

ĐỀ CHÍNH

(Đề thi gồm 08 trang)

Họ, tên thí sinh : SBD :

Câu 1: Phương trình $\tan x = \sqrt{3}$ có tập nghiệm là

- A. $\left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\emptyset$. C. $\left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 2: Cấp số nhân (u_n) có công bội âm, biết $u_3 = 12$, $u_7 = 192$. Tìm u_{10} .

- A. $u_{10} = 1536$. B. $u_{10} = -1536$. C. $u_{10} = 3072$. D. $u_{10} = -3072$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = 2$, $DB = DC = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $BC \perp AD$. B. $AC \perp BD$. C. $AB \perp (BCD)$. D. $DC \perp (ABC)$.

Câu 4: Hàm số nào sau đây không đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = x^3 + 1$. B. $y = x + 1$. C. $y = \frac{x-2}{x-1}$. D. $y = x^5 + x^3 - 10$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		-2	2		$-\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -2 và giá trị cực đại bằng 2 .
B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -2 .
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.
D. Hàm số có đúng một cực trị.

Câu 6: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ trên đoạn $[0; 2]$.

- A. $M = 1$. B. $M = 0$. C. $M = 10$. D. $M = 9$.

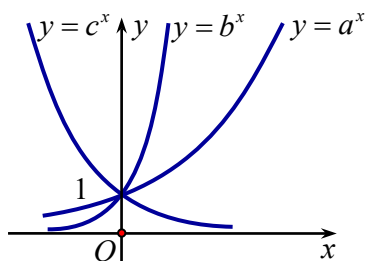
Câu 7: Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'		$-$	$-$	$+$	$-$
y	-1	2		3	0

Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là:

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Câu 8: Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Đồ thị hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ được cho trong hình bên.



Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. $1 < c < a < b$. B. $c < a < b < 1$. C. $c < 1 < b < a$. D. $c < 1 < a < b$.

Câu 9: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$ cạnh bên bằng $3a$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho?

- A. $V = 4\sqrt{7}a^3$. B. $V = \frac{4\sqrt{7}a^3}{9}$. C. $V = \frac{4a^3}{3}$. D. $V = \frac{4\sqrt{7}a^3}{3}$.

Câu 10: Giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ là

- A. $m = -\frac{1}{2}$; $M = 1$. B. $m = 1$; $M = 2$. C. $m = -2$; $M = 1$. D. $m = -1$; $M = 2$.

Câu 11: Tính giới hạn $\lim \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$.

- A. 0. B. 2. C. 1. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 12: Cho khai triển $(1-4x)^{18} = a_0 + a_1x + \dots + a_{18}x^{18}$. Giá trị của a_3 bằng

- A. -52224. B. 2448. C. 52224. D. -2448.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A , đáy lớn $AD = 8$, đáy nhỏ $BC = 6$, SA vuông góc với đáy, $SA = 6$. Gọi M là trung điểm AB , (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) có diện tích bằng:

- A. 20. B. 16. C. 30. D. 15.

Câu 14: Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (8-2m)x + m + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m = 2$. B. $m = -2$. C. $m = 4$. D. $m = -4$.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^3 + x^2 + (m^2 - 6)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

- A. $m = 1$. B. $m = -4$. C. $m = -2$. D. $m = 2$.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn: $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $2 < m \leq 4$. B. $0 < m \leq 2$. C. $m \leq 0$. D. $m > 4$.

Câu 17: Khối đa diện có mười hai mặt đều có số đỉnh, số cạnh, số mặt lần lượt là:

- A. 30, 20, 12. B. 20, 12, 30. C. 12, 30, 20. D. 20, 30, 12.

Câu 18: Gọi l, h, r lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính mặt đáy của hình nón. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón là:

- A. $S_{xq} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. B. $S_{xq} = \pi r l$. C. $S_{xq} = \pi r h$. D. $S_{xq} = 2\pi r l$.

Câu 19: Cho mặt cầu có diện tích bằng $16\pi a^2$. Khi đó, bán kính mặt cầu bằng

A. $2\sqrt{2}a$

B. $\sqrt{2}a$

C. $2a$

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 20: Trong hệ thập phân, số 7^{100000} có bao nhiêu chữ số?

A. 84510.

B. 194591.

C. 194592.

D. 84509.

Câu 21: Số mặt phẳng đối xứng của khối tứ diện đều là

A. 7.

B. 8.

C. 9.

D. 6.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $AB = 2AC = 2a$, $BC = a\sqrt{3}$.

Tam giác SAD vuông cân tại S , hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ vuông góc nhau. Tính tỉ số $\frac{V}{a^3}$ biết V là thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{1}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 23: Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh AB và cạnh CD nằm trên hai đáy của khối trụ. Biết $BD = a\sqrt{2}$, $\widehat{DAC} = 60^\circ$. Tính thể tích khối trụ.

A. $\frac{3\sqrt{6}}{16}\pi a^3$.

B. $\frac{3\sqrt{2}}{16}\pi a^3$.

C. $\frac{3\sqrt{2}}{32}\pi a^3$.

D. $\frac{3\sqrt{2}}{48}\pi a^3$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên hợp với đáy một góc bằng 60° . Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Tính thể tích V của khối cầu (S) .

A. $V = \frac{8\sqrt{6}\pi a^3}{27}$.

B. $V = \frac{4\sqrt{6}\pi a^3}{9}$.

C. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$.

D. $V = \frac{8\sqrt{6}\pi a^3}{9}$.

Câu 25: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$.

C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C$.

Câu 26: Một hộp đựng 10 thẻ được đánh số từ 1 đến 10. Phải rút ra ít nhất k thẻ để xác suất có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4 lớn hơn $\frac{13}{15}$. Giá trị của k bằng

A. 9.

B. 8.

C. 7.

D. 6.

Câu 27: Việt và Nam chơi cờ. Trong một ván cờ, xác suất Việt thắng Nam là 0,3 và Nam thắng Việt là 0,4. Hai bạn dừng chơi khi có người thắng, người thua. Tính xác suất để hai bạn dừng chơi sau hai ván cờ.

A. 0,12.

B. 0,7.

C. 0,9.

D. 0,21.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Biết $SA = \sqrt{3}a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (SBC) . Tính khoảng cách d từ H đến mặt phẳng (SCD) .

A. $d = \frac{3\sqrt{15}a}{60}$.

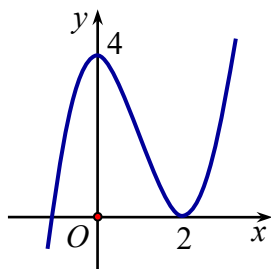
B. $d = \frac{3\sqrt{30}a}{40}$.

C. $d = \frac{3\sqrt{10}a}{20}$.

D. $d = \frac{3\sqrt{50}a}{80}$.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Đặt $g(x) = f(\sqrt{x^2 + x + 2})$.

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau



A. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

B. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

C. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

D. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Câu 30: Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

A. $4x^3 + 2x + C$.

B. $x^4 + x^2 + C$.

C. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$.

D. $x^5 + x^3 + C$.

Câu 31: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = 4$ và $\int_0^1 f(3x)dx = 6$. Tích phân

$$\int_1^3 f(x)dx \text{ bằng}$$

A. 10.

B. 2.

C. 12.

D. 14.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = 3$ và $f(1) = 4$.

Tích phân $\int_0^1 xf'(x)dx$ có giá trị là

A. $-\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. -1.

Câu 33: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{2x-2}$ có đồ thị (C) . Gọi $M(x_0; y_0)$ (với $x_0 > 1$) là điểm thuộc (C) , biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A và B sao cho $S_{\Delta OIB} = 8S_{\Delta OIA}$ (trong đó O là gốc tọa độ, I là giao điểm hai tiệm cận). Tính giá trị của $S = x_0 + 4y_0$.

A. $S = 8$.

B. $S = \frac{17}{4}$.

C. $S = \frac{23}{4}$.

D. $S = 2$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(2x+1)]^2 + [f(1-x)]^3 = x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

A. $y = \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$.

B. $y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$.

C. $y = \frac{1}{7}x - \frac{5}{7}$.

D. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$.

Câu 35: Ngày mùng 3 / 03 / 2015 anh A vay ngân hàng 50 triệu đồng với lãi suất kép là 0,6% / tháng theo thể thức như sau: đúng ngày mùng 3 hàng tháng kể từ một tháng sau khi vay, ngân hàng sẽ tính số tiền nợ của anh bằng số tiền nợ tháng trước cộng với tiền lãi của số tiền nợ đó. Sau khi vay anh A trả nợ như sau: đúng ngày mùng 3 hàng tháng kể từ một tháng sau khi vay anh A đều đến trả ngân hàng 3 triệu đồng. Tính số tháng mà anh A trả được hết nợ ngân hàng, kể từ một tháng sau khi vay. Biết rằng lãi suất không đổi trong suốt quá trình vay.

A. 15 tháng.

B. 19 tháng.

C. 16 tháng.

D. 18 tháng.

Câu 36: Cho $f(x) = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \dots f(2017) = e^{\frac{m}{n}}$ với m, n là các số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $m - n^2$.

- A. $m - n^2 = -1$. B. $m - n^2 = 1$. C. $m - n^2 = 2018$. D. $m - n^2 = -2018$.

