

BÀI 1. MỞ ĐẦU VỀ PHÉP BIẾN HÌNH

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

① Định nghĩa

Phép biến hình là một quy tắc để ứng với mỗi điểm M thuộc mặt phẳng, ta xác định được một điểm duy nhất M' thuộc mặt phẳng ấy. Điểm M' gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình đó.

② Kí hiệu và thuật ngữ

Cho phép biến hình F .

— Nếu M' là ảnh của điểm M qua F thì ta viết $M' = F(M)$. Ta nói phép biến hình F biến điểm M thành điểm M' .

— Nếu H là một hình nào đó thì $H' = \{M' | M' = F(M), M \in H\}$ được gọi là ảnh của hình H qua F . Kí hiệu là $H' = F(H)$.

③ Phép dời hình

Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Phép dời hình biến

- ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
- đường thẳng thành đường thẳng.
- tia thành tia.
- đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
- tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
- đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính với đường tròn ban đầu.
- góc thành góc bằng góc ban đầu.

BÀI 2. PHÉP TỊNH TIẾN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

① Định nghĩa

Định nghĩa 1. Trong mặt phẳng cho vectơ $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ thường được kí hiệu là $T_{\vec{v}}$, $\vec{v}$ được gọi là *vector tịnh tiến*.

$$T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}.$$

② Tính chất

Tính chất 1. Nếu $T_{\vec{v}}(M) = M'$, $T_{\vec{v}}(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ và từ đó suy ra $M'N' = MN$.

Tính chất 2. Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

③ Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vectơ $\vec{v} = (a; b)$. Với mỗi điểm $M(x; y)$ ta có $M'(x'; y')$ là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. Khi đó $\overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}$. Từ đó suy ra $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$.

Biểu thức trên được gọi là *biểu thức tọa độ* của phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

□ DẠNG 2.1. Xác định ảnh của một hình qua phép tịnh tiến

Phương pháp giải: Gọi H' là ảnh của hình H qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (a; b)$. Với mọi điểm $M(x; y)$ bất kì thuộc H , ta có $T_{\vec{v}}(M) = M'(x'; y') \in H'$.

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases} \Rightarrow M(x' - a; y' - b)$$

Thay tọa độ điểm M vào phương trình biểu diễn hình H ta thu được phương trình biểu diễn hình H' .

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{v} = (2; 1)$ và điểm $M(3; 2)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho

① $A = T_{\vec{v}}(M)$.

ĐS: $A(5; 3)$ ② $M = T_{\vec{v}}(A)$.

ĐS: $A(1; 1)$

Lời giải.

① Giả sử $A(x; y)$ ta có $A = T_{\vec{v}}(M) \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 2 \\ y = 2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(5; 3)$.

② Gọi $A(x; y)$, ta có $M = T_{\vec{v}}(A) \Rightarrow \begin{cases} 3 = x + 2 \\ 2 = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1; 1)$.

□

VÍ DỤ 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng d . Hãy tìm ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$.

① $d: 2x - 3y + 12 = 0$ và $\vec{v} = (4; -3)$.

ĐS: $2x - 3y - 5 = 0$

② $d: 2x + y - 4 = 0$ và $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $A(3; 1)$, $B(-1; 8)$.

ĐS: $2x + y - 3 = 0$

Lời giải.

Gọi d' là ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$; $M(x; y)$ là một điểm bất kì trên đường thẳng d và $M'(x'; y') = T_{\vec{v}}(M)$. Khi đó

① $\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 4 \\ y = y' + 3 \end{cases} \Rightarrow M(x' - 4; y' + 3)$. Mà điểm M thuộc đường thẳng d nên

$$2(x' - 4) - 3(y' + 3) + 12 = 0 \Leftrightarrow 2x' - 3y' - 5 = 0.$$

Suy ra phương trình đường thẳng d' là $2x - 3y - 5 = 0$.

② Ta có $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-4; 7)$. Do đó $\begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y + 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + 4 \\ y = y' - 7 \end{cases} \Rightarrow M(x' + 4; y' - 7)$.

Mà điểm M thuộc đường thẳng d nên

$$2(x' + 4) + y' - 7 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x' + y' - 3 = 0$$

Suy ra phương trình đường thẳng d' là $2x + y - 3 = 0$.

□

VÍ DỤ 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn (C) . Hãy tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến $\vec{v}$, biết

① $(C): (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 6$ và $\vec{v} = (3; 2)$.

ĐS: $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 6$

② $(C): x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$ và $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ với $A(-1; 1)$, $B(1; -2)$.

ĐS: $x^2 + y^2 + 2y + 16 = 0$

Lời giải.

Gọi (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$, $M(x; y)$ là một điểm bất kì trên đường tròn (C) và $M'(x'; y') = T_{\vec{v}}(M)$. Khi đó

$$\textcircled{1} \begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' - 2 \end{cases} \Rightarrow M(x' - 3; y' - 2). \text{ Mà điểm } M \text{ thuộc đường tròn } (C) \text{ nên}$$

$$(x' - 3 - 4)^2 + (y' - 2 + 3)^2 = 6 \Leftrightarrow (x' - 7)^2 + (y' + 1)^2 = 6.$$

Hay phương trình đường tròn (C') là $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 6$.

$$\textcircled{2} \text{ Ta có } \vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2; -3) \text{ và } \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' + 3 \end{cases} \Rightarrow M(x' - 2; y' + 3). \text{ Mà điểm } M \text{ thuộc đường tròn } (C) \text{ nên}$$

$$(x' - 2)^2 + (y' + 3)^2 + 4(x' - 2) - 4(y' + 3) - 1 = 0 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + 2y' + 16 = 0$$

Hay phương trình đường tròn (C') là $x^2 + y^2 + 2y + 16 = 0$.

□

VÍ DỤ 4. Tìm phương trình ảnh của các đường sau qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.

$$\textcircled{1} \text{ Elip } (E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ và } \vec{v} = (-3, 4).$$

$$\text{ĐS: } \frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$

$$\textcircled{2} \text{ Parabol } (P): y = x^2 - 2x, \text{ và } \vec{v} = (1; 1).$$

$$\text{ĐS: } y = x^2 - 4x + 4$$

Lời giải.

$\textcircled{1}$ Gọi (E') là ảnh của elip (E) qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$, $M(x; y)$ là một điểm bất kì trên elip (E) và $M'(x'; y') = T_{\vec{v}}(M)$. Khi đó

$$\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' - 4 \end{cases} \Rightarrow M(x' + 3; y' - 4).$$

Mà điểm M thuộc đường elip (E) nên $\frac{(x' + 3)^2}{9} + \frac{(y' - 4)^2}{4} = 1$.

Hay phương trình đường elip (E') là $\frac{(x + 3)^2}{9} + \frac{(y - 4)^2}{4} = 1$.

$\textcircled{2}$ Gọi (P') là ảnh của parabol (P) qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v}$, $M(x; y)$ là một điểm bất kì trên parabol (P) và $M'(x'; y') = T_{\vec{v}}(M)$. Khi đó

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 1 \end{cases} \Rightarrow M(x' - 1; y' - 1).$$

Mà điểm M thuộc parabol (P) nên $y' - 1 = (x' - 1)^2 - 2(x' - 1) \Leftrightarrow y' = x'^2 - 4x' + 4$.

Hay phương trình parabol (P') là $y = x^2 - 4x + 4$.

□

2**BÀI TẬP ÁP DỤNG**

BÀI 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{v} = (-1; 3)$, điểm $M(-1; 4)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho

$$\textcircled{1} A = T_{2\vec{v}}(M)$$

$$\text{ĐS: } A(-2; 7)$$

$$\textcircled{2} M = T_{-\vec{v}}(A)$$

$$\text{ĐS: } M(-2; 7)$$

Lời giải.

Giả sử $A(x; y)$.

$\textcircled{1}$ Ta có $2\vec{v} = (-2; 6)$. Ta có

$$A = T_{2\vec{v}}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - 1 = -2 \\ y = 4 + 3 = 7 \end{cases} \Rightarrow A(-2; 7).$$

$\textcircled{2}$ Ta có $-\vec{v} = (1; -3)$. Ta có

$$M = T_{-\vec{v}}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = x + 1 \\ 4 = y - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \end{cases} \Rightarrow M(-2; 7).$$

□

BÀI 2. Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(3;5)$, $B(-1;1)$, $\vec{v} = (-1;2)$, đường thẳng d và đường tròn (C) có phương trình $d: x - 2y + 3 = 0$, $(C): (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

① Tìm ảnh của các điểm A' , B' theo thứ tự là ảnh của A , B qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$. **ĐS:** $B'(-2;3)$

② Tìm tọa độ điểm C sao cho A là ảnh của C qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$. **ĐS:** $C(4;3)$

③ Tìm phương trình đường thẳng d' , đường tròn (C') lần lượt là ảnh của d , (C) qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$. **ĐS:** $d': x - 2y + 8 = 0$ và $(C'): (x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 25$

Lời giải.

① Ta có $\begin{cases} x_{A'} = 3 - 1 = 2 \\ y_{A'} = 5 + 2 = 7 \end{cases} \Rightarrow A'(2;7)$ và $\begin{cases} x_{B'} = -1 - 1 = -2 \\ y_{B'} = 1 + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow B'(-2;3).$

② Ta có $A = T_{\vec{v}}(C) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = x_C - 1 \\ 5 = y_C + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 4 \\ y_C = 3 \end{cases} \Rightarrow C(4;3).$

③ Gọi $M(x; y)$ là một điểm bất kì trên đường thẳng d và $M'(x'; y') = T_{\vec{v}}(M)$. Ta có

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 2 \end{cases} \Rightarrow M(x' + 1; y' - 2)$$

Mà điểm M thuộc đường thẳng d nên $x' + 1 - 2(y' - 2) + 3 = 0 \Leftrightarrow x' - 2y' + 8 = 0$.

Hay phương trình đường thẳng d' là $x - 2y + 8 = 0$.

Gọi $N(x; y)$ là một điểm bất kì trên đường tròn (C) và $N'(x'; y') = T_{\vec{v}}(N)$. Ta có

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' - 2 \end{cases} \Rightarrow N(x' + 1; y' - 2)$$

Mà điểm M thuộc đường tròn (C) nên $(x' + 1 - 2)^2 + (y' - 2 - 3)^2 = 25 \Leftrightarrow (x' - 1)^2 + (y' - 5)^2 = 25$.

Hay phương trình đường tròn (C') là $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

□

BÀI 3. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có ảnh qua phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (2;5)$ là tam giác $A'B'C'$ và tam giác $A'B'C'$ có trọng tâm là $G'(-3;4)$, biết rằng $A(-1;6)$, $B(3;4)$. Tìm tọa độ các điểm A' , B' , C' .

