SỞ GD&ĐT PHÚ THỌ **TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG** *(Đề gồm: 05 trang)*	**ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG LẦN 4** **LỚP 12 NĂM HỌC 2017 - 2018** **MÔN: TOÁN** *Thời gian làm bài: 90 phút;* *(50 câu trắc nghiệm)*

Mã đề thi 101

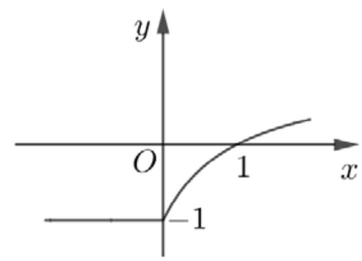
Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1;-3;-5)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

A. $(0;-3;0)$. **B.** $(0;-3;-5)$. **C.** $(0;-3;5)$. **D.** $(1;-3;0)$.

Câu 2: Cho a và b lần lượt là số hạng thứ nhất và thứ năm của một cấp số cộng có công sai $d \neq 0$. Giá trị của $\log_2\left(\frac{b-a}{d}\right)$ bằng

A. $\log_2 5$. **B.** 3. **C.** 2. **D.** $\log_2 3$.

Câu 3: Hình vẽ bên là một phần đồ thị của hàm số nào ?



A. $y=\frac{x-1}{|x|+1}$. **B.** $y=\frac{x-1}{|x+1|}$.

C. $y=\frac{x}{|x|+1}$. **D.** $y=\frac{-x-1}{|x|+1}$.

Câu 4: Lục giác đều $ABCDEF$ có bao nhiêu đường chéo ?

A. 15. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 24.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(-1;1;0)$, $\vec{b}=(1;1;0)$ và $\vec{c}=(1;1;1)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai** ?

A. $\vec{c}\perp\vec{b}$. **B.** $|\vec{c}|=\sqrt{3}$. **C.** $\vec{a}\perp\vec{b}$. **D.** $|\vec{a}|=\sqrt{2}$.

Câu 6: Cho một hình trụ có chiều cao bằng 2 và bán kính đáy bằng 3. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. 6π. **B.** 18π. **C.** 15π. **D.** 9π.

Câu 7: Hàm số $y=x^3-2x^2+x+1$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Câu 8: Giá trị của $\int_0^3 dx$ bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

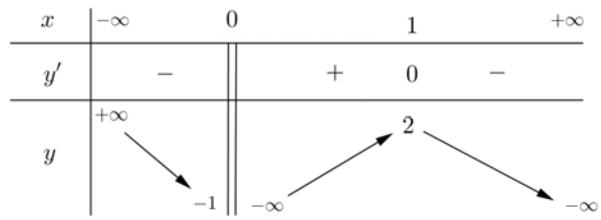
Câu 9: Giá trị của $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+2}{x}$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 10: Một khối lập phương có độ dài cạnh bằng 5, thể tích khối lập phương đã cho bằng

A. 243. **B.** 25. **C.** 81. **D.** 125.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau



Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 12: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x < 0$ là

A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng Ozx?

A. $y=0$. **B.** $x=0$. **C.** $z=0$. **D.** $y-1=0$.

Câu 14: Điểm nào dưới đây là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+5$?

A. $M(1;3)$. **B.** $Q(3;1)$. **C.** $N(-1;7)$. **D.** $P(7;-1)$.

Câu 15: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x$ là

A. $-\sin x+C$. **B.** $\sin x+C$. **C.** $\cos x+C$. **D.** $-\cos x+C$.

Câu 16: Một nhóm gồm 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 học sinh trong nhóm đó. Xác suất để trong 3 ba học sinh được chọn luôn có học sinh nữ bằng

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 17: Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-1}$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(1;\frac{3}{2}\right]$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;-1); B(-1;0;4); C(0;-2;-1)$. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC?

A. $x-2y-5z=0$. **B.** $x-2y-5z-5=0$. **C.** $x-2y-5z+5=0$. **D.** $2x-y+5z-5=0$.

Câu 19: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=\sqrt{3}$ và $AA'=1$.Góc tạo bởi giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 75°.

Câu 20: Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $0,6\%$ /tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập làm vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó được lĩnh số tiền không ít hơn 110 triệu đồng(cả vốn ban đầu và lãi), biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi ?

A. 17 tháng. **B.** 18 tháng. **C.** 16 tháng. **D.** 15 tháng.

Câu 21: Cho $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 16$. Tính $I = \int_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}x$.

A. 16. **B.** 4. **C.** 32. **D.** 8.

Câu 22: Hỏi đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x-\sqrt{x+2}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

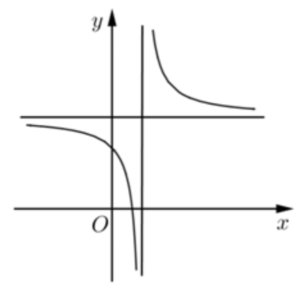
Câu 23: Trên khoảng $(0;1)$, hàm số $y = x^3 + \dfrac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có $AB = 2a, SO = a$ với O là giao điểm của AC và BD. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 25: Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{3x-2}{x-1}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\dfrac{|3x-2|}{x-1} = m$ có hai nghiệm thực ?



A. $-3 < m < 0$. **B.** $m < -3$.
C. $0 < m < 3$. **D.** $m > 3$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a, SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông cân đỉnh A và $BC = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (MNA) và (ABC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 27: Cho số nguyên dương n thỏa mãn $2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (n+1)C_n^n = 2621439$. Số hạng không chứa x trong khai triển của biểu thức $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^n$ bằng

A. 43758. **B.** 31824. **C.** 18564. **D.** 1.

Câu 28: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-2;3)$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng $(-2;3)$. Tính $I = \int_{-1}^{2} [f(x) + 2x]\,\mathrm{d}x$, biết $F(-1) = 1$ và $F(2) = 4$.

A. $I = 6$ **B.** $I = 10$. **C.** $I = 3$. **D.** $I = 9$.

Câu 29: Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2-1)x^3 + (m-1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 30: Biết $\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)(x+4)}dx = a\ln 2 + b\ln 5 + c\ln 7\,(a,b,c\in\mathbb{Q})$. Giá trị của biểu thức $2a+3b-c$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 31: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x + m\sqrt{x^2-2x+3}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có $AB = 2$ và $SA = 3\sqrt{2}$. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{33}}{4}$. **B.** $\frac{7}{4}$. **C.** 2. **D.** $\frac{9}{4}$.

Câu 33: Đồ thị của hàm số $y = g(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y = a^x\,(a>0; a\neq 1)$ qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $g\left(2+\log_a \frac{1}{2018}\right)$ bằng

A. 2016. **B.** -2020. **C.** 2020. **D.** -2016.

Câu 34: Cho các số thực x, y thỏa mãn $\log_8 x + \log_4 y^2 = 5$ và $\log_4 x^2 + \log_8 y = 7$. Giá trị của xy bằng

A. 1024. **B.** 256. **C.** 2048. **D.** 512.

Câu 35: Cho hàm số $y = \sin 3x\cos x - \sin 2x$. Giá trị của $y^{(10)}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ gần nhất với số nào dưới đây ?

A. 454492. **B.** 454493. **C.** 454491. **D.** 454490.

Câu 36: Hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển $\left(x^2-3x+2\right)^6$ bằng

A. -6432. **B.** -4032. **C.** -1632. **D.** -5418.

Câu 37: Cho tập hợp $A = \{1;2;3;4;.........;100\}$. Gọi S là tập hợp gồm tất cả các tập con của A, mỗi tập con này gồm 3 phần tử của A và có tổng bằng 91. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của S. Xác suất chọn được phần tử có ba số lập thành một cấp số nhân bằng

A. $\frac{4}{645}$. **B.** $\frac{2}{645}$. **C.** $\frac{3}{645}$. **D.** $\frac{1}{645}$.

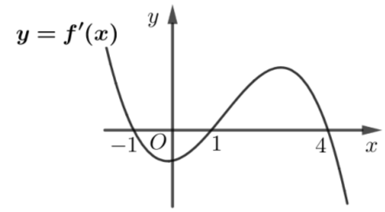
Câu 38: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2+mx+m^2}{x-1}$ có hai điểm cực trị A, B. Khi $\widehat{AOB} = 90^\circ$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng

A. $\frac{1}{16}$. **B.** 8. **C.** $\frac{1}{8}$. **D.** 16.

Câu 39: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(a;2)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của a để có đúng hai tiếp tuyến của (C) đi qua điểm A và có hệ số góc k_1, k_2 thỏa mãn $k_1 + k_2 + 10k_1^2k_2^2 = 0$. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

A. 7. **B.** $\frac{7-\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y=f\left(x^2\right)$ đồng biến trên khoảng



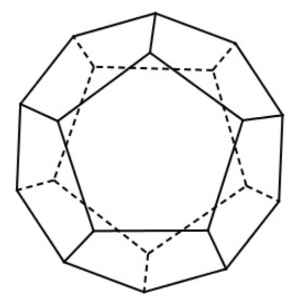
A. $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;2)$.