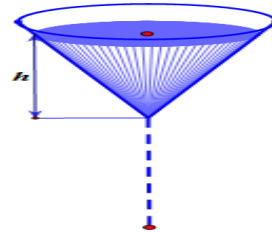
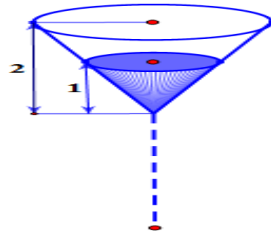
Câu 37: Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 1 và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên cạnh SC lấy điểm E sao cho $SE = 2EC$. Tính thể tích V của khối tứ diện $SEBD$.

- A. $V = \frac{1}{3}$. B. $V = \frac{1}{6}$. C. $V = \frac{1}{12}$. D. $V = \frac{2}{3}$.

Câu 38: Xét tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AB = BC = CD = DA = 1$ và AC, BD thay đổi. Giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{27}$. B. $\frac{4\sqrt{3}}{27}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. D. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

Câu 39: Hai chiếc ly đựng chất lỏng giống hệt nhau, mỗi chiếc có phần chứa chất lỏng là một khối nón có chiều cao 2 dm (mô tả như hình vẽ). Ban đầu chiếc ly thứ nhất chứa đầy chất lỏng, chiếc ly thứ hai để rỗng. Người ta chuyển chất lỏng từ ly thứ nhất sang ly thứ hai sao cho độ cao của cột chất lỏng trong ly thứ nhất còn 1 dm. Tính chiều cao h của cột chất lỏng trong ly thứ hai sau khi chuyển (độ cao của cột chất lỏng tính từ đỉnh của khối nón đến mặt chất lỏng - lượng chất lỏng coi như không hao hụt khi chuyển. Tính gần đúng h với sai số không quá 0,01 dm).

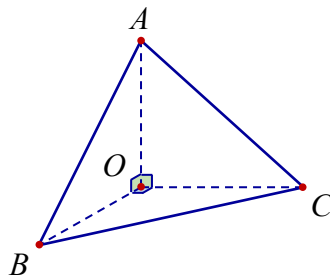


- A. $h \approx 1,73$ dm. B. $h \approx 1,89$ dm. C. $h \approx 1,91$ dm. D. $h \approx 1,41$ dm.

Câu 40: Xét một bảng ô vuông gồm 4×4 ô vuông. Người ta điền vào mỗi ô vuông đó một trong hai số 1 hoặc -1 sao cho tổng các số trong mỗi hàng và tổng các số trong mỗi cột đều bằng 0. Hỏi có bao nhiêu cách?

- A. 72. B. 90. C. 80. D. 144.

Câu 41: Xét tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng OA, OB, OC với mặt phẳng (ABC) (hình vẽ).



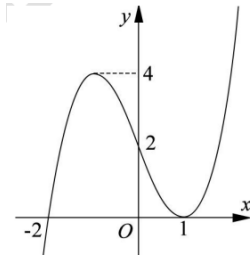
Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = (3 + \cot^2 \alpha) \cdot (3 + \cot^2 \beta) \cdot (3 + \cot^2 \gamma)$ là

- A. Số khác. B. $48\sqrt{3}$. C. 48. D. 125.

Câu 42: Tìm số giá trị nguyên không âm của m để hàm số $y = \frac{m - \sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Khi đó số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f^2(x) - 2f(x) - 8|$ là:

A. 7

B. 8

C. 10

D. 11

Câu 44: Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$) cắt trục hoành Ox tại 4 điểm phân biệt. Khi đó đồ thị hàm số

$y = g(x) = (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d)^2 - 2(6ax^2 + 3bx + c) \cdot (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$ cắt trục hoành Ox tại bao nhiêu điểm?

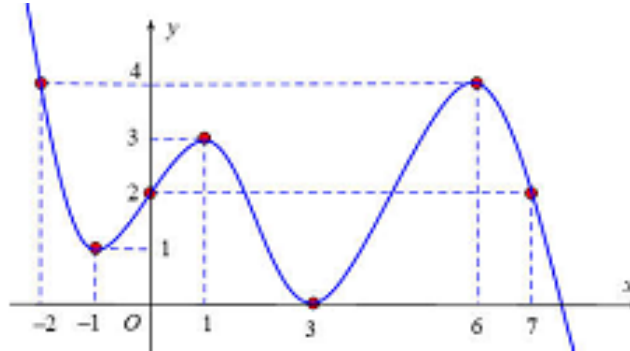
A. 6.

B. 0.

C. 4.

D. 2.

Câu 45. Cho hàm số đa thức bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Tìm số nghiệm của phương trình $f(xf(x)) = \sqrt{9 - x^2 f^2(x)}$?

A. 13

B. 14

C. 15

D. 8

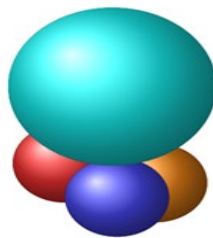
Câu 46: Ba quả bóng dạng hình cầu có bán kính bằng 1 đôi một tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với mặt phẳng (P) . Mặt cầu (S) bán kính bằng 2 tiếp xúc với ba quả bóng trên. Gọi M là điểm bất kỳ trên (S) , MH là khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) . Giá trị lớn nhất của MH là

A. $3 + \frac{\sqrt{123}}{4}$.

B. $\frac{52}{9}$.

C. $3 + \frac{\sqrt{30}}{2}$.

D. $3 + \frac{\sqrt{69}}{3}$.



Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $xf(x^3) + f(x^2 - 1) = e^{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó $\int_{-1}^0 f(x) dx$ bằng:

A. 0.

B. $3(e-1)$.

C. $3(1-e)$.

D. $3e$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M , N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB , AD sao cho mặt

phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC). Tính tổng $T = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2}$ khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất.

- A. $T = 2$. B. $T = \frac{5}{4}$. C. $T = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$. D. $T = \frac{13}{9}$.

Câu 49: Cho cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $b_2 > b_1 \geq 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(\log_2(b_2)) + 2 = f(\log_2(b_1))$. Giá trị nhỏ nhất của n để $b_n > 5^{100}$ bằng

- A. 234. B. 229. C. 333. D. 292.

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Tính bán kính R của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN$.

- A. $R = \frac{a\sqrt{29}}{8}$. B. $R = \frac{a\sqrt{93}}{12}$. C. $R = \frac{a\sqrt{37}}{6}$. D. $R = \frac{5a\sqrt{3}}{12}$

HẾT

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		-2		2	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -2 và giá trị cực đại bằng 2 .
- B. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -2 .
- C. Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.
- D. Hàm số có đúng một cực trị.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có giá trị cực tiểu bằng -2 và giá trị cực đại bằng 2 .

Câu 6: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ trên đoạn $[0; 2]$.

- A. $M = 1$.
- B. $M = 0$.
- C. $M = 10$.
- D. $M = 9$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Với $x \in (0; 2)$ ta chỉ chọn được nghiệm $x = 1$.

$$f(0) = 1; f(1) = 0; f(2) = 9 \Rightarrow M = \max_{[0; 2]} f(x) = 9.$$

Câu 7: Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới đây.

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'		$-$	$-$	$+$	$-$
y	-1	2	-4	3	0

Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là:

- A. 2.
- B. 3.
- C. 1.
- D. 4.

Lời giải

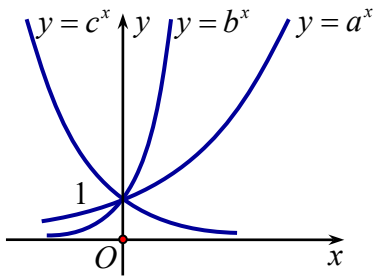
Chọn B

Qua bảng biến thiên ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang: $y = -1$ và $y = 0$.

Lại có $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x = -2$.

Vậy số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là 3.

Câu 8: Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Đồ thị hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ được cho trong hình bên.



Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. $1 < c < a < b$. B. $c < a < b < 1$. C. $c < 1 < b < a$. D. $c < 1 < a < b$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y = c^x$ đi xuống lên hàm số $y = c^x$ nghịch biến, suy ra $0 < c < 1$.

Đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = b^x$ đi lên do đó hàm số $y = a^x$ và $y = b^x$ đồng biến, suy ra $a > 1$ và $b > 1$.

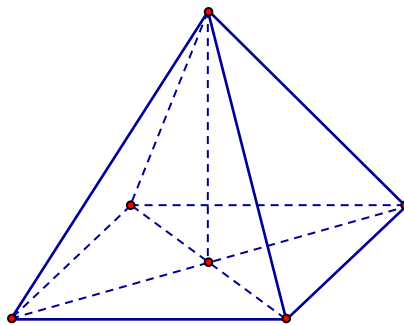
Với $x = 1$ ta thấy $b > a$. Suy ra $c < 1 < a < b$. Do đó đáp án đúng là D.

Câu 9: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$ cạnh bên bằng $3a$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho?