ĐS: $A'(1;11)$, $B'(5;9)$, $C'(-15;-8)$

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Khi đó ta có

$+ A' = T_{\vec{v}}(A) \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = -1 + 2 = 1 \\ y_{A'} = 6 + 5 = 11 \end{cases} \Rightarrow A'(1;11).$

$+ B' = T_{\vec{v}}(B) \Rightarrow \begin{cases} x_{B'} = 3 + 2 = 5 \\ y_{B'} = 4 + 5 = 9 \end{cases} \Rightarrow B'(5;9).$

$+ G'$ là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ nên

$$\begin{cases} x_{C'} = 3x_{G'} - x_{A'} - x_{B'} \\ y_{C'} = 3y_{G'} - y_{A'} - y_{B'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{C'} = -9 - 1 - 5 = -15 \\ y_{C'} = 12 - 11 - 9 = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{C'} = -15 \\ y_{C'} = -8 \end{cases} \Rightarrow C'(-15;-8).$$

□

BÀI 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (-2;3)$ biến điểm M thành điểm M' nằm trên trục tung. **ĐS:** $M(2;0)$

Lời giải.

Gọi $M(x;0)$ và $M'(x'; y') = T_{\vec{v}}(M)$. Ta có $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = 0 + 3 \end{cases} \Rightarrow M'(x - 2; 3).$

Do điểm M' thuộc trục Oy nên $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$. Do đó $M(2;0)$.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 5. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng d . Hãy tìm ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ trong các trường hợp sau:

- ① $d: 2x - 3y + 5 = 0, \vec{v} = (3; 2).$ **ĐS:** $2x - 3y + 5 = 0$
- ② $d: 3x - y + 2 = 0, \vec{v} = (-4; 2).$ **ĐS:** $3x - y + 16 = 0$
- ③ $d: 3x + 4y - 5 = 0, \vec{v} = \overrightarrow{AB}, A(0; 2), B(2; 3).$ **ĐS:** $3x + 4y - 15 = 0$
- ④ $d: x + 3y - 2 = 0, \vec{v} = 2\overrightarrow{AB}, A(-2; 3), B(0; 2).$ **ĐS:** $x + 3y = 0$
- ⑤ d cắt Ox, Oy tại $A(-1; 0), B(0; 5)$ và $\vec{v} = (2; 2).$ **ĐS:** $-5x + y + 17 = 0$

BÀI 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) . Hãy tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ trong các trường hợp sau:

- ① $(C): (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 16, \vec{v} = (2; -3).$ **ĐS:** $(x - 4)^2 + (y + 7)^2 = 16$
- ② $(C): (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25, \vec{v} = \overrightarrow{AB}, A(-1; 1), B(1; -2).$ **ĐS:** $(x - 1)^2 + y^2 = 25$
- ③ $(C): (x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 9, \vec{v} = -\overrightarrow{CB}, B(2; -3), C(-1; 5)$ **ĐS:** $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$
- ④ $(C): x^2 + y^2 - 4x - 6y - 8 = 0, \vec{v} = (5; -2).$ **ĐS:** $(x - 7)^2 + (y - 1)^2 = 21$
- ⑤ $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0, \vec{v} = (-2; 3)$ **ĐS:** $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$
- ⑥ $(C): x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0, \vec{v} = 3\overrightarrow{BC}, B(1; -2), C(-1; -5).$ **ĐS:** $(x + 9)^2 + (y + 8)^2 = 4$

BÀI 7. Trong mặt phẳng Oxy , Cho $A(1; 3), B(-2; 2), C(3; -4)$. Gọi M là trung điểm BC và G là trọng tâm tam giác ABC . Gọi (C) là đường tròn đi qua ba điểm A, B, C . Hãy xác định

- ① $A' = T_{\overrightarrow{BC}}(A)$ và $B' = T_{\overrightarrow{AC}}(B)$ **ĐS:** $A'(6; -3), B'(0; -5)$
- ② $A_1 = T_{\overrightarrow{CG}}(A)$ và $G_1 = T_{\overrightarrow{AM}}(G)$ **ĐS:** $A_1\left(-\frac{4}{3}; \frac{13}{3}\right), G_1\left(\frac{1}{6}; -\frac{11}{3}\right)$
- ③ $d' = T_{\overrightarrow{BM}}(d)$ với d là đường thẳng đi qua A, M . **ĐS:** $4x - \frac{1}{2}y - 14 = 0$

📁 DẠNG 2.2. Xác định phép tịnh tiến khi biết ảnh và tạo ảnh

Phương pháp giải: Giả sử $M'(x'; y')$ là ảnh của $M(x; y)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (a; b)$. Khi đó, ta có $\vec{v} = \overrightarrow{MM'}$ và tọa độ $\vec{v}$ được xác định như sau

$$\begin{cases} a = x' - x \\ b = y' - y \end{cases}$$

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho một phép tịnh tiến biến đường tròn $(C): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$ thành đường tròn $(C'): (x - 10)^2 + (y + 5)^2 = 16$. Hãy xác định phép tịnh tiến đó. **ĐS:** $\vec{v} = (11; -7)$

Lời giải.

Từ phương trình đường tròn (C) và (C') , ta suy ra tâm của hai đường tròn đó lần lượt là $I(-1; 2)$ và $I'(10; -5)$. Ta có $T_{\vec{v}}(C) = (C') \Rightarrow T_{\vec{v}}(I) = I' \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{II'} = (11; -7)$. □

VÍ DỤ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 2x - 3y + 3 = 0$ và $d': 2x - 3y - 5 = 0$. Tìm tọa độ của $\vec{v}$ có giá vuông góc với đường thẳng d để d' là ảnh của d qua $T_{\vec{v}}$.

ĐS: $\vec{v} = \left(\frac{16}{13}; -\frac{24}{13}\right)$

Lời giải.

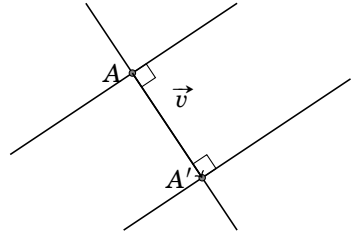
Chọn điểm $A(0;1) \in d$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với d

$$\Rightarrow \Delta: 3x + 2y - 2 = 0.$$

Gọi $A' = d' \cap \Delta$. Tọa độ điểm A' thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - 3y - 5 = 0 \\ 3x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{13} \\ y = -\frac{11}{13} \end{cases} \Rightarrow A' \left(\frac{16}{13}; -\frac{11}{13} \right).$$

$$\text{Vậy } \vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \left(\frac{16}{13}; -\frac{24}{13} \right).$$



□

VÍ DỤ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng lần lượt có phương trình là $d: 3x - 5y + 3 = 0$ và $d': 3x - 5y + 24 = 0$. Tìm $\vec{v}$, biết $|\vec{v}| = \sqrt{13}$ và $T_{\vec{v}}(d) = d'$.

$$\text{ĐS: } \vec{v} = (-2; 3) \text{ hay } \vec{v} = \left(-\frac{29}{17}; \frac{54}{17} \right)$$

Lời giải.

Chọn điểm $A(-1;0) \in d$. Gọi $A'(-8+5t; 3t) \in d'$ là ảnh của A qua $T_{\vec{v}}$. Khi đó, $\vec{v} = \overrightarrow{AA'} = (-7+5t; 3t)$.

$$\text{Ta có } |\vec{v}| = \sqrt{13} \Leftrightarrow |\overrightarrow{AA'}| = \sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{(-7+5t)^2 + (3t)^2} = \sqrt{13} \Leftrightarrow 34t^2 - 70t + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{18}{17} \end{cases}$$

Với $t = 1$, ta có $\vec{v} = (-2; 3)$.

$$\text{Với } t = \frac{18}{17}, \text{ ta có } \vec{v} = \left(-\frac{29}{17}; \frac{54}{17} \right).$$

□

2

BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 3x - y - 9 = 0$.

- ① Tìm phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ có phương song song với trục Ox , biến d thành đường thẳng d' đi qua gốc tọa độ. Khi đó hãy viết phương trình đường thẳng d' . **ĐS:** $\vec{v} = (-3; 0)$

- ② Tìm phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ có giá song song với trục Oy , biến d thành d'' đi qua điểm $A(1; 1)$.

$$\text{ĐS: } \vec{v} = \left(-\frac{7}{3}; 0 \right)$$

Lời giải.

- ① Ox cắt d và d' lần lượt tại $A(3; 0)$ và $O(0; 0)$. Ta có $T_{\vec{v}}(A) = O \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{AO} = (-3; 0)$

- ② Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(1; 1)$ và song song với $Oy \Rightarrow \Delta: x = 1$. Gọi $B = \Delta \cap d \Rightarrow B \left(\frac{10}{3}; 1 \right)$.

$$\text{Ta có } T_{\vec{v}}(B) = A \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{BA} = \left(-\frac{7}{3}; 0 \right)$$

□

BÀI 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ biến điểm $M(3; -1)$ thành một điểm trên đường thẳng $d: x - y - 9 = 0$. Tìm tọa độ $\vec{v}$, biết rằng $|\vec{v}| = 5$. **ĐS:** $\vec{v} = (5; 0)$ hay $\vec{v} = (0; -5)$

Lời giải.

Gọi M' là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$. Ta có $M' \in d \Rightarrow M(m, m-9)$.

$$T_{\vec{v}}(M) = M' \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{MM'} = (m-3; m-8).$$

$$|\vec{v}| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(m-3)^2 + (m-8)^2} = 5 \Leftrightarrow 2m^2 - 22m + 48 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = 8 \end{cases}$$

Với $m = 3$, ta có $\vec{v} = (0; -5)$.

Với $m = 8$, ta có $\vec{v} = (5; 0)$.

□

BÀI 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hình bình hành $ABCD$ có phương trình chứa cạnh AB là $3x - 2y + 3 = 0$ và chứa cạnh CD là $3x - 2y - 6 = 0$. Tìm tọa độ $\vec{v}$, biết rằng $CD = T_{\vec{v}}(AB)$ và $\vec{v} \perp \overrightarrow{AB}$.

$$\text{ĐS: } \vec{v} = \left(\frac{27}{13}; -\frac{18}{13} \right)$$

Lời giải.

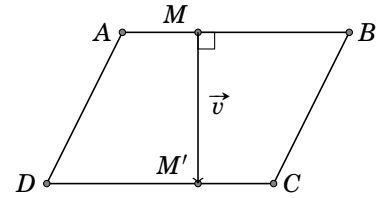
Chọn điểm $M(-1;0)$ thuộc đường thẳng chứa cạnh AB và M' là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

Gọi Δ là đường thẳng chứa $MM' \Rightarrow \Delta \perp AB$ (do $MM' \perp AB$) và đi qua M .

Suy ra phương trình đường thẳng $\Delta: 2x + 3y + 2 = 0$.

Ta có $M' = \Delta \cap CD \Rightarrow M' \left(\frac{14}{13}; -\frac{18}{13} \right)$

Vậy $\vec{v} = \overrightarrow{MM'} = \left(\frac{27}{13}; -\frac{18}{13} \right)$.



□



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy xác định phép tịnh tiến theo $\vec{v}$ cùng phương với trục hoành biến đường thẳng $d: x - 4y + 4 = 0$ thành đường thẳng d' qua $A(1; -3)$. **ĐS:** $\vec{v} = (17; 0)$

BÀI 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng d, d' lần lượt có phương trình là $d: 3x - y - 7 = 0, d': 3x - y + 13 = 0$ và vectơ $\vec{u} = (1; -1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{v}$ trong phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ biến d thành d' , biết rằng vectơ $\vec{v}$ và $\vec{u}$ cùng phương. **ĐS:** $\vec{v} = (-5; 5)$

BÀI 6. Cho $(P): y = x^2 - 4x + 7$ và $(P'): y = x^2$. Tìm phép tịnh tiến biến (P) thành (P') .

