chiếu vuông góc từ A đến các giao tuyến có sẵn. Nhưng ví dụ này ta vẽ thêm mặt phẳng đáy ra cho việc xác định hình chiếu từ A đến MD và cũng như tính độ dài AH.

Giải

Ta có $C = SC \cap (ABCD)$ và A là hình chiếu của S trên (ABCD). Suy ra AC là hình chiếu của SC trên (ABCD). Do đó: $(SC; (ABCD)) = SCA = 60^\circ$.



Tam giác SAC vuông tại A nên $\tan SCA = \frac{SA}{AC} \Leftrightarrow SA = a\sqrt{2} \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{6}$.

Giao tuyến giữa (SDM) và (ABCD) là MD nên ta kẻ AH vuông góc MD tại H. Kẻ AK vuông góc

SH tại K. Ta chứng minh $AK \perp (SMD)$. Ta có: $\begin{cases} MD \perp AH \\ MD \perp SA \end{cases} \Rightarrow MD \perp (SAH) \Rightarrow MD \perp AK (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $AK \perp (SBC) \Rightarrow AK = d(A; (SMD))$.

Ta có: $MD = \sqrt{BD^2 + BM^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Và $S_{\triangle AMD} = S_{ABCD} - S_{\triangle AMM} - S_{\triangle BMD} = a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$. Mà

$S_{\triangle AMD} = \frac{1}{2} AH \cdot MD = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Xét tam giác SAH vuông tại A, có đường cao AK nên ta có:

$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{6a^2} + \frac{5}{4a^2} \Leftrightarrow AK = \frac{2a\sqrt{51}}{17}$. Vậy $d(A; (SBC)) = \frac{2a\sqrt{51}}{17}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a; $SD = \frac{3a}{2}$; hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm H của cạnh AB.

a) Tính $d(H; (SDC))$. b) Tính $d(H; (SBD))$.

Giải

a) H là trung điểm của AB và $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp HD$. Suy ra:

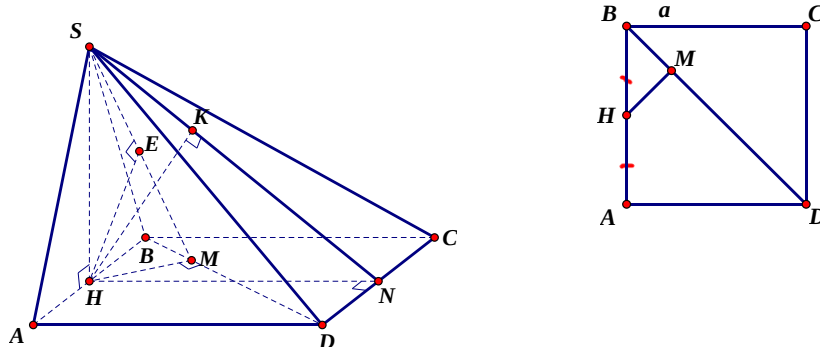
$SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{SD^2 - (HA^2 + AD^2)} = a$. Kẻ $HN \perp DC$ tại N; kẻ $HK \perp SN$ (1) tại K. Ta

chứng minh $HK \perp (SDC)$. Ta có: $\begin{cases} DC \perp HN \\ DC \perp SH \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SHN) \Rightarrow DC \perp HK (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $HK \perp (SDC) \Rightarrow HK = d(H; (SDC))$.

Tam giác SHN vuông tại H, có đường cao HK nên:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HN^2} \Leftrightarrow HK = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \text{ Vậy } d(H; (SDC)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



b) Kẻ $HM \perp BD$ tại M; kẻ $HE \perp SM$ (1) tại E. Ta chứng minh $HE \perp (SBD)$. Ta có:

$$\begin{cases} BD \perp HM \\ BD \perp SH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHM) \Rightarrow BD \perp HE \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) suy ra $HE \perp (SBD) \Rightarrow HE = d(H; (SBD))$. Ta có $HM = HB \cdot \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Tam giác SHM vuông tại H, có đường cao HE nên:

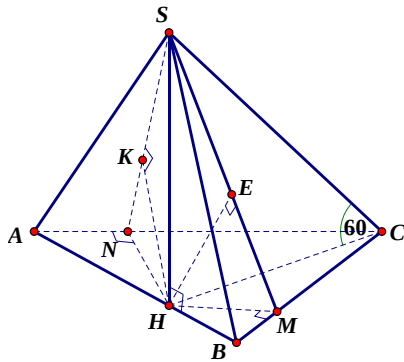
$$\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HM^2} \Leftrightarrow HE = \frac{a}{3}. \text{ Vậy } d(H; (SBD)) = \frac{a}{3}.$$

Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA=2HB$. Góc giữa SC và (ABC) bằng 60° .

a) Tính $d(H; (SAC))$.

b) Tính $d(H; (SBC))$.

Giải



a) Ta có $C = SC \cap (ABC)$ và H là hình chiếu của S trên (ABC). Suy ra HC là hình chiếu của SC trên (ABC). Do đó:

$$(SC; (ABC)) = \angle SCA = 60^\circ.$$

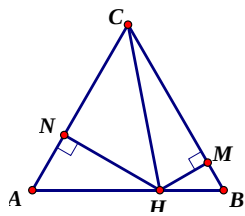
Xét tam giác BHC ta có:

$$HC^2 = HB^2 + BC^2 - 2HB \cdot BC \cdot \cos HBC \Leftrightarrow HC^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot a \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow$$

$$\text{.Xét tam giác SHC ta có: } SH = HC \cdot \tan SCH = \frac{a\sqrt{7}}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{21}}{3}. \text{ Kẻ}$$

$HM \perp BC$ tại M; kẻ $HE \perp SM$ (1) tại K. Ta chứng minh $HE \perp (SBC)$. Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp HM \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHM) \Rightarrow BC \perp HE \text{ (2)}.$$



Từ (1) và (2) suy ra $HE \perp (SBC) \Rightarrow HE = d(H; (SBC))$. Tam giác HBM vuông tại M, có

$$HM = HB \cdot \sin 60^\circ = \frac{a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}. \text{ Tam giác SHM vuông tại H, có đường cao HE nên:}$$

$$\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HM^2} \Leftrightarrow HE = \frac{a\sqrt{609}}{87}. \text{ Vậy } d(H; (SBC)) = \frac{a\sqrt{609}}{87}.$$

b) Kẻ $HN \perp AC$ tại N; kẻ $HK \perp SN$ (1) tại K. Ta chứng minh $HK \perp (SAC)$. Ta có:

$$\begin{cases} AC \perp HN \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHN) \Rightarrow AC \perp HK \text{ (2)}. \text{ Từ (1) và (2) suy ra}$$

$$HK \perp (SAC) \Rightarrow HK = d(H; (SAC)).$$

Tam giác HAN vuông tại N, có $HN = HA \cdot \sin 60^\circ = \frac{2a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tam giác SHN vuông tại H, có

đường cao HK nên:

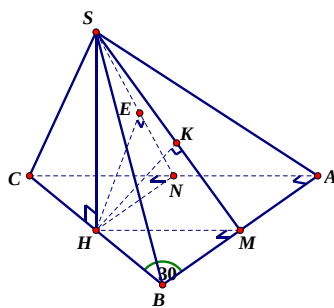
$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HN^2} \Leftrightarrow HK = \frac{a\sqrt{42}}{12}. \text{ Vậy } d(H; (SDC)) = \frac{a\sqrt{42}}{12}.$$

Ví dụ 5. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A; $ABC = 30^\circ$; SBC là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy.

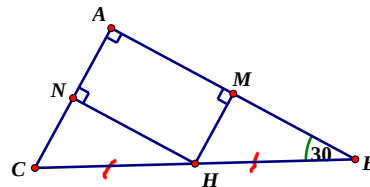
a) Xác định chân đường cao H của hình chóp S.ABC và tính độ dài đường cao này.

b) Tính: $d(H; (SAC))$ và $d(H; (SAB))$.

Phân tích: Để xác định chân đường cao của hình chóp các Em xem lại mục 1 của IV. Do mặt phẳng (SBC) vuông góc với (ABC) và có chung đường thẳng BC nên ta chỉ cần kẻ SH vuông góc BC; SH sẽ là đường cao của hình chóp. Để ý, do tam giác SBC đều nên H là trung điểm của BC.



Giải



a) Kẻ $SH \perp BC$, do tam giác SBC đều nên H là trung điểm của BC. Khi đó:

$$\begin{cases} (SBC) \perp (ABC) \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SH \perp BC; SH \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC). \text{ Vậy SH là đường cao của hình chóp S.ABC.}$$

$$\text{Tam giác SBC đều cạnh a nên } SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

b) + Tính $d(H; (SAC))$.

Kẻ $HN \perp AC$ tại N; kẻ $HE \perp SN(1)$ tại E. Ta chứng minh $HE \perp (SAC)$. Ta có:

$$\begin{cases} AC \perp HN \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHN) \Rightarrow AC \perp HE(2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra}$$

$$HE \perp (SAC) \Rightarrow HE = d(H; (SAC)).$$

Tam giác HCN vuông tại N, có $HN = HC \cdot \sin 60^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tam giác SHN vuông tại H, có

đường cao HE nên:

$$\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HN^2} \Leftrightarrow HK = \frac{a\sqrt{15}}{10}. \text{ Vậy } d(H; (SDC)) = \frac{a\sqrt{15}}{10}.$$

+ Tính $d(H; (SAB))$.

Kẻ $HM \perp AB$ tại M; kẻ $HK \perp SM(1)$ tại K. Ta chứng minh $HK \perp (SAB)$. Ta có:

$$\begin{cases} AB \perp HM \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHM) \Rightarrow AB \perp HK(2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra}$$

$$HK \perp (SAB) \Rightarrow HK = d(H; (SAB)).$$

Tam giác HBM vuông tại M, có $HM = HB \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{4}$. Tam giác SHM vuông tại H, có

đường cao HK nên:

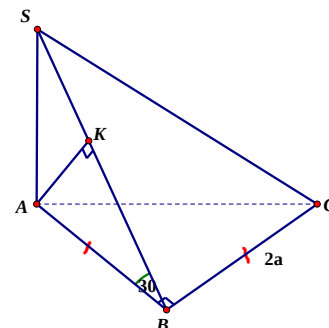
$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HM^2} \Leftrightarrow HE = \frac{a\sqrt{39}}{26}. \text{ Vậy } d(H; (SBC)) = \frac{a\sqrt{39}}{26}.$$

Ví dụ 6. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân tại B; $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc mặt phẳng (ABC). Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính $d(A; (SBC))$.

Phân tích: Trước tiên ta cần xác định được đường cao của hình chóp. Bài này ta thấy ngay SA là đường cao của hình chóp.

Giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAC) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (SAC) = SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABC).$$



Mặt khác, $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow SB \perp BC$. Do đó:

$((SBC);(ABC)) = (SB;AB) = SBA = 30^\circ$. Tam giác SAB vuông tại A nên

$$\tan SBA = \frac{SA}{AB} \Leftrightarrow SA = AB \cdot \tan 30^\circ = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Kẻ $AK \perp SB$ tại K, ta có: $\begin{cases} AK \perp BC \ (BC \perp (SAB)) \\ AK \perp SB \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow AK = d(A;(SBC)).$

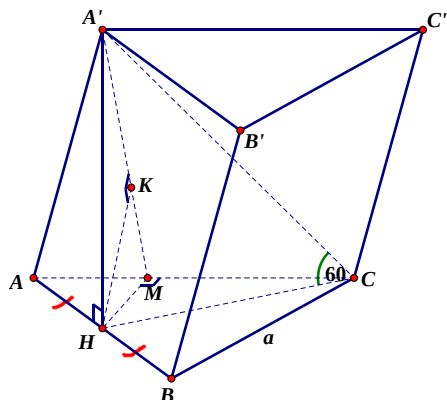
Tam giác SAB vuông tại A, có đường cao AK nên:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} \Leftrightarrow AK = a. \text{ Vậy } d(A;(SBC)) = a.$$

Bình luận: Trong ví dụ 6 để tính AK, các Em cũng có thể xét tam giác ABK vuông tại K và áp dụng định lý cosin cho tam giác vuông. Tức là: $AK = AB \cdot \sin 30^\circ = a$. Khi đó các Em không cần tính SA. Nhưng vì các bài toán này thường đi chung câu tính thể tích nên ở đây Thầy rèn luyện cho các Em cách tính đường cao luôn.

Ví dụ 7. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của AB. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy bằng 60° .
a) Tính đường cao $A'H$.
b) Tính: $d(H;(ACC'A'))$.

Giải



a) Ta có: $A'H \perp (ABC)$ và $A'HC = 60^\circ$. Do đó

$$A'H = CH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}.$$

b) Kẻ $HM \perp AC$ tại M, kẻ $HK \perp SM$ tại K. Khi đó:

$HK = d(H;(ACC'A'))$. Ta có:

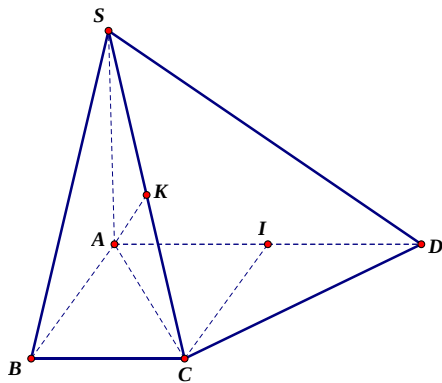
$$HM = HA \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4},$$

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HM^2} + \frac{1}{HA'^2} \Leftrightarrow HK = \frac{3\sqrt{13}a}{26}.$$

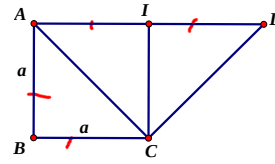
Ví dụ 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B; $AD=2AB=2BC$; $BC=a$; $SA \perp (ABCD)$ và SB hợp với mặt phẳng đáy một góc 45° . Tính $d(A;(SDC))$.

Phân tích: Bài toán đã cho ta đường cao SA, không khó để ta xác định được độ dài SA. Để tính $d(A;(SDC))$, ta cần kẻ AH vuông góc DC tại H. Để xác định được vị trí điểm H. Em nên vẽ hình

thang ABCD ra, khi đó Em sẽ thấy rằng H trùng C. Tức là $AC \perp DC$?? Thử vẽ lại cho đúng tỷ lệ ta tin rằng điều này có thể. Vậy ta sẽ chứng minh $AC \perp DC$. Tiếp theo thì đã biết rồi nhé.!



Giải



Ta có: $SA \perp (ABCD)$ và $SBA = 45^\circ$. Do đó $SA = AB = a$. Gọi I là trung điểm của AD, ta có ABCI

là hình vuông $\Rightarrow CI = AB = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \triangle ADC$ vuông tại C hay $AC \perp DC$ và $AC = a\sqrt{2}$. Kẻ

$AK \perp SC$ tại K. Khi đó: $AK = d(A; (SDC))$. Ta có: $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} \Leftrightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Vậy

$$d(A; (SDC)) = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

2. Khoảng cách từ một điểm ở mặt đáy đến mặt bên

a. Phương pháp:

Ta sẽ đưa bài toán trở về khoảng cách từ chân đường cao đến mặt bên (dạng này ta đã biết).

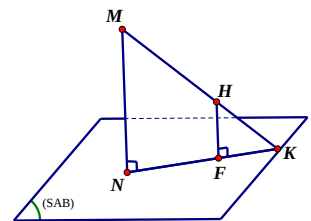
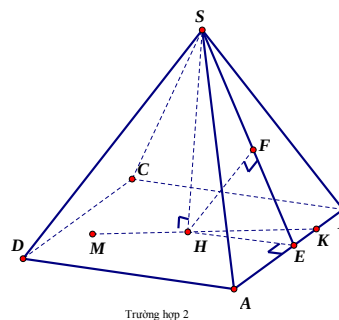
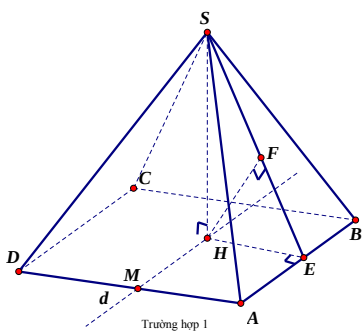
Giả sử cho hình chóp có đỉnh là S và chân đường cao H và cần tính khoảng cách từ điểm M thuộc mặt phẳng đáy đến mặt bên (SAB) ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Ta dựng đường thẳng d đi qua H và M. Khi đó:

+ Trường hợp 1: Nếu $d \parallel (SAB)$ thì $d(M; (SAB)) = d(H; (SAB))$.

+ Trường hợp 2: Nếu $d \cap (SAB) = K$ thì $\frac{d(M; (SAB))}{d(H; (SAB))} = \frac{MK}{HK}$ (định lý Ta-let).

Bước 2: Tính $d(H; (SAB))$ (đã biết ở phần trước).



b. Bài tập mẫu

Ví dụ 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a ; $BAC = 60^\circ$; mặt bên SAB là tam giác cân và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Mặt phẳng (SCD) tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 30° . Tính:

a) $d(A; (SBC))$

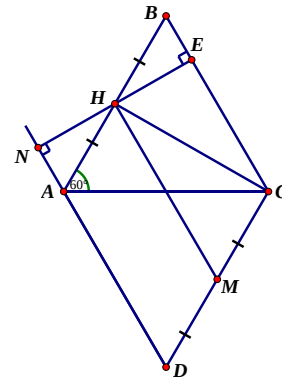
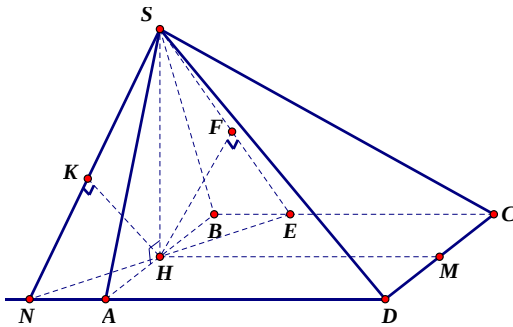
c) $d(M; (SAD))$, với M là trung điểm của DC .

Giải

a) Tính $d(A; (SBC))$.

Gọi H là trung điểm của AB , do tam giác SAB cân tại S nên $SH \perp AB$, mà $(SAB) \perp (ABCD)$ nên

$SH \perp (ABCD)$. Tam giác ABC cân tại B có $BAC = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều là $CH \perp AB$ và $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Vì $AB \parallel DC$ suy ra $CH \perp CD$.

Mà $SH \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHC) \Rightarrow CD \perp SC \Rightarrow ((SCD); (ABCD)) = SCH = 30^\circ$.

Tam giác SHC vuông tại H $SH = HC \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{2}$.

Đường thẳng AH cắt BC tại $B \Rightarrow \frac{d(A; (SBC))}{d(H; (SBC))} = \frac{AB}{HB} = 2 \Rightarrow d(A; (SBC)) = 2d(H; (SBC))$.

Kẻ $HE \perp BC$; $HF \perp SE$, suy ra $HF = d(H; (SBC))$ (Các Em xem lại I.1 nhé!).

Ta có $HE = HB \cdot \sin 60^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tam giác SHE vuông tại H , có đường cao HF suy ra:

$$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{16}{3a^2} \Leftrightarrow HF = \frac{a\sqrt{21}}{14}. \text{ Vậy } d(A; (SBC)) = 2HF = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

b) Tính $d(M; (SAD))$.

Ta có $HM \parallel AD \Rightarrow HM \parallel (SAD) \Rightarrow d(M; (SAD)) = d(H; (SAD))$.

Kẻ $HN \perp BC$; $HK \perp SN \Rightarrow HK = d(H; (SAD))$ (Các Em xem lại chương 2 I.1 nhé!).