- A. $V = 4\sqrt{7}a^3$. B. $V = \frac{4\sqrt{7}a^3}{9}$. C. $V = \frac{4a^3}{3}$. D. $V = \frac{4\sqrt{7}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Trong mặt phẳng $ABCD$, gọi $O = AC \cap BD$, do hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Đáy là hình vuông vạnh $2a \Rightarrow AO = \frac{AC}{2} = a\sqrt{2}$

Trong tam giác vuông SAO có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a\sqrt{7}$

Thể tích V của khối chóp trên là $V = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}a\sqrt{7}4a^2 = \frac{4a^3\sqrt{7}}{3}$.

Câu 10: Giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ là

- A. $m = -\frac{1}{2}$; $M = 1$. B. $m = 1$; $M = 2$. C. $m = -2$; $M = 1$. D. $m = -1$; $M = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2} \Leftrightarrow (y-1)\sin x + (y-2)\cos x = 1-2y$ (*)

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow (y-1)^2 + (y-2)^2 \geq (1-2y)^2 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1$.

Vậy $m = -2$; $M = 1$.

Câu 11: C

Câu 12: Cho khai triển $(1-4x)^{18} = a_0 + a_1x + \dots + a_{18}x^{18}$. Giá trị của a_3 bằng

A. -52224.

B. 2448.

C. 52224.

D. -2448.

Lời giải**Chọn A**

Ta có $(1-4x)^{18} = \sum_{k=0}^{18} C_{18}^k (1)^{18-k} \cdot (-4x)^k = \sum_{k=0}^{18} C_{18}^k (-4)^k \cdot x^k$. Mà a_3 là hệ số của x^3 nên $a_3 = C_{18}^3 (-4)^3 = -52224$.

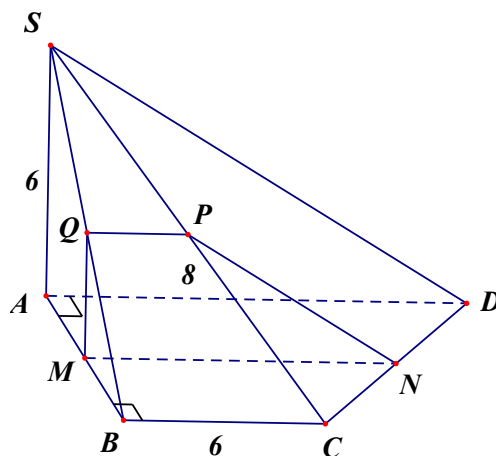
Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A , đáy lớn $AD = 8$, đáy nhỏ $BC = 6$, SA vuông góc với đáy, $SA = 6$. Gọi M là trung điểm AB , (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) có diện tích bằng:

A. 20.

B. 16.

C. 30.

D. 15.

Lời giải**Chọn D**

Gọi N , P và Q lần lượt là trung điểm của CD , SC và SB .

Ta có: $(P) \cap (SAB) = MQ$, $(P) \cap (ABCD) = MN$, $(P) \cap (SCD) = NP$.

Do đó, thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là tứ giác $MNPQ$.

Để thấy $MNPQ$ là hình thang vuông tại M , Q và $MQ = PQ = 3$, $MN = 7$.

Vậy diện tích hình thang $MNPQ$ là: $S_{MNPQ} = \frac{MQ \cdot (MN + PQ)}{2} = \frac{3 \cdot (7 + 3)}{2} = 15$.

Câu 14: Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (8-2m)x + m + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 2$.B. $m = -2$.C. $m = 4$.D. $m = -4$.**Lời giải****Chọn A**TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + (8-2m)$. Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

(Dấu "=" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm trên $\mathbb{R}$)

ĐK: $\Delta \leq 0 \Rightarrow m^2 + 2m - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là $m = 2$.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^3 + x^2 + (m^2 - 6)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

A. $m = 1$.B. $m = -4$.C. $m = -2$.D. $m = 2$.**Lời giải****Chọn A**

Ta có: $y' = 3mx^2 + 2x + m^2 - 6$ và $y'' = 6mx + 2$

Để hàm số $y = mx^3 + x^2 + (m^2 - 6)x + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ thì:

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m - 4 = 0 \\ 6m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -4 \\ m > -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Thử lại: với $m = 1$ ta có: $y = x^3 + x^2 - 5x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2x - 5, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}.$

Vì $a = 1 > 0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = -\frac{5}{3}$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$. Vậy $m = 1$ thỏa mãn.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn: $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $2 < m \leq 4$. B. $0 < m \leq 2$. C. $m \leq 0$. D. $m > 4$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}.$$

TH1: $m = 1 \Rightarrow y = 1$ là hàm hằng (Không thỏa mãn).

TH2: $m \neq 1 \Rightarrow$ Hàm số đơn điệu trên từng khoảng xác định $(-\infty; -1), (-1; +\infty)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \min_{[1;2]} y = y(1) \\ \max_{[1;2]} y = y(2) \end{cases} \Rightarrow \min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = y(1) + y(2) = \frac{2+m}{3} + \frac{1+m}{2}.$$

Theo giả thiết:

$$\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \frac{2+m}{3} + \frac{1+m}{2} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow 4 + 2m + 3 + 3m = 32 \Leftrightarrow 5m = 25 \Rightarrow m = 5 \text{ (Thỏa mãn)}.$$

Câu 17: Đồ thị của hàm số $y = \frac{mx^3 - 2}{x^2 - 3x + 2}$ có hai tiệm cận đứng khi và chỉ khi

- A. $m \neq 2$ và $m \neq \frac{1}{4}$. B. $m \neq 0$ và $m \neq 2$. C. $m \neq 1$ và $m \neq 2$. D. $m \neq 0$.

Lời giải

Chọn A

Đkxđ: $x \neq 1; x \neq 2$

Để đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng thì $x = 1$ và $x = 2$ không phải là nghiệm của phương trình $g(x) = mx^3 - 2 = 0$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} g(1) \neq 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 \neq 0 \\ 8m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Câu 18: Gọi M, N là giao điểm của đường thẳng $(d): y = x + 1$ và đường cong $(C): y = \frac{2x+4}{x-1}$.

Hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN bằng

A. $-\frac{5}{2}$.

B. 2.

C. $\frac{5}{2}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) : $x+1=\frac{2x+4}{x-1}$, với $x \neq 1$.

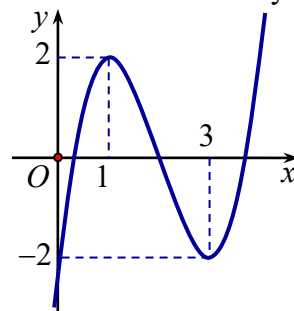
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = 0 \quad (*)$$

Vì $(*)$ có $ac < 0$ nên $(*)$ luôn có hai nghiệm trái dấu

$\Rightarrow (d)$ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N .

Khi đó hoành độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là $x_I = -\frac{b}{2a} = 1$.

Câu 19: Đồ thị ở hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



A. $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$.

B. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

C. $y = -x^3 + 6x^2 + 9x - 2$.

D. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra $a > 0$, $d = -2$, đồ thị hàm số đi qua các điểm $(1; 2)$ và $(3; -2)$ nên ta có

$$\begin{cases} 2 = a + b + c - 2 \\ -2 = 27a + 9b + 3c - 2 \\ 0 = 12a + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 9 \end{cases}$$

Vậy $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

Câu 20: Trong hệ thập phân, số 7^{100000} có bao nhiêu chữ số?

A. 84510.

B. 194591.

C. 194592.

D. 84509.

Lời giải

Chọn A

Ta có số chữ số cần tìm là: $\lceil \log 7^{100000} \rceil + 1 = \lceil 100000 \cdot \log 7 \rceil + 1 = 84510$ chữ số

Câu 21: Số mặt phẳng đối xứng của khối tứ diện đều là

A. 7.

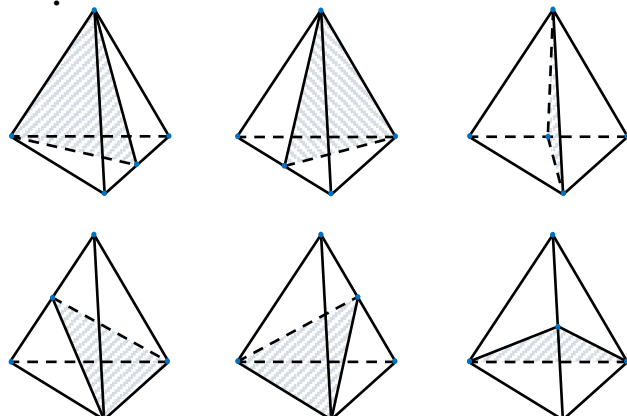
B. 8.

C. 9.

D. 6.

Lời giải

Chọn D



Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $AB = 2AC = 2a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tam giác SAD vuông cân tại S , hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ vuông góc nhau. Tính tỉ số $\frac{V}{a^3}$ biết V là thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{1}{4}$.

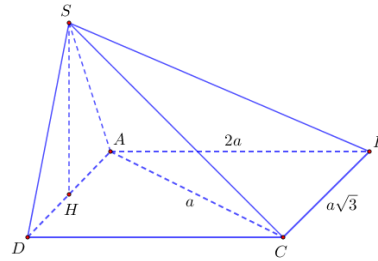
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. 2.

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm $AD \Rightarrow SH \perp AD$.

