

CHUYÊN ĐỀ : GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

CAO HOÀNG HẠ
GV TRƯỜNG THPT SỐ 2 AN NHƠN BÌNH ĐỊNH

Các em học sinh thân mến!

Trong kỳ thi học sinh giỏi môn Toán cấp tỉnh và cấp quốc gia, bài toán tìm giới hạn của dãy số và các bài toán liên quan đến dãy số thường xuyên xuất hiện và là một trong những bài toán cơ bản của đề thi. Việc tạo cho học sinh một cách nhìn tổng quát cho bài toán tìm giới hạn của dãy số là rất quan trọng, từ đó giúp các em có tư duy rộng hơn trong việc đánh giá tính chất của một dãy số, và lựa chọn phương pháp thích hợp nhất để tìm giới hạn của một dãy số. Dĩ nhiên mỗi phương pháp có ưu thế riêng cho việc giải quyết một lớp các dãy số cụ thể, cũng có những dãy số có thể giải bằng nhiều cách khác nhau. Ở đây, trong chuyên đề này, tác giả muốn đưa ra một số phương pháp cơ bản để nhận dạng và tìm giới hạn của dãy số, bên cạnh đó nhấn mạnh đến cách nhìn tổng quát, liệu có thể giải bài toán theo nhiều cách hay không? Và có thể tổng quát để tạo ra các dãy số mới tương tự như thế nào?

Chúc các em học tốt!
Bình Định, mùa xuân 2021

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

I. SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ WEIERSTRASS ĐỂ TÌM GIỚI HẠN DÃY SỐ	6
.....	
II. PHƯƠNG PHÁP SO SÁNH DÃY SỐ	14
.....	
III. PHƯƠNG PHÁP ƯỚC LƯỢNG ĐỂ TÌM GIỚI HẠN MỘT SỐ DÃY SỐ ĐẶC BIỆT	26
.....	
IV. ĐỊNH LÝ LAGRANGE VÀ DÃY SỐ SINH BỞI NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH	34
.....	
V. XÁC ĐỊNH CÔNG THỨC SỐ HẠNG TỔNG QUÁT TỪ HỆ THỨC TRUY HỒI VÀ TÌM GIỚI HẠN.....	43

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ.

Như trên đã nói, trong kỳ thi học sinh giỏi môn Toán cấp tỉnh và cấp quốc gia, bài toán tìm giới hạn của dãy số thường xuyên xuất hiện và là một trong những bài toán cơ bản của đề thi. Với mục đích của chuyên đề là có cách nhìn tổng quan về bài toán tìm giới hạn của dãy số, ta xét một vài ví dụ mở đầu sau đây.

BÀI TOÁN 1. (Trích đề thi VMO 2018) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 8} - \sqrt{u_n + 3}$, $n = 1, 2, \dots$. Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

+ Nhận xét: Dễ thấy $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 8} - \sqrt{u_n + 3} = \frac{5}{\sqrt{u_n + 8} + \sqrt{u_n + 3}} < \frac{5}{\sqrt{8} + \sqrt{3}} < \frac{3}{2}.$$

Cách giải 1: (Nhóm tác giả Trần Nam Dũng, Lê Phúc Lữ, Võ Quốc Bá Cẩn,...)

+ Nếu $\lim u_n = a$ thì a là nghiệm của phương trình $a = \sqrt{a+8} - \sqrt{a+3}$, $a \in \left[0, \frac{3}{2}\right)$. Giải

phương trình ta tìm được nghiệm thỏa mãn $a = 1$.

+ Ta chứng minh $\lim u_n = 1$. Thật vậy, với mọi số nguyên dương n ta có

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - 1| &= \left| \sqrt{u_n + 8} - 3 + 2 - \sqrt{u_n + 3} \right| \\ &= \left| (u_n - 1) \left(\frac{1}{\sqrt{u_n + 8} + 3} - \frac{1}{\sqrt{u_n + 3} + 2} \right) \right| \\ &\leq |u_n - 1| \left| \frac{1}{\sqrt{u_n + 8} + 3} + \frac{1}{\sqrt{u_n + 3} + 2} \right| \\ &\leq |u_n - 1| \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{6} |u_n - 1| \end{aligned}$$

Do đó $|u_n - 1| \leq \frac{5}{6} |u_{n-1} - 1| \leq \dots \leq \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} |u_1 - 1| = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vì $\lim \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = 0$ nên

$\lim u_n = 1$. ■

Cách giải 2: (Cách giải của tác giả)

+ Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x+8} - \sqrt{x+3}$, $\forall x \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$. Khi đó $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+8}} - \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$. Suy ra $|f'(x)| < \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}+8}} < \frac{1}{5}$, $\forall x \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$. Theo định lý

Lagrange, ta suy ra tồn tại $c \in (1, u_n)$ hoặc $c \in (1, u_n)$ sao cho

$$|u_{n+1}-1|=|f(u_n)-f(1)|=|f'(c)||u_n-1|<\frac{1}{5}|u_n-1|<\dots<\left(\frac{1}{5}\right)^n|u_1-1|$$

Vì $\lim\left(\frac{1}{5}\right)^n=0$ nên $\lim u_n=1$. ■

Cách giải 3: (Cách giải khác của tác giả)

+ Từ cách giải 2, ta nhận thấy $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+8}}-\frac{1}{2\sqrt{x+3}}<0, \forall x\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

Khi đó, $f(x)$ là hàm nghịch biến trên $\left(0,\frac{3}{2}\right)$, lại có $u_3<u_1$ nên dãy (u_{2n}) là dãy số tăng và bị chặn trên, dãy (u_{2n+1}) là dãy số giảm và bị chặn dưới, khi đó hai dãy con (u_{2n}) và (u_{2n+1}) tồn tại giới hạn hữu hạn. Gọi $\lim u_{2n}=a, \lim u_{2n+1}=b; a, b\in\left[0,\frac{3}{2}\right)$.

Ta có a, b là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} a=f(b) \\ b=f(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\sqrt{b+8}-\sqrt{b+3} \\ b=\sqrt{a+8}-\sqrt{a+3} \end{cases}$$

Hệ trên có nghiệm duy nhất $a=b=1$. Vậy $\lim u_n=1$. ■

+ Nhận xét: Cách giải 1 và cách giải 2 thật ra cùng bản chất là đánh giá qua một dãy số có giới hạn bằng 0, tuy nhiên cách giải 2 sử dụng tính chất giải tích sẽ giúp học sinh rõ ràng vấn đề hơn, không bị gượng ép.

BÀI TOÁN 2. (Trích đề thi VMO 2007) Cho số thực $a>2$ và $f_n(x)=a^{10}x^{n+10}+x^n+\dots+x+1$. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n , phương trình $f_n(x)=a$ luôn có một nghiệm dương duy nhất. Gọi nghiệm đó là x_n , chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\rightarrow+\infty$.

Cách giải 1: (Tham khảo tài liệu của tác giả Nguyễn Tài Chung)

+ Vì $f_n(x)$ là hàm tăng và liên tục trên $(0;+\infty)$ nên hiển nhiên phương trình $f_n(x)=a$ luôn có một nghiệm dương duy nhất.

+ Dễ thấy $0<x_n<1$. Ta chứng minh dãy (x_n) tăng, tức là $x_{n+1}>x_n$. Tương tự như trên, xét

$f_{n+1}(x_n)=a^{10}x_n^{n+11}+x_n^{n+1}+x_n^n+\dots+x_n+1=x_nf_n(x_n)+1=ax_n+1$ vì $f_{n+1}(1)=a^{10}+n+1>a$ nên chỉ cần chứng minh $ax_n+1<a$ sẽ suy ra $x_n<x_{n+1}<1$. Hay cần chứng minh $x_n<\frac{a-1}{a}$. Thật vậy, nếu $x_n\geq\frac{a-1}{a}$ thì

$$f_n(x_n) \geq a^{10} \left(\frac{a-1}{a} \right)^{n+10} + \frac{1 - \left(\frac{a-1}{a} \right)^{n+1}}{1 - \frac{a-1}{a}} = (a-1)^{10} \left(\frac{a-1}{a} \right)^n + a - (a-1) \left(\frac{a-1}{a} \right)^n > a \quad (\text{do}$$

$$a-1 > 1)$$

+ Vậy dãy (x_n) tăng và bị chặn trên bởi 1 nên hội tụ. Hơn nữa ta còn có $\lim x_n = \frac{a-1}{a}$. Thật vậy, đặt

$$c = \frac{a-1}{a} < 1 \text{ thì } f_n(c) - f_n(x_n) = k \cdot c^n \quad (\text{với } k = (a-1)((a-1)^9 - 1) > 0). \text{ Theo định lý}$$

Lagrange thì

$$f_n(c) - f_n(x_n) = f'(\xi)(c - x_n) \quad \text{với} \quad \xi \in (x_n; c).$$

Nhưng $f'(\xi) = (n+10)a^{10}\xi^{n+9} + n\xi^{n-1} + \dots + 1 > 1$ nên

$$kc^n > c - x_n. \text{ Từ đó } c - kc^n < x_n < c \text{ suy ra } \lim x_n = c. \blacksquare$$

Cách giải 2:

+ Trước hết giới hạn của dãy số phải thuộc khoảng $(0,1)$, giả sử giới hạn của dãy số là b ta có: $f_n(b) = b^n \left(a^{10}b^{10} + \frac{1}{b-1} + 1 \right) - \frac{1}{b-1} \Rightarrow \lim f_n(b) = -\frac{1}{b-1}$ (vì $b \in (0,1)$).

$$\text{Mà } f_n(x_n) = a \Rightarrow -\frac{1}{b-1} = a \Rightarrow b = \frac{a-1}{a}.$$

$$+ \text{ Ta có } f_n(x_n) = a^{10}x_n^{n+10} + x_n^n + \dots + x_n + 1 = a^{10}x_n^{n+10} + \frac{1-x_n^{n+1}}{1-x_n} = \frac{x_n^{n+10} [a^{10} - (a^{10}+1)x_n] + 1}{1-x_n} = a(*).$$

$$\text{Khi đó chuyển } (*) \text{ qua giới hạn ta được } \frac{1}{1-b} = a \Rightarrow b = \frac{a-1}{a}. \blacksquare$$

+ Nhận xét: Khác hẳn với bài toán 1, việc sử dụng hàm số ở cách giải 1 lại không làm cho bài giải đơn giản và dễ hiểu hơn.

Như vậy, việc đánh giá một dãy số để từ đó định hướng được cách tìm giới hạn như thế nào cho hợp lý và hiệu quả nhất là một vấn đề rất cần thiết cho cả người dạy và người học, đặc biệt là đối với một vấn đề còn khó so với mặt bằng chung của các trường không chuyên.

I. Sử dụng Định lý Weierstrass để tìm giới hạn dãy số

1. Cơ sở lý thuyết

+ Định lý: Nếu dãy số (u_n) tăng và bị chặn trên thì (u_n) có giới hạn hữu hạn. Nếu dãy số (u_n) giảm và bị chặn dưới thì (u_n) có giới hạn hữu hạn.

+ Phương pháp: Xét dãy số $u_{n+1} = f(u_n)$, với $f(x)$ là một hàm liên tục.

- Tính vài số hạng đầu để dự đoán tính tăng, giảm của dãy số (u_n)
- Giải phương trình $a = f(a)$, nếu dãy số (u_n) giảm thì chứng minh $u_n \geq a, \forall n = 1, 2, \dots$, nếu dãy số (u_n) tăng thì chứng minh $u_n \leq a, \forall n = 1, 2, \dots$
- Chứng minh tính tăng, giảm của dãy số (u_n) , có thể chứng minh trực tiếp, dùng đạo hàm hoặc bằng phương pháp quy nạp (dùng tính bị chặn của dãy).
- Sử dụng Định lý Weierstrass để chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn, giả sử $\lim u_n = a$. Từ $u_{n+1} = f(u_n)$ ta cho $n \rightarrow +\infty$ và sử dụng tính liên tục của hàm $f(x)$ ta được $a = f(a)$. Sử dụng tính chất bị chặn của dãy để suy ra giới hạn của dãy số.

2. Các ví dụ điển hình

Ví dụ 1. (Trích đề thi HSG Bình Định năm 2009) Cho dãy số $(u_n)(n = 1, 2, \dots)$ thỏa mãn $0 < u_n < 1$ và $u_{n+1}(1 - u_n) > \frac{1}{4}$ với mọi $n = 1, 2, \dots$. Tìm $\lim u_n$.

Lời giải

Vì $0 < u_n < 1, n = 1, 2, \dots$ nên dãy đã cho bị chặn. Mặt khác $u_{n+1}(1 - u_n) > \frac{1}{4} \geq u_n(1 - u_n)$ và $0 < u_n < 1$ nên $u_{n+1} > u_n$. Dãy số đã cho tăng và bị chặn nên theo định lý Weierstrass nó có giới hạn $\lim u_n = a$.

Ta có $\frac{1}{4} \leq u_{n+1}(1 - u_n)$ nên $\frac{1}{4} \leq a(1 - a) \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$. Vậy $\lim u_n = \frac{1}{2}$. ■

+ **Nhận xét**: Ý tưởng cơ bản của bài toán trên là dùng bất đẳng thức Cauchy để đánh giá tính tăng giảm của dãy số. Từ đó ta có thể phát triển thành một số bài toán tổng quát sau:

1) Cho số thực $a > 0$, xét dãy số $(u_n)(n = 1, 2, \dots)$ thỏa mãn $0 < u_n < a$ và $u_{n+1}(a - u_n) > \frac{a^2}{4}$ với mọi $n = 1, 2, \dots$. Tìm $\lim u_n$. (Đáp số: $\lim u_n = \frac{a}{2}$)

2) Cho số thực $a > 0$, xét dãy số $(u_n)(n = 1, 2, \dots)$ thỏa mãn $u_1 > 0$ và $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$ với mọi $n = 1, 2, \dots$. Tìm $\lim u_n$. (Đáp số: $\lim u_n = \sqrt{a}$)

3) Cho số thực $a > 0$, xét dãy số $(u_n)(n=1,2,\dots)$ thỏa mãn $u_1 > 0$ và $u_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2u_n + \frac{a}{u_n^2} \right)$ với mọi $n=1,2,\dots$. Tìm $\lim u_n$. (Đáp số: $\lim u_n = \sqrt[3]{a}$)

4) Tìm tất cả các hằng số $c > 0$ sao cho mọi dãy số (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_n \in (0;1) \\ u_{n+1}(1-u_n) > c \end{cases}, \forall n \geq 1$ đều tồn tại giới hạn hữu hạn. Với giá trị c tìm được hãy tính giới hạn của dãy (u_n) . (Đáp số: $c = \frac{1}{4}$)

Ví dụ 2. (Sách bài tập giải tích W.J.KACZKOR-M.T.NOWAK) Cho dãy số $(u_n)(n=1,2,\dots)$ thỏa mãn $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \frac{2(2u_n+1)}{u_n+3}$ với mọi $n=1,2,\dots$. Tìm $\lim u_n$.

Phân tích

Tính một vài số hạng đầu của dãy số ta dự đoán dãy số tăng, phương trình

$a = \frac{2(2a+1)}{a+3}$ có hai nghiệm $a = -1 \vee a = 2$. Từ đó ta chứng minh dãy số đã cho tăng và bị chặn trên bởi 2.

Lời giải

Bằng phép quy nạp, ta chứng minh được $0 < u_n < 2, \forall n=1,2,\dots$. Từ hệ thức truy hồi của dãy ta có $u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n+1)(u_n-2)}{u_n+3} > 0, \forall n=1,2,\dots$. Suy ra $u_{n+1} > u_n, \forall n=1,2,\dots$. Dãy số đã cho tăng và bị chặn nên theo định lý Weierstrass nó có giới hạn $\lim u_n = a, a \in [0;2]$. Ta có $u_{n+1} = \frac{2(2u_n+1)}{u_n+3}$ nên $a = \frac{2(2a+1)}{a+3} \Leftrightarrow a = -1 \vee a = 2$. Vậy $\lim u_n = 2$. ■

+ **Nhận xét:** Ý tưởng dự đoán tính tăng, giảm của dãy giúp chúng ta chọn được chặn trên hoặc chặn dưới của dãy số một cách nghiêm ngặt nhất, đánh giá tính bị chặn càng ngặt thì việc tính giới hạn của dãy số càng dễ dàng hơn.