C. $\left(-\frac{1}{2};0\right)$. **D.** $(-2;-1)$.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+z-1=0$ và điểm $A(0;-2;3), B(2;0;1)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất. Giá trị của $a^2+b^2+c^2$ bằng

A. $\frac{41}{4}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 3.

Câu 42: Cho hình thập nhị diện đều (tham khảo hình vẽ bên). Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng có chung một cạnh của thập nhị diện đều bằng



A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

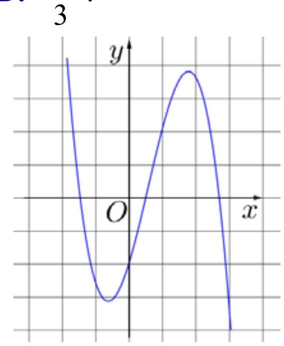
Câu 43: Cho các số thực a,b,c không âm thỏa mãn $2^a+4^b+8^c=4$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+2b+3c$. Giá trị của biểu thức $4^M+\log_M m$ bằng

A. $\frac{2809}{500}$. **B.** $\frac{281}{50}$. **C.** $\frac{4096}{729}$. **D.** $\frac{14}{25}$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=a$, $SA\perp(ABCD)$, cạnh bên SC tạo với $(ABCD)$ một góc 60° và tạo với (SAB) một góc α thỏa mãn $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\sqrt{3}a^3$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $2a^3$. **D.** $\frac{2a^3}{3}$.

Câu 45: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?



A. $a<0, b<0, c>0, d<0$.

B. $a<0, b>0, c>0, d<0$.

C. $a>0, b<0, c<0, d>0$.

D. $a<0, b>0, c<0, d<0$.

Câu 46: Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng $4,$ diện tích ba mặt bên lần lượt là $9,18$ và $10.$ Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\sqrt[4]{11951}.$ **B.** $\dfrac{\sqrt[4]{11951}}{2}.$ **C.** $\sqrt{11951}.$ **D.** $\dfrac{\sqrt{11951}}{2}.$

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ cho ba điểm $A(1;1;2); B(-1;0;4); C(0;-1;3)$ và điểm M thuộc mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=1.$ Khi biểu thức $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì độ dài đoạn thẳng MA bằng

A. $\sqrt{2}.$ **B.** $\sqrt{6}.$ **C.** $6.$ **D.** $2.$

Câu 48: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$ Hỏi đồ thị của hàm số $y=F(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0;2018\pi)$?

A. $2019.$ **B.** $1.$ **C.** $2017.$ **D.** $2018.$

Câu 49: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{2-\pi}{2}.$ Tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{\pi}{4}.$ **B.** $0.$ **C.** $1.$ **D.** $\dfrac{\pi}{2}.$

Câu 50: Cho tứ diện $ABCD$ đều có cạnh bằng $2\sqrt{2}.$ Gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ và M là trung điểm của $AB.$ Khoảng cách giữa hai đường thẳng BG và CM bằng

A. $\dfrac{2}{\sqrt{14}}.$ **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}.$ **C.** $\dfrac{3}{2\sqrt{5}}.$ **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{10}}.$

----------- HẾT ----------

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

ĐỀ THI KSCL LẦN 4 – TRƯỜNG THPT CHUYÊN HÙNG VƯƠNG

ĐÁP ÁN

1.B	2.C	3.A	4.C	5.A	6.B	7.D	8.A	9.B	10.D
11.C	12.A	13.A	14.A	15.B	16.A	17.D	18.B	19.C	20.C
21.D	22.C	23.B	24.D	25.A	26.D	27.C	28.A	29.B	30.D
31.C	32.D	33.D	34.D	35.D	36.D	37.C	38.A	39.B	40.C
41.B	42.C	43.C	44.C	45.B	46.A	47.A	48.C	49.B	50.A

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Đáp án B.

Hình chiếu của điểm $M(1;-3;-5)$ trên mặt phẳng (Oyz) là điểm $M'(0;-3;-5)$.

> ***Kiến thức cần ghi nhớ:*** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$.
>
> + Hình chiếu của điểm *M* trên mặt phẳng (Oxy) là điểm $M_1(x_0;y_0;0)$.
>
> + Hình chiếu của điểm *M* trên mặt phẳng (Oyz) là điểm $M_2(0;y_0;z_0)$.
>
> + Hình chiếu của điểm *M* trên mặt phẳng (Oxz) là điểm $M_3(x_0;0;z_0)$.

STUDY TIPS

Cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì $u_n = u_1 + (n-1).d$ với $n \ge 2; n \in \mathbb{N}$.

Câu 2: Đáp án C.

Từ giả thiết ta có $b=a+4d$ nên $\log_2\left(\frac{b-a}{d}\right)=\log_2\left(\frac{4d}{d}\right)=2.$

Câu 3: Đáp án A.

Đồ thị đi qua các điểm $(1;0)$ và $(0;-1)$ nên loại hai phương án C, D.

Khi $x \le 0$ thì $y=-1$, ta thấy chỉ có hàm số $y=\frac{x-1}{|x|+1}$ thỏa mãn.

STUDY TIPS

Cho một đa giác lồi n đỉnh (n cạnh) thì số đường chéo của đa giác lồi đó là:

$C_n^2 - n$ (đường chéo).

Câu 4: Đáp án C.

Lục giác đều *ABCDEF* có 6 đỉnh nên có 6 cạnh.

Chọn ra 2 trong 6 đỉnh của lục giác đều *ABCDEF* ta được 1 cạnh bất kì. Suy ra số cạnh được tạo thành từ 6 đỉnh *ABCDEF* là C_6^2.

Số đường chéo của lục giác đều chính là số cạnh được tạo thành từ 6 đỉnh của nó (không kể các cạnh của lục giác đều). Vậy số đường chéo là $C_6^2-6=9$.

Câu 5: Đáp án A.

Phương án A: Ta có $\vec{b}.\vec{c} = 1.1 + 1.1 + 0.1 = 2 \ne 0$ nên $\vec{b}$ không vuông góc với $\vec{c}$.

Phương án B: Ta có $|\vec{c}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$.

Phương án C: Ta có $\vec{a}.\vec{b} = -1.1 + 1.1 + 0.0 = 0$ nên $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Phương án D: Ta có $|\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$.

Câu 6: Đáp án B.

Thể tích của khối trụ có chiều cao $h=2$, bán kính đáy $R=3$ là:

$$V = \pi R^2 h = \pi.3^2.2 = 18\pi \text{ (đvtt)}.$$

Câu 7: Đáp án D.

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 1; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ x = 1 \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên của hàm số, ta thấy $y' < 0, \forall x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

Câu 8: Đáp án A.

Câu 9: Đáp án B.

Kiến thức cần ghi nhớ: Nếu $\frac{f(x_0)}{g(x_0)} \neq 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

Câu 10: Đáp án D.

Thể tích của khối lập phương có độ dài cạnh là $a=5$ là $V = a^3 = 5^3 = 125$ (đvtt).

STUDY TIPS

+ Nếu đạo hàm $y' = f'(x)$ đổi dấu bao nhiêu lần thì hàm số $y = f(x)$ có bấy nhiêu điểm cực trị.

+ Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ không xác định tại điểm $x = x_0$, tuy nhiên hàm số vẫn có thể đạt cực trị tại điểm x_0.

Câu 11: Đáp án C.

Quan sát bảng biến thiên ta thấy đạo hàm y' đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm $x = 0$; y' đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua điểm $x = 1$. Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$; hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 1$. Vậy hàm số có đúng 2 điểm cực trị.

Câu 12: Đáp án A.

Ta có $\log_2 x < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 2^0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$. Vậy tập nghiệm là $S = (0;1)$.

Câu 13: Đáp án A.

Kiến thức cần ghi nhớ: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ thì:

+ Phương trình mặt phẳng (Oxy) là $z = 0$.

+ Phương trình mặt phẳng (Oyz) là $x = 0$.

+ Phương trình mặt phẳng (Oxz) là $y = 0$.

Câu 14: Đáp án A.

Ta có $y' = 3x^2 - 3; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	7	↘	3	↗	$+\infty$

Quan sát bảng biến thiên, ta thấy đồ thị hàm số đạt cực tiểu tại điểm $(1;3)$.

Câu 15: Đáp án B.

Ta có $\int f(x)dx = \int \cos x dx = \int d(\sin x) = \sin x + C$.

Câu 16: Đáp án A.

Xét phép thử T: "Chọn ngẫu nhiên đồng thời 3 học sinh trong nhóm 10 bạn gồm 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ". Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{10}^3$.

Gọi A là biến cố "Trong 3 học sinh được chọn luôn có học sinh nữ". Số phần tử của biến cố A là $n(A)=C_4^1C_6^2+C_4^2C_6^1+C_4^3=100.$

Vậy xác suất cần tính là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{100}{C_{10}^3}=\dfrac{5}{6}.$

Câu 17: Đáp án D.

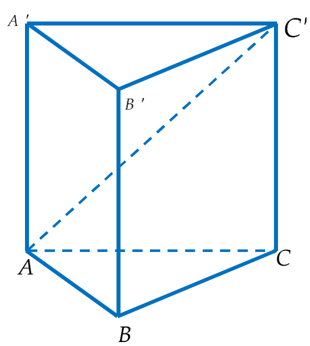
Hàm số $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x-1)-1}$ xác định khi $\begin{cases}x-1>0\\ \log_{\frac{1}{2}}(x-1)\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ x-1\leq\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ x\leq\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow 1<x\leq\dfrac{3}{2}$. Vậy tập xác định là $D=\left(1;\dfrac{3}{2}\right].$

Câu 18: Đáp án B.

Ta có $\overrightarrow{BC}=(1;-2;-5)$ nên mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(2;1;-1)$ và vuông góc với BC sẽ có VTPT là $\vec{n}=(1;-2;-5).$

Phương trình mặt phẳng $(P):1(x-2)-2(y-1)-5(z+1)=0\Leftrightarrow x-2y-5z-5=0.$



Câu 19: Đáp án C.

Ta có $CC'\perp(ABC)$ nên C là hình chiếu của C' trên mặt phẳng (ABC).

