TÍCH PHÂN LIÊN QUAN ĐẾN PHƯƠNG TRÌNH HÀM ẨN

KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

1. Các tính chất tích phân:

◆ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ với $a<c<b$.

◆ $k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x\,(k\neq 0)$

◆ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$

◆ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$

◆ $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

◆ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(z)\mathrm{d}z$

◆ $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_a^b=f(b)-f(a)$

2. Công thức đổi biến số: $\int f\left(u(x)\right).u'(x)dx=\int f(u)du,\ u=u(x)$

$$\int_a^b f\left(u(x)\right).u'(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du,\ u=u(x)$$

Phương pháp đổi biến số thường được sử dụng theo hai cách sau đây:

- Giả sử cần tính $\int_a^b g(x)dx$. Nếu ta viết được $g(x)$ dưới dạng $f\left(u(x)\right)u'(x)$ thì $\int_a^b g(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$. Vậy bài toán quy về tính $\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$, trong nhiều trường hợp thì tích phân mới này đơn giản hơn .

- Giả sử cần tính $\int_\alpha^\beta f(x)dx$. Đặt $x=x(t)$ thỏa mãn $\alpha=x(a),\ \beta=x(b)$ thì $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_a^b f\left(x(t)\right)x'(t)dt=\int_a^b g(t)dt$, trong đó $g(t)=f\left(x(t)\right).x'(t)$

BÀI TẬP MẪU

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, và thỏa mãn $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x,\forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{-17}{20}$. **B.** $\frac{-13}{4}$. **C.** $\frac{17}{4}$. **D.** -1.

Phân tích hướng dẫn giải

1. DẠNG TOÁN: Tính tích phân hàm ẩn.

....

2. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

◆Công thức đổi biến số trong tích phân: $\int_a^b f[u(x)].u'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$

◆ Tính chất tích phân:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\Big|_{x=a}^{x=b}=f(b)-f(a)$$

....

3. HƯỚNG GIẢI:

B1: Nhân cả hai vế của phương trình với x, rồi sử dụng tích phân hai vế để tính $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

B2: Nhân cả hai vế của phương trình với x, rồi sử dụng tích phân hai vế để tính $\int_{0}^{1} f(x)dx$.

B3: Kết luận $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải

Chọn B

Cách 1 : Dùng vi phân

Ta có: $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2 f\left(x^3\right)+xf\left(1-x^2\right)=-x^{11}+x^7-2x^2, \forall x\in\mathbb{R}\ (*)$

Khi đó: $(*)\Rightarrow \int\limits_{-1}^{1} x^2 f\left(x^3\right)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1} xf\left(1-x^2\right)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)\,\mathrm{d}x, \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t+0=-\frac{4}{3}\Leftrightarrow \int\limits_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t=-4\Leftrightarrow \int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=-4$$

Mặt khác: $(*)\Rightarrow \int\limits_{0}^{1} x^2 f\left(x^3\right)dx+\int\limits_{0}^{1} xf\left(1-x^2\right)dx=\int\limits_{0}^{1}\left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)dx$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{6}\int\limits_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{5}{8}\quad\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t=-\frac{3}{4}\quad\Leftrightarrow \int\limits_{0}^{1} f(x)dx=-\frac{3}{4}$$

Theo tính chất tích phân ta có: $\int\limits_{-1}^{0} f(x)dx=\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx-\int\limits_{0}^{1} f(x)dx=\frac{-13}{4}$

Cách 2: (Tham khảo không giống phân tích ở trên)

Bậc cao nhất vế phải là x^{10}, bậc cao nhất vế phải là $x.f\left(x^3\right)$. Kết luận: $f(x)$ bậc 3 vì $x.\left(x^3\right)^3=x^{10}$.

Hệ số của bậc cao nhất vế phải là -1. Kết luận: Hệ số của bậc cao nhất vế trái là -1.

Vậy $f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$.

$x.f\left(x^3\right)=-x^{10}+x.a\left(x^3\right)^2+...=-x^{10}+ax^7+...$ Vế phải không có x^7. Vậy $a=0$

Kết luận $f(x)=-x^3+bx+c$.

$$x.f\left(x^3\right)+f\left(1-x^2\right)=-x^{10}+bx^4+cx-\left(1-x^2\right)^3+b\left(1-x^2\right)+c$$
$$=-x^{10}+bx^4+cx-1+3x^2-3x^4+x^6+b-bx^2+c$$
$$=-x^{10}+x^6+(b-3)x^4+(3-b)x^2+cx+b+c-1$$

Đồng nhất hệ số được $b=3; c=-2$.

Tóm lại $f(x)=-x^3+3x-2$. Suy ra $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{-13}{4}$.

Bài tập tương tự và phát triển:

Câu 48.1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x)+f(2-x)=2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4$.

Khi đó $I=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=\mathrm{e}+4$. **B.** $I=8$. **C.** $I=2$. **D.** $I=\mathrm{e}+2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_0^2\left[3f(x)+f(2-x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^2\left[2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}+4\right]\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 3\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^2 f(2-x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x+1}\mathrm{d}x+4\int_0^2\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 3\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^2 f(2-x)\,\mathrm{d}(2-x)=\int_0^2\mathrm{e}^{x^2-2x+1}\mathrm{d}\left(x^2-2x+1\right)+8$

$\Leftrightarrow 3\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\left.\mathrm{e}^{x^2-2x+1}\right|_0^2+8$

$\Leftrightarrow 4\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=8$

$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=2$.

Câu 48.2: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(\ln x)+f(1-\ln x)=x$.

Khi đó $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{e-1}{2}$. **B.** $\dfrac{e+1}{2}$. **C.** $\dfrac{e}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{e-1}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(\ln x)+f(1-\ln x)=x\Leftrightarrow \dfrac{1}{x}f(\ln x)+\dfrac{1}{x}f(1-\ln x)=1\ (*)$

Lấy tích phân từ 1 đến e cả hai vế của $(*)$, ta được

$$\int_1^e\left[\frac{1}{x}f(\ln x)+\frac{1}{x}f(1-\ln x)\right]\mathrm{d}x=\int_1^e\mathrm{d}x$$

$\Leftrightarrow \int_1^e\dfrac{1}{x}f(\ln x)\,\mathrm{d}x+\int_1^e\dfrac{1}{x}f(1-\ln x)\,\mathrm{d}x=e-1$

$\Leftrightarrow \int_1^e f(\ln x)\,\mathrm{d}(\ln x)-\int_1^e f(1-\ln x)\,\mathrm{d}(1-\ln x)=e-1\ (**)$

Đặt $t=\ln x$. Đổi cận $\left|\begin{array}{l} x=1\rightarrow t=0 \\ x=e\rightarrow t=1\end{array}\right.$

Khi đó $(**)\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(1-t)\mathrm{d}(1-t)=e-1$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=e-1$

$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{e-1}{2}$.