Ta có $HN = HA \cdot \sin 60^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tam giác SHN vuông tại N, có đường cao HK suy ra:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HN^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{16}{3a^2} \Leftrightarrow HK = \frac{a\sqrt{21}}{14}. \text{ Vậy } d(M; (SAD)) = HK = \frac{a\sqrt{21}}{14}.$$

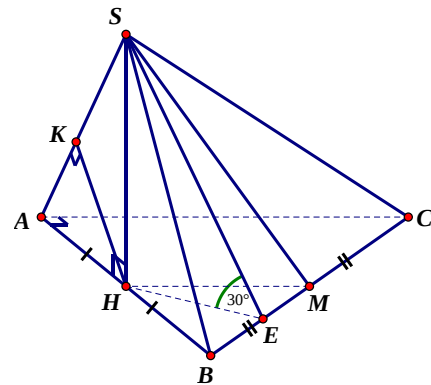
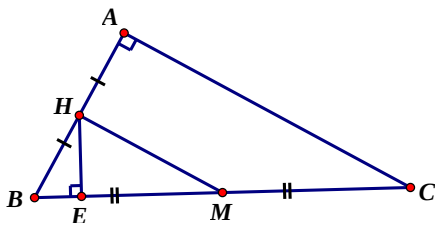
Ví dụ 10. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A và $AB = 2a; AC = 2a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của AB. Mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 30° . Tính:

a) $d(B; (SAC))$

c) $d(M; (SAC))$, với M là trung điểm của BC.

Giải

a) Tính $d(B; (SAC))$.



Kẻ $HE \perp BC$, mà $SH \perp BC \Rightarrow BC \perp (SHE) \Rightarrow SE \perp BC \Rightarrow ((SBC); (ABC)) = SEH = 30^\circ$.

Ta có: $\tan ABC = \frac{AC}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow ABC = 60^\circ$; $HI = BH \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH = HI \tan 30^\circ = \frac{a}{2}$.

Đường thẳng BH cắt AC tại A $\Rightarrow \frac{d(B; (SAC))}{d(H; (SAC))} = \frac{BA}{HA} = 2 \Rightarrow d(B; (SAC)) = 2d(H; (SAC))$.

Kẻ $HK \perp SA$, mà $SH \perp AC \Rightarrow AC \perp (SAH) \Rightarrow AC \perp HK \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow HK = d(H; (SAC))$.

Ta có: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HA^2} \Leftrightarrow HK = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. Vậy $d(B; (SAC)) = 2HK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

b) Tính $d(M; (SAC))$.

Ta có $HM \parallel AC \Rightarrow HM \parallel (SAC) \Rightarrow d(M; (SAC)) = d(H; (SAC))$.

Vậy $d(M; (SAC)) = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 11. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A và $AB = 3a; CB = 5a$. Mặt bên (SAC) vuông góc với (ABC). Biết $SA = 2a\sqrt{3}$ và $SAC = 30^\circ$. Tính $d(A; (SBC))$.

Giải

Kẻ $SH \perp AC$ tại H, do $(SAC) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

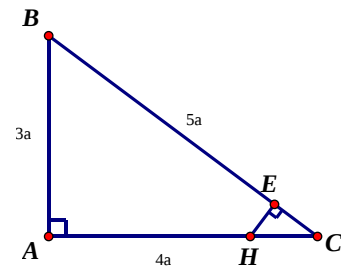
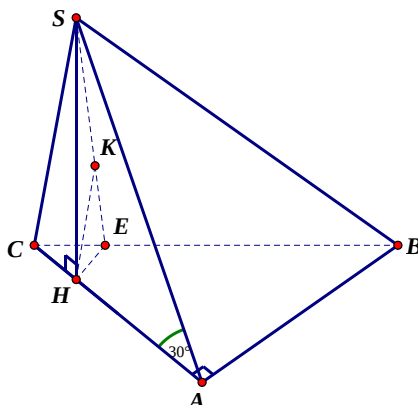
Ta có $SH = SA \cdot \sin SAC = a\sqrt{3}$ và $AH = SA \cdot \cos SAC = 3a \Rightarrow HC = a$.

Đường thẳng AH cắt BC tại C $\Rightarrow \frac{d(A; (SBC))}{d(H; (SBC))} = \frac{AC}{HC} = \frac{4a}{a} = 4 \Rightarrow d(A; (SBC)) = 4d(H; (SBC))$.

Kẻ $HE \perp BC$ tại E và $HK \perp SE$ tại K. Khi đó $HK = d(H; (SBC))$.

Ta có tam giác CEH đồng dạng với tam giác CAB suy ra $\frac{HE}{HC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow HE = \frac{3a}{5}$.

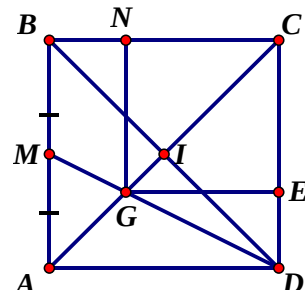
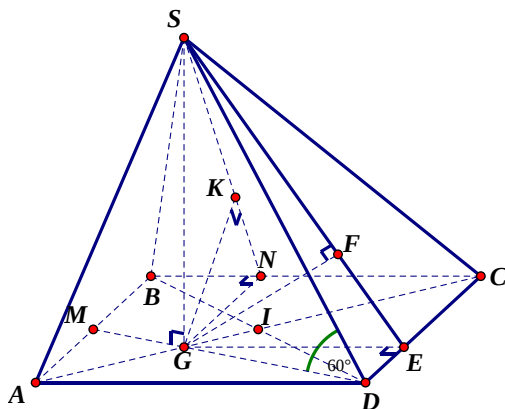
$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} \Leftrightarrow HK = \frac{3a\sqrt{7}}{14}. \text{ Vậy } d(A; (SAB)) = 4HK = \frac{6a\sqrt{7}}{7}.$$



Ví dụ 12. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a; hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là trọng tâm của tam giác ABD. Cạnh SD tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng 60° . Gọi M là trung điểm của AB.

- a) Tính $d(A; (SBC))$. b) Tính $d(D; (SBC))$. c) Tính $d(M; (SDC))$.

Giải



a) Tính $d(A; (SBC))$.

Gọi I là tâm của hình vuông ABCD và G là trọng tâm của tam giác ABD, khi đó $SG \perp (ABCD)$ và ta có

SDG là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Do SD tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng $60^\circ \Rightarrow SDG = 60^\circ$. Do G là trọng tâm của tam giác ABD

$$\Rightarrow DG = \frac{2}{3} MD = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{AM^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{5}}{3}. \text{ Xét tam giác } SDG \text{ vuông tại } G, \text{ ta có}$$

$$SG = DG \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{15}}{3}.$$

$$\text{Ta có } AC = 2AI \wedge AG = \frac{2}{3} AI \Rightarrow AC = 3AG \Rightarrow AC = 2GC.$$

$$\text{Đường thẳng } AG \text{ cắt } BC \text{ tại } C \Rightarrow \frac{d(A; (SBC))}{d(G; (SBC))} = \frac{AC}{GC} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(A; (SBC)) = \frac{3}{2} d(G; (SBC)).$$

$$\text{Kẻ } GN \perp BC \text{ tại } N \text{ và } GK \perp SN \text{ tại } K. \text{ Khi đó } GK = d(G; (SBC)).$$

$$\text{Ta có tam giác } CGN \text{ đồng dạng với tam giác } CAB \text{ suy ra } \frac{GN}{AB} = \frac{GC}{AC} \Rightarrow GN = \frac{2a}{3}. \text{ Ta có:}$$

$$\frac{1}{GK^2} = \frac{1}{SG^2} + \frac{1}{GN^2} \Leftrightarrow GK = \frac{2a\sqrt{285}}{57}. \text{ Vậy } d(A; (SBC)) = \frac{3}{2} GK = \frac{a\sqrt{285}}{19}.$$

$$\text{b) Tính } d(D; (SBC)).$$

$$\text{Ta có } AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(D; (SBC)) = d(A; (SBC)).$$

$$\text{Vậy } d(D; (SBC)) = \frac{a\sqrt{285}}{19}.$$

$$\text{c) Tính } d(M; (SBC)).$$

$$\text{Đường thẳng } MG \text{ cắt } DC \text{ tại } D \Rightarrow \frac{d(M; (SDC))}{d(G; (SDC))} = \frac{MD}{GD} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(M; (SDC)) = \frac{3}{2} d(G; (SDC)).$$

Kẻ $GE \perp DC$ tại E và $GF \perp SE$ tại F . Khi đó $GF = d(G; (SDC))$. Xét tam giác DGE vuông tại E , ta có:

$$GE = DG \cdot \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{10}}{6}.$$

Tam giác SGE vuông tại G , có đường cao GF suy ra:

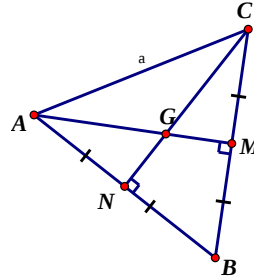
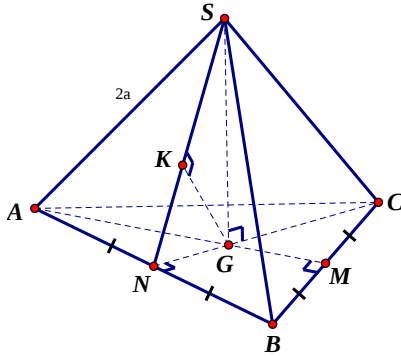
$$\frac{1}{GF^2} = \frac{1}{SG^2} + \frac{1}{GE^2} \Leftrightarrow \frac{1}{GF^2} = \frac{3}{5a^2} + \frac{18}{5a^2} \Leftrightarrow GF = \frac{a\sqrt{105}}{21}.$$

$$\text{Vậy } d(M; (SDC)) = \frac{3}{2} GK = \frac{3}{2} \cdot \frac{a\sqrt{105}}{21} = \frac{a\sqrt{105}}{14}.$$

Ví dụ 13. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , $SA = 2a$. Điểm M là trung điểm của BC .
a) Tính $d(C; (SAB))$. b) Tính $d(M; (SAB))$.

Phân tích: AK...! Các Em cần nhớ lại định nghĩa hình chóp đều nhé. Các Em xem lý thuyết chương 1 nhé!

Giải



a) Tính $d(C; (SAB))$.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC ; N là trung điểm của AB . Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SG \perp (ABC)$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AG = \frac{2}{3} AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SAG vuông tại G nên: $SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$.

Ta có: $\frac{d(C; (SAB))}{d(G; (SAB))} = \frac{CN}{GN} = 3 \Rightarrow d(C; (SAB)) = 3d(G; (SAB))$.

Kẻ $GK \perp SN$ tại K . (Ta sẽ chứng minh được $GK \perp (SAB)$ Thầy để các Em làm nhé! Xem như bài

tập nhỏ). Khi đó $GK = d(G; (SAB))$. Ta có: $\frac{1}{GK^2} = \frac{1}{SG^2} + \frac{1}{GN^2} \Leftrightarrow GK = \frac{a\sqrt{165}}{45}$.

Vậy $d(C; (SAB)) = 3GK = \frac{a\sqrt{165}}{15}$.

b) Tính $d(M; (SAB))$.

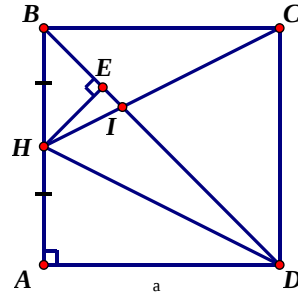
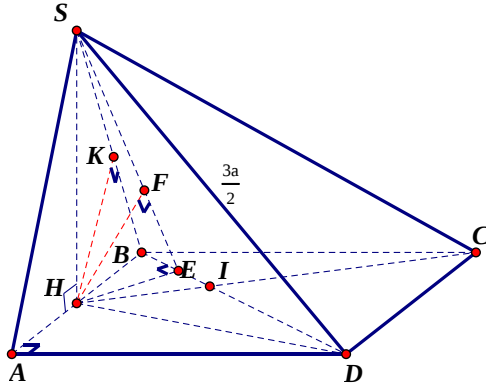
Ta có: $\frac{d(M; (SAB))}{d(G; (SAB))} = \frac{MA}{GA} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(M; (SAB)) = \frac{3}{2} d(G; (SAB)) = \frac{a\sqrt{165}}{30}$.

Ví dụ 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a ; $SD = \frac{3a}{2}$; hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$ là trung điểm của cạnh AB .

a) Tính $d(A; (SBC))$.

b) Tính $d(C; (SBD))$.

Giải



a) Tính $d(A; (SBC))$.

Gọi H là trung điểm của AB, ta có $AH \perp (ABCD)$. Tam giác ADH vuông tại A nên:

$$HD^2 = AD^2 + AH^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}. \text{ Tam giác SHD vuông H nên :}$$

$$SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}} = a.$$

$$\text{Ta có: } \frac{d(A; (SBC))}{d(H; (SBC))} = \frac{AB}{HB} = 2 \Rightarrow d(A; (SBC)) = 2d(H; (SBC)).$$

Kẻ $HK \perp SB$ tại K (Ta sẽ chứng minh được $HK \perp (SBC)$ Thầy để các Em làm nhé! Xem như bài tập nhỏ). Khi đó $HK = d(H; (SBC))$. Tam giác SHB vuông tại H, có đường cao HK suy ra:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{BH^2} \Leftrightarrow HK = \frac{a\sqrt{5}}{5}. \text{ Vậy } d(A; (SBC)) = 2HK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

b) Tính $d(C; (SBD))$.

Gọi I là giao điểm của CH và BD. Khi đó: $\frac{IC}{IH} = \frac{CD}{HB} = 2 \Rightarrow IC = 2IH$.

$$\text{Suy ra: } \frac{d(C; (SBD))}{d(H; (SBD))} = \frac{IC}{IH} = 2 \Rightarrow d(C; (SBD)) = 2d(H; (SBD)).$$

Kẻ $HE \perp BD$ tại E và $HF \perp SE$ tại F (Ta sẽ chứng minh được $HF \perp (SBD)$ Thầy để các Em làm nhé! Xem như bài tập nhỏ). Khi đó $HF = d(H; (SBD))$.

$$\text{Xét tam giác HBE vuông tại B, ta có: } HE = HB \cdot \sin 45^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Tam giác SHE vuông tại H, có đường cao HF suy ra:

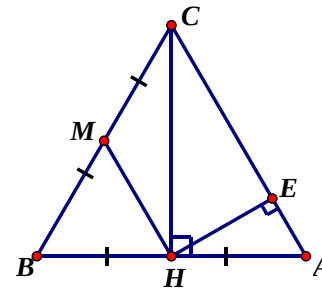
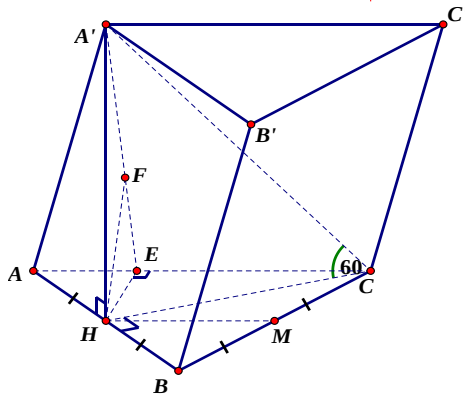
$$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} \Leftrightarrow \frac{1}{HF^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{8}{a^2} \Leftrightarrow HF = \frac{a}{3}. \text{ Vậy } d(C; (SBD)) = 2HF = \frac{2a}{3}.$$

Ví dụ 15. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB ; đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Điểm M là trung điểm của BC .

a) Tính $d(B; (ACC'A'))$.

b) Tính $d(M; (ACC'A'))$.

Giải



a) Tính $d(B; (ACC'A'))$.

Gọi H là trung điểm của AC , ta có $A'H \perp (ABC)$ và $A'CH = 60^\circ$. Tam giác ABC đều cạnh a và H là trung điểm của AB nên $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tam giác $A'HC$ vuông H nên $A'H = CH \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$.

Ta có: $\frac{d(B; (SAC))}{d(H; (SAC))} = \frac{BA}{HA} = 2 \Rightarrow d(B; (SAC)) = 2d(H; (SAC)).$

Kẻ $HE \perp AC$ tại E và $HF \perp SE$ tại F (Ta sẽ chứng minh được $HF \perp (SAC)$ Thầy để các Em làm nhé! Xem như bài tập nhỏ). Khi đó $HF = d(H; (SAC))$.

Ta có: $HE = HA \cdot \sin 60^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tam giác $A'HE$ vuông tại E , có đường cao HF suy ra:

$$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{A'H^2} + \frac{1}{HE^2} \Leftrightarrow \frac{1}{HF^2} = \frac{4}{9a^2} + \frac{16}{3a^2} \Leftrightarrow HF = \frac{3a\sqrt{13}}{26}.$$

Vậy $d(B; (SAC)) = 2HF = \frac{3a\sqrt{13}}{13}.$

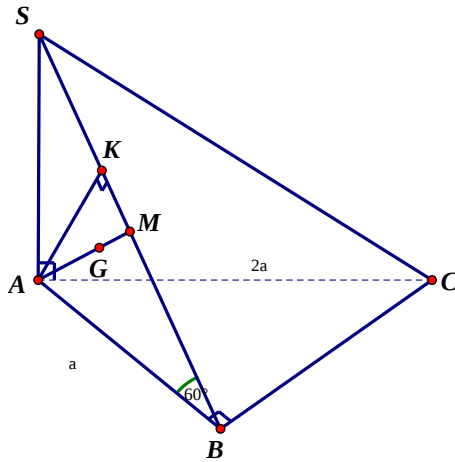
b) Tính $d(M; (ACC'A'))$.

Ta có $MH \parallel AC$ và AC thuộc mặt phẳng (SAC) suy ra $MH \parallel (SAC)$.

$$\text{Do đó : } d(M; (SAC)) = d(H; (SAC)) = \frac{3a\sqrt{13}}{26}.$$

Ví dụ 16. Cho hình chóp S.ABC có cạnh đáy tam giác vuông tại B, $AB = a, AC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc đáy. Mặt phẳng (SBC) hợp với đáy một góc bằng 60° . Tính khoảng từ trọng tâm G của tam giác SAB đến mặt phẳng (SBC).

Giải



$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$$

$$\text{Vậy ta được } \begin{cases} SB \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((SBC); (ABC)) = SBA = 60^\circ.$$

$$\text{Ta có: } SA = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}.$$

Gọi M là trung điểm của SB.

$$\text{Ta có: } \frac{GM}{AM} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(G; (SBC)) = \frac{1}{3} d(A; (SBC)).$$

Kẻ $AK \perp SB$ tại K. (Ta sẽ chứng minh được $AK \perp (SBC)$)

Thầy để các Em làm nhé! Xem như bài tập nhỏ nhé).

$$\text{Khi đó } AK = d(A; (SBC)).$$

Tam giác SAB vuông tại A, có đường cao AK suy ra:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(G; (SBC)) = \frac{1}{3} AK = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

3. Khoảng cách từ một điểm thuộc mặt đáy đến mặt bên

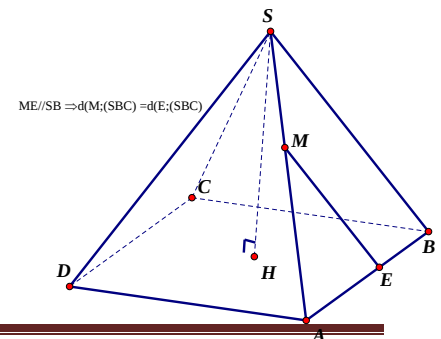
a. Phương pháp:

Ta dựng đường thẳng d đi qua điểm đó và song song mặt bên. Sau đó tìm giao điểm giữa d và mặt đáy. Khi đó ta đưa bài toán trở về khoảng cách từ một điểm thuộc mặt đáy đến mặt bên. Tiếp theo đưa về khoảng cách từ chân đường cao đến mặt bên (tới đây không phải là đã biết nữa, mà phải biết).