Ta có $(SAD) \perp (ABCD)$, $(SAD) \cap (ABCD) = AD$, $SH \perp AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có $AB^2 = AC^2 + CB^2 \Rightarrow \triangle ACB$ vuông tại $C \Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{ABC} = a^2\sqrt{3}$.

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{V}{a^3} = \frac{1}{2}.$$

Câu 23: Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh AB và cạnh CD nằm trên hai đáy của khối trụ. Biết $BD = a\sqrt{2}$, $\widehat{DAC} = 60^\circ$. Tính thể tích khối trụ.

A. $\frac{3\sqrt{6}}{16}\pi a^3$.

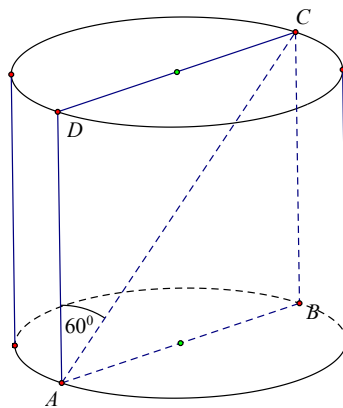
B. $\frac{3\sqrt{2}}{16}\pi a^3$.

C. $\frac{3\sqrt{2}}{32}\pi a^3$.

D. $\frac{3\sqrt{2}}{48}\pi a^3$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật nên tam giác ADC vuông tại D và $BD = AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông ADC có

$$\Leftrightarrow DC = AC \sin \widehat{DAC} \Leftrightarrow DC = a\sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ \Leftrightarrow DC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Suy ra bán kính mặt đáy của hình trụ là } r = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

$$\cos \widehat{DAC} = \frac{AD}{AC} \Leftrightarrow AD = AC \cos \widehat{DAC} \Leftrightarrow AD = a\sqrt{2} \cos 60^\circ \Leftrightarrow AD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Chiều cao của hình trụ là } h = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

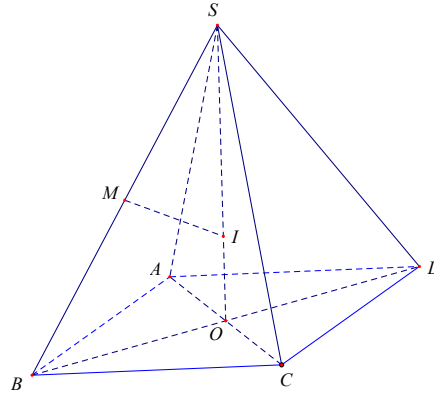
Thể tích khối trụ là $V = \pi \left(\frac{a\sqrt{6}}{4} \right)^2 \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên hợp với đáy một góc bằng 60° . Gọi (S) là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Tính thể tích V của khối cầu (S) .

A. $V = \frac{8\sqrt{6}\pi a^3}{27}$. B. $V = \frac{4\sqrt{6}\pi a^3}{9}$. C. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$. D. $V = \frac{8\sqrt{6}\pi a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$ hay SO là trục của đường tròn ngoại tiếp đáy.

Trong mặt phẳng (SBO) kẻ đường trung trực Δ của cạnh SB và gọi $I = \Delta \cap SO$ khi đó ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Theo giả thiết ta có $S.ABCD$ là hình chóp đều và góc giữa cạnh bên với mặt phẳng đáy bằng 60° nên $\widehat{SBO} = 60^\circ$.

Ta có $\triangle SMI \sim \triangle SOB$ nên $\frac{SM}{SO} = \frac{SI}{SB} \Leftrightarrow SI = \frac{SM \cdot SB}{SO}$.

Với $SO = OB \tan 60^\circ \Leftrightarrow SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$; $SB = OB \cos 60^\circ \Leftrightarrow SB = a\sqrt{2}$; $SM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $SI = \frac{SM \cdot SB}{SO} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{6}}{2} \right)^3 = \frac{8\sqrt{6}\pi a^3}{27}$.

Câu 25:

Câu 26: Một hộp đựng 10 thẻ được đánh số từ 1 đến 10. Phải rút ra ít nhất k thẻ để xác suất có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4 lớn hơn $\frac{13}{15}$. Giá trị của k bằng

A. 9. B. 8. C. 7. D. 6.

Lời giải

Chọn C

Gọi biến cố A : Lấy k tấm thẻ có ít nhất một tấm thẻ chia hết cho 4. Với $1 \leq k \leq 10$.

Suy ra $\bar{A}$: Lấy k tấm thẻ không có tấm thẻ nào chia hết cho 4.

Ta có: $P(\bar{A}) = \frac{C_8^k}{C_{10}^k} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{C_8^k}{C_{10}^k} = 1 - \frac{(10-k)(9-k)}{90}$.

Theo đề: $1 - \frac{(10-k)(9-k)}{90} > \frac{13}{15} \Leftrightarrow k^2 - 19k + 78 < 0 \Leftrightarrow 6 < k < 13$.

Vậy $k = 7$ là giá trị cần tìm.

Câu 27: Việt và Nam chơi cờ. Trong một ván cờ, xác suất Việt thắng Nam là 0,3 và Nam thắng Việt là

0,4. Hai bạn dừng chơi khi có người thắng, người thua. Tính xác suất để hai bạn dừng chơi sau hai ván cờ.

A. 0,12.

B. 0,7.

C. 0,9.

D. 0,21.

Lời giải

Chọn D

Ván 1: Xác suất Việt và Nam hòa là $1 - (0,3 + 0,4) = 0,3$.

Ván 2: Xác suất Việt thắng hoặc thắng là $0,3 + 0,4 = 0,7$.

Xác suất để hai bạn dừng chơi sau hai ván cờ là: $P = 0,3 \cdot 0,7 = 0,21$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Biết $SA = \sqrt{3}a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (SBC) . Tính khoảng cách d từ H đến mặt phẳng (SCD) .

A. $d = \frac{3\sqrt{15}a}{60}$.

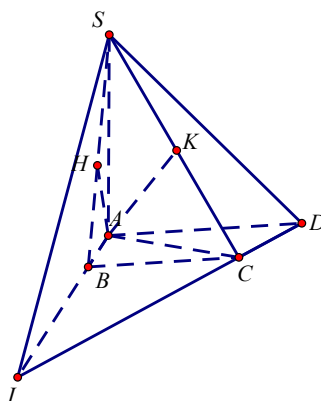
B. $d = \frac{3\sqrt{30}a}{40}$.

C. $d = \frac{3\sqrt{10}a}{20}$.

D. $d = \frac{3\sqrt{50}a}{80}$.

Lời giải

Chọn B



Cách 1: Kẻ $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SB$. Ta có $d = \frac{HS}{BS} d(B, (SCD)) = \frac{HS}{BS} \cdot \frac{BI}{AI} d(A, (SBC))$

$$\text{mà } \frac{SH}{SB} = \frac{SH \cdot SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{3a^2}{4a^2} = \frac{3}{4};$$

Tam giác ADI có BC là đường trung bình nên $\frac{BI}{AI} = \frac{1}{2}$

$$\text{Vậy } d = \frac{3}{8} d(A, (SCD)) = \frac{3}{8} d(A, SC) = \frac{3}{8} \frac{SA \cdot SC}{\sqrt{SA^2 + SC^2}} = \frac{3}{8} \frac{a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{3a^2 + 2a^2}} = \frac{3a\sqrt{30}}{40}$$

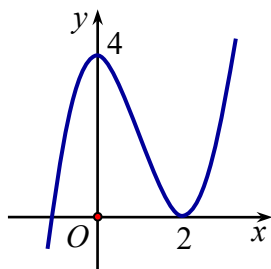
Cách 2: Dùng phương pháp thể tích:

$$d = \frac{3V_{H.SCD}}{dt(SCD)}; \frac{V_{S.HCD}}{V_{S.BCD}} = \frac{SH}{SB} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$V_{S.HCD} = \frac{3}{4} V_{S.BCD} = \frac{1}{8} SA \cdot AB \cdot BC = \frac{\sqrt{3}}{8} a^3; dt(SCD) = \frac{1}{2} SC \cdot CD = \frac{a^2 \sqrt{10}}{2} \Rightarrow d = \frac{3a\sqrt{30}}{40}.$$

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Đặt $g(x) = f(\sqrt{x^2 + x + 2})$.

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau



A. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

B. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

C. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

D. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, có đồ thị như hình vẽ.

Do đó $x = 0 \Rightarrow d = 4$; $x = 2 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 0$; $f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0$; $f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$.

Tìm được $a = 1$; $b = -3$; $c = 0$; $d = 4$ và hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

Ta có $g(x) = f(\sqrt{x^2 + x + 2}) = (\sqrt{x^2 + x + 2})^3 - 3(x^2 + x + 2) + 4$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{3}{2}(2x+1)\sqrt{x^2+x+2} - 3(2x+1) = 3(2x+1)\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+x+2} - 1\right); g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bảng xét dấu của $g(x)$:

x	$-\infty$	-2	$-1/2$	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		$\frac{7\sqrt{7}-10}{8}$		4		4	$+\infty$

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Câu 30:

Câu 31:

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 3$ và $f(1) = 4$.