Ví dụ 3. Cho dãy số $(x_n)(n=1,2,\dots)$ xác định như sau

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + x_n + 1} - \sqrt{x_n^2 - x_n + 1}, n=1,2,\dots \end{cases}$$

Tính giới hạn $\lim x_n$

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}, x \in \mathbb{R}$, ta có

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{2x+1}{\sqrt{(2x+1)^2+3}} - \frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^2+3}} = g(2x+1) - g(2x-1)$$

với $g(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+3}}, g'(t) = \frac{3}{(t^2+3)\sqrt{t^2+3}} > 0, \forall t$, suy ra $g(x)$ đồng biến và $f'(x) > 0, \forall x$

, suy ra hàm số f đồng biến. Ta có $f(x) \rightarrow \pm 1$ khi $x \rightarrow \pm \infty$. Do đó

$$-1 < f(x) < 1 \Rightarrow -1 < x_n < 1, \forall n.$$

Mặt khác $x_2 = \sqrt{3} - 1 < 1 = x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow x_3 < x_2 \dots \Rightarrow x_{n+1} < x_n$. Dãy số (x_n) giảm và bị chặn nên hội tụ và $\lim x_n = a$, với a là nghiệm của phương trình

$$a = \sqrt{a^2+a+1} - \sqrt{a^2-a+1} \Leftrightarrow a = \frac{2a}{\sqrt{a^2+a+1} + \sqrt{a^2-a+1}} \Leftrightarrow a \left(1 - \frac{2}{\sqrt{a^2+a+1} + \sqrt{a^2-a+1}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ \sqrt{a^2+a+1} + \sqrt{a^2-a+1} = 2 \end{cases} (*). \text{ Ta chứng minh } (*) \text{ cũng có nghiệm duy nhất}$$

$$a = 0.$$

Thật vậy xét hàm $\varphi(a) = \sqrt{a^2+a+1} + \sqrt{a^2-a+1}$

$$\text{có } \varphi'(a) = \frac{2a+1}{\sqrt{(2a+1)^2+3}} - \frac{1-2a}{\sqrt{(1-2a)^2+3}} = g(2a+1) - g(1-2a) \geq 0 \Leftrightarrow 2a+1 \geq 1-2a \Leftrightarrow a \geq 0$$

và $\varphi(0) = 2; \varphi(a) \rightarrow +\infty$ khi $a \rightarrow \pm \infty$. Vậy phương trình (*) có nghiệm duy nhất $a = 0$.

Tóm lại ta có $\lim x_n = 0$. ■

+ Nhận xét: Ví dụ 2 có thể giải bằng cách xét hàm số tương tự như Ví dụ 3, từ hai ví dụ này ta có tổng quát sau

“Cho dãy số $(u_n)(n=1,2,\dots)$ được xác định theo công thức $u_{n+1} = f(u_n), n=1,2,\dots$, trong đó $f(x)$ là hàm số xác định trên tập D . Xét tính hội tụ của dãy (u_n) . Nếu $f(x)$ là hàm số tăng trên D thì dãy (u_n) sẽ là dãy đơn điệu. Dãy (u_n) đơn điệu tăng hay đơn điệu giảm tùy thuộc theo giá trị của u_1 so với u_2 . Khi đó, nếu $f(x)$ bị chặn thì dãy số (u_n) có giới hạn”. Như vậy bằng việc chọn các hàm số $f(x)$ là hàm số tăng, bị chặn sao cho phương trình $x = f(x)$ có nghiệm duy nhất trên D và lựa chọn giá trị u_1 hợp lý sẽ tạo ra các dãy số có giới hạn hữu hạn. Ví dụ như:

1) Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{5x+50}$, $f(x)$ đồng biến với mọi $x > 0$ và phương trình

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^3 - 5x - 50 = 0. \quad \text{Xét} \quad g(x) = x^3 - 5x - 50, \quad \text{ta} \quad \text{có}$$

$$g'(x) = 3x^2 - 5; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{3}} \quad \text{và}$$

$$g\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^3 - 5\sqrt{\frac{5}{3}} - 50 < 0; \quad g\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^3 + 5\sqrt{\frac{5}{3}} - 50 < 0; \quad g(x) \rightarrow \pm \infty \text{ khi } x \rightarrow \pm \infty$$

suy ra $g(x)=0$ chỉ có duy nhất một nghiệm thực $x=a$. Mặt khác $g(0)=-50<0; g(5)=50>0$ nên $a \in (0;5)$. Ta xây dựng dãy số $(x_n)(n=1,2,...)$ xác định như sau $x_1=5; x_{n+1}=\sqrt[3]{5x_n+50}, n=1,2,...$ Chứng minh rằng dãy số $(x_n)(n=1,2,...)$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

2) Xét hàm số $f(x)=x^2+\frac{2}{3}x, f(x)$ đồng biến với mọi $x>0$ và phương trình $f(x)=x$ có duy nhất một nghiệm dương. Ta chọn giá trị u_1 hợp lý để hàm $f(x)$ bị chặn với mọi $x>0$ thì có bài tập sau: Cho dãy số $(u_n)(n=1,2,...)$ xác định như sau $u_1=\frac{1}{6}; u_{n+1}=u_n^2+\frac{2}{3}u_n, n=1,2,...$ Chứng minh rằng dãy số $(u_n)(n=1,2,...)$ có giới hạn hữu hạn và tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5u_{n+1}^2-2u_n^2u_{n+1}+5u_nu_{n+1}}{3u_{n+1}^2+u_nu_{n+1}(4+u_n^2)}$ (Trích đề Chọn đội tuyển PTNK TP.Hồ Chí Minh năm 2012)

3) Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sqrt{x^2+3}$ với $x>0$. Ta có $f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}>0, \forall x>0$. Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, phương trình $x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2+3=4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$. Ta có bài tập sau: Cho dãy số $(u_n)(n=1,2,...)$ xác định như sau $u_1=3; u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{4}\sqrt{u_n^2+3}, n=1,2,...$ Chứng minh rằng dãy số $(u_n)(n=1,2,...)$ có giới hạn hữu hạn và tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (Phỏng theo đề VMO 2015)

+ Tuy nhiên khi gặp lớp các dãy số tăng, giảm có dạng $u_{n+1}=f(n, u_n), n=1,2,...$ thì việc đánh giá dãy số trở nên phức tạp hơn. Việc biến đổi sơ cấp công thức truy hồi của dãy là cần thiết để tìm ra hướng giải quyết của bài toán.

Ví dụ 4. (Trích đề thi VMO năm 2011) Cho dãy số $(u_n): u_1=1; u_n=\frac{2n}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} u_i, \forall n \geq 2$. Đặt $y_n=u_{n+1}-u_n$. Chứng minh rằng dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

Lời giải

$\forall n \geq 2$, ta có

$$u_n = \frac{2n}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-1} u_i = \frac{2n}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-2} u_i + \frac{2n}{(n-1)^2} u_{n-1} = \frac{2n}{(n-1)^2} \sum_{i=1}^{n-2} u_i + \frac{2n}{(n-1)^2} \cdot \frac{2n-2}{(n-2)^2} \sum_{i=1}^{n-2} u_i = \frac{2n(n^2-2n+2)}{(n-1)^2(n-2)^2} \sum_{i=1}^{n-2} u_i$$

Mặt khác $u_{n-1} = \frac{2n-2}{(n-2)^2} \sum_{i=1}^{n-2} u_i$ ta có

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{n(n^2-2n+2)}{(n-1)^3} = 1 + \frac{n^2-n+1}{(n-1)^3} \Rightarrow u_n - u_{n-1} = \frac{n^2-n+1}{(n-1)^3} u_{n-1}$$

Hay

$$y_{n-1} = \frac{n^2-n+1}{(n-1)^3} u_{n-1}; y_n = \frac{n^2+n+1}{n^3} u_n \Rightarrow \frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{(n^2+n+1)(n-1)^3}{n^3(n^2-n+1)} \cdot \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(n^2+n+1)(n^2-2n+2)}{n^2(n^2-n+1)} > 1$$

Vi $\frac{(n^2+n+1)(n^2-2n+2)}{n^2(n^2-n+1)} > 1 \Leftrightarrow n^2(n^2-n+1)+2 > n^2(n^2-n+1)$, đúng. Suy ra dãy (y_n)

tăng. Bây giờ ta chứng minh quy nạp $u_n < 4n, \forall n \geq 1$. Dễ thấy $u_n < 4n$ đúng với

$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Giả sử $u_n < 4n$ với $n = k$, tức là $\frac{2k}{(k-1)^2} \sum_{i=1}^{k-1} u_i < 4k \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k-1} u_i < 2(k-1)^2$

Ta có $u_{k+1} < 4k+4 \Leftrightarrow \frac{2k+2}{k^2} \sum_{i=1}^k u_i < 4k+4 \Leftrightarrow \frac{2k+2}{k^2} \sum_{i=1}^{k-1} u_i + \frac{2k+2}{k^2} u_k < 4k+4$, đúng do

$$\frac{2k+2}{k^2} \sum_{i=1}^{k-1} u_i + \frac{2k+2}{k^2} u_k < \frac{2k+2}{k^2} 2(k-1)^2 + \frac{2k+2}{k^2} 4k = 4(k+1) \left(\frac{k^2-2k+3}{k^2} \right) < 4k+4$$

Vậy $u_n < 4n \Rightarrow y_n = \frac{n^2+n+1}{n^3} x_n < \frac{4(n^2+n+1)}{n^2} < c$. Số c ta có thể chọn được, ví dụ $c = 5$

thì từ y_5 trở đi luôn có $y_n < 5$. Vậy (y_n) tăng và bị chặn trên nên có giới hạn hữu hạn. ■

Ví dụ 5. (Trích đề thi VMO năm 2012) Cho dãy số thực $(x_n): x_1 = 3; x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2) \forall n \geq 2$. Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và tính giới hạn đó.

Lời giải

Rõ ràng ta có $x_n > 0 \forall n$ (1). Ta sẽ chứng minh kể từ số hạng thứ hai, dãy số đã cho

là giảm. Thật vậy xét hiệu $x_n - x_{n-1} = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2) - x_{n-1} = \frac{2[(n+2) - (n-1)x_{n-1}]}{3n}$. Để

chứng minh (x_n) giảm bắt đầu từ số hạng thứ hai, ta chỉ cần chứng minh $(n+2) - (n-1)x_{n-1} < 0 \forall n \geq 3$ (2). Ta chứng minh điều này bằng quy nạp. Với $n = 3$,

do $x_2 = \frac{10}{3}$ nên bất đẳng thức $(n+2) - (n-1)x_{n-1} = 5 - 2 \cdot \frac{10}{3} = -\frac{5}{3} < 0$. Giả sử ta đã có

$(n+2) - (n-1)x_{n-1} < 0 \forall n \geq 3 \Rightarrow x_{n-1} > \frac{n+2}{n-1} \forall n \geq 3$. Khi đó

$x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2) > \frac{n+2}{3n}\left(\frac{n+2}{n-1} + 2\right) = \frac{n+2}{n-1} > \frac{n+3}{n} \Rightarrow (n+3) - nx_n < 0$, Vậy (2) đúng đến $n+1$. Như

vậy dãy (x_n) là dãy giảm kể từ số hạng thứ hai. Ngoài ra, theo (1), nó bị chặn dưới bởi 0 nên tồn tại

giới hạn hữu hạn $\lim x_n = a$. Chuyển đẳng thức $x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2)$ qua giới hạn ta được $a = \frac{1}{3}(a+2) \Leftrightarrow a = 1$. Vậy $\lim x_n = 1$. ■

Ví dụ 6. (Trích đề thi vô địch Kiep) Cho dãy $(a_n): a_1 = a_2 = 1; a_{n+1} = a_n + \frac{a_{n-1}}{n(n+1)}, n \geq 2$. Chứng minh rằng dãy đã cho có giới hạn hữu hạn.

Lời giải

Ta có $a_{n+1} - a_n = \frac{a_{n-1}}{n(n+1)} > 0, \forall n \geq 2$ nên (a_n) tăng. Ta cần chứng minh (a_n) bị chặn trên. Kiểm tra vài số hạng đầu ta dự đoán $a_n < 2, \forall n \geq 1$. Ta chứng minh bằng quy nạp, ta có $a_3 = \frac{7}{6} < 2$, Giả sử $a_n < 2, \forall n \geq 1$. Khi đó

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_{n-1}}{n(n+1)} = \frac{a_{n-1}}{n(n+1)} + \left[\frac{a_{n-2}}{(n-1)n} + a_{n-1} \right] = \dots = \frac{a_{n-1}}{n(n+1)} + \frac{a_{n-2}}{(n-1)n} + \dots + \frac{a_3}{4.5} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{2.3} + 1$$

$$\text{Suy ra } a_{n+1} < 2 \left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n-1)n} + \dots + \frac{1}{4.5} \right) + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{2.3} + 1 = 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{5}{4} < \frac{1}{2} + \frac{5}{4} = \frac{7}{4} < 2.$$

Vậy $a_n < 2, \forall n \geq 1$. Do đó (a_n) có giới hạn hữu hạn. ■

+ Nhận xét: Ví dụ 4, Ví dụ 5 và Ví dụ 6 là các bài toán điển hình cơ bản. Ở Ví dụ 5, ý tưởng chứng minh dãy số giảm hình thành sau khi ta tính một vài số hạng đầu $x_2 = \frac{10}{3}, x_3 = \frac{80}{27}, x_4 = \frac{67}{27}$, từ dự đoán dãy số giảm ta đi đến chứng minh (2) một cách rất tự nhiên và ý tưởng quy nạp là quá rõ ràng với một dãy số cho bởi công thức truy hồi. Với ý tưởng này, ta có cách định hướng tương tự cho các ví dụ như sau:

1) **(Trích đề thi HSG Gia Lai năm 2004)** Cho dãy số $(u_n)(n=1,2,\dots)$ thỏa mãn $u_1 = 2004$ và $u_{n+1} = \frac{2n+1}{3n+1}(u_n + 1)$ với mọi $n = 1,2,\dots$. Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn và tính $\lim u_n$.

2) Cho dãy số $(u_n)(n=1,2,...)$ thỏa mãn $u_1 = 2012$ và $u_{n+1} = \frac{2010n+2}{2011n+2}(u_n+1)$ với mọi $n=1,2,...$ Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn và tính $\lim u_n$.

3) (Trích đề thi Đề nghị Olympic 30/04/2011) Cho dãy số $(u_n)(n=1,2,...)$ thỏa mãn $u_1 = \frac{2011}{2010}$ và $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + \frac{2n+4999}{n+2499}$ với mọi $n=1,2,...$ Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn và tính $\lim u_n$.

4) Cho dãy số $(u_n): u_1 = \frac{1}{2}; u_{n+1} = u_n + \frac{u_n^2}{n^2} \forall n \geq 1$. Chứng minh dãy đã cho có giới hạn hữu hạn.

(Hướng dẫn: Ta chứng minh $u_n + n^2 \geq \frac{n(n+1)}{\sqrt{2}}, \forall n \geq 1$)

5) (Trích đề thi HSG Gia Lai – Bảng A năm 2011-2012) Cho dãy số $(u_n)(n=1,2,...)$ thỏa mãn

$$u_1 = 24, u_2 = 60 \text{ và } u_{n+1} = u_n + \frac{u_{n-1}}{n(n+1)(n+2)} \text{ với mọi } n=2,3,... \text{ Chứng minh dãy số } (u_n)$$

có giới hạn
hữu hạn.

Ví dụ 7. Cho dãy số $(x_n): x_1 = 2, x_2 = 1; 3x_{n+2} + 3 = 2 \cos x_{n+1} + \cos x_n$. Tính giới hạn $\lim x_n$.

Lời giải

Nhận thấy $\cos x_2 > 0 > \cos x_1$ và $3x_3 + 3 < 3; 3x_3 + 3 = \cos 1 + 2 \cos \frac{3}{2} \cdot \cos \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow -1 < x_3 < 0$

suy ra

$\cos x_3 > \cos x_2$. Bằng quy nạp ta chứng minh được $0 > x_{n+1} > x_n > -1$. Vậy dãy đã cho có giới hạn $\lim x_n = a$ với a là nghiệm của phương trình $3x + 3 = 3 \cos x \Leftrightarrow x = 0$. Vậy $\lim x_n = 0$. ■

3. Bài tập cùng phương pháp

Bài tập 1. Cho dãy số $(x_n)(n=1,2,...)$ xác định bởi $x_1 = 2019$ và $x_{n+1} \cdot (4 - 3x_n) = 1, n=1,2,...$

Hãy tính giới hạn $\lim x_n$.

(Hướng dẫn: $x_{n+1} = \frac{1}{4 - 3x_n}, n=1,2,... \lim x_n = 1$)

Bài tập 2. Cho dãy số $(u_n)(n=0,1,...)$ được xác định như sau: $u_0 = u_1 = 1$ và $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}, n=1,2,...$ Chứng minh rằng dãy đã cho có giới hạn và tìm giới hạn đó.

(Hướng dẫn: $u_n = \sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_{n-2}} < 2\sqrt{u_n} \Rightarrow u_n < 4, \lim u_n = 4$)

Bài tập 3. (VMO – 2005) Xét dãy số thực $(x_n)(n=1,2,...)$ được xác định bởi $x_1 = a$ và $x_{n+1} = 3x_n^3 - 7x_n^2 + 5x_n, n=1,2,...$ với $a \in \mathbb{R}$. Hãy xác định a để dãy số $(x_n)(n=1,2,...)$ có giới hạn hữu hạn. Tìm các giới hạn đó.