ĐS: $\vec{v} = (-2; -7)$

□ DẠNG 2.3. Các bài toán ứng dụng của phép tịnh tiến

① Chứng minh hoặc xác định các yếu tố hình học

- Từ giả thiết tìm hai điểm cố định phù hợp để xây dựng một vectơ cố định.
- Xác định một phép tịnh tiến phù hợp theo vectơ cố định vừa tìm được.
- Dùng tính chất của phép tịnh tiến để chứng minh các tính chất hình học hoặc xác định các yếu tố của hình.

② Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn tính chất cho trước (Toán quỹ tích)

- Chỉ ra phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến điểm E nào đó thành M mà quỹ tích điểm E đã biết hoặc dễ tìm hơn.

$$\begin{aligned} T_{\vec{v}}: E &\mapsto M \\ (H) &\mapsto (H') \end{aligned}$$

- Xác định hình (H) là quỹ tích của điểm E .
- Khi đó tập hợp các điểm M là hình (H') với (H') là ảnh của (H) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

Điều kiện áp dụng: Bài toán có yếu tố song song và bằng nhau, có vectơ, ...



VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho tứ giác $ABCD$ có $\hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 150^\circ, \hat{D} = 90^\circ, CD = 12$ và $AB = 6\sqrt{3}$. Tính độ dài các cạnh AD và BC . **ĐS:** $AD = 6\sqrt{3}, BC = 6$

Lời giải.

Xét $T_{\vec{BC}}(A) = M \Rightarrow ABCM$ là hình bình hành.

$$\Rightarrow \widehat{BCM} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 30^\circ$$

$$\text{Ta có: } \widehat{BCD} = 360^\circ - (\widehat{DAB} + \widehat{ADC} + \widehat{ABC}) = 60^\circ \Rightarrow \widehat{MCD} = 30^\circ.$$

Theo định lý cosin cho ΔMDC :

$$MD^2 = MC^2 + DC^2 - 2MC \cdot DC \cdot \cos 30^\circ = 36 \Rightarrow MD = 6.$$

$$MD = \frac{1}{2}CD \text{ và } MC = MD\sqrt{3} \Rightarrow \Delta MDC \text{ là nửa tam giác đều.}$$

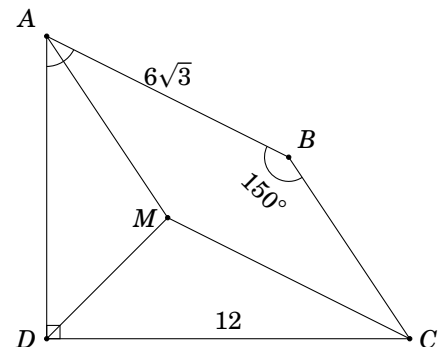
$$\Rightarrow \widehat{DMC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MDA} = 30^\circ.$$

$$\Rightarrow \widehat{MDA} = \widehat{MAD} = \widehat{MAB} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta AMD \text{ cân tại } M \Rightarrow BC = MA = MD = 6.$$

$$\text{Theo định lý sin cho } \Delta AMD: \frac{AD}{\sin \widehat{AMD}} = \frac{DM}{\sin \widehat{MAD}}$$

$$\Leftrightarrow AD = \frac{DM \cdot \sin \widehat{AMD}}{\sin \widehat{MAD}} = \frac{6 \cdot \sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} = 6\sqrt{3}.$$

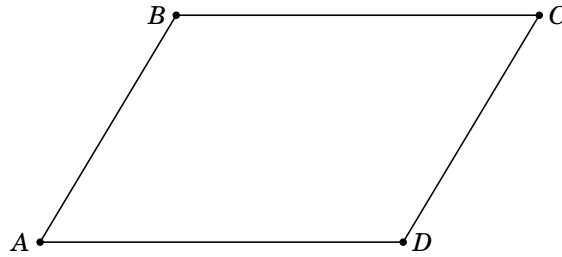




VÍ DỤ 2. Cho hình bình hành $ABCD$, AB cố định, D di động trên đường thẳng d cố định. Tìm tập hợp điểm C .

ĐS: Tập hợp điểm C là đường thẳng d' , là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AB}$

Lời giải.



$ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

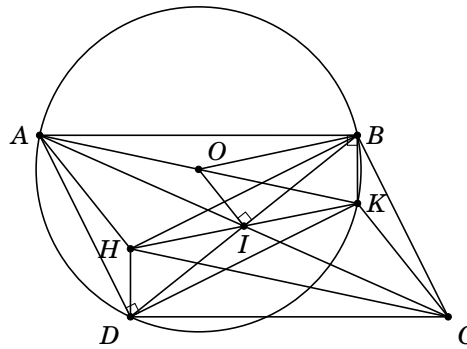
Suy ra phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AB}$ biến D thành C , mà điểm D di động trên đường thẳng d cố định, do đó C di động trên d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AB}$. □

VÍ DỤ 3. Cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh A cố định, BD có độ dài không đổi bằng $2a$, ba điểm A, B, D nằm trên một đường tròn cố định $(O; R)$. Tìm tập hợp điểm C .

ĐS: Tập hợp điểm C là đường tròn ảnh của đường tròn tâm A , bán kính $2\sqrt{R^2 - a^2}$ qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AK}$, với K là giao điểm của AO với đường tròn $(O; R)$

Lời giải.

① Cách 1



Gọi H là trực tâm của $\triangle ABD$, K là giao điểm của AO với đường tròn $(O; R)$. Khi đó K cố định.

Gọi $I = AC \cap BD$. Ta có: OI là đường trung bình của $\triangle AKC$, suy ra $\overrightarrow{KC} = 2\overrightarrow{OI}$ (1).

Mặt khác: $HBDK$ là hình bình hành, suy ra I là trung điểm của HK , do đó OI là đường trung bình của $\triangle AHK$.

Suy ra $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OI}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AH}$ nên $AHCK$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{HC}$.

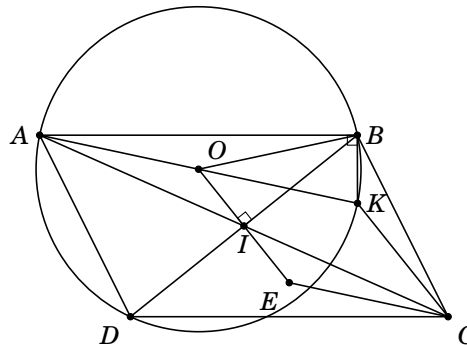
Xét $\triangle OBI$ vuông tại I có $OI = \sqrt{OB^2 - IB^2} = \sqrt{R^2 - a^2}$.

Suy ra $AH = 2OI = 2\sqrt{R^2 - a^2}$.

Phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AK}$ biến H thành C , A thành K .

Do đó tập hợp điểm C là đường tròn tâm K , bán kính $2\sqrt{R^2 - a^2}$, là ảnh của đường tròn tâm A , bán kính $2\sqrt{R^2 - a^2}$ qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AK}$.

② Cách 2



Gọi K là giao điểm của AO với đường tròn $(O; R)$. Khi đó K cố định.

Gọi $I = AC \cap BD$. Ta có: OI là đường trung bình của $\triangle AKC$, suy ra $\overrightarrow{KC} = 2\overrightarrow{OI}$.

Gọi E đối xứng với O qua I . Khi đó $OE = 2OI = 2\sqrt{R^2 - a^2}$.

Suy ra tập hợp điểm E là đường tròn tâm O , bán kính $2\sqrt{R^2 - a^2}$.

Ta có: $\overrightarrow{KC} = 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OE}$, suy ra $OKCE$ là hình bình hành. Do đó $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{EC}$.

Suy ra phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{OK}$ biến điểm E thành C , O thành K . Do đó tập hợp điểm C là đường tròn tâm K , bán kính $2\sqrt{R^2 - a^2}$, là ảnh của đường tròn tâm O , bán kính $2\sqrt{R^2 - a^2}$ qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{OK}$.

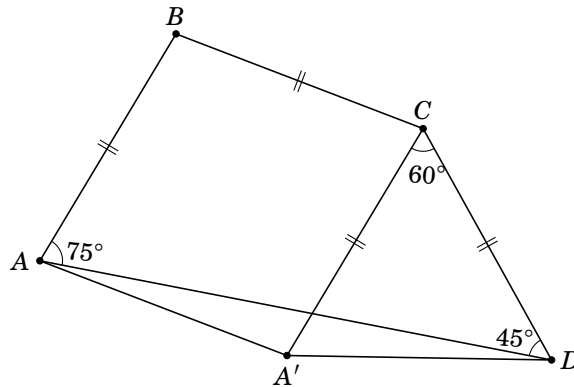
□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $AB = BC = CD = a$, $\widehat{BAD} = 75^\circ$, $\widehat{ADC} = 45^\circ$. Tính AD .

ĐS: $AD = a\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

Lời giải.



Xét $T_{\overrightarrow{BC}}(A) = A'$. Khi đó tứ giác $ABCA'$ là hình bình hành.

Suy ra $\widehat{CBA} + \widehat{A'CB} = 180^\circ$ và $AA' = CA' = BA = CD = a \Rightarrow \triangle CA'D$ cân tại C .

Ta có: $\widehat{BAD} + \widehat{ADC} + \widehat{DCB} + \widehat{CBA} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{CBA} + \widehat{DCB} = 240^\circ \Rightarrow \widehat{A'CD} = 60^\circ \Rightarrow \triangle CA'D$ đều.

$\Rightarrow \widehat{A'DA} = 15^\circ \Rightarrow \widehat{AA'D} = 150^\circ$ ($\triangle A'AD$ cân tại A').

Áp dụng định lý cosin cho tam giác $A'AD$: $AD^2 = A'A^2 + A'D^2 - 2 \cdot A'A \cdot A'D \cdot \cos \widehat{AA'D} = 2a^2 + \sqrt{3}a^2$.

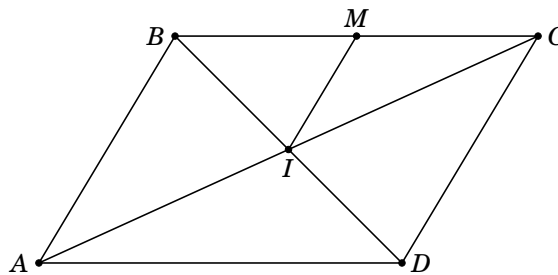
$\Rightarrow AD = a\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

□

BÀI 2. Cho hình bình hành $ABCD$, hai điểm A, B cố định, tâm I của hình bình hành di động trên đường tròn (C) . Tìm quỹ tích trung điểm M của cạnh BC .

ĐS: Tập hợp điểm M là đường tròn (C') , là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Lời giải.



Ta có: IM là đường trung bình của $\triangle CAB \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Suy ra: $M = T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}(I)$ mà I di động trên đường tròn (C) , do đó M di động trên đường tròn (C') , là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M sao cho C nằm trong tam giác MBD . Giả sử $\widehat{MBC} = \widehat{MDC}$. Chứng minh: $\widehat{AMD} = \widehat{BMC}$.