Suy ra $\left(\widehat{AC',(ABC)}\right)=\left(\widehat{AC',AC}\right)=\widehat{C'AC}.$

Do $\Delta ACC'$ vuông tại C nên $\tan\widehat{C'AC}=\dfrac{CC'}{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\widehat{C'AC}=30°.$

Câu 20: Đáp án C.

Giả sử sau n tháng, người đó lĩnh được số tiền không ít hơn 110 triệu đồng, trong đó $n\in\mathbb{N}$.

Số tiền người đó nhận được sau n tháng là $100(1+0,6\%)^n$ (triệu đồng).

Từ giả thiết, ta có $100(1+0,6\%)^n\geq 110\Leftrightarrow 1,006^n\geq 1,1\Leftrightarrow n\geq\log_{1,006}1,1\approx 15,93.$

Vậy sau ít nhất 16 tháng thì người đó lĩnh được số tiền không ít hơn 110 triệu đồng.

Câu 21: Đáp án D.

Đặt $2x=t\Rightarrow dx=\dfrac{1}{2}dt$ và $I=\dfrac{1}{2}\int_0^4 f(t)dt=\dfrac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx=\dfrac{1}{2}.16=8.$

Câu 22: Đáp án C.

Ta có $y=\dfrac{(x-1)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}{\left(x-\sqrt{x+2}\right)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}=\dfrac{(x-1)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}{x^2-x-2}=\dfrac{(x-1)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}{(x+1)(x-2)}$

* Xét $\lim\limits_{x\to-1^-}y=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x-1}{x-\sqrt{x+2}}=1;\ \lim\limits_{x\to-1^+}y=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x-1}{x-\sqrt{x+2}}=1$ nên $x=-1$ không là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

* Xét $\lim\limits_{x\to 2^-} y = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(x-1)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}{(x+1)(x-2)} = -\infty; \lim\limits_{x\to 2^+} y = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-1)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}{(x+1)(x-2)} = +\infty$ nên $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

* Xét $\lim\limits_{x\to +\infty} y = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-1}{x-\sqrt{x+2}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1-\frac{1}{x}}{1-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}} = 1$ nên $y=1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 2 đường tiệm cận.

Câu 23: Đáp án B.

<u>**Cách 1:**</u> Sử dụng phương pháp hàm số

Xét hàm số $y = x^3 + \dfrac{1}{x}$ trên $(0;1)$. Ta có $y' = 3x^2 - \dfrac{1}{x^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}} = x_0 \in (0;1)$.

Bảng biến thiên:

x	0		x_0		1
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$y(x_0)$	$\nearrow$	2

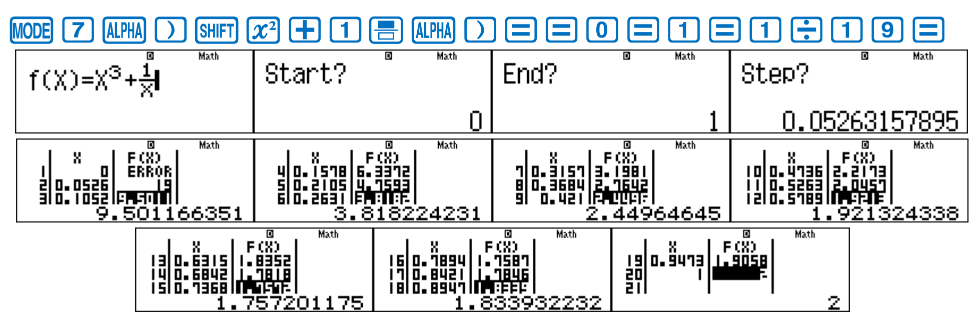
Quan sát bảng biến thiên, ta thấy hàm số $y = x^3 + \dfrac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = x_0 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

<u>**Cách 2:**</u> Sử dụng BĐT Cauchy

Ta có $y = x^3 + \dfrac{1}{x} = x^3 + \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{3x} + \dfrac{1}{3x} \geq 4\sqrt[4]{x^3 \cdot \dfrac{1}{27x^3}} = \dfrac{4}{\sqrt[4]{27}}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x^3 = \dfrac{1}{3x} \Leftrightarrow x^4 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

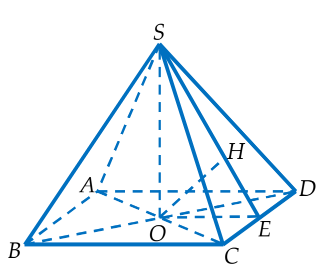
<u>**Cách 3:**</u> Sử dụng MTCT

Nhập hàm số $f(X) = X^3 + \dfrac{1}{X}$ với $Start = 0, End = 1, Step = \dfrac{1}{19}$.



Quan sát bảng biến thiên, ta thấy $\min y \approx 1,7572$ khi $x \approx 0,7368 \approx \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Câu 24: Đáp án D.



Gọi E là trung điểm của CD thì $OE \perp CD$, mà $CD \perp SO$ nên $CD \perp (SOE)$

$\Rightarrow (SCD) \perp (SOE)$ và $(SCD) \cap (SOE) = SE$.

Trong mặt phẳng (SOE) kẻ $OH \perp SE$ thì $OH \perp (SCD)$ hay $OH = d(O;(SCD))$.

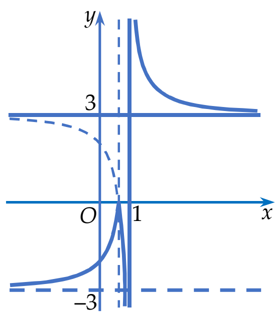
ΔSOE vuông tại O có OH là đường cao nên: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OE^2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{2}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Vậy $d(O;(SCD)) = OH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

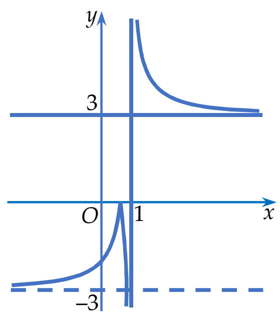
Câu 25: Đáp án A.

Ta có $y = f(x) = \dfrac{|3x-2|}{x-1} = \begin{cases} \dfrac{3x-2}{x-1} & \text{khi } x \geq \dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{3x-2}{x-1} & \text{khi } x < \dfrac{2}{3} \end{cases}$

Để vẽ đồ thị (C') của hàm số $y = f(x) = \dfrac{|3x-2|}{x-1}$ từ đồ thị (C) của hàm số $y = \dfrac{3x-2}{x-1}$ ta làm như sau:



+ Với $x \geq \dfrac{2}{3}$ thì $f(x) = \dfrac{3x-2}{x-1}$. Kẻ đường thẳng $x = \dfrac{2}{3}$, khi đó ta giữ nguyên đồ thị (C) nằm bên phải đường thẳng $x = \dfrac{2}{3}$ và bỏ toàn bộ phần đồ thị (C) nằm bên trái đường thẳng $x = \dfrac{2}{3}$ (phần bỏ đi biểu diễn bằng đường nét đứt). Phần giữ lại chính là một phần đồ thị (C_1) của hàm số $f(x) = \dfrac{|3x-2|}{x-1}$ khi $x \geq \dfrac{2}{3}$.

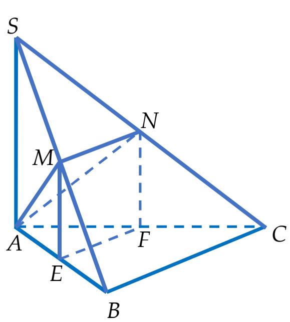


+ Với $x < \dfrac{2}{3}$ thì $f(x) = -\dfrac{3x-2}{x-1}$. Ta lấy đối xứng phần vừa bị bỏ đi (đường nét đứt) qua trục hoành được phần đồ thị (C_2) của hàm số $f(x) = \dfrac{|3x-2|}{x-1}$ khi $x < \dfrac{2}{3}$.

Gộp hai phần đồ thị (C_1) và (C_2) ta được đồ thị (C') của hàm số $y = f(x) = \dfrac{|3x-2|}{x-1}$ (hình vẽ bên).

Quan sát đồ thị ta được phương trình $\dfrac{|3x-2|}{x-1} = m$ có hai nghiệm thực $\Leftrightarrow$ Đồ thị (C') cắt đường thẳng $y = m$ tại đúng hai điểm $\Leftrightarrow -3 < m < 0$.

Câu 26: Đáp án D.



__Cách 1:__ Sử dụng công thức tính diện tích của hình chiếu

Do ΔABC vuông cân đỉnh A nên $BC = AB\sqrt{2} = AC\sqrt{2} \Leftrightarrow AB = AC = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = a$.

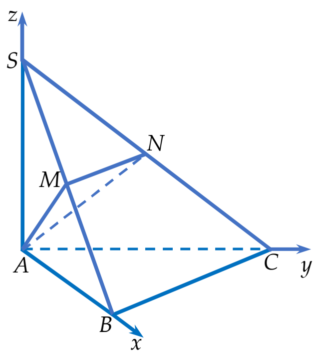
Gọi E là trung điểm của AB thì $ME // SA \Rightarrow ME \perp (ABC)$. Gọi F là trung điểm của AC thì $NF // SA \Rightarrow NF \perp (ABC)$. Suy ra ΔAEF là hình chiếu của ΔAMN trên mặt phẳng (ABC).

Ta có $S_{\Delta AEF} = S_{\Delta AMN}.\cos\left(\widehat{(AMN),(ABC)}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\widehat{(AMN),(ABC)}\right) = \dfrac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta AMN}}$.