Giả sử cho hình chóp S.ABCD có $SH \perp (ABCD)$. Điểm M

thuộc SA, cần tính $d(M; (SBC))$. Ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Ta dựng đường thẳng d đi qua M và song song SB. Xác định E là giao điểm AB và d.



Bước 2: Tính $d(M; (SAB)) = d(E; (SAB))$ (đã biết ở phần trước).

b. Bài tập mẫu

Ví dụ 17. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a ; cạnh bên $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của SA . Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC) .

Phân tích: Trước tiên cần nhớ chân đường cao của hình chóp tứ giác đều là tâm I của hình vuông.

Như đã phân tích ở trên, để tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC) ; ta sẽ dựng đường thẳng d đi qua M và song song với một cạnh của mặt phẳng (SBC) . Do M thuộc SA ; SA và SC đồng phẳng; SA và SB đồng phẳng. Do đó ta có thể dựng đường thẳng d qua M và $d \parallel SC$ hoặc $d \parallel SB$. Đó là lý thuyết!

Trong trường hợp này, do M là trung điểm của SA ; I là trung điểm của AC , ta phải thấy được $MI \parallel SC$. Khi đó nên $d(M; (SBC)) = d(I; (SBC))$. Chấn qua đây là trường hợp đặc biệt; trong trường hợp tổng quát ta cần nhớ định lý Ta-let hay tam giác đồng dạng.

Giải

Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$ (tâm của hình vuông là giao điểm hai đường chéo). Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SI \perp (ABCD)$. Ta có:

$$AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Tam giác SAI vuông tại I nên:

$$SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

Do M, I lần lượt là trung điểm của SA và AC nên $MI \parallel SC$ suy ra $MI \parallel (SBC)$.

Từ $MI \parallel (SBC)$ ta có $d(M; (SBC)) = d(I; (SBC))$.

Kẻ $IK \perp BC$ tại K , khi đó K là trung điểm của BC . Kẻ $IF \perp SK$ tại F . (Ta sẽ chứng minh được $IF \perp (SBC)$ Thấy để các Em làm nhé! Xem như bài tập nhỏ nhé). Khi đó $IF = d(I; (SBC))$.

Tam giác SIK vuông tại I , có đường cao IF suy ra:

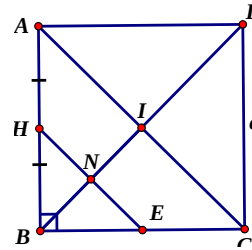
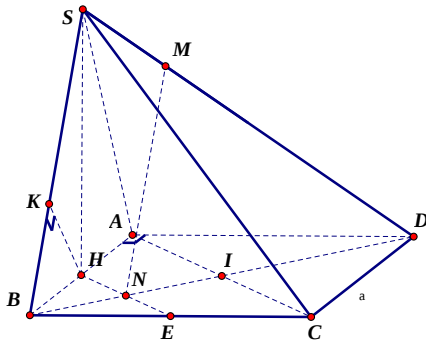
$$\frac{1}{IF^2} = \frac{1}{IK^2} + \frac{1}{SI^2} \Leftrightarrow \frac{1}{IF^2} = \frac{2}{7a^2} + \frac{4}{a^2} \Leftrightarrow IF = \frac{a\sqrt{210}}{30}.$$

$$\text{Vậy } d(M; (SBC)) = d(I; (SBC)) = \frac{a\sqrt{210}}{30}.$$

Ví dụ 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh đáy hình vuông cạnh a ; mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Gọi M là điểm thuộc đoạn thẳng SD sao cho $SD = 4SM$.

- a) Tính khoảng cách từ trung điểm của đoạn thẳng AB đến mặt phẳng (SBC).
b) Tính khoảng điểm M đến mặt phẳng (SBC).

Giải



- a) Tính $d(H; (SBC))$.

Gọi H là trung điểm của AB, do tam giác SAB đều cạnh a nên $SH \perp AB$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta lại có $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$. Kẻ $HK \perp SB$ tại K. (Ta sẽ chứng minh được

$HK \perp (SBC)$ Thấy để các Em làm nhé! Xem như bài tập nhỏ nhé). Khi đó $d(H; (SBC)) = HK$. Tam giác SBH vuông tại H, có HK là đường cao suy ra:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} \Leftrightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}. \text{ Vậy } d(H; (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

- b) Tính $d(M; (SBC))$.

Gọi I là tâm của hình vuông; d là đường thẳng qua M và song song với SB; N là giao điểm giữa d và BD.

Khi đó $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel (SBC) \Rightarrow d(M; (SBC)) = d(N; (SBC))$.

Ta có: $\frac{BN}{BD} = \frac{SM}{SD} = \frac{1}{4} \Rightarrow BN = \frac{1}{4}BD \Rightarrow N$ là trung điểm của BI. Gọi E là giao điểm của HI và BC

thì E là trung điểm của BC (Do $HI \parallel AC$ và H là trung điểm của AB thì E phải là trung điểm của BC). Ta có:

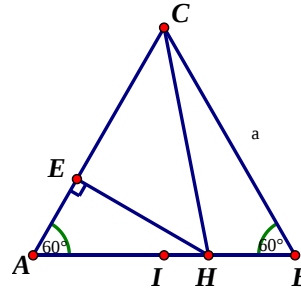
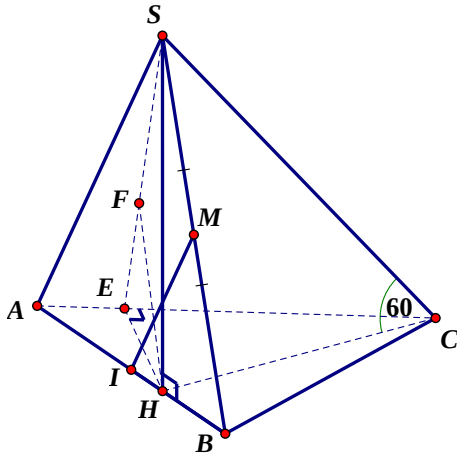
$HI = EI$ (không khó lắm các Em thử kiểm tra xem như bài tập nhỏ nhé!).

$$\text{Ta có: } \frac{d(N; (SBC))}{d(H; (SBC))} = \frac{NI}{HI} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(N; (SBC)) = \frac{1}{2}d(H; (SBC)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{8}.$$

$$\text{Vậy } d(M; (SBC)) = d(N; (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{8}.$$

Ví dụ 19. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính $d(M; (SAC))$, với M là trung điểm của SB.

Giải



Gọi I là trung điểm của AB, ta có $IM \parallel SA \Rightarrow IM \parallel (SAC) \Rightarrow d(M; (SAC)) = d(I; (SAC))$.

Góc giữa SC và phẳng (ABC) chính là góc SCH , suy ra $\angle SCH = 60^\circ$.

Ta có: $HC^2 = BH^2 + BC^2 - 2BH \cdot BC \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow HC = \frac{a\sqrt{7}}{3}; SH = CH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{3}$.

Ta có: $IA = \frac{1}{2}AB; HA = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{d(I; (SAC))}{d(H; (SAC))} = \frac{IA}{HA} = \frac{3}{4} \Rightarrow d(I; (SAC)) = \frac{3}{4} d(H; (SAC))$.

Kẻ $HE \perp AC$ tại E, kẻ $HF \perp SE$ tại F. (Ta sẽ chứng minh được $HF \perp (SAC)$ Thấy để các Em làm nhé! Xem như bài tập nhỏ nhé). Khi đó $HF = d(H; (SAC))$.

Ta có: $HE = HA \cdot \sin 60^\circ = \frac{2a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SHE vuông tại E, có đường cao HF suy ra:

$$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{HE^2} + \frac{1}{SH^2} \Leftrightarrow \frac{1}{HF^2} = \frac{3}{a^2} + \frac{3}{7a^2} \Leftrightarrow HF = \frac{a\sqrt{42}}{12} \Rightarrow d(I; (SAC)) = \frac{3}{4} d(H; (SAC)) = \frac{a\sqrt{42}}{16}.$$

Vậy: $d(M; (SAC)) = d(I; (SAC)) = \frac{a\sqrt{42}}{16}$.

4. Ứng dụng công thức thể tích để tính khoảng cách

a. Phương pháp:

Sử dụng công thức $V = \frac{1}{3}S.h \Leftrightarrow h = \frac{3V}{S}$. Một ý tưởng hết sức đơn giản để tính khoảng cách nhưng

cũng hiệu quả trong một số trường hợp.

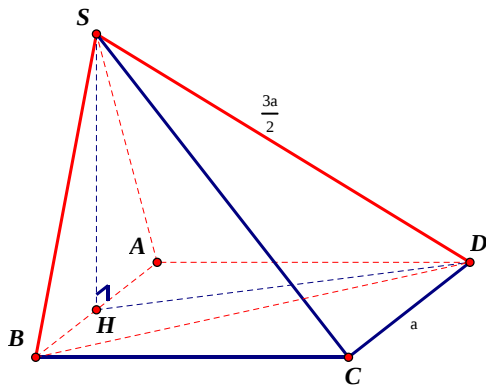
Thường áp dụng với các bài dễ tính thể tích. Tuy nhiên nhược điểm trong khâu tính diện tích, để khắc phục điểm yếu này ta cứ sử dụng công thức Heron và bấm máy tính. Mỗi phương pháp đều có ưu và nhược điểm, tùy theo bài toán cụ thể. Do vậy các Em cứ nắm hết phương pháp. Thầy nhắc lại công thức Heron:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{(p-AB)(p-AC)(p-BC)} \quad ; \quad \text{Với } p = \frac{AB+BC+AC}{2}.$$

b. Bài tập mẫu

Ví dụ 20. (Trích KA -2014) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a; $SD = \frac{3a}{2}$; hình chiếu vuông góc của S trên (ABCD) là trung điểm của cạnh AB. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

Giải



+ Tính $V_{S.ABCD}$.

Gọi H là trung điểm của AB, ta có $AH \perp (ABCD)$.

Tam giác ADH vuông tại A nên:

$$HD^2 = AD^2 + AH^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}.$$

Tam giác SHD vuông H nên :

$$SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}} = a.$$

$$\text{Khi đó : } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a^2 = \frac{a^3}{3}.$$

+ Tính $d(A; (SBD))$.

$$\text{Ta có: } V_{S.ABD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^3}{6}.$$

$$\text{Ta tính được: } BD = a\sqrt{2}; SD = \frac{3a}{2}; SD = \frac{a\sqrt{5}}{5}. \text{ Với } p = \frac{a\sqrt{2} + \frac{3}{2}a + \frac{a\sqrt{5}}{2}}{2}.$$

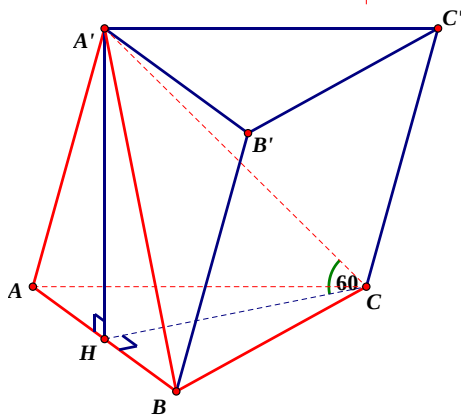
$$\text{Áp dụng công thức Heron ta có: } S_{\triangle SBD} = \sqrt{(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \frac{3}{4} a^2.$$

$$\text{Vậy: } d(A; (SBD)) = \frac{3V_{A.SBD}}{S_{\triangle SBD}} = \frac{3a^2}{6} : \frac{3a^2}{4} = \frac{2a}{3}.$$

Ví dụ 21.(Trích KB -2014) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB ; đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ điểm B đến $(ACC'A')$.

Giải

+ Tính $V_{ABC.A'B'C'}$.



Gọi H là trung điểm của AB , ta có $A'H \perp (ABC)$ và

$A'BH = 60^\circ$. Tam giác ABC đều cạnh a và H là trung

điểm của AB nên $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Tam giác

$A'HC$ vuông tại H nên $A'H = CH \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$.

Do đó: $V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

+ Tính $d(B; (ACC'A'))$.

Ta có: $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} A'H \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Ta có: $A'A = \sqrt{AH^2 + A'H^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$; $AC = a$; $A'C = \frac{A'H}{\sin 60^\circ} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$. Áp dụng công

thức Heron ta có: $S_{\triangle A'AC} = \sqrt{(p - A'A)(p - AC)(p - A'C)} = \frac{\sqrt{39}}{8} a^2$. Với $p = \frac{a + a\sqrt{3} + \frac{a\sqrt{10}}{2}}{2}$.

Vậy $d(B; (AA'C'C)) = \frac{3V_{A'.ABC}}{S_{\triangle AA'C}} = 3 \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{8} : \frac{\sqrt{39}}{8} a^2 = \frac{3a\sqrt{13}}{13}$.

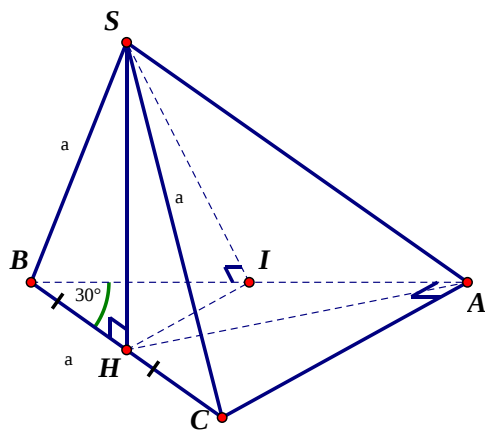
Ví dụ 22. (Trích KA -2013) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A ; $ABC = 30^\circ$ mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) .

Giải

+ Tính $V_{S.ABCD}$.

Gọi H là trung điểm của BC , do tam giác SBC đều nên ta có $SH \perp BC$. Mà $(SBC) \perp (ABC)$ và

$(SBC) \cap (ABC) = BC$, do đó $SH \perp (ABC)$.



Tam giác SBC đều cạnh a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tam giác ABC

vuông A và $ABC = 30^\circ$, ta có:

$$AC = BC \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AB = BC \sin 30^\circ = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Khi đó: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{16}.$$

+ Tính $d(C; (SAB))$.

Xét ΔSHB và ΔSHA cùng vuông tại H; có chung SH và

$$HA = HB = \frac{a}{2} \Rightarrow \Delta SHB = \Delta SHA \Rightarrow SA = SB.$$

Gọi I là trung điểm của AB, khi đó $SI \perp AB$ (vì ΔSAB cân tại S). Ta có: $SI = \sqrt{SB^2 - BI^2} = \frac{a\sqrt{13}}{4}$.

$$\text{Suy ra: } S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} SI \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{39}}{16}.$$

$$\text{Vậy: } d(C; (SAB)) = d(B; (AA'C'C)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAB}} = 3 \cdot \frac{a^3}{16} : \frac{a^2\sqrt{39}}{16} = \frac{\sqrt{39}a}{13}.$$

Bình luận:

Ta sẽ không dành quá nhiều giấy mực cho phương pháp này nhé! Vì với các phương pháp đã cung cấp ở phía trước ta hoàn toàn có thể giải nhanh các bài toán khoảng cách. Ở đây, Thầy chỉ cũng cấp thêm để các Em cùng tham khảo thôi.

II. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

a. Phương pháp:

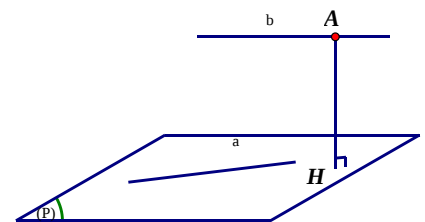
Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Để tính khoảng cách giữa a và b ta thực hiện các bước sau:

Cách 1: Phương pháp tổng quát

B1: Dựng mặt phẳng (P) chứa a và (P) song song với b.

B2: Khi đó ta đưa bài toán khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b về bài toán khoảng cách từ một điểm tùy ý thuộc đường thẳng b đến mặt phẳng (P). Việc còn lại là đã biết ở phần trước.

B3: Chỉ cần chọn điểm A phù hợp thuộc đường thẳng b và tính khoảng cách từ điểm A đến (P).



Cách chọn mặt phẳng (P): Ta thường gặp yêu cầu tính khoảng cách giữa đáy và cạnh bên của hình chóp hay hình lăng trụ. Khi đó:

+ Ta chọn mặt phẳng (P) là mặt phẳng chứa cạnh bên và song song cạnh đáy. Vì khi đó sẽ đưa bài toán về tính **khoảng cách từ điểm thuộc mặt phẳng đáy đến mặt phẳng bên(đã biết)**.

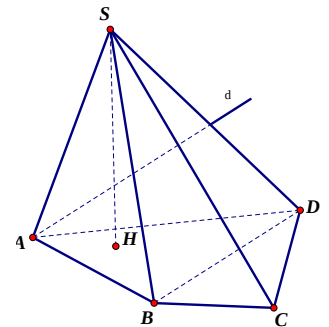
+ Cụ thể: Cho hình chóp S.ABCD có đáy H là chân đường cao của hình chóp.

Giả sử cần tính khoảng cách giữa SA và BD. Ta thực hiện:

B1: Dựng đường thẳng d qua A và $d \parallel BD$. Khi đó mặt phẳng (P) chứa SA và d.

B2: Ta chuyển về bài toán khoảng cách từ một điểm thuộc BD đến mp(P).

Thường thì điểm đó sẽ là B hoặc D luôn. Tới đây Em cần nhớ lại cách tính khoảng cách từ một điểm thuộc mặt đáy đến mặt bên.

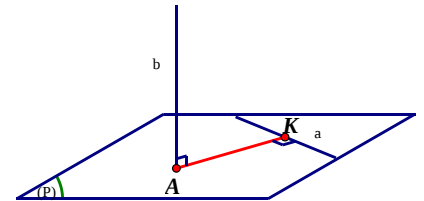


Cách 2: Đặc biệt khi đường thẳng a và b vuông góc nhau

Khi đó thường bài toán có sẵn mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và (P) vuông góc b (nếu không thì ta dựng thêm).

B1: Xác định giao điểm A của đường thẳng b và (P).

B2: Từ A kẻ AK vuông góc đường thẳng a. Khi đó đoạn thẳng AK là khoảng cách cần tính.



Chú ý:

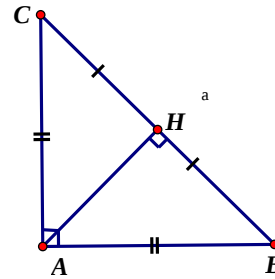
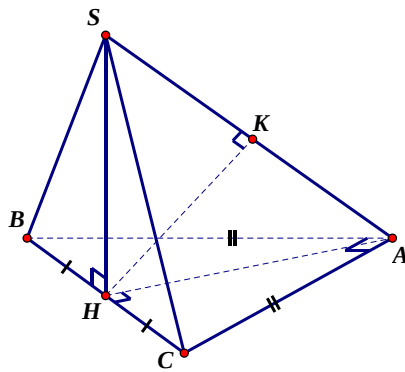
Ngoài cách tính khoảng cách trực tiếp Thầy có biên soạn “ **Chuyên đề phương pháp tọa độ hóa hình không gian**”. Các Em tìm đọc nhé nếu thấy phần này hơi phức tạp. Ta đừng bận tâm việc phương pháp nào nhanh hay chậm, dài hay ngắn, đẹp hay không đẹp. Điều ta nên bận tâm là phải tích lũy được nhiều phương pháp cho những yêu cầu của bài toán. Trong từng bài toán cụ thể mỗi phương pháp sẽ thể hiện được điểm mạnh và yếu của nó. Quan trọng là các Em phải mạnh dạn tư duy, đánh giá bài toán. Xem bài toán đó có hai đường thẳng đó có quan hệ vuông góc hay dễ mặt phẳng song song và đưa ra phương án phù hợp.

b. Bài tập mẫu

Ví dụ 23. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân tại A; mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA;BC.