(Hướng dẫn: Xét hiệu $u_{n+1} - u_n$)

Bài tập 4. (VMO – 1998) Cho dãy số $(x_n)(n=1,2,...)$ xác định như sau $x_1 = a \in \mathbb{R}$ và $x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3)}{3x_n^2 + 1}, n=1,2,...$ Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài tập 5. (Trích đề thi Đề nghị Olympic 30/04/2012) Cho $S_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} \left(2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + ... + \frac{2^n}{n} \right)$. Tính giới hạn $\lim s_n$.

Bài tập 6. Cho dãy số $(x_n)(n=0,1,...)$ thỏa mãn $x_0 = a > 1; x_{n+1} = \sqrt{\frac{2+x_n}{x_n+1}}, n=0,1,...$

Tìm $\lim x_n$.

Bài tập 7. Dãy các hàm số $(f_n(x))$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

- i) $f_n : (0;+\infty) \rightarrow (0;+\infty), n=0,1,2,...$
- ii) $f_0(x) = x, \forall x \in (0;+\infty), n=0,1,2,...$
- iii) $f_{n+1}(x) = \sqrt{x^2 + 6f_n(x)}, \forall x \in (0;+\infty), n=0,1,2,...$

Chứng minh rằng

- a) Với mỗi $n=1,2,...$ tồn tại duy nhất $x_n \in (0;+\infty)$ thỏa mãn $f_n(x_n) = 2x_n$;
- b) (x_n) là dãy tăng và $\lim x_n = 4$.

Bài tập 8. Cho dãy số (u_n) thỏa $u_1 = u_2 = 1$ và $u_{n+2} = \frac{2}{5\pi} u_{n+1}^2 + \frac{2\pi}{5} \sin u_n; n=1,2,...$

Tìm $\lim u_n$.

Bài tập 9. Cho dãy số (u_n) thỏa $u_1 = \frac{5}{2}$ và $u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n^3 - 12u_n + \frac{20n+21}{n+1}}; n=1,2,...$

Chứng minh dãy đã cho có giới hạn và tìm giới hạn đó.

(Hướng dẫn: $u_n > 2, \lim u_n = 2$)

Bài tập 10. Cho dãy số (u_n) thỏa $u_1 = 1, u_2 = 2$ và $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k}, n=1,2,...$ có giới hạn hữu hạn. **(Hướng**

dẫn: $u_n > (\sqrt{2})^{n-1}, \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$)

II. Phương pháp so sánh dãy số

1. Cơ sở lý thuyết

+ **Định lý:** (Nguyên lý kẹp) Nếu ba dãy số $(x_n), (y_n), (z_n)$ thỏa mãn điều kiện $y_n \leq x_n \leq z_n, \forall n \geq n_0$ và $\lim y_n = \lim z_n = a$ thì $\lim u_n = a$.

+ **Hệ quả:** Nếu dãy số (u_n) thỏa mãn $0 \leq |u_n - a| \leq y_n, \forall n \geq n_0$ và $\lim y_n = 0$ thì $\lim u_n = a$.

2. Các ví dụ điển hình

Ví dụ 1. (Trích đề thi Đề nghị Olympic 30/04/2006) Dãy số (x_n) thỏa mãn điều kiện $1 < x_1 < 2$ và

$x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{2}x_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn.

Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

Lời giải

Ta có $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{x_n}{2} = -\frac{1}{2}(x_n - 1)^2 + \frac{3}{2}, \forall n = 1, 2, \dots$. Bằng quy nạp ta chứng minh được $x_n > 1, \forall n = 1, 2, \dots$. Theo giả thiết $x_1 < 2$, giả sử $x_n < 2, \forall n = 1, 2, \dots$ ta có $x_{n+1} - 1 = x_n \left(1 - \frac{1}{2}x_n\right) > 0$ (do $x_n \leq \frac{3}{2}, \forall n = 1, 2, \dots$). Vậy $1 < x_n < \frac{3}{2}, \forall n = 1, 2, \dots$

Giả sử $\lim u_n = a$, khi đó a là nghiệm của phương trình $a = 1 + a - \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow a = \sqrt{2} \vee a = -\sqrt{2}$. Ta chứng minh $\lim u_n = \sqrt{2}$. Thật vậy, ta có

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}||2 - \sqrt{2} - x_n| \leq \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}|(|\sqrt{2} - x_n| + |2 - 2\sqrt{2}|) < \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{2} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Mặt khác do $\lim \frac{1}{2^n} = 0$ nên từ bất đẳng thức trên và nguyên lý kẹp ta có $\lim x_n = \sqrt{2}$. ■

+ **Nhận xét:** Qua lời giải của ví dụ 1, ta có thể hình dung các bước giải bài toán tương tự như trên theo cách sau

- Dự đoán và chứng minh tính bị chặn của dãy, từ hệ thức truy hồi dự đoán $\lim u_n = a$.

- Đánh giá $0 \leq |u_n - a| \leq v_n$ trong đó $\lim v_n = 0$. Ở bước này ta chú ý đến liên hệ $|u_{n+1} - a| = |f(u_n) - f(a)| = |u_n - a| \cdot |g(u_n)|$, sau đó đánh giá $g(u_n)$ để tìm ra (v_n) .

Ví dụ 2. Cho dãy các hàm số $\{P_n(x)\}$ xác định như sau

$$P_0(x) = 0, P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x - P_n^2(x)}{2}, \forall n \geq 0; x \in \mathbb{R}.$$

Tìm $\lim P_n(x)$.

Lời giải

Trước hết ta chứng minh bằng quy nạp bất đẳng thức sau: $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}, \forall n \in \mathbb{N}$ (1).

Thật vậy, với $x \in [0,1]$ suy ra $x - 2\sqrt{x} \leq 0$ nên $0 \leq \frac{x}{2} = P_1(x) \leq \sqrt{x}$. Như vậy (1) đúng

với $n=1$. Giả sử (1) đúng đến n . Xét hàm số $f(t) = t + \frac{1}{2}(x - t^2)$ với $t \in [0,1]$. Dễ thấy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0,1]$. theo giả thiết quy nạp ta có $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x} \leq 1$ với mọi $x \in [0,1]$ (2)

nên $P_{n+1}(x) = f(P_n(x)) \leq f(\sqrt{x}) = \sqrt{x}$ với mọi $x \in [0,1]$. Mặt khác, từ (2) ta có

$x - P_n^2(x) \geq 0 \Rightarrow P_{n+1}(x) \geq P_n(x) \geq 0$. Vậy $0 \leq P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$. Do đó (1) đúng đến $n+1$ nên theo nguyên lý

quy nạp ta có (1) đúng với mọi n . Tiếp theo ta chứng minh $\sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2}{n+1}$ với

$x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$. Thật vậy ta có

$$\sqrt{x} - P_n(x) = \left[\sqrt{x} - P_{n-1}(x) \right] \left[1 - \frac{\sqrt{x} + P_{n-1}(x)}{2} \right] \leq \left[\sqrt{x} - P_{n-1}(x) \right] \left[1 - \frac{\sqrt{x}}{2} \right] \quad (\text{do } P_{n-1}(x) \geq 0)$$

$$\leq \dots \leq \left[\sqrt{x} - P_0(x) \right] \left[1 - \frac{\sqrt{x}}{2} \right]^n = \frac{2}{n} \sqrt{x} \left[1 - \frac{\sqrt{x}}{2} \right]^n$$

$$\leq \frac{2}{n} \left[\frac{\frac{n\sqrt{x}}{2} + n \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)}{n+1} \right]^{n+1} = \frac{2}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n < \frac{2}{n+1}.$$

Từ đó ta thu được bất đẳng thức $0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) < \frac{2}{n+1}$ với mọi $x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$.

Do $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0$ nên theo nguyên lý kẹp ta được $\lim P_n(x) = \sqrt{x}$, với mọi $x \in [0,1]$. ■

Ví dụ 3. (Trích đề thi HSG môn toán lớp 12 của tỉnh Gia Lai năm 1996) Cho dãy

số (x_n) thỏa $x_1 = \frac{1}{3}$ và $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2} - 1, \forall n = 1, 2, \dots$ Chứng minh dãy đã cho có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải

Nhận xét: Nếu tồn tại giới hạn của dãy (x_n) là a thì a thỏa mãn phương trình

$$a = \frac{a^2}{2} - 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + \sqrt{3} \\ a = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Như vậy, việc còn lại ta phải khẳng định một trong hai giá trị $a=1+\sqrt{3}$ hoặc $a=1-\sqrt{3}$ sẽ là giới hạn của dãy số (x_n) .

Bằng phương pháp quy nạp ta dễ dàng chứng minh được $-1 < x_n < 0, \forall n=2,3,\dots$

Nếu $\lim x_n = a$ thì từ $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2} - 1, \forall n=1,2,\dots$ cho $n \rightarrow +\infty$ ta được

$$a = \frac{a^2}{2} - 1 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - \sqrt{3} \\ a = 1 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

Mà $-1 < x_n < 0, \forall n=2,3,\dots$ nên $-1 \leq a \leq 0$. Do đó $a = 1 - \sqrt{3}$. Tiếp theo ta chứng minh

$$\lim x_n = a = 1 - \sqrt{3}. \text{ Ta có } |x_{n+1} - a| = \left| \frac{x_n^2}{2} - 1 - \left(\frac{a^2}{2} - 1 \right) \right| = \frac{1}{2} |x_n^2 - a^2| = \frac{1}{2} |x_n - a| |x_n + a|$$

Mà $\forall n=2,3,\dots$ thì $-1 < x_n < 0$ nên $\forall n=2,3,\dots$ ta có $-1 + a < x_n + a < 0 + a$
 $\Rightarrow -\sqrt{3} < x_n + a < 1 - \sqrt{3}$

$$\Rightarrow -\sqrt{3} < x_n + a < \sqrt{3} \Rightarrow |x_n - a| < \sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } |x_{n+1} - a| = \frac{1}{2} |x_n + a| |x_n - a| < \frac{\sqrt{3}}{2} |x_n - a|, \forall n=2,3,\dots (*)$$

Do đó từ (*) suy ra $|x_{n+1} - a| < \frac{\sqrt{3}}{2} |x_n - a| < \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 |x_{n-1} - a| < \dots < \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n |x_1 - a|, \forall n=2,3,\dots$

$$\text{Hay } 0 \leq |x_n - a| < \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n-1} \left| \frac{1}{3} - (1 - \sqrt{3}) \right| = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n-1} \left| \sqrt{3} - \frac{2}{3} \right|, \forall n=2,3,\dots$$

Mà $\lim \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n = 0$ nên theo nguyên lý kẹp suy ra $\lim |x_n - a| = 0$. Vậy

$$\lim x_n = a = 1 - \sqrt{3}. \blacksquare$$

+ **Nhận xét:** Như vậy, với các trường hợp dãy số dạng $u_{n+1} = f(u_n)$ có sự biến thiên phức tạp, cách giải của 3 Ví dụ trên phần nào khiến chúng ta nghĩ đến **nguyên lý ánh xạ co**. Nói một cách

khác, nếu xét ở phương diện hàm số, nếu chứng minh được $f(x)$ có đạo hàm thỏa $|f'(x)| \leq c$ với

$c \in (0,1)$ thì những lớp dãy số tương tự như 3 Ví dụ trên hoàn toàn có thể giải được theo nguyên lý kẹp hoặc dùng Định lý Lagrange để giải quyết giống như Bài toán VMO 2018 ở phần mở đầu. Từ đó, ta cũng có thể tạo ra các dãy số có cách giải quyết tương tự.

$$1) \text{ Xét hàm số } f(x) = \frac{1+x}{2+x} \text{ với } x > 0. \text{ Ta có } f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} < \frac{1}{4}, \forall x > 0 \dots \text{ Ta có bài}$$

tập sau:

Cho dãy số $(u_n)(n=1,2,\dots)$ xác định như sau $u_1 > 0; u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2+u_n}, n=1,2,\dots$. Chứng minh rằng dãy số $(u_n)(n=1,2,\dots)$ có giới hạn hữu hạn và tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2) Xét hàm số $f(x) = 2^{-x} + \frac{1}{2}$ với $x > 0$, dễ dàng chứng minh được $\frac{1}{2} < f(x) < \frac{3}{2}$

và $|f'(x)| < 1$

với $x > 0$. Ta có bài tập sau:

Cho dãy số $(u_n)(n=1,2,\dots)$ xác định như sau $u_1 = 0, u_2 = 2; u_{n+2} = 2^{-u_n} + \frac{1}{2}, n=1,2,\dots$. Chứng minh rằng dãy số $(u_n)(n=1,2,\dots)$ có giới hạn hữu hạn và tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. (Trích đề thi VMO 2008)

Tuy nhiên, với các trường hợp dãy số dạng $u_{n+1} = f(n, u_n)$ (mà ta không tìm được cụ thể công

thức tổng quát của nó hoặc ta không tìm được **điểm bất động**) thì phương pháp hàm số hầu như không khả thi, việc so sánh dãy số vì thế mà khó khăn hơn. Các ví dụ tiếp theo sẽ khai thác một định hướng tiếp cận dạng toán trên, đó là sử dụng các đánh giá trung gian để kẹp dãy số bằng các giới hạn cơ bản rồi qua đó tìm ra giới hạn.

Ví dụ 4. (Phỏng theo đề thi đề nghị Olympic 30/04/2011) Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = \frac{3}{2}; x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + \frac{2n+11}{n+5}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

+ Phân tích: Nếu gọi **điểm bất động** của dãy số là x_0 thì ta có

$x_0 = x_0^2 - 2x_0 + 2 \Leftrightarrow x_0 = 1; x_0 = 2$. Ngoài ra dễ thấy $x_{n+1} > (x_n - 1)^2 + 1 > 1, \forall n \geq 1$ suy ra

$x_n > 1, \forall n \geq 1$. Ta dự đoán $\lim x_n = 1$ và để có điều này ta cần tìm được a, b thỏa mãn

$x_n \leq 1 + \frac{1}{an+b}, \forall n \geq 1$ (*). Để chứng minh (*) ta sử dụng phương pháp quy nạp. Chú

ý rằng hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ nên để quy nạp thành công ta cần phải có $0 < a+b \leq 2$ để (*) đúng ở bước cơ sở $n=1$ và

$$\left(1 + \frac{1}{ak+b}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{1}{ak+b}\right) + \frac{2k+11}{k+5} \leq 1 + \frac{1}{a(k+1)+b} \quad (**)$$

để (*) đúng ở bước quy nạp.

Ta chọn $b = 4a$ để thu gọn nhanh biểu thức $1 + \frac{1}{a(k+1)+b} - \frac{2k+11}{k+5}$.

Khi đó $(**) \Leftrightarrow a(1-a)(k+4)^2 \geq k+5$.

Để bất đẳng thức này đúng với mọi $k \geq 1$ thì trước hết nó phải đúng với $k = 1$, tức là $25a(1-a) \geq 6$, kết hợp với $0 < 4a + a \leq 2$ ta được $a \leq \frac{2}{5}$. Ta chọn luôn $a = \frac{2}{5}$.

Tóm lại ta chứng minh được $1 < x_n \leq 1 + \frac{5}{2(n+4)}, \forall n \geq 1$.

Lời giải.

Do $x_{n+1} = (x_n - 1)^2 + 1 + \frac{1}{n+5} > 1, \forall n \geq 1$ và $x_1 > 1$ nên $x_n > 1, \forall n \geq 1$. Ta sẽ chứng minh $x_n \leq \frac{2n+13}{2(n+4)}, \forall n \geq 1$ (*) bằng phương pháp quy nạp. Thật vậy với $n = 1$ thì (*) đúng.

Giả sử (*) đúng với $n = k$ ($k \geq 1$), khi đó $x_k \leq \frac{2k+13}{2(k+4)}$.

Ta cần chứng minh (*) đúng với $n = k+1$, tức $x_{k+1} \leq \frac{2k+15}{2(k+5)}$.

Thật vậy, do hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ và $x_k > 1$ nên (chú ý $k \geq 1$)

$$x_{k+1} - \frac{2k+15}{2(k+5)} = f(x_k) + \frac{2k+7}{2(k+5)} \leq f\left(\frac{2k+13}{2(k+4)}\right) + \frac{2k+7}{2(k+5)} = -\frac{(k-1)(6k+29)}{4(k+4)^2(k+5)} \leq 0.$$

Do đó (*) đúng theo nguyên lý quy nạp.

Theo nguyên lý kẹp, dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim x_n = 1$. ■

+ **Nhận xét:** Với cách phân tích như trên, ta có thể giúp cho học sinh tìm ra cách giải quyết một số dãy số dạng $x_{n+1} = f(n, x_n)$ theo một hướng rõ ràng hơn. Tuy nhiên nếu để ý đến tính tăng, giảm của dãy đã cho, ta có thể giải bài này bằng cách dùng Định lý Weierstrass. Đến đây, học sinh có một cách nhìn đa chiều về cách tìm giới hạn cho dãy số dạng này. Ta nghiên cứu thêm một vài ví dụ khác.