Lại có $AM = AN = \dfrac{1}{2}SB = \dfrac{1}{2}SC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $MN = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên $AM = AN = MN$

STUDY TIPS

Gọi S là diện tích của đa giác $\mathscr{H}$ trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu $\mathscr{H}'$ của $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (P') thì $S' = S.\cos\alpha$, trong đó α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P').



$\Rightarrow \Delta AMN$ đều và $S_{\Delta AMN} = \dfrac{AM^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}.\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$ (đvdt).

Mặt khác $S_{\Delta AEF} = \dfrac{1}{4}S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2}{8}$ (đvdt). Vậy $\cos\left(\widehat{(AMN),(ABC)}\right) = \dfrac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta AMN}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

<u>Cách 2:</u> Gắn hệ trục tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ trong đó $A(0;0;0), B(a;0;0), C(0;a;0)$, $S(0;0;a)$.

Do M, N lần lượt là trung điểm của SB và SC nên $M\left(\dfrac{a}{2};0;\dfrac{a}{2}\right), N\left(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AM} = \left(\dfrac{a}{2};0;\dfrac{a}{2}\right), \overrightarrow{AN} = \left(0;\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right] = \left(-\dfrac{a^2}{4};-\dfrac{a^2}{4};\dfrac{a^2}{4}\right)$. Suy ra mặt phẳng (AMN) có VTPT là $\overrightarrow{n_1} = (1;1;-1)$.

Mặt phẳng $(ABC) \equiv (Oxy)$ nên có VTPT là $\overrightarrow{n_2} = (0;0;1)$.

Vậy $\cos\left(\widehat{(AMN),(ABC)}\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 27: Đáp án C.

Ta có $2C_n^1 + 3C_n^2 + 4C_n^3 + ... + (n+1)C_n^n =$

$$= \left(C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n\right) + \left(C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^n\right).$$

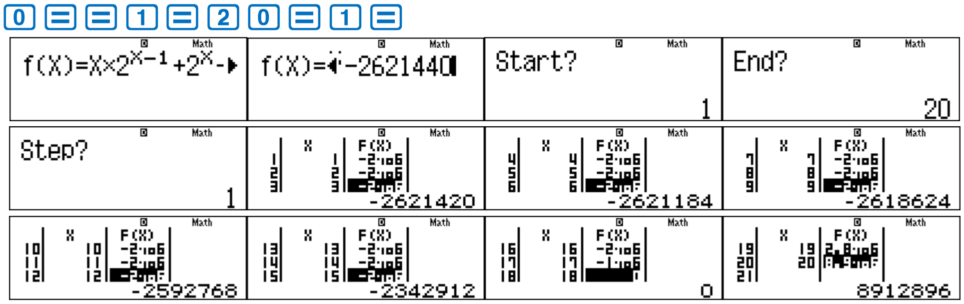
Xét khai triển $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + ... + C_n^nx^n$ (1)

Đạo hàm hai vế của (1) ta được: $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2x + 3C_n^3x^2 + ... + nC_n^nx^n$ (2)

Thay $x=1$ và hai hệ thức (1) và (2) ta được: $\begin{cases} C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n \\ C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = n.2^{n-1} \end{cases}$

Từ giả thiết $2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (n+1)C_n^n = 2621439$ ta có: $n.2^{n-1} + 2^n - 1 = 2621439$

Sử dụng TABLE với hàm số $f(X) = X \times 2^{X-1} + 2^X - 2621440$ và chọn $Start = 1$, $End = 20, Step = 1$ ta tìm được $X = 18$ hay $n = 18$.



Xét khai triển $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^{18} = \sum\limits_{k=0}^{18} C_{18}^k \left(x^2\right)^{18-k}\left(x^{-1}\right)^k = \sum\limits_{k=0}^{18} C_{18}^k x^{36-3k}$ với $0 \le k \le 18, k \in \mathbb{N}$.

Số hạng không chứa x trong khai triển tương ứng với giá trị k thỏa mãn

$$\begin{cases} 36-3k=0 \\ 0\le k\le 18 \\ k\in\mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow k=12.$$

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $C_{18}^{12}=18564$.

Câu 28: Đáp án A.

Ta có $I=\int_{-1}^{2}\left[f(x)+2x\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x+2\int_{-1}^{2}x\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-1}^{2}+x^2\Big|_{-1}^{2}=F(2)-F(-1)+3$

$\Rightarrow I=4-1+3=6.$

Câu 29: Đáp án B.

* Nếu $m=-1$ thì hàm số có dạng $y=-2x^2-x+4$, đồ thị của nó là một parabol có đỉnh $\left(-\frac{1}{4};\frac{33}{8}\right)$. Do hệ số $a=-2<0$ nên đồ thị hàm số có bề lõm quay xuống dưới, suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)$ và hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{4};+\infty\right)$. Vậy với $m=-1$ thì hàm số không nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$.

* Nếu $m=1$ thì hàm số trở thành $y=-x+4$ luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

* Nếu $m\ne\pm1$, xét đạo hàm $y'=3\left(m^2-1\right)x^2+2(m-1)x-1$. Để hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 3\left(m^2-1\right)x^2+2(m-1)x-1\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3\left(m^2-1\right)<0\\ \Delta'=(m-1)^2+3\left(m^2-1\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<1\\ (m-1)(4m+2)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<1\\ -\frac{1}{2}\le m\le 1\end{cases}$$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m<1$ (do $m\ne\pm1$).

Vậy với $m\in\left[-\frac{1}{2};1\right]$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$, có 2 giá trị $m\in\{0;1\}$ thỏa mãn.

STUDY TIPS

Hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị là parabol (P) đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$. Nếu $a>0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a};+\infty\right)$ và hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right)$. Ngược lại, nếu $a<0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right)$, hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a};+\infty\right)$.

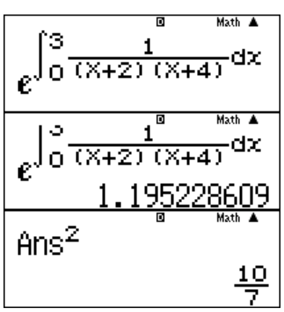
Câu 30: Đáp án D.

Cách 1: Ta có $\int_0^3\frac{\mathrm{d}x}{(x+2)(x+4)}=\frac{1}{2}\int_0^3\frac{\left[(x+4)-(x+2)\right]\mathrm{d}x}{(x+2)(x+4)}=\frac{1}{2}\int_0^3\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x+4}\right|\Bigg|_0^3=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{7}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 5-\frac{1}{2}\ln 7=a\ln 2+b\ln 5+c\ln 7.$

Do $a,b,c\in\mathbb{Q}$ nên $a=\frac{1}{2};b=\frac{1}{2};c=-\frac{1}{2}$. Vậy $2a+3b-c=1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=3.$

Cách 2: Sử dụng MTCT



Từ giả thiết, ta có $\int_0^3\frac{\mathrm{d}x}{(x+2)(x+4)}=a\ln 2+b\ln 5+c\ln 7=\ln\left(2^a.5^b.7^c\right)$

$\Rightarrow 2^a.5^b.7^c=e^{\int_0^3\frac{\mathrm{d}x}{(x+2)(x+4)}}=\sqrt{\frac{10}{7}}=\frac{\sqrt{2}.\sqrt{5}}{\sqrt{7}}=2^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{1}{2}}.7^{-\frac{1}{2}}.$

Do $a,b,c\in\mathbb{Q}$ nên $a=\frac{1}{2};b=\frac{1}{2};c=-\frac{1}{2}$. Vậy $2a+3b-c=1+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=3$.

Câu 31: Đáp án C.

Xét đạo hàm $y'=1+m.\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}=\frac{\sqrt{x^2-2x+3}+m(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+3}}$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m(x-1)\ge -\sqrt{x^2-2x+3},\forall x\in\mathbb{R}$ (1)

+ Nếu $x=1$ thì (1) trở thành $0m\ge -\sqrt{2}$ (luôn đúng).

+ Nếu $x>1$ thì $(1)\Leftrightarrow m\ge -\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x-1},\forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow m\ge \frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{1-x},\forall x\in(1;+\infty)$ (2)

Xét hàm số $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{1-x}$ trên $(1;+\infty)$.

Ta có $f'(x)=\frac{\frac{-(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+3}}+\sqrt{x^2-2x+3}}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2\sqrt{x^2-2x+3}}>0,\forall x\in(1;+\infty)$.

Bảng biến thiên:

x	1 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ -1

Ta có $(2)\Leftrightarrow m\ge f(x),\forall x\in(1;+\infty)$. Quan sát bảng biến thiên ta được $m\ge -1$.

+ Nếu $x<1$ thì $(1)\Leftrightarrow m\le -\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x-1},\forall x\in(-\infty;1)$

$\Leftrightarrow m\le \frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{1-x},\forall x\in(-\infty;1)$ (3)

Xét hàm số $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{1-x}$ trên $(-\infty;1)$.

Ta có $f'(x)=\frac{2}{(1-x)^2\sqrt{x^2-2x+3}}>0,\forall x\in(-\infty;1)$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ 1
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	1 $\nearrow$ $+\infty$

Ta có $(3)\Leftrightarrow m\le f(x),\forall x\in(-\infty;1)$. Quan sát bảng biến thiên, ta được $m\le 1$.

Vậy với $m\in[-1;1]$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$. Có 3 giá trị $m\in\{-1;0;1\}$ nguyên thỏa mãn.