Câu 48.3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0;\,-1\}$ thỏa mãn $\begin{cases} f(1)=-2\ln 2 \\ f(2)=a+b\ln 3;\ a,b\in\mathbb{Q} \\ x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x\end{cases}$.

Tính a^2+b^2.

A. $\dfrac{25}{4}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $x(x+1).f'(x)+f(x)=x^2+x$ (1)

Chia cả 2 vế của biểu thức (1) cho $(x+1)^2$ ta được $\dfrac{x}{x+1}.f'(x)+\dfrac{1}{(x+1)^2}f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{x}{x+1}.f(x)\right]'=\dfrac{x}{x+1}$, với $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0;\,-1\}$.

$\Rightarrow \dfrac{x}{x+1}.f(x)=\int\dfrac{x}{x+1}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1}.f(x)=x-\ln|x+1|+C$

$\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{x+1}{x}\left(x-\ln|x+1|+C\right)$

Mặt khác, $f(1)=-2\ln 2\Leftrightarrow 2(1-\ln 2+C)=-2\ln 2\Leftrightarrow C=-1$.

Do đó $f(x)=\dfrac{x+1}{x}\left(x-\ln|x+1|-1\right)$.

Với $x=2$ thì $f(x)=\dfrac{3}{2}(1-\ln 3)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}\ln 3$. Suy ra $a=\dfrac{3}{2}$ và $b=-\dfrac{3}{2}$.

Vậy $a^2+b^2=\dfrac{9}{2}$.

Câu 48.4: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f\left(1\right)=\mathrm{e}$ và $\left(x+2\right).f\left(x\right)=x.f'\left(x\right)-x^3$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

A. $-\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{2}{3}$. **B.** $\mathrm{e}-\frac{2}{3}$. **C.** $\mathrm{e}-\frac{1}{\mathrm{e}}$. **D.** $\mathrm{e}-\frac{2}{\mathrm{e}}-\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left(x+2\right).f\left(x\right)=x.f'\left(x\right)-x^3\Leftrightarrow\frac{xf'\left(x\right)-\left(x+2\right)f\left(x\right)}{x^3}=1\Leftrightarrow\left[\frac{\mathrm{e}^{-x}f\left(x\right)}{x^2}\right]'=\mathrm{e}^{-x}$

$\Rightarrow\frac{\mathrm{e}^{-x}f\left(x\right)}{x^2}=\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}+C\Leftrightarrow f\left(x\right)=-x^2+C.x^2\mathrm{e}^x$

Vì $f\left(1\right)=\mathrm{e}\Rightarrow-1+C.\mathrm{e}=\mathrm{e}\Leftrightarrow C=1+\frac{1}{\mathrm{e}}$

Do đó $f\left(x\right)=-x^2+\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}}\right).x^2\mathrm{e}^x$

Vậy $\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left[-x^2+\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}}\right).x^2\mathrm{e}^x\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 -x^2\mathrm{d}x+\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\int\limits_0^1 x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{3}+\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\int\limits_0^1 x^2\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)=-\frac{1}{3}+\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\left[\mathrm{e}-\int\limits_0^1 2x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right]=-\frac{1}{3}+e+1-2\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\int\limits_0^1 x\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right).$

$=\frac{2}{3}+e-2\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\left[e-\int\limits_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\right]=\frac{2}{3}+e-2\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\left[e-\left(e-1\right)\right]=-\frac{4}{3}+e-\frac{2}{e}$

Câu 48.5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và thỏa mãn $2f\left(3x\right)+3f\left(\frac{2}{x}\right)=-\frac{15x}{2}$, $\int\limits_3^9 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2019$. Tính $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

A. $I=-\frac{688}{3}$. **B.** $I=\frac{688}{3}$. **C.** $I=\frac{886}{3}$. **D.** $I=\frac{68}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Xét $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$. Đặt $t=2x\Rightarrow\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}t$. Đổi cận $\left|\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=1\\ x=\frac{3}{2}\Rightarrow t=3\end{array}\right.$.

Khi đó $I=\frac{1}{2}\int_1^3 f\left(\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t$.

Mà $2f(3x)+3f\left(\frac{2}{x}\right)=-\frac{15x}{2}\Leftrightarrow f\left(\frac{2}{x}\right)=-\frac{5x}{2}-\frac{2}{3}f(3x)$ hay $f\left(\frac{2}{t}\right)=-\frac{5t}{2}-\frac{2}{3}f(3t)$

Nên $I=\frac{1}{2}\int_1^3\left[-\frac{5t}{2}-\frac{2}{3}f(3t)\right]\mathrm{d}t=-\frac{5}{4}\int_1^3 t\,\mathrm{d}t-\frac{1}{3}\int_1^3 f(3t)\,\mathrm{d}t=-5-\frac{1}{3}\int_1^3 f(3t)\,\mathrm{d}t$ (1)

Đặt $u=3t\Rightarrow dt=\frac{1}{3}du$. Đổi cận $\left|\begin{array}{l} t=1\Rightarrow u=3\\ t=3\Rightarrow u=9\end{array}\right.$.

Khi đó $I=-5-\frac{1}{9}\int_3^9 f(u)\,\mathrm{d}u=-5-\frac{2019}{9}=-\frac{688}{3}$.

Câu 48.6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và thỏa mãn $2f(2x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$, $\int_1^2 xf'(x)\,\mathrm{d}x=5$. Giá trị $\int_1^2 f\left(\frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{103}{48}$. **B.** $\frac{103}{24}$. **C.** $\frac{103}{48}$. **D.** $-\frac{103}{12}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u=x\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=dx\\ v=f(x)\end{cases}$.

Ta có $\int_1^2 x.f'(x)dx=x.f(x)\Big|_1^2-\int_1^2 f(x)dx\Leftrightarrow 5=2f(2)-f(1)-\int_1^2 f(x)dx$ (1)

Lần lượt thay $x=1$ và $x=\frac{1}{2}$ vào $2f(2x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$ ta được

$$\begin{cases} 2f(2)-f(1)=1\\ 2f(1)-f(2)=\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} f(2)=\frac{3}{4}\\ f(1)=\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow\int_1^2 f(x)dx=2f(2)-f(1)-5=-4\Rightarrow\int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_1^2 f(x)dx=-2$.

Lại có $2f(2x)-f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2\Rightarrow 2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(2x)dx-\int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2dx\Leftrightarrow 2.(-2)-\int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\frac{7}{24}$

$\Leftrightarrow\int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(\frac{1}{x}\right)dx=-4-\frac{7}{24}=-\frac{103}{24}$.