Ví dụ 5. (Trích đề thi VMO 2012) Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 3; x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2), \forall n \geq 2.$$

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

+ **Nhận xét:** Đây là bài toán đã được giải quyết bằng Định lý Weierstrass (đã giải ở Ví dụ 5, phần 3.1.2) và cách chứng minh quy nạp theo cách này cũng không quá mất tự nhiên khi ta đánh giá tính tăng, giảm của dãy. Ở đây, tác giả muốn định hướng cho học sinh thêm một cách nhìn mới tương tự như Ví dụ 4 ở trên.

+ **Phân tích:** Gọi điểm bất động của dãy số là x_0 thì $x_0 = \frac{x_0 + 2}{3} \Leftrightarrow x_0 = 1$. Ta dự đoán $\lim x_n = 1$.

Để phát hiện $x_n > 1, \forall n \geq 1$ (chứng minh điều này bằng quy nạp) nên để khẳng định dự đoán trên đúng ta cần tìm được a, b thỏa mãn $x_n \leq 1 + \frac{1}{an+b}, \forall n \geq 1$ (*). Ta

cần chọn a, b sao cho $0 < a+b \leq \frac{1}{2}$ và $\frac{k+3}{3(k+1)} \left(3 + \frac{1}{ak+b} \right) \leq 1 + \frac{1}{a(k+1)+b}$ (**).

Chọn $b = 3a$ (để thu gọn nhanh vế trái) thì $(**) \Leftrightarrow 2(1-3a)k \geq 24a+1$. Để bất đẳng thức này đúng với mọi $k \geq 1$ thì trước hết nó phải đúng với $k=1$, khi đó $30a \leq 1$ (thỏa mãn $0 < a+b = 4a \leq \frac{1}{2}$). Ta chọn luôn $a = \frac{1}{30}$. Khi đó $(**) \Leftrightarrow \frac{-18(k-1)}{(k+1)(k+4)} \leq 0$,

đúng vì $k \geq 1$. Tóm lại $1 < x_n \leq \frac{n+33}{n+3}, \forall n \geq 1$.

Lời giải.

Ta có $x_1 = 3 > 1$, giả sử $x_{n-1} > 1, \forall n \geq 2$, $x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1}+2) > \frac{n+2}{3n} \cdot 3 = 1 + \frac{2}{n} > 1, \forall n \geq 2$. Ta sẽ

chứng minh $1 < x_n \leq \frac{n+33}{n+3}, \forall n \geq 1$ (*) bằng phương pháp quy nạp. Thật vậy với

$n=1$ thì (*) đúng. Giả sử (*) đúng với $n=k$ ($k \geq 1$), khi đó $x_k \leq \frac{k+33}{k+3}$.

Ta cần chứng minh (*) đúng với $n=k+1$, tức $x_{k+1} \leq \frac{k+34}{k+4}$.

Thật vậy, do hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ và $x_k > 1$ nên (chú ý $k \geq 1$)

$$x_{k+1} - \frac{k+34}{k+4} \leq \frac{k+3}{3(k+1)} \left(\frac{k+33}{k+3} + 2 \right) - \frac{k+34}{k+4} = \frac{-54k+54}{3(k+1)(k+4)} \leq 0, \forall k \geq 1$$

Do đó (*) đúng theo nguyên lý quy nạp.

Theo nguyên lý kẹp, dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim x_n = 1$. ■

Với cách đánh giá tương tự, ta có phân tích cho một số ví dụ sau

Ví dụ 6. Cho dãy số (x_n) xác định bởi
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = \frac{2n-3}{2n}x_{n-1}; \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số $y_n = x_1 + \dots + x_n$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

+ Phân tích: Ta có $x_{n-1} = 2[(n-1)x_{n-1} - nx_n], \forall n \geq 2$ nên $y_n = x_1 + \dots + x_n = 2[1 - (n+1)x_{n+1}], \forall n \geq 2$.

Đặt $z_n = nx_n$ ta có $z_1 = 1; z_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}z_n, \forall n \geq 1$.

Rõ ràng $z_n > 0, \forall n \geq 1$ nên ta chỉ cần chọn được a, b thỏa mãn $z_n \leq \frac{1}{an+b}, \forall n \geq 1$ để

$\lim z_n = 0$.

Để quy nạp thành công thì ta cần phải chọn được a, b sao cho

$$\frac{2k-1}{2k} \frac{1}{ak+b} \leq \frac{1}{a(k+1)+b}.$$

Điều này tương đương với $ak - a - b \leq 0, \forall k \geq 1$, không tồn tại $a, b > 0$ thỏa mãn.

Ta sẽ tìm a, b để $z_n \leq \frac{1}{\sqrt{an+b}}, \forall n \geq 1$.

Khi đó a, b cần thỏa mãn $\frac{2k-1}{2k} \frac{1}{\sqrt{ak+b}} \leq \frac{1}{\sqrt{a(k+1)+b}} \Leftrightarrow (3a+4b)k - a - b \geq 0$.

Chọn $a=1; b=0$ thỏa mãn. Tóm lại ta đã có $0 < z_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \geq 1$ nên $\lim z_n = 0$ và

$\lim y_n = 2$. ■

Ví dụ 7. (Trích đề thi VMO năm 2015) Cho $a \in [0;1]$ và dãy số (x_n) xác định bởi

$$x_1 = 3; x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{n^2}{4n^2+a} \sqrt{x_n^2+3}, \forall n \geq 1.$$

Chứng minh dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn.

+ **Phân tích:** Xét các dãy số $(a_n); (b_n)$ xác định bởi $a_1 = 3; a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{a_n^2+3}, \forall n \geq 1$

(dãy này đã thực hiện trong phần 3.1.2) và $b_1 = 3; b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{n^2}{4n^2+1} \sqrt{b_n^2+3}, \forall n \geq 1$.

Khi đó $a_n \geq x_n \geq b_n > 0, \forall n \geq 1$

và $\lim a_n = 1$.

Ta có $\sqrt{(1+3)(a^2+3)} \geq a+3, \forall a > 0$ nên $b_{n+1} \geq f_n(b_n), \forall n \geq 1$ trong đó $f_n(x) = \frac{x}{2} + \frac{n^2(x+3)}{2(4n^2+1)}$

với $f_n(x)$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$. Ta sẽ tìm $a, b > 0$ sao cho $b_n \geq 1 - \frac{1}{an+b}, \forall n \geq 1$ để từ đó $\lim x_n = 1$.

Thật vậy, để quy nạp thành công chúng ta cần có $f_k\left(1 - \frac{1}{ak+b}\right) \geq 1 - \frac{1}{a(k+1)+b}$ tức là

$$\frac{1 - \frac{1}{ak+b}}{2} + \frac{k^2}{8k^2+2} \left(4 - \frac{1}{ak+b}\right) \geq 1 - \frac{1}{a(k+1)+b}. \text{ Bất đẳng thức này tương đương với}$$

$$3ak^3 + (3b - 5a - a^2)k^2 + (a - a^2 - 2ab)k + (b - a - ab - b^2) \geq 0.$$

Với $a = \frac{1}{3}, b = 1$ thì bất đẳng thức này tương đương với $(k+1)(9k^2+2k-6) \geq 0$, đúng

$\forall k \geq 1$. Như vậy ta đã có $a_n \geq x_n \geq b_n \geq 1 - \frac{3}{n+3}, \forall n \geq 1$ và $\lim a_n = 1$ nên tồn tại giới hạn

$\lim x_n = 1$. ■

+ Ta xét thêm một số kỹ thuật đánh giá khác để có cách nhìn toàn diện hơn trong phương pháp này.

Ví dụ 8. (Kỹ thuật quy nạp, sử dụng định nghĩa phần nguyên) Cho $a \geq 1$ và dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = a; x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 2\{x_n\}^2}{[x_n]^2}, \forall n \geq 1$, trong đó $[x]$ là phần nguyên của x và $\{x\}$ là phần thập phân của x . Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

(Trích đề thi HSG tỉnh Bình Định năm 2013)

Lời giải.

+ Trường hợp 1: a là số nguyên. Khi đó $[a] = a$ và $\{a\} = 0$. Do đó ta có

$$x_1 = a; x_2 = \frac{x_1^2 - 2\{x_1\}^2}{[x_1]^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1. \text{ Vậy } x_n = 1, \forall n \geq 2. \text{ Do đó } \lim x_n = 1$$

+ Trường hợp 2: a là số không nguyên. Khi đó ta có

$$x_2 = \frac{a^2 - 2\{a\}^2}{[a]^2} = \frac{([a] + \{a\})^2 - 2\{a\}^2}{[a]^2} = \frac{2[a]^2 - ([a]^2 - 2[a] \cdot \{a\} + \{a\}^2)}{[a]^2} = 2 - \left(1 - \frac{\{a\}}{[a]}\right)^2.$$

Vì $a > 1$ nên $0 < \frac{\{a\}}{[a]} < 1$. Do đó $x_2 \in (1; 2)$. Chứng minh quy nạp ta được $x_n \in (1; 2), \forall n = 1, 2, \dots$

$$\text{Do đó } \{x_n\} = x_n - [x_n] = 1, \forall n = 1, 2, \dots \text{ Suy ra } x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 2(x_n - 1)^2}{1} = -x_n^2 + 4x_n - 2, \forall n = 1, 2, \dots$$

Khi đó ta có $2 - x_{n+1} = (2 - x_n)^2 = \dots = (2 - x_2)^{2^{n-1}} \Rightarrow \lim (2 - x_{n+1}) = \lim (2 - x_2)^{2^{n-1}} = 0$. Vậy $\lim x_n = 2$. ■

Ví dụ 9. (Kỹ thuật làm trội) Cho dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ được xác định bởi

$$x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!}, \forall k = 1, 2, \dots \text{ Hãy tính } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2003}^n}.$$

(Trích đề thi Olympic sinh viên năm 2003)

Lời giải.

Vì $x_{k+1} - x_k + \frac{k+1}{(k+2)!} > 0$ nên $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2002} < x_{2003} < \dots$ Ta có

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}. \text{ Do đó}$$

$$x_k = \frac{1}{2!} + \frac{3}{2!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!} = \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(k+1)!}$$

Ta có $x_{2003}^n < x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2003}^n < 2003x_{2003}^n$. Suy ra $x_{2003} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2003}^n} < 2003^{\frac{1}{n}} x_{2003}$.

$$\text{Vậy } 1 - \frac{1}{2004!} < \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2003}^n} < 2003^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{2004!}\right) \quad (1)$$

Vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2004!}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2003^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{2004!}\right) = 1 - \frac{1}{2004!}$ nên từ (1) sử dụng nguyên lý kẹp suy ra

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{2003}^n} = 1 - \frac{1}{2004!}. \blacksquare$$

Ví dụ 10. (Sử dụng các bất đẳng thức cổ điển) Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$.

Lời giải

Áp dụng AM – GM có $\sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{1+x+1}{2} - 1 = \frac{x}{2}, \forall x > 0$. Ta có $\sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{\sqrt{1+x} + 1}$ và bất đẳng thức $\sqrt{1+x} + 1 < 2 + \frac{x}{2}$, suy ra $\sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{\sqrt{1+x} + 1} > \frac{x}{2 + \frac{x}{2}} = \frac{2x}{4+x}$.

Tóm lại ta có $\frac{2x}{4+x} < \sqrt{1+x} - 1 < \frac{x}{2}, \forall x > 0$ (*). Áp dụng (*) thay x bởi $\frac{k}{n^2}$ ta được

$$\sum_{k=1}^n \frac{2 \frac{k}{n^2}}{4 + \frac{k}{n^2}} < \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) < \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{2k}{4n^2 + k} < \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) < \frac{n(n+1)}{4n^2}$$

Ta có $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2} - \sum_{k=1}^n \frac{2k}{4n^2 + k} = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2n^2(4n^2 + k)} < \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{8n^4} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{48n^4} \rightarrow 0$, suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2k}{4n^2 + k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{4n^2} = \frac{1}{4}. \text{ Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) = \frac{1}{4}. \blacksquare$$

+ Nhận xét: 1) Có thể dùng bất đẳng thức giữa TBĐH, TBN, TBC, ta được

$$1 + \frac{x}{2+x} = \frac{2}{\frac{1}{1+x} + 1} \leq \sqrt{(1+x) \cdot 1} \leq \frac{1+x+1}{2} = 1 + \frac{x}{2}, \forall x > -1 \quad (**)$$

$$2) \text{ Ta có } \frac{2x}{4+x} - \frac{x}{2+x} = \frac{x^2}{(4+x)(2+x)} > 0, \forall x > 0 \text{ nên } (*) \text{ chặt hơn } (**).$$

Ví dụ 11. (Kỹ thuật sai phân) Cho dãy số (u_n) như sau:

$$u_0 = \frac{1}{2}, u_k = u_{k-1} + \frac{u_{k-1}^2}{n} (k=1, 2, \dots, n). \text{ Tìm } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

(Trích đề thi đề nghị Olympic 30/04/2001)

Lời giải.

$$\text{Từ giả thiết ta có } n(u_k - u_{k-1}) = u_{k-1}^2 \Leftrightarrow nu_{k-1} + u_k u_{k-1} - u_{k-1}^2 = u_k u_{k-1}$$

$$\Leftrightarrow (u_k - u_{k-1})(n + u_{k-1}) = u_k u_{k-1} \Rightarrow \frac{u_k - u_{k-1}}{u_k u_{k-1}} = \frac{1}{n + u_{k-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} = \frac{1}{n + u_{k-1}} \quad (1). \text{ Do } \frac{1}{2} = u_0 < u_1 < u_2 < \dots \text{ nên từ (1) ta suy ra}$$

$$\frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} < \frac{1}{n}, \forall k = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Trong (2) thay $k = 1, 2, \dots, n$ rồi cộng các bất đẳng thức ta được

$$\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_n} < 1 \Leftrightarrow 1 < \frac{1}{u_n} \Leftrightarrow u_n < 1 \Rightarrow u_k < 1, \forall k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{Vậy từ (1) ta có } \frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} > \frac{1}{n+1}, \forall k = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

$$\text{Trong (3) thay } k = 1, 2, \dots, n \text{ rồi cộng lại ta được } \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_n} > \frac{n}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{u_n} < 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

$$\text{Vậy ta đã chứng minh được: } \frac{n+1}{n+2} < u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}. \text{ Mà } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 \text{ nên sử}$$

dụng nguyên lý kẹp suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1. \blacksquare$

Ví dụ 12. (Sử dụng định lý Lagrange) Cho dãy số

$$(x_n): x_1 = a \in \mathbb{R}; x_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(1 + x_n^2) - 2019, n \in \mathbb{N}^*.$$

Tìm giới hạn của dãy số (x_n) .

(Dựa theo tuyển tập đề thi Olympic 30/04/1999)

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - 2002$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $|f'(x)| = \left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét hàm số $g(x) = x - f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có

$$g'(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}; g(0)g(-2019) < 0$$

Nên suy ra phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất $x = l \in (-2019; 0)$. Áp dụng định lý Lagrange ta có

$$|x_{n+1} - l| = |f(x_n) - f(l)| = |f'(c)| |x_n - l| \leq \frac{1}{2} |x_n - l| \leq \dots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_1 - l| \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty, \text{ với } c \in (x_n; l)$$

Vậy $\lim x_n = l$. ■

3. Bài tập cùng phương pháp

Bài tập 1. Cho dãy số $(x_n)(n=1, 2, \dots)$ xác định bởi $x_1 = \frac{2018}{2019}$ và

$$x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n^2 + 3x_n, n=1, 2, \dots$$

Hãy tính giới hạn $\lim x_n$.

Bài tập 2. (Trích đề thi Olympic 30/04/2000) Cho dãy số $(u_n)(n=0, 1, \dots)$ được xác định như sau $u_0 = 2000$ và $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}, n=1, 2, \dots$. Tính $\lim \frac{u_n^3}{n}$.

$$(\text{Hướng dẫn: } 3 + \frac{u_0^3}{n} < \frac{u_n^3}{n} < \frac{u_1^3}{n} + 3 + \sqrt{\frac{2}{n}} + \frac{2}{9n}, \lim u_n = 3)$$

Bài tập 3. (Trích đề thi HSG tỉnh Gia Lai năm 2005) Xét dãy số thực $(x_n)(n=1, 2, \dots)$ được xác định bởi $x_1 = \frac{2005}{2004}$ và $x_{n+1} = x_n^2 - 2(x_n - 1)^2, n=1, 2, \dots$. Tìm các giới hạn của dãy đã cho.

Bài tập 4. (Trích đề thi đề nghị Olympic 30/04/2011) Cho dãy số $(x_n)(n=1, 2, \dots)$ xác định như

sau $x_1 = a > 0$ và $x_{n+1} = x_n + \frac{n}{x_n}, n=1, 2, \dots$. Tìm giới hạn của dãy số $\left(\frac{x_n}{n}\right)$.