STUDY TIPS

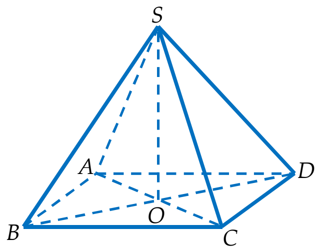
+ $A(m)\ge f(x),\forall x\in D$
$\Leftrightarrow A(m)\ge \max_D f(x)$.

+ $A(m)\le f(x),\forall x\in D$
$\Leftrightarrow A(m)\le \min_D f(x)$.

Ở bài toán bên, tuy hàm số $f(x)$ đều không có GTLN, GTNN trên mỗi đoạn $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$ nhưng từ bảng biến thiên và việc xác định các giới hạn $\lim_{x\to-\infty}f(x)=1,\lim_{x\to+\infty}f(x)=-1$ ta được $f(x)\le -1;f(x)\ge 1$.

Câu 32: Đáp án D.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, từ giả thiết suy ra $SO\perp(ABCD)$.



Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC = BC = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow OA = OB = OC = OD = \sqrt{2}$.

Do ΔSOA vuông tại O nên $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = 4$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $R = \dfrac{SA^2}{2SO} = \dfrac{\left(3\sqrt{2}\right)^2}{2.4} = \dfrac{9}{4}$.

Một số công thức tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp dạng đặc biệt:

1. Hình chóp có các đỉnh nhìn đoạn thẳng nối hai đỉnh còn lại dưới một góc vuông: Gọi d là độ dài đoạn thẳng đó thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = \dfrac{d}{2}$.

2. Hình chóp đều có chiều cao h, độ dài cạnh bên bằng k thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = \dfrac{k^2}{2h}$.

3. Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy: Gọi h là chiều cao của hình chóp và R_d là bán kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy, khi đó bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = \sqrt{R_d^2 + \dfrac{h^2}{4}}$.

4. Hình chóp có mặt bên vuông góc với đáy: Gọi h là chiều cao của hình chóp và R_b, R_d lần lượt là bán kính của các đường tròn ngoại tiếp mặt bên (mặt bên này vuông góc với đáy) và mặt đáy; giao tuyến của hai mặt này có độ dài bằng d. Khi đó bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = \sqrt{R_b^2 + R_d^2 - \dfrac{d^2}{4}}$.

Câu 33: Đáp án D.

Lấy điểm $M_1\left(x_0; a^{x_0}\right)$ nằm trên đồ thị hàm số $y = a^x \left(a > 0, a \neq 1\right)$. Gọi M_2 là điểm đối xứng với M_1 quan điểm $I(1;1)$, suy ra $M_2\left(2 - x_0; 2 - a^{x_0}\right)$ và điểm M_2 luôn thuộc đồ thị hàm số $y = g(x)$.

Ta có $\begin{cases} x_{M_2} = 2 - x_0 \\ y_{M_2} = 2 - a^{x_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 - x_{M_2} \\ y_{M_2} = 2 - a^{2 - x_{M_2}} \end{cases} \Rightarrow g(x) = 2 - a^{2-x}$.

Vậy $g\left(2 + \log_a \dfrac{1}{2018}\right) = g\left(2 - \log_a 2018\right) = 2 - a^{2 - (2 - \log_a 2018)} = 2 - a^{\log_a 2018} = -2016$.

Câu 34: Đáp án D.

Ta có $\begin{cases} \log_8 x + \log_4 y^2 = 5 \\ \log_4 x^2 + \log_8 y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ \dfrac{1}{3}\log_2 x + \log_2 y = 5 \\ \log_2 x + \dfrac{1}{3}\log_2 y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ \log_2 x = 6 \\ \log_2 y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, y > 0 \\ x = 64 \\ y = 8 \end{cases}$.

Vậy $xy = 64.8 = 512$.

STUDY TIPS

Công thức tổng quát tính đạo hàm cấp n của hàm số $f(x) = \sin(ux)$ là:

$f^{(n)}(x) = u^n.\sin\left(ux + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Câu 35: Đáp án D.

Ta có $y = \sin 3x.\cos x - \sin 2x = \dfrac{1}{2}\left(\sin 4x + \sin 2x\right) - \sin 2x = \dfrac{1}{2}\sin 4x - \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

Khi đó $y^{(10)} = \dfrac{1}{2}.4^{10}.\sin\left(4x + 10.\dfrac{\pi}{2}\right) - \dfrac{1}{2}.2^{10}.\sin\left(2x + 10.\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow y^{(10)} = \frac{4^{10}}{2}.\sin(4x+5\pi) - \frac{2^{10}}{2}.\sin(2x+5\pi) = -2^{19}\sin 4x + 2^{9}\sin x$$

$$\Rightarrow y^{(10)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2^{19}.\sin\frac{4\pi}{3} + 2^{9}.\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2^{19}+2^{9}\right) \approx 454490.$$

Câu 36: Đáp án D.

Cách 1: Xét khai triển $\left(x^2-3x+2\right)^6 = \left[2+\left(x^2-3x\right)\right]^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k 2^{6-k}\left(x^2-3x\right)^k$

$$= \sum_{k=0}^{6} C_6^k 2^{6-k} \sum_{i=0}^{k} C_k^i \left(x^2\right)^{k-i}(-3x)^i = \sum_{k=0}^{6}\sum_{i=0}^{k} C_6^k C_k^i 2^{6-k}(-3)^i x^{2k-i} \text{ với } \begin{cases} 0 \le k \le 6 \\ 0 \le i \le k \\ i,k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Số hạng chứa x^7 trong khai triển tương ứng với các giá trị *i,k* thỏa mãn:

$$\begin{cases} 0 \le k \le 6 \\ 0 \le i \le k \\ 2k-i=7 \\ i,k \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le k \le 6 \\ 0 \le 2k-7 \le k \\ i=2k-7 \\ i,k \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le k \le 6 \\ \frac{7}{2} \le k \le 7 \\ i=2k-7 \\ i,k \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{2} \le k \le 6 \\ i=2k-7 \\ i,k \in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=4; i=1 \\ k=5; i=3 \\ k=6; i=5 \end{array}\right.$$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển đã cho là:

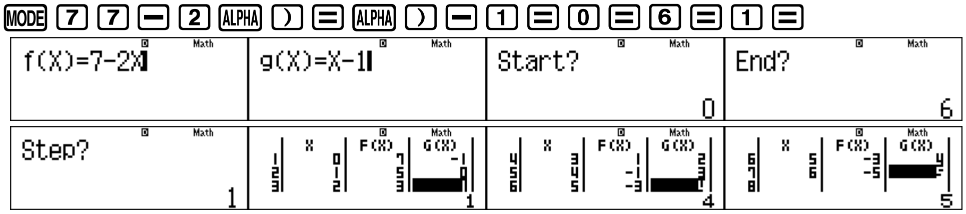
$$\left[x^7\right] = C_6^4 C_4^1 2^2(-3)^1 + C_6^5 C_5^3 2^1(-3)^3 + C_6^6 C_6^5 2^0(-3)^5 = -5418.$$

Cách 2: Ta có hệ phương trình $\begin{cases} k_2+k_1+k_0=6 \\ 2k_2+k_1=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_2 = X \\ k_1 = 7-2X = f(X) \\ k_0 = X-1 = g(X) \end{cases}$

Do $k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ nên từ $k_2+k_1+k_0=6 \Rightarrow 0 \le k_2 \le 6$ hay $0 \le X \le 6$.

Sử dụng TABLE nhập vào các hàm số $f(X)=7-2X, g(X)=X-1$ và chọn các giá trị $Start=0, End=6, Step=1$.

MODE 7 7 − 2 ALPHA) = ALPHA) − 1 = 0 = 6 = 1 =



Quan sát bảng giá trị, ta tìm được các giá trị $k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn hệ phương trình trên là: $\left[\begin{array}{l} k_0=0; k_1=5; k_2=1 \\ k_0=1; k_1=3; k_2=2 \\ k_0=2; k_1=1; k_2=3 \end{array}\right.$

Vậy hệ số của số hạng chứa x^7 trong khai triển đã cho là:

$$\left[x^7\right] = \frac{6!}{0!5!1!}2^0.(-3)^5.1^1 + \frac{6!}{1!3!2!}.2^1.(-3)^3.1^2 + \frac{6!}{2!1!3!}.2^2.(-3)^1.1^3 = -5418.$$

Câu 37: Đáp án C.

* Các tập *S* là tập con gồm 3 phần tử và có tổng bằng 91 của $A=\{1;2;3;...;100\}$ được xác định như sau:

+ Tập hợp bắt đầu từ phần tử 1 có dạng $\{1;a;b\}$ $(1<a<b)$. Khi đó $a+b=90$. Các tập hợp đó là $\{1;2;88\},\{1;3;87\},\{1;4;86\},...,\{1;44;46\}$. Có 43 tập hợp như thế.

+ Tập hợp bắt đầu từ phần tử 2 có dạng $\{2;a;b\}$ $(2<a<b)$. Khi đó $a+b=89$. Các tập hợp đó là $\{2;3;86\},\{2;4;85\},\{2;5;84\},...,\{2;44;45\}$. Có 42 tập hợp như thế.

+ Tập hợp bắt đầu từ phần tử 3 có dạng $\{3;a;b\}$ $(3<a<b)$. Khi đó $a+b=88$. Các tập hợp đó là $\{3;4;84\},\{3;5;83\},\{3;6;82\},...,\{3;43;45\}$. Có 40 tập hợp như thế.

+ Tập hợp bắt đầu từ phần tử 4 có dạng $\{4;a;b\}$ $(4<a<b)$. Khi đó $a+b=87$. Các tập hợp đó là $\{4;5;82\},\{4;6;81\},\{4;7;80\},...,\{4;43;44\}$. Có 39 tập hợp như thế.