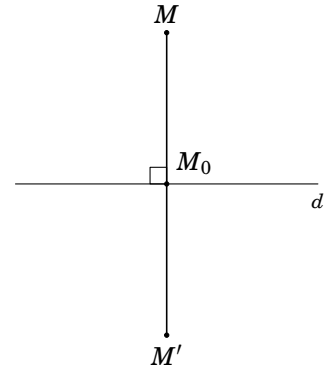
BÀI 4. Cho đoạn thẳng AB và đường tròn (C) tâm O bán kính R nằm về một phía của đường thẳng AB . Lấy điểm M trên (C) rồi dựng hình bình hành $ABMM'$. Tìm tập hợp các điểm M' khi M di động trên (C) .

ĐS: Tập hợp điểm M' là đường tròn (C') , là ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{BA}$

BÀI 3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỰC (BÀI ĐỌC THÊM)

A ĐỊNH NGHĨA

- ① Điểm M' được gọi là đối xứng với điểm M qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng MM' . Khi điểm M nằm trên d thì ta xem M đối xứng với chính nó qua đường thẳng d .
- ② Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng d được gọi là phép đối xứng qua đường thẳng d , hay gọi tắt là phép đối xứng trục.
- ③ Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng. Kí hiệu $\mathcal{D}_d$.
Như vậy $M' = \mathcal{D}_d(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M'} = -\overrightarrow{M_0M}$, với M_0 là hình chiếu vuông góc của M trên d .



B BIỂU THỨC TỌA ĐỘ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , với mỗi điểm $M(x_M; y_M)$, gọi $M'(x_{M'}; y_{M'}) = \mathcal{D}_d(M)$.

— Nếu chọn d là trục Ox thì ta có $\begin{cases} x_{M'} = x_M \\ y_{M'} = -y_M \end{cases}$.

— Nếu chọn d là trục Oy thì ta có $\begin{cases} x_{M'} = -x_M \\ y_{M'} = y_M \end{cases}$.

C TÍNH CHẤT

Phép đối xứng trục là một phép dời hình nên có đầy đủ tính chất của phép dời hình:

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì;
- Biến một đường thẳng thành đường thẳng;
- Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho;
- Biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho;
- Biến một đường tròn thành một đường tròn có cùng bán kính.

D TRỤC ĐỐI XỨNG CỦA MỘT HÌNH

Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình H nếu phép đối xứng trục $\mathcal{D}_d$ biến hình H thành chính nó, tức là $H = \mathcal{D}_d(H)$.

BÀI 4. PHÉP QUAY

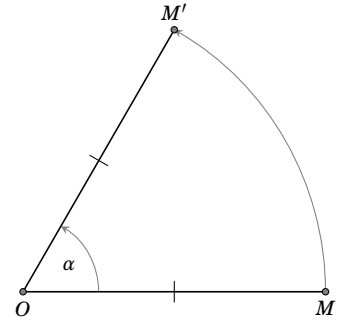
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

① Định nghĩa

Cho điểm O và góc lượng giác α . Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và góc lượng giác $(OM; OM')$ bằng α được gọi là phép quay tâm O góc quay α .

Điểm O gọi là tâm quay, α gọi là góc quay. Phép quay tâm O góc α , kí hiệu là $Q_{(O;\alpha)}$.

$$Q_{(O;\alpha)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} (OM, OM') = \alpha \\ OM = OM' \end{cases}$$



— Phép quay nào biến lá cờ (C) thành lá cờ (C'):

— Phép quay nào biến lá cờ (C') thành lá cờ (C):

② Tính chất

Phép tịnh tiến là phép biến hình biến:

- Bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- Biến một đường thẳng thành một đường thẳng.
- Biến một đoạn thẳng thành một đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
- Biến một tam giác thành một tam giác bằng tam giác đã cho.
- Biến một đường tròn thành một đường tròn có cùng bán kính.

Giả sử phép quay tâm O góc quay α biến đường thẳng d thành đường thẳng d' . Khi đó:



— Nếu $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ thì góc giữa d và d' bằng α .

— Nếu $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ thì góc giữa d và d' bằng $\pi - \alpha$.

③ Hai hình bằng nhau

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

□ DẠNG 4.1. Tìm tọa độ ảnh của một điểm qua phép quay

Phương pháp xác định ảnh của một điểm qua phép quay

① Phương pháp 1. Sử dụng định nghĩa

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi $M'(x_M; y_M)$ là ảnh của $M(x_M; y_M)$ qua phép quay tâm $I(a; b)$, góc quay α . Khi đó:

$$M'(x_M; y_M) = Q_{(I;\alpha)}(M) \Rightarrow \begin{cases} IM' = IM & (1) \\ \widehat{MIM'} = \alpha & (2) \end{cases}$$

Từ (1), sử dụng công thức tính độ dài, sẽ tìm được phương trình thứ nhất theo hai ẩn.

Từ (2), sử dụng định lý hàm số cos, sẽ tìm được phương trình thứ hai theo hai ẩn.

Giải hệ phương trình này tìm được x_M, y_M , từ đó suy ra tọa độ điểm $M'(x_M; y_M)$.



Chú ý góc của phép quay để chọn được tọa độ điểm phù hợp.

② Phương pháp 2. Sử dụng công thức tọa độ

$$M'(x'_M; y'_M) = Q_{(I;\alpha)}(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x'_M = (x_M - a)\cos\alpha - (y_M - b)\sin\alpha + a \\ y'_M = (x_M - a)\sin\alpha + (y_M - b)\cos\alpha + b \end{cases}$$

③ Phương pháp 3. Trong các trường hợp đơn giản sử dụng hệ trục tọa độ, thực hiện phép quay tìm ngay được tọa độ điểm ảnh.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tọa độ A' , B' lần lượt là ảnh của A , B qua phép quay tâm O , góc quay 90° . Biết

① $A(1;0)$.

ĐS: $A'(0;1)$ ② $B(0;-2)$.

ĐS: $B'(2;0)$

Lời giải.

① Xét điểm $A(1;0)$.

Gọi A' có tọa độ là $(x';y')$. Khi đó

$$A'(x';y') = Q_{(O;90^\circ)}(A) \Rightarrow \begin{cases} OA = OA' & (1) \\ \widehat{AOA'} = 90^\circ. & (2) \end{cases}$$

Từ (1), suy ra $(x')^2 + (y')^2 = 1$.

Từ (2), suy ra $1 \cdot x' + 0 \cdot y' = 0$.

Vậy, thu được $(x';y') = (0;1)$ hoặc $(x';y') = (0;-1)$. Vì góc quay dương nên thu được điểm $A'(0;1)$.

② Xét điểm $B(0;-2)$.

Gọi B' có tọa độ là $(x';y')$. Khi đó

$$\begin{cases} x' = (x_B - x_O) \cos 90^\circ - (y_B - y_O) \sin 90^\circ + x_O \\ y' = (x_B - x_O) \sin 90^\circ + (y_B - y_O) \cos 90^\circ + y_O. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow B'(2;0).$$

! Biểu diễn điểm A , B trên hệ trục tọa độ, có thể suy ra ngay tọa độ điểm A' và B' .

□

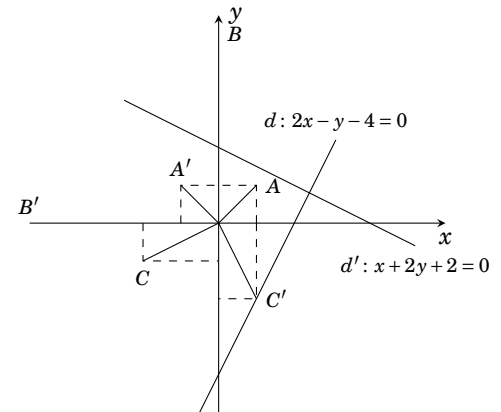
2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có $A(1;1)$, $B(0;5)$, $C(-2;-1)$ và đường thẳng $d: 2x - y - 4 = 0$. Hãy xác định tọa độ các đỉnh của tam giác $A'B'C'$ và phương trình đường thẳng d' theo thứ tự là ảnh của tam giác ABC và đường thẳng d qua phép quay tâm O , góc quay 90° .

Lời giải.

① Phép quay tâm O , góc quay 90° biến $A(1;1)$ thành $A'(-1;1)$, biến $B(0;5)$ thành $B'(-5;0)$, biến $C(-2;-1)$ thành $C'(1;-2)$.

② Phép quay tâm O , góc quay 90° biến đường thẳng $d: 2x - y - 4 = 0$ thành đường thẳng $d': x + 2y + 2 = 0$.



□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $A(2;0)$ và đường thẳng $d: x + y - 2 = 0$. Tìm ảnh của A và d qua phép quay tâm O góc 90° .

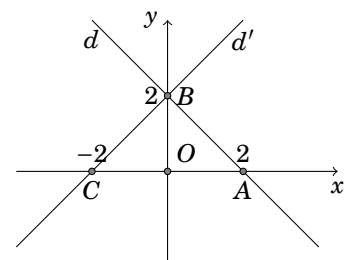
Lời giải.

Ta có: $Q_{(O;90^\circ)}(A) = B$ với $B(0;2)$.

$Q_{(O;90^\circ)}(B) = C$ với $C(-2;0)$.

Gọi d' là ảnh của d qua $Q_{(O;90^\circ)}$. Vì A, B thuộc d nên B, C thuộc d' .

Phương trình đường thẳng $d': x - y + 2 = 0$.



□

DẠNG 4.2. Tìm phương trình ảnh của một đường tròn qua phép quay**Phương pháp xác định ảnh của một đường tròn qua phép quay**

Vì phép quay biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính nên để tìm phương trình ảnh của đường tròn qua phép quay, chúng ta thực hiện qua ba bước sau đây:

- ① Xác định tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn tạo ảnh từ phương trình đường tròn đã cho.
- ② Tìm tọa độ tâm I' là ảnh của tâm I qua phép quay.
- ③ Viết phương trình đường tròn ảnh với tọa độ tâm I' và bán kính R .

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy tìm ảnh của đường tròn (C') qua phép quay tâm O , góc quay α trong các trường hợp sau đây:

- | | |
|---|--|
| ① $(C): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1, \quad \alpha = 90^\circ.$ | ĐS: $(C'): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ |
| ② $(C): x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0, \quad \alpha = 90^\circ.$ | ĐS: $(C'): x^2 + (y-2)^2 = 9$ |

Lời giải.

- | | |
|---|--|
| ① Ta có:
+ Tâm $I(2;1), R = 1$. Suy ra: $I'(-1;2), R' = R = 1$.
+ $(C'): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$. | ② Ta có:
+ Tâm $I(2;0), R = 3$. Suy ra: $I'(0;2), R' = R = 3$.
+ $(C'): x^2 + (y-2)^2 = 9$. |
|---|--|

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy tìm ảnh của đường tròn (C') qua phép quay tâm O , góc quay α trong các trường hợp sau đây:

- | | |
|---|---|
| ① $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y = 1, \quad \alpha = -90^\circ.$ | ĐS: $(C'): (x+2)^2 + (y+1)^2 = 6$ |
| ② $(C): x^2 + (y-1)^2 = 1, \quad \alpha = 60^\circ.$ | ĐS: $(C'): \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$ |

Lời giải.