Đặt $t=\dfrac{2}{x}\Rightarrow x=\dfrac{2}{t}\Rightarrow dx=-\dfrac{2}{t^2}dt$ ta có $\int\limits_1^2 f\left(\dfrac{2}{x}\right)dx=\int\limits_2^1 f(t).\dfrac{-2}{t^2}dt\ =2\int\limits_2^1 f(t).\dfrac{-1}{t^2}dt$ (2)

Đặt $u=\dfrac{1}{x}\Rightarrow x=\dfrac{1}{u}\Rightarrow dx=-\dfrac{1}{u^2}du$ ta có $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 f\left(\dfrac{1}{x}\right)dx=\int\limits_2^1 f(u).\dfrac{-1}{u^2}du\ =\int\limits_2^1 f(t).\dfrac{-1}{t^2}dt=-\dfrac{103}{24}$.

Thay vào (2) ta được $\int\limits_1^2 f\left(\dfrac{2}{x}\right)dx=2.\left(-\dfrac{103}{24}\right)=-\dfrac{103}{12}$.

Câu 48.7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn $f'(0)=9$ và $9f''(x)+\left[f'(x)-x\right]^2=9$. Tính $T=f(1)-f(0)$.

A. $T=2+9\ln 2$. **B.** $T=9$. **C.** $T=\dfrac{1}{2}+9\ln 2$. **D.** $T=2-9\ln 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $9f''(x)+\left[f'(x)-x\right]^2=9\Leftrightarrow 9\left[f''(x)-1\right]=-\left[f'(x)-x\right]^2\Leftrightarrow -\dfrac{f''(x)-1}{\left[f'(x)-x\right]^2}=\dfrac{1}{9}$.

$$\Rightarrow\left[\dfrac{1}{f'(x)-x}\right]'=\dfrac{1}{9}\Rightarrow\dfrac{1}{f'(x)-x}=\dfrac{1}{9}\int \mathrm{d}x\Leftrightarrow\dfrac{1}{f'(x)-x}=\dfrac{x}{9}+C\Leftrightarrow f'(x)=x+\dfrac{9}{x+9C}$$

Do $f'(0)=9$ nên $C=\dfrac{1}{9}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{9}{x+1}+x$

Vậy $T=f(1)-f(0)=\int\limits_0^1\left(\dfrac{9}{x+1}+x\right)\mathrm{d}x=\left(9\ln|x+1|+\dfrac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=9\ln 2+\dfrac{1}{2}$.

Câu 48.8: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;2]$. Biết $f(0)=1$ và $f(x).f(2-x)=\mathrm{e}^{2x^2-4x}$, với mọi $x\in[0;2]$. Tính tích phân $I=\int\limits_0^2\dfrac{\left(x^3-3x^2\right)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$.

A. $I=-\dfrac{16}{3}$. **B.** $I=-\dfrac{16}{5}$. **C.** $I=-\dfrac{14}{3}$. **D.** $I=-\dfrac{32}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x).f(2-x)=\mathrm{e}^{2x^2-4x}$

$\Rightarrow\ln\left[f(x).f(2-x)\right]=\ln\mathrm{e}^{2x^2-4x}$

$\Leftrightarrow\ln f(x)+\ln f(2-x)=2x^2-4x\ (*)$

Mặt khác, với $x=0$, ta có $\begin{cases} f(0).f(2)=1 \\ f(0)=1 \end{cases}$ nên $f(2)=1$.

Xét $I=\int\limits_0^2 \frac{(x^3-3x^2)f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 (x^3-3x^2).\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^2 (x^3-3x^2)\mathrm{d}\left(\ln[f(x)]\right)$

$=\left((x^3-3x^2)\ln[f(x)]\right)\Big|_0^2-\int\limits_0^2(3x^2-6x).\ln[f(x)]\mathrm{d}x$

$=-\int\limits_0^2(3x^2-6x).\ln f(x)\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^2(6x-3x^2).\ln[f(x)]\mathrm{d}x\ (1)$

Đặt $t=2-x\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$. Đổi cận $\left| \begin{array}{l} x=0\to t=2 \\ x=2\to t=0 \end{array}\right.$

Do đó $I=-\int\limits_2^0 3(2-t)t.\ln[f(2-t)]\mathrm{d}t=\int\limits_0^2(6t-3t^2).\ln[f(2-t)]\mathrm{d}t$

Vì tích phân không phụ thuộc vào biến nên $I=\int\limits_0^2(6x-3x^2).\ln[f(2-x)]\mathrm{d}x\ (2)$

Cộng 2 vế của (1) và (2), ta được $2I=\int\limits_0^2(6x-3x^2).\left(\ln[f(x)]+\ln[f(2-x)]\right)\mathrm{d}x$

Hay $I=\frac{1}{2}\int\limits_0^2(6x-3x^2).\left(\ln[f(x)]+\ln[f(2-x)]\right)\mathrm{d}x\ (**)$

Thế $(*)$ vào $(**)$, ta có $I=\frac{1}{2}\int\limits_0^2(6x-3x^2).(2x^2-4x)\mathrm{d}x=-\frac{16}{5}$

Câu 48.9: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(2)=\frac{1}{15}$ và $f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0$. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{a}{b}\ln\frac{c}{2}$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=3$. **B.** $S=4$. **C.** $S=5$. **D.** $S=6$.

Lời giải

Chọn D

Do $f(x)>0$, với mọi $x\in(0;+\infty)$ nên $f'(x)+(2x+4)f^2(x)=0\Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+4$.

Suy ra $\frac{1}{f(x)}=x^2+4x+C$.

Mặt khác $f(2)=\frac{1}{15}$ nên $C=3$ hay $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+3}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+3}=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\Rightarrow a=1,b=2,c=3\Rightarrow S=6$

Câu 48.10: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\begin{cases}f(0)=f'(0)=1\\ f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)-1\end{cases}$, với $x,y\in\mathbb{R}$. Tính $\int_0^1 f(x-1)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{7}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Lấy đạo hàm theo hàm số y

$f'(x+y)=f'(y)+3x^2+6xy$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Cho $y=0\Rightarrow f'(x)=f'(0)+3x^2\Rightarrow f'(x)=1+3x^2$

$\Rightarrow f(x)=\int f'(x)dx=x^3+x+C$ mà $f(0)=1\Rightarrow C=1$. Do đó $f(x)=x^3+x+1$.

Vậy $\int_0^1 f(x-1)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0\left(x^3+x+1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$.

Câu 48.11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)\mathrm{d}x=4$, $\int_0^1\frac{x^2f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=2$.

Giá trị của tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(5;9)$. **B.** $(3;6)$. **C.** $\left(\sqrt{2};5\right)$. **D.** $(1;4)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x=\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0$; $x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$

Khi đó $\int_0^1\frac{x^2f(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 t.f(\tan t)}{\tan^2 t+1}\left(\tan^2 t+1\right)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 t.f(\tan t)\mathrm{d}t$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right).f\left(\tan t\right)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f\left(\tan t\right)}{\cos^2 t}\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{4}}f\left(\tan t\right)\mathrm{d}t.$$

Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f\left(\tan t\right)}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=6$

Đặt $x=\tan t\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$

Đổi cận $t=0\Rightarrow x=0$; $t=\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=1$.

Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f\left(\tan t\right)}{\cos^2 t}\mathrm{d}t=\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$. Vậy $\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=6$.

Câu 48.12: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục, đồng biến, nhận giá trị dương trên $\left(0;+\infty\right)$ và thỏa mãn $f\left(3\right)=\frac{2}{3}$ và $\left[f'\left(x\right)\right]^2=\left(x+1\right).f\left(x\right)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $2613<f^2\left(8\right)<2614$.

B. $2614<f^2\left(8\right)<2615$.

C. $2618<f^2\left(8\right)<2619$.

D. $2616<f^2\left(8\right)<2617$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$ nên suy ra $f'\left(x\right)\ge 0,\forall x\in\left(0;+\infty\right)$.

Mặt khác $y=f\left(x\right)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $\left(0;+\infty\right)$ nên

$$\left[f'\left(x\right)\right]^2=\left(x+1\right)f\left(x\right)\Rightarrow f'\left(x\right)=\sqrt{\left(x+1\right)f\left(x\right)},\ \forall x\in\left(0;+\infty\right)$$

$$\Rightarrow\frac{f'\left(x\right)}{\sqrt{f\left(x\right)}}=\sqrt{\left(x+1\right)},\ \forall x\in\left(0;+\infty\right);$$

$$\Rightarrow\int\frac{f'\left(x\right)}{\sqrt{f\left(x\right)}}dx=\int\sqrt{\left(x+1\right)}dx\Rightarrow\sqrt{f\left(x\right)}=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x+1\right)^3}+C;$$

Từ $f\left(3\right)=\frac{2}{3}$ suy ra $C=\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{8}{3}$

Như vậy $f\left(x\right)=\left(\frac{1}{3}\sqrt{\left(x+1\right)^3}+\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{8}{3}\right)^2$

Bởi thế:

$$f(8)=\left(\frac{1}{3}\sqrt{(8+1)^3}+\sqrt{\frac{2}{3}-\frac{8}{3}}\right)^2=\left(9+\sqrt{\frac{2}{3}-\frac{8}{3}}\right)^2\Rightarrow f^2(8)=\left(9+\sqrt{\frac{2}{3}-\frac{8}{3}}\right)^4.$$

Câu 48.13: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, không âm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f'(x)=2x\sqrt{(f(x))^2+1}$ và $f(0)=0$. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ lần lượt là

A. $M=20$; $m=2$.

B. $M=4\sqrt{11}$; $m=\sqrt{3}$.

C. $M=20$; $m=\sqrt{2}$.

D. $M=3\sqrt{11}$; $m=\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x).f'(x)=2x\sqrt{(f(x))^2+1}\Leftrightarrow\dfrac{f(x).f'(x)}{\sqrt{(f(x))^2+1}}=2x$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta có $\sqrt{(f(x))^2+1}=x^2+C$, do $f(0)=0$ nên $C=1$.

Vậy $f(x)=\sqrt{x^4+2x^2}=x\sqrt{x^2+2}$ trên đoạn $[1;3]$.

Ta có $f'(x)=\sqrt{x^2+2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}>0$ với mọi $x\in[1;3]$ nên $f(x)$ đồng biến trên $[1;3]$.

Vậy $M=f(3)=3\sqrt{11}$; $m=f(1)=\sqrt{3}$.

Câu 48.14: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$, với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$. Giá trị của tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x.f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{\pi}{4}$.

B. $\dfrac{1}{4}$.

C. $\dfrac{\pi}{4}$.

D. $-\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Bài ra $f(0)=0$ và $f(x)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x$ nên $f(0)+f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0\Leftrightarrow f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

Ta có: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x.f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\left[f(x)\right]=\left[xf(x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$

Suy ra: $I=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$.

Mặt khác,

$$f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x.\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

Suy ra: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(*)$

Đặt $t=\frac{\pi}{2}-x \Rightarrow dt=-dx \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\mathrm{d}t=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

Nên từ (*) $\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$

Vậy $I=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}$.

Câu 48.15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=7$ và $\int\limits_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{7}{5}$. **B.** 1. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\limits_0^1 x^2f(x)dx=\left[\frac{x^3}{3}f(x)\right]\Bigg|_0^1-\int\limits_0^1\frac{x^3}{3}f'(x)dx$. Suy ra $\int\limits_0^1\frac{x^3}{3}f'(x)dx=-\frac{1}{3}$.

Hơn nữa ta dễ dàng tính được $\int\limits_0^1\frac{x^6}{9}\mathrm{d}x=\frac{1}{63}$.

Do đó $\int\limits_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x+2.21\int\limits_0^1\frac{x^3}{3}f'(x)\mathrm{d}x+21^2\int\limits_0^1\frac{x^6}{9}\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1\left[f'(x)+7x^3\right]^2\mathrm{d}x=0$.

Suy ra $f'(x)=-7x^3$, do đó $f(x)=-\frac{7}{4}x^4+C$. Vì $f(1)=0$ nên $C=\frac{7}{4}$.

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-\frac{7}{4}\int\limits_0^1\left(x^4-1\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{5}$.

Câu 48.16: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $f(0)=0$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$. Tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f(x)dx = \left[-\cos x.f(x)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f'(x)dx$. Suy ra $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f'(x)dx = \frac{\pi}{4}$.

Hơn nữa $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \left[\frac{2x+\sin 2x}{4}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

Do đó $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f'(x)\right]^2 dx - 2.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f'(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 xdx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f'(x)-\cos x\right]^2 dx = 0$.

Suy ra $f'(x)=\cos x$, do đó $f(x)=\sin x + C$. Vì $f(0)=0$ nên $C=0$.

Ta được $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = 1$.

Câu 48.17: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)=6x^2 f(x^3)+\frac{6}{\sqrt{3x+1}}$.

Giá trị $\int_0^2 (x+1)f'\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{8}{5}$. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** $-\frac{12}{5}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'\left(\frac{x}{2}\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = 2f\left(\frac{x}{2}\right) \end{cases}$

$\int_0^2 (x+1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2(x+1).f\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^2 - 2\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 6f(1)-2f(0)-4\int_0^1 f(u)du$;

$\left(u=\frac{x}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{2}dx; \begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0 \\ x=2 \Rightarrow u=1 \end{cases}\right)$.

$f(x)=6x^2 f(x^3)+\frac{3}{\sqrt{3x+1}} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1\left(6x^2 f(x^3)+\frac{6}{\sqrt{3x+1}}\right)dx = \int_0^1 6x^2 f(x^3)dx + 6\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$ (1)

*Tính $\int_0^1 6x^2 f(x^3)dx$.