………………

+ Tập hợp bắt đầu từ phần tử 27 có dạng $\{27;a;b\}$ $(27<a<b)$. Khi đó $a+b=64$. Các tập hợp đó là $\{27;28;36\},\{27;29;35\},\{27;30;34\},\{27;31;33\}$. Có 4 tập hợp như thế.

+ Tập hợp bắt đầu từ phần tử 28 có dạng $\{28;a;b\}$ $(28<a<b)$. Khi đó $a+b=63$. Các tập hợp đó là $\{28;29;34\},\{28;30;33\},\{28;31;32\}$. Có 3 tập hợp như thế.

+ Tập hợp bắt đầu từ phần tử 29 có dạng $\{29;a;b\}$ $(29<a<b)$. Khi đó $a+b=62$. Các tập hợp đó là $\{29;30;32\}$. Có đúng 1 tập hợp như vậy.

Vậy số tập hợp S thỏa mãn là: $(43+42)+(40+39)+(37+36)+...+(4+3)+1$

$=85+79+73+...+7+1=\dfrac{(1+85).15}{2}=645$ (tập hợp).

* Gọi T là tập hợp gồm tất cả các tập con gồm 3 phần tử của A và các phần tử của T lập thành một cấp số nhân. Tập T được xác định như sau:

+ Nếu T có dạng $\{1;a;b\}$ $(1<a<b)$ thì T có thể là: $\{1;2;4\},\{1;3;9\},\{1;4;16\}$, $\{1;5;25\},\{1;6;36\},\{1;7;49\},\{1;8;64\},\{1;9;81\},\{1;10;100\}$.

+ Nếu T có dạng $\{2;a;b\}$ $(2<a<b)$ thì T có thể là: $\{2;4;8\},\{2;6;18\},\{2;8;32\}$, $\{2;10;50\},\{2;12;72\},\{2;14;98\}$.

+ Nếu T có dạng $\{3;a;b\}$ $(3<a<b)$ thì T có thể là: $\{3;6;12\},\{3;9;27\},\{3;12;48\}$, $\{3;15;60\}$.

+ Nếu T có dạng $\{4;a;b\}$ $(4<a<b)$ thì T có thể là: $\{4;8;16\},\{4;12;36\},\{4;16;64\}$, $\{4;20;100\}$.

+ Nếu T có dạng $\{5;a;b\}$ $(5<a<b)$ thì T có thể là: $\{5;10;20\},\{5;15;45\},\{5;20;80\}$.

+ Nếu T có dạng $\{6;a;b\}$ $(6<a<b)$ thì T có thể là: $\{6;12;24\},\{6;18;48\},\{4;24;96\}$.

+ Nếu T có dạng $\{7;a;b\}$ $(7<a<b)$ thì T có thể là: $\{7;14;28\},\{7;21;63\}$.

+ Nếu T có dạng $\{8;a;b\}$ $(8<a<b)$ thì T có thể là: $\{8;16;32\},\{8;24;72\}$.

+ Nếu T có dạng $\{9;a;b\}$ $(9<a<b)$ thì T có thể là: $\{9;18;36\},\{9;27;81\}$.

+ Nếu T có dạng $\{10;a;b\}$ $(10<a<b)$ thì T có thể là: $\{10;20;40\},\{10;30;90\}$.

+ Tương tự ta tìm được các tập T: $\{11;22;44\},\{11;33;99\},\{12;24;48\},\{13;26;52\}$, $\{14;28;56\},\{15;30;60\},\{16;32;64\},\{17;34;68\},\{18;36;72\},\{19;38;76\},\{20;40;80\}$, $\{21;42;84\},\{22;44;88\},\{23;46;92\},\{24;48;96\},\{25;50;100\}$.

Xét phép thử "Chọn ra các tập S là tập con gồm 3 phần tử của A sao cho tổng của 3 phần tử đó bằng 91". Khi đó số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=645$.

Gọi A là biến cố "Chọn ngẫu nhiên một phần tử của S sao cho các phần tử này có 3 số lập thành một cấp số nhân". Khi đó các kết quả của A có thể là $\{1;9;81\}$, $\{7;21;63\},\{13;26;52\}$. Suy ra $n(A)=3$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{3}{645}$.

<u>Ý kiến của tác giả:</u>

– Do thời gian gấp rút và mong muốn đưa đến quý độc giả tài liệu một cách nhanh nhất, nên tác giả mới chỉ nghĩ ra một cách giải như trên. Có thể nhiều độc giả sẽ cảm thấy lời giải trên dài, tuy nhiên nếu nắm bắt được quy luật của bài toán thì việc xử lý sẽ trở nên nhanh hơn rất nhiều.

– Có thể bài toán sẽ còn một lời giải khác tối ưu hơn, vì vậy tác giả rất mong các quý độc giả có thể đóng góp lời giải qua gmail: *huyenvu.hnue@gmail.com* hoặc *namnguyen.nnn1708@gmail.com* để cùng nhau trao đổi và học hỏi.

Câu 38: Đáp án A.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $y'=\dfrac{(2x+m)(x-1)-(x^2+mx+m^2)}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-m-m^2}{(x-1)^2}$. Hàm số đã cho có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2-2x-m-m^2=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-1\Leftrightarrow\begin{cases}(-1)^2-2(-1)-m-m^2\neq 0\\ \Delta'=1+m^2+m>0\end{cases}\Leftrightarrow m\neq\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=2x+m$. Giả sử $A(x_1;2x_1+m),B(x_2;2x_2+m)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số, với x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-2x-m-m^2=0$.

Để $\widehat{AOB}=90°\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow x_1x_2+(2x_1+m)(2x_2+m)=0$

$$\Leftrightarrow 5x_1x_2+2m(x_1+x_2)+m^2=0\Leftrightarrow 5(-m^2-m)+2m.2+m^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=-\dfrac{1}{4}\end{array}\right..$$

Vậy $S=\left\{-\dfrac{1}{4};0\right\}$ và tổng bình phương các phần tử của S là $\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2+0^2=\dfrac{1}{16}$.

STUDY TIPS

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị HS $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$, $(a\neq 0,m\neq 0)$ là:

$$y=\dfrac{(ax^2+bx+c)'}{(mx+n)'}=\dfrac{2ax+b}{m}\Leftrightarrow y=\dfrac{2a}{m}x+\dfrac{b}{m}.$$

Câu 39: Đáp án B.

Từ $y=\dfrac{x+1}{x-1}\Rightarrow y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2},(x\neq 1)$. Gọi điểm $M\left(x_0;\dfrac{x_0+1}{x_0-1}\right)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến d với đồ thị (C). Phương trình $d:y=-\dfrac{2}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$

$\Leftrightarrow y=-\dfrac{2}{\left(x_0-1\right)^2}x+\dfrac{x_0^2+2x_0-1}{\left(x_0-1\right)^2}$.

Để có đúng hai tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(a;2)\Leftrightarrow$ Phương trình $2=-\dfrac{2a}{\left(x_0-1\right)^2}+\dfrac{x_0^2+2x_0-1}{\left(x_0-1\right)^2}$ có hai nghiệm phân biệt $x_{01},x_{02}\Leftrightarrow$ Phương trình $x_0^2-6x_0+2a+3=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_{01},x_{02}\neq 1$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}2a-2\neq 0\\ \Delta'=6-2a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 1\\ a<3\end{cases}$.

Khi đó hệ số góc của hai tiếp tuyến là $k_1=y'\left(x_{01}\right)=-\dfrac{2}{\left(x_{01}-1\right)^2}$ và $k_2=y'\left(x_{02}\right)=-\dfrac{2}{\left(x_{02}-1\right)^2}$.

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases}x_{01}+x_{02}=6\\ x_{01}.x_{02}=2a+3\end{cases}$.

Ta có $k_1+k_2+10k_1^2k_2^2=-\dfrac{2}{\left(x_{01}-1\right)^2}-\dfrac{2}{\left(x_{02}-1\right)^2}+10.\dfrac{4}{\left(x_{01}-1\right)^4}.\dfrac{4}{\left(x_{02}-1\right)^4}$

$=\dfrac{-2\left[\left(x_{01}-1\right)^2+\left(x_{02}-1\right)^2\right].\left[\left(x_{01}-1\right)\left(x_{02}-1\right)\right]^2+160}{\left[\left(x_{01}-1\right)\left(x_{02}-1\right)\right]^4}$

$=\dfrac{-2\left[\left(x_{01}+x_{02}\right)^2-2x_{01}.x_{02}-2\left(x_{01}+x_{02}\right)+2\right].\left[x_{01}.x_{02}-\left(x_{01}+x_{02}\right)+1\right]^2+160}{\left[x_{01}.x_{02}-\left(x_{01}+x_{02}\right)+1\right]^4}$

$=\dfrac{-2\left[6^2-2(2a+3)-2.6+2\right].(2a+3-6+1)^2+160}{(2a+3-6+1)^4}=\dfrac{2(a-5)(a-1)^2+10}{(a-1)^4}$.

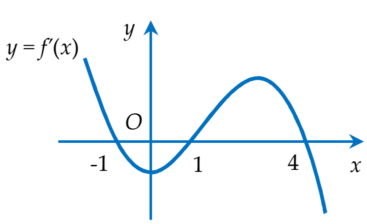
Để $k_1+k_2+10k_1^2k_2^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}(a-5)(a-1)^2+5=0\\ a\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)^3-4(a-1)^2+5=0\\ a\neq 1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[(a-1)+1\right].\left[(a-1)^2-5(a-1)+5\right]=0\\ a\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\left(a^2-7a+11\right)=0\\ a\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ a=\dfrac{7\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện ta được $S=\left\{0;\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Vậy tổng giá trị các phần tử của S là $0+\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{7-\sqrt{5}}{2}$. .

