

Đề chính thức
(Đề thi gồm 01 trang)

Thời gian làm bài: 180 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$ (1).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).

b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^2(x^2 - 2) + 3 = m$ có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 2 (1,0 điểm).

a) Cho góc α thỏa mãn $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ và $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$. Tính $A = \frac{1 + \cot \alpha}{1 - \cot \alpha}$.

b) Cho số phức z thỏa mãn $3(z + 1) = 4\bar{z} + i(7 - i)$. Tính môđun của số phức z .

Câu 3 (0,5 điểm). Giải phương trình $2^{2+x} - 2^{2-x} = 15$.

Câu 4 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 4x^2 = (\sqrt{x^2 + 1} + 1)(x^2 - y^3 + 3y - 2) \\ (x^2 + y^2)^2 + 2014y^2 + 2015 = x^2 + 4030y \end{cases}$$

Câu 5 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_1^e x(5\sqrt{x} + \ln x) dx$.

Câu 6 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 3a$, $BC = 5a$; mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Biết $SA = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SAC} = 30^\circ$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .

Câu 7 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình bình hành $ABCD$ có $D(5; 4)$. Đường trung trực của đoạn DC có phương trình $d_1: 2x + 3y - 9 = 0$ và đường phân giác trong góc BAC của tam giác ABC có phương trình $d_2: 5x + y + 10 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành.

Câu 8 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 1; 2)$, $B(0; 1; 1)$, $C(1; 0; 4)$

và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -t \\ y = 2 + t, \\ z = 3 - t \end{cases} t \in \mathbb{R}$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) và tìm tọa độ giao điểm của d với mặt phẳng (ABC) .

Câu 9 (0,5 điểm). Cho số nguyên dương n thỏa mãn điều kiện $C_n^n + C_n^{n-1} + \frac{1}{2}A_n^2 = 821$. Tìm hệ số của x^{31}

trong khai triển Niu-تون của $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^n$ ($x \neq 0$).

Câu 10 (1,0 điểm). Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{4y^2 + \frac{1}{y^2}} - \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{y}{y^2 + 1}\right).$$

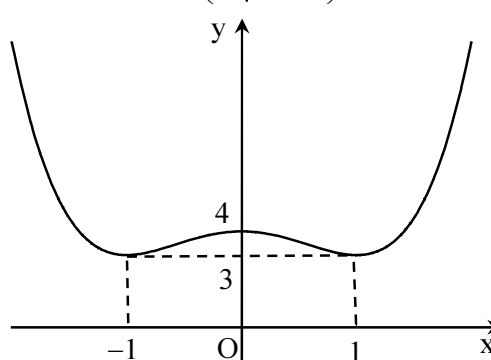
----- Hết -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.
Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

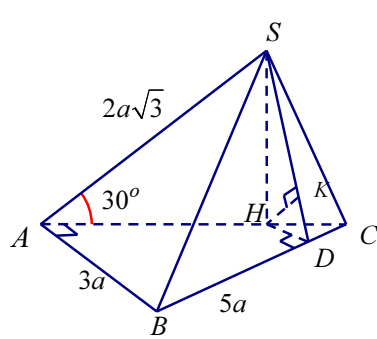
I) Hướng dẫn chung:

- 1) Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng vẫn đúng thì cho đủ số điểm từng phần như thang điểm quy định.
- 2) Điểm toàn bài tính đến 0,25 điểm. (sau khi cộng điểm toàn bài, giữ nguyên kết quả)

II) Đáp án và thang điểm:

Câu	Đáp án	Điểm																								
Câu 1 (2 điểm)	Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$ (1). a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (C) của hàm số (1)																									
	• Tập xác định $\mathbb{R}$. • Chiều biến thiên: - Ta có $y' = 4x(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$. - Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$. - Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.	0.25																								
	• Cực trị: - Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm 1$, $y_{CT} = y(\pm 1) = 3$. - Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CD} = y(0) = 4$. • Các giới hạn tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$	0.25																								
	Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>y</td><td>$+\infty$</td><td></td><td>4</td><td></td><td>3</td><td></td><td>3</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	y	$+\infty$		4		3		3	$+\infty$	0.25
	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$																				
	y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$																	
	y	$+\infty$		4		3		3	$+\infty$																	
	Đồ thị hàm số : Đồ thị qua các điểm $A\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{31}{9}\right)$, $B(-2; 12)$, $C(2; 12)$. 	0.25																								
b) Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $x^2(x^2 - 2) + 3 = m$ có 2 nghiệm phân biệt.																										
Ta có $x^2(x^2 - 2) + 3 = m \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 3 = m \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 4 = m + 1$ (*)	0.25																									
Số nghiệm của PT(*) bằng số giao điểm của đường thẳng $d: y = m + 1$ với đồ thị (C)	0.25																									
Dựa vào đồ thị (C), để PT đã cho có 2 nghiệm thì: $m + 1 > 4$ hoặc $m + 1 = 3$. Hay $m > 3$ hoặc $m = 2$. Vậy PT đã cho có 2 nghiệm khi $m > 3$ hoặc $m = 2$.	0.25																									
Câu 2 (1 điểm)	a) Cho góc α thỏa mãn $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ và $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$. Tính $A = \frac{1 + \cot \alpha}{1 - \cot \alpha}$.																									

	Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$ (do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$)	0.25
	Từ đó có $A = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}}{-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}} = 7$.	0.25
	b) Cho số phức z thỏa mãn $3(z+1) = 4\bar{z} + i(7-i)$. Tính môđun của số phức z.	
	Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó $3(z+1) = 4\bar{z} + i(7-i) \Leftrightarrow 3(a+bi+1) = 4(a-bi) + 1 + 7i \Leftrightarrow a - 2 + 7(1-b)i = 0$	0.25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow z = \sqrt{5}$.	0.25
Câu 3 (0,5 điểm)	Giải phương trình $2^{2+x} - 2^{2-x} = 15$.	
	PT trên có thể viết lại $4 \cdot 2^x - \frac{4}{2^x} = 15$. Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$) ta được $4t^2 - 15t - 4 = 0$ $\Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}$ hoặc $t = 4$.	0.25
	• Với $t = -\frac{1}{4}$ thì $2^x = -\frac{1}{4} \Rightarrow x \in \emptyset$. • Với $t = 4$ thì $2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$. Vậy PT đã cho có nghiệm là $x = 2$.	0.25
Câu 4 (1 điểm)	Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2 = (\sqrt{x^2+1}+1)(x^2-y^3+3y-2) & (1) \\ (x^2+y^2)^2 + 2014y^2 + 2015 = x^2 + 4030y & (2) \end{cases}$	
	Từ PT(2), ta có $(x^2+y^2)^2 - (x^2+y^2) = -2015(y-1)^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x^2+y^2 \leq 1$. Do đó $ x \leq 1; y \leq 1$.	0.25
	• Nếu $\sqrt{x^2+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, thay vào HPT, ta được $\begin{cases} -y^3 + 3y - 2 = 0 \\ y^4 + 2014y^2 + 2015 = 4030y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(y-1)^2(y+2) = 0 \\ y^4 + 2014y^2 + 2015 = 4030y \end{cases} \Leftrightarrow y = 1 \text{ (do } y \leq 1\text{)}.$ Như vậy $(x; y) = (0; 1)$ là một nghiệm của HPT đã cho.	0.25
	• Nếu $\sqrt{x^2+1} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$, nhân hai vế của PT(1) với $\sqrt{x^2+1} - 1$, ta được $(1) \Leftrightarrow 4x^2(\sqrt{x^2+1}-1) = x^2(x^2-y^3+3y-2) \Leftrightarrow 4(\sqrt{x^2+1}-1) = x^2-y^3+3y-2$ $\Leftrightarrow x^2+1-4\sqrt{x^2+1}+3 = y^3-3y+2 \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}-3) = (y+2)(y-1)^2 \quad (3)$	0.25
	Với $x \neq 0; x \leq 1; y \leq 1$, ta có $\sqrt{x^2+1}-1 > 0; \sqrt{x^2+1}-3 < 0; (y+2)(y-1)^2 \geq 0$. Nên $(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}-3) < 0 \leq (y+2)(y-1)^2$, từ đó PT(3) vô nghiệm Đổi chiếu với điều kiện ta thấy $(x; y) = (0; 1)$ là nghiệm của HPT đã cho.	0.25
Câu 5 (1 điểm)	Tính tích phân $I = \int_1^e x(5\sqrt{x} + \ln x) dx$.	
	Ta có $I = \int_1^e 5x^{\frac{3}{2}} dx + \int_1^e x \ln x dx = 2 \left(\frac{5}{2} - 1 \right) + \int_1^e x \ln x dx$	0.25
	Tính $I_1 = \int_1^e x \ln x dx$	0.25