Phân tích: Trước hết ta cần xác định được chân đường cao của hình chóp. Gọi H là trung điểm của BC, thì $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$. Để ý tí ta sẽ thấy $BC \perp (SAH)$ và có điểm chung với mặt phẳng (SAH) là điểm H. Vậy để tính $d(SA;BC)$ ta chỉ cần kẻ $HK \perp SA$ thì $HK = d(SA;BC)$.

Giải



Gọi H là trung điểm của BC, do tam giác SBC đều nên ta có $SH \perp BC$. Mà $(SBC) \perp (ABC)$, do đó $SH \perp (ABC)$. Tam giác SBC đều cạnh a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

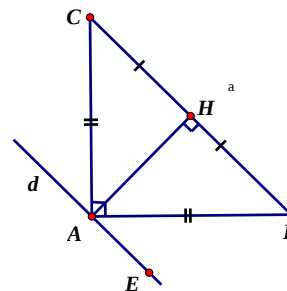
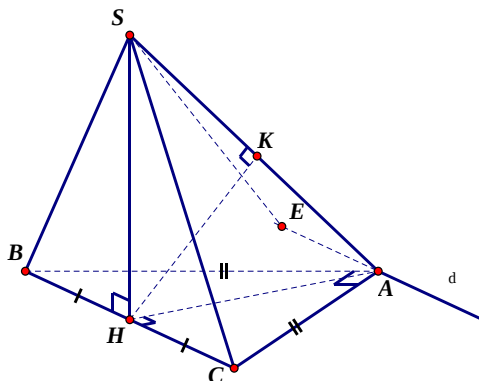
Tam giác ABC vuông cân tại A nên $AH \perp BC$ và $AH = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$, mà $SA \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAH)$.

Kẻ $HK \perp SA$ tại K, $BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp HK \Rightarrow HK$ là đoạn thẳng vuông góc chung của SA và BC suy ra: $HK = d(SA; BC)$. Tam giác SAH vuông tại H, có đường cao HK, suy ra:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HA^2} \Leftrightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} \Leftrightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}. \text{ Vậy } d(SA; BC) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Bình luận: Câu hỏi đặt ra là nếu ta không phát hiện ra $BC \perp (SAH)$ liệu có giải được bài toán

không? Câu trả lời hoàn toàn có thể giải theo cách tổng quát, mặc dù hơi dài hơn tí. Nhưng với cách tư duy này thì tổng hơn. Cụ thể:

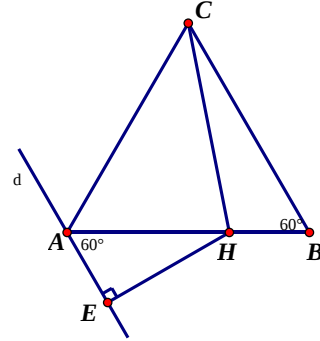
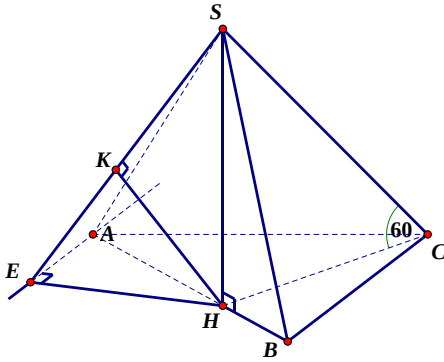


Kẻ đường thẳng d đi qua A và $d \parallel BC$. Để Em dễ hình dung mặt phẳng (P). Ta lấy điểm E thuộc đường thẳng d, thì $AE \parallel BC \Rightarrow BC \parallel (SAE) \Rightarrow d(SA; BC) = d(H; (SAE))$. Qua về bài toán khoảng cách từ chân đường cao tới mặt bên. Tiếp theo kẻ $HF \perp AE$ tại F, tuy nhiên nhớ rằng

$AH \perp BC; AE // BC \Rightarrow AH \perp AE$ tại A, chỉ cần kẻ $HK \perp SA \Rightarrow HK = d(H; (SAE))$.

Ví dụ 24. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

Giải



Góc giữa SC và phẳng (ABC) chính là góc SCH , suy ra $SCH = 60^\circ$. Ta có:

$HA = 2HB \Rightarrow HA = \frac{2a}{3}; HB = \frac{a}{3}$. Xét tam giác HBC và tam giác SHC vuông tại H ta có:

$$HC^2 = HB^2 + BC^2 - 2.HB.BC.\cos 60^\circ \Leftrightarrow HC = \frac{a\sqrt{7}}{3}; SH = CH.\tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{3}.$$

Kẻ đường thẳng d đi qua A và $d // BC$. Kẻ $HE \perp d$ tại E và $HK \perp SE$ tại K. Ta có

$$\begin{cases} d \perp HE \\ d \perp SH \end{cases} \Rightarrow d \perp (SEH) \Rightarrow d \perp HK.$$

Mà $HK \perp SE$, do đó HK vuông góc với mặt phẳng (SAE).

Suy ra $HK = d(H; (SAE))$. Do $BC // AE \Rightarrow BC // (SAE) \Rightarrow d(SA; BC) = d(B; (SAE))$.

Mà đường thẳng AB cắt (SAE) tại E suy ra

$$\frac{d(B; (SAE))}{d(H; (SAE))} = \frac{BA}{HA} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(B; (SAE)) = \frac{3}{2} d(H; (SAE)).$$

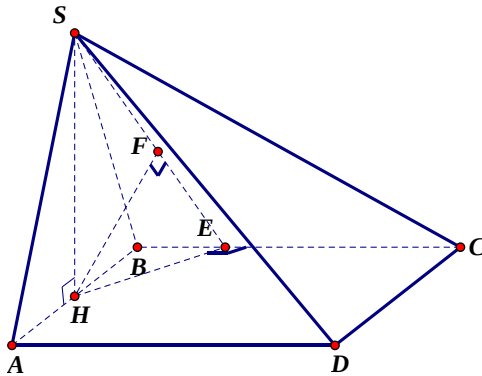
Xét tam giác AHE vuông tại E, có $EAH = ABC = 60^\circ$ (so le trong), ta có: $AE = AH.\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SEH vuông tại H, có HE là đường cao suy ra:

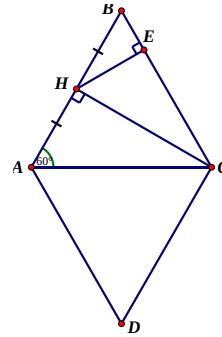
$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} \Leftrightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{3}{7a^2} + \frac{3}{a^2} \Leftrightarrow HK = \frac{a\sqrt{42}}{12}.$$

$$\text{Vậy } d(B; (SAE)) = \frac{3}{2} d(H; (SAE)) = \frac{3}{2} \cdot \frac{a\sqrt{42}}{12} = \frac{a\sqrt{42}}{8}.$$

Ví dụ 25. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a; $BAC = 60^\circ$; mặt bên SAB là tam giác cân và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Mặt phẳng (SCD) tạo với mặt phẳng (ABCD) một góc 30° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD.



Giải



Gọi H là trung điểm của AB, do tam giác SAB cân tại S nên $SH \perp AB$, mà $(SAB) \perp (ABCD)$ nên

$SH \perp (ABCD)$. Tam giác ABC cân tại B có $BAC = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều là $CH \perp AB$ và $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì $AB \parallel DC$ suy ra $CH \perp CD$.

Mà $SH \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHC) \Rightarrow CD \perp SC \Rightarrow ((SCD); (ABCD)) = SCH = 30^\circ$.

Tam giác SHC vuông tại H $\Rightarrow SH = HC \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{2}$.

Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(SB; AD) = d(A; (SBC))$.

Mà đường thẳng AH cắt (SBC) tại B suy ra

$$\frac{d(A; (SBC))}{d(H; (SBC))} = \frac{AB}{HB} = 2 \Rightarrow d(A; (SBC)) = 2d(H; (SBC)).$$

Kẻ $HE \perp BC$; $HF \perp SE$, suy ra $HF = d(H; (SBC))$ (Thầy đề các Em chứng minh $HF \perp (SBC)$ nhé!).

Ta có $HE = HB \cdot \sin 60^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tam giác SHE vuông tại H, có đường cao HF suy ra:

$$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{16}{3a^2} \Leftrightarrow HF = \frac{a\sqrt{21}}{14}. \text{ Vậy } d(SB; AD) = 2HF = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

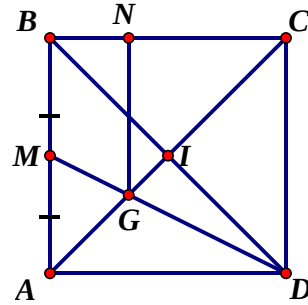
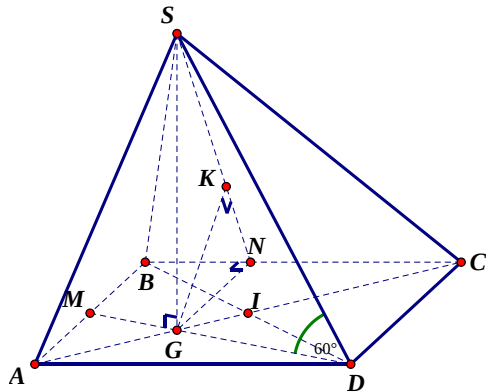
Bình luận:

Bài toán này dễ ở chỗ đã có sẵn mặt phẳng (SBC) $\parallel$ AD. Khi làm bài tập ta nhớ chú ý, đánh giá bài toán. Có một số hình vẽ ta phải nắm luôn kết quả. Tức là khi vẽ hình ra thì Em phải nhớ ngay trong

hình vẽ đó có những tính chất song song, vuông góc hay tỉ lệ nào... Em làm nhiều bài tập và tích lũy dần những dạng hình vẽ, khi đã có kĩ năng thì vấn đề sẽ đơn giản.

Ví dụ 26. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a; hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là trọng tâm của tam giác ABD. Cạnh SD tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AD.

Giải



Gọi I là tâm của hình vuông ABCD và G là trọng tâm của tam giác ABD, khi đó $SG \perp (ABCD)$ và ta có

$\angle SDG$ là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (ABCD). Do SD tạo với mặt phẳng đáy một góc bằng $60^\circ \Rightarrow \angle SDG = 60^\circ$. Do G là trọng tâm của tam giác ABD

$$\Rightarrow DG = \frac{2}{3} MD = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{AM^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

Xét tam giác SDG vuông tại G, ta có $SG = DG \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{15}}{3}$.

Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(SC; AD) = d(A; (SBC))$.

Ta có $AC = 2AI \wedge AG = \frac{2}{3} AI \Rightarrow AC = 3AG \Rightarrow AC = 2GC$.

Đường thẳng AG cắt BC tại C $\Rightarrow \frac{d(A; (SBC))}{d(G; (SBC))} = \frac{AC}{GC} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(A; (SBC)) = \frac{3}{2} d(G; (SBC))$.

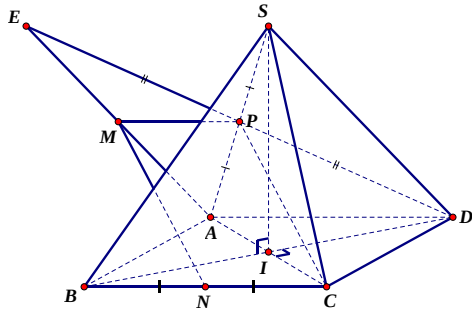
Kẻ $GN \perp BC$ tại N và $GK \perp SN$ tại K. Khi đó $GK = d(G; (SBC))$.

Ta có tam giác CGN đồng dạng với tam giác CAB suy ra $\frac{GN}{AB} = \frac{GC}{AC} \Rightarrow GN = \frac{2a}{3}$. Ta có:

$$\frac{1}{GK^2} = \frac{1}{SG^2} + \frac{1}{GN^2} \Leftrightarrow GK = \frac{2a\sqrt{285}}{57}. \text{ Vậy } d(AD; SC) = d(A; (SBC)) = \frac{3}{2} GK = \frac{a\sqrt{285}}{19}.$$

Ví dụ 27. (Trích KB -2007) Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA ; M là trung điểm của AE ; N là trung điểm của BC . Chứng minh MN vuông góc với BD và tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC .

Giải



+ Chứng minh $MN \perp BD$.

Gọi I là tâm của hình vuông, do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SI \perp (ABCD)$.

Gọi P là trung điểm của SA , mà M là trung điểm của AE nên MP là đường trung bình của tam giác ADE .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} MP \parallel AD \\ MP = \frac{1}{2} AD \end{cases} (1).$$

$$\text{Mặt khác, ta cũng có } \begin{cases} NC \parallel AD \\ NC = \frac{1}{2} AD \end{cases} (2).$$

Từ (1) và (2) ta suy ra tứ giác $MPCN$ là hình bình hành suy ra $MN \parallel PC$ (3).

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SI \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp CP (4). \text{ Từ (3) và (4) suy ra } MN \perp BD.$$

+ Tính $d(MN; AC)$.

$$\text{Do } MN \parallel CP \Rightarrow MN \parallel (SAC) \Rightarrow d(MN; AC) = d(N; (SAC)).$$

$$\text{Đường thẳng } BN \text{ cắt } (SAC) \text{ tại } C \text{ nên } \frac{d(N; (SAC))}{d(B; (SAC))} = \frac{NC}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(N; (SAC)) = \frac{1}{2} d(B; (SAC)).$$

$$\text{Ta có: } BI \perp (SAC) \Rightarrow BI = d(B; (SAC)) = \frac{1}{2} BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

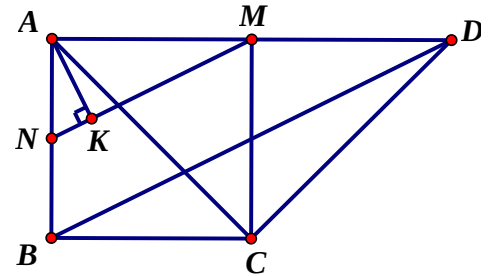
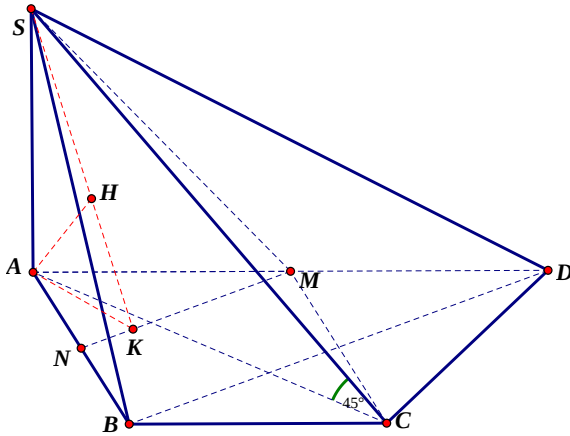
$$\text{Vậy } d(MN; AC) = \frac{1}{2} d(B; (SAC)) = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Bình luận

Khi đề bài cho hình chóp đều $S.ABCD$ thì các ngoài tính chất của hình chóp đều thì các Em phải nhớ thêm vài kết quả như BD vuông góc (SAC) và AC vuông góc (SBD) . Với mục tiêu giúp cho tất cả các học sinh có thể hiểu rõ chuyên đề. Thầy cố gắng trình bày chi tiết nhất và nếu là bài thi thì Thầy khuyên các Em cũng nên theo nguyên tắc trình bày chi tiết là tốt.

Ví dụ 28. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B;
 $AB = BC = a, AD = 2a$; SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD) bằng 45° . Tính $d(SM; BD)$ theo a.

Giải



M là trung điểm của AD nên ta có được tứ giác ABCM là hình vuông. Suy ra

$CM = a = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại C hay $CD \perp AD$ (1). Mặt khác, $CD \perp SA$ nên ta có

$CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp SC$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\angle SCA$ chính là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD) suy ra $\angle SCA = 45^\circ$. Suy ra tam giác SAC vuông cân tại A $\Rightarrow SA = AC = a\sqrt{2}$. Gọi N là trung điểm của AB trung điểm của AB, ta có:

$$BD \parallel MN \Rightarrow BD \parallel (SMN) \Rightarrow d(SM; BD) = d(B; (SMN)).$$

Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (SMN) tại N nên

$$\frac{d(B; (SMN))}{d(A; (SMN))} = \frac{NB}{NA} = 1 \Rightarrow d(B; (SMN)) = d(A; (SMN))$$

Kẻ $AK \perp MN$ tại K và $AH \perp SK$ tại H. Khi đó $AH = d(A; (SMN))$.

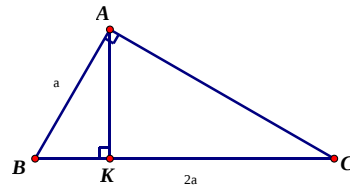
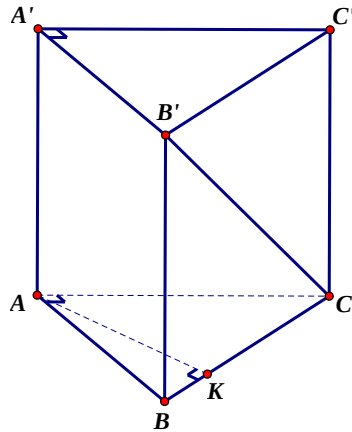
Xét tam giác AMN vuông tại A có đường cao AK suy ra: $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} \Leftrightarrow AK = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác SAK vuông tại A có đường cao AH suy ra: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{22}}{11}$.

$$\text{Vậy } d(SM; BD) = d(A; (SMN)) = \frac{a\sqrt{22}}{11}.$$

Ví dụ 29. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông tại A; $BC = 2a; AB = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC'.

Giải



Do $AA' \parallel BB' \Rightarrow AA' \parallel (BB'C'C) \Rightarrow d(AA'; B'C) = d(A; (BB'C'C))$.

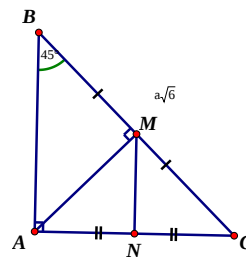
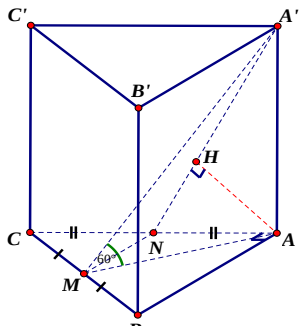
Kẻ $AK \perp BC$ tại K, mà $AK \perp BB' \Rightarrow AK \perp (BB'C'C) \Rightarrow AK = d(A; (BB'C'C))$.

Tam giác ABC vuông tại A, ta có: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$ và $AK \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(AA'; B'C) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 30. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A; M là trung điểm của BC; $BC = a\sqrt{6}$. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'M$ và AB.

Giải



Tam giác ABC vuông cân tại A suy ra

$$AB = AC = BC \cdot \sin 45^\circ = a\sqrt{3}; \quad AM \perp BC(1) \quad \text{và} \quad AM = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'MA) \Rightarrow BC \perp (A'M)(2).$$

Từ (1) và (2) ta có thể suy ra $A'MA$ chính là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) .

$$\text{Suy ra } A'MA = 60^\circ \quad \text{và} \quad A'A = AM \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

Gọi N là trung điểm của AC, ta có $AB \parallel MN \Rightarrow AB \parallel (A'MN) \Rightarrow d(A'M; AB) = d(A; (A'MN))$.