Đặt $t=x^3 \Rightarrow dt = 3x^2.dx$; $x=0 \Rightarrow t=0, x=1 \Rightarrow t=1$.

$\int\limits_0^1 6x^2 f\left(x^3\right)dx = 2\int\limits_0^1 f\left(t\right)dt = 2\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx\,(2).$

*Tính $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}} = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \frac{3dx}{\sqrt{3x+1}} = \frac{1}{3}.2\sqrt{3x+1}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}(3).$

Thay kết quả (2) và (3) vào (1) ta được: $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx = 2\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx + 6.\frac{2}{3} \Rightarrow \int\limits_0^1 f\left(x\right)dx = -4$.

Thay lần lượt $x=0; x=1$ vào $f\left(x\right) = 6x^2 f\left(x^3\right) + \frac{6}{\sqrt{3x+1}}$ ta được

$f\left(0\right)=6; f\left(1\right)=6f\left(1\right)+3 \Rightarrow f\left(1\right) = -\frac{3}{5}$

Vậy $\int\limits_0^2 \left(x+1\right)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx = 6f\left(1\right)-2f\left(0\right)-4\int\limits_0^1 f\left(u\right)du = 6.\left(-\frac{3}{5}\right)-2.6-4.\left(-4\right)=\frac{2}{5}$

Câu 48.18: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, và các tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f'\left(x\right)\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

Biết rằng $f\left(0\right)=0$, tính $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

A. $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$. **B.** $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$. **D.** $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

• Ta có $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

Đặt $\begin{cases} u = f\left(x\right) \\ \mathrm{d}v = \sin x\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = f'\left(x\right)\mathrm{d}x \\ v = -\cos x \end{cases}$.

Khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x.f\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\cos x.f\left(x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

• Xét $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f'\left(x\right)-\cos x\right]^2 \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f'\left(x\right)\right]^2 \mathrm{d}x - 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x.f'\left(x\right)\mathrm{d}x + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\mathrm{d}x$

$= \frac{\pi}{4} - 2.\frac{\pi}{4} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4} + \left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$.

$\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f'\left(x\right)-\cos x\right]^2 \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow f'\left(x\right)-\cos x = 0 \Leftrightarrow f'\left(x\right)=\cos x$.

Suy ra $f\left(x\right)=\sin x + C$.

Mà $f(0)=0 \Rightarrow C=0$.

Khi đó $f(x)=\sin x$.

Vậy $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 48.19: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$ và $\int_0^1\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x=4$. Giá trị của tích phân $\int_0^1\left[f(x)\right]^3\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 80.

Lời giải

Chọn C

Xét $\int_0^1\left[f(x)+(ax+b)\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x+2\int_0^1\left[f(x).(ax+b)\right]\mathrm{d}x+\int_0^1(ax+b)^2\mathrm{d}x$

$=4+2a\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x+2b\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{3a}(ax+b)^3\Big|_0^1=4+2(a+b)+\frac{a^2}{3}+ab+b^2$.

Cần xác định a, b để $\frac{a^2}{3}+(2+b)a+b^2+2b+4=0$. (1)

Coi (1) là phương trình bậc hai ẩn a.

Ta có: $\Delta=b^2+4b+4-\frac{4}{3}\left(b^2+2b+4\right)=\frac{-(b-2)^2}{3}\le 0\Rightarrow b=2\Rightarrow a=-6$.

Khi đó: $\int_0^1\left[f(x)+(-6x+2)\right]^2\mathrm{d}x=0\Rightarrow f(x)=6x-2$.

Suy ra $\int_0^1\left[f(x)\right]^3\mathrm{d}x=\int_0^1(6x-2)^3\mathrm{d}x=\frac{1}{24}(6x-2)^4\Big|_0^1=10$.

Câu 48.20: Xét hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(1)=1$ và $f(2)=4$. Tính $J=\int_1^2\left(\frac{f'(x)+2}{x}-\frac{f(x)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

A. $J=1+\ln 4$. **B.** $J=4-\ln 2$. **C.** $J=\ln 2-\frac{1}{2}$. **D.** $J=\frac{1}{2}+\ln 4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $J=\int_1^2\left(\frac{f'(x)+2}{x}-\frac{f(x)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{f'(x)}{x}\mathrm{d}x-\int_1^2\frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x+\int_1^2\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases}u=\frac{1}{x}\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$.

$J=\int_1^2\left(\frac{f'(x)+2}{x}-\frac{f(x)+1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{x}.f(x)\Big|_1^2+\int_1^2\frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x-\int_1^2\frac{f(x)}{x^2}\mathrm{d}x+\int_1^2\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}f(2)-f(1)+\left(2\ln x+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=\frac{1}{2}+\ln 4.$$

Câu 48.21: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^1 f'(x)f\left[f(x)\right]dx=10$ và $f(0)=1, f(1)=2$. Tích phân $\int_1^2 f(x)dx$ bằng

A. 10. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 30.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=f(x)\Rightarrow dt=f'(x)dx; x=0\Rightarrow t=f(0)=1, x=1\Rightarrow t=f(1)=2$.

Khi đó $10=\int_0^1 f'(x)f\left[f(x)\right]dx=\int_1^2 f(t)dt$.

Vậy $\int_1^2 f(x)dx=10.$

Câu 48.22: Cho $\int_0^1 \left(1-x^2\right)f(x)\mathrm{d}x=10.$ Tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 xf(\sin x)\mathrm{d}x.$.

A. $I=5\pi$. **B.** $I=10\pi$. **C.** $I=10$. **D.** $I=5$.

Lời giải

Chọn C

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 xf(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 x\right).f(\sin x).\cos x\mathrm{d}x.$$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$ và $x=0\Rightarrow t=0; x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

Khi đó $I=\int_0^1\left(1-t^2\right)f(t)\mathrm{d}t=10$.

Câu 48.23: Cho $\int_1^e f(x)\mathrm{d}x=1$ và $\int_1^e \frac{(x-1)f(x)}{x}\mathrm{d}x=2$. Tích phân $\int_0^1 f\left(e^x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** -3.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=e^x \Rightarrow \mathrm{d}t=e^x\mathrm{d}x=t\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t}$ và $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=e$.