Bài tập 5. (Bài 4.74 trang 148 sách ĐS và GT 11 NC NXBGD 2007) Cho dãy số

(u_n) xác định bởi $u_1 = a, u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{\sqrt{u_n^2 + 1}} - 1, n = 1, 2, \dots$ với $-1 < a < 0$. Chứng minh

$$0 < u_{n+1} + 1 \leq \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}(u_n + 1), \forall n \geq 1$$

và tính $\lim u_n$.

Bài tập 6. (Đề thi HSG lớp 11 tỉnh Hà Tĩnh năm học 2009 – 2010) Cho dãy số

(u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + \frac{1}{2^n}}, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng $u_{n+1} - u_n < \frac{1}{2^{n+1}}, \forall n \geq 1$ và

tính $\lim u_n$.

Bài tập 7. (Đề thi HSG cấp tỉnh lớp 12 tỉnh Quảng Ngãi năm học 2007 – 2008)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 > 0 \\ u_n^2 \leq u_n - u_{n+1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng $u_n < \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$

và tính $\lim u_n$.

Bài tập 8. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 2; x_{n+1} = x_n + \frac{n}{x_n}, \forall n \geq 1$. Chứng minh

rằng các dãy số $y_n = \frac{x_n}{n}; z_n = x_n - n$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

(Hướng dẫn: $1 < y_n \leq 1 + \frac{1}{n}, 0 < z_n \leq \frac{2}{n+2}$)

Bài tập 9. (Đề thi HSG tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm 2017) Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$x_1 = \frac{1}{2}; x_{n+1} = \frac{nx_n^2}{1 + (n+1)x_n}, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số $y_n = \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \dots + \frac{x_{n+1}}{x_n}$ có

giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

(Hướng dẫn:

$$y_n = \frac{1}{2} - (n+1)x_{n+1}, \forall n \geq 0, \lim y_n = \frac{1}{2})$$

Bài tập 10. Cho dãy số (x_n) xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_{n+1} = \frac{n+1}{3n} \sqrt{x_n^2 + nx_n + 2n^2} + \frac{2n^2 + 3n + 1}{x_n + 5n}, n \geq 1 \end{cases} \cdot \text{Chứng minh rằng dãy số } y_n = \frac{x_n}{n+1} \text{ có}$$

giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

(**Hướng dẫn:** $x_n = na_n, \lim a_n = 1$)

Bài tập 11. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{n(n+1)} \frac{x_n}{x_n^2 + n}; \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Bài tập 12. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = \frac{1}{2}$ và $x_{n+1} = \frac{n+1}{n^2} x_n (n - x_n); \forall n \geq 1$. Chứng minh dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn.

III. Phương pháp ước lượng để tìm giới hạn một số dãy số đặc biệt

1. Cơ sở lý thuyết

+ Định nghĩa 1: Cho dãy số $(u_n), n = 1, 2, \dots$. Xét dãy số $(y_n), n = 1, 2, \dots$ xác định như sau

$y_n = \sum_{k=1}^n f(u_k)$ nghĩa là $y_n = f(u_1) + f(u_2) + \dots + f(u_n)$. Khi đó $(y_n), n = 1, 2, \dots$ được gọi là dãy tổng.

+ Định nghĩa 2: Cho dãy số $(u_n), n = 1, 2, \dots$. Xét dãy số $(y_n), n = 1, 2, \dots$ xác định như sau

$y_n = \prod_{k=1}^n f(u_k)$ nghĩa là $y_n = f(u_1) \cdot f(u_2) \cdot \dots \cdot f(u_n)$. Khi đó $(y_n), n = 1, 2, \dots$ được gọi là dãy tích.

+ Chú ý:

1) Để rút gọn tổng $y_n = \sum_{k=1}^n f(u_k)$ ta thường biến đổi sai phân tổng $f(u_k) = g(u_k) - g(u_{k+1})$ khi đó $y_n = g(u_1) - g(u_{n+1})$. Tiếp theo là đánh giá dãy số (u_n) , tìm được $\lim u_n$ nghĩa là tìm được $\lim y_n$.

2) Để rút gọn tích $y_n = \prod_{k=1}^n f(u_k)$ ta thường biến đổi sai phân tích $f(u_k) = \frac{g(u_k)}{g(u_{k+1})}$ khi đó $y_n = \frac{g(u_1)}{g(u_{n+1})}$. Tiếp theo là đánh giá dãy số (u_n) , tìm được $\lim u_n$ nghĩa là tìm được $\lim y_n$.

2. Các ví dụ điển hình

Ví dụ 1. (Trích đề thi chuyên môn giáo viên dạy giỏi tỉnh Bình Định năm 2018)

Cho dãy số

$(x_n) (n=1,2,\dots)$ xác định bởi $x_1 = 2018$; $x_{n+1} = 2018x_n^2 + x_n, n=1,2,\dots$ Tìm giới hạn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_{k+1}}.$$

Lời giải

Ta có $x_{n+1} - x_n = 2018x_n^2 \geq 0, n=1,2,\dots$ và $x_1 = 1 > 0$ nên $(x_n) (n=1,2,\dots)$ là dãy tăng và dương. Ta chứng minh dãy (x_n) không bị chặn trên. Thật vậy, giả sử (x_n) bị chặn trên, khi đó (x_n) tồn tại giới hạn hữu hạn, ký hiệu $\lim x_n = a \Rightarrow a > 0$. Khi đó

$a = 2018a^2 + a \Leftrightarrow a = 0$ (vô lý), Vậy ta có $\lim x_n = +\infty$. Biến đổi

$$x_{k+1} = 2018x_k^2 + x_k \Leftrightarrow \frac{x_k}{x_{k+1}} = \frac{1}{2018} \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} \right) \text{ Suy ra } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{2018} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}} \right)$$

$$\text{Vì vậy } \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_{k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1}} \right) = \frac{1}{2018^2}. \blacksquare$$

Ví dụ 2. (Trích đề thi HSG tỉnh Bình Định 2017) Cho dãy số (u_n) như sau: $x_1 = 1$

$$\text{và } x_{n+1} = \frac{(2x_n + 1)^2}{2} + x_n, n \in N^*. \text{ Đặt } u_n = \sum_{i=1}^n \frac{2x_i + 1}{2x_{i+1} + 1}, \text{ tìm } \lim u_n$$

Lời giải.

Từ công thức truy hồi của dãy số ta có

$$x_{n+1} = \frac{(2x_n + 1)^2}{2} + x_n \Leftrightarrow 2x_{n+1} + 1 = (2x_n + 1)^2 + (2x_n + 1).$$

$$\text{Với mọi } n \in N^*, \text{ ta có : } u_n = \sum_{i=1}^n \frac{2x_i + 1}{2x_{i+1} + 1} = \sum_{i=1}^n \frac{2x_i + 1}{(2x_i + 1)^2 + 2x_i + 1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2x_i + 1) + 1}.$$

Đặt $v_n = 2x_n + 1$, ta có $\begin{cases} v_1 = 3 \\ v_{n+1} = v_n^2 + v_n \end{cases} n \in N^*$. Đến đây, bằng cách lập luận tương tự Ví dụ 1 ta có kết

$$\text{quả } \lim v_n = +\infty \text{ và } v_{k+1} = v_k^2 + v_k \Leftrightarrow \frac{1}{v_{k+1}} = \frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}}. \text{ Khi đó}$$

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{v_k + 1} = \frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{v_{n+1}}.$$

$$\text{Vậy } \lim u_n = \frac{1}{3}. \blacksquare$$

Ví dụ 3. (Trích đề thi chọn đội tuyển HSG tỉnh Bình Định năm 2011 – Vòng 1)

Cho dãy số

$$(u_n): u_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}; u_{n+1} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})u_n^2 + (2\sqrt{6} - 5)u_n + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}, n = 1, 2, \dots \quad \text{Đặt}$$

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + \sqrt{2}}, n = 1, 2, \dots \text{ Tìm giới hạn } \lim v_n.$$

Lời giải.

Từ công thức truy hồi của dãy số ta có $u_{n+1} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})u_n^2 + (2\sqrt{6} - 5)u_n + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow u_{n+1} - \sqrt{3} &= (\sqrt{3} - \sqrt{2})u_n^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})u_n + \sqrt{6}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} - \sqrt{3} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(u_n^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})u_n + \sqrt{6}) \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} - \sqrt{3} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(u_n + \sqrt{2})(u_n - \sqrt{3}) \quad (1) \end{aligned}$$

Từ (1) và $u_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3} > 0$, bằng quy nạp, ta chứng minh được $u_n > \sqrt{3}, n = 1, 2, \dots$ Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1} - \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(u_n + \sqrt{2})(u_n - \sqrt{3})} = \frac{1}{u_n - \sqrt{3}} - \frac{1}{u_n + \sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{u_n + \sqrt{2}} = \frac{1}{u_n - \sqrt{3}} - \frac{1}{u_{n+1} - \sqrt{3}} \quad (2)$$

Từ (2) ta suy ra $u_n < u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ hay dãy đã cho tăng thật sự. Ta chứng minh dãy (u_n) không bị chặn trên. Thật vậy, khi đó (u_n) tồn tại giới hạn hữu hạn, ký hiệu $\lim u_n = a \Rightarrow a > \sqrt{3}$. Khi đó $\frac{1}{a + \sqrt{2}} = \frac{1}{a - \sqrt{3}} - \frac{1}{a - \sqrt{3}} = 0$ (vô lý), Vậy ta có $\lim u_n = +\infty$.

Ta có biến đổi

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + \sqrt{2}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{u_k - \sqrt{3}} - \frac{1}{u_{k+1} - \sqrt{3}} \right) = \frac{1}{u_1 - \sqrt{3}} - \frac{1}{u_{n+1} - \sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy } \lim v_n = \lim \left(\frac{1}{u_1 - \sqrt{3}} - \frac{1}{u_{n+1} - \sqrt{3}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \blacksquare$$

Ví dụ 4. (Trích đề thi VMO năm 2009) Cho dãy số $(x_n)(n = 1, 2, \dots)$ xác định bởi

$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ và}$$

$$x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2}, \forall n \geq 2. \text{ Chứng minh rằng dãy } (y_n)(n = 1, 2, \dots) \text{ với } y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} \text{ có}$$

giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và tìm giới hạn đó.

Lời giải

Từ giả thiết thì $x_n > 0, \forall n \geq 1$

Ta

có

$$x_n - x_{n-1} = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} - x_{n-1} = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} - x_{n-1}}{2} = \frac{2x_{n-1}}{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}} > 0, \forall n \geq 2$$

Do đó (x_n) là dãy số tăng. Giả sử $\lim x_n = a \Rightarrow a > 0$ và ta có

$$a = \frac{\sqrt{a^2 + 4a} + a}{2} \Leftrightarrow a = 0 \text{ (vô lý) Vậy}$$

$\lim x_n = +\infty$. Biến đổi

$$x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2}, \forall n \geq 2 \Rightarrow x_n^2 = (x_n + 1)x_{n-1} \Rightarrow \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}, \forall n \geq 2$$

Suy

ra

$$y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \frac{1}{x_1^2} + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_n} = 6 - \frac{1}{x_n}, \forall n \geq 2$$

Do đó $y_n < 6, \forall n \geq 1$ và tăng vì $y_n = y_{n-1} + \frac{1}{x_n} > y_{n-1}$. Vậy (y_n) có giới hạn hữu hạn

khi $n \rightarrow +\infty$ và

$$\lim y_n = \lim \left(6 - \frac{1}{x_n}\right) = 6. \blacksquare$$

+ Nhận xét: Các Ví dụ vừa đề cập là những bài toán thuộc dạng quen thuộc thường hay xuất hiện trong các đề học sinh giỏi, với ý tưởng rút gọn tổng dưới dạng sai phân để đưa giới hạn cần tính về giới hạn của dãy ban đầu. Dù việc biến đổi công thức sai phân gặp thuận lợi hay khó khăn để rút gọn được dãy tổng thì chỉ cần lập luận cẩn thận, đầy đủ ở các bước sau đây là có thể giải quyết trọn vẹn bài này.

Bước 1: Chỉ ra rằng $\lim u_n = +\infty$

Bước 2: Dùng sai phân rút gọn $\sum_{k=1}^n f(u_k)$

Bước 3: Tìm $\lim \sum_{k=1}^n f(u_k)$

Như vậy, quan trọng nhất của bài toán chính là **Bước 2**, chẳng hạn ở **Ví dụ 3**, ta cần tìm được công thức liên hệ ở dạng thuận lợi cho việc rút gọn tổng. Tuy các biến đổi khá rắc rối nhưng mục tiêu vẫn là tìm một biểu thức có dạng

$$\frac{1}{u_n + \sqrt{2}} = a \left(\frac{1}{u_n + b} - \frac{1}{u_{n+1} + b} \right). \text{ Từ đó đồng nhất các hệ số rồi chọn } a, b \text{ phù hợp.}$$

Một cách tổng quát, từ biểu thức $\frac{1}{f(u_n)} = a \left(\frac{1}{u_n + b} - \frac{1}{u_{n+1} + b} \right)$, bằng cách chọn các hệ số a, b phù hợp, ta có thể tạo các dãy số dạng tổng có cách giải tương tự.

Chẳng hạn xuất phát từ đẳng thức $\frac{1}{x_n + 2} = \frac{1}{x_n + 1} - \frac{1}{x_{n+1} + 1}$, bằng một số biến đổi sơ cấp ta có được $x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n + 1$. Từ đó ta có Ví dụ 5 dưới đây.

Ví dụ 5. (Trích báo Toán học tuổi trẻ số 342) Cho dãy $(x_n) (n=1,2,...)$ xác định bởi

$$x_1 = 1 \text{ và } x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1}, n=1,2,... \text{ Đặt } y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i+2}, n=1,2,... \text{ Tìm}$$

$\lim y_n$.

Lời giải

Từ công thức xác định dãy suy ra $x_2 = 5$ và $x_n > 0, \forall n=1,2,...$ Biến đổi

$x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1} = \sqrt{(x_n^2+3x_n)(x_n^2+3x_n+2)+1} = x_n^2+3x_n+1$. Bằng quy nạp ta chỉ ra được $x_n > 3^{n-1}, \forall n \geq 2$ nên $\lim x_n = +\infty$. Lại có

$$x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n + 1 \Leftrightarrow x_{n+1} + 1 = x_n^2 + 3x_n + 2 = (x_n + 1)(x_n + 2) \Rightarrow \frac{1}{x_{n+1} + 1} = \frac{1}{(x_n + 1)(x_n + 2)} = \frac{1}{x_n + 1} - \frac{1}{x_n + 2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_n + 2} = \frac{1}{x_n + 1} - \frac{1}{x_{n+1} + 1}$$

$$\text{Do đó } y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i + 1} - \frac{1}{x_{i+1} + 1} \right) = \frac{1}{x_1 + 1} - \frac{1}{x_{n+1} + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x_{n+1} + 1} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ khi } n \rightarrow +\infty$$

Vậy $\lim y_n = \frac{1}{2}$. ■

Ví dụ 6. Cho dãy số (u_n) xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2014}(u_n^2 - u_n), \forall n \geq 1 \end{cases}$. Tính

$$\lim \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{u_{k+1} - 1}.$$

Lời giải

Theo giả thiết ta có $u_{n+1} = \frac{u_n(u_n-1)}{2014} + u_n$ mà $u_1 = 2$ suy ra $2 = u_1 < u_2 < u_3 < \dots$ do đó dãy (u_n) là dãy tăng. Giả sử dãy (u_n) bị chặn trên suy ra $\lim u_n = L$ với $(L > 2)$ khi đó.

$$\lim u_{n+1} = \lim \frac{u_n^2 + 2013u_n}{2014} \Leftrightarrow L = \frac{L^2 + 2012L}{2014} \Leftrightarrow \begin{cases} L = 0 \\ L = 1 \end{cases}, \text{ vô lý do } L > 2. \text{ Suy ra dãy}$$

(u_n) không bị chặn trên do đó $\lim u_n = +\infty \Rightarrow \lim \frac{1}{u_n} = 0$.

Ta có

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2013u_n}{2014} \Leftrightarrow u_n(u_n - 1) = 2014(u_{n+1} - u_n) \Leftrightarrow \frac{u_n}{u_{n+1} - 1} = 2014 \left(\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \right).$$

$$\Rightarrow \lim_{k=1}^n \frac{u_k}{u_{k+1}-1} = 2014 \left(\frac{1}{u_1-1} - \frac{1}{u_{n+1}-1} \right) \Rightarrow \lim_{k=1}^n \frac{u_k}{u_{k+1}-1} = 2014. \blacksquare$$

Ví dụ 7. (Trích đề thi HSG tỉnh Bình Định năm 2013) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và

$$u_{n+1} = 1 + u_1 u_2 \dots u_n, n = 1, 2, \dots. \text{ Đặt } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k}. \text{ Tính } \lim S_n.$$

Lời giải

Ta có phân tích $u_{k+1} - 1 = u_1 u_2 \dots u_k = u_k [(u_1 u_2 \dots u_{k-1} + 1) - 1] = u_k (u_k - 1), k = 1, 2, \dots$

Lại $u_k > 1, k = 2, 3, \dots$ suy ra $\frac{1}{u_{k+1}} = \frac{1}{u_k (u_k - 1)} \Leftrightarrow \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_k - 1} - \frac{1}{u_{k+1} - 1}$. Khi đó

$$S_n = 2 - \frac{1}{u_{n+1} - 1}, \forall n \geq 1.$$

Vì $u_2 = 1 + u_1 = 2, u_3 = 1 + u_1 u_2 > 1 + u_1, u_4 = 1 + u_1 u_2 u_3 > 1 + u_1, \dots$ nên $u_{n+1} - 1 = u_1 u_2 \dots u_n > u_1 (1 + u_1)^{n-1} = 2^{n-1}$

Suy ra $\lim(u_n - 1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_{n+1} - 1} = 0$. Vậy $\lim S_n = 2$. $\blacksquare$

Ví dụ 8. Cho dãy số $(u_n): u_0 = 0; u_{n+1} = \frac{u_n + 2008}{-u_n + 2010}, n = 0, 1, 2, \dots$

a) Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

b) Đặt $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k - 2008}$. Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n + 2009}$.