Tích phân $\int_0^1 xf'(x) dx$ có giá trị là

A. $-\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 1.

D. -1.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\begin{aligned} \int_0^1 xf'(x) dx &= \int_0^1 x df(x) = xf(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) dx \\ &= f(1) - \int_0^1 f(x) dx = 4 - 3 = 1. \end{aligned}$$

Câu 33: Có hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-2}{x-1}$ (C) đi qua điểm $A(9;0)$. Tích hệ số góc của hai tiếp tuyến đó bằng

- A. $-\frac{3}{8}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{9}{64}$. D. $-\frac{9}{64}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{TXĐ } \mathbb{R} \setminus \{1\}. \quad y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Đường thẳng d đi qua điểm $A(9;0)$ với hệ số góc k có phương trình $y = k(x-9)$.

Đường thẳng d tiếp xúc với đồ thị (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \frac{3x-2}{x-1} = k(x-9) & (1) \\ \frac{-1}{(x-1)^2} = k & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1), ta có

$$\frac{3x-2}{x-1} = \frac{-1}{(x-1)^2} \cdot (x-9) \Leftrightarrow (3x-2)(x-1) = 9-x$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Do đó tích hệ số góc của hai tiếp tuyến đó bằng $y'(-1) \cdot y'\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{-1}{(-1-1)^2} \cdot \frac{-1}{\left(\frac{7}{3}-1\right)^2} = \frac{9}{64}$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(2x+1)]^2 + [f(1-x)]^3 = x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

- A. $y = \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. B. $y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. C. $y = \frac{1}{7}x - \frac{5}{7}$. D. $y = -\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Từ } [f(2x+1)]^2 + [f(1-x)]^3 = x \quad (*), \text{ cho } x=0 \text{ ta có } [f(1)]^2 + [f(1)]^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

Đạo hàm hai vế của (*) ta được $4.f(2x+1).f'(2x+1) - 3[f(1-x)]^2.f'(1-x) = 1$.

Cho $x=0$ ta được $4f(1).f'(1) - 3.[f(1)]^2.f'(1) = 1 \Leftrightarrow f(1).f'(1).[4-3f(1)] = 1 \quad (**)$.

Nếu $f(1)=0$ thì (**) vô lý, do đó $f(1)=-1$, khi đó (**) trở thành

$$-f'(1).[4+3] = 1 \Leftrightarrow f'(1) = -\frac{1}{7}$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến } y = -\frac{1}{7}(x-1) - 1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}.$$

Câu 35: Ngày mùng 3/03/2015 anh A vay ngân hàng 50 triệu đồng với lãi suất kép là 0,6%/tháng theo thể thức như sau: đúng ngày mùng 3 hàng tháng kể từ một tháng sau khi vay, ngân hàng sẽ tính số tiền nợ của anh bằng số tiền nợ tháng trước cộng với tiền lãi của số tiền nợ đó. Sau khi vay anh A trả nợ như sau: đúng ngày mùng 3 hàng tháng kể từ một tháng sau khi vay anh A đều đến trả ngân hàng 3 triệu

đồng. Tính số tháng mà anh A trả được hết nợ ngân hàng, kể từ một tháng sau khi vay. Biết rằng lãi suất không đổi trong suốt quá trình vay.

A. 15 tháng.

B. 19 tháng.

C. 16 tháng.

D. 18 tháng.

Lời giải

Chọn D

Gọi số tiền vay ban đầu là N , lãi suất là x , n là số tháng phải trả, A là số tiền trả vào hàng tháng để sau n tháng là hết nợ.

Ta có

Số tiền gốc cuối tháng 1: $N + Nx - A = N(x+1) - A$

Cuối tháng 2: $[N(x+1) - A] + [N(x+1) - A]x - A = N(x+1)^2 - A[(x+1) + 1]$

Cuối tháng 3: $[N(x+1)^2 - A[(x+1) + 1]](1+x) - A = N(x+1)^3 - A[(x+1)^2 + (x+1) + 1]$

.....

Cuối tháng n : $N(x+1)^n - A[(x+1)^{n-1} + (x+1)^{n-2} + \dots + (x+1) + 1] = 0$

Trả hết nợ thì sau n tháng, số tiền sẽ bằng 0.

$$\Leftrightarrow N(x+1)^n - A[(x+1)^{n-1} + (x+1)^{n-2} + \dots + (x+1) + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow N(x+1)^n = A[(x+1)^{n-1} + (x+1)^{n-2} + \dots + (x+1) + 1]$$

Đặt $y = x+1 = 1,006$ ta được:

$$N.y^n = A(y^{n-1} + y^{n-2} + \dots + y + 1) \Leftrightarrow N.y^n = A \cdot \frac{1(1-y^n)}{1-y} \Leftrightarrow N.x.y^n = A.(y^n - 1)$$

$$\Leftrightarrow 50 \cdot \frac{0,6}{100} \cdot y^n = 3.(y^n - 1) \Leftrightarrow y^n = \frac{10}{9} \Leftrightarrow n = \log_y \frac{10}{9} \Rightarrow n = 18.$$

Câu 36: Cho $f(x) = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f(1).f(2).f(3)...f(2017) = e^{\frac{m}{n}}$ với m, n là các số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $m - n^2$.

A. $m - n^2 = -1$.

B. $m - n^2 = 1$.

C. $m - n^2 = 2018$.

D. $m - n^2 = -2018$.

Lời giải

Chọn A

$$1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2(x+1)^2 + (x+1)^2 + x^2}{x^2(x+1)^2} = \frac{(x^2 + x + 1)^2}{x^2(x+1)^2}.$$

$$f(x) = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}} = e^{\frac{x(x+1)+1}{x(x+1)}}, \forall x > 0.$$

$$\text{Xét dãy số } (u_k): u_k = \frac{k(k+1)+1}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, (k \in \mathbb{N}^*).$$

$$\text{Ta có } u_1 = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2}, u_2 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, u_3 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \dots, u_{2017} = 1 + \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018}.$$

$$f(1).f(2).f(3)...f(2017) = e^{u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{2017}}.$$

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{2017} = 2017 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2018} = \frac{2018^2 - 1}{2018} = \frac{m}{n}.$$

Vậy $m - n^2 = -1$.

Câu 37: Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng 1 và đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên cạnh SC lấy điểm E sao cho $SE = 2EC$. Tính thể tích V của khối tứ diện $SEBD$.

A. $V = \frac{1}{3}$.

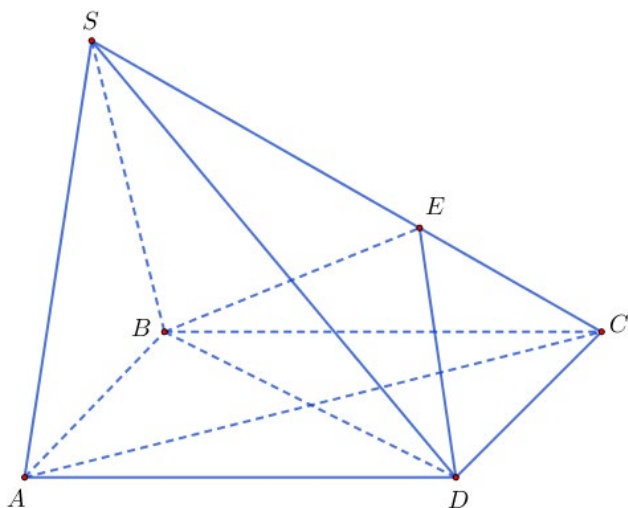
B. $V = \frac{1}{6}$.

C. $V = \frac{1}{12}$.

D. $V = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A



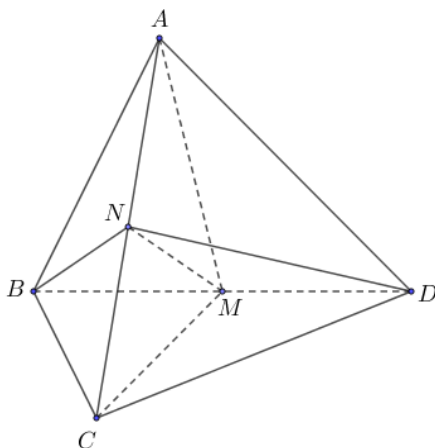
Ta có $\frac{V_{S.EBD}}{V_{S.CBD}} = \frac{SE.SB.SD}{SC.SB.SD} = \frac{SE}{SC} \Rightarrow V_{S.EBD} = \frac{2}{3}V_{S.CBD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}$.

Câu 38: Xét tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AB = BC = CD = DA = 1$ và AC, BD thay đổi. Giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{27}$. B. $\frac{4\sqrt{3}}{27}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. D. $\frac{4\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, AC . Đặt $BD = 2x, AC = 2y$ ($x, y > 0$).

Ta có $CM \perp BD, AM \perp BD \Rightarrow BD \perp (AMC)$.