	$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$	
	$\Rightarrow I_1 = \left(\frac{x^2}{2} \ln x \right) \Big _1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$	0.25
	$\text{Vậy } I = \frac{1}{4} \left(8e^{\frac{5}{2}} + e^2 - 7 \right).$	0.25
Câu 6 (1 điểm)	Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 3a$, $BC = 5a$; mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SA = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SAC} = 30^\circ$. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).	
	• Kẻ $SH \perp AC$ ($H \in AC$). Do $(SAC) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$. Ta có $SH = SA \cdot \sin \widehat{SAC} = 2a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = a\sqrt{3}$. 	0.25
	Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot SH = \frac{1}{6} \cdot 3a \cdot 4a \cdot a\sqrt{3} = 2a^3 \sqrt{3}.$	0.25
	• Kẻ $HD \perp BC$ ($D \in BC$), $HK \perp SD$ ($K \in SD$). Khi đó $HK = d(H; (SBC))$. Vì $AH = SA \cdot \cos \widehat{SAC} = 2a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3a$ nên $AC = 4HC$ $\Rightarrow d(A; (SBC)) = 4d(H; (SBC)) = 4HK$.	0.25
	Ta có $\frac{HD}{HC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow HD = \frac{3a}{5}$. $\text{Từ đó } d(A; (SBC)) = 4HK = \frac{4SH \cdot HD}{\sqrt{SH^2 + HD^2}} = \frac{4a\sqrt{3} \cdot \frac{3a}{5}}{\sqrt{3a^2 + \frac{9a^2}{25}}} = \frac{6a\sqrt{7}}{7}.$	0.25
Câu 7 (1 điểm)	Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hình bình hành $ABCD$ có $D(5; 4)$. Đường trung trực của đoạn DC có phương trình $d_1: 2x + 3y - 9 = 0$ và đường phân giác trong góc BAC của tam giác ABC có phương trình $d_2: 5x + y + 10 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình bình hành.	
	Gọi M là trung điểm của DC, do $M \in d_1$ nên $M(3m+3; -2m+1)$, $m \in \mathbb{R}$. Ta có $\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{DM} = 0$ (*), với $\overrightarrow{u_1} = (-3; 2)$ là vectơ chỉ phương (VTCP) của d_1 và $\overrightarrow{DM} = (3m-2; -2m-3)$ Nên (*) $\Leftrightarrow -3(3m-2) + 2(-2m-3) = 0 \Leftrightarrow m = 0$. Vậy $M(3; 1)$, suy ra $C(1; -2)$.	0.25
	Cũng theo giả thiết $A \in d_2$ nên $A(a; -10-5a)$, $a \in \mathbb{R}$. Mặt khác do $ABCD$ là HBH nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - a = -4 \\ y_B + 10 + 5a = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = a - 4 \\ y_B = -16 - 5a \end{cases}$	0.25