Lời giải

a) Bằng quy nạp ta được $u_n < 1, \forall n = 0, 1, 2, \dots$. Do đó

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(u_n - 2008)}{-u_n + 2010} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$$

Suy ra dãy (u_n) có giới hạn, đặt $\lim u_n = L \Rightarrow L = \frac{L + 2008}{-L + 2010} \Leftrightarrow L = 1$ vậy $\lim u_n = 1$.

b) Ta có $u_k - 2008 = \frac{2009(u_{k-1} - 2008)}{-u_{k-1} + 2010} \Rightarrow \frac{1}{u_k - 2008} = \frac{2}{2009(u_{k-1} - 2008)} - \frac{1}{2009}, k = 0, 1, 2, \dots$

suy ra

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k - 2008} = \frac{2}{2009} \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_{k-1} - 2008} - \frac{n}{2009} \Rightarrow T_n - \frac{1}{u_0 - 2008} = \frac{2}{2009} \left(T_n - \frac{1}{u_n - 2008} \right) - \frac{n}{2009}$$

suy ra

$$T_n = \frac{-2}{2007(u_n - 2008)} - \frac{n}{2007} + \frac{1}{2007(u_0 - 2008)} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n+2009} = -\frac{1}{2007}. \blacksquare$$

Ta xét thêm một số ví dụ về dãy tích.

Ví dụ 9. (Trích đề thi đề nghị Olympic 30/04/2003) Đặt $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1$, xét dãy số (u_n) xác định bởi $u_{n+1} = \frac{f(1) \cdot f(3) \cdots f(2n-1)}{f(2) \cdot f(4) \cdots f(2n)}, \forall n = 1, 2, \dots$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{u_n}$.

Lời giải

$\forall n = 1, 2, \dots$ Ta có phân tích

$$f(n) = ((n^2 + 1) + n)^2 + 1 = (n^2 + 1)^2 + 2n(n^2 + 1) + n^2 + 1 = (n^2 + 1)[(n+1)^2 + 1]$$

$$\text{Do đó } \frac{f(2n-1)}{f(2n)} = \frac{(4n^2 - 4n + 2)(4n^2 + 1)}{(4n^2 + 1)(4n^2 + 2n + 2)} = \frac{(2n-1)^2 + 1}{(2n+1)^2 + 1},$$

$$\text{suy ra } u_n = \frac{(1^2 + 1)(3^2 + 1) \cdots [(2n-1)^2 + 1]}{(3^2 + 1)(5^2 + 1) \cdots [(2n+1)^2 + 1]} = \frac{1}{2n^2 + 2n + 1}.$$

$$\text{Suy ra } \lim_{n \rightarrow \infty} n\sqrt{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2 + 2n + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \blacksquare$$

Ví dụ 10. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n(n+2)}; \forall n = 1, 2, \dots$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n u_k$.

Lời giải

$$\text{Ta có phân tích } 1 + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

$$\text{Do đó } \prod_{k=1}^n u_k = \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdots \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{2(n+1)}{n+2}. \text{ Suy ra } \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{n+2} = 2. \blacksquare$$

3. Bài tập cùng phương pháp

Bài tập 1. Cho dãy số $(x_n)(n = 1, 2, \dots)$ được xác định bởi $x_1 = 3, x_{n+1} = x_n^2 - 3x_n + 4, n = 1, 2, \dots$. Tìm giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} + \cdots + \frac{1}{x_n - 1} \right)$.

Bài tập 2. Cho dãy $(x_n)(n = 1, 2, \dots)$ xác định bởi $x_1 = 2$ và $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 + 1), n = 1, 2, \dots$

Đặt $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k + 1}$. Tìm phần nguyên $[S_{2008}]$ và tính giới hạn $\lim S_n$.

Bài tập 3. Cho dãy $(x_n)(n=1,2,\dots)$ xác định bởi $x_1 = a > 1$ và $x_{k+1} = x_k^2, n=1,2,\dots$.
Tìm giới hạn

$$\lim \left(\frac{x_1}{x_2 - 1} + \frac{x_2}{x_3 - 1} + \dots + \frac{x_n}{x_{n+1} - 1} \right).$$

Bài tập 4. Cho dãy số $(x_n)(n=1,2,\dots)$ được xác định bởi $x_1 = a > 1$,
 $2019x_{n+1} = x_n^2 + 2018x_n, n \geq 1$. Tính giới hạn $\lim \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{i+1} - 1}$.

Bài tập 5. Cho dãy $(x_n)(n=1,2,\dots)$ thoả mãn $x_1 = a > 1$ và $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + x_n - 1}{x_n}$. Tìm
giới hạn

$$\lim \left(\frac{1}{x_1^2 - 1} + \frac{1}{x_2^2 - 1} + \dots + \frac{1}{x_n^2 - 1} \right).$$

Bài tập 6. Cho dãy (u_n) xác định như sau $\begin{cases} u_1 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n^2 - 7u_n + 25), n = 1, 2, \dots \end{cases}$. Đặt

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k - 2}. \text{ Tìm } \lim v_n.$$

Bài tập 7. (Chuyên Lê Quý Đôn – Bình Định 30. 04.2009) Cho dãy số (u_n)
được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2009 \\ u_{n+1} = \frac{2009u_n(1+u_n^2)}{2009u_n^2 - u_n + 2009}, n \geq 1 \end{cases}$. Tính giới hạn $\lim \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{1+u_i^2} \right)$.

Bài tập 8. (Lê Quý Đôn, Bà Rịa – Vũng Tàu 30.04.2009) Cho dãy số
 $(x_n)(n=1,2,\dots)$ xác định bởi $x_1 = 2; x_{n+1} = \frac{x_n^4 - x_n + 1}{x_n^3 - x_n + 1}, \forall n = 1, 2, \dots$ Chứng minh rằng dãy
số (y_n) xác định bởi $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k^3}$ có giới hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và tính giới hạn đó.

Bài tập 9. (Cho dãy số $(x_n)(n=1,2,\dots)$ xác định bởi $x_1 = a > 1$ và $x_{n+1} = x_n^2, n=1,2,\dots$
Đặt $S_n = \frac{x_1}{x_2 - 1} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{x_2}{x_3 - 1} + \left(1 - \frac{2}{n}\right) \frac{x_3}{x_4 - 1} + \dots + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \frac{x_n}{x_{n+1} - 1}, n = 1, 2, \dots$ Tính giới
hạn $\lim S_n$.

Bài tập 10. Cho dãy số $(x_n)(n=1,2,\dots)$ với $x_1 = 1; x_{n+1} = \frac{x_n^{24}}{24} + x_n, n \in N^*$. Tính giới
hạn của dãy số

$$u_n = \frac{x_1^{23}}{x_2} + \frac{x_2^{23}}{x_3} + \dots + \frac{x_n^{23}}{x_{n+1}}, n = 1, 2, \dots$$

Bài tập 11. Cho a, b, c, α là các số thực và $\alpha \neq c - b$. Dãy số $(u_n), (v_n)$ được xác định bởi công thức $u_1 = a; u_{n+1} = \frac{u_n^2 + bu_n}{c}; v_n = \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{u_{k+1} + b - c}, n \geq 1$. Biết rằng $\lim u_n = \alpha$. Tính giới hạn $\lim v_n$.

Bài tập 12. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} u_1 = 2019 \\ u_{n+1} = u_n \left(\sqrt{u_n} + 1 \right)^2, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$
 Tính

$$\lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{u_i} + 1}$$

Bài tập 13. Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $x_1 = \frac{2}{3}, x_{n+1} = \frac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}, \forall n = 1, 2, \dots$

Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n x_i$.

IV. Định lý Lagrange và dãy số sinh bởi nghiệm của phương trình

1. Cơ sở lý thuyết

+ Định lý 1: Cho dãy số (x_n) xác định như sau: $x_1 = a, x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, \dots$. Khi đó

1. Nếu $f(x)$ là hàm số đồng biến thì dãy số (x_n) đơn điệu.
2. Nếu $f(x)$ là hàm số nghịch biến thì dãy số (x_n) có chứa hai dãy con $(x_{2k}), (x_{2k+1})$ đơn

điệu ngược chiều.

3. Khi $f(x)$ là hàm số nghịch biến và dãy (x_n) bị chặn thì

$$\exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = a, \lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = b \text{ và do}$$

đó dãy đã cho hội tụ khi và chỉ khi $a = b$.

+ Định lý 2: (Định lý Bolzano – Cauchy)

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$. Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = M$.

Hệ quả 1. Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Hệ quả 2. Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$, đơn điệu và nhận cả giá trị âm lẫn dương trên đó thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất trên $[a; b]$.

+ **Định lý 3: (Định lý Lagrange)** Nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[a; b]$, có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ thì tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Trong nội dung phần 3.1, các dãy số dạng $x_1 = a, x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, \dots$ trong đó $f(x)$ là hàm số

đồng biến đã được đề cập và giải quyết, ở đây ta xét thêm cách giải cho dãy số dạng trên khi $f(x)$ là hàm số nghịch biến, trường hợp đặc biệt nếu đánh giá được $|f'(x)| < 1$ thì việc sử dụng định lý Lagrange sẽ giúp bài toán tìm giới hạn nhanh chóng hơn. Bên cạnh đó, việc sử dụng một số tính chất giải tích của hàm số sẽ giúp chúng ta giải quyết được giới hạn của lớp các hàm số sinh bởi nghiệm của phương trình.

2. Các ví dụ điển hình

Ví dụ 1. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn điều kiện $u_1 = 2019; u_{n+1} = \sqrt{3} + \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 - 1}}, n = 1, 2, \dots$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải 1

Từ hệ thức truy hồi của dãy số ta thấy $u_n > 1, \forall n = 1, 2, \dots$. Xét hàm số $f(x) = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ với $x \in (1, +\infty)$ và $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} < 0$ nên $f(x)$ là hàm số

nghịch biến trên $(1, +\infty)$. Ta chứng minh dãy (u_n) bị chặn. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp $\sqrt{3} < u_n < \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1). Thật vậy

Với $n = 1$ thì bất đẳng thức trên luôn đúng. Giả sử bất đẳng thức trên đúng đến n , tức là

$\sqrt{3} < u_n < \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ta có $u_{n+1} = f(u_n)$ và f là nghịch biến trên $(1, +\infty)$ nên $u_{n+1} < f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác do $\sqrt{3} < u_n$ nên từ hệ thức $u_{n+1} = f(u_n)$ ta có $\sqrt{3} < u_{n+1}$. Vậy (1) được chứng minh.

Theo định lý 1 thì (u_n) có chứa hai dãy con $(u_{2k}), (u_{2k+1})$ đơn điệu ngược chiều và $\exists a = \lim u_{2n}, \exists b = \lim u_{2n+1}$, trong đó a, b là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a = f(b) \\ b = f(a) \end{cases} (*), \text{ với } \sqrt{3} \leq a, b \leq \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Xét hàm số $g(x) = f(f(x)) - x$, với $\sqrt{3} < x < \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}$, có $g'(x) = f'(x).f'(f(x)) - 1$. Do

$\sqrt{3} < f(x) < \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}$ và $f'(x) < 0$ với mọi $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}$ nên $g'(x) < 0$ với mọi

$\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}}$, cùng với $g(\sqrt{3}).g(\sqrt{\frac{3}{2}}) < 0$ suy ra phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm

duy nhất. Giải phương trình ta được $x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}$. Do đó $\lim u_n = a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}$. ■

+ **Nhận xét:** Lời giải 1 khá cồng kềnh, nếu ta đánh giá hàm $f'(x)$ chặt hơn thì có lời giải tinh gọn hơn như sau

Lời giải 2

Xét $f(x) = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} \Rightarrow |f'(x)| < \frac{1}{2\sqrt{2}}$ khi $x > \sqrt{3}$.

Ta có $f(x) = x \Leftrightarrow x = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})^2 = \frac{x^2}{x^2 - 1} \Leftrightarrow (x^2 - \sqrt{3}x)^2 - 2(x^2 - \sqrt{3}x) - 3 = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{3}x = -1 \\ x^2 - \sqrt{3}x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2} = a$$

Áp dụng định lý Lagrange có

$$|x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a)| = |f'(\theta_n)| |x_n - a| < \frac{1}{2\sqrt{2}} |x_n - a| < \dots < \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |x_1 - a| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ với } \theta_n$$

nằm giữa a và u_n . Do đó $\lim x_n = a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}$. ■

Ví dụ 2. (Trích đề thi dự bị VMO 2008) Cho số thực a , xét dãy số (x_n) xác định bởi $x_1 = a, x_{n+1} = \ln(3 + \cos x_n + \sin x_n) + 2014, n = 1, 2, \dots$. Chứng minh rằng dãy số trên có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

+ **Nhận xét:** Hệ thức truy hồi của dãy hầu như không biến đổi được gì thêm, tuy nhiên lại có

dạng $x_{n+1} = f(x_n)$, ta nghĩ ngay đến việc dùng hàm số để giải quyết.

Lời giải

$$\text{Đặt } f(x) = \ln(3 + \sin x + \cos x) + 2014, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{3 + \sin x + \cos x}.$$

$$\Rightarrow 3f'(x) = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}f'(x) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 9(f'(x))^2 \leq 2 + 2(f'(x))^2 \Rightarrow |f'(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{7}} = q, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Áp dụng định lí Lagrange cho hàm số $f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thì với mọi số thực x, y tồn tại $z \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f'(z)| |x - y| \leq q |x - y| \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq q |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Với $m > n (m, n \in \mathbb{N}^*)$, ta có:

$$|x_m - x_n| = |f(x_{m-1}) - f(x_{n-1})| \leq q |x_{m-1} - x_{n-1}| \leq \dots \leq q^{m-n-1} |x_{m-n+1} - x_1|.$$

Mặt khác: $2014 < x_n < 2014 + \ln 5, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (x_n)$ là dãy bị chặn.

Do đó: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* : q^{m-n-1} |x_{m-n+1} - x_1| < \varepsilon, \forall m > n \geq N$.

Vậy (x_n) là dãy Cauchy, nên dãy số đã cho hội tụ. ■

Ví dụ 3. Cho dãy số (x_n) , xác định bởi:
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = 1 + \frac{2018}{1 + x_n}, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$
 Chứng minh rằng

dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 1 + \frac{2018}{1+x}$ trên $[0; +\infty)$. Ta thấy $f(x)$ liên tục và nghịch biến trên

$[0; +\infty)$ (Vì $f'(x) = \frac{-2018}{(1+x)^2} < 0$). Do đó $1 < f(x) \leq 2019$. Ta có

$$x_{n+1} = 1 + \frac{2018}{1+x_n} = f(x_n), \forall n = 1, 2, \dots \Rightarrow \text{dãy } (x_n) \text{ bị}$$

chặn.

Mặt khác, ta có $x_1 < x_3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_3) \Rightarrow x_2 > x_4 \Rightarrow f(x_2) < f(x_4) \Rightarrow x_3 < x_5 \Rightarrow \dots$. Suy ra dãy (x_{2n+1}) là dãy đơn điệu tăng và bị chặn, còn dãy (x_{2n}) là dãy đơn điệu giảm và bị chặn, nên các dãy $(x_{2n+1}), (x_{2n})$ có giới hạn hữu hạn.

Giả sử $\lim x_{2n+1} = a$ và $\lim x_{2n} = b$, ($a, b \geq 1$). Từ

$$x_{2n+1} = f(x_{2n}) \Rightarrow \lim x_{2n+1} = \lim f(x_{2n}) \Leftrightarrow a = f(b) \text{ và}$$

$$x_{2n+2} = f(x_{2n+1}) \Rightarrow \lim x_{2n+2} = \lim f(x_{2n+1}) \Leftrightarrow a = f(b).$$

Ta có hệ
$$\begin{cases} b = 1 + \frac{2018}{1+a} \\ a = 1 + \frac{2018}{1+b} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{2019}. \text{ Vậy } \lim x_n = \sqrt{2019}. \blacksquare$$

Sau đây, ta xét lớp các bài toán giới hạn của dãy số sinh bởi nghiệm của phương trình. Ta có bài toán tổng quát thường gặp sau đây

+ Bài toán: Cho phương trình $f_n(x) = 0, n = 1, 2, \dots$ xác định trên D , với n là tham số, ẩn x .

1) Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n (kể từ một số n_0 nào đó) thì phương trình đã cho có

duy nhất một nghiệm trên D , ký hiệu nghiệm đó là x^n .

2) Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn khi $n \rightarrow +\infty$, và tính $\lim x_n$.

Thông thường ta không thể xác định được giá trị cụ thể của x^n , tuy nhiên cần chú ý đến $f_n(x_n) = 0$ so sánh với $f_{n+1}(x_n)$ và kết hợp tính đơn điệu của hàm $f_n(x) = 0$ để từ đó so sánh được x_n và x_{n+1} . Việc tìm giới hạn của dãy thường dùng định lý kẹp hoặc định lý Lagrange.

Ví dụ 4. Cho phương trình $x^{2n} - 3x + 2 = 0, n \in \mathbb{N}, n > 1$

1. Chứng minh rằng với mỗi n , phương trình đã cho có đúng một nghiệm $x_n \in (0; 1)$.

2. Gọi $(x_n), n = 2, 3, \dots$ là dãy số có được theo cách xác định như trên. Chứng minh dãy (x_n) đơn điệu và bị chặn.

(Trích đề chọn đội tuyển HSG tỉnh Bến Tre năm 2011)

Lời giải

1. Ta nhận thấy phương trình $x^{2^n} - 3x + 2 = 0, n \in \mathbb{N}, n > 1$ luôn có một nghiệm $x = 1$.
Nếu $x = a$ là

ng nghiệm khác 1 của phương trình, ta có $3a = a^{2^n} + 2 > 0 \Rightarrow a > 0$

Với $x > 1$, Với $n \geq 2$ cố định, xét hàm $f_n(x) = x^{2^n} - 3x + 2 = 0, x > 1$. Ta có

$f'_n(x) = 2nx^{2^n-1} - 3 > 0, \forall n \geq 2, \forall x > 1$ suy ra $f_n(x) > f_n(1) = 0$ hay phương trình vô nghiệm với $x > 1$.

Như vậy ta sẽ chứng minh phương trình có nghiệm $x_n \in (0; 1)$ và nghiệm đó là duy nhất. Thật vậy,

Với $n \geq 2$ cố định, xét hàm $f_n(x) = x^{2^n} - 3x + 2 = 0, 0 < x < 1$. Ta có

$f'_n(x) = 2nx^{2^n-1} - 3; f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = \sqrt[2n-1]{\frac{3}{2n}} \in (0; 1)$. Bảng biến thiên:

x	0	x_n	x_0	1
$f'_n(x)$		-	0	+
$f_n(x)$	2			0

$f_n(x_0)$

Từ bảng biến thiên ta nhận thấy $f_n(x)$ nghịch biến trên $(0; x_0)$, đồng biến trên $(x_0; 1)$, $f_n(1) = 0$ và $f_n(0) \cdot f_n(x_0) < 0$ suy ra phương trình có nghiệm $x_n \in (0, x_0) \subset (0; 1)$ và nghiệm đó là duy nhất.

2. Ta có $f_n(x_n) = 0 \Leftrightarrow x_n^{2^n} - 3x_n + 2 = 0 \Leftrightarrow x_n^{2^n} = 3x_n - 2$. Ta cũng có $f_n\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{2^n} > 0$ và $f_n(x)$ nghịch biến trên $(0; x_0)$, đồng biến trên $(x_0; 1)$ nên ta có $\frac{2}{3} \in (0; x_n)$ hay $x_n > \frac{2}{3}, \forall n$.

Trong khi đó
 $f_{n+1}(x_n) = x_n^{2^{n+2}} - 3x_n + 2 = x_n^2(3x_n - 2) - 3x_n + 2 = (3x_n - 2)(x_n^2 - 1) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$.

Tương tự, xét các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $f_{n+1}(x)$ thì ta thấy, vì $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0; f_{n+1}(x_n) < 0$ nên $x_n \in (x_{n+1}; 1) \Rightarrow x_{n+1} < x_n, \forall n$. Vậy dãy (x_n) giảm và bị chặn dưới bởi $\frac{2}{3}$.

Hơn nữa, từ bảng biến thiên của hàm $f_n(x) = x^{2^n} - 3x + 2 = 0, x \in (0; 1)$ ta có $x_n < \sqrt[2n-1]{\frac{3}{2n}}$ và

$$0 < 3x_n - 2 = x_n^{2n} < \left(\sqrt[2n]{\frac{3}{2n}} \right)^{2n} = \frac{3}{2n} \cdot \sqrt[2n]{\frac{3}{2n}} < \frac{3}{2n}. \text{ Vì } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2n} = 0 \text{ nên } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{2}{3}. \blacksquare$$

+ **Nhận xét:** Bảng biến thiên của hàm $f_n(x)$, cách giải của tác giả đề tài đã đánh giá được cụ thể giới hạn của dãy x_n mặc dù đề bài không yêu cầu.

Ví dụ 5. Cho n là một số nguyên dương ($n > 1$). Chứng minh rằng phương trình $x^n = x + 1$ có một nghiệm dương duy nhất, kí hiệu là x_n . Chứng tỏ rằng $x_n \rightarrow 1$ khi $n \rightarrow +\infty$ và tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1)$.

Lời giải

Ta nhận thấy phương trình $x^n = x + 1, n \in \mathbb{N}, n > 1$ nếu có nghiệm dương $x = a$ thì $a^n = a + 1 > 1$ nên trên $(0, 1]$. Khi đó

Xét hàm $f_n(x) = x^n - x - 1$. Ta có
 $f'_n(x) = nx^{n-1} - 1 > 0, \forall x > 1; f_n(1) = -1 < 0; f_n(2) = 2^n - 3 > 0, \forall n > 1$. Do vậy phương trình $x^n = x + 1$ có nghiệm dương duy nhất. Rõ ràng $1 < x_n < 2$. Ta có $f_{n+1}(1) = -1 < 0$ và $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n - 1 > x_n^n - x_n - 1 = f_n(x_n) = 0$. Từ đó $1 < x_{n+1} < x_n$. Suy ra dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn là a . Ta chứng minh $a = 1$. Thật vậy, giả sử $a > 1$. Khi đó $x_n \geq a, \forall n$ và ta tìm được n đủ lớn sao cho $x_n^n \geq a^n > 3$ với $x_n + 1 < 3$, mâu thuẫn với $f_n(x_n) = 0$.

(Một cách khác để tính $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$: $1 < x_n = \sqrt[n]{x_n + 1} \leq \frac{(x_n + 1) + 1 + \dots + 1}{n} = \frac{x_n + n}{n} < 1 + \frac{2}{n}$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1$)

Tiếp theo, đặt $x_n = 1 + y_n$ với $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. Thay vào phương trình $f_n(x_n) = 0$ ta được $(1 + y_n)^n = 2 + y_n$. Suy ra $n \ln(1 + y_n) = \ln(2 + y_n)$ từ đó $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(1 + y_n) = \ln 2$. Nhưng $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + y_n)}{y_n} = 1$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} n y_n = \ln 2$ tức là $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1) = \ln 2$. $\blacksquare$

Ví dụ 6. (Trích đề thi VMO năm 2002). Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh phương trình $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \dots + \frac{1}{n^2x-1} = \frac{1}{2}$ có một nghiệm duy nhất $x_n > 1$ và khi $n \rightarrow +\infty$ thì x_n dần đến 4.

Lời giải

Đặt $f_n(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \dots + \frac{1}{n^2x-1} - \frac{1}{2}$. Dễ thấy, với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ thì liên tục và nghịch biến trên $(1; +\infty)$. Hơn nữa, $f_n(x) \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow 1^+$ và $f_n(x) \rightarrow -\frac{1}{2}$ khi $x \rightarrow +\infty$. Do đó với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ thì phương trình $f_n(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_n > 1$. Ta có $f_n(x_n) = 0$ và

$$f_n(4) = \frac{1}{4-1} + \frac{1}{16-1} + \dots + \frac{1}{4n^2-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4n}$$

Từ định lý Lagrange ta có $\frac{1}{4n} = |f_n(x_n) - f_n(4)| = |f'_n(c)| |x_n - 4|$ với $c \in (x_n; 4)$

nhưng $|f'_n(c)| = \frac{1}{(c-1)^2} + \frac{4}{(4c-1)^2} + \dots + \frac{n^2}{(n^2c-1)^2} > \frac{1}{9}$ nên $|x_n - 4| < \frac{9}{4n}$ suy ra $\lim x_n = 4$. ■

Ví dụ 7. Với mỗi số nguyên dương n , ta xét hàm số f_n trên $\mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f_n(x) = x^{2n} + x^{2n-1} + \dots + x^2 + x + 1$$

1. Chứng minh rằng hàm số f_n đạt giá trị nhỏ nhất tại một điểm duy nhất;

2. Gọi giá trị nhỏ nhất đó là S_n đạt tại x_n . Chứng minh rằng

a) $S_n > \frac{1}{2}, \forall n$ và không tồn tại $a > \frac{1}{2}$ sao cho $S_n > a, \forall n$;

b) (S_n) là dãy giảm và $\lim S_n = \frac{1}{2}$;

c) $\lim x_n = -1$.

Lời giải

1. Để ý rằng $f_n(x) \geq 1$ khi $x \geq 0$ và $f_n(x) = \sum_{j=1}^n x^{2j-1} (1+x) + 1$ suy ra $f_n(x) \geq 1, \forall x \leq -1$.

Do vậy giá

trị nhỏ nhất của $f_n(x)$ đạt được trong $[-1; 0]$. Khi đó ta có

$$f_n(x) = \frac{1-x^{2n+1}}{1-x}; f'_n(x) = \frac{2nx^{2n+1} - (2n+1)x^{2n} + 1}{(1-x)^2}$$

Xét hàm số $g_n(x) = 2nx^{2n+1} - (2n+1)x^{2n} + 1$ trong $[-1; 0]$. Ta có

$$g_n(0) = 1; g_n(-1) = -4n < 0; g'_n(x) = 2n(2n+1)x^{2n-1}(x-1) \geq 0, x \in [-1; 0]$$

Vậy phương trình $g_n(x) = 0$ có đúng một nghiệm $x_n \in [-1; 0]$. Từ đó suy ra $f'_n(x) \leq 0$ với $-1 \leq x \leq x_n$ và $f'_n(x) \geq 0$ với $x_n \leq x \leq 0$. Do đó hàm số $f_n(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ tại một điểm duy nhất $x_n \in [-1; 0]$.

2. a) Vì $-1 \leq x_n \leq -\frac{1}{2}$ nên $S_n = f_n(x_n) = \frac{1-x_n^{2n+1}}{1-x_n} > \frac{1}{1-x_n} \geq \frac{1}{2}$. Giả sử tồn tại $a (a > \frac{1}{2})$ sao

cho $S_n > a, \forall n \geq 1$. Khi đó $f_n(x) = \frac{1-x^{2n+1}}{1-x} > a, \forall x \in (-1; 0], n \geq 1$ chuyển qua giới hạn khi

$n \rightarrow +\infty$ ta thu được $\frac{1}{1-x} > a, \forall x \in [-1; 0]$ khi $x \rightarrow -1$ ta thu được điều mâu thuẫn với giả thiết.

b) Với $x \in [-1; 0]$ thì $f_{n+1}(x) = x^{2n+2} + x^{2n+1} + f_n(x) \leq f_n(x)$ do đó

$$S_{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_{n+1}(x_n) \leq f_n(x_n) = S_n$$

Tức (S_n) là dãy giảm. Do dãy bị chặn bởi $\frac{1}{2}$ nên tồn tại $\lim S_n = S \geq \frac{1}{2}$. Do dãy (S_n) giảm nên

$S_n \geq S, \forall n \geq 1$. Theo kết quả phần a) thì $S \leq \frac{1}{2}$. Từ đó suy ra $S = \frac{1}{2}$.

c) Vì $f_{n+1}(x) = f_n(x)x^2 + x + 1$ ta thu được $S_{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}) = f_n(x_{n+1})x_{n+1}^2 + x_{n+1} + 1$ (1) Do $f_n(x_{n+1}) \geq f_n(x_n) = S_n > \frac{1}{2}$ nên từ (1) suy ra

$S_{n+1} > \frac{1}{2}x_{n+1}^2 + x_{n+1} + 1 = \frac{1}{2}(x_{n+1} + 1)^2 + \frac{1}{2} \Rightarrow S_{n+1} - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}(x_{n+1} + 1)^2 \geq 0, \forall n \geq 1$ chuyển qua giới hạn $n \rightarrow +\infty$ ta được $\lim x_n = -1$. ■

3. Bài tập cùng phương pháp

Bài tập 1. Cho phương trình $x^{2n+1} = x + 1$

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n , phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x_n ;

b) Xét dãy số $(x_n) (n=1, 2, \dots)$ xác định như trong a). Tìm giới hạn $\lim x_n$.

Bài tập 2. Xét phương trình $\frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4} + \dots + \frac{1}{x-k^2} + \dots + \frac{1}{x-n^2} = 0, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Chứng minh rằng với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x_n \in (0; 1)$;

b) Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

Bài tập 3. Xét dãy số (x_n) trong đó x_n là nghiệm dương duy nhất của phương trình

$x^n = x^2 + x + 1$. Dãy số (y_n) được xác định theo công thức $y_n = n(x_n - 1)$. Chứng minh rằng dãy (y_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài tập 4. Cho (x_n) là dãy các nghiệm liên tiếp của phương trình $\tan x = x, x > 0$. Tìm giới hạn $\lim (x_{n+1} - x_n)$.

Bài tập 5. Cho phương trình với tham số n nguyên dương

$$\frac{1}{x\sqrt{2} + 2\sqrt{1}} + \frac{1}{(x+1)\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(x+n-1)\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}} = 1$$

a) Chứng minh rằng với $n > 23$ thì phương trình đã cho có nghiệm dương duy nhất x_n ;

b) Chứng minh rằng khi $n \rightarrow +\infty$ thì dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó

Bài tập 6. Cho $n \in \mathbb{N}$, xét phương trình $\frac{1}{\sqrt{nx+1}} + \frac{1}{\sqrt{nx+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{nx+n}} = \sqrt{n}$

- a) Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn có nghiệm dương duy nhất x_n
- b) Tìm giới hạn $\lim x_n$.

Bài tập 7. Cho $P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, n \geq 1$

- a) Chứng minh rằng nếu n chẵn thì $P_n(x)$ không có nghiệm thực
- b) Chứng minh rằng nếu n lẻ thì $P_n(x)$ có nghiệm thực duy nhất
- c) Chứng minh rằng nếu x_k là nghiệm của $P_{2k+1}(x)$ thì $\lim x_k = -\infty$.

Bài tập 8. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n lớn hơn hoặc bằng 3, có duy nhất một số $x_n \in [0; n]$ sao cho $x_n^n = e^{x_n}$

Chứng minh rằng dãy $(x_n) (n=3, 4, \dots)$ có giới hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

Bài tập 9. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n , phương trình $\cos x = x^n$ có duy nhất nghiệm trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, gọi nghiệm đó là u_n . Tìm $\lim u_n$.

Bài tập 10. Cho phương trình $x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1 = 0$. Chứng minh rằng phương trình có nghiệm dương duy nhất x_n . Tìm $\lim x_n$.

Bài tập 11. Chứng minh rằng phương trình $x^n - nx + 1 = 0$ có hai nghiệm α_n và β_n sao cho

$0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$. Tìm các giới hạn $\lim \alpha_n$ và $\lim \beta_n$

Bài tập 12. Xét hàm số $f_n(x) = e^{-x} \cdot \sum_{m=0}^n \frac{x^m}{m!}$, trong đó $x \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}^*$.

- a) Chứng minh rằng với mỗi số thực dương k với $0 < k < 1$ và mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ thì phương trình $f_n(x) = k$ có nghiệm duy nhất;
- b) Gọi α_n là nghiệm của phương trình trên. Tìm $\lim \frac{1}{\alpha_n}$.

V. Xác định công thức số hạng tổng quát từ hệ thức truy hồi và tìm giới hạn

1. Cơ sở lý thuyết

Ở phần này, chúng ta sẽ nghiên cứu lớp các bài toán dãy số mà từ công thức truy hồi của dãy qua một số bước biến đổi sơ cấp, kết hợp sử dụng phương pháp quy nạp sẽ dự đoán và tìm được công thức số hạng tổng quát, từ đó mà việc tính giới hạn dãy đơn giản hơn. Có thể liệt kê một số dạng biến đổi như sau

+ Chú ý giá trị của các số hạng đầu và liên hệ với giá trị lượng giác của các cung đặc biệt để lượng giác hóa và đưa về dãy dạng lượng giác.

+ Quy nạp và đưa về các dãy số đặc biệt như cấp số cộng, cấp số nhân, ...