Ta có $MA = MC = \sqrt{1-x^2}$, $MN = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $S_{AMN} = \frac{1}{2}MN.AC = \frac{1}{2}y.\sqrt{1-x^2-y^2}$.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}.BD.S_{AMC} = \frac{1}{3}.2x.y\sqrt{1-x^2-y^2} = \frac{2}{3}\sqrt{x^2.y^2.(1-x^2-y^2)} \leq \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(x^2+y^2+1-x^2-y^2)^3}{27}}$$

$$\Rightarrow V_{ABCD} \leq \frac{2\sqrt{3}}{27}.$$

Câu 39: Hai chiếc ly đựng chất lỏng giống hệt nhau, mỗi chiếc có phần chứa chất lỏng là một khối nón có chiều cao 2 dm (mô tả như hình vẽ). Ban đầu chiếc ly thứ nhất chứa đầy chất lỏng, chiếc ly thứ hai để rỗng. Người ta chuyển chất lỏng từ ly thứ nhất sang ly thứ hai sao cho độ cao của cột chất lỏng trong ly thứ nhất còn 1dm. Tính chiều cao h của cột chất lỏng trong ly thứ hai sau khi chuyển (độ cao của cột chất lỏng tính từ đỉnh của khối nón đến mặt chất lỏng - lượng chất lỏng coi như không hao hụt khi chuyển. Tính gần đúng h với sai số không quá 0,01dm).



A. $h \approx 1,73$ dm .

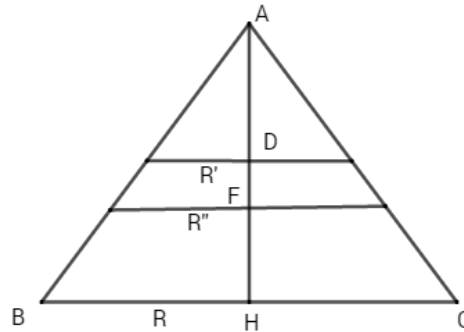
B. $h \approx 1,89$ dm .

C. $h \approx 1,91$ dm .

D. $h \approx 1,41$ dm .

Lời giải

Chọn C



Có chiều cao hình nón khi đựng đầy nước ở ly thứ nhất: $AH = 2$.

Chiều cao phần nước ở ly thứ nhất sau khi đổ sang ly thứ hai: $AD = 1$.

Chiều cao phần nước ở ly thứ hai sau khi đổ sang ly thứ hai: $AF = h$.

Theo Ta let ta có: $\frac{R'}{R} = \frac{AD}{AH} = \frac{1}{2}$, $\frac{R''}{R} = \frac{AF}{AH} = \frac{h}{2}$ suy ra $R' = \frac{R}{2}$, $R'' = \frac{Rh}{2}$.

Thể tích phần nước ban đầu ở ly thứ nhất: $V = 2\pi R^2$.

Thể tích phần nước ở ly thứ hai: $V_1 = \pi R'^2 h = \frac{\pi R^2 h^3}{4}$.

Thể tích phần nước còn lại ở ly thứ nhất: $V_2 = \frac{\pi R^2}{4}$.

Mà: $V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow \frac{\pi R^2 h^3}{4} + \frac{\pi R^2}{4} = 2\pi R^2 \Leftrightarrow \frac{h^3}{4} + \frac{1}{4} = 2 \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{7} \approx 1,91$.

Câu 40: Xét một bảng ô vuông gồm 4×4 ô vuông. Người ta điền vào mỗi ô vuông đó một trong hai số 1 hoặc -1 sao cho tổng các số trong mỗi hàng và tổng các số trong mỗi cột đều bằng 0. Hỏi có bao nhiêu cách?

A. 72.

B. 90.

C. 80.

D. 144.

Lời giải

Chọn B

Nhận xét 1: Trên mỗi hàng có 2 số 1 và 2 số -1 , mỗi cột có 2 số 1 và 2 số -1

Nhận xét 2: Để tổng các số trong mỗi hàng và trong mỗi cột bằng 0 đồng thời có không quá hai số bằng nhau và ba hàng đầu tiên đã được xếp số thì ta chỉ có một cách xếp hàng thứ tư.

Do vậy ta tìm số cách xếp ba hàng đầu tiên. Phương pháp giải bài này là xếp theo hàng. (Hình vẽ). Các hàng được đánh số như sau:

Hàng 1				
Hàng 2				
Hàng 3				
Hàng 4				

Nếu xếp tự do thì mỗi hàng đều có $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ cách điền số mà tổng các số bằng 0, đó là các cách xếp như

sau (Ta gọi là các bộ số từ (1) đến (6)):

11-1-1 (1), 1-1-11 (2), -1-111 (3), -11-11 (4), 1-11-1 (5), -111-1 (6)

Giả sử hàng 1 được xếp như bộ (1). Số cách xếp hàng 2 có các khả năng sau

KN1: Hàng 2 xếp giống hàng 1: Có 1 cách xếp (bộ (1)).

Hàng 3 có 1 cách (bộ (3)). Hàng 4 có 1 cách. Vậy có $1.1.1.1 = 1$ cách xếp.

KN2: Hàng 2 xếp đối xứng với hàng 1: Có 1 cách xếp (bộ (3))

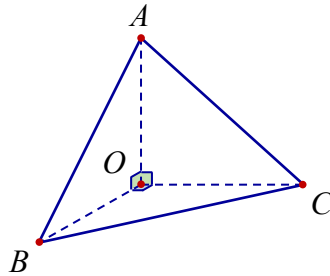
Hàng 3 có 6 cách (lấy thoải mái từ các bộ vì tổng hai hàng trên đã bằng 0). Hàng 4 có 1 cách. Vậy có $1.1.6.1 = 6$ cách xếp.

KN3: Hàng 2 xếp trùng với cách xếp hàng 1 ở 2 vị trí: Có 4 cách xếp (4 bộ còn lại)

Khi đó, với mỗi cách xếp hàng thứ 2, hàng 3 có 2 cách. Hàng 4 có 1 cách. Vậy có $1.1.6.1 = 6$ cách xếp.

Vì vai trò các bộ số như nhau nên số cách xếp thỏa mãn ycbt là $6.(1+6+6) = 90$ cách.

Câu 41: Xét tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng OA, OB, OC với mặt phẳng (ABC) (hình vẽ).



Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = (3 + \cot^2 \alpha) \cdot (3 + \cot^2 \beta) \cdot (3 + \cot^2 \gamma)$ là

A. Số khác.

B. $48\sqrt{3}$.

C. 48.

D. 125.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là trực tâm tam giác ABC , vì tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc nên ta có

$$OH \perp (ABC) \text{ và } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

$$\text{Ta có } \alpha = (\widehat{OA; (ABC)}) = \widehat{OAH}, \beta = (\widehat{OB; (ABC)}) = \widehat{OBH}, \gamma = (\widehat{OC; (ABC)}) = \widehat{OCH}.$$

$$\text{Nên } \sin \alpha = \frac{OH}{OA}, \sin \beta = \frac{OH}{OB}, \sin \gamma = \frac{OH}{OC}.$$

$$\text{Đặt } a = OA, b = OB, c = OC, h = OH \text{ thì } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \text{ và}$$

$$\begin{aligned} M &= (3 + \cot^2 \alpha) \cdot (3 + \cot^2 \beta) \cdot (3 + \cot^2 \gamma) = \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \beta}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \gamma}\right) \\ &= \left(2 + \frac{a^2}{h^2}\right) \cdot \left(2 + \frac{b^2}{h^2}\right) \cdot \left(2 + \frac{c^2}{h^2}\right) = 8 + 4(a^2 + b^2 + c^2) \cdot \frac{1}{h^2} + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \cdot \frac{1}{h^4} + a^2b^2c^2 \cdot \frac{1}{h^6}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } (a^2 + b^2 + c^2) \cdot \frac{1}{h^2} = (a^2 + b^2 + c^2) \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 3\sqrt[3]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2}} = 9.$$

$$(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \cdot \frac{1}{h^4} = (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)^2$$

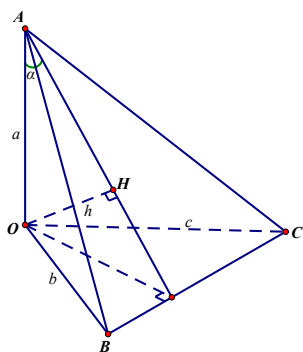
$$\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2 \cdot b^2c^2 \cdot c^2a^2} \cdot \left(3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2} \right)} \right)^2 = 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4} \cdot 9\sqrt[3]{\frac{1}{a^4b^4c^4}} = 27.$$

$$a^2b^2c^2 \cdot \frac{1}{h^6} = a^2b^2c^2 \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)^3 \geq a^2b^2c^2 \cdot \left(3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^2} \right)} \right)^3 = 27.$$

$$\text{Do đó: } M = 8 + 4(a^2 + b^2 + c^2) \cdot \frac{1}{h^2} + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \cdot \frac{1}{h^4} + a^2b^2c^2 \cdot \frac{1}{h^6} \\ \geq 8 + 4 \cdot 9 + 2 \cdot 27 + 27 = 125.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, hay $OA = OB = OC$.

Vậy $\min M = 125$.