Câu 40: Đáp án C.



Ta có $u=x^2\Rightarrow u'=2x\Rightarrow y'=u'.f'(u)=2x.f'\left(x^2\right)$

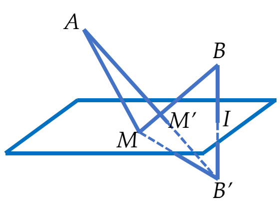
Hàm số $y=f\left(x^2\right)$ đồng biến $\Leftrightarrow y'=2x.f'\left(x^2\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ f'\left(x^2\right)>0\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ f'\left(x^2\right)<0\end{cases}\end{array}\right.$

+ Với $\begin{cases} x>0 \\ f'\left(x^2\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2<-1\,(\text{L}) \\ 1<x^2<4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1 \end{array}\right. \\ -2<x<2 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<2.$

+ Với $\begin{cases} x<0 \\ f'\left(x^2\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ \left[\begin{array}{l} -1<x^2<1 \\ x^2>4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ \left[\begin{array}{l} -1<x<1 \\ x>2 \\ x<-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<0 \\ x<-2 \end{array}\right.$

Vậy các khoảng đồng biến của hàm số là $(-\infty;-2),(-1;0),(1;2)$.

Câu 41: Đáp án B.



Đặt $f(x;y;z)=x-2y+z-1 \Rightarrow \begin{cases} f_A=f(0;-2;3)=0-2(-2)+3-1=6 \\ f_B=f(2;0;1)=2-2.0+1-1=2 \end{cases}$

$\Rightarrow f_A.f_B=6.2=12>0 \Rightarrow$ Hai điểm A,B nằm về cùng một phía so với mặt phẳng (P). Gọi B' là điểm đối xứng với B qua mặt phẳng (P).

Khi đó $MA+MB=MA+MB'\geq AB'$.

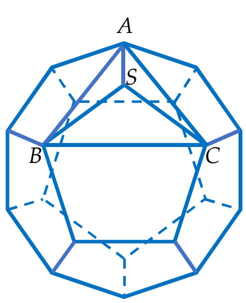
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M\equiv M'$ với $M'=AB'\cap(P)$.

Phương trình $BB':\begin{cases} x=2+t \\ y=-2t \\ z=1+t \end{cases},(t\in\mathbb{R})$. Gọi $I=BB'\cap(P)\Rightarrow I\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$ và I là trung điểm của $BB'\Rightarrow B'\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AB'}=\left(\frac{4}{3};\frac{10}{3};-\frac{8}{3}\right)\Rightarrow$ Đường thẳng AB' có VTCP là $\vec{u}=(2;5;-4)$ và phương trình $AB':\begin{cases} x=2t' \\ y=-2+5t' \\ z=3-4t' \end{cases},(t'\in\mathbb{R})$.

Do $M'=AB'\cap(P)\Rightarrow M'\left(1;\frac{1}{2};1\right)$. Vậy $M\left(1;\frac{1}{2};1\right)\Rightarrow a^2+b^2+c^2=\frac{9}{4}$.

Câu 42: Đáp án C.



Bài toán quy về: "Tính góc giữa hai mặt bên của hình chóp tam giác đều $S.ABC$".

Đặt $SA=SB=SC=a,(a>0)$. Tổng các góc trong của ngũ giác đều (một mặt hình thập nhị diện đều) là $3.180^\circ=540^\circ$. Khi đó $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}=\frac{1}{5}.540^\circ=108^\circ$.

Thể tích khối tứ diện $S.ABC$ được tính theo các công thức sau:

$$V_{S.ABC}=\frac{a^3}{6}\sqrt{1-3\cos^2 108^\circ+2\cos^3 108^\circ}=\frac{a^3}{6}\sqrt{1-3\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^2+2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^3}$$

$$=\frac{a^3}{6}\sqrt{1-3.\frac{3-\sqrt{5}}{8}+2.\frac{2-\sqrt{5}}{8}}=\frac{a^3}{6}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}=\frac{a^3}{6}.\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)a^3}{24}\text{ (đvtt).}$$

$$V_{S.ABC}=\frac{2S_{\Delta SAB}.S_{\Delta SAC}.\sin\left(\widehat{(SAB),(SAC)}\right)}{3SA}=\frac{2.\left(\frac{a^2}{2}.\sin 108^\circ\right)^2.\sin\left(\widehat{(SAB),(SAC)}\right)}{3a}$$

STUDY TIPS

Tổng số đo các góc trong tại đỉnh của một đa giác lồi n cạnh $(n\geq 3)$ là $(n-2).180$ (độ).

$$=\frac{\frac{a^4}{2}.\frac{5+\sqrt{5}}{8}.\sin\left(\widehat{(SAB),(SAC)}\right)}{3a}=\frac{\left(5+\sqrt{5}\right)a^3}{48}.\sin\left(\widehat{(SAB),(SAC)}\right)$$

$$1-2\sin^2 18°=\cos 36°=\sin\left(3.18°\right)=3\sin 18°-4\sin^3 18°$$
$$\Leftrightarrow 4\sin^3 18°-2\sin^2 18°-3\sin 18°+1=0\Leftrightarrow\left(\sin 18°-1\right)\left(4\sin^2 18°+2\sin 18-1\right)=0$$
$$\Rightarrow \sin 18°=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\Rightarrow \cos 108°=-\sin 18°=\frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

Suy ra $\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)a^3}{24}=\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+1\right)a^3}{48}.\sin\left(\widehat{(SAB),(SAC)}\right)\Leftrightarrow \sin\left(\widehat{(SAB),(SAC)}\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}.$

Vậy $\cos\left(\widehat{(SAB),(SAC)}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}.$

Một số công thức tính thể tích tứ diện đặc biệt:

1. Tứ diện $S.ABC$ có $SA=a,SB=b,SC=c$ và $\widehat{ASB}=\alpha,\widehat{BSC}=\beta,\widehat{CSA}=\varphi$:

$$V_{S.ABC}=\frac{abc}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\varphi+2\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi}$$

2. Tứ diện $ABCD$ có $AB=a,CD=b,d\left(AB,CD\right)=d$ và $\left(\widehat{AB,CD}\right)=\alpha$ thì

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}abd\sin\alpha.$$

3. Tứ diện $S.ABC$ có $S_{\Delta SAB}=S_1,S_{\Delta SAC}=S_2,SA=a$ và $\left(\widehat{(SAB),(SAC)}\right)=\alpha$ thì

$$V_{SABC}=\frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a}$$ (Công thức thể tích góc nhị diện).

4. Tứ diện $S.ABC$ có $SA=a,SB=b,SC=c$ và $\left(\widehat{(SAB),(SAC)}\right)=\alpha,\widehat{ASB}=\beta,\widehat{ASC}=\varphi$

thì $V_{S.ABC}=\frac{abc}{6}\sin\alpha.\sin\beta.\sin\varphi$.

5. Thể tích tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a là $V_{ABCD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

6. Thể tích tam diện vuông $OABC$ (tứ diện có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau) là: $V_{OABC}=\frac{1}{6}OA.OB.OC$.

7. Tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a,BC=AD=b,AC=BD=c$ thì

$V_{ABCD}=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)}$ (Thể tích tứ diện gần đều).

Câu 43: Đáp án C.

Từ giả thiết, ta có $4=2^a+4^b+8^c=2^a+2^{2b}+2^{3c}$. Đặt $2^a=x,2^{2b}=y,2^{3c}=z$ với $x,y,z\ge 1$ do $a,b,c\ge 0$.

Khi đó $a+b+c=4$ và $S=a+2b+3c=\log_2 x+\log_2 y+\log_2=\log_2\left(xyz\right)$.

Bài toán quy về: "Cho các số thực $x,y,z\ge 1$ thỏa mãn $x+y+z=4$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\log_2\left(xyz\right)$. Tính giá trị của biểu thức $4^M+\log_M m$".

* Áp dụng BĐT Cauchy cho các số dương ta có: $xyz\le\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{4}{3}$. Khi đó $S=\log_2(xyz)\le\log_2\left(\frac{64}{27}\right)$.

* Do $x,y,z\ge 1$ và $x+y+z=4$ nên $1\le x,y,z\le 2$.

Ta có $0\le(x-1)(y-1)=xy-(x+y)+1\Leftrightarrow xy\ge x+y-1=3-z\Leftrightarrow xyz\ge z(3-z)$.

Xét hàm số $f(z)=-z^2+3z$ trên $[1;2]$. Ta có $f'(z)=-2z+3; f'(z)=0\Leftrightarrow z=\frac{3}{2}$.

Bảng biến thiên:

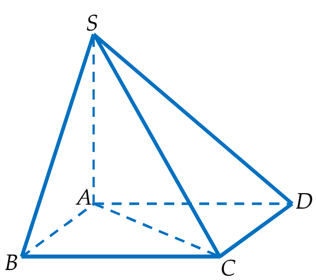
z	1		$3/2$		2
$f'(z)$		$+$	0	$-$	
$f(z)$	2	$\nearrow$	$9/4$	$\searrow$	2

Từ bảng biến thiên suy ra $f(z)\ge 2$. Vậy $xyz\ge f(z)\ge 2$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} z=1;x+y=3\\ z=2;x+y=2\end{array}\right.$. Khi đó $S=\log_2(xyz)\ge\log_2 2=1$.