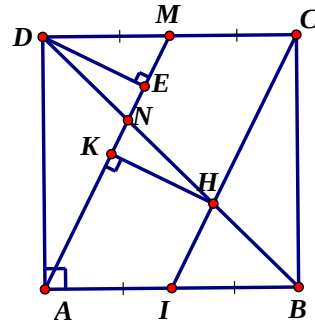
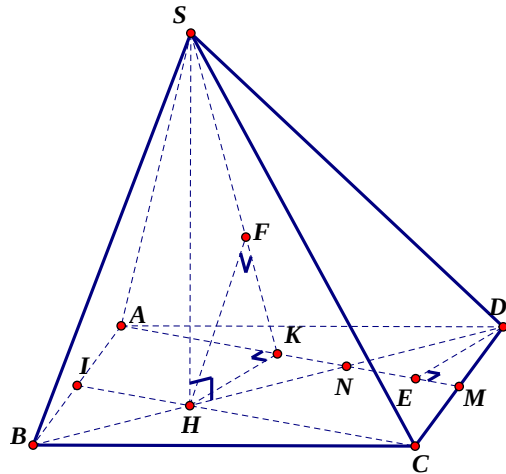
Kẻ $AH \perp A'M$ tại H (ta sẽ chứng minh được $AH \perp (A'MN)$ Thầy để các Em chứng minh xem như bài tập nhỏ nhé!). Khi đó $AH = d(A; (A'MN))$. Xét tam $A'AN$ vuông tại A có đường cao AH suy ra:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{2}{9a^2} + \frac{4}{3a^2} \Leftrightarrow AH = \frac{3a\sqrt{14}}{14}.$$

$$\text{Vậy } d(A'M; AB) = \frac{3a\sqrt{14}}{14}.$$

Ví dụ 31. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a; I là trung điểm của AB; H là giao điểm giữa BD và CI. SH vuông góc với mặt phẳng đáy và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CI.

Giải



Gọi M là trung điểm của DC, khi đó tứ giác AICM là hình bình hành suy ra $CI \parallel AM \Rightarrow CI \parallel (SAM) \Rightarrow d(SA; CI) = d(H; (SAM))$. Gọi N là giao điểm của DC và AM; K và E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H và D trên AM. Do M là trung điểm của DC và $MN \parallel CI$ suy ra N là trung điểm của DH. Từ đây ta có được $HK = DE \Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{DE^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{MD^2}$. Kẻ $HF \perp SK$ tại F (ta sẽ chứng minh được $HF \perp (SAM)$ Thầy để các Em chứng minh xem như bài tập nhỏ nhé!).

Khi đó $HF = d(H; (SAM))$.

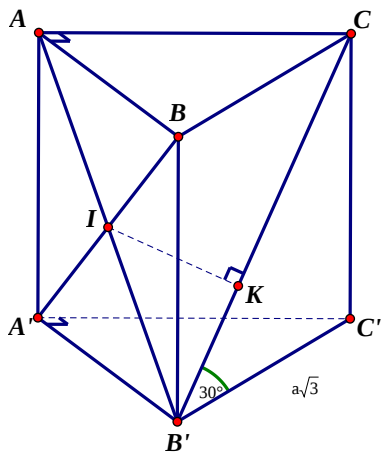
$$\text{Ta có: } \frac{1}{HF^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{MD^2} = \frac{3}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} \Leftrightarrow HF = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(SA; CI) = d(H; (SAM)) = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Ví dụ 32. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A; mặt bên $ABB'A'$ là hình vuông. Biết $B'C' = a\sqrt{3}$, góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $A'B'C'$ bằng 30° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BA' và $B'C$.

Phân tích: Đối với bài toán này ta để ý tí nhận ra được một điều rằng $AC \perp (ABB'A') \Rightarrow AC \perp BA'$, mà $BA' \perp B'A \Rightarrow BA' \perp B'A \Rightarrow BA' \perp (B'AC)$. Vậy để tính $d(BA'; B'C)$, ta chỉ gọi $I = BA' \cap B'A$ và kẻ $IK \perp BC' \Rightarrow IK = d(BA'; B'C)$.

Giải



Ta có $CB'C'$ chính là góc giữa CB' và mặt phẳng $(A'B'C')$ suy ra $CB'C' = 30^\circ \Rightarrow CC' = B'C' \cdot \tan 30^\circ = a$. Do $ABB'A'$ là hình vuông nên $BB' = AA' = AB = A'B' = CC' = a$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp AB \\ AC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AC \perp (ABB'A') \Rightarrow AC \perp BA'$, mà

$BA' \perp B'A \Rightarrow BA' \perp B'A \Rightarrow BA' \perp (B'AC)$. Gọi $I = BA' \cap B'A$ và kẻ $IK \perp BC'$, mặt khác $BA' \perp (B'AC) \Rightarrow BA' \perp IK$.

Từ các điều này ta có $IK = d(BA'; B'C)$.

Tam giác $B'AC$ đồng dạng với tam giác $B'KI$ suy ra $\frac{IK}{AC} = \frac{IB'}{CB'} \Rightarrow IK = \frac{AC \cdot IB'}{CB'}$.

Ta có $IB' = \frac{A'B}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$; $CB' = \sqrt{CC'^2 + B'C'^2} = 2a$.

Từ đây ta có: $IK = \frac{a}{2}$. Vậy $d(BA'; B'C) = \frac{a}{2}$.

Bình luận:

Trong trường hợp ta không nhận ra được $BA' \perp (B'AC)$ thì thế nào? Ta có thể làm theo cách 2 sau đây, tuy nhiên Thầy khuyến khích các Em nên mạnh dạn suy nghĩ các phương pháp nhé.

Cách 2:

a) Tính $d(G;(SBC))$

b) Tính $d(G;(SAC))$.

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy.

Cạnh bên SC hợp với mặt phẳng đáy một góc 45° và $SD = 2a$.

a) Tính $d(A;(SBC))$.

b) Tính $d(A;(SDC))$.

c) Tính $d(A;(SBD))$.

d) Tính $d(A;(SBM))$. M là trung điểm của DC.

Bài 5. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân tại A. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của AB. Cạnh bên SC hợp với đáy một góc 45° và $SC = a\sqrt{2}$.

a) Tính $d(H;(SBC))$

b) Tính $d(H;(SAC))$.

Bài 6. Cho hình chóp S.ABC có cạnh bên SA vuông góc đáy và $SA = 2a$. Diện tích của tam giác ABC gấp 2 lần diện tích của tam giác SBC. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng SBC.

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang cân; $AD \parallel BC$; $AB = BC = \frac{AD}{2} = a$; cạnh bên

SA vuông góc đáy và $SA = a\sqrt{3}$.

a) Tính $d(A;(SBC))$

b) Tính $d(A;(SDC))$.

c) Tính $d(A;(SBD))$

Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a; tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của cạnh AB và BC.

a) Tính $d(H;(SBC))$

c) Tính $d(H;(SDK))$.

e) Tính $d(H;(SAK))$.

b) Tính $d(H;(SDC))$.

d) Tính $d(H;(SAC))$

f) Tính $d(A;(SAD))$

Bài 9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành với $AB = 2AD = 2a$; $BAC = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm H của AB. Cạnh bên SC hợp với đáy một góc 45° .

a) Tính $d(H;(SBC))$

b) Tính $d(H;(SDC))$

Bài 10. Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và I là tâm của đa giác đáy. Mặt bên hợp với mặt đáy một góc 60° .

a) Tính $d(I;(SAB))$

b) Tính $d(I;(SBM))$, M là trung điểm của AD.

Bài 11. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông tại A; $AB = 2AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là tâm H của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Biết SC hợp với mặt phẳng(ABC) một góc 60° . Tính $d(H;(SAB))$.

Bài 12. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật tâm I; $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Tam giác SAI cân tại S và mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Biết góc giữa SD và mặt phẳng (ABCD) bằng 60° .

- a) Tính $d(A; (SDC))$. b) Tính $d(B; (SAD))$. c) Tính $d(C; (SAB))$

Bài 13. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác vuông tại A; mặt bên ABB'A' là hình vuông. Biết $B'C' = a\sqrt{3}$, góc giữa B'C và mặt phẳng A'B'C' bằng 30° .

- a) Tính $d(A'; (AB'C'))$. b) Tính $d(B'; (C'AB))$.

Bài 14. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của cạnh AB, góc giữa A'C và mặt đáy bằng 60° .

- a) Tính $d(A; (A'BC))$. b) Tính $d(A; (BCC'B'))$.

Bài 15. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy bằng a, góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 60° . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CC'.

- a) Tính $d(M; (AB'N))$. b) Tính $d(B; (AB'C'))$.

Bài 16. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của cạnh AB, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 45° . Gọi M là trung điểm của B'C'.

- a) Tính $d(A; (A'MC))$. b) Tính $d(A; (BCC'B'))$.

Bài 17. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, $SD = \frac{3a}{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm của AB. Gọi K là trung điểm của AD.

- a) Tính $d(SA; BC)$. c) Tính $d(CK; SB)$.
b) Tính $d(HK; SB)$. d) Tính $d(SC; BK)$.

Bài 18. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Gọi I là trung điểm của AB; hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của CI và cạnh SA hợp với mặt phẳng (ABC) một góc 60°

- a) Tính $d(SA; CI)$. b) Tính $d(SB; AC)$.

Bài 19. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a, $ABC = 60^\circ$, $SD = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn thẳng BD sao $HD = 3HB$, gọi M là trung điểm của SD.

a) Tính $d(BD; SC)$.

b) Tính $d(CK; AD)$.

Bài 28. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân tại C, $AB = 3a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là trọng tâm G của tam giác ABC. Cạnh $SB = \frac{a\sqrt{14}}{2}$.

a) Tính $d(B; (SAC))$.

b) Tính $d(SC; AB)$.

Bài 29. Cho hình chóp đều S.ABC có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a. Tính $d(SC; AB)$.

Bài 30. Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a. Gọi K là trung điểm của SC.

a) Tính $d(B; (SAC))$.

c) Tính $d(SB; AC)$.

b) Tính $d(K; (SAB))$.

d) Tính $d(SA; CD)$.

Chương 3. THỂ TÍCH VÀ CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Trong chương này Thầy sẽ trình bày các dạng tính thể tích của khối chóp, khối lăng trụ. Các bài toán liên quan có thể là khoảng cách, quan hệ vuông góc, quan hệ song song và xác định góc... Ta biết rằng muốn tính được thể tích thì phải tính được độ dài đường cao và diện tích đa giác đáy. Mà muốn tính được đường cao trước tiên phải xác định được chân đường cao. Trong phần này Thầy sẽ phân dạng cách xác định chân đường cao và cách xác định góc giữa mặt phẳng với mặt phẳng và giữa đường thẳng với mặt phẳng. Các Em có thể xem lại lý thuyết chương 1 để đối chiếu với các ví dụ ở đây và làm bài tập rèn luyện. Các Em chú ý trong phần này Thầy sẽ ghép chung luôn thể tích và các câu liên quan nhé! Để các Em có thể luyện tập lại các phần đã học chương 2 cũng như làm quen với cách hỏi của đề thi.

I. Nhắc lại lý thuyết thường sử dụng

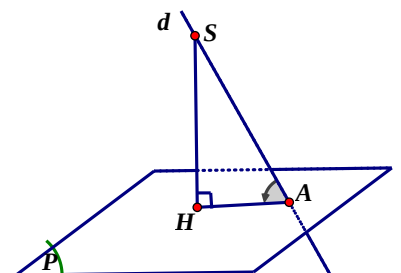
1. Cách xác định góc giữa đường thẳng d và (P):

B1: Tìm $A = d \cap (P)$.

B2. Lấy điểm $S \in d$ (thường có sẵn), sau đó tìm H là hình chiếu vuông góc của S trên (P).

Suy ra AH là hình chiếu của d trên (P).

Suy ra $(d; (P)) = (d; AH) = \angle SAH$.



2. Góc giữa hai mặt phẳng

a. Định nghĩa

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc giao

tuyến của hai mặt phẳng đó.

b. Cách xác định góc giữa (P) và (Q)

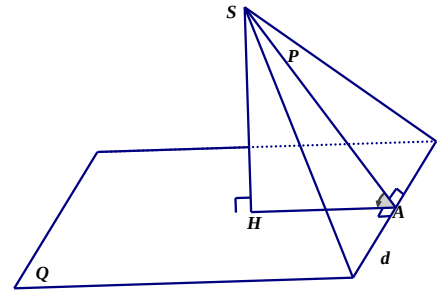
B1: Xác định $d = (P) \cap (Q)$.

B2: Lấy điểm S thuộc (P), tìm H là hình chiếu vuông góc của S trên (Q).

B3: Từ H kẻ HA vuông góc d (A thuộc d).

Ta sẽ chứng minh được SA vuông góc với d.

Suy ra $((P);(Q)) = (SA;HA) = \angle SAH$.



II. Phân dạng thể tích khối chóp

Các Em cần nhớ công thức tính thể tích khối chóp và công thức tính diện tích đáy nhé. Để ít tốn giấy mực các Em xem lại công thức ở chương 1 nhé!

1. Khối chóp đã có chân đường cao

Khi bài toán đã có sẵn chân đường cao rồi thì nhiệm vụ còn lại của ta chỉ là tính đường cao và diện tích đáy thay vào công thức thể tích là xong. Mà để tính được đường cao thường các Em sẽ phải xác định góc giữa đường thẳng với mặt phẳng hoặc góc của mặt phẳng với mặt phẳng. Các ví dụ Thầy sẽ cố gắng trình bày từ dễ nhất và tăng dần độ khó để các Em mới học dễ theo dõi. Tất nhiên nếu Em nào đã vững rồi thì có thể bỏ qua các bài dễ, nhưng làm lại thì các tốt càng tốt Em nhé!

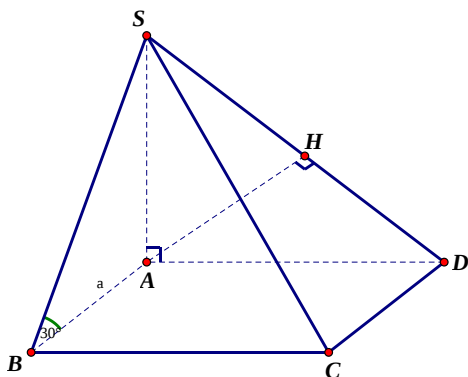
a. Bài tập mẫu

Ví dụ 33. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SB hợp với đáy một góc bằng 30° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai SD và AB.

Phân tích: Khi đọc vào đề này thì Em phải nhớ ngay kết quả

$BC \perp (SAB); BD \perp (SAC); CD \perp (SAD)$. Để khi lúc nào có khi sử dụng. Các kết quả này Em dễ dàng chứng minh được. Bài toán này ta dễ dàng tính được diện tích đáy, phần còn lại là tính đường cao SA thôi. Mà muốn tính được SA thì phải xác định được góc giữa SB và mặt phẳng (ABCD). Ta có B là giao điểm giữa SB và (ABCD) và $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SB; (ABCD)) = \angle SBA$.

Giải



+ Tính $V_{S.ABCD}$.

Ta có $B = SB \cap (ABCD)$ và $SA \perp (ABCD)$

$\Rightarrow (SB; (ABCD)) = \angle SBA$.

Khi đó: $SA = AB \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{\sqrt{3}}$ và $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot a^2 = \frac{a^3 \sqrt{3}}{9}$.

+ Tính $d(AB;SD)$.

Ta có $AB \parallel DC \Rightarrow AB \parallel (SAD) \Rightarrow d(AB;SD) = d(A;(SAD))$.

Kẻ $AH \perp SD$, ta chứng minh $AH \perp (SDC)$. Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp AH$. Mà $AH \perp SD$, do đó

$AH \perp (SDC) \Rightarrow AH = d(A;(SDC))$. Xét tam giác SAD vuông tại A, có đường cao AH suy ra:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{3}{a^2} + \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow AH = \frac{a}{2}. \text{ Vậy } d(AB;SD) = \frac{a}{2}.$$

Ví dụ 34. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, với $AD = 2AB$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm H của AB. Biết SC hợp với đáy một góc 45° và $SD = a\sqrt{2}$.

Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

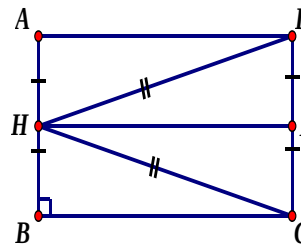
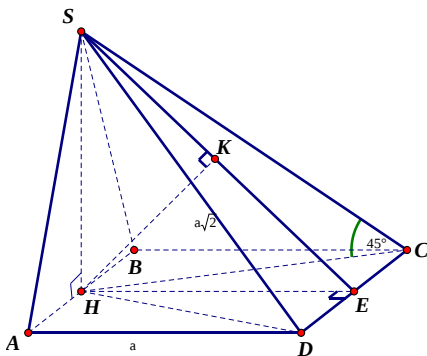
Phân tích: Rõ ràng đề này muốn làm khó ta rồi cho góc giữa SC và đáy nhưng không cho cạnh nào trong tam giác này. Vậy phải nghĩ xem SD có liên quan gì? Àk...! Không khó để ta thấy được

$$\triangle SHD = \triangle SHC \Rightarrow SC = SD = a\sqrt{2}. \text{ Vậy là được rồi nhé!}$$

Giải

Ta có $\angle SCH$ chính là góc giữa SC và mặt phẳng (ABCD) suy ra $\angle SCH = 45^\circ$.

$$\triangle SHD = \triangle SHC \Rightarrow SC = SD = a\sqrt{2} \Rightarrow SH = HC = SC \cdot \sin 45^\circ = a$$



$$\text{Xét tam giác BHC vuông tại H có } BC^2 + HB^2 = HC^2 \Leftrightarrow BC^2 + \frac{BC^2}{4} = a^2 \Leftrightarrow BC = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow AB = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{2a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{2a^3}{30}.$$

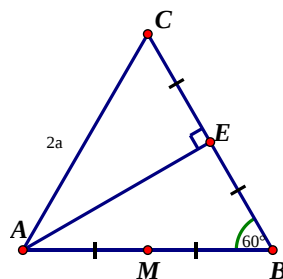
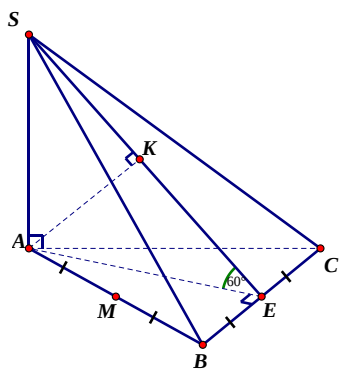
+ $d(A;(SCD))$.

Ta có $AH \parallel CD \Rightarrow AH \parallel (SDC) \Rightarrow d(A;(SDC)) = d(H;(SDC))$.

Gọi E là trung điểm của DC, kẻ $HK \perp SE \Rightarrow HK = d(H; (SCD))$. Xét tam giác SHE vuông tại H, có đường cao HK suy ra: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{5}{4a^2} \Leftrightarrow HK = \frac{2a}{3}$. Vậy $d(A; (SCD)) = \frac{2a}{3}$.

Ví dụ 35. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh 2a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBC) hợp với mặt đáy một góc 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách từ trung điểm N của AB đến mặt phẳng (SBC).

Phân tích: Bài này thì ta dễ dàng tính được diện tích đáy rồi. Phần còn lại là tính SA, vậy cần xác định góc giữa (SBC) và (ABC). Nhớ là lại cách xác định góc giữa hai mặt phẳng, đầu tiên ta có $BC = (SBC) \cap (ABC)$, tiếp theo kẻ $AE \perp BC$ tại E thì E là trung điểm của BC và $SE \perp BC$. Khi đó ta có SEA là góc giữa (SBC) và (ABC).