Câu 42: Tìm số giá trị nguyên không âm của m để hàm số $y = \frac{m - \sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = \sin x$, vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ nên $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{m-t}{1-t^2}$ trên khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right)$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{-t^2 + 2mt - 1}{(1-t^2)^2}$$

Để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$, thì $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2mt + 1 \geq 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 + 1}{2t} \Leftrightarrow m \leq \min_{\left(0; \frac{1}{2}\right)} g(t)$$

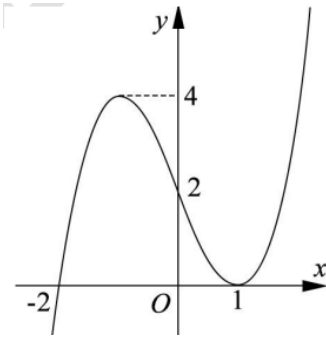
Xét hàm số $g(t) = \frac{t^2 + 1}{2t}$ trên khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right)$

$$\text{Ta có } g'(t) = \frac{t^2 - 1}{2t^2} < 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \min_{\left(0; \frac{1}{2}\right)} g(t) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}.$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{5}{4}.$$

Vì m nguyên, $m \geq 0 \Rightarrow m \in \{0, 1\} \Rightarrow$ có 2 giá trị của m

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Khi đó số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f^2(x) - 2f(x) - 8|$ là:

- A. 7 B. 8 C. 10 D. 11

Bài giải

Xét hàm số $h(x) = f^2(x) - 2f(x) - 8$

* Ta có: $h'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) - 2f'(x) = 2f'(x)(f(x) - 1)$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 1 \end{cases}$$

Từ đồ thị, ta có:

+ Phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

+ Phương trình $f(x) = 1$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Rightarrow$ Phương trình $h'(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ Hàm số $h(x)$ có 5 cực trị.

* Xét phương trình $h(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x) - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = -2 \\ f(x) = 4 \end{cases}$

Từ đồ thị, ta có:

+ Phương trình $f(x) = -2$ có 1 nghiệm

+ Phương trình $f(x) = 4$ có 2 nghiệm nhưng có 1 nghiệm kép (cực trị).

* Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y = |h(x)| = |f^2(x) - 2f(x) - 8|$ có $5 + 1 + 2 - 1 = 7$ cực trị

Câu 44: Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$) cắt trục hoành Ox tại 4 điểm phân biệt. Khi đó đồ thị hàm số

$y = g(x) = (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d)^2 - 2(6ax^2 + 3bx + c) \cdot (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$ cắt trục hoành Ox tại bao nhiêu điểm?

- A. 6. B. 0. C. 4. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g(x) = (f'(x))^2 - f''(x) \cdot f(x)$

Đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt bên phương trình

$f(x) = 0 \Leftrightarrow a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$, với $x_i, i = 1, 2, 3, 4$ là các nghiệm.

Suy ra

$$f'(x) = a[(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) + (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)$$

$$+ (x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) + (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)]$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \frac{1}{x-x_3} + \frac{1}{x-x_4} \Rightarrow \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = \left(\frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \frac{1}{x-x_3} + \frac{1}{x-x_4} \right)'$$

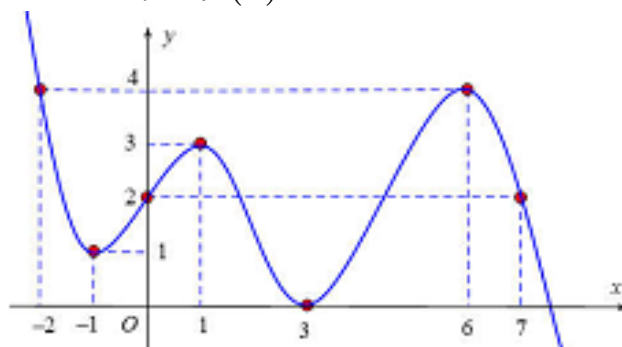
$$\Leftrightarrow \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} = - \left(\left(\frac{1}{x-x_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{x-x_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{x-x_3} \right)^2 + \left(\frac{1}{x-x_4} \right)^2 \right)$$

Nếu $x = x_i$ với $i = 1, 2, 3, 4$ thì $f(x) = 0$, $f'(x) \neq 0 \Rightarrow f''(x)f(x) < (f'(x))^2$.

Nếu $x \neq x_i (\forall i = 1, 2, 3, 4)$ thì $\frac{1}{(x-x_i)^2} > 0$, $f^2(x) > 0$. Suy ra $f''(x).f(x) - (f'(x))^2 < 0$

$\Leftrightarrow f''(x).f(x) < (f'(x))^2$. Vậy phương trình $(f'(x))^2 - f''(x).f(x) = 0$ vô nghiệm hay phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm. Do đó, số giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là 0.

Câu 45. Cho hàm số đa thức bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Tìm số nghiệm của phương trình $f(xf(x)) = \sqrt{9 - x^2 f^2(x)}$?

A. 13

B. 14

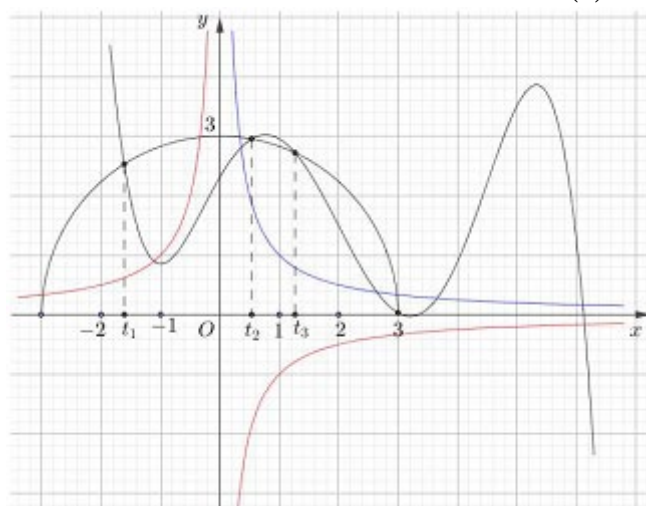
C. 15

D. 8

Lời giải

Đặt $t = xf(x)$, phương trình đã cho trở thành: $f(t) = \sqrt{9 - t^2}$ (*)

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f(t)$ và nửa đường tròn $y = \sqrt{9 - t^2}$



Từ đồ thị, ta có phương trình (*) có nghiệm

$$\begin{cases} t = t_1 \in (-2; -1) \\ t = t_2 \in (0; 1) \\ t = t_3 \in (1; 2) \\ t = 3 \end{cases}$$

Xét phương trình $xf(x) = t \Leftrightarrow f(x) = \frac{t}{x}$ (**) (vì $x = 0$ không là nghiệm ứng với $t \neq 0$)

+ Khi $t = t_1 < 0$ thì số nghiệm của phương trình (**) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$

và đồ thị hàm số $y = \frac{t}{x}$. Từ đồ thị trên $\Rightarrow$ phương trình (**) có 2 nghiệm phân biệt.

+ Khi $t = t_1, t = t_2, t = 3$. Từ đồ thị trên $\Rightarrow$ phương trình (**) có 4 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 14 nghiệm phân biệt.

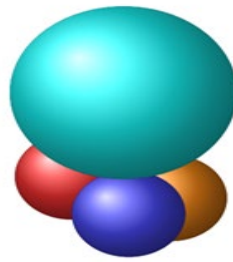
Câu 46: Ba quả bóng dạng hình cầu có bán kính bằng 1 đôi một tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với mặt phẳng (P) . Mặt cầu (S) bán kính bằng 2 tiếp xúc với ba quả bóng trên. Gọi M là điểm bất kỳ trên (S) , MH là khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) . Giá trị lớn nhất của MH là

A. $3 + \frac{\sqrt{123}}{4}$.

B. $\frac{52}{9}$.

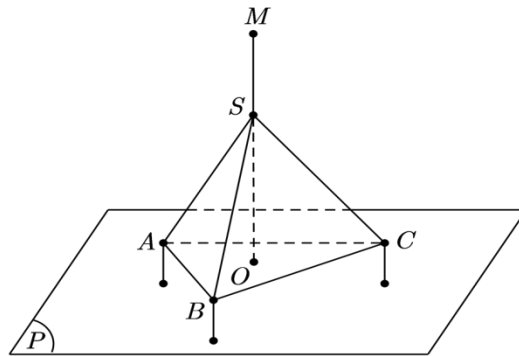
C. $3 + \frac{\sqrt{30}}{2}$.

D. $3 + \frac{\sqrt{69}}{3}$.



Hướng dẫn giải

Chọn D



Coi tâm quả ba quả cầu nhỏ là A, B, C và tâm của quả cầu lớn bên trên là S . Ta được chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy là 2 và cạnh bên là 3. Gọi O là chân đường cao của chóp $S.ABC$.

Suy ra MH lớn nhất khi M, S, O, H thẳng hàng. $MH_{\max} = 2 + SO + 1 = 3 + SO$.

Ta có: $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{69}}{3}$.

Suy ra: $MH_{\max} = 3 + SO = 3 + \frac{\sqrt{69}}{3}$.