	$\Rightarrow B(a-4; -16-5a)$. Vì $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{DC}$ không cùng phương nên $\frac{a-5}{-4} \neq \frac{-14-5a}{-6} \Leftrightarrow a \neq -1$	
	Đường thẳng d_2 là phân giác góc BAC và nhận $\vec{u}_2 = (-1; 5)$ là VTCP nên $\cos(\overrightarrow{AB}; \vec{u}_2) = \cos(\overrightarrow{AC}; \vec{u}_2) \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_2}{ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_2 } = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u}_2}{ \overrightarrow{AC} \cdot \vec{u}_2 }$ $\Leftrightarrow \frac{(-4)(-1) + (-6)5}{\sqrt{(-4)^2 + (-6)^2}} = \frac{(1-a)(-1) + (8+5a)5}{\sqrt{(1-a)^2 + (8+5a)^2}} \Leftrightarrow -\frac{26}{\sqrt{52}} = \frac{26a+39}{\sqrt{(1-a)^2 + (8+5a)^2}}$ $\Leftrightarrow a = -2$ (thỏa mãn). Vậy $A(-2; 0)$, $B(-6; -6)$.	0.25
	$\Leftrightarrow a = -2$ (thỏa mãn). Vậy $A(-2; 0)$, $B(-6; -6)$.	0.25
Câu 8 (1 điểm)	Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 1; 2)$, $B(0; 1; 1)$, $C(1; 0; 4)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -t \\ y = 2+t, t \in \mathbb{R} \\ z = 3-t \end{cases}$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) và tìm tọa độ giao điểm của d với mặt phẳng (ABC) .	
	Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 0; -1)$; $\overrightarrow{AC} = (2; -1; 2)$; $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1; -4; -1)$.	0.25
	Mặt phẳng (ABC) nhận vector $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ làm vector pháp tuyến Suy ra $(ABC): x + 4(y-1) + z - 1 = 0$ hay $x + 4y + z - 5 = 0$	0.25
	Tọa độ giao điểm I của d và mp (ABC) là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = -t \\ y = 2+t \\ z = 3-t \\ x + 4y + z - 5 = 0 \end{cases}$	0.25
	$\Rightarrow -t + 4(2+t) + 3 - t - 5 = 0 \Rightarrow t = -3$ $\Rightarrow I(3; -1; 6)$.	0.25
Câu 9 (0,5 điểm)	Cho số nguyên dương n thỏa mãn điều kiện $C_n^n + C_n^{n-1} + \frac{1}{2}A_n^2 = 821$. Tìm hệ số của x^{31} trong khai triển Niu-ton của $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^n$ ($x \neq 0$).	
	Điều kiện $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Theo giả thiết $C_n^n + C_n^{n-1} + \frac{1}{2}A_n^2 = 821 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 821$ $\Leftrightarrow n^2 + n - 1640 = 0 \Rightarrow n = 40$.	0.25
	Ta có $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{40} = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k x^{40-k} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{40} C_{40}^k x^{40-3k}$. Yêu cầu bài toán thì $40 - 3k = 31 \Leftrightarrow k = 3$. Vậy hệ số của x^{31} là $C_{40}^3 = 9880$.	0.25
Câu 10 (1 điểm)	Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $x + y \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{4y^2 + \frac{1}{y^2}} - \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1}\right)$.	
	• Gọi $M = \sqrt{4x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{4y^2 + \frac{1}{y^2}}$ Ta có $M \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2x + \frac{2}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2y + \frac{2}{y}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ (Theo Cauchy-Schwarz) $\geq \frac{4}{\sqrt{5}}\left(\sqrt{xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}}\right) = \frac{4}{\sqrt{5}}\left(4\sqrt{xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}} - 3\sqrt{xy}\right)$ (Theo BDT AM-GM)	0.25

$\geq \frac{4}{\sqrt{5}} \left(2\sqrt{4\sqrt{xy} \cdot \frac{1}{\sqrt{xy}}} - \frac{3}{2} \right) = 2\sqrt{5} \text{ (do giả thiết).}$ Suy ra $M \geq 2\sqrt{5}$ (1)	
• Gọi $N = \frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1}$. Ta có $N = \frac{x}{\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}} + \frac{y}{\left(y^2 + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4}} \leq \frac{x}{x + \frac{3}{4}} + \frac{y}{y + \frac{3}{4}} = \frac{4x}{4x+3} + \frac{4y}{4y+3}$ Hơn nữa: $\frac{4x}{4x+3} + \frac{4y}{4y+3} = 2 - 3\left(\frac{1}{4x+3} + \frac{1}{4y+3}\right) \leq 2 - 3\frac{4}{4x+4y+6} = 2 - 3 \cdot \frac{4}{10} = \frac{4}{5}$. Do đó $-N \geq -\frac{4}{5}$ (2)	0.25
Từ (1) và (2) suy ra $P \geq 2\sqrt{5} - \frac{4}{5}$.	0.25
Khi $x = y = \frac{1}{2}$ thì $P = 2\sqrt{5} - \frac{4}{5}$. Vậy $\text{Min}P = 2\sqrt{5} - \frac{4}{5}$.	0.25

-----Hết-----