- | | |
|---|---|
| ① Ta có:
+ Tâm $I(1;-2), R = \sqrt{6}$. Suy ra: $I'(-2;-1), R' = R = \sqrt{6}$.
+ $(C'): (x+2)^2 + (y+1)^2 = 6$. | ② Ta có:
+ Tâm $I(0;1), R = 1$. Suy ra: $I'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right), R' = R = 1$.
+ $(C'): \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$. |
|---|---|

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy tìm ảnh của đường tròn (C') qua phép quay tâm O , góc quay α trong các trường hợp sau đây:

- | | |
|---|--|
| ① $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0, \quad \alpha = -30^\circ.$ | ĐS: $(C'): \left(x - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 5$ |
| ② $(C): x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0, \quad \alpha = 90^\circ.$ | ĐS: $(C'): x^2 + (y+3)^2 = 4$ |

BÀI 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy tìm ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm O , góc quay α trong các trường hợp sau đây

- | | |
|--|----------------------------|
| ① $d: x + y - 2 = 0, \quad \alpha = 90^\circ;$ | ĐS: $x - y + 2 = 0$ |
|--|----------------------------|

$$\textcircled{2} \quad d: x - 3y + 11 = 0, \quad \alpha = -90^\circ;$$

$$\text{ĐS: } 3x + y - 11 = 0$$

$$\textcircled{3} \quad d: x - 3y + 5 = 0, \quad \alpha = 60^\circ;$$

$$\text{ĐS: } (1 + 3\sqrt{3})x + (\sqrt{3} - 3)y + 10 = 0$$

$$\textcircled{4} \quad d: 2x - y + 6 = 0, \quad \alpha = 45^\circ.$$

$$\text{ĐS: } 3x + y + 6\sqrt{2} = 0$$

Lời giải.

$$\textcircled{1} \quad \text{Lấy } M(0;2), N(2;0) \in d.$$

Gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép quay $Q_{(O, 90^\circ)}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{M'} = 0 \cdot \cos 90^\circ - 2 \cdot \sin 90^\circ = -2 \\ y_{M'} = 0 \cdot \sin 90^\circ + 2 \cdot \cos 90^\circ = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x_{N'} = 2 \cdot \cos 90^\circ - 0 \cdot \sin 90^\circ = 0 \\ y_{N'} = 2 \cdot \sin 90^\circ + 0 \cdot \cos 90^\circ = 2. \end{cases}$$

Suy ra $M'(-2;0), N'(0;2)$.

Gọi d' là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O, 90^\circ)}$, khi đó d' đi qua M', N' .

Ta có $\overrightarrow{M'N'} = (2;2) = 2(1;1)$.

Suy ra phương trình đường thẳng d' là $1(x-0) - 1(y-2) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2 = 0$.

$$\textcircled{2} \quad \text{Lấy } M(-11;0), N(1;4) \in d.$$

Gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép quay $Q_{(O, -90^\circ)}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{M'} = -11 \cdot \cos(-90^\circ) - 0 \cdot \sin(-90^\circ) = 0 \\ y_{M'} = -11 \cdot \sin(-90^\circ) + 0 \cdot \cos(-90^\circ) = 11 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x_{N'} = 1 \cdot \cos(-90^\circ) - 4 \cdot \sin(-90^\circ) = 4 \\ y_{N'} = 1 \cdot \sin(-90^\circ) + 4 \cdot \cos(-90^\circ) = -1. \end{cases}$$

Suy ra $M'(0;11), N'(4;-1)$.

Gọi d' là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O, -90^\circ)}$, khi đó d' đi qua M', N' .

Ta có $\overrightarrow{M'N'} = (4;-12) = 4(1;-3)$.

Suy ra phương trình đường thẳng d' là $3(x-0) + 1(y-11) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 11 = 0$.

$$\textcircled{3} \quad \text{Lấy } M(-5;0), N(1;2) \in d.$$

Gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép quay $Q_{(O, 60^\circ)}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{M'} = -5 \cdot \cos 60^\circ - 0 \cdot \sin 60^\circ = -\frac{5}{2} \\ y_{M'} = -5 \cdot \sin 60^\circ + 0 \cdot \cos 60^\circ = -\frac{5\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x_{N'} = 1 \cdot \cos 60^\circ - 2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1-2\sqrt{3}}{2} \\ y_{N'} = 1 \cdot \sin 60^\circ + 2 \cdot \cos 60^\circ = \frac{2+\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } M'\left(-\frac{5}{2}; -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right), N'\left(\frac{1-2\sqrt{3}}{2}; \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right).$$

Gọi d' là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O, 60^\circ)}$, khi đó d' đi qua M', N' .

Ta có $\overrightarrow{M'N'} = (3-\sqrt{3}; 1+3\sqrt{3})$.

Suy ra phương trình đường thẳng d' là $(1+3\sqrt{3})\left(x+\frac{5}{2}\right) + (\sqrt{3}-3)\left(y+\frac{5\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow (1+3\sqrt{3})x + (\sqrt{3}-3)y + 10 = 0$.

$$\textcircled{4} \quad \text{Lấy } M(-3;0), N(0;6) \in d.$$

Gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép quay $Q_{(O, 45^\circ)}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{M'} = -3 \cdot \cos 45^\circ - 0 \cdot \sin 45^\circ = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y_{M'} = -3 \cdot \sin 45^\circ + 0 \cdot \cos 45^\circ = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x_{N'} = 0 \cdot \cos 45^\circ - 6 \cdot \sin 45^\circ = -3\sqrt{2} \\ y_{N'} = 0 \cdot \sin 45^\circ + 6 \cdot \cos 45^\circ = 3\sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } M'\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right), N'(-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}).$$

Gọi d' là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O, 45^\circ)}$, khi đó d' đi qua M', N' .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{M'N'} = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}; \frac{9\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}(1;-3).$$

Suy ra phương trình đường thẳng d' là $3(x+3\sqrt{2}) + 1(y-3\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow 3x + y + 6\sqrt{2} = 0$.

□

BÀI 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 2x - 3y + 2 = 0$ và đường tròn có phương trình là $(C): x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0$.

$$\textcircled{1} \quad \text{Viết phương trình } d' \text{ là ảnh của } d \text{ qua phép } Q_{(O, 90^\circ)}.$$

$$\text{ĐS: } 3x + 2y + 2 = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Viết phương trình } (C') \text{ là ảnh của } (C) \text{ qua phép } Q_{(O, 90^\circ)}.$$

$$\text{ĐS: } (x+2)^2 + (y-2)^2 = 9$$

Lời giải.

- ① Lấy $M(-1;0), N(2;2) \in d$.

Gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép quay $Q_{(O, 90^\circ)}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{M'} = -1 \cdot \cos 90^\circ - 0 \cdot \sin 90^\circ = 0 \\ y_{M'} = -1 \cdot \sin 90^\circ + 0 \cdot \cos 90^\circ = -1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_{N'} = 2 \cdot \cos 90^\circ - 2 \cdot \sin 90^\circ = -2 \\ y_{N'} = 2 \cdot \sin 90^\circ + 2 \cdot \cos 90^\circ = 2. \end{cases}$$

Suy ra $M'(0; -1), N'(-2; 2)$.

Gọi d' là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O, 90^\circ)}$, khi đó d' đi qua M', N' .

Ta có $\overrightarrow{M'N'} = (-2; 3)$.

Suy ra phương trình đường thẳng d' là $3(x-0) + 2(y+1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y + 2 = 0$.

- ② Đường tròn (C) có tâm $I(2;2)$, bán kính $R = 3$.

Gọi I' là ảnh của I qua phép quay $Q_{(O, 90^\circ)}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{I'} = 2 \cdot \cos 90^\circ - 2 \cdot \sin 90^\circ = -2 \\ y_{I'} = 2 \cdot \sin 90^\circ + 2 \cdot \cos 90^\circ = 2 \end{cases}$$

Suy ra $I'(-2; 2)$.

Vì (C') là ảnh của (C) qua phép quay $Q_{(O, 90^\circ)}$ nên (C') có tâm là I' và bán kính bằng 3.

Vậy $(C') : (x+2)^2 + (y-2)^2 = 9$.

□

BÀI 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(2;2)$, đường thẳng $d : 2x - y - 2 = 0$ và đường tròn $(C) : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$. Tìm ảnh của $M, d, (C)$ qua:

- ① Phép quay tâm O góc quay 45° .

$$\text{ĐS: } M'(0; 2\sqrt{2}), d' : 3x + y - 2\sqrt{2} = 0, (C') : x^2 + (y-2)^2 = 4$$

- ② Phép quay tâm $I(1;2)$ góc quay 45° .

$$\text{ĐS: } M''\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1; \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\right), d'' : 3x + y - 2\sqrt{2} - 5 = 0, (C'') : \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\right)^2 = 4$$

Lời giải.

- ① — Gọi M' là ảnh của M qua phép quay $Q_{(O, 45^\circ)}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{M'} = 2 \cdot \cos 45^\circ - 2 \cdot \sin 45^\circ = 0 \\ y_{M'} = 2 \cdot \sin 45^\circ + 2 \cdot \cos 45^\circ = 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Suy ra $M'(0; 2\sqrt{2})$.

— Lấy $A(1;0), B(0;-2) \in d$.

Gọi A', B' lần lượt là ảnh của A, B qua phép quay $Q_{(O, 45^\circ)}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{A'} = 1 \cdot \cos 45^\circ - 0 \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_{A'} = 1 \cdot \sin 45^\circ + 0 \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x_{B'} = 0 \cdot \cos 45^\circ + 2 \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{2} \\ y_{B'} = 0 \cdot \sin 45^\circ - 2 \cdot \cos 45^\circ = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Suy ra $A'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), B'(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

Gọi d' là ảnh của d qua phép quay $Q_{(O, 45^\circ)}$, khi đó d' đi qua A', B' .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{A'B'} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1; -3).$$

Suy ra phương trình đường thẳng d' là $3(x - \sqrt{2}) + 1(y + \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 2\sqrt{2} = 0$.

— Đường tròn (C) có tâm $E(1;1)$, bán kính $R = 2$.

Gọi E' là ảnh của E qua phép quay $Q_{(O, 45^\circ)}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{E'} = 1 \cdot \cos 45^\circ - 1 \cdot \sin 45^\circ = 0 \\ y_{E'} = 1 \cdot \sin 45^\circ + 1 \cdot \cos 45^\circ = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Suy ra $E'(0; \sqrt{2})$.

Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép quay $Q_{(O, 45^\circ)}$ nên (C') có tâm là E' và bán kính bằng 2.

Vậy $(C') : x^2 + (y-2)^2 = 4$.

- ② — Gọi M'' là ảnh của M qua phép quay $Q_{(I, 45^\circ)}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{M''} = (2-1) \cdot \cos 45^\circ - (2-2) \cdot \sin 45^\circ + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ y_{M''} = (2-1) \cdot \sin 45^\circ + (2-2) \cdot \cos 45^\circ + 2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2. \end{cases}$$

Suy ra $M''\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1; \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\right)$.

— Lấy $A(1;0), B(0;-2) \in d$.