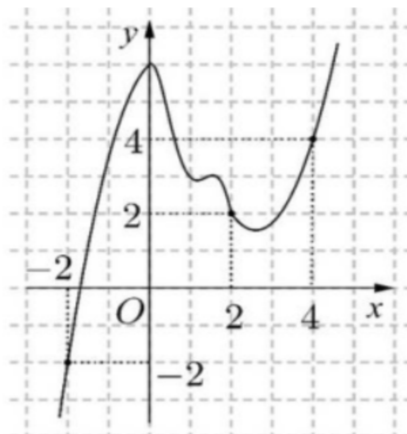
Do đó: $\int_0^1 f\left(e^x\right)\mathrm{d}x=\int_1^e f(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Mặt khác theo giả thiết có:

$$2-1=\int_1^e \frac{(x-1)f(x)}{x}\mathrm{dx}-\int_1^e f(x)\mathrm{dx}=\int_1^e\left[\frac{(x-1)f(x)}{x}-f(x)\right]\mathrm{dx}=\int_1^e -\frac{f(x)}{x}\mathrm{dx}.$$

Vậy $\int_0^1 f(e^x)\mathrm{dx}=\int_1^e f(t)\frac{\mathrm{dt}}{t}=-1$.

Câu 48.24: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên dưới



Khi đó tổng $\int_0^4 f'(x-2)\mathrm{d}x+\int_0^2 f'(x+2)\mathrm{d}x$ bằng

A. 10. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

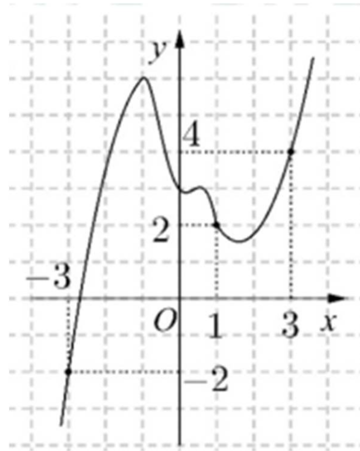
Dựa vào đồ thị hàm số có $f(-1)=-2, f(2)=2, f(4)=4$.

Đặt $t=x-2 \Rightarrow \mathrm{dt}=\mathrm{dx}$ và $\int_0^4 f'(x-2)\mathrm{dx}=\int_{-2}^2 f'(t)\mathrm{dt}=f(2)-f(-2)=2-(-2)=4$.

Đặt $t=x+2 \Rightarrow \mathrm{dt}=\mathrm{dx}$ và $\int_0^2 f'(x+2)\mathrm{dx}=\int_2^4 f'(t)\mathrm{dt}=f(4)-f(2)=4-2=2$.

Vậy $\int_0^4 f'(x-2)\mathrm{dx}+\int_0^2 f'(x+2)\mathrm{dx}=6$.

Câu 48.25: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên dưới



Khi đó tổng $\int\limits_{-2}^{0} f'(2x+1)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} f'(x+1)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 10. **C.** 0. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = 2x+1 \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\mathrm{d}x$.

Ta có $\int\limits_{-2}^{0} f'(2x+1)\mathrm{d}x = \int\limits_{-3}^{1} f'(t)\frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{1} f'(t)\mathrm{d}x = \frac{f(1)-f(-3)}{2} = \frac{2-(-2)}{2} = 2$.

Đặt $t = x+1 \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.

Ta có $\int\limits_{0}^{2} f'(x+1)\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{3} f'(t)\mathrm{d}t = f(3)-f(1) = 4-2 = 2$.

Vậy $\int\limits_{-2}^{0} f'(2x+1)\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{2} f'(x+1)\mathrm{d}x = 2+2 = 4$.

Câu 48.26: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3+3x+1) = 3x+2$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ .Tích phân $\int\limits_{1}^{5} xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{31}{4}$. **B.** $\frac{17}{4}$. **C.** $\frac{33}{4}$. **D.** $\frac{49}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết ta có $f(x^3+3x+1) = 3x+2$ nên suy ra $f(1) = 2$, $f(5) = 5$.

Suy ra $I = \int\limits_{1}^{5} xf'(x)\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_1^5 - \int\limits_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 23 - \int\limits_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $x = t^3+3t+1 \Rightarrow \mathrm{d}x = (3t^2+3)\mathrm{d}t$.

Với $x = 1 \Rightarrow t = 0; x = 5 \Rightarrow t = 1$

Do đó $\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(t^3+3t+1)(3t^2+3)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (3t+2)(3t^2+3)\,\mathrm{d}t = \dfrac{59}{4}$.

Vậy $I = 23 - \dfrac{59}{4} = \dfrac{33}{4}$.

Câu 48.27: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn

$\begin{cases} f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ f'(x) = -e^x f^2(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \\ f(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$. Tính giá trị của $f(\ln 2)$

A. $f(\ln 2) = \dfrac{1}{4}$. **B.** $f(\ln 2) = \dfrac{1}{3}$. **C.** $f(\ln 2) = \ln 2 + \dfrac{1}{2}$. **D.** $f(\ln 2) = \ln^2 2 + \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = -e^x f^2(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = -e^x$ (do $f(x) > 0$)

$\Rightarrow \int \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \int -e^x dx \Rightarrow -\dfrac{1}{f(x)} = -e^x + C \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{e^x - C}$.

Thay $x = 0$ ta được $f(0) = \dfrac{1}{e^0 - C} \overset{f(0)=\frac{1}{2}}{\Rightarrow} C = -1$.

Vậy $f(x) = \dfrac{1}{e^x+1} \Rightarrow f(\ln 2) = \dfrac{1}{e^{\ln 2}+1} = \dfrac{1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$.

Câu 48.28: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2[f(x)]^3 + 3f(x) + 5 = x$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_5^{10} f(x)dx$.

A. $I = 0$. **B.** $I = 3$. **C.** $I = 5$. **D.** $I = 6$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = f(x) \Rightarrow 2t^3 + 3t + 5 = x \Rightarrow dx = (6t^2+3)dt$ và

$x = 5 \Rightarrow 2t^3 + 3t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = 0$

$x = 10 \Rightarrow 2t^3 + 3t + 5 = 10 \Leftrightarrow t = 1$

Vậy $I = \int_5^{10} f(x)dx = \int_0^1 t(6t^2+3)dt = 3$.

Câu 48.29: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $bf(a) + af(b) = 1$, với mọi $a, b \in [0;1]$.

Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)dx$.

A. $I=\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $I=\dfrac{1}{2}$. **C.** $I=\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $I=\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

- Đặt $x=\sin t\Rightarrow dx=\cos tdt$

Với $x=0$ thì $t=0$; Với $x=1$ thì $t=\dfrac{\pi}{2}$

Ta được: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\cos tdt$.

Đặt $x=\cos t\Rightarrow dx=-\sin tdt$

Với $x=0$ thì $t=\dfrac{\pi}{2}$; Với $x=1$ thì $t=0$

Ta được: $I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\cos t)\sin tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\sin tdt$.

Suy ra: $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(\sin t)\cos t+f(\cos t)\sin t\right]dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow I=\dfrac{\pi}{4}$.

Câu 48.30: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thỏa mãn $f(x)=6x^2.f(x^3)-\dfrac{6x}{\sqrt{3x+1}}$, $\forall x\in[a;b]$.

Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. 2. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x)=6x^2.f(x^3)-\dfrac{6}{\sqrt{3x+1}}\Rightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1 3x^2f(x^3)\mathrm{d}x=-6\int\limits_0^1\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x$ (*)

Đặt $u=x^3\Rightarrow du=3x^2dx$

Với $x=0\Rightarrow u=0$ và $x=1\Rightarrow u=1$

Khi đó $\int\limits_0^1 3x^2f(x^3)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 f(u)\mathrm{d}u=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ thay vào (*), ta được:

$\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x-2\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=-6\int\limits_0^1\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=6\int\limits_0^1\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x=4$.

Câu 48.31: Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm trên $[1;2]$ thỏa mãn $f(1)=g(1)=0$ và

$$\begin{cases}\dfrac{x}{(x+1)^2}g(x)+2017x=(x+1)f'(x)\\ \dfrac{x^3}{x+1}g'(x)+f(x)=2018x^2\end{cases},\ \forall x\in[1;2].$$

Tính tích phân $I=\int\left[\dfrac{x}{x+1}g(x)-\dfrac{x+1}{x}f(x)dx\right]$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 4. **C.** -1. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta có $\begin{cases}\dfrac{x}{(x+1)^2}g(x)+2017x=(x+1)f'(x)\\ \dfrac{x^3}{x+1}g'(x)+f(x)=2018x^2\end{cases},\ \forall x\in[1;2].$

Suy ra $\left[\dfrac{1}{(x+1)^2}g(x)+\dfrac{x}{x+1}g'(x)\right]-\left[\dfrac{(x+1)}{x}f'(x)-\dfrac{1}{x^2}f(x)\right]=1$

$\Leftrightarrow\left[\dfrac{x}{x+1}g(x)\right]'-\left[\dfrac{(x+1)}{x}f(x)\right]'=1\Leftrightarrow\dfrac{x}{x+1}g(x)+\dfrac{x+1}{x}f(x)=x+C.$

Mà $\Leftrightarrow f(1)=g(1)=0\Rightarrow C=-1\Leftrightarrow I=\int\limits_1^2\left[\dfrac{x+1}{x}f(x)-\dfrac{x+1}{x}f(x)\right]dx=\int\limits_1^2(x-1)dx=\dfrac{1}{2}.$

Câu 48.32: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thoả mãn $f(x)-8x^3f(x^4)+\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0$

.

Tích phân $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ có kết quả dạng $\dfrac{a-b\sqrt{2}}{c}$, $a,b,c\in\mathbb{Z}$, $\dfrac{a}{c}$, $\dfrac{b}{c}$ tối giản. Tính $a+b+c$.

A. 6. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -10.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x)-8x^3f(x^4)+\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}=0\Rightarrow f(x)=8x^3f(x^4)-\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$.

$I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 8x^3f(x^4)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x\ \ (1)$

Xét $\int\limits_0^1 8x^3f(x^4)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 2f(x^4)d(x^4)=2\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2I$

Xét $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$. Đặt $t=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow t^2=x^2+1 \Rightarrow tdt=xdx$.

Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=1$, $x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}$.

Nên $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_1^{\sqrt{2}} \frac{(t^2-1)tdt}{t}=\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}$

Do đó $(1) \Rightarrow I=2I-\left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}\right) \Rightarrow I=\frac{2-\sqrt{2}}{3}$.Nên $a=2$, $b=1$, $c=3$.

Vậy $a+b+c=6$.

Câu 48.33: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện

$f(x)+2f(1-x)=3x^2-6x, \forall x \in [0;1]$. Tính $I=\int_0^1 f(1-x^2)dx$

A. $I=\frac{4}{15}$. **B.** $I=1$. **C.** $I=-\frac{2}{15}$. **D.** $I=\frac{2}{15}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=1-x, \forall x \in [0;1] \Rightarrow t \in [0;1]$.

Ta có $f(x)+2f(1-x)=3x^2-6x \Leftrightarrow f(x)+2f(1-x)=3(1-x)^2-3$

$\Rightarrow f(1-t)+2f(t)=3t^2-3 \Leftrightarrow 2f(x)+f(1-x)=3x^2-3$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} f(x)+2f(1-x)=3x^2-6x \\ 2f(x)+f(1-x)=3x^2-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)+2f(1-x)=3x^2-6x \\ 4f(x)+2f(1-x)=6x^2-6 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 3f(x)=3x^2+6x-6 \Leftrightarrow f(x)=x^2+2x-2$

Khi đó $f(1-x^2)=(1-x^2)^2+2(1-x^2)-2=x^4-4x^2+1$

Suy ra $I=\int_0^1 f(1-x^2)dx=\int_0^1 (x^4-4x^2+1)dx=-\frac{2}{15}$.

Câu 48.34: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ và thỏa mãn $f(1)=1$, biểu thức $f(x)=f'(x)\sqrt{3x+1}$, với mọi $x>0$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $2<f(5)<3$. **B.** $4<f(5)<5$. **C.** $1<f(5)<2$. **D.** $3<f(5)<4$.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết ta có $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\Leftrightarrow\int\limits_1^5\dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\limits_1^5\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}}\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln\left[f(x)\right]\Big|_1^5=\dfrac{1}{3}\int\limits_1^5\dfrac{\mathrm{d}(3x+1)}{\sqrt{3x+1}}$

$\Leftrightarrow\ln\left[f(5)\right]-\ln\left[f(1)\right]=\dfrac{2}{3}\sqrt{3x+1}\Big|_1^5\Leftrightarrow\ln\left[f(5)\right]=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow f(5)=e^{\frac{4}{3}}\approx 3,7937$.

Vậy $3<f(5)<4$.

Câu 48.35: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+x^{2019}f\left(x^{2020}\right)=\sqrt{1-x^2}$ với mọi x thuộc $[0;1]$. Tích phân $\int\limits_0^1 f(x)dx$ bằng:

A. 1020604π. **B.** $\dfrac{2017\pi}{8072}$. **C.** $\dfrac{505\pi}{2021}$. **D.** $\dfrac{\pi}{8076}$.

Lời giải

Chọn C

Có $\int\limits_0^1 f(x)dx+\int\limits_0^1 x^{2019}f\left(x^{2020}\right)dx=\int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\dfrac{\pi}{4}$

Đặt $t=x^{2020}\Rightarrow dt=2020.x^{2019}dx$ và $\int\limits_0^1 x^{2019}f\left(x^{2020}\right)dx=\dfrac{1}{2020}\int\limits_0^1 f(t)dt=\dfrac{1}{2020}\int\limits_0^1 f(x)dx$

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)dx+\int\limits_0^1 x^{2019}f\left(x^{2020}\right)dx=\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow\dfrac{2021}{2020}\int\limits_0^1 f(x)dx=\dfrac{\pi}{4}\Leftrightarrow\int\limits_0^1 f(x)dx=\dfrac{505\pi}{2021}$.