Giải

+ Tính $V_{S.ABC}$

Kẻ $AE \perp BC$ tại E thì E là trung điểm của BC; $AE = a\sqrt{3}$ và $SE \perp BC$. Khi đó ta có SEA là góc giữa (SBC) và (ABC) suy ra $SEA = 60^\circ$.

Ta có $SA = AE \cdot \tan 60^\circ = a$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} a \cdot \frac{4a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}.$$

+ Tính $d(M; (SBC))$.

$$\text{Ta có } \frac{d(M; (SBC))}{d(A; (SBC))} = \frac{MB}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(M; (SBC)) = \frac{1}{2} d(A; (SBC)).$$

Kẻ $AK \perp SE$ tại K, khi đó $AK = d(A; (SBC))$. Ta có:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} \Leftrightarrow AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d(M; (SBC)) = \frac{1}{2} d(A; (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

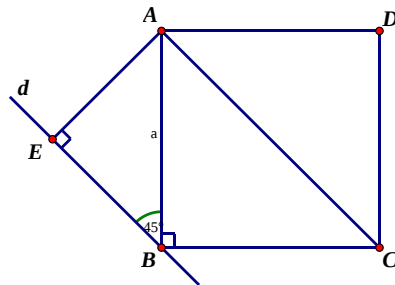
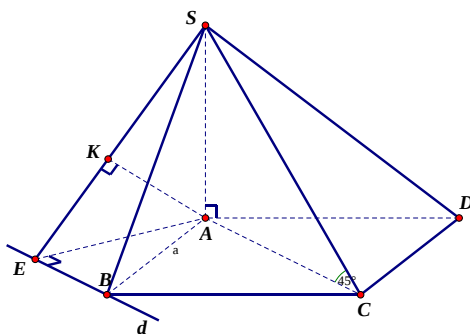
Ví dụ 36. (Trích đề THPT Quốc Gia -2015) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. SA vuông góc mặt phẳng(ABCD), góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD) bằng 45° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB, AC.

Giải

+ Tính $V_{S.ABCD}$.

Ta có: $(SC; (ABCD)) = SCA = 45^\circ$ và ABCD là hình vuông cạnh a suy ra $SA = AC = a\sqrt{2}$.

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot a^2 = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}.$$



+ Tính $d(AC; SB)$.

Kẻ đường thẳng d đi qua B và song song với AC. Kẻ $AE \perp d$ tại E, $AK \perp SE$ tại K.

Ta có $\begin{cases} BE \perp AE \\ BE \perp SA \end{cases} \Rightarrow BE \perp (SAE) \Rightarrow BE \perp AK$. Mà $AK \perp SE$, do đó

$$AK \perp (SBE) \Rightarrow AK = d(A; (SBE)).$$

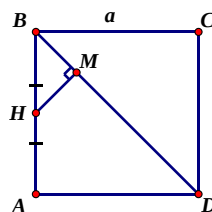
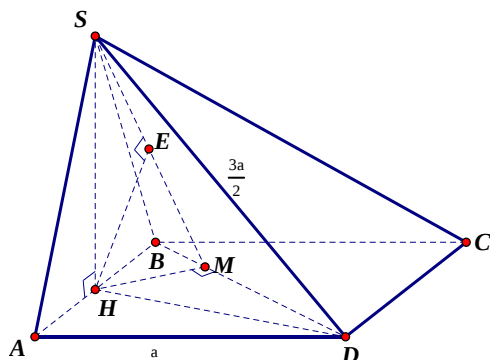
$$\text{Ta có } AC \parallel BE \Rightarrow AC \parallel (SBE) \Rightarrow d(AC; SB) = d(A; (SBE)) = AK.$$

Xét tam giác ABE vuông tại E có $AE = AB \cdot \sin 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Xét tam giác SAE vuông tại A, có đường

$$\text{cao AK suy ra: } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{2}{a^2} \Leftrightarrow AK = \frac{a\sqrt{10}}{5}. \text{ Vậy } d(AC; SB) = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

Ví dụ 37. (Trích KA -2014) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a ; $SD = \frac{3a}{2}$; hình chiếu vuông góc của S trên (ABCD) là trung điểm của cạnh AB. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

Giải



+ Tính $V_{S.ABCD}$.

Gọi H là trung điểm của AB, ta có $AH \perp (ABCD)$. Tam giác ADH vuông tại A nên:

$$HD^2 = AD^2 + AH^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}.$$

Tam giác SHD vuông H nên: $SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}} = a$.

$$\text{Khi đó: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot a^2 = \frac{a^3}{3}.$$

+ Tính $d(A; (SBD))$.

$$\text{Ta có } \frac{d(A; (SBD))}{d(H; (SBD))} = \frac{AB}{HB} = 2 \Rightarrow d(A; (SBD)) = 2d(H; (SBD)).$$

Kẻ $HM \perp BD$ tại M; kẻ $HE \perp SM$ (1) tại E. Ta chứng minh $HE \perp (SBD)$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BD \perp HM \\ BD \perp SH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHM) \Rightarrow BD \perp HE (2).$$

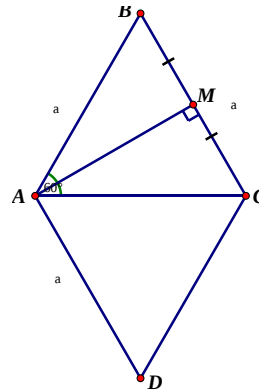
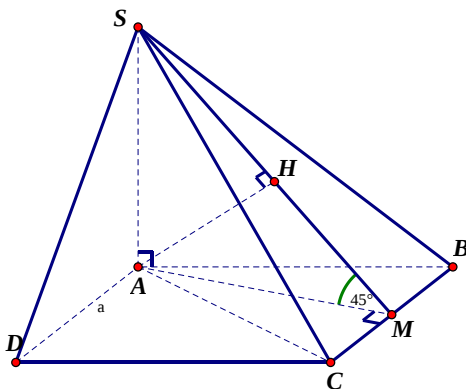
Từ (1) và (2) suy ra $HE \perp (SBD) \Rightarrow HE = d(H; (SBD))$. Ta có $HM = HB \cdot \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Tam giác SHM vuông tại H, có đường cao HE nên:

$$\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HM^2} \Leftrightarrow HE = \frac{a}{3}. \text{ Vậy } d(A; (SBD)) = 2d(H; (SBD)) = \frac{2a}{3}.$$

Ví dụ 38. (Trích KD -2013) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a; cạnh bên SA vuông góc với đáy; $BAD = 120^\circ$; M là trung điểm của cạnh BC và $SMA = 45^\circ$. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

Giải



+ Tính $V_{S.ABCD}$.

$$BAD = 120^\circ \Rightarrow BAC = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Delta SAM \text{ vuông tại A và } SMA = 45^\circ \Rightarrow \Delta SAM \text{ vuông cân tại A} \Rightarrow SA = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}.$$

+ Tính $d(D; (SBC))$.

$$\text{Ta có } AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(D; (SBC)) = d(A; (SBC)).$$

$$\text{Kẻ } AH \perp SM (1) \text{ tại H, do } \begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } AH \perp (SBC) \Rightarrow AH = d(A; (SBC)).$$

$$\text{Ta có } AH = AM \cdot \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}. \text{ Vậy } d(D; (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Ví dụ 39. (Trích KA -2012) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

Giải

+ Tính $V_{S.ABCD}$.

$$\text{Từ } HA = 2HB \Rightarrow HA = \frac{2a}{3}; HB = \frac{a}{3}. \text{ Xét tam giác CHB, ta có}$$

$$CH^2 = HB^2 + BC^2 - 2HB \cdot BC \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow CH = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$

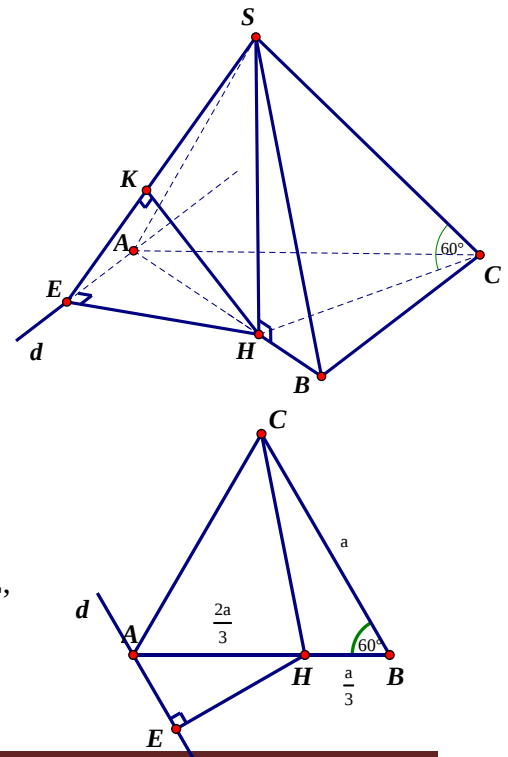
Góc giữa SC và phẳng (ABC) chính là góc SCH, suy ra

$$SCH = 60^\circ. \text{ Ta có: } SH = CH \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{21}}{3}.$$

$$\text{Do đó: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{7}}{12}.$$

+ Tính $d(SA; BC)$.

Kẻ đường thẳng d đi qua A và song song với BC. Kẻ $HE \perp d$ tại E, $HK \perp SE$ tại K.



Ta có $\begin{cases} AE \perp HE \\ AE \perp SH \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SHE) \Rightarrow AE \perp HK$. Mà $HK \perp SE$, do đó

$$HK \perp (SAE) \Rightarrow HK = d(H; (SAE)).$$

$$\text{Ta có } BC \parallel AE \Rightarrow BC \parallel (SAE) \Rightarrow d(BC; SA) = d(B; (SAE)).$$

Ta có đường thẳng đi qua điểm B và H cắt d tại A suy ra:

$$\text{Ta có } \frac{d(B; (SAE))}{d(H; (SAE))} = \frac{BA}{HA} = \frac{3}{2} \Rightarrow d(B; (SAE)) = \frac{3}{2} d(H; (SAE)).$$

Xét tam giác AHE vuông tại E có $HE = AH \cdot \sin 60^\circ = \frac{2a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Xét tam giác SHE vuông tại

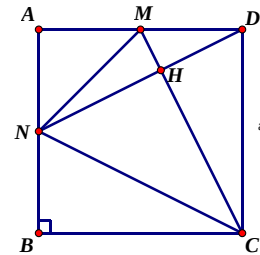
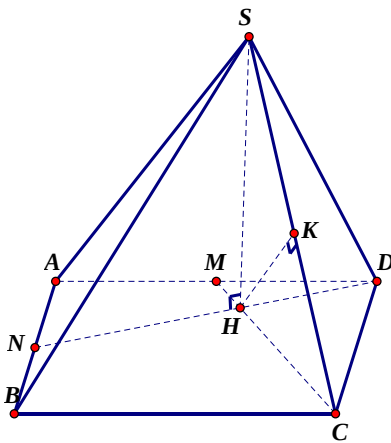
$$E, \text{ có đường cao HK suy ra: } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} \Leftrightarrow HK = \frac{a\sqrt{42}}{12}.$$

$$\text{Vậy } d(SA; BC) = \frac{3}{2} d(H; (SAE)) = \frac{a\sqrt{42}}{8}.$$

Bài 40. (Trích KA -2010) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AD; H là giao điểm của CN và MD. Biết SH vuông góc mặt phẳng (ABCD) và $SH = a\sqrt{3}$. Tính theo a thể tích của khối chóp S.CDNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng MD và SC.

Phân tích: Các Em nên vẽ đa giác đáy ra, bài toán này Em sẽ phát hiện ra rằng $ND \perp MC$, khi đó $ND \perp (SCM)$ và $ND \cap (SCM) = H$, để tính $d(ND; SC)$, chỉ cần kẻ $HK \perp SC$, thì HK là khoảng cách cần tính.

Giải



+ Tính $V_{S.DCNM}$.

$$\text{Ta có: } S_{DCNM} = S_{ABCD} - S_{AMN} - S_{BCM} = a^2 - \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{8}.$$

$$\text{Vậy: } V_{S.DCNM} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{DCNM} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{5a^2}{8} = \frac{5\sqrt{3}a^3}{24}.$$

+ Tính $d(SC; ND)$.

Ta có $\triangle DAN = \triangle CDM \Rightarrow ADN = DCM \Rightarrow ADN + CMD = DCM + CMD = 90^\circ \Rightarrow DN \perp CM$.

Kết hợp thêm $DN \perp SH \Rightarrow DN \perp (SCM)$. Kẻ $HK \perp SC$, khi đó HK là đoạn thẳng vuông góc chung của

DN và SC $\Rightarrow HK = d(SC; ND)$.

Xét tam giác DCM vuông tại D, có đường cao DH, ta có: $CH \cdot CM = CD^2 \Leftrightarrow CH = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HC^2} \Leftrightarrow HK = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}.$$

$$\text{Vậy } d(SC; ND) = \frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}.$$

b. Bài tập rèn luyện

Bài 31. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a; SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD); SC hợp với mặt phẳng (SCD) một góc 60° . Tính thể tích của khối chóp S.ABCD theo a và khoảng cách từ trung điểm M của SB đến mặt phẳng (SCD).

Bài 32. Cho hình chóp S.ABC có đáy tam giác vuông cân với $AB=AC=a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là hình trung điểm của BC. Mặt phẳng (SAB) hợp với mặt phẳng (ABC) một góc 45° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).

Bài 33. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SB vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và mặt phẳng (SAC) hợp với mặt phẳng đáy một góc 45° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và AC.

Bài 34. (Trích KD -2007) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, $ABC = BAD = 90^\circ$;

$BA = BC = a; AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính theo a khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SDC).

Bài 35. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $SA = a; AB = a; AC = 2a$; SA vuông góc mặt phẳng (ABCD). Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCG).

Bài 36. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = 2a; AD = a$; K là hình chiếu vuông góc của B lên đường chéo AC; các điểm H, M lần lượt là trung điểm của AK và DC. Cạnh SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD); góc giữa SB và mặt phẳng (ABCD) bằng 45° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và MH.

Bài 37. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a; AD = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của CD và SC hợp với mặt phẳng đáy một góc α sao cho $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBM).

Bài 38. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SD = \frac{3a}{2}$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm H của đoạn thẳng AB. Gọi K là trung điểm của AD. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD.

Bài 39. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Cạnh SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Gọi E là trung điểm BC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và SC.

Bài 40. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh, $a\sqrt{3}; BAD = 120^\circ$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng (ABCD) một góc 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC.

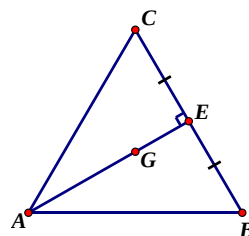
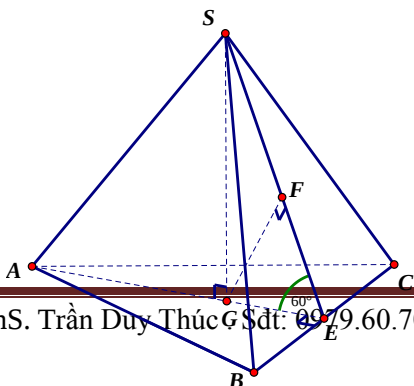
2. Khối chóp đều

Trong đề thi nếu gặp khối chóp đều thì chỉ có thể là khối chóp tứ giác đều hoặc khối chóp tam giác đều thôi. Các Em xem lại tính chất của hình chóp đều ở chương 1 nhé!

a. Bài tập mẫu

Ví dụ 41. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a và mặt bên hợp với đáy một góc bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

Giải



+ Tính $V_{S.ABC}$.

Gọi E là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC. Do S.ABC là hình chóp đều nên

$SG \perp (ABC)$. Tam giác ABC đều cạnh a nên $AE \perp BC$ và $AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $GE = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Ta có SEG

chính là góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) nên $SEG = 60^\circ$ và

$$SG = GE \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SG \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$

+ Tính $d(A; (SBC))$.

$$\text{Ta có: } \frac{d(A; (SBC))}{d(G; (SBC))} = \frac{AE}{GE} = 3 \Rightarrow d(A; (SBC)) = 3d(G; (SBC)).$$

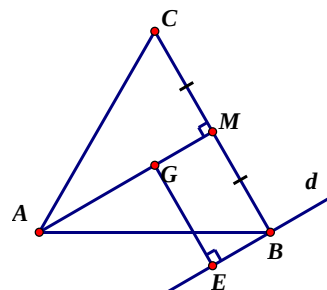
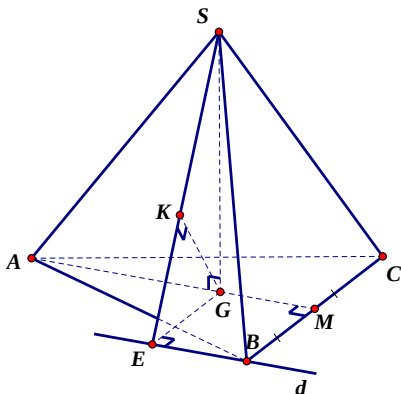
Kẻ $GK \perp SE$, khi đó $GK = d(G; (SBC))$. Ta có:

$$\frac{1}{GK^2} = \frac{1}{SG^2} + \frac{1}{GE^2} \Leftrightarrow \frac{1}{GK^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{12}{a^2} \Rightarrow GK = \frac{a}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(A; (SBC)) = 3GK = \frac{3a^2}{4}.$$

Ví dụ 42. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a. Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và SB.

Giải



+ Tính $V_{S.ABCD}$.

Gọi I là tâm của hình vuông. Do S.ABCD là hình chóp đều nên $SI \perp (ABCD)$ và $AI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác SAI vuông tại I, có $SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SI \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3}{6}$.

+ Tính $d(MK; SB)$.

Gọi N là trung điểm của AD, khi đó NK // SA và MN // AB suy ra:

$(MKN) \parallel (SAB) \Rightarrow d(MK; SB) = d(I; (SAB))$.

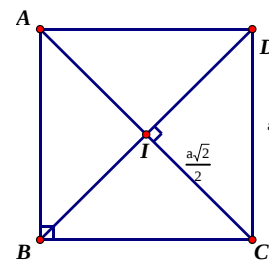
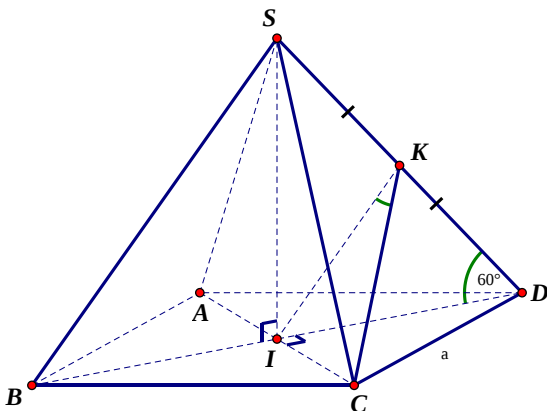
Kẻ $IE \perp AB$ tại E, $IH \perp SE$ tại H. Ta có $\begin{cases} IE \perp AB \\ SI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SIE) \Rightarrow AB \perp IH$.

Mà $IH \perp SE$, do đó $IH \perp (SAB) \Rightarrow IH = d(I; (SAB))$. Ta có:

$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IE^2} \Leftrightarrow \frac{1}{IH^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{a^2} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Vậy $d(MK; SB) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Ví dụ 45. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và cạnh bên hợp với đáy một góc 60° . Gọi K là trung điểm của SD. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và cosin của góc hợp bởi hai đường thẳng CK và SB.

Giải



+ Tính $V_{S.ABCD}$.

Gọi I là giao điểm của AC và BD. Do S.ABCD là hình chóp đều nên $SI \perp (ABCD)$ và $ID = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có SDI là góc giữa SD và mặt phẳng (ABCD) $\Rightarrow SDI = 60^\circ$.