Gọi A'', B'' lần lượt là ảnh của A, B qua phép quay $Q_{(I, 45^\circ)}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{A''} = (1-1) \cdot \cos 45^\circ - (0-2) \cdot \sin 45^\circ + 1 = \sqrt{2} + 1 \\ y_{A''} = (1-1) \cdot \sin 45^\circ + (0-2) \cdot \cos 45^\circ + 2 = -\sqrt{2} + 2 \end{cases}$$

$$\text{và } \begin{cases} x_{B''} = (0-1) \cdot \cos 45^\circ - (-2-2) \cdot \sin 45^\circ + 1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1 \\ y_{B''} = (0-1) \cdot \sin 45^\circ + (-2-2) \cdot \cos 45^\circ + 2 = -\frac{5\sqrt{2}}{2} + 2. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } A''(\sqrt{2}+1; -\sqrt{2}+2), B''\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+1; -\frac{5\sqrt{2}}{2}+2\right).$$

Gọi d'' là ảnh của d qua phép quay $Q_{(I, 45^\circ)}$, khi đó d'' đi qua A'', B'' .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{A''B''} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1; -3).$$

$$\text{Suy ra phương trình đường thẳng } d'' \text{ là } 3 \cdot (x - \sqrt{2} - 1) + 1 \cdot (y + \sqrt{2} - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 2\sqrt{2} - 5 = 0.$$

— Đường tròn (C) có tâm $E(1;1)$, bán kính $R=2$.

Gọi E'' là ảnh của E qua phép quay $Q_{(I, 45^\circ)}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{E''} = (1-1) \cdot \cos 45^\circ - (1-2) \cdot \sin 45^\circ + 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \\ y_{E''} = (1-1) \cdot \sin 45^\circ + (1-2) \cdot \cos 45^\circ + 2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 2. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } E''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1; -\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right).$$

Gọi (C'') là ảnh của (C) qua phép quay $Q_{(I, 45^\circ)}$ nên (C'') có tâm là E'' và bán kính bằng 2.

$$\text{Vậy } (C''): \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\right)^2 = 4.$$

□

BÀI 6. Trong mặt phẳng Oxy , cho điểm $A(4;3)$, đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 = 5$. Tìm ảnh của $A, (C)$ qua phép quay tâm O góc quay 60° .

$$\text{ĐS: } A' \left(\frac{4-3\sqrt{3}}{2}; \frac{3+4\sqrt{3}}{2} \right), (C'): (x+2)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 = 5$$

Lời giải.

— Gọi A' là ảnh của A qua phép quay $Q_{(O, 60^\circ)}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{A'} = 4 \cdot \cos 60^\circ - 3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{4-3\sqrt{3}}{2} \\ y_{A'} = 4 \cdot \sin 60^\circ + 3 \cdot \cos 60^\circ = \frac{3+4\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } A' \left(\frac{4-3\sqrt{3}}{2}; \frac{3+4\sqrt{3}}{2} \right).$$

— Đường tròn (C) có tâm $E(2;2\sqrt{3})$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Gọi E' là ảnh của E qua phép quay $Q_{(O, 60^\circ)}$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{E'} = 2 \cdot \cos 60^\circ - 2\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = -2 \\ y_{E'} = 2 \cdot \sin 60^\circ + 2\sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } E'(-2; 2\sqrt{3}).$$

Gọi (C') là ảnh của (C) qua phép quay $Q_{(O, 60^\circ)}$ nên (C') có tâm là E' và bán kính bằng $\sqrt{5}$.

$$\text{Vậy } (C'): (x+2)^2 + (y-2\sqrt{3})^2 = 5.$$

□

BÀI 7. Cho tam giác ABC có các đỉnh kí hiệu theo hướng âm, dựng bên ngoài các hình vuông $ABDE, BCKF$. Gọi P là trung điểm của AC , H là điểm đối xứng của D qua B , M là trung điểm của FH .

① Xác định ảnh của $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BP}$ trong phép quay $Q_{(B, 90^\circ)}$.

$$\text{ĐS: } \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BM}$$

② Chứng minh $DF = 2BP$ và $DF \perp BP$.

Lời giải.

① Từ giả thiết ta có

$$Q_{(B,90^\circ)}: B \rightarrow B$$

$$A \rightarrow H$$

$$\overrightarrow{BA} \rightarrow \overrightarrow{BH}$$

$$C \rightarrow F$$

$$AC \rightarrow HF$$

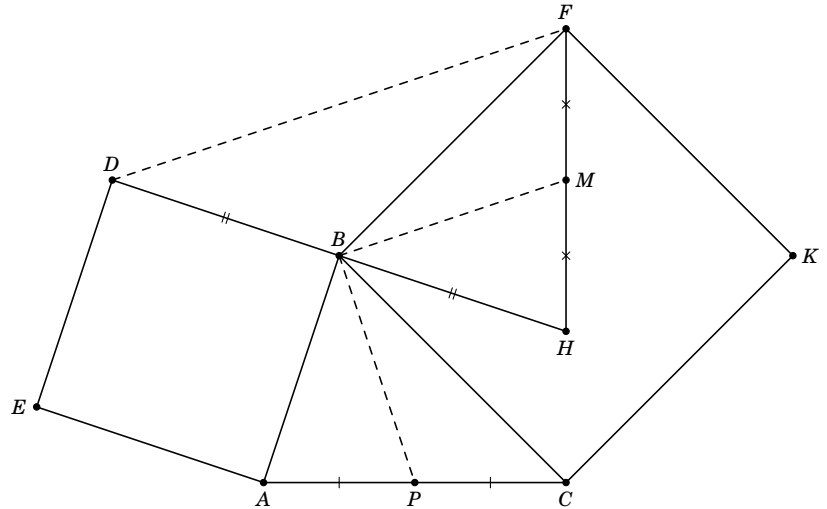
$$P \rightarrow M$$

$$\overrightarrow{BP} \rightarrow \overrightarrow{BM}.$$

② Vì $Q_{(B,90^\circ)}: \overrightarrow{BP} \rightarrow \overrightarrow{BM}$

$$\text{nên ta có } \begin{cases} BP = BM \\ (\widehat{BP, BM}) = 90^\circ \end{cases}$$

mà BM là đường trung bình của tam giác HFD nên $DF = 2BP$ và $DF \perp BP$.



BÀI 8. Cho tam giác ABC . Dựng về phía ngoài tam giác đó các tam giác BAE và CAF vuông cân tại A . Gọi I, M, J theo thứ tự là trung điểm của EB, BC, CF . Chứng minh tam giác IMJ vuông cân.

Lời giải.

Vì $\triangle ABE, \triangle ACF$ là những tam giác vuông cân tại A nên ta có

$$Q_{(A,90^\circ)}: B \rightarrow E$$

$$F \rightarrow C$$

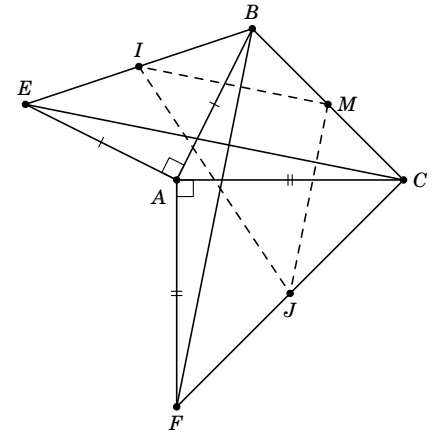
$$BF \rightarrow EC$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} BF = EC \\ (\widehat{BF, EC}) = 90^\circ. \end{cases}$$

Mà MI, MJ lần lượt là đường trung bình của $\triangle BEC, \triangle CBF$ nên

$$\begin{cases} MI = MJ \\ (\widehat{MI, MJ}) = 90^\circ. \end{cases}$$

Do đó $\triangle IMJ$ vuông cân tại M .



BÀI 9. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng theo thứ tự. Lấy các đoạn thẳng AB, BC làm cạnh, dựng các tam giác đều ABE và BCF nằm cùng về một phía so với đường thẳng AB . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AF và CE . Chứng minh tam giác BMN đều.

Lời giải.

Vì tam giác ABE và BCF là những tam giác đều nên ta có

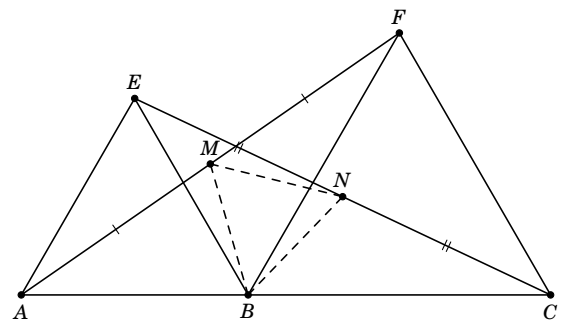
$$Q_{(B,60^\circ)}: A \rightarrow E$$

$$F \rightarrow C$$

$$AF \rightarrow EC$$

$$M \rightarrow N \text{ (Vì } M, N \text{ lần lượt là trung điểm của } AF, CE)$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} BM = BN \\ (\widehat{BM, BN}) = 60^\circ \end{cases} \text{ hay tam giác } BMN \text{ đều.}$$



BÀI 5. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1 (Phép đối xứng tâm). Cho điểm I . Phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M khác I thành điểm M' sao cho I là trung điểm đoạn thẳng MM' , được gọi là phép đối xứng tâm I , nghĩa là $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM'} = \vec{0}$. Phép đối xứng tâm I thường được kí hiệu là ff_I .

Nhận xét. (Biểu thức tọa độ) Trong mặt phẳng Oxy , cho $I(x_I; y_I)$, $M(x_M; y_M)$ và $M'(x_{M'}; y_{M'})$ là ảnh của M

qua phép đối xứng tâm I . Khi đó
$$\begin{cases} x_{M'} = 2x_I - x_M \\ y_{M'} = 2y_I - y_M. \end{cases}$$

Tính chất 1. Phép đối xứng tâm

- bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
- biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đã cho.
- biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng đoạn thẳng đã cho.
- biến một tam giác thành tam giác bằng tam giác đã cho.
- biến một đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

Định nghĩa 2 (Tâm đối xứng của một hình). Điểm I được gọi là tâm đối xứng của hình $\mathcal{H}$ nếu phép đối xứng tâm I biến hình $\mathcal{H}$ thành chính nó. Khi đó $\mathcal{H}$ được gọi là hình có tâm đối xứng.

BÀI 6. PHÉP VỊ TỰ VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 1 (Phép vị tự). Cho điểm O cố định và một số thực k không đổi, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O tỉ số k và kí hiệu là $V_{(O;k)}$ (O được gọi là tâm vị tự).

Định lý 1. Nếu phép vị tự tâm I tỉ số k biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|MN$.

Định lý 2. Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.

Hệ quả 1. Phép vị tự

- biến đường thẳng không qua tâm vị tự thành đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.
- biến đường thẳng qua tâm vị tự thành chính nó.
- biến tia thành tia.
- biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với $|k|$.
- biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$.
- biến góc bằng góc ban đầu.



- Qua phép vị tự $V_{(O;k)}$ đường thẳng d biến thành chính nó khi và chỉ khi đường thẳng d qua tâm vị tự O .
- Nếu $M' = V_{(I;k)}(M) \Leftrightarrow M = V_{(I;\frac{1}{k})}(M')$.

Định lý 3 (Ảnh của đường tròn qua phép vị tự). Phép vị tự tỉ số k biến một đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $R' = |k| \cdot R$.