Vậy $M=\log_2\left(\frac{64}{27}\right), m=1\Rightarrow 4^M+\log_M m=4^{\log_2\left(\frac{64}{27}\right)}=\frac{4096}{729}$.

Câu 44: Đáp án C.



Ta có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow A$ là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)\Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Suy ra $\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right)=\left(\widehat{SC,AC}\right)=\widehat{SCA}=60°$.

Lại có $CB\perp AB, CB\perp SA\Rightarrow CB\perp(SAB)\Rightarrow B$ là hình chiếu của C trên mặt phẳng $(SAB)\Rightarrow\left(\widehat{SC,(SAB)}\right)=\left(\widehat{SC,SB}\right)=\widehat{BSC}=\alpha$ và $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Đặt $BC=b,(b>0)$.

Do ΔSBC vuông tại B nên $BC=SC.\sin\widehat{BSC}\Rightarrow SC=\frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{4b}{\sqrt{3}}$.

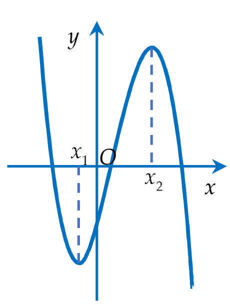
Do ΔSAC vuông tại A nên $AC=SC.\cos\widehat{SCA}\Rightarrow SC=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\cos 60°}=2\sqrt{a^2+b^2}$.

Suy ra $\frac{4b}{\sqrt{3}}=2\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow 4b^2=3(a^2+b^2)\Leftrightarrow b^2=3a^2\Leftrightarrow b=\sqrt{3}a$.

$\Rightarrow BC=\sqrt{3}a\Rightarrow AC=2a\Rightarrow SA=AC.\tan\widehat{SCA}=2a.\tan 60°=2\sqrt{3}a$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.2\sqrt{3}a.a.\sqrt{3}a=2a^3$ (đvtt).

Câu 45: Đáp án B.



Quan sát đồ thị ta thấy:

+ Đồ thị có dạng **И** nên hệ số $a<0$. Loại phương án C.

+ Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ âm nên $d<0$.

+ Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị có hoành độ trái dấu nên phương trình $y'=3ax^2+2bx+c=0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 3ac<0\Leftrightarrow ac<0\Leftrightarrow c>0$ do $a<0$.

Loại phương án D.

+ Nhận thấy hai điểm cực trị x_1, x_2 của hàm số thỏa mãn $x_1 < 0 < x_2$ và $|x_1| < |x_2|$ nên $x_1 + x_2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{2b}{3a} > 0 \Leftrightarrow ab < 0 \Leftrightarrow b > 0$ do $a < 0$. Loại phương án A.

Câu 46: Đáp án A.

Đặt $BC = a, AC = b, AB = c$ và $AA' = h$ với $a, b, c, h > 0$.

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} ah = 9 \\ bh = 18 \\ ch = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{9}{h} \\ b = \frac{18}{h} \\ c = \frac{10}{h} \end{cases} \Rightarrow a + b + c = \frac{9}{h} + \frac{18}{h} + \frac{10}{h} = \frac{37}{h}.$

Nửa chu vi của ΔABC là $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{37}{2h}.$

Diện tích ΔABC là $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\Rightarrow S = \sqrt{\frac{37}{2h}.\left(\frac{37}{2h} - \frac{9}{h}\right).\left(\frac{37}{2h} - \frac{18}{h}\right).\left(\frac{37}{2h} - \frac{10}{h}\right)} = \sqrt{\frac{37}{2h}.\frac{19}{2h}.\frac{1}{2h}.\frac{17}{2h}} = \frac{\sqrt{11951}}{4h^2}.$$

Từ giả thiết ta có $S = 4 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{11951}}{4h^2} = 4 \Leftrightarrow 16h^2 = \sqrt{11951} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt[4]{11951}}{4}.$

Vậy thể tích hình lăng trụ là $V = S.h = 4.\frac{\sqrt[4]{11951}}{4} = \sqrt[4]{11951}$ (đvtt).

Câu 47: Đáp án A.

Mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ có tâm $I(0;0;1)$, bán kính $R = 1$.

Chọn điểm G sao cho $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow G$ là trọng tâm của ΔABC và $G(0;0;3)$.

Ta có $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2$

$= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$

Để $MA^2 + MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MG$ nhỏ nhất, mà $M \in (S)$ nên M là giao điểm của đường thẳng IG với mặt cầu (S) (M nằm giữa I và G).

Ta có $\overrightarrow{IG} = (0;0;2) \Rightarrow$ Đường thẳng IG có VTCP là $\vec{u} = (0;0;1)$ và phương trình đường thẳng $IG: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$. Do $M \in IG \Rightarrow M(0;0;1+t)$.

Mà $M \in (S) \Rightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(0;0;0) \\ M_2(0;0;2) \end{array}\right.$.

Do M nằm giữa I và G nên $M \equiv M_2(0;0;2)$. Vậy $MA = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Câu 48: Đáp án C.

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) \Rightarrow F'(x) = f(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}.$

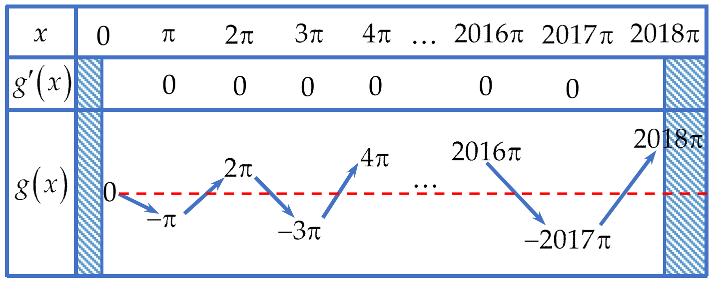
Xét hàm số $y = F(x)$ trên $(0;2018\pi)$.

Ta có $F'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}; F'(x)=0\Leftrightarrow x\cos x-\sin x=0, x\in(0;2018\pi)$.

Xét hàm số $g(x)=x\cos x-\sin x$ trên $(0;2018\pi)$.

Có $g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x; g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin(0;2018\pi)\\ \sin x=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=k\pi,(k\in\mathbb{Z})$. Do $x\in(0;2018\pi)$ nên $0<k\pi<2018\pi\Leftrightarrow 0<k<2018$, mà $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{1;2;...;2017\}\Rightarrow x\in\{\pi;2\pi;...;2017\}$.



Từ bảng biến thiên, ta thấy đồ thị hàm số $g(x)$ cắt trục hoành tại 2017 điểm $x_1\in(\pi;2\pi), x_2\in(2\pi;3\pi),...,x_{2017}\in(2017\pi;2018\pi)$ nên phương trình $g(x)=0$ có 2017 nghiệm.

Lại có $F'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}, x\in(0;2018\pi)$ và hàm số $g(x)$ đổi dấu liên tục từ âm sang dương và từ dương sang âm khi x đi qua các điểm $x_1,x_2,...,x_{2017}$. Khi đó $F'(x)$ cũng đổi dấu liên tục khi x đi qua các điểm $x_1,x_2,...,x_{2017}$.

Vậy hàm số $y=F(x)$ có 2017 điểm cực trị trên khoảng $(0;2018\pi)$.

Câu 49: Đáp án B.

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2f(x).(\sin x-\cos x)\right]dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2f(x)(\sin x-\cos x)+(\sin x-\cos x)^2\right]dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)^2dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-(\sin x-\cos x)\right]^2dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin 2x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-(\sin x-\cos x)\right]^2dx-\left(x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

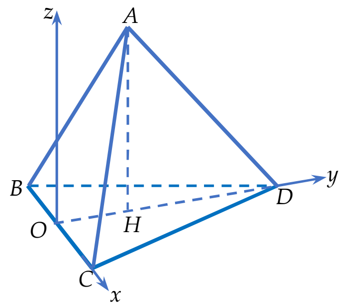
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-(\sin x-\cos x)\right]^2dx-\frac{\pi-2}{2}$$

Từ giả thiết $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2\sqrt{2}f(x)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]dx=\dfrac{2-\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-(\sin x-\cos x)\right]^2dx-\frac{\pi-2}{2}=\frac{2-\pi}{2}\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-(\sin x-\cos x)\right]^2dx=0.$$

Suy ra $f(x)=\sin x-\cos x$. Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x=0.$

Câu 50: Đáp án A.



Gọi H là trọng tâm của ΔBCD, do $ABCD$ là tứ diện đều nên $AH\perp(BCD)$ và $AH=\frac{AB\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{2}.\sqrt{6}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$

Gọi O là trung điểm của BC, do ΔBCD đều nên $DO=\frac{BC\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}.$

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với $O(0;0;0),A\left(0;\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{4\sqrt{3}}{3}\right),B\left(-\sqrt{2};0;0\right),$

$C\left(\sqrt{2};0;0\right),D\left(0;\sqrt{6};0\right).$

Ta có G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ nên $G\left(0;\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$

Lại có M là trung điểm của AB nên $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{6}}{6};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$

Ta có $\overrightarrow{BG}=\left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\overrightarrow{CM}=\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{6}}{6};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right),\overrightarrow{BM}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{6}}{6};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{BG},\overrightarrow{CM}\right]=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{7\sqrt{6}}{6};\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{BG},\overrightarrow{CM}\right].\overrightarrow{BM}=2.$

Vậy $d(BG;CM)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{BG},\overrightarrow{CM}\right].\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BG},\overrightarrow{CM}\right]\right|}=\frac{2}{\sqrt{14}}.$