Xét tam giác SID vuông tại I, ta có: $SI = ID \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SI \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$

+ Tính $\cos(CK; SB)$.

Ta có $IK \parallel SB \Rightarrow (CK; SB) = (CK; KI) = CIK$. Ta có $\begin{cases} IC \perp BD \\ IC \perp SI \end{cases} \Rightarrow IC \perp (SBD) \Rightarrow IC \perp IK$ hay

tam giác IKC vuông tại I. Xét tam giác SID vuông tại I, ta có:

$$SD = \sqrt{SI^2 + ID^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow IK = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Do } IC = IK = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \triangle CIK \text{ vuông cân tại I} \Rightarrow \cos CIK = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \cos(CK; SB) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

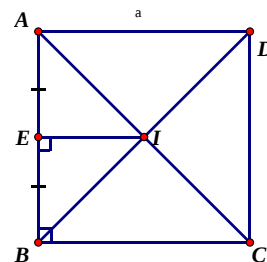
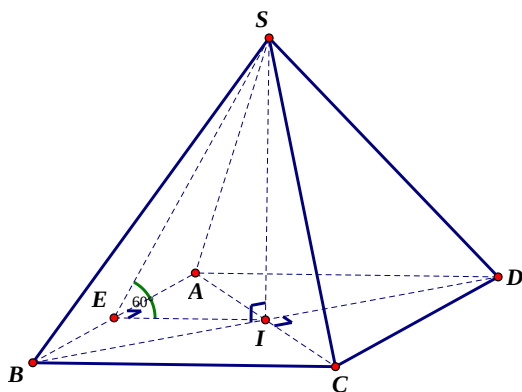
Ví dụ 46. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có I là tâm của đa giác đáy và cạnh đáy bằng a. Mặt bên hợp với đáy một góc 60° . Gọi E là trung điểm của SB. Chứng minh IE vuông góc với SC và tính theo a thể tích của khối chóp S.EICB.

Giải

+ Chứng minh $SE \perp CD$.

Do S.ABCD là hình chóp đều nên $SI \perp (ABCD)$. Ta có $\begin{cases} CD \perp IE \\ CD \perp SI \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SEI) \Rightarrow CD \perp SE$.

+ Tính $V_{S.EICB}$.



Ta có SEI là góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABCD) $\Rightarrow SEI = 60^\circ$ và

$$SI = IE \cdot \tan 60^\circ = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Diện tích } S_{EICB} = \frac{1}{2} EB(IE + BC) = \frac{3}{8} a^2. \text{ Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SI \cdot S_{EICB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{8} a^2 = \frac{a^3 \sqrt{3}}{16}.$$

b. Bài tập rèn luyện

Bài 41. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a và cạnh bên hợp với đáy một góc 45° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

Bài 42. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và SA hợp với đáy một góc 60° . Gọi K là trung điểm của SB. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và cosin của góc hợp bởi hai đường thẳng CK và SA.

Bài 43. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a và mặt bên hợp với mặt đáy một góc 45° . Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên cạnh SB. Chứng minh rằng SB vuông góc với mặt phẳng (AHC) và tính theo a thể tích của khối chóp S.AHC.

Bài 44. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và mặt bên hợp với mặt đáy một góc 45° . Gọi K là trung điểm của SD. Tính theo a thể tích của khối chóp S.AKC và khoảng cách giữa hai đường thẳng BK và CD.

Bài 45. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên a và cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 45° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và cosin của góc hợp bởi SC và mặt phẳng (SAD).

Bài 46. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên a và mặt bên hợp với mặt đáy một góc 45° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và cosin của góc hợp bởi SC và mặt phẳng (SAD).

Bài 47. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên 2a và mặt bên hợp với mặt đáy một góc 60° . Gọi M, K lần lượt là trung điểm của SD và BC. Tính theo a thể tích của khối chóp K.AMCD.

Bài 48. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên $SD = 2a$ và tam giác SAC đều. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

3. Khối chóp cần phải xác định chân đường cao

Bài toán hình không gian thì việc rất quan trọng là phải xác định được chân đường cao khối chóp hay khối lăng trụ. Ở hai dạng vừa trình bày thì xem như đã có sẵn chân đường cao hoặc việc xác định chân đường cao của khối chóp là dễ dàng đối với khối chóp đều. Trong mục này ta sẽ tìm hiểu một số cách xác định chân đường cao. Nhắc lại hai dạng thường gặp:

Dạng 1. Hình chóp có mặt bên vuông góc đáy

Đường cao của hình chóp là đường cao của mặt bên chứa trong mặt phẳng vuông góc đáy.

Ví dụ: Cho hình chóp S.ABCD có mặt bên SAB vuông góc đáy. Ta kẻ SH vuông góc AB thì SH là đường cao của hình chóp.

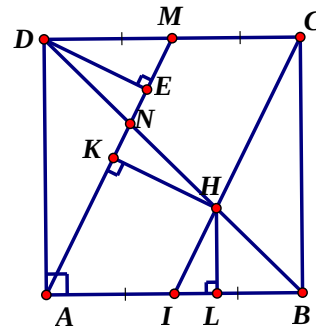
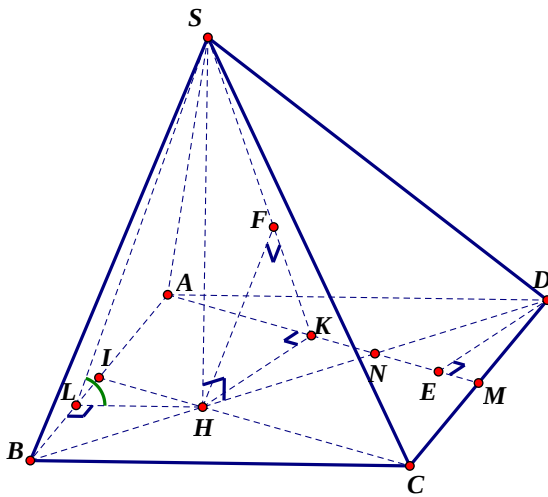
Dạng 2. Hình chóp có hai mặt bên vuông góc đáy

Đường cao của hình chóp là giao tuyến của hai mặt bên.

a. Bài tập mẫu

Ví dụ 47 (Trích THPT Trần Phú 2016). Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a; I là trung điểm của AB; H là giao điểm giữa BD và CI. Các mặt bên (SCI) và (SBD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABCD) bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CI.

Giải



+ Tính $V_{S.ABCD}$.

Ta có SH là giao tuyến của hai mặt phẳng (SCI) và (SBD), mà hai mặt phẳng (SCI) và (SBD) cùng vuông góc mặt phẳng (ABCD) suy ra $SH \perp (ABCD)$. Kẻ $HL \perp AB$ tại L, khi đó SLH là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) suy ra $SLH = 60^\circ$.

$$\text{Ta có } \frac{HI}{HC} = \frac{IB}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{HL}{BC} = \frac{HI}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow HL = \frac{a}{3} \Rightarrow SH = HL \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}.$$

+ Tính $d(SA; CI)$.

Gọi M là trung điểm của DC, khi đó tứ giác AICM là hình bình hành suy ra $CI \parallel AM \Rightarrow CI \parallel (SAM) \Rightarrow d(SA; CI) = d(H; (SAM))$. Gọi N là giao điểm của DC và AM; K và E lần lượt là hình

chiều vuông góc của H và D trên AM. Do M là trung điểm của DC và $MN \parallel CI$ suy ra N là trung điểm của DH. Từ đây ta có được $HK = DE \Rightarrow \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{DE^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{MD^2}$. Kê $HF \perp SK$ tại F (ta sẽ chứng minh được $HF \perp (SAM)$ Thầy để các Em chứng minh xem như bài tập nhỏ nhé!). Khi đó $HF = d(H; (SAM))$. Ta có:

$$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{MD^2} = \frac{3}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} \Leftrightarrow HF = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(SA; CI) = d(H; (SAM)) = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Ví dụ 48. (Trích KB -2013) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a; mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

Giải

+ Tính $V_{S.ABCD}$.

Gọi H là trung điểm của AB, do tam giác SAB đều

cạnh a nên ta có $SH \perp AB$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ và $(SAB) \cap (ABCD) = AB$, do đó $SH \perp (ABC)$.

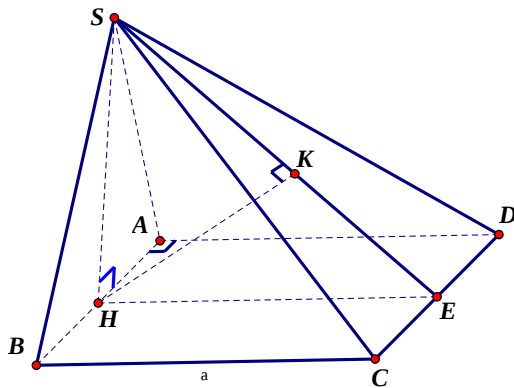
$$\text{Vậy: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}.$$

+ Tính $d(A; (SDC))$.

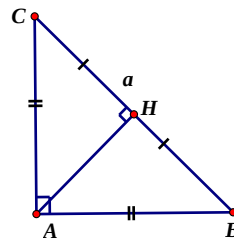
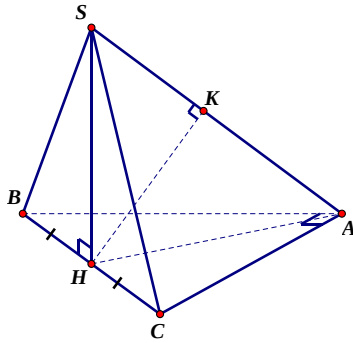
Do $AB \parallel DC$ $d(A; (SDC)) = d(H; (SDC))$. Gọi E là trung điểm của DC, kẻ $HK \perp SE$ tại K, khi đó

$$d(H; (SDC)) = HK. \text{ Ta có } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{21}}{7}. \text{ Vậy } d(A; (SDC)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Ví dụ 49. (Trích KD -2014) Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân tại A; mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA; BC.



Giải



+ Tính $V_{S.ABCD}$.

Gọi H là trung điểm của BC, do tam giác SBC đều nên ta có $SH \perp BC$. Mà $(SBC) \perp (ABC)$, do đó $SH \perp (ABC)$. Tam giác SBC đều cạnh a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABC vuông cân tại A và $BC=a$, ta tính được $AB = AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Khi đó: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}.$$

+ Tính $d(SA; BC)$.

Kẻ $HK \perp SA$ (1) tại K. Ta có $\begin{cases} SH \perp BC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp HK$ (2). Từ (1) và (2) suy ra

$$HK = d(SA; BC). \text{ Ta có } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HA^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(SA; BC) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Ví dụ 50 (Trích TTLT Diệu Hiền 2015). Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$; mặt bên (SAD) là tam giác vuông và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy; cạnh bên SC hợp với mặt phẳng (SAD) một góc 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABCD).

Giải

+ Tính $V_{S.ABCD}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên cạnh AD, khi đó $SH \perp (ABCD)$.

Ta có $DC \perp AD \wedge DC \perp SH \Rightarrow DC \perp (SAD) \Rightarrow \angle DSC$ là góc giữa cạnh SC và mặt phẳng (SAD).

$$\text{Xét tam giác SCD vuông tại D, có } SH \cdot SD = \frac{CD}{\tan 60^\circ} = a.$$

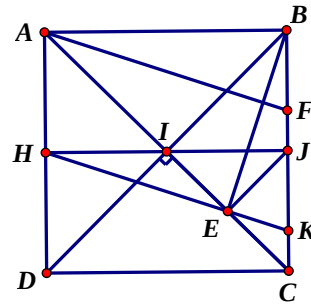
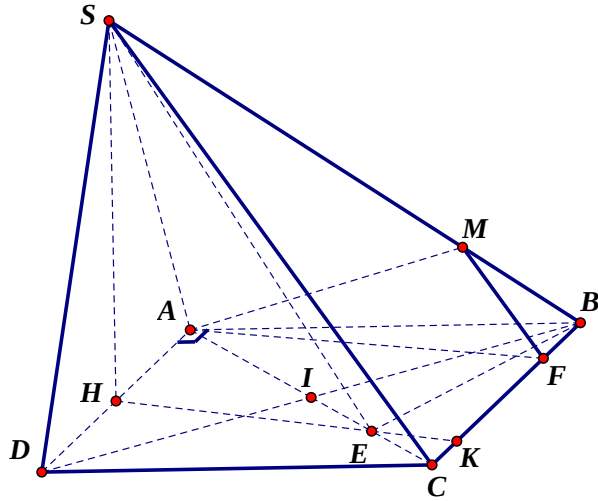
+ Tính $d(B; (SAC))$.

Ta có $S_{\Delta SAC} = \sqrt{p(p-SA)(p-AC)(p-SC)} = \frac{a^2\sqrt{39}}{16}$, trong đó. $p = \frac{a+a+\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2}$

$$\text{Vậy } d(B; (SAC)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{3a\sqrt{13}}{13}.$$

Ví dụ 52. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tam I và cạnh đáy bằng a ; mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Điểm M thuộc SB sao cho $SB = 3MB$. E là trung điểm của CI. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và chứng minh đường thẳng BE vuông góc với đường thẳng AM.

Giải



+ Tính $V_{S.ABCD}$.

Gọi H là trung điểm của AD ta có $SH \perp (ABCD)$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

+ Chứng minh $BE \perp AM$.

Gọi d là đường thẳng đi qua M; d song song với SC và cắt BC tại F $\Rightarrow BF = \frac{1}{3} BC$.

Gọi K là giao điểm giữa HE và BC, ta có $\frac{KC}{HA} = \frac{IC}{IA} = \frac{1}{3} \Rightarrow KC = \frac{1}{3} AH = \frac{1}{6} BC$.

Từ đây $KC + FB = \frac{1}{3} BC + \frac{1}{6} BC = \frac{1}{2} BC \Rightarrow KF = \frac{1}{2} BC = AH$. Suy ra tứ giác AHKF là hình bình

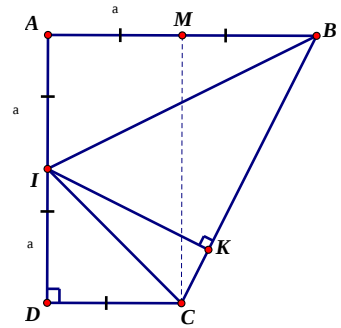
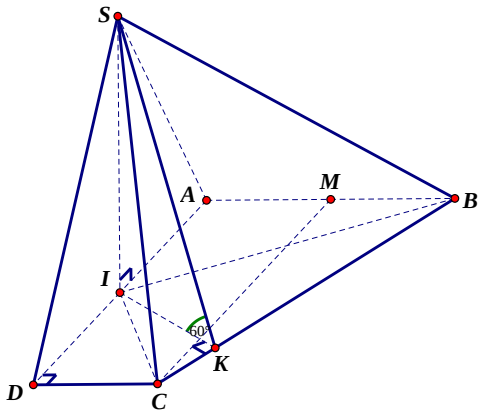
hành suy ra $HK \parallel AF$, mà $MF \parallel SC$ suy ra $(MAF) \parallel (SHE)$ (1).

Gọi J là trung điểm của BC ta có AHJB là hình chữ nhật nên nội tiếp đường tròn (C) với các đường kính là AJ và BH. JE là đường trung bình của tam giác JCI suy ra JE vuông góc với AC suy ra E thuộc đường tròn (C) suy ra $BE \perp HE$. Mà $BE \perp SH$, do đó $BE \perp (SHE)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BE \perp (MFA) \Rightarrow BE \perp MA$.

Ví dụ 53(Trích KA-2009). Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và D; $AB = AD = 2a; CD = 2a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60° . Gọi I là trung điểm của AD, các mặt phẳng (SCI) và (SBI) cùng vuông góc mặt phẳng (ABCD). Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD.

Giải



Hai mặt phẳng (SCI) và (SBI) cùng vuông góc mặt phẳng (ABCD), suy ra $SI \perp (ABCD)$.

Kẻ $IK \perp BC$ (1) tại K, khi đó $\begin{cases} SI \perp BC \\ BC \perp IK \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SIK) \Rightarrow BC \perp SK$ (2). Từ (1) và (2) suy ra SKI

là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) suy ra $SKI = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của AB, ta có

ADCM là hình chữ nhật $\Rightarrow BC = \sqrt{CM^2 + MB^2} = a\sqrt{5}$. Ta có

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot (AB + CD) = 3a^2; S_{\triangle ABI} = a^2; S_{\triangle CDI} = \frac{a^2}{2}.$$

$$\text{Suy ra } S_{\triangle BCI} = S_{ABCD} - S_{\triangle ABI} - S_{\triangle CDI} = \frac{3a^2}{2}. \text{ Mà } S_{\triangle BCI} = \frac{1}{2} CK \cdot BC \Rightarrow CK = \frac{2S_{\triangle BCI}}{BC} = \frac{3\sqrt{5}a}{5}.$$

$$\text{Xét tam giác SIK vuông tại I có } SI = IK \cdot \tan 60^\circ = \frac{3\sqrt{15}a}{5}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SI \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{15}a}{5} \cdot 3a^2 = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}.$$

Ví dụ 54(Trích KD-2007).

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang có $DAB = ABC = 90^\circ, BA = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD).

của AB và BC. Tính thể tích của khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc hợp bởi hai đường thẳng SM và DN.

Bài 51. (Trích KA -2007) Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a; mặt bên (SAD) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Chứng minh rằng AM vuông góc với BP và tính theo a thể tích của khối tứ diện CMNP.

Bài 52. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a; SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Cạnh bên SC hợp với đáy một góc 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

Bài 53. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân, $AB = AC = a$. Các mặt phẳng (SAC) và (SBC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Cạnh bên SB hợp với đáy một góc 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

Bài 54. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh A, mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

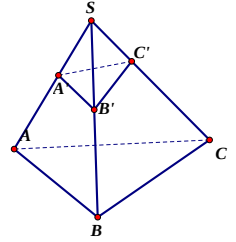
Bài 55. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật; tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Biết $SD = 2a\sqrt{3}$ và cạnh bên SC hợp với đáy một góc 30° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).

Bài 56. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông; tam giác SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Biết $SD = 2a\sqrt{5}$ và cạnh bên SC hợp với đáy một góc 60° . Gọi M là trung điểm của AB. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và MD.

Bài 57. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B; $AB = BC = a$; $AD = 2a$; các mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng CD và SB.

Bài 58. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Điểm H thuộc đường thẳng AB sao cho $BH = 2AH$, tam giác SAB vuông tại S. Gọi I là giao điểm giữa HC và BD. Biết hai mặt phẳng (SCH) và (SDH) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm I đến mặt phẳng (SCD).

Bài 59. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a, SB = a\sqrt{3}$, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M là trung điểm của, N là điểm thuộc BC sao cho $3BN = 2BC$.



Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMDN.

4. Tỷ số thể tích của khối chóp.

a. Lý thuyết

Cho khối chóp S.ABC, giả sử mặt phẳng (P) cắt các cạnh SA, SB, SC của khối chóp lần lượt tại A', B', C' .

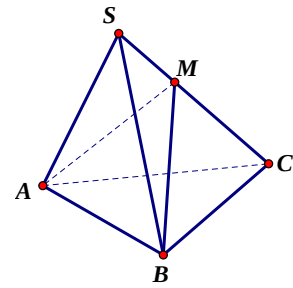
Khi đó

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}.$$

Đặc biệt

Cho điểm M thuộc đoạn thẳng SC của khối chóp S.ABC. Khi đó:

$$\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SC}$$



b. Bài tập mẫu

Ví dụ 55. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân tại A; mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc đáy. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC, mặt phẳng (P) qua G song song AC và cắt SA, AC lần lượt tại M và N. Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMN.