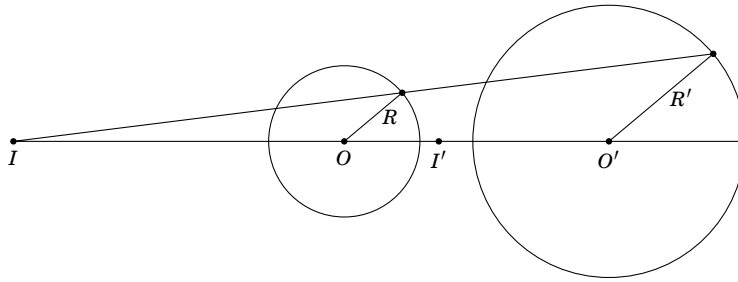
Nếu phép vị tự tâm O tỉ số k biến đường tròn $(I;R)$ thành đường tròn $(I';R')$ thì $|k| = \frac{R'}{R} \Leftrightarrow k = \pm \frac{R'}{R}$ và $\overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{OI}$.

Định nghĩa 2 (Tâm vị tự của hai đường tròn). Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia. Tâm của phép vị tự này được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn.

Nếu tỉ số vị tự $k > 0$ thì tâm vị tự đó được gọi là tâm vị tự ngoài, nếu tỉ số vị tự $k < 0$ thì tâm vị tự đó được gọi là tâm vị tự trong.

Nhận xét. (Cách xác định tâm vị tự)

- Nếu I là tâm vị tự ngoài, ta có $\overrightarrow{IO} = \frac{R}{R'} \cdot \overrightarrow{IO'}$.
- Nếu I là tâm vị tự trong, ta có $\overrightarrow{IO} = -\frac{R}{R'} \cdot \overrightarrow{IO'}$.



Định nghĩa 3 (Phép đồng dạng). Phép biến hình F được gọi là phép đồng dạng tỉ số k ($k > 0$) nếu với hai điểm bất kì M, N và ảnh M', N' tương ứng của chúng, ta luôn có $M'N' = k \cdot MN$. Mọi phép đồng dạng tỉ số k đều hợp thành của một phép vị tự tỉ số k và một phép dời hình D .

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

📁 DẠNG 6.1. Phép vị tự trong hệ tọa độ Oxy

Phương pháp giải: Dùng định nghĩa và tính chất của phép vị tự.

- $V_{(O,k)}(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$.
- *Phép vị tự $V_{(I,k)}$ biến*
- ① Đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
 - ② Đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|R$.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , xét phép vị tự tâm $O(0;0)$ sau

- ① Cho $A(1;-1)$, $B(2;3)$. Tìm $A' = V_{(O;k)}(A)$ và $B' = V_{(O;k)}(B)$ với $k = -3$.

ĐS: $A'(-3;3)$, $B'(-6;-9)$

- ② Cho $M'(3;-1)$ và $M' = V_{(O;k)}(M)$ với $k = 3$. Tìm tọa độ M .

ĐS: $M\left(1;-\frac{1}{3}\right)$

Lời giải.

$$\textcircled{1} A' = V_{(O;-3)}(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} = -3\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = -3x_A = -3 \\ y_{A'} = -3y_A = 3 \end{cases}. \text{ Vậy } A'(-3;3).$$

$$B' = V_{(O;-3)}(B) \Leftrightarrow \overrightarrow{OB'} = -3\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'} = -3x_B = -6 \\ y_{B'} = -3y_B = -9 \end{cases}. \text{ Vậy } B'(-6;-9).$$

$$\textcircled{2} M' = V_{(O;3)}(M) \Leftrightarrow M = V_{(O;\frac{1}{3})}(M') \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{1}{3}x_{M'} = 1 \\ y_M = \frac{1}{3}y_{M'} = -\frac{1}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } M\left(1;-\frac{1}{3}\right).$$

□

VÍ DỤ 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy tìm ảnh của đường thẳng (d) trong các trường hợp

- ① Cho $d: 2x - y + 3 = 0$. Tìm $d' = V_{(O;k)}(d)$ với $O(0;0)$ và $k = 2$.

ĐS: $d': 2x - y + 6 = 0$

- ② Cho $d: 3x + 2y - 6 = 0$. Tìm $d' = V_{(I;k)}(d)$ với $I(1;2)$ và $k = -2$.

ĐS: $d': 3x + 2y - 9 = 0$

③ Cho $d: 2x - 3y + 6 = 0$. Tìm $d' = V_{(I;k)}(d)$ với $I(2; -1)$ và $k = -2$.

ĐS: $d': 2x - 3y - 33 = 0$

Lời giải.

① $O \notin d$ do đó $d': 2x - y + c = 0$ ($c \neq 3$) là ảnh của d qua $V_{(O;2)}$. Lấy $A(0;3) \in d$. Gọi A' là ảnh của A qua $V_{(O;2)}$.

$$\text{Ta có } A' = V_{(O;2)}(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_A = 0 \\ y_{A'} = 2y_A = 6 \end{cases} \Leftrightarrow A'(0;6). \text{ Mà } A' \in d' \Rightarrow 2 \cdot 0 - 6 + c = 0 \Rightarrow c = 6.$$

$$\text{Vậy } d': 2x - y + 6 = 0.$$

② $I \notin d$ do đó $d': 3x + 2y + c = 0$ ($c \neq -6$) là ảnh của d qua $V_{(I;-2)}$. Lấy $A(0;3) \in d$. Gọi A' là ảnh của A qua $V_{(I;-2)}$.

$$\text{Ta có } A' = V_{(I;-2)}(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{IA'} = -2\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = -2x_A + 3x_I = 3 \\ y_{A'} = -2y_A + 3y_I = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A'(3;0). \text{ Mà } A' \in d' \Rightarrow 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = -9.$$

$$\text{Vậy } d': 3x + 2y - 9 = 0.$$

③ $I \notin d$ do đó $d': 2x - 3y + c = 0$ ($c \neq 6$) là ảnh của d qua $V_{(I;-2)}$. Lấy $A(0;2) \in d$. Gọi A' là ảnh của A qua $V_{(I;-2)}$.

$$\text{Ta có } A' = V_{(I;-2)}(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{IA'} = -2\overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = -2x_A + 3x_I = 6 \\ y_{A'} = -2y_A + 3y_I = -7 \end{cases} \Leftrightarrow A'(6;-7). \text{ Mà } A' \in d' \Rightarrow 2 \cdot 6 - 3 \cdot (-7) + c = 0 \Rightarrow c = -33.$$

$$\text{Vậy } d': 2x - 3y - 33 = 0.$$

□

VÍ DỤ 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy tìm ảnh của đường tròn (C) trong các trường hợp

① Cho $(C): (x+1)^2 + (y-3)^2 = 2$. Tìm $(C') = V_{(O;k)}((C))$ với $O(0;0)$ và $k = 3$. **ĐS:** $(C'): (x+3)^2 + (y-9)^2 = 18$

② Cho $(C): (x-3)^2 + (y+1)^2 = 9$. Tìm $(C') = V_{(M;k)}((C))$ với $M(1;2)$ và $k = -2$. **ĐS:** $(C'): (x+3)^2 + (y-8)^2 = 36$

③ Cho $(C): x^2 + (y-1)^2 = 1$. Tìm $(C') = V_{(M;k)}((C))$ với $M(2;1)$ và $k = 3$. **ĐS:** $(C'): (x+4)^2 + (y-1)^2 = 9$

Lời giải.

① Đường tròn có tâm $I(-1;3)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Vì $(C') = V_{(O;3)}((C))$ nên $I' = V_{(O;3)}(I)$ là tâm và $R' = 3R = 3\sqrt{2}$ của là bán kính của (C') .

$$I' = V_{(O;3)}(I) \Leftrightarrow \overrightarrow{OI'} = 3\overrightarrow{OI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I'} = 3x_I = -3 \\ y_{I'} = 3y_I = 9 \end{cases} \Leftrightarrow I'(-3;9). \text{ Vậy } (C'): (x+3)^2 + (y-9)^2 = 18.$$

② Đường tròn có tâm $I(3;-1)$ và bán kính $R = 3$.

Vì $(C') = V_{(M;-2)}((C))$ nên $I' = V_{(M;-2)}(I)$ là tâm và $R' = 2R = 6$ của là bán kính của (C') .

$$I' = V_{(M;-2)}(I) \Leftrightarrow \overrightarrow{MI'} = -2\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I'} = -2x_I + 3x_M = -3 \\ y_{I'} = -2y_I + 3y_M = 8 \end{cases} \Leftrightarrow I'(-3;8). \text{ Vậy } (C'): (x+3)^2 + (y-8)^2 = 36.$$

③ Đường tròn có tâm $I(0;1)$ và bán kính $R = 1$.

Vì $(C') = V_{(M;3)}((C))$ nên $I' = V_{(M;3)}(I)$ là tâm và $R' = 3R = 3$ của là bán kính của (C') .

$$I' = V_{(M;3)}(I) \Leftrightarrow \overrightarrow{MI'} = 3\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I'} = 3x_I - 2x_M = -4 \\ y_{I'} = 3y_I - 2y_M = 1 \end{cases} \Leftrightarrow I'(-4;1). \text{ Vậy } (C'): (x+4)^2 + (y-1)^2 = 9.$$

□

VÍ DỤ 4. Cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$. Gọi f là phép biến hình có được bằng cách thực hiện phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$; rồi đến phép vị tự tâm $M\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ với tỉ số $k = 2$. Viết phương trình đường tròn

(C') qua phép biến hình f . **ĐS:** $(C'): \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{20}{3}\right)^2 = 16$

Lời giải.

Đường tròn có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R = 2$.

Gọi $(C'') = T_{\vec{v}}((C))$. Do đó, $I'' = T_{\vec{v}}(I)$ là tâm và $R'' = R = 2$ của là bán kính của (C'') .

$$I'' = T_{\vec{v}}(I) \Leftrightarrow \overrightarrow{II''} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I''} = x_I + x_{\vec{v}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ y_{I''} = y_I + y_{\vec{v}} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow I''\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right). \text{ Vì } (C') = V_{(M;2)}((C'')) \text{ nên } I' = V_{(M;2)}(I'') \text{ là tâm và } R' =$$

$2R'' = 4$ là bán kính của (C') .

$$I' = V_{(M;2)}(I'') \Leftrightarrow \overrightarrow{MI'} = 2\overrightarrow{MI''} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{I'} = 2x_{I''} - x_M = \frac{5}{3} \\ y_{I'} = 2y_{I''} - y_M = \frac{20}{3} \end{cases} \Leftrightarrow I'\left(\frac{5}{3}; \frac{20}{3}\right). \text{ Vậy } (C'): \left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{20}{3}\right)^2 = 16.$$

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $B(4; -2)$, đường thẳng $d: x - y + 2 = 0$ và đường tròn $(C): (x+2)^2 + (y+5)^2 = 9$.

- ① Tìm tọa độ điểm B_1 là ảnh của B qua phép quay tâm O , góc quay 90° và điểm B_2 , biết B là ảnh của B_2 qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (1; -3)$. **ĐS:** $B_1(2; 4), B_2(3; 1)$
- ② Viết phương trình (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm O , tỉ số -3 . **ĐS:** $(C'): (x-6)^2 + (y-15)^2 = 81$
- ③ Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm O , tỉ số $k = 2$. **ĐS:** $d': x - y + 4 = 0$

Lời giải.