Câu 48.36: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[4;8]$ và $f(x)\neq 0$ $\forall x\in[4;8]$. Biết rằng $\int\limits_4^8\dfrac{\left[f'(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^4}\mathrm{d}x=1$ và $f(4)=\dfrac{1}{4}$, $f(8)=\dfrac{1}{2}$. Tính $f(6)$.

A. $\dfrac{5}{8}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int\limits_4^8\left(\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\right)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{f(x)}\Big|_4^8=-\dfrac{1}{f(8)}+\dfrac{1}{f(4)}=2$ (1).

Gọi k là một hằng số thực, ta sẽ tìm k để $\int\limits_4^8\left(\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}+k\right)^2\mathrm{d}x=0$

Ta có $\int\limits_4^8\left(\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}+k\right)^2\mathrm{d}x=\int\limits_4^8\dfrac{\left(f'(x)\right)^2}{\left(f(x)\right)^4}\mathrm{d}x+2k\int\limits_4^8\left(\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\right)\mathrm{d}x+k^2\int\limits_4^8\mathrm{d}x=1+4k+4k^2=(1+2k)^2$

$\Rightarrow k=-\dfrac{1}{2}$ thì $\int\limits_4^8\left(\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}-\dfrac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\int\limits_4^6\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int\limits_4^6\mathrm{d}x$

$$\Leftrightarrow \int_4^6 \frac{df(x)}{f^2(x)} = 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)}\Big|_4^6 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(4)} - \frac{1}{f(6)} = 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{f(6)} = 1 \Leftrightarrow f(6) = \frac{1}{3}$$

Chú ý: $\int_a^b f(x)dx = 0$ không được phép suy ra $f(x)=0$ nhưng $\int_a^b [f(x)]^{2k}dx = 0 \Leftrightarrow f(x)=0$

Câu 48.37: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện

$4xf(x^2)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$, $\forall x\in[0;1]$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi}{20}$. **B.** $\frac{\pi}{16}$. **C.** $\frac{\pi}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $4xf(x^2)+3f(1-x)=\sqrt{1-x^2}$, $\forall x\in[0;1]$ nên ta có

$$\int_0^1[4x.f(x^2)+3f(1-x)]\mathrm{d}x = \int_0^1\sqrt{1-x^2}dx \Leftrightarrow \int_0^1 4x.f(x^2)dx + \int_0^1 3f(1-x)dx = \int_0^1\sqrt{1-x^2}dx \ (1)$$

Lại có $\int_0^1 4x.f(x^2)dx = 2\int_0^1 f(x^2)d(x^2) \xrightarrow{t=x^2} 2\int_0^1 f(t)dt = 2I$ và

$$\int_0^1 3f(1-x)dx = -3\int_0^1 f(1-x)d(1-x) \xrightarrow{u=1-x} 3\int_0^1 f(u)du = 3I.$$

Đồng thời $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx \xrightarrow{x=\sin t} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}.\cos tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = \frac{\pi}{4}$.

Vậy $(1) \Leftrightarrow 2I+3I = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{20} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{20}$.

Câu 48.38: Cho $\int_0^1 f(x)dx = 1$ và $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}dx = 2$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx$.

A. $I=3$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=1$. **D.** $I=-3$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\tan x \Rightarrow dt = (1+\tan^2 x)\mathrm{d}x$ Và $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow t=1$.

Do đó $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{1+\tan^2 x}.(1+\tan^2 x)dx = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t^2}.dt = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}.dx$.

Ta có : $\int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}dx = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{[(x^2+1)-1]f(x)}{x^2+1}dx = 2$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}dx = 2 \Leftrightarrow 1 - I = 2 \Leftrightarrow I = -1.$$

Câu 48.39: Cho $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $xf(x^2) - f(2x) = x^3 - \frac{1}{2x} - 2,\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Giá trị của

tích phân $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(5;6)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $xf(x^2) - f(2x) = x^3 - \frac{1}{2x} - 2,\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\Rightarrow \int_1^2 \left[xf(x^2) - f(2x)\right]dx = \int_1^2 \left(x^3 - \frac{1}{2x} - 2\right)dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_1^2 f(x^2)d(x^2) - \frac{1}{2}\int_1^2 f(2x)d(2x) = \left.\left(\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\ln x - 2x\right)\right|_1^2$$

$$\overset{u=x^2}{\underset{v=2x}{\Rightarrow}} \frac{1}{2}\int_1^4 f(u)du - \frac{1}{2}\int_2^4 f(v)dv = \frac{7}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_1^4 f(x)dx - \frac{1}{2}\int_2^4 f(x)dx = \frac{7}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\int_1^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx\right] - \frac{1}{2}\int_2^4 f(x)dx = \frac{7}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_1^2 f(x)dx = \frac{7}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx = \frac{7}{2} - \ln 2 \approx 2.80852819.$$

Câu 48.40: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x.f(\sin^2 x)\mathrm{d}x = 1$. Tích phân $\int_{\frac{1}{8}}^{1} \frac{f(4x)}{x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 1; x = 16 \Rightarrow t = 4$.

Suy ra $1 = \int_1^{16} \frac{f(\sqrt{x})}{x}\mathrm{d}x = \int_1^4 \frac{f(t)}{t^2}.2t\mathrm{d}t = 2\int_1^4 \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t \Rightarrow \int_1^4 \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$

Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow \mathrm{d}t = 2\sin x\cos x\mathrm{d}x \Rightarrow \cot x\mathrm{d}x = \cot x.\frac{\mathrm{d}t}{2\sin x\cos x} = \frac{\mathrm{d}t}{2\sin^2 x} = \frac{\mathrm{d}t}{2t}$

Đổi cận $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{1}{2};x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$

Do đó $1=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot x.f\left(\sin^2 x\right)\text{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{1}f\left(t\right).\frac{\text{d}t}{2t}=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f\left(t\right)}{t}\text{d}t\Rightarrow\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f\left(t\right)}{t}\text{d}t=\frac{1}{2}$.

Đặt $t=4x\Rightarrow\text{d}t=4\text{d}x$. Đổi cận $x=\frac{1}{8}\Rightarrow t=\frac{1}{2};x=1\Rightarrow t=4$

Suy ra $\int_{\frac{1}{8}}^{1}\frac{f\left(4x\right)\text{d}x}{x}=\int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f\left(t\right)}{\frac{t}{4}}.\frac{\text{d}t}{4}=\int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f\left(t\right)}{t}.\text{d}t=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f\left(t\right)}{t}\text{d}t+\int_{1}^{4}\frac{f\left(t\right)}{t}\text{d}t=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.