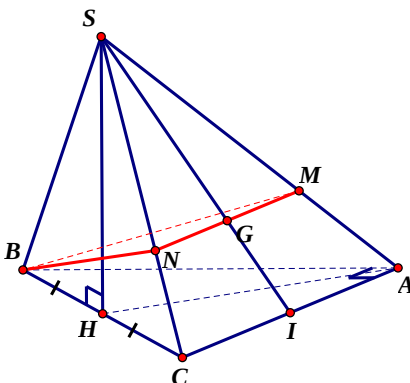
Phân tích: Trong trường hợp này việc tính thể tích của khối chóp S.ABC là đơn giản nên ta nghĩ đến lập tỷ số hai thể tích khối chóp để chuyển bài toán về tính $V_{S.ABC}$. Cần nhớ lại cách dựng mặt phẳng (P). Mặt phẳng (P) qua G và song song với AC nên $MN \parallel AC$. Từ đây ta có

$$\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SC} = \frac{SG}{SI} = \frac{2}{3} \text{ với I là trung điểm của AC.}$$

Giải

Gọi H là trung điểm của BC, do tam giác SBC đều nên ta có $SH \perp BC$. Mà $(SBC) \perp (ABC)$, do đó $SH \perp (ABC)$. Tam giác SBC đều cạnh a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Mặt phẳng (P) qua G và song

song với AC nên $MN \parallel AC$. Từ đây ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SC} = \frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}$



với I là trung điểm của AC.

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.BMN}}{V_{S.BAC}} = \frac{SN}{SC} \cdot \frac{SM}{SA} = \frac{4}{9} \Rightarrow V_{S.BMN} = \frac{4}{9} V_{S.BAC}.$$

Tam giác ABC vuông cân tại A và $BC=a$, ta tính được $AB = AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Khi đó: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}. \text{ Vậy}$$

$$V_{S.BMN} = \frac{4}{9} V_{S.BAC} = \frac{4}{9} \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{24} = \frac{a^3\sqrt{3}}{54}.$$

Ví dụ 56. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a; mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Gọi M là trung điểm của SD, mặt phẳng (P) chứa CM và song song với BD cắt SB tại N. Tính theo a thể tích của khối chóp S.CMN.

Phân tích: Phải nắm được cách dựng mặt phẳng (P). Do (P) song song với BD và cắt SB tại N suy ra N là trung điểm của SB (M là trung điểm của SD). Việc tính $V_{S.CMN}$ ta sẽ chuyển về tính $V_{S.CDB}$.

Giải

Gọi H là trung điểm của AB, do tam giác SAB đều cạnh a nên ta có

$$SH \perp AB \text{ và } SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ và $(SAB) \cap (ABCD) = AB$, do đó

$SH \perp (ABC)$. Do (P) song song với BD và cắt SB tại N suy ra N là trung điểm của SB (M là trung điểm của SD).

$$\text{Ta có } \frac{V_{S.CMN}}{V_{S.CDB}} = \frac{SM}{SD} \cdot \frac{SN}{SB} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.CMN} = \frac{1}{4} V_{S.CDB}.$$

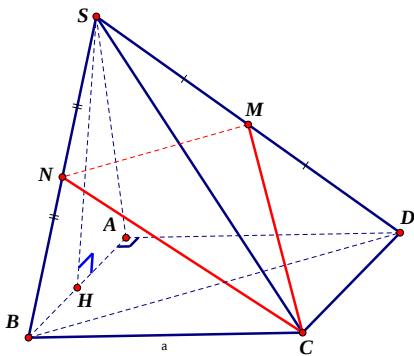
$$\text{Vậy: } V_{S.CDB} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\triangle ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}.$$

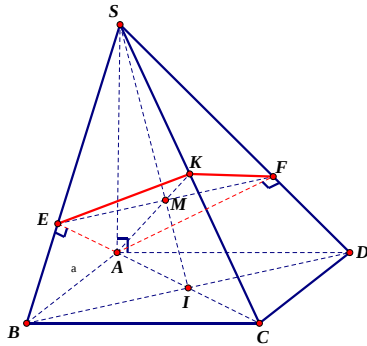
$$\text{Vậy } V_{S.CMN} = \frac{1}{4} V_{S.CDB} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}a^3}{12} = \frac{\sqrt{3}a^3}{48}.$$

Ví dụ 57. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A trên các cạnh SB, SD; mặt phẳng (AEF) cắt SC tại K.

a) Chứng minh $SC \perp (AEKF)$.

b) Tính theo a thể tích của khối chóp S.AEKF.





Giải

a) Chứng minh $SC \perp (AEKF)$.

Gọi I là tâm của hình vuông, M là giao điểm giữa SI và EF; khi đó K là giao điểm giữa AM và SC.

Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE$, mà

$$AE \perp SB \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC \Rightarrow (SB; (ABCD)) = SBA.$$

Tương tự ta có $SC \perp AF$, do đó $SC \perp (AEKF)$.

b) Tính $V_{S.AEKF}$

$$\text{Do } \triangle SAB = \triangle SAD \Rightarrow AE = AF \Rightarrow V_{S.AEK} = V_{S.AFK} \Rightarrow V_{S.AEKF} = 2V_{S.AEK}.$$

Ta có $SC \perp (AEKF) \Rightarrow SC \perp AK$, mà tam giác SAC vuông tại C và $SA = SC = a\sqrt{2}$ suy ra K là

trung điểm của SC. Ta có $\frac{V_{S.AEK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SE}{SB} \cdot \frac{SK}{SC}$ và $\frac{SE}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3}$ và $\frac{SK}{SC} = \frac{1}{2}$.

$$\text{Mặt khác } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{V_{S.AEK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SE}{SB} \cdot \frac{SK}{SC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_{S.AEK} = \frac{1}{3} V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{2}a^3}{18}. \text{ Vậy } V_{S.AEKF} = 2V_{S.AEK} = \frac{\sqrt{2}a^3}{9}.$$

c. Bài tập rèn luyện

Bài 60. Cho hình chóp đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng 2a; H là hình chiếu vuông góc của A trên SC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABH.

Bài 61. Cho hình chóp đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng 2a. M là trung điểm của SB; mặt phẳng (MCD) cắt SA tại N. Tính theo a thể tích của khối chóp S.MNDC.

Bài 62. Cho hình chóp S.ABCD có cạnh đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và tam giác SAB cân. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và SD. Tính theo a thể tích của khối chóp S.AMN.

Bài 63. Cho hình chóp S.ABC có cạnh đáy là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$; mặt bên SBC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc đáy. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB; mặt phẳng B qua G song song AB và cắt SA, SB lần lượt tại M và N. Tính theo a thể tích của khối chóp S.CMN.

Bài 64. Cho hình chóp S.ABC có cạnh đáy là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Mặt phẳng (SBC) hợp với mặt đáy một góc 60° . Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên SC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ACM.

Bài 65. Cho hình chóp S.ABCD có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng 2a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD. Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại K. Tính theo a thể tích của khối chóp S.AMKN.

Bài 66. Cho hình chóp S.ABCD có cạnh đáy là hình vuông cạnh bằng a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SC hợp với đáy một góc 45° . Gọi K là hình chiếu của A trên SC. Mặt phẳng (P) chứa AK và song song với BD cắt SB, SC lần lượt tại M và N. Tính theo a thể tích của khối chóp S.AMKN.

Bài 67. Cho hình chóp S.ABC có cạnh đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = 3a$, $BC = 4a$. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Mặt phẳng (P) đi qua A vuông góc SC và (P) cắt SC, SB lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh $AM \perp (SBC)$.

b) Tính theo a thể tích của khối chóp S.AMN.

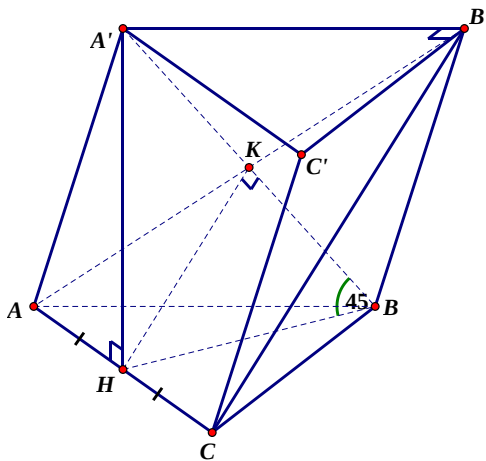
III. Thể tích khối lăng trụ

Thầy nghĩ rằng nếu các Em đã nắm vững những phần đã trình bày trước đó thì lăng trụ xem như nhẹ rồi. Chắc ta sẽ không phân các dạng nữa, mà sẽ tìm hiểu trực tiếp qua các ví dụ nhé. Nếu quên công thức tính thể tích các Em có thể xem lại chương 1 nhé!

a. Bài tập mẫu

Ví dụ 58.(Trích đề THPT Quốc Gia -2016) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B; $AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AC; đường thẳng $A'B$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 45° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và chứng minh $A'B$ vuông góc $B'C$.

Giải



+ Tính $V_{ABC.A'B'C'}$.

Gọi H là trung điểm của AC, ta có $A'H \perp (ABC)$ và

$A'BH = 45^\circ$. Tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$ nên ta tính được: $BH = a$ và $AB = BC = a\sqrt{2}$. Suy ra:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = a^2. \text{ Tam giác } A'HB \text{ vuông tại H}$$

và $A'BH = 45^\circ$ có nên tam giác $A'HB$ vuông cân tại H.

Suy ra $A'H = BH = a$.

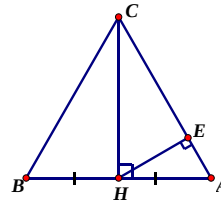
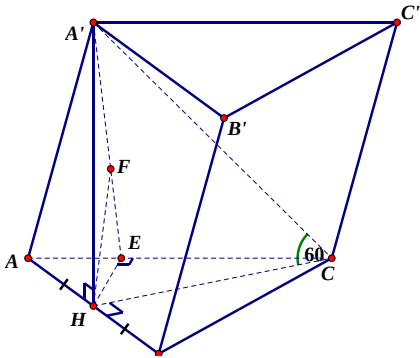
$$\text{Do đó: } V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{\triangle ABC} = a \cdot a^2 = a^3.$$

+ Chứng minh $B'C \perp AB'$.

Gọi K là giao điểm giữa AB và A'B' thì K là trung điểm của A'B' và AB (vì ABB'A' là hình bình hành). Mặt khác do tam giác A'HB vuông cân tại H suy ra $HK \perp AB'$ (1). Mà HK là đường trung bình của tam giác B'AC nên $HK \parallel B'C$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $B'C \perp AB'$.

Ví dụ 59.(Trích KB -2014) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB; đường thẳng A'C tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ điểm B đến (ACC'A').

Giải



+ Tính $V_{ABC.A'B'C'}$.

Gọi H là trung điểm của AC, ta có $A'H \perp (ABC)$ và $A'BH = 60^\circ$. Tam giác ABC đều cạnh a và H

là trung điểm của AB nên $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Tam giác A'HC vuông H nên

$$A'H = CH \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Do đó : } V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}.$$

a) Tính $d(B; (ACC'A'))$.

$$\text{Ta có: } \frac{d(B; (SAC))}{d(H; (SAC))} = \frac{BA}{HA} = 2 \Rightarrow d(B; (SAC)) = 2d(H; (SAC)).$$

Kẻ $HE \perp AC$ tại E và $HF \perp SE$ tại F. Khi đó $HF = d(H; (SAC))$.

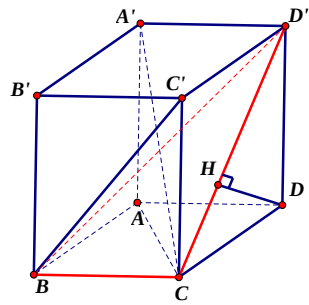
Ta có : $HE = HA \cdot \sin 60^\circ = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tam giác A'HE vuông tại E, có đường cao HF suy ra:

$$\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{A'H^2} + \frac{1}{HE^2} \Leftrightarrow \frac{1}{HF^2} = \frac{4}{9a^2} + \frac{16}{3a^2} \Leftrightarrow HF = \frac{3a\sqrt{13}}{26}.$$

$$\text{Vậy } d(B; (SAC)) = 2HF = \frac{3a\sqrt{13}}{13}.$$

Ví dụ 60.(Trích KD -2012) Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông; tam giác $A'AC$ và $A'C=a$. Tính theo a thể tích của khối tứ diện $ABB'C'$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') .

Giải



+ Tính $V_{ABB'C'}$.

Tam giác $A'AC$ vuông cân tại A và $A'C = a \Rightarrow AA' = AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Do đó

$$AB = AD = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Khi đó: } V_{ABB'C'} = \frac{1}{3} AB \cdot S_{\triangle BB'C'} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}.$$

+ Tính $d(A; (BCD'))$.

Do $AD \parallel BC \Rightarrow d(A; (BCD')) = d(D; (BCD'))$.

Kẻ $DH \perp CD'$ (1) tại H . Ta có $\begin{cases} BC \perp CD \\ BC \perp DD' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (DCC'D') \Rightarrow BC \perp DH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $DH \perp (BCD') \Rightarrow DH = d(D; (BCD'))$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{DH^2} = \frac{1}{D'D^2} + \frac{1}{DC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{DH^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{4}{a^2} \Leftrightarrow DH = \frac{a\sqrt{6}}{6}. \text{ Vậy } d(A; (BCD')) = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

b. Bài tập rèn luyện

Bài 68. (Trích KB -2011) Cho hình lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật;

$AB = a; AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD . Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) .

Bài 69. (Trích KB -2009) Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$; góc giữa BB' và mặt phẳng (ABC) ; tam giác ABC vuông tại C và $BAC = 60^\circ$. Hình chiếu của B' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Tính thể tích của khối tứ diện $A'ABC$ theo a .

Bài 70. (Trích KD -2009) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy tam giác ABC vuông tại B ; $AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của $A'C'$; I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính theo a thể tích của khối tứ diện $IABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (IBC) .

Bài 71. (Trích KA -2008) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy tam giác ABC vuông tại A ; $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là

trung điểm của BC. Tính theo a thể tích của khối chóp $A'.ABC$ và tính cosin của góc hợp bởi hai đường thẳng AA' và $B'C'$.

Bài 72. (Trích KD -2008) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy tam giác ABC vuông;

$AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C'$.

Bài 73. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy tam giác ABC vuông tại A, $AB=2a$, $AC=a$, $AA'=3a$. Tính thể tích của khối lăng trụ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC.

Bài 74. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$; $BC = 2a$; $\angle ACB = 120^\circ$. Đường thẳng $A'C$ tạo với mặt phẳng $(ABB'A')$ một góc 30° . Gọi M là trung điểm của BB' . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và CC' .

Bài 75. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông với $AB = AC = a$. Mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 45° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C'$.

Bài 76. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm của CC' . Tính theo a thể tích của khối chóp $A.BB'C'C$ và khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(AB'N)$.

Bài 77. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tam giác đều, tam giác $A'AC$ vuông cân và $A'C=a$. Tính theo a thể tích của khối tứ diện $ABB'C'$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

IV. Bài tập tổng hợp

Bài 78. Cho hình chóp hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật với $AB = 6a$; $AD = 8a$; tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và cosin của góc hợp bởi mặt phẳng (SAC) và (SAD) .

Bài 79. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang cân $(BC // AD)$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AD; $SH = a$; $AB = BC = CD = a$; $AD = 2a$. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD.

Bài 80. Cho hình chóp S.ABC có đáy tam giác vuông cân; $AB = AC = a$ và M là trung điểm của AB. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMC và góc giữa SC với mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMC và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) .

Bài 81. Cho hình chóp hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2AD = 2a$; điểm M thuộc đoạn thẳng AB sao cho $AM = \frac{a}{2}$. Gọi H là giao điểm giữa AC và MD, biết SH vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SH = a$. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ADCM và khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AC.

Bài 82. Cho hình chóp hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a, $SAD = SAB = BAD = 60^\circ$ và $SA = a$.

Tính theo a thể tích của khối chóp S.ADCM và khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AB.

Bài 83. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là trùng với trọng tâm G của tam giác ABC; góc giữa SA và mặt phẳng (ABCD) bằng 30° . Tính thể tích của khối chóp S.ABCD và cosin của góc hợp bởi đường thẳng AC và mặt phẳng (SAB).

Bài 84. Cho hình chóp S.ABC có đáy tam giác đều cạnh a, mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC.

Bài 85. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AB = AD = 2a$; $CD = a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm H của AD. Biết khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD.

Bài 86. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh A'C và mặt phẳng (BB'C'C) bằng 30° . Gọi M là trung điểm của CC'. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ và khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (A'BC).

Bài 86. Cho chóp đều S.ABC có cạnh bên bằng $2a$ và mặt bên hợp với đáy một góc 30° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

Bài 87. Cho hình chóp hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a, $SA = SB = a$, $SD = a\sqrt{2}$; mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABDC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

Bài 88. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường thẳng AA' hợp với mặt phẳng (ABC) một góc 60° . Chứng minh tứ giác BB'C'C là hình chữ nhật và tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C'.

Bài 89. Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam vuông tại B; $BC = a$; $AC = a\sqrt{10}$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SAB) cùng vuông góc mặt phẳng (ABC). Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng 60° .

Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và AC, với M là điểm thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$.

Bài 90. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm I, cạnh đáy bằng a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) là trùng với trung điểm của IA. Cạnh bên SB hợp với đáy một góc 30° .

Tính thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SAB).

Bài 91. Cho hình lăng trụ ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $ABC = A'D = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABCD) là trung điểm H của CD. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABCD.A'B'C'D' và khoảng cách giữa hai đường thẳng A'D và BC.

Bài 92 Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều. Hình chiếu vuông góc của C' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm I của tam giác ABC. Biết $d(I; A'A) = a\sqrt{5}$ và mặt phẳng (AA'C'C) tạo với mặt phẳng (AA'B'B) một góc α sao cho $\tan \alpha = \frac{3}{2}$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (A'B'C').

Bài 93. Cho hình chóp S.ABC có đáy tam giác vuông tại A, $AB = a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). BC tạo với mặt phẳng (SAC) một góc 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

Bài 94. Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$; $SB = a\sqrt{3}$. Mặt bên (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBC), với M là trung điểm của SA.

Bài 95. Cho hình chóp S.ABCD có đáy hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Cạnh bên $SD = a$ và cạnh SB hợp với đáy một góc 60° . Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CM, với M là trung điểm của SD.

Bài 96. Cho hình chóp S.ABC có đáy tam giác vuông tại A, $AB = 2AC = 2a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$. Gọi M và H lần lượt là các trung của AB và BC và điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{BI}$.

Tính theo a thể tích của khối chóp S.ABC và khoảng cách giữa hai đường thẳng MH và SS_I.

Bài 97. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác cân $AB = a, \angle BAC = 120^\circ$. Mặt bên $(A'BC)$ hợp với mặt phẳng đáy một góc 60° . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(A'BC)$.

Bài 98. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của CD và SC hợp với mặt phẳng đáy một góc α sao cho $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm D đến (SBM) .

Bài 99. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a ; mặt bên SAD là tam giác đều và $SB = a\sqrt{2}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và AB . Gọi H là giao điểm của FC và EB . Chứng minh $SE \perp EB; CH \perp SB$ và tính theo a thể tích của khối chóp $C.SEB$.

Bài 100. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm I . Cạnh SA vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Biết bán kính của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\angle ACB = 30^\circ$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB .

“Không có việc gì khó

Chỉ sợ lòng không bền

Đào núi và lấp biển

Quyết chí ắt làm nên!”

Chủ tịch Hồ Chí Minh

Chúc các Em sẽ học tập thật tốt !

Thầy Trần Duy Thúc