+ Quy nạp, dùng sai phân tìm được công thức số hạng tổng quát.

2. Các ví dụ điển hình

Trước tiên, ta xét ví dụ 1 sau đây để thấy được một lần nữa cách nhìn toàn diện cho một bài toán tìm giới hạn dãy số.

Ví dụ 1. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 4$ và $u_{n+1} = u_n^2 - 2$, với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm $\lim \frac{u_{n+1}}{u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n}$.

Lời giải 1

(Giải theo Nguyên lý kẹp)

Với mọi $n = 1, 2, \dots$ Ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - 4 &= (u_n^2 - 2)^2 - 4 = u_n^4 - 4u_n^2 = u_n^2(u_n^2 - 4) = u_n^2 \cdot u_{n-1}^2(u_{n-1}^2 - 4) \\ &= \dots = u_n^2 u_{n-1}^2 \dots u_2^2 u_1^2 (u_1^2 - 4) = 12(u_n \cdot u_{n-1} \dots u_1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \left(\frac{u_{n+1}}{u_1 \cdot u_2 \dots u_n} \right)^2 = 12 + \frac{4}{(u_1 \cdot u_2 \dots u_n)^2}; \quad \forall n = 1, 2, \dots (1).$$

Mặt khác, vì $u_1 = 4 > 2$ nên từ $u_{n+1} = u_n^2 - 2$ và chứng minh bằng quy nạp ta thu được $u_n > 2$ với mọi $n = 1, 2, \dots$. Khi đó $u_1 \cdot u_2 \dots u_n > 2^n; \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có bất đẳng thức $0 < \frac{4}{(u_1 \cdot u_2 \dots u_n)^2} < \frac{4}{2^{2n}}; \forall n = 1, 2, \dots$. Nên theo nguyên lý kẹp ta được $\lim \frac{4}{(u_1 \cdot u_2 \dots u_n)^2} = 0$.

$$\text{Từ (1) suy ra } \lim \left(\frac{u_{n+1}}{u_1 \cdot u_2 \dots u_n} \right)^2 = 12.$$

Mặt khác, hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ nên

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_1 \cdot u_2 \dots u_n} = \lim \sqrt{\left(\frac{u_{n+1}}{u_1 \cdot u_2 \dots u_n} \right)^2} = \sqrt{\lim \left(\frac{u_{n+1}}{u_1 \cdot u_2 \dots u_n} \right)^2} = \sqrt{12}. \text{ Vậy } \lim \frac{u_{n+1}}{u_1 \cdot u_2 \dots u_n} = \sqrt{12}. \blacksquare$$

+ **Nhận xét 1:** Từ lời giải 1 ta nhận thấy

$$\begin{aligned} \lim \frac{u_{n+1}}{u_1 \cdot u_2 \dots u_n} &= \lim \sqrt{\left(\frac{u_{n+1}}{u_1 \cdot u_2 \dots u_n} \right)^2} = \sqrt{\lim \left(\frac{u_{n+1}}{u_1 \cdot u_2 \dots u_n} \right)^2}, \text{ nghĩa là cần tìm giới hạn cho dãy} \\ &\left(\frac{u_{n+1}}{u_1 \cdot u_2 \dots u_n} \right)^2, \text{ lại có } u_{n+1} = u_n^2 - 2, \text{ với ý nghĩa } 2 = 2 \cdot a \cdot \frac{1}{a}, a \neq 0 \text{ là số đặc biệt trong khai} \end{aligned}$$

triển bình phương, ta có lời giải khác bằng cách tìm số hạng tổng quát của (u_n) như sau

Lời giải 2

(Giải theo phương pháp tìm số hạng tổng quát)

Vì $u_1 = 4 > 2$ nên đặt $u_1 = a + \frac{1}{a}, a > 1$.

Ta có $u_2 = u_1^2 - 2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$.

Bằng quy nạp, ta có thể chứng minh được $u_{n+1} = a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}}, \forall n \in \mathbb{N}$. Ta có

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n u_i &= \prod_{i=1}^n \left(a^{2^{i-1}} + \frac{1}{a^{2^{i-1}}}\right) = \left(a - \frac{1}{a}\right)^{-1} \left[\left(a - \frac{1}{a}\right) \prod_{i=1}^n \left(a^{2^{i-1}} + \frac{1}{a^{2^{i-1}}}\right)\right] = \left(a - \frac{1}{a}\right)^{-1} \left(a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}}\right) \\ \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_1^2 \cdot u_2^2 \cdot \dots \cdot u_n^2} &= \frac{\left(a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}}\right)^2}{\left(\left(a - \frac{1}{a}\right)^{-1} \left(a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}}\right)\right)^2} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 \Rightarrow \lim \frac{u_{n+1}}{u_1^2 \cdot u_2^2 \cdot \dots \cdot u_n^2} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4 = 16 - 4 = 12 \end{aligned}$$

Vậy $\lim \frac{u_{n+1}}{u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n} = \sqrt{12}$.

+ **Nhận xét 2:** Từ **Lời giải 2** trên, tác giả có bài toán tương tự sau

“Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = 4$ và $u_{n+1} = u_n^3 - 3u_n - \frac{3}{u_n}$, với $n \in \mathbb{N}^*$. Tìm

$\lim \frac{u_{n+1}}{u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n}$.”

Ta xét thêm một số kỹ thuật cơ bản khác thông qua một vài ví dụ sau.

Ví dụ 2. (Kỹ thuật sai phân) Cho dãy số (a_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} a_1 = \frac{4}{3} \\ (n+2)^2 a_n = n^2 a_{n+1} - (n+1) a_n a_{n+1} \end{cases}, \forall n \geq 1.$$

Tìm $\lim a_n$.

Lời giải

Dễ thấy $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Từ giả thiết ta có $\frac{(n+2)^2}{a_{n+1}} = \frac{n^2}{a_n} - (n+1)$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $y_n = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{4}$ ta có $y_1 = 1$ và

$$(n+2)^2 \left(y_{n+1} - \frac{1}{4} \right) = n^2 \left(y_n - \frac{1}{4} \right) - (n+1) \Rightarrow (n+2)^2 y_{n+1} = n^2 y_n \Rightarrow y_{n+1} = \frac{n^2}{(n+2)^2} y_n.$$

Do đó $y_n = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \left(\frac{n-2}{n-1} \right)^2 \dots \left(\frac{1}{3} \right)^2 y_1 = \frac{4}{(n+1)^2 n^2} \Rightarrow a_n = \frac{4n^2 (n+1)^2}{16 - n^2 (n+1)^2}$. Vậy $\lim a_n = 4$. ■

+ **Nhận xét:** Ta thấy cách đặt $y_n = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{4}$. Trong cách đặt trên ta chọn hằng số là

$\frac{1}{4}$ nhằm để

triệt tiêu hằng số ở hai vế của hệ thức truy hồi, do đó mà có thể quy nạp và sai phân.

Ví dụ 3. (Dãy có yếu tố lượng giác) Cho hai dãy số dương $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ xác định

bởi $a_1 = \sqrt{3}, b_1 = 2$ và $\begin{cases} a_n + b_n = \frac{1+a_{n+1}}{1-a_{n+1}} & (1) \\ a_n^2 + 1 = b_n^2 & (2) \end{cases}$. Với mọi $n = 1, 2, \dots$ Chứng minh rằng hai

dãy trên có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn của chúng.

+ **Nhận xét:** Để ý rằng $a_1 = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$ và công thức $a_n^2 + 1 = b_n^2$ gợi liên tưởng đến công thức lượng giác $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha + 1, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, từ đó ta có thể quy nạp và dự đoán công thức tổng quát của dãy số theo cách sau

Lời giải

Ta chứng minh bằng quy nạp $a_n = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}, b_n = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}}, n = 1, 2, \dots$ (*). Thật vậy,

Với $n=1$, ta có $a_1 = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^0}$, $b_1 = 2 = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^0}}$, vậy (*) đúng.

Giả sử khẳng định đúng đến $n=k, k \geq 1$, tức là $a_n = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}$, $b_n = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}}$.

Ta chứng minh $a_{n+1} = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$, $b_{n+1} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}}$. Thật vậy. Từ (1) ta có.

$$\begin{aligned} \frac{1+a_{n+1}}{1-a_{n+1}} &= \frac{\sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}} + 1}{\cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} + \sin^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} + \cos^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}}{\cos^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} - \sin^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}} = \frac{\left(\sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} + \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \right)^2}{\left(\cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} - \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \right) \left(\cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} + \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \right)} \\ &= \frac{\sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} + \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}}{\cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} - \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}} = \frac{\tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} + 1}{1 - \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}} \end{aligned}$$

Suy ra $a_{n+1} = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$.

Khi đó từ (2), suy ra $b_{n+1}^2 = a_{n+1}^2 + 1 = \tan^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}} \Rightarrow b_{n+1} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}}$.

Như vậy theo nguyên lý quy nạp thì $a_n = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}$, $b_n = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}}$, $n=1, 2, \dots$

Do đó $\lim a_n = \lim \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}} = \tan 0 = 0$ và $\lim b_n = \lim \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}} = \frac{1}{\cos 0} = 1$. ■

Ví dụ 4. (Quy về các dãy số đặc biệt) (Trích sách bài tập ĐS và GT 11NC, NXBGD 2007) Cho

dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n + 6}, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng $u_n \neq -4, \forall n \geq 1$ và

dãy số (v_n) với

$v_n = \frac{u_n + 1}{u_n + 4}$ là một cấp số nhân. Khi đó tính $\lim u_n$.

Lời giải

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp $u_n \neq -4, \forall n \geq 1$.

Khi $n=1$ ta có . Giả sử $u_k \neq -4, \forall k \geq 1$, ta chứng minh $u_{k+1} \neq -4$. Thật vậy, giả sử

ngược lại $u_{k+1} = -4$, khi đó $\frac{u_k - 4}{u_k + 6} = -4 \Rightarrow u_k - 4 = -4u_k - 24 \Rightarrow u_k = -4$, trái với giả thiết

quy nạp. Vậy $u_n \neq -4, \forall n \geq 1$. Khi đó ta có

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} + 4} = \frac{\frac{u_n - 4}{u_n + 6} + 1}{\frac{u_n - 4}{u_n + 6} + 4} = \frac{2(u_n + 1)}{5(u_n + 4)} = \frac{2}{5}v_n, \forall n \geq 1. \text{ Vậy } (v_n) \text{ là một cấp số nhân lùi vô}$$

hạn với công bội $q = \frac{2}{5}$. Suy ra $v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$. Nên $u_n = \frac{4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n - 1}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}$. Do đó $\lim u_n = -1$. ■

+ **Nhận xét:** Dãy (u_n) đã cho có công thức truy hồi dạng $u_{n+1} = f(u_n)$, với $f(x)$ là hàm đơn điệu tăng nên có thể giải bài toán trên bằng Định lý Weierstrass.

Ví dụ 5. Cho dãy số $(u_n), (v_n)$ được xác định như sau
$$\begin{cases} u_1 = 3, v_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 2v_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_n v_n \end{cases} \quad (\forall n = 1, 2, \dots).$$

Tìm các giới hạn $\lim \sqrt[n]{v_n}$ và $\lim \sqrt[n]{u_1 u_2 \dots u_n}$.

Lời giải

$\forall n = 1, 2, \dots$ Ta có $u_{n+1} + \sqrt{2} \cdot v_{n+1} = u_n^2 + 2v_n^2 + 2\sqrt{2} \cdot u_n v_n = (u_n + \sqrt{2} \cdot v_n)^2$ (1).

Áp dụng (1) ta suy ra $u_n + \sqrt{2} \cdot v_n = (u_{n-1} + \sqrt{2} \cdot v_{n-1})^2$.

Theo quy nạp ta có $u_n + \sqrt{2} \cdot v_n = (u_1 + \sqrt{2} \cdot v_1)^{2^{n-1}} = (3 + 2\sqrt{2})^{2^{n-1}} = (\sqrt{2} + 1)^{2^n}$ (2).

Lập luận tương tự ta cũng có $u_n - \sqrt{2} \cdot v_n = (\sqrt{2} - 1)^{2^n}$ (3).

Từ (2) và (3) ta suy ra
$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{2} \left[(\sqrt{2} + 1)^{2^n} + (\sqrt{2} - 1)^{2^n} \right] \\ v_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(\sqrt{2} + 1)^{2^n} - (\sqrt{2} - 1)^{2^n} \right] \end{cases}$$

Lại có $u_n = \frac{1}{2} \left[(\sqrt{2}+1)^{2^n} + (\sqrt{2}-1)^{2^n} \right] < (\sqrt{2}+1)^{2^n}$, từ đó suy ra $\sqrt[2^n]{u_n} < \sqrt{2}+1$.

Tương tự ta có $v_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[(\sqrt{2}+1)^{2^n} - (\sqrt{2}-1)^{2^n} \right] > \frac{(\sqrt{2}+1)^{2^n}}{8} \Rightarrow \sqrt[2^n]{v_n} > \sqrt[2^n]{\frac{(\sqrt{2}+1)^{2^n}}{8}}$.

Mặt khác ta có $v_n < u_n$. Do đó ta có dãy bất đẳng thức

$$(\sqrt{2}+1) \left(\frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{2^n}} = \sqrt[2^n]{\frac{(\sqrt{2}+1)^{2^n}}{8}} < \sqrt[2^n]{v_n} < \sqrt[2^n]{u_n} < \sqrt{2}+1.$$

Như vậy theo định lí kẹp ta suy ra $\lim \sqrt[2^n]{u_n} = \lim \sqrt[2^n]{v_n} = \sqrt{2}+1$.

Hơn nữa theo đề bài ta có: $v_{n+1} = 2u_n v_n \Rightarrow u_n = \frac{v_{n+1}}{2v_n}$.

Suy ra $u_1 u_2 \dots u_n = \frac{v_2}{2v_1} \cdot \frac{v_3}{2v_2} \dots \frac{v_{n+1}}{2v_n} = \frac{v_{n+1}}{2^n v_1} = \frac{v_{n+1}}{2^{n+1}}$.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \lim \sqrt[2^n]{u_1 u_2 \dots u_n} &= \lim \sqrt[2^n]{\frac{v_{n+1}}{2^{n+1}}} = \lim \sqrt[2^n]{v_{n+1}} \cdot \lim \sqrt[2^n]{\frac{1}{2^{n+1}}} \\ &= \lim \sqrt[2^n]{2u_n v_n} \cdot \lim \sqrt[2^n]{\frac{1}{2^{n+1}}} = \lim \sqrt[2^n]{2} \cdot \lim \sqrt[2^n]{u_n} \cdot \lim \sqrt[2^n]{v_n} \cdot \lim \sqrt[2^n]{\frac{1}{2^{n+1}}} \\ &= 1 \cdot (\sqrt{2}+1) \cdot (\sqrt{2}+1) \cdot 1 = 3+2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Tóm lại ta có $\lim \sqrt[2^n]{v_n} = \sqrt{2}+1$ và $\lim \sqrt[2^n]{u_1 u_2 \dots u_n} = 3+2\sqrt{2}$. ■

3. Bài tập cùng phương pháp

Bài tập 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n(n+1)}, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

Bài tập 2. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) xác định bởi $u_1 = 1, v_1 = 2$ và $u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}, v_n = \sqrt{u_n v_{n-1}}$

khi $n \geq 2$. Chứng minh rằng hai dãy (u_n) và (v_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Bài tập 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{\sqrt{1+u_n^2}-1}{u_n}, \forall n \geq 1$. Tính $\lim u_n$.

Bài tập 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = a \in \mathbb{R}$ và $(n+1)^2 u_{n+1} = n^2 u_n + 2n + 1, n = 1, 2, \dots$
Tính $\lim u_n$.

(Trích đề thi Olympic Toán sinh viên năm 2013)

Bài tập 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}, n = 1, 2, \dots$ (có $n+1$ dấu căn bậc hai). Tính $\lim u_n$.

Bài tập 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = u_n + n, n = 1, 2, \dots$ Tính $\lim \frac{u_n}{u_{n+1}}$.

(Trích đề thi HSG Hà Nội năm học 2011-2012)

Bài tập 7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1004$ và $u_1 + u_2 + \dots + u_n = n^2 u_n, \forall n \geq 2$.
Tính $\lim (n^2 u_n)$.

Bài tập 8. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_n = \frac{-14u_{n-1} - 51}{5u_{n-1} + 18}, \forall n \geq 2$. Tính $\lim u_n$.

(Trích đề thi Olympic 30/4 năm 2013)

Bài tập 9. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = a > 0$ và $3(n+2)u_{n+1}^2 = 2(n+1)u_n^2 + n + 4, n = 1, 2, \dots$
Tính $\lim u_n$.

(Trích đề thi đề nghị Olympic 30/4 năm 2013)

Bài tập 10. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = a \in \mathbb{R}$ và $u_{n+1} = \frac{(n+2)u_n + 2013}{n}, n = 1, 2, \dots$ Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) và tìm a để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

(Trích đề thi HSG tỉnh Gia Lai năm học 2012-2013)