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $xf(x^3) + f(x^2 - 1) = e^{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó $\int_{-1}^0 f(x) dx$ bằng:

A. 0.

B. $3(e-1)$.

C. $3(1-e)$.

D. $3e$.

Chọn B

Nhân hai vế của $xf(x^3) + f(x^2 - 1) = e^{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$ với x ta được:

$x^2 f(x^3) + xf(x^2 - 1) = xe^{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lấy tích phân từ -1 đến 0 hai vế ta được: $\int_{-1}^0 x^2 f(x^3) dx + \int_{-1}^0 xf(x^2-1) dx = \int_{-1}^0 xe^{x^2} dx$ (1)

Kí hiệu $I = \int_{-1}^0 x^2 f(x^3) dx$; $K = \int_{-1}^0 xf(x^2-1) dx$; $H = \int_{-1}^0 xe^{x^2} dx$

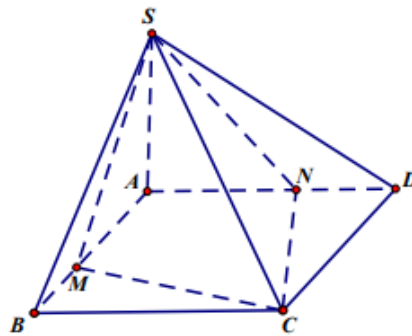
Đặt $u = x^3$ ta tính được $I = \int_{-1}^0 x^2 f(x^3) dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(u) du = \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(x) dx$

Đặt $u = x^2 - 1$ ta tính được $K = \int_{-1}^0 xf(x^2-1) dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 f(v) dv = -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 f(x) dx$

Và $H = \int_{-1}^0 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{2}(1-e)$

Nên (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{3} \int_{-1}^0 f(x) dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{1}{2}(1-e) \Leftrightarrow \int_{-1}^0 f(x) dx = 3(e-1)$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2 , $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$). Gọi M , N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB , AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC). Tính tổng $T = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2}$ khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất.



A. $T = 2$.

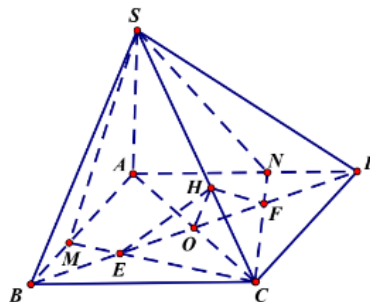
B. $T = \frac{5}{4}$.

C. $T = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

D. $T = \frac{13}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Cách 1: Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $D(0;2;0)$, $S(0;0;2)$.

Suy ra $C(2;2;0)$. Đặt $AM = x$, $AN = y$, $x, y \in [0;2]$, suy ra $M(x;0;0)$, $N(0;y;0)$.

$\overrightarrow{SM} = (x;0;-2)$, $\overrightarrow{SC} = (2;2;-2)$, $\overrightarrow{SN} = (0;y;-2)$.

$\Rightarrow \vec{n}_1 = [\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC}] = (4; 2x-4; 2x)$, $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{SN}, \overrightarrow{SC}] = (4-2y; -4; -2y)$.

Do $(SMC) \perp (SNC)$ nên $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 4(4-4y) - 4(2x-4) - 4xy = 0 \Leftrightarrow xy + 2(x+y) = 8$.

$$\Leftrightarrow y = \frac{8-2x}{x+2}, \text{ do } y \leq 2 \text{ nên } \frac{8-2x}{x+2} \leq 2 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

$$S_{AMCN} = S_{ABCD} - S_{BMC} - S_{DNC} = 4 - (2-x) - (2-y) = x+y.$$

$$\text{Do đó } V_{S.AMCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x+y) = \frac{2}{3} \left(x + \frac{8-2x}{x+2} \right) = \frac{2}{3} \frac{x^2+8}{x+2}.$$

$$\text{Xét } f(x) = \frac{2}{3} \frac{x^2+8}{x+2} \text{ với } x \in [1;2], f'(x) = \frac{2}{3} \frac{x^2+4x-8}{(x+2)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 + 2\sqrt{3}; x = -2 - 2\sqrt{3} \text{ (loại)}.$$

$$\text{Lập BBT ta suy ra } \max_{[0;2]} f(x) = f(1) = f(2) = 2.$$

$$\text{Vậy } \max V_{S.AMCD} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow T = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4}.$$

Cách 2: Đặt $AM = x$, $AN = y$. Gọi $O = AC \cap DB$; $E = BD \cap CM$; $F = BD \cap CN$.

$$H \text{ là hình chiếu vuông góc của } O \text{ trên } SC, \text{ khi đó: } HO = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SC \perp OH \\ SC \perp BD \end{cases} \Rightarrow SC \perp (HBD) \Rightarrow \begin{cases} SC \perp HE \\ SC \perp HF \end{cases}.$$

Do đó góc giữa (SCM) và (SCN) bằng góc giữa HE và HF . Suy ra $HE \perp HF$.

$$\text{Mặt khác } V_{S.AMCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x+y).$$

Tính OE , OF :

Ta có: $x > 0$, $y > 0$ và nếu $x \neq 2$, $y \neq 2$ thì gọi K là trung điểm của AM , khi đó:

$$\frac{OE}{EB} = \frac{KM}{MB} = \frac{x}{4-2x} \Rightarrow \frac{OE}{x} = \frac{EB}{4-2x} = \frac{OB}{4-x} \Rightarrow OE = \frac{x\sqrt{2}}{4-x}.$$

$$\text{Tương tự: } OF = \frac{y\sqrt{2}}{4-y}. \text{ Mà } OE \cdot OF = OH^2 \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 12.$$

$$\text{Nếu } x=2 \text{ hoặc } y=2 \text{ thì ta cũng có } OE \cdot OF = OH^2 \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 12.$$

$$\text{Tóm lại: } (x+2)(y+2) = 12.$$

$$\text{Suy ra: } V_{S.AMCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x+y) = \frac{2}{3}[(x+2) + (y+2) - 4] = \frac{2}{3} \left[(x+2) + \frac{12}{x+2} - 4 \right].$$

$$\text{Do đó } \max V_{S.AMCD} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ x=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow T = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4}.$$

Câu 49: Cho cấp số nhân (b_n) thỏa mãn $b_2 > b_1 \geq 1$ và hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ sao cho $f(\log_2(b_2)) + 2 = f(\log_2(b_1))$. Giá trị nhỏ nhất của n để $b_n > 5^{100}$ bằng

A. 234.

B. 229.

C. 333.

D. 292.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét hàm số } f(x) = x^3 - 3x.$$

$$\text{Có } f'(x) = 3x^2 - 3, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		2		0		$+\infty$
					-2		

Mặt khác, ta có $b_1 > b_2 \geq 1$.

Đặt $a = \log_2 b_2 > \log_2 b_1 = b \geq 0$.

Ta có: $a^3 - 3a + 2 = b^3 - 3b$ (1).

Nếu $b > 1 \Rightarrow a > b > 1 \Rightarrow a^3 - 3a > b^3 - 3b \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

Nếu $0 \leq b \leq 1 \Rightarrow -2 < b^3 - 3b \leq 0 \Rightarrow a^3 - 3a + 2 \leq 0 \Rightarrow (a-1)^2(a+2) \leq 0$.

Suy ra $a = 1 \Rightarrow b = 0$.

Khi đó $\begin{cases} b_1 = 2^0 = 1 \\ b_2 = 2^1 = 2 \end{cases} \Rightarrow b_n = 2^{n-1} > 5^{100} \Leftrightarrow n-1 > 100 \log_2 5 \Rightarrow n \geq 234$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của n là 234.

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Tính bán kính R của khối cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN$.

A. $R = \frac{a\sqrt{29}}{8}$.

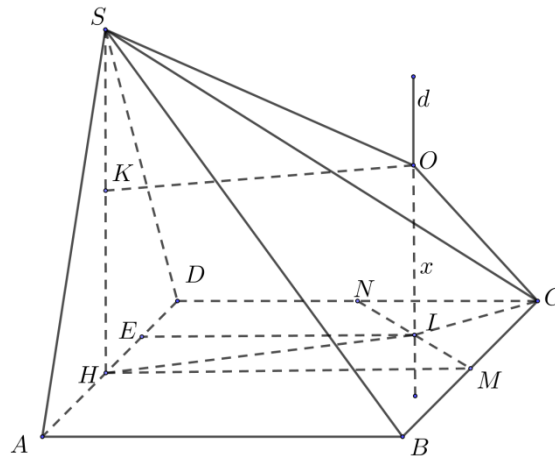
B. $R = \frac{a\sqrt{93}}{12}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{37}}{6}$.

D. $R = \frac{5a\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi:

- H là trung điểm của $AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.
- I là trung điểm của $MN \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN .
- d là đường thẳng qua I và vuông góc với mặt đáy.
- E là hình chiếu của I lên AD .
- O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN$.
- K là hình chiếu của O lên SH .

Đặt $OI = x$.

Ta có: $CI = \frac{1}{2}MN = \frac{a\sqrt{2}}{4}$; $OC = \sqrt{IC^2 + IO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{8} + x^2}$;

$$KO = HI = \sqrt{IE^2 + EH^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4};$$

$$SO = \sqrt{SK^2 + KO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \sqrt{3}ax + \frac{22a^2}{16}}.$$

Vì O là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.CMN$ nên $SO = OC$

$$\text{Suy ra: } \sqrt{\frac{a^2}{8} + x^2} = \sqrt{x^2 - \sqrt{3}ax + \frac{22a^2}{16}} \Leftrightarrow \sqrt{3}ax = \frac{5}{4}a^2 \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{3}a}{12}.$$

$$\text{Vậy: } R = OC = \sqrt{\frac{a^2}{8} + \frac{25a^2}{48}} = \frac{\sqrt{93}}{12}a.$$