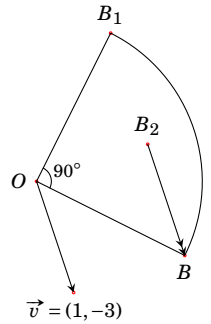
①

$B_1(x; y)$ là ảnh của $B(4; -2)$ qua phép quay tâm O , góc quay 90° nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB_1} = 0 \\ OB = OB_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \end{cases}. \text{ Góc quay theo chiều dương nên } B_1(2; 4).$$

 $B(4; -2)$ là ảnh của $B_2(m; n)$ qua phép tịnh tiến theo véc-tơ $\vec{v} = (1; -3)$ nên

$$\overrightarrow{B_2B} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m = 1 \\ -2 - n = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 1 \end{cases}. \text{ Vậy } B_2(3; 1).$$



- ② (C) có tâm $I(-2; -5)$ và bán kính $R = 3$. (C') có tâm $I'(x; y)$ và bán kính R' .
 (C') là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm O , tỉ số -3 nên $R' = 3R = 9$ và $\overrightarrow{OI'} = -3\overrightarrow{OI} \Rightarrow x = 6; y = 15$.
 Vậy $(C'): (x-6)^2 + (y-15)^2 = 81$.
- ③ d' là ảnh của d qua phép vị tự tâm O , tỉ số $k = 2$.
 $M(x; x+2) \in d$, qua phép vị tự tâm O , tỉ số $k = 2$ biến M thành M' với $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM}$ do đó $M'(2x; 2x+4) \in d'$.
 Vậy $d': x - y + 4 = 0$.

□

BÀI 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 3x - 4y - 8 = 0$ và đường tròn có phương trình $(C): x^2 + y^2 - 18x + 4y + 36 = 0$

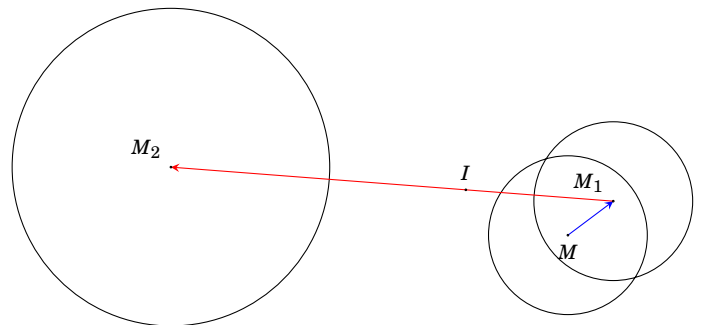
- ① Tìm ảnh của d qua phép quay tâm O , góc quay 90° . **ĐS:** $d': 4x + 3y - 8 = 0$
- ② Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (4; 3)$ và phép vị tự tâm $I(0; 2), k = -2$. **ĐS:** $(C_2): (x+26)^2 + (y-4)^2 = 14^2$

Lời giải.

- ① Phép quay tâm O , góc quay 90° biến $N(x; y)$ thành $N'(-y; x)$.
 Ảnh của d qua phép quay tâm O , góc quay 90° là đường thẳng d' .
 Có $M\left(x; \frac{1}{4}(3x-8)\right) \in d: 3x - 4y - 8 = 0$, qua phép quay tâm O , góc quay 90° biến M thành $M'\left(-\frac{1}{4}(3x-8); x\right) \in d'$.
 Vậy $d': 4x + 3y - 8 = 0$

②

Đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 18x + 4y + 36 = 0$ có tâm $M(9; -2)$ và bán kính $R = 7$.
 Phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (4; 3)$ biến (C) thành (C_1) có tâm $M_1(13; 1)$ và bán kính $R_1 = R = 7$. Nên $(C_1): (x-13)^2 + (y-1)^2 = 49$.
 Phép vị tự tâm $I(0; 2), k = -2$ biến (C_1) thành đường tròn (C_2) có tâm M_2 và bán kính R_2 với $\overrightarrow{IM_2} = -2\overrightarrow{IM_1}$, $R_2 = 2R_1$. Nên $M_2(-26; 4)$, $R_2 = 14$.
 Vậy $(C_2): (x+26)^2 + (y-4)^2 = 14^2$.



□

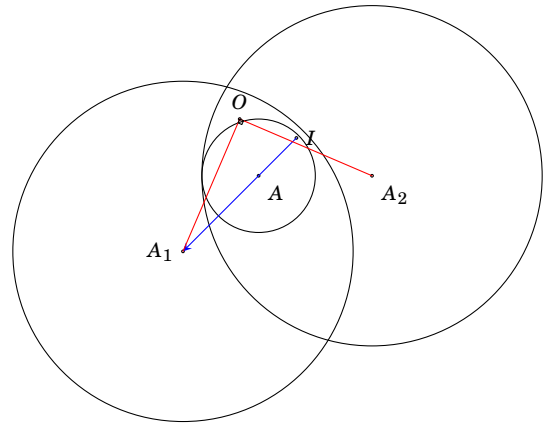
BÀI 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $B(-2; 3)$, $I(3; -1)$, đường thẳng $d: 2x + y - 1 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 6y - 1 = 0$.

- ① Tìm ảnh của điểm B qua phép quay tâm O , góc quay 90° và phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (-1; 2)$. **ĐS:** $B_2(-4; 0)$
- ② Tìm ảnh của đường thẳng d qua phép vị tự tâm O , tỉ số -2 . **ĐS:** $d': 2x + y + 2 = 0$
- ③ Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm I , tỉ số 3 và phép quay tâm O , góc quay 90° . **ĐS:** $(C_2): (x - 7)^2 + (y + 3)^2 = 81$

Lời giải.

- ① Phép quay tâm O , góc quay 90° biến $B(-2; 3)$ thành $B_1(-3; -2)$.
Phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (-1; 2)$ biến $B_1(-3; -2)$ thành $B_2(-4; 0)$.
- ② Phép vị tự tâm O , tỉ số -2 biến đường thẳng d thành đường thẳng d' .
Phép vị tự tâm O , tỉ số -2 biến $M(x; -2x + 1) \in d$ thành M' với $\overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM}$ nên $M'(-2x; 4x - 2) \in d'$.
Vậy $d': 2x + y + 2 = 0$.

- ③ Đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 6y - 1 = 0$ có tâm $A(1; -3)$ và bán kính $R = \sqrt{11}$.
Phép vị tự tâm I , tỉ số 3 biến (C) thành (C_1) có tâm A_1 và bán kính R_1 với $\overrightarrow{IA_1} = 3\overrightarrow{IA}$, $R_1 = 3R$. Nên $A_1(-3; -7)$, $R_1 = 3\sqrt{11}$. Vậy $(C_1): (x + 3)^2 + (y + 7)^2 = 99$.
Phép quay tâm O , góc quay 90° biến $A_1(-3; -7)$ thành $A_2(7; -3)$ và biến (C_1) thành đường tròn (C_2) có tâm $A_2(7; -3)$ và bán kính $R_2 = R_1 = 3\sqrt{11}$. Vậy $(C_2): (x - 7)^2 + (y + 3)^2 = 99$



□

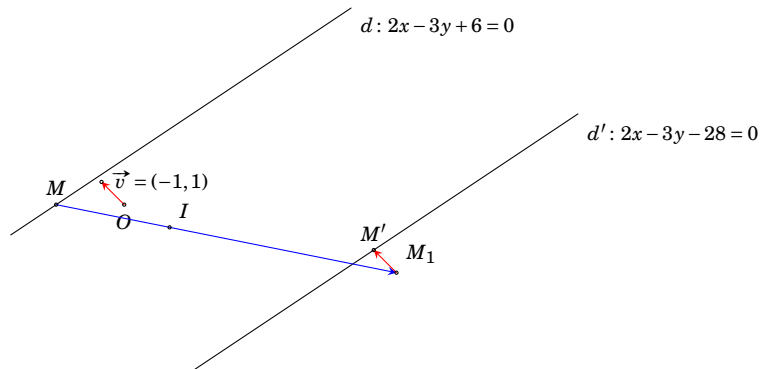
BÀI 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $d: 2x - 3y + 6 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(2; -1)$ tỉ số vị tự $k = -2$ và phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (-1; 1)$. **ĐS:** $d': 2x - 3y - 28 = 0$

Lời giải.

Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm $I(2; -1)$ tỉ số vị tự $k = -2$ và phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (-1; 1)$ biến đường thẳng $d: 2x - 3y + 6 = 0$ thành $d': 2x - 3y + m = 0$ (d' và d song song hoặc trùng nhau).

Phép vị tự tâm $I(2; -1)$ tỉ số vị tự $k = -2$ biến điểm $M(-3; 0) \in d$ thành M_1 với $\overrightarrow{IM_1} = -2\overrightarrow{IM}$ nên $M_1(12; -3)$.

Phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (-1; 1)$ biến $M_1(12; -3)$ thành $M'(11; -2) \in d': 2x - 3y + m = 0$ do đó $m = -28$.
Vậy $d': 2x - 3y - 28 = 0$.



□

BÀI 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai parabol $(P_1): y = ax^2$ và $(P_2): y = bx^2$ (với $a \neq b$). Chứng minh rằng có một phép vị tự biến parabol này thành parabol kia. **ĐS:** $V_{(0; \frac{a}{b})}$

Lời giải.

Giả sử $M(m; am^2) \in (P_1)$, với $m \neq 0$. Đường thẳng OM có phương trình $y = amx$.

Khi đó đường thẳng OM cắt (P_2) tại hai điểm $O(0; 0)$ và $N(\frac{am}{b}; \frac{a^2m^2}{b})$.

Đặt $k = \frac{a}{b}$ ta được $\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OM}$.

Do đó phép vị tự tâm O , tỉ số $k = \frac{a}{b}$ biến (P_1) thành (P_2) .

□

BÀI 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2; 1)$ và $B(8; 4)$. Tìm tọa độ tâm vị tự của hai đường tròn $(A; 2)$ và $(B; 4)$. **ĐS:** $I(-4; -2)$ và $I'(4; 2)$

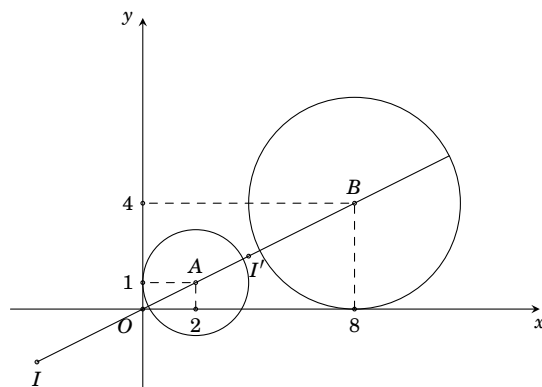
Lời giải.

Gọi $I(x; y)$, $I'(x'; y')$ lần lượt là tâm vị tự ngoài và tâm vị tự trong của hai đường tròn $(A; 2)$ và $(B; 4)$. Ta có

$$\textcircled{1} \quad \overrightarrow{IA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = \frac{1}{2}(8 - x) \\ 1 - y = \frac{1}{2}(4 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2. \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad \overrightarrow{I'A} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{I'B} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x' = -\frac{1}{2}(8 - x') \\ 1 - y' = -\frac{1}{2}(4 - y') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 4 \\ y' = 2. \end{cases}$$

Vậy có hai tâm vị tự thỏa mãn bài toán là $I(-4; -2)$ và $I'(4; 2)